

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA



Trabajo Fin de Grado

**Simulación mediante analogía eléctrica de sistemas
caóticos
(Osciladores no lineales)**

AUTOR: David Campoy Paredes
DIRECTOR: Francisco Alhama Lopez

Julio / 2013

Índice

1.- INTRODUCCIÓN.....	3
1.1.- OBJETIVOS.....	3
1.2.- HISTORIA DEL CAOS	4
1.3.- LOS OBSTÁCULOS A LA PREDICCIÓN.....	5
2.- ANALOGIA ELÉCTRICA DE UN SISTEMA.....	8
2.1.- FUNDAMENTOS DEL MÉTODO.....	8
2.2.- EL SOFTWARE <i>PSpice</i>	11
2.3.- SIMULACIÓN DEL CIRCUITO	12
3.- SISTEMAS CAÓTICOS. CARACTERÍSTICAS Y TIPOS.....	14
3.1.- GRÁFICAS TEMPORALES.....	15
3.2.- SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES	16
3.3.- REPRESENTANDO ATRACTORES POR ORBITALES EN ALTA RESOLUCIÓN.....	17
3.4.- TIPOS DE OSCILADORES Y ATRACTORES	19
3.5.- ATRACTORES EXTRAÑOS O CAÓTICOS.....	36
4.- APLICACIONES.....	47
4.1.- OSCILADOR NO ARMÓNICO.....	48
4.2.- OSCILADOR AMORTIGUADO	51
4.3.- ATRACTOR DE LORENZ.....	56
4.4.- ATRACTOR DE RÖSSLER	72
5.- CONCLUSIONES	89
6.- BIBLIOGRAFÍA.....	90

1.- INTRODUCCIÓN

1.1.- OBJETIVOS

Todo sistema se puede representar por ecuaciones matemáticas y responde a unas leyes definidas (conocidas unas, desconocidas otras). Uno de nuestros principales objetivos será presentar algunos sistemas que aparentemente no se ajustan a esas leyes o que, aún ajustándose a ellas, a veces tienen comportamientos totalmente inesperados e imprevisibles. Ahí está una de las dificultades de este estudio, intentar explicar sistemas en los que, dependiendo de los valores de algunos parámetros que los representan, a veces el comportamiento es el esperado y otras, totalmente al contrario.

Uno de los pasos previos será intentar plantear un modelo que nos permita representar con un ordenador al sistema que estudiamos para, más adelante, ser capaces de simular situaciones en función de los valores de los parámetros.

Por lo tanto, después de una introducción en la que explicaremos las bases que sostendrán todo el estudio posterior, nos centraremos en algunos casos concretos como son el atractor de Lorenz, el atractor de Rössler y distintos tipos de osciladores. Intentaremos demostrar que existen, qué valores los describen, cuál es su representación gráfica y de qué depende que esos sistemas sean o no caóticos, así como su respuesta a muy variadas condiciones de contorno.

Síntesis de los objetivos:

- i) presentar la teoría de oscilaciones caóticas y no caóticas,
- ii) describir el método de analogía eléctrica utilizado para la implementación de modelos,
- iii) diseñar los modelos eléctricos de osciladores básicos y otros más complejos,
- iv) Simular los modelos en Pspice y describir los resultados,
- v) Demostrar que el equivalente eléctrico utilizado para la implementación de modelos de cualquier tipo de osciladores es fiel a los estudios realizados previamente.

1.2.- HISTORIA DEL CAOS

En la década de 1970 se fue consolidando una incipiente ciencia, el Caos, cuyos primeros balbuceos datan del año 1963, cuando Edward Lorenz, meteorólogo del M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology) diera a conocer un curioso modelo climático que posteriormente fascinaría a muchos físicos por su extraño comportamiento.

No obstante, las raíces profundas del Caos, son anteriores a aquella fecha, como así lo prueba el que hayan sido desenterrados del olvido importantes trabajos matemáticos, como los de Poincare, Liapounov o Julia. Más temprano aún, partiendo del determinismo laplaciano y de las ansias por conocer que siempre ha tenido el ser humano. Laplace escribió lo siguiente:

Una inteligencia que en un momento determinado conociera todas las fuerzas que animan a la naturaleza, así como la situación respectiva de los seres que la componen, si además fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis tales datos, abarcaría en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más ligero; nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos. El espíritu humano ofrece, en la perfección que ha sabido dar a la astronomía, un débil esbozo de esta inteligencia.

Ésta es la esencia del determinismo laplaciano. Se puede predecir con total certeza el futuro si se cumplen tres premisas:

- 1) Se conocen las leyes («conociera todas las fuerzas») que gobiernan los fenómenos estudiados. Será tarea de la ciencia correspondiente (física, economía, ecología, etc.) hallar esas leyes, que darán el sistema dinámico (por ejemplo, un sistema de ecuaciones diferenciales, ordinarias o en derivadas parciales) que describa la evolución del sistema.
- 2) Se conocen las condiciones iniciales («la situación respectiva. . .»). Como asegura el correspondiente teorema de existencia y unicidad, para cada conjunto completo de condiciones iniciales existe una única solución, es decir, un futuro bien determinado. Pero esta existencia en principio de la solución, aun teniendo carácter fundamental, no es suficiente a efectos prácticos, como veremos enseguida.
- 3) Se es capaz de calcular la solución («si además fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis tales datos») de forma exacta o aproximada, por métodos analíticos o numéricos (hoy día, casi siempre, usando un algoritmo numérico en un ordenador).

1.3.- LOS OBSTÁCULOS A LA PREDICCIÓN

Es fácil convencerse de que, aun admitiendo que la naturaleza o los fenómenos que estudiamos obedezcan en el fondo a leyes perfectamente deterministas, en la práctica pueden aparecer obstáculos de diversa índole que dificulten seriamente (o arruinen por completo) la predicción de la evolución futura.

Empezando por el final, ¿podemos esperar ser siempre capaces de calcular la solución de nuestro sistema dinámico, aunque sea de forma numérica, por muy rápidos que sean nuestros ordenadores y muy eficaces nuestros códigos numéricos? Hay que recordar que muchos sistemas físicos son extraordinariamente complejos, con un número de componentes tan elevado — el número de Avogadro que mide el número de átomos o moléculas en un mol de cualquier sustancia es $NA = 6.02 \times 10^{23}$ — que hace ilusoria la esperanza de calcular la posición de todas las moléculas de un litro de un gas, aun si simplificáramos el modelo matemático. Sabemos que en estos casos renunciamos, desde el principio, a tan detallado conocimiento y nos conformamos con el estudio de algunas magnitudes colectivas (por ejemplo, la temperatura en los distintos puntos de una barra) que describen alguna propiedades interesantes (la energía media de las partículas de la barra) y cuya evolución puede ser determinista (gracias al teorema de existencia y unicidad para la ecuación del calor). Acudimos para ello a ramas de la física como la termodinámica o la más fundamental física estadística, que a su vez tendrá que usar herramientas matemáticas como el cálculo de probabilidades.

La primera hipótesis del determinismo laplaciano era el conocimiento de las leyes que rigen los fenómenos sometidos a estudio. Dejando de lado el hecho de que nuestro conocimiento de las leyes naturales suele ser limitado, a veces esas mismas leyes imponen límites a la capacidad de predicción. El caso más conocido es la interpretación probabilística de la mecánica cuántica y el principio de incertidumbre de Heisenberg: *en el mundo microscópico la física no nos permite predecir dónde estará una partícula, sino tan sólo la probabilidad de encontrarla en un punto; ni siquiera pueden medirse simultáneamente con toda precisión la posición y velocidad de la partícula.*

En el mundo macroscópico, en la mecánica de fluidos, existe un fenómeno cuya comprensión sigue siendo limitada: la turbulencia. Puesto que la ecuación de evolución de los fluidos es conocida, una posible explicación de la dificultad sería que se trata de un sistema muy complicado, con un número infinito de grados de libertad.

Sin embargo, desde hace tres o cuatro décadas, científicos de muy distintas especialidades han ido convenciéndose de que no hace falta un número grande de grados de libertad para tener comportamientos complicados.

Recordemos lo que pasa con los dados: aun siendo un sistema relativamente sencillo cuya evolución es descrita por la mecánica clásica, suelen ser aceptados como generadores de azar. Pero hay otro ejemplo, que ya preocupaba a Newton: el movimiento de la Luna y su generalización conocida con el nombre de problema de tres cuerpos. De hecho, fue estudiando este problema como Henri Poincaré — en el ensayo que ganó el concurso convocado en 1889 por Oscar II rey de Suecia y Noruega — entrevió por

primera vez algunos de los aspectos de lo que ahora se conoce con el nombre de caos determinista.

Sin embargo este trabajo (y otros de diversos matemáticos y algún que otro astrónomo) tuvieron inicialmente una influencia muy limitada, quizá porque la ausencia de ordenadores impidió visualizar algunos de los efectos prácticos de este tipo de fenómenos. Hubo que esperar a los años 60 y 70 para que meteorólogos (Lorenz y el «efecto mariposa»), matemáticos (Ruelle y Takens), físicos (Feigenbaum) y biólogos (May) dieran un gran impulso al estudio del comportamiento caótico de sistemas sencillos e hicieran notar a la comunidad científica la importancia y ubicuidad del fenómeno, que a menudo está asociado a la imposibilidad práctica de cumplir con perfecta exactitud la segunda hipótesis del paradigma laplaciano. En efecto, como veremos luego, los inevitables errores en la determinación de las condiciones iniciales son ampliados de forma exponencial por muchos sistemas dinámicos no lineales, de forma que la validez de la predicción queda severamente limitada. El obstáculo a la predicción procede así de la conjunción entre una realidad práctica (la precisión finita de toda medida) y la estructura matemática de la ecuación de evolución.

Algunos años más tarde el Caos se ha convertido en el nombre conciso de una teoría que constituye una verdadera eclosión en el ámbito científico. Son frecuentes los congresos y publicaciones internacionales sobre él. En EE.UU. los administradores de programas de investigación en el Ejército, la C.I.A. y el Ministerio de Energía han dedicado presupuestos cada vez más cuantiosos al estudio del Caos.

Determinismo y aleatoriedad, que siempre han sido dos conceptos tradicionalmente irreconciliables en la Historia de la Filosofía, que hoy, para un extenso ámbito de fenómenos, el Caos intenta fusionar y acuñar en una sola moneda.

Volviendo a hacer un breve repaso histórico del desarrollo de la ciencia desde Newton hasta Heisenberg, encontramos ya el precedente de que dos conceptos, en apariencia, mutuamente excluyentes, como partícula y onda, se abrazan en el seno de una teoría más general, como la Mecánica Cuántica.

Tal vez no sea exagerado que algunos afirmen que, junto con la Relatividad y la Mecánica Cuántica, el Caos es la tercera y última gran teoría del siglo XX. Otros no dudan en afirmar que determinismo e indeterminismo son sólo las dos caras de una misma moneda.

A veces se ha definido el Caos como la ciencia de la totalidad, pues, frente al reduccionismo de las ciencias puras y la súper especialización de las ciencias aplicadas, el Caos opone su espíritu integrador y universalista. Toda una dispar variedad de campos del saber humano han sido transcendidos ya por la Teoría del Caos y probablemente lo serán otros muchos en el futuro. No se libran de su influjo campos tan diversos como la Ingeniería, la Medicina, la Biología o la Economía.

Desde el punto de vista de la Ingeniería y, en general, de las ciencias aplicadas la teoría del Caos ha de ser entendida como una nueva herramienta de análisis que permite al

técnico afrontar problemas hasta ahora inabordables o difícilmente analizables por la Estadística.

Sin duda, en la vida profesional de todo ingeniero, se habrán presentado alguna vez problemas que conlleven preguntas imposibles de responder.

Cuando un material se rompe ¿qué leyes rigen la propagación de la fractura a través del material?

Cuando en una gran empresa surgen averías en las máquinas, no suelen presentarse aisladas y su distribución temporal a duras penas se puede encerrar en un diagrama estadístico de dispersión aceptable ¿realmente son fruto del azar o responden a alguna ley?

Cuando en una cadena de montaje de un producto con un complejo proceso de fabricación surge una serie defectuosa que burla todo control de calidad y sale al mercado ¿Podría haberse previsto a tiempo semejante desastre?

He ahí algunas de las cuestiones que sólo el Caos puede aspirar a responder.

El Caos es una teoría del "proceso" más que del "estado", del "devenir" más que del "ser". Se trata de estudiar el peculiar comportamiento de ciertos sistemas dinámicos, bien entendido que este concepto (el de sistema dinámico) trasciende el marco de la Física en el que normalmente se encuadra.

Dentro de la Teoría del Caos, sistema dinámico puede ser:

- Para un economista, la "Bolsa".
- Para un médico, el corazón humano.
- Para un ingeniero, una compleja red de distribución eléctrica.

Un concepto fundamental de esta teoría es el de "*atractor*", que aparece al representar la evolución del sistema dinámico en el denominado *espacio de fases*. Este tipo de representación era conocida desde hace tiempo. Ya el matemático H. Poincaré la utilizó para representar "puntos fijos" y "ciclos límite", como soluciones permanentes de ciertas ecuaciones diferenciales correspondientes a ciertos sistemas dinámicos.

Tanto los puntos fijos como los ciclos límite son atractores, pero la dinámica caótica se caracteriza por un tercer tipo de atractor, que F. Takens y D. Ruelle en 1971 bautizaron con el sugerente nombre de "*atractor extraño*", cuya peculiaridad es el poseer una dimensión fractal, concepto éste, que aclaramos en el apartado 4.1.

2.- ANALOGIA ELÉCTRICA DE UN SISTEMA

2.1.- FUNDAMENTOS DEL MÉTODO

2.1.1.- Mallas auxiliares

Antes de describir el diseño del circuito principal de la red para un problema dado, primero vamos a ver el diseño de las redes auxiliares que implementan los términos derivados de cualquier orden y grado alguno. Pspice, o cualquier otro código para la simulación de circuitos, contiene un conjunto de fuentes controladas ideales capaces de asumir cualquier tipo de no linealidad, las cuales, convenientemente conectado con los condensadores, proporciona N los circuitos auxiliares para poner en práctica cualquiera de los términos derivados.

Se pueden utilizar cuatro fuentes diferentes (véase Figura 1): A es una fuente de tensión cuya salida está definida (por programación) como una función arbitraria de la tensión en cualquier nodo (o tensiones de los nodos) de la red, mientras que C es una fuente de tensión cuya salida es proporcional a la corriente de una fuente de voltaje independiente del tiempo. Las otras dos fuentes de corriente, B y D, tienen un significado similar pero siendo fuentes de corriente.

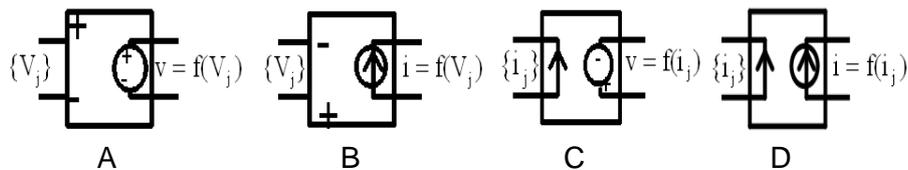


Figura 1. Fuentes controladas:
 A: fuente de tensión controlado por voltaje.
 B: fuente de corriente controlado por voltaje.
 C: fuente de tensión controlado por corriente.
 D: fuente de corriente controlada por corriente.

Ahora, si llamamos V_j a la tensión en el nodo j , de la red auxiliar de la Figura 2 (a) formado por un condensador (capacidad de $C_a = a_1$) y una fuente de tensión controlada por voltaje E1 (cuya tensión de salida es $V_{E1} = V_j$, el mismo que el voltaje de entrada) es capaz de proporcionar el valor de $A_1 (dV_j / dt)$, ya que la corriente a través de C_a se define como $I_{Ca} = C_a (dV_j / dt) = a_1 (dV_j / dt)$. Una nueva malla auxiliar, formada por la fuente de tensión controlada por corriente H1 y la resistencia R1 (de la resistencia a_1), proporciona la primera derivada de V_j .

La salida de H1 es una tensión cuyo valor es la corriente de entrada $I_{Vzero,a}$, es decir, la corriente del amperímetro $V_{zero,a}$, que, a su vez, es la corriente del condensador C_a y, en consecuencia, la tensión a través de R1 es $(1/a_1) a_1 (dV_j / dt) = dV_j / dt$, la primera función derivada de V_j . La resistencia $R_{\infty,1}$ se incluye para satisfacer los criterios de continuidad requerida por Pspice. Además, el uso de V_{zero} como amperímetro es prescrita por los requisitos de Pspice: la corriente de entrada de las fuentes de control de tipo C se debe especificar como una corriente que viene de una fuente de tensión constante.

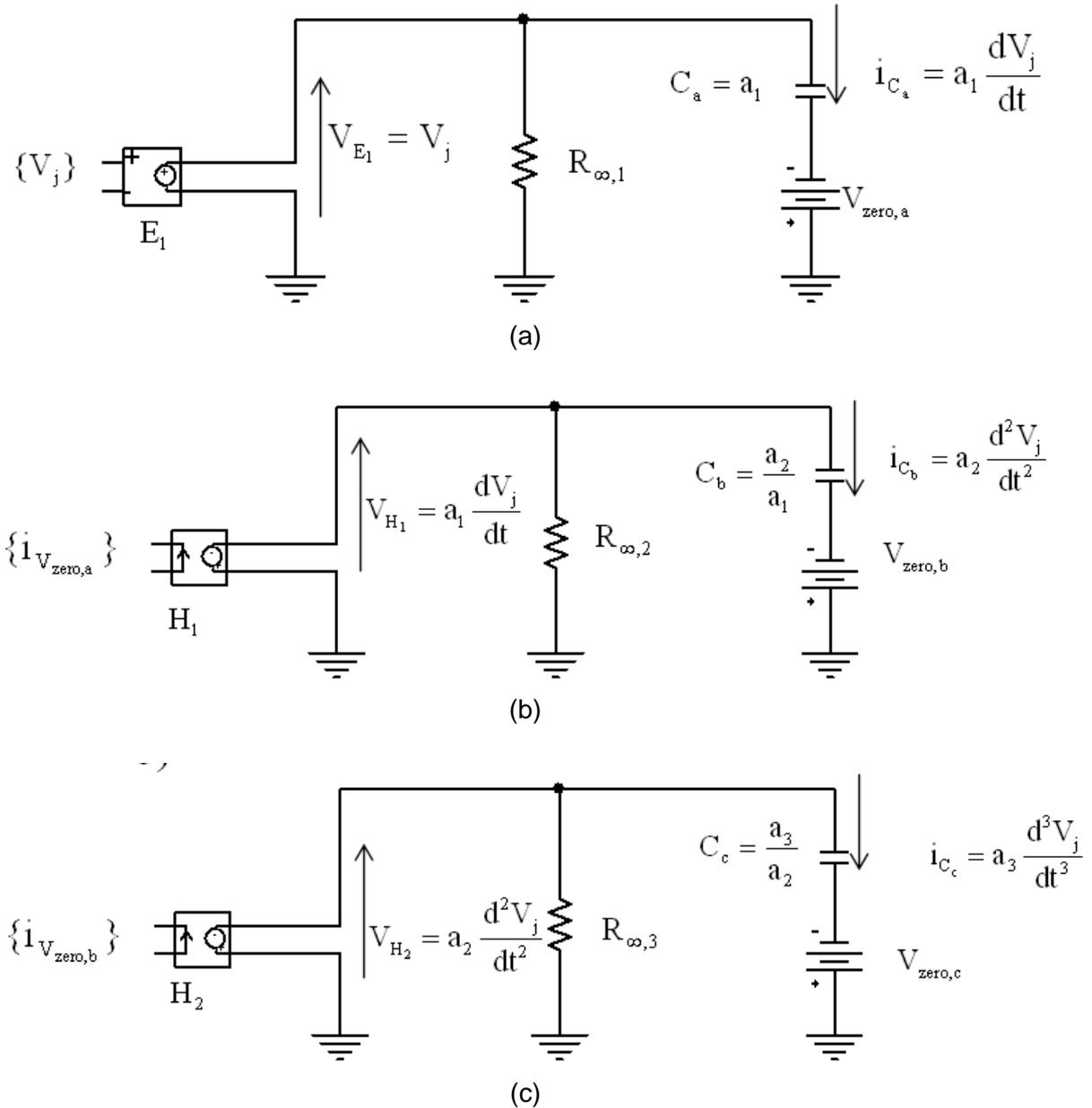


Figura 2. Mallas auxiliares para aplicar la primera derivada (a), la segunda derivada (b) y la tercera derivada (c)

De la misma manera, la segunda derivada de V_j , $a_2 (d^2V_j/dt^2)$, es proporcionado por la red auxiliar de la Figura 2 (b). La salida de la fuente de voltaje controlado por corriente H_2 , $V_{H_2} = I_{V_{zero,a}} = a_1 (dV_j / dt)$, define la corriente a través del condensador C_b (de capacitancia a_2/a_1) como $I_{C_b} = C_b (a_1 d^2V_j/dt^2) = a_2 (d^2V_j/dt^2)$. Además, H_2 y R_2 (de la resistencia a_2/a_1) proporcionan la segunda derivada de V_j . Los términos derivados siguientes se aplican de la misma manera.

2.1.2.- Malla principal

La red principal está formada por tantas ramas en paralelo como los términos de las ecuaciones diferenciales. Cada rama, a su vez, conduce una corriente que viene dentro o fuera del nodo común, de acuerdo con el signo del término de la ecuación. El término relacionado con el término derivado del primero, si existe, se lleva a cabo por un condensador, mientras que el resto de los términos derivados son implementados por fuentes de corriente controladas por voltaje que leen de las fuentes de sus respectivos circuitos auxiliares.

Cuando el término derivado tiene un grado diferente de la unidad (un número real), es posible definir mediante programación la corriente de salida que proporciona la fuente. El resto de los términos de la ecuación diferencial, también se aplican por fuentes de corriente controladas por voltaje definidas, también, mediante la programación de sus corrientes de salida.

Cualquier tipo de no linealidad es definida por software. Finalmente, el término independiente no es más que implementar una fuente constante. Una resistencia de valor muy alto que no influye en la solución también se encuentra en paralelo en el circuito principal para satisfacer los requisitos de continuidad impuesta por Pspice.

Sea cual sea las condiciones iniciales, se implementan en el modelo, dando tensiones iniciales en los condensadores. La solución $y(t)$ se lee en el único nodo del circuito principal (como consecuencia del equilibrio entre las corrientes de las ramas, la ley de Kirchhoff) cuando la ecuación diferencial contiene el término dy / dt , o en un nodo del circuito auxiliar cuando el término no existe. A modo de ejemplo, la Figura 3 se muestra el modelo de red de la siguiente ecuación no lineal:

$$y'' + 0.1y' + 20\sin(y) = 0$$

bajo las condiciones iniciales: $t=0$, $y=3$, $y'=5$

La red principal contiene tres ramas de acuerdo con los tres términos de la ecuación. La tensión en el nodo común (nodo 'A') es la solución $y(t)$ de la ecuación. La primera rama, con un condensador de capacidad $C_1 = 0,1$, las unidades de la corriente $C_1 (dy / dt) = 0.1y'$. Esta corriente, que se llama I_{Vzero} medida en el amperímetro $V_{zero,a}$, la fuente de tensión controlada por corriente H1 cuya salida es una tensión de valor $0.1y'$, lo que lleva a la corriente en el condensador C_2 (de capacitancia $C_2 = 10$) para tener el valor de $C_b (d(0.1y) / dt) = y''$. Esta corriente se convierte en una tensión con el mismo valor en el nodo C del circuito auxiliar formado por H2 y la resistencia R1 de la unidad de valor.

Ahora, estamos listos para el diseño del circuito principal, una de las ramas de los cuales (formado por C_1 y $V_{zero, a}$) ya se ha definido. La segunda rama, la fuente de corriente G1 controlada por la tensión $V_c = V(R1)$, unidades de la corriente $I_{G1} = y''$, mientras que la tercera rama, una fuente de corriente controlada por la tensión $V_A = y$, conduce la corriente $y_{G2} = 10\sin(y)$. La condición inicial es implementada por una tensión inicial de 3 V en C_1 y de 5V en C_2 .

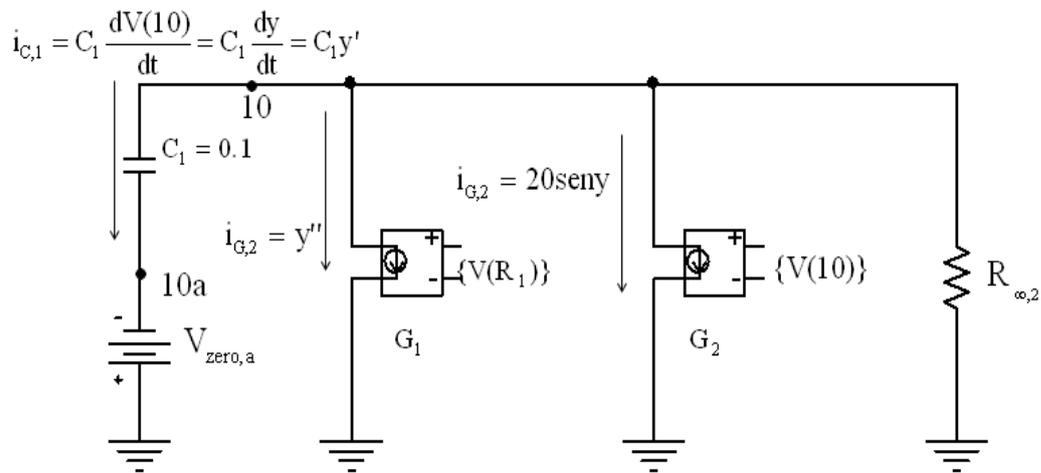
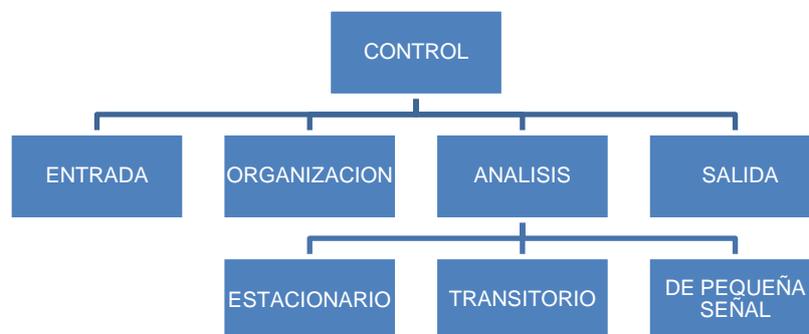


Figura 3. Circuito principal equivalente a la ecuación diferencial $y'' + 0.1y + 20\sin(y) = 0$.

2.2.- EL SOFTWARE PSpice

Una vez obtenido el modelo en red se procede a su análisis. Para ello se recurre a un software adecuado para la solución de circuitos eléctricos tal como **PSpice**. En el proceso de simulación el circuito se presenta al ordenador como un conjunto de ecuaciones matemáticas y éste, mediante procedimientos de análisis numérico, proporciona toda la información solicitada por el investigador para cada tipo de análisis. De esta forma se obtienen los datos correspondientes a medidas típicas de laboratorio con un margen de error despreciable y sin afectar al circuito; más aún, pueden alterarse las condiciones iniciales, de contorno, y las características térmicas del medio con sencillos cambios en el programa, y el análisis puede aportar datos sobre el comportamiento del circuito más allá de los límites que virtualmente se pueden obtener con medidas reales.

La simulación está estructurada en cinco subprogramas principales, que interaccionan entre ellos a través de una estructura de datos que es almacenada en un área común del programa. Estos subprogramas son: *entrada*, *organización*, *análisis*, *salida* y *utilidades*.



2.3.- SIMULACIÓN DEL CIRCUITO

El software PSpice se programa en su forma clásica por sentencias, en un lenguaje relativamente simple. La sintaxis de entrada no requiere especiales disposiciones ordenadas de datos, su estilo puede catalogarse más bien como libre y dispone de una razonable fuente de datos que se adjudican por omisión a los componentes cuando éstos no se especifican en detalle. También realiza un buen número de chequeos para asegurar que el circuito ha sido introducido correctamente y el resto de las sentencias de programa están bien escritas, advirtiéndolo al programador de posibles errores mediante mensajes previos a la ejecución. En definitiva, un usuario principiante necesita especificar un número mínimo de parámetros y controles de simulación para extraer unos resultados de simulación aceptables.

El programa, se estructura como un listado que contiene todos los componentes eléctricos del circuito (existe la posibilidad de organizar el programa mediante subcircuitos), resistencias, condensadores, fuentes, interruptores, etc., que se introducen uno por uno indicando el nombre, valor, nudos de conexión y otros parámetros característicos.

También admite la programación a través de una interfaz gráfica (aplicación *Schematics*), que construye y ejecuta los programas de análisis, aumentando la rapidez de programación y la versatilidad del método en determinadas aplicaciones (p.e. varias dimensiones). La forma de circuito eléctrico del modelo en red es muy familiar e intuitiva para ingenieros y científicos, lo que es una inestimable ayuda en la programación de los distintos procesos estudiados.

En el proceso de simulación, se obtiene la solución numérica de la representación matemática del circuito implementado. Ésta contiene: a) las ecuaciones matemáticas de los diferentes tipos de monpuertas, b) las ecuaciones correspondientes a las restricciones impuestas por las leyes de Kirchhoff, propias de la teoría de circuitos, que han de satisfacerse entre las ramas y nudos del circuito, y c) la información particular sobre la interconexión de los diferentes componentes eléctricos de cada modelo, dando lugar toda esta información a un extenso sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales.

Un ejemplo del código que implementa el caso del apartado 2.1 sería el siguiente:

```
C1 10 10a 0.1 IC=3
Vnulaa 0 10a 0
G1 10 0 VALUE = {V(30,0)}
G2 10 0 VALUE = {20*sin(V(10,0))}
Rinf2 10 0 1E10
H1 0 20 Vnulaa 1
Rinf1 20 0 1E10
C2 20 20a 1 IC=5
Vnulab 0 20a 0
H2 0 30 Vnulab 1
R1 30 0 1
.TRAN 0 2.5 UIC
```

```
.PROBE
.END
```

Este archivo de texto requiere de muy pocas reglas de programación. Las últimas directivas, TRAN 0 2.5 UIC y .PROBE, se utilizan para especificar el intervalo de tiempo simulado [0-2.5s]. UIC significa "con las condiciones iniciales". La figura 4, proporcionadas por Pspice, muestra la función $y(t)$, $y'(t)$ e $y''(t)$. Las unidades del eje vertical, voltios (V) o amperios (A), deben convertirse en los relacionados con los significados físicos de las funciones utilizadas.

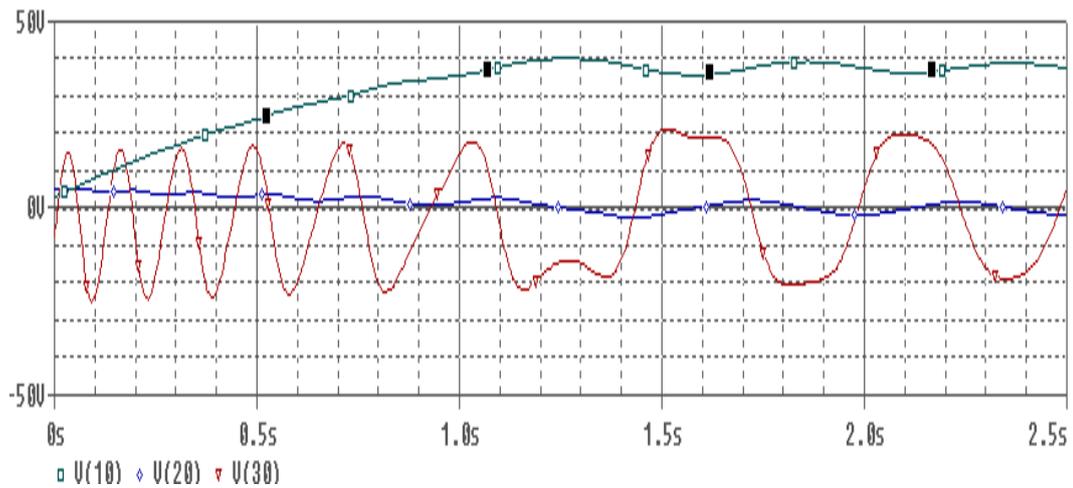


Figura 4. Resultados obtenidos con Pspice

3.- SISTEMAS CAÓTICOS. CARACTERÍSTICAS Y TIPOS.

Si la impracticabilidad de pronósticos a largo plazo fuese lo único que se pudiese inferir de la dinámica caótica, carecerían de interés práctico los atractores extraños. No obstante, no es así. Siguiendo nuestro paralelismo con la Mecánica Cuántica, la sensibilidad a las condiciones iniciales supone una limitación *fundamental*, sólo comparable al Principio de Indeterminación (o de incertidumbre) de Heisenberg. De igual modo que en Mecánica Cuántica ya no tiene sentido hablar de órbita del electrón, sino de orbital, también en Caos carece de sentido hablar de la trayectoria u órbita del sistema dinámico en el espacio de fases, sino más bien cabría pensar en un orbital, y éste sería, precisamente, el atractor que gobierna la dinámica del sistema.

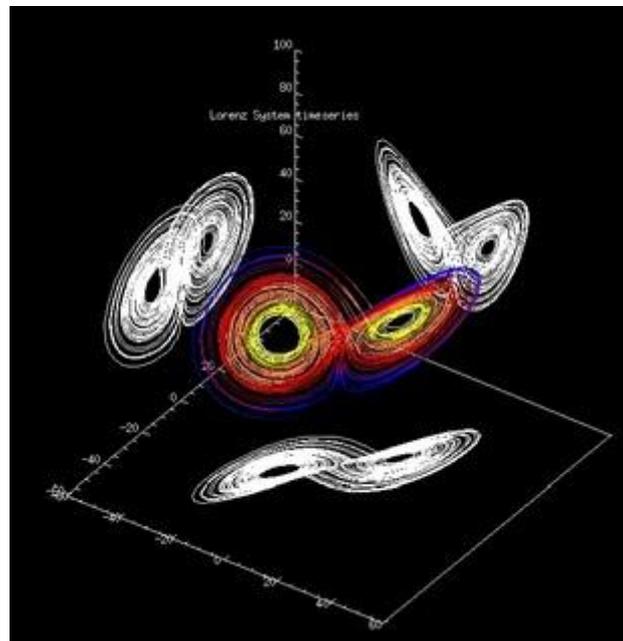


Fig 1. Orbitales de Lorenz proyectados

Un atractor extraño viene a ser, pues, similar a la función de densidad de probabilidad para los posibles estados del sistema dinámico. Al igual que un orbital atómico, el atractor es una nube de probabilidad, más densa en aquellas zonas por las que el sistema pasa con mayor frecuencia.

Desde el punto de vista práctico el ingeniero, al encarar algún problema "dinámico", especialmente intrincado, ha de saber reconocer la auténtica firma del Caos. Es decir, ha de saber discernir entre un comportamiento *caótico determinista* de otros fenómenos aleatorios de naturaleza estocástica. Para ello dispone de la refinada herramienta matemática, producto del trabajo investigador de Grassberger y Procaccia, que permite identificar la dinámica caótica y extraer las primeras conclusiones sobre la topología del presunto atractor extraño.

El paso siguiente es la elaboración del modelo matemático para la simulación por ordenador.

Una vez hecho esto, el ingeniero dispone de sofisticados métodos matemáticos y algorítmicos para extraer conclusiones y hacer cálculos, útiles por demás, sobre la evolución temporal del sistema.

3.1.- GRÁFICAS TEMPORALES

Una vez elaborado el modelo matemático, en primera aproximación, se introduce en el ordenador y se comparan los resultados teóricos con los experimentales. Suele ser gratificante ver, que después de algunos reajustes del modelo inicial, el comportamiento preconizado por el ordenador coincide cualitativa y cuantitativamente con lo observado en la experiencia.

Para el presente ejemplo se ha elegido una variante conformada por un péndulo simple y un rotor con acoplamiento magnético mutuo (ver figura siguiente).

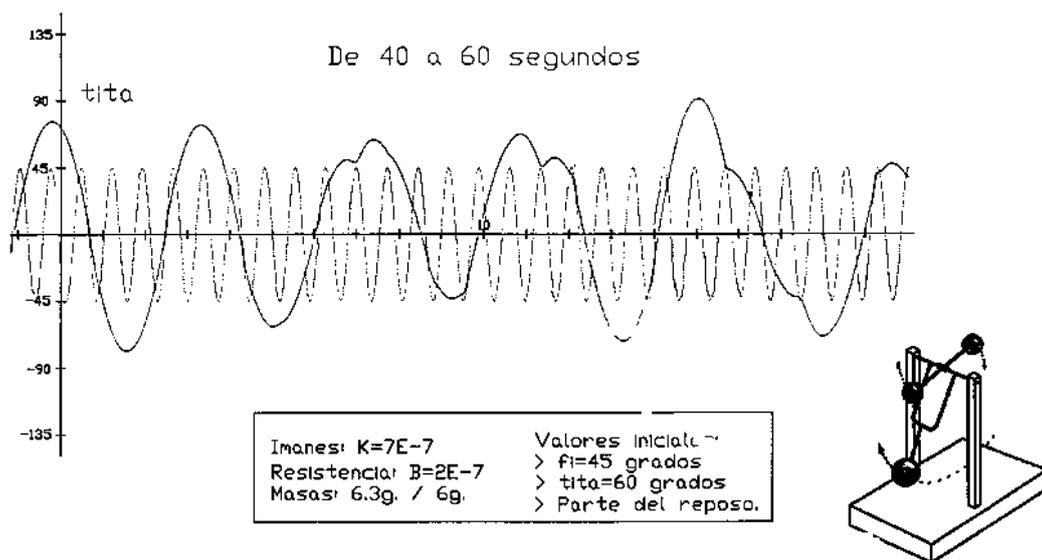


Fig 6. Evolución temporal de un péndulo simple y un rotor con acoplamiento magnético mutuo.

Matemáticamente, el sistema se modelizó con dos EDOs (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) de segundo orden. La integración numérica se hizo por medio de un algoritmo de Runge-Kutta implementado en Pascal. Dicho algoritmo se enlazó a otro programa de salida gráfica. (Figura anterior).

En estas gráficas temporales, desde el principio, se observó la oscilación aperiódica característica del Caos.

3.2.- SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES

La dependencia sensitiva de las condiciones iniciales se puede fácilmente comprobar y evaluar sin más que superponer dos gráficas que difieran levemente en las condiciones iniciales.

Aquí, se ha denominado horizonte temporal al máximo lapso de tiempo con cuya antelación se puede predecir el comportamiento del sistema sin exceder un error máximo admisible prefijado. Como dato orientativo digamos que:

Para una diferencia en las condiciones iniciales del orden de 10^{-3} mts/s y 10^{-3} radianes, con un error máximo admisible del 10%, el horizonte temporal es de 5.6 s (figura siguiente).

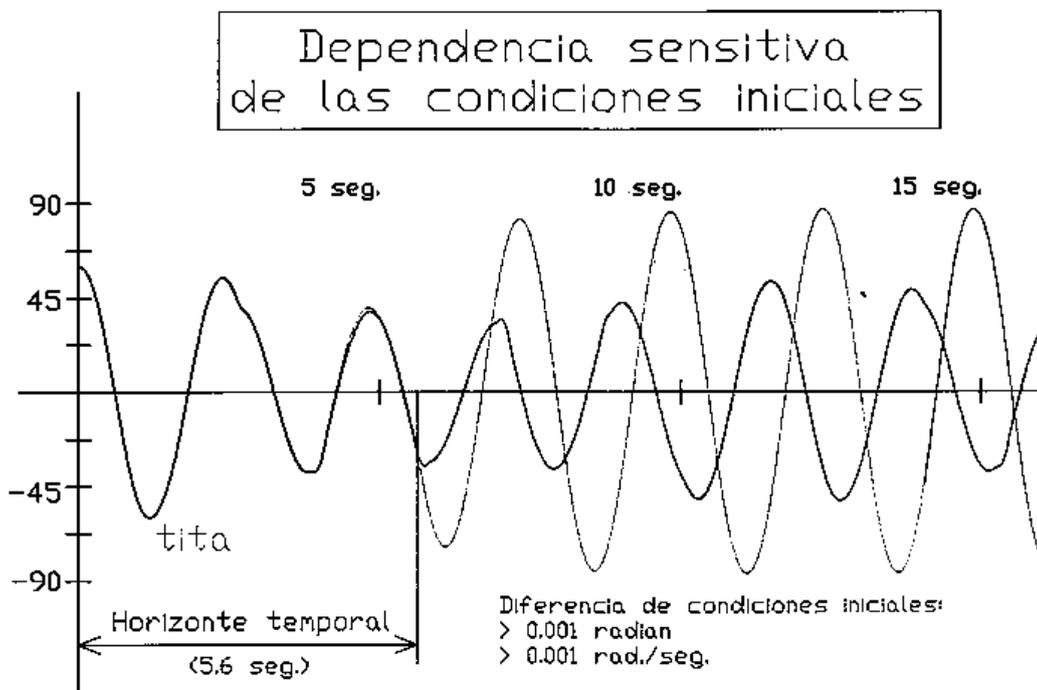


Fig 7. Comparación entre dos sistemas con condiciones iniciales ligeramente diferentes.

Cuando la diferencia en las condiciones iniciales se disminuye a 10^{-6} el horizonte temporal sólo aumenta hasta 20.5 seg., para el mismo error admisible.

Lo anterior significa que con la precisión que proporcionen los mejores aparatos en la medida de las condiciones iniciales sólo se puede predecir el sistema con una antelación máxima de 20.5 seg.

3.3.- REPRESENTANDO ATRACTORES POR ORBITALES EN ALTA RESOLUCIÓN

Para formarse una idea aproximada de la topología del atractor se pueden obtener, en primer lugar, sus proyecciones ortográficas sobre los planos coordenados XY, XZ, YZ (figuras 9. a, b, c).

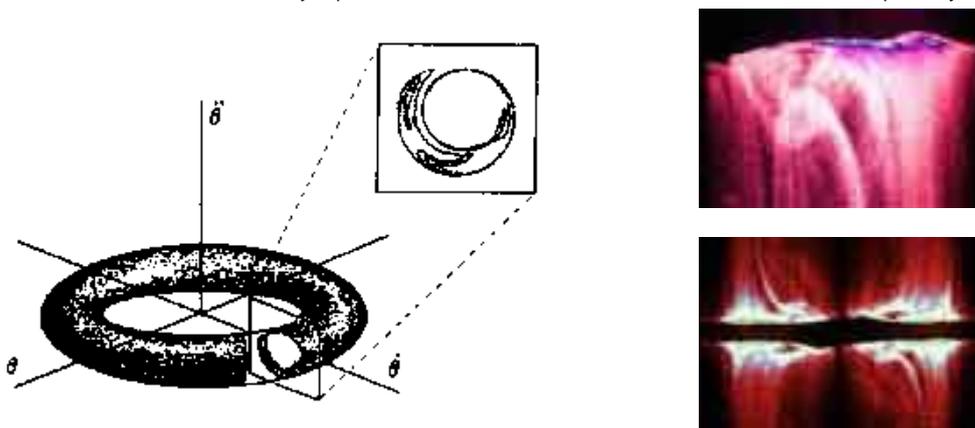


Fig. 9. a, b, c: Proyecciones sobre los planos coordenados del atractor extraño del sistema "bolas del espacio".

Aquí no se representa la *trayectoria* en el espacio de fases, sino el *orbital*, es decir, la ley de distribución de probabilidad (proporcional a la tonalidad de color).

Un método de visualización mejor que el anterior consiste en efectuar, sobre el atractor, una sección de Poincaré. Consiste ésta en dar al atractor un corte por un plano (figura 8), visualizando lo que queda interceptado por dicho plano. Haciendo "zooms", adecuadamente, de la sección de Poincaré se pone de manifiesto la compleja estructura fractal del atractor.

Fig. 8. A la izquierda, Sección de Poincaré (ilustración del concepto teórico). A la derecha, un ejemplo concreto: Sección del sistema dinámico "bolas del espacio" y



después un zoom para magnificar una zona pequeña.

Todas las imágenes, realizadas inicialmente en escala de grises, se pueden post-procesar, coloreando las distintas zonas del atractor proporcionalmente a su densidad de probabilidad.

Las conclusiones son variadísimas, pero se pueden clasificar en dos grupos:

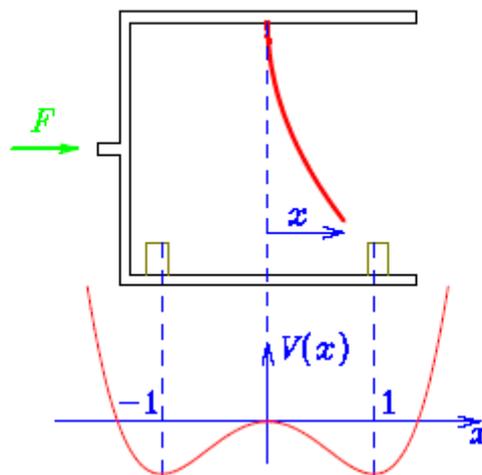
- Discriminación de las distintas zonas de probabilidad del atractor, que van desde zonas de probabilidad nula a zonas de alta probabilidad de que el sistema las atraviese.
- Variación de los parámetros del modelo matemático para ver cómo influye en la topología del atractor.

En suma, se puede decir acerca de este método de análisis, que va dirigido a condensar de una forma global, en imágenes, toda la enorme cantidad de información generada por el ordenador. Baste decir, que la elaboración de una sección de Poincaré, el ordenador calcula varios cientos de millones de puntos. Para una potencia de cálculo de 12 MIPS, esto supone, al menos 8 horas de trabajo de CPU. Si en lugar de presentarlos por pantalla gráfica, se imprimiesen los resultados numéricos generados, se llenarían varios miles de folios (la grafica temporal ahorraría folios, pero todavía sería un rollo de papel demasiado largo). Se comprende que la interpretación, por parte del usuario, de la información así presentada, sería tarea irrealizable.

Una segunda fase de investigación consistiría en el cálculo aproximado de la dimensión fractal del atractor, los coeficientes característicos de Liapounov (LCEs) y la K-entropía (entropía de Kolmogorov) como medida del desorden generado por el sistema.

3.4.- TIPOS DE OSCILADORES Y ATRACTORES

Los atractores no son una novedad debida al caos. También existen atractores no caóticos bien conocidos. Una buena parte de nuestra introducción al caos y de la explicación de algunos atractores se basará en un modelo matemático simplificado del dispositivo mecánico de la figura siguiente, si bien haremos previamente una enumeración y breve comentario de algunos tipos de atractores sencillos que posteriormente, al describir el modelo de la figura, explicaremos con más detenimiento en los casos en que resulte más interesante.



El más simple es de atractor de punto fijo. El sistema tiende a estabilizarse en un único punto. Un ejemplo es un péndulo, que oscilará hasta pararse debido al roce.

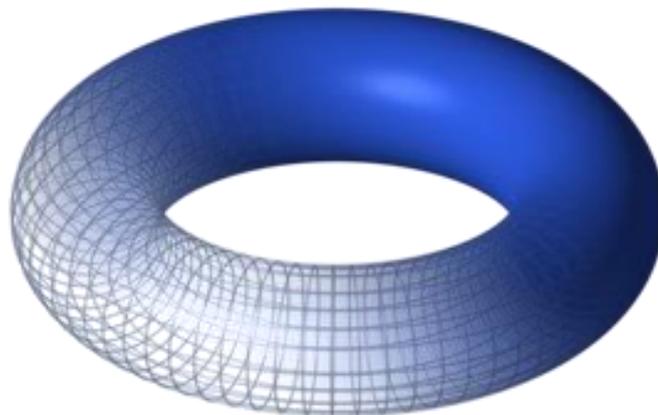
El atractor de ciclo límite es el segundo tipo más sencillo de atractor. Un péndulo alimentado para compensar el roce sería un buen ejemplo. En este caso el sistema iría oscilando de un extremo al otro.

Explicamos con algo más de detalle estos dos tipos de péndulos con sus respectivas reacciones:

El péndulo es probablemente el sistema dinámico más estudiado en la historia de la ciencia. En los cursos de física elemental, el péndulo se aproxima por una ecuación lineal simple, que sólo es válida para pequeñas amplitudes de oscilación. En este caso no haremos esta aproximación, sino que permitiremos que el péndulo pueda llegar incluso a dar vueltas completas sobre sí mismo. Los inevitables rozamientos hacen que un péndulo real amortigüe su movimiento. En el caso ideal de rozamiento despreciable el sistema no pierde energía en la trayectoria y hace que el comportamiento sea oscilatorio, pero a diferencia del péndulo simple, el periodo de la oscilación no es independiente de la amplitud. En la aproximación lineal el periodo siempre es el mismo, sea cual sea el valor de la amplitud de las oscilaciones. Esta es una aproximación válida en muchos casos, pero como es bien sabido, no es cierta para oscilaciones grandes.

Un sistema derivado del anterior y que tiene también mucho interés es el péndulo amortiguado y forzado. En este caso, aplicamos una fuerza periódica que actúa sobre el péndulo mientras este realiza su movimiento oscilatorio. El movimiento para oscilaciones de pequeña amplitud presenta comportamientos interesantes tales como fenómenos de resonancia. La versión no lineal (oscilaciones de amplitud grande), sin embargo, tiene un comportamiento mucho más rico, dando lugar a movimiento periódico para muchos valores de los parámetros, pero caótico para otros.

El atractor periódico es más complicado, pero también es lineal (se puede predecir). Un caso particular de que ya hemos hablado es un sistema de dos cuerpos en órbita (por ejemplo, la Tierra alrededor del Sol, si despreciamos la influencia de la Luna y otros astros). En este caso el atractor es una figura topológica llamada *toro*.



El sistema de tres cuerpos de Pointcaré se denomina cuasiperiódico. Así como en el atractor periódico cada órbita es exactamente igual y sincronizada, en este caso se pierde esta coincidencia. En realidad, podríamos decir que en este sistema ya asoma el caos, dado que como ya he dicho anteriormente, no se puede predecir. En realidad, en el universo los sistemas no son de tres cuerpos si no de un número muy elevado de ellos, y por lo mismo, plenamente caóticos.

Volvemos ahora sobre modelo de la figura del dispositivo mecánico de la página anterior. En él una varilla de acero tiene un extremo fijado en un soporte rígido mientras el otro puede oscilar entre dos imanes colocados simétricamente. El soporte se halla sometido a una fuerza externa armónica $F = f \cos \omega t$.

Está claro que, por simetría y en ausencia de fuerza externa, en el centro — es decir, cuando la varilla está en posición vertical — hay un punto de equilibrio inestable rodeado de dos puntos de equilibrio estables en posiciones simétricas con el extremo libre de la varilla cercano a uno de los imanes. Esta disposición de puntos de equilibrio sugiere un modelo ingenuo en el que se sustituye la fuerza magnética sufrida por la varilla por la derivada cambiada de signo de un potencial como el que se muestra en la parte inferior de la figura del oscilador, cuya representación matemática más sencilla es (en variables adimensionales):

$$V(x) = -\frac{1}{4}x^2(2-x^2)$$

De este modo si, en un primer momento, despreciamos el rozamiento y la fuerza externa, la ecuación del movimiento será (tomando una masa unidad):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = V'(x) = x - x^3$$

Si ahora añadimos una fuerza de rozamiento debida al aire proporcional a la velocidad ($-\gamma \cdot dx/dt$) y la fuerza externa, el sistema dinámico que describe la evolución del sistema es la ecuación de Duffing (la representación del atractor derivado de esta ecuación se verá más adelante, conocido como oscilador de doble pozo):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial x}{\partial t} - x + x^3 = F \cos(\omega t)$$

(Escogeremos la unidad de tiempo de forma que $\omega = 1$). Podríamos tener la tentación de pensar que hemos simplificado demasiado y, de hecho, esta ecuación no nos resulta tan extraña. Si quitamos el segundo término entre paréntesis es una ecuación lineal de coeficientes constantes con solución trivial, pero, como veremos a continuación, ese término no lineal tiene consecuencias dinámicas asombrosas, de forma que esta última ecuación es muy rica en comportamientos dinámicos.

3.4.1.- Oscilación periódica

Supongamos inicialmente que no hay rozamiento ($\gamma = 0$) ni fuerza externa ($f = 0$). En tal caso el sistema dinámico es conservativo y tenemos una integral primera (la ley de conservación de la energía) que nos proporciona la ecuación de las trayectorias en el espacio de fases ($x, dx/dt$):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{4} x^2 (2 - x^2) = E$$

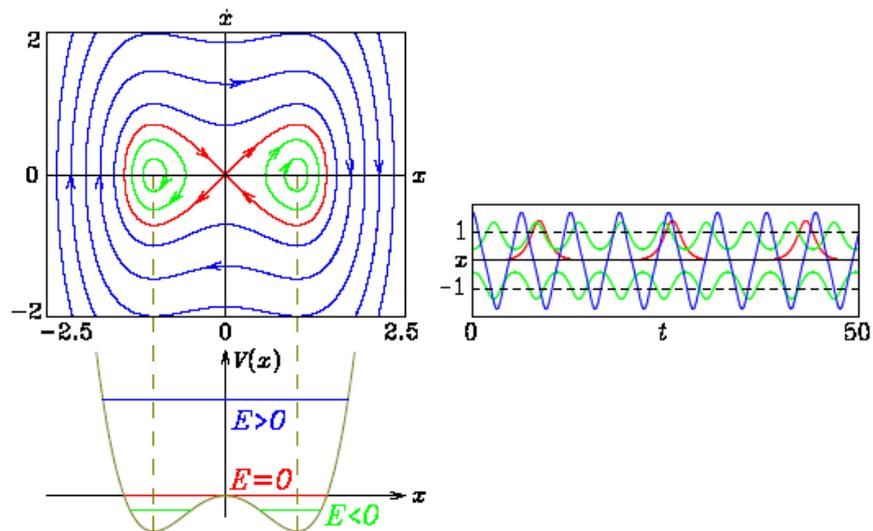
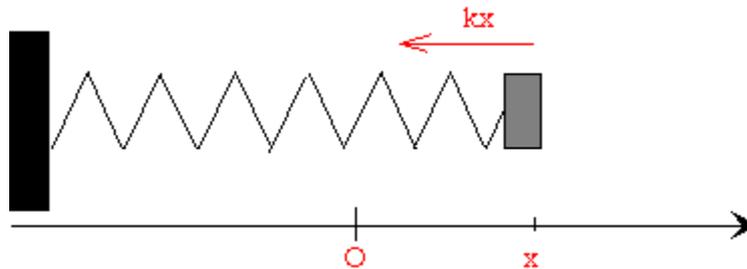


Fig. 9. Espacio de fases y algunas soluciones cuando $\gamma = f = 0$

En los mínimos de la energía potencial tenemos los centros estables $(\pm 1, 0)$ mientras que al máximo le corresponde el origen $(0, 0)$ que es un punto de ensilladura inestable. Las otras dos trayectorias de energía nula son órbitas homoclinicas que se hallan tanto en la variedad estable del origen como en la inestable. El resto de las trayectorias de fase corresponden a oscilaciones periódicas cuyas órbitas cerradas encierran un sólo centro (si está dentro del correspondiente pozo de potencial: $E < 0$) o ambos (si la energía es suficiente para pasar por encima del máximo: $E > 0$).

Podemos entender mejor este tipo de oscilación tomando como modelo una partícula de masa m unida a un muelle elástico de constante k :



Cuando la partícula está desplazada x de la posición de equilibrio, actúa sobre ella una fuerza elástica que es proporcional a x , y de sentido contrario, tal como se muestra en la figura.

La ecuación del movimiento se escribe

$$ma = -kx$$

Teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada segunda de la posición x , podemos expresar la ecuación del movimiento como ecuación diferencial de segundo orden donde ω_0 se denomina frecuencia propia o natural del oscilador armónico.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

La solución de esta ecuación diferencial es la ecuación de un M.A.S.

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

La ventaja de expresar las oscilaciones en términos de una ecuación diferencial es que podemos establecer analogías entre sistemas físicos oscilantes completamente diferentes: mecánicos eléctricos, hidráulicos, etc.

La característica esencial de una oscilación libre es que la amplitud se mantiene constante, y por tanto, la energía total se mantiene constante. En el espacio de las fases (v - x) el móvil describe una elipse.

El espacio de las fases nos muestra otra perspectiva del comportamiento de un oscilador, y se representa el momento lineal (o la velocidad) en el eje vertical, y la posición del móvil en el eje horizontal.

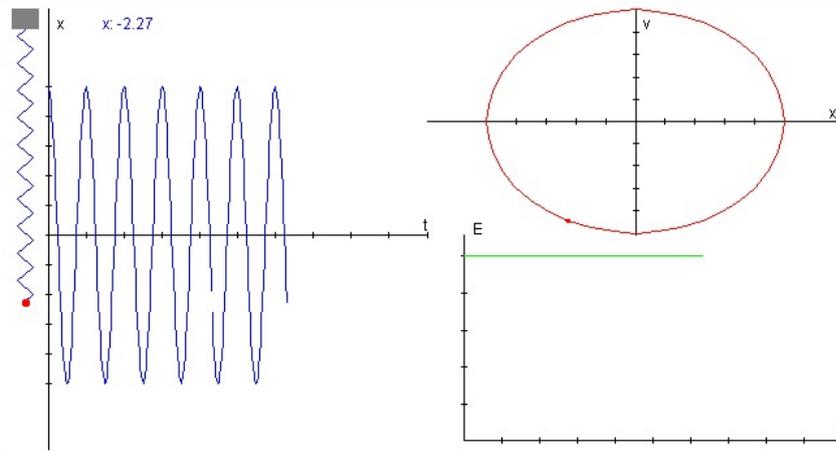


Fig. 10. Espacio de fases de un oscilador periódico simple sin rozamiento.

3.4.2.- Oscilación amortiguada

Si ahora tenemos en cuenta el rozamiento, en toda órbita que no sea un punto de equilibrio la energía decrecerá monótonamente y (con las excepciones que luego consideraremos) la trayectoria tenderá hacia uno de los dos puntos $(\pm 1, 0)$, que ahora son atractores puntuales: focos (o, en el caso sobreamortiguado $\gamma > \sqrt{8}$, nodos) asintóticamente estables.

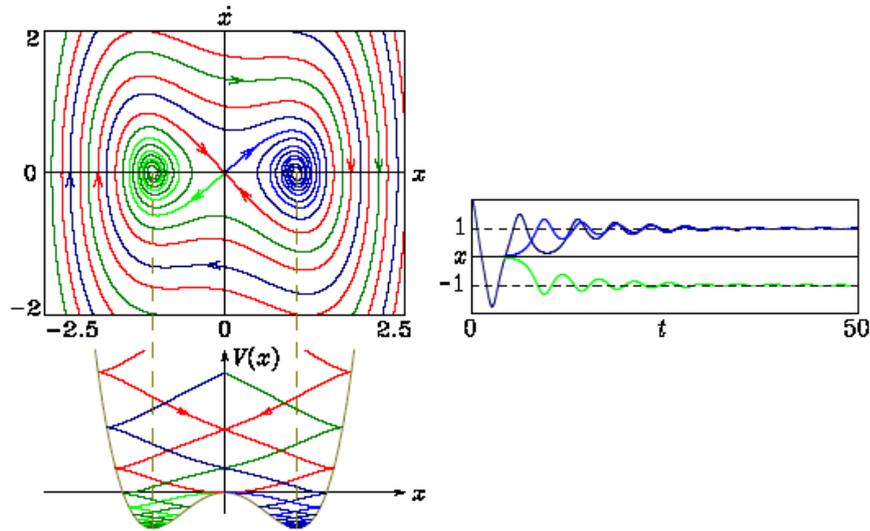
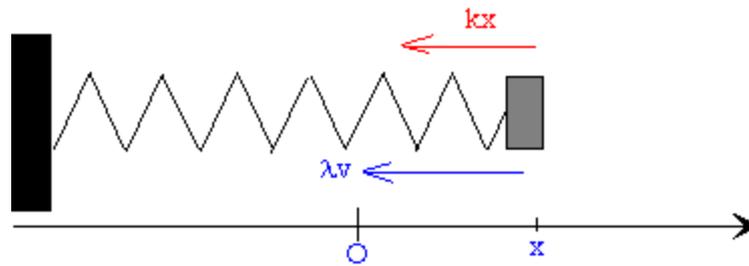


Fig. 11. Espacio de fases y algunas soluciones para $\gamma = 0.2$ y $f = 0$

El origen $(0,0)$ sigue siendo un punto de ensilladura inestable, pero ahora las variedades estable e inestable no coinciden. En esta última existen dos trayectorias que salen (en $t \rightarrow -\infty$) del origen y tienden hacia uno de los atractores.

Las dos órbitas de la variedad estable que entran en el origen (en $t \rightarrow \infty$) son más interesantes, ya que al no ir a ninguno de los dos atractores constituyen la frontera entre las cuencas de atracción de éstos.

Tomando el ejemplo del apartado anterior, el sistema sería el siguiente:



Para explicar el amortiguamiento, podemos suponer que además de la fuerza elástica $F=-kx$, actúa otra fuerza opuesta a la velocidad $F=-\lambda v$, donde λ es una constante que depende del sistema físico particular. La ecuación del movimiento se escribe:

$$m a = -kx - \lambda v$$

Expresamos la ecuación del movimiento en forma de ecuación diferencial, teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada segunda de la posición x , y la velocidad es la derivada primera de x .

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + a_0^2 x = 0 \quad a_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{y} \quad 2\gamma = \frac{\lambda}{m}$$

La solución de la ecuación diferencial tiene la siguiente expresión:

$$x = A \exp(-\gamma t) \sin(a t + \varphi) \quad \text{con} \quad a^2 = a_0^2 - \gamma^2$$

La característica esencial de la oscilación amortiguada es que la amplitud de la oscilación disminuye exponencialmente con el tiempo. Por tanto, la energía del oscilador también disminuye. Estas pérdidas de energía son debidas al trabajo de la fuerza F' de rozamiento opuesta a la velocidad. En el espacio de las fases (v - x) vemos que el móvil describe una espiral que converge hacia el origen.

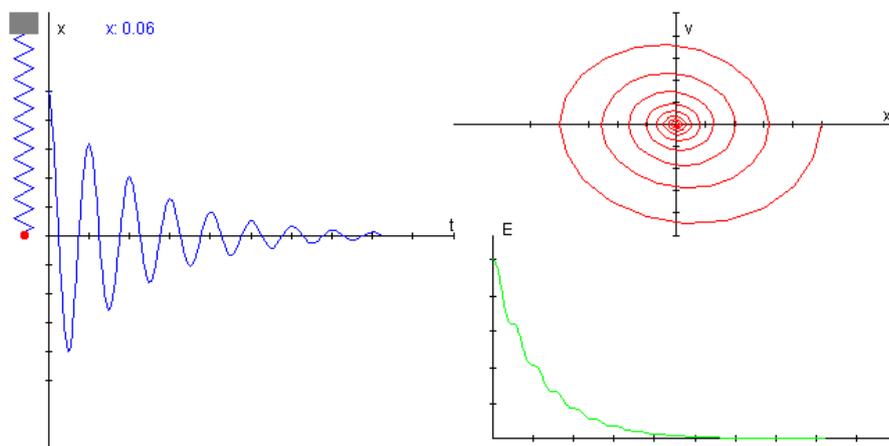
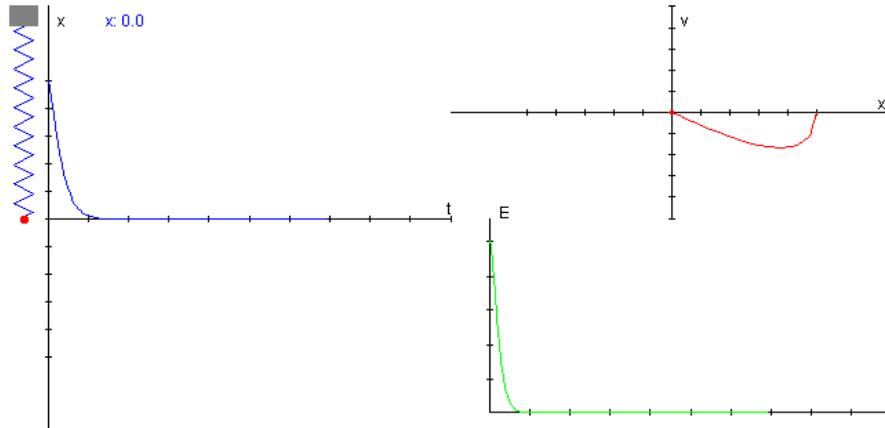
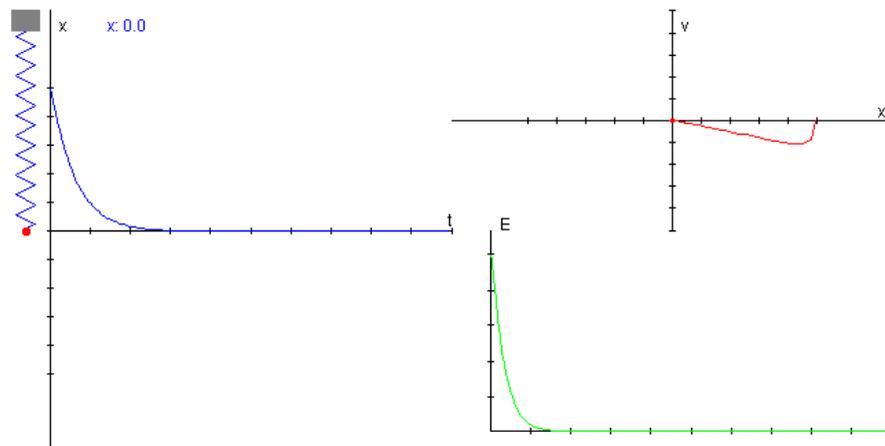


Fig 12. Ejemplo de amortiguamiento débil

Si el amortiguamiento es grande, g puede ser mayor que w_0 , y w puede llegar a ser cero (oscilaciones críticas) o imaginario (oscilaciones sobreamortiguadas). En ambos casos no hay oscilaciones y la partícula se aproxima gradualmente a la posición de equilibrio. La energía perdida por la partícula que experimenta una oscilación amortiguada es absorbida por el medio que la rodea.



F 13. Representación de posición, energía y espacio de fases de una oscilación crítica.

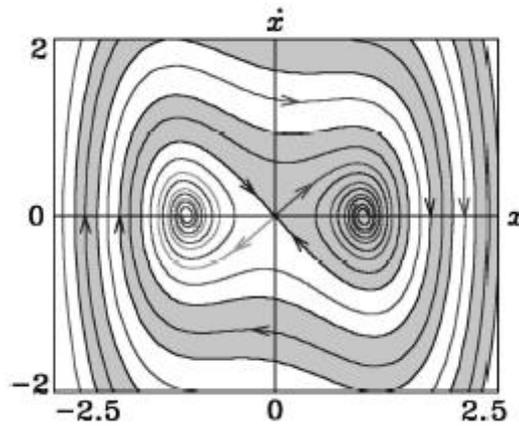


F 14. Representación de una oscilación sobreamortiguada.

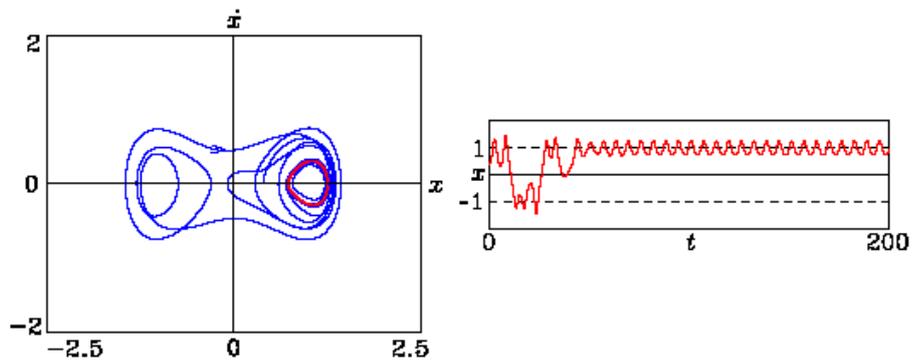
3.4.3.- Oscilación forzada

En presencia de fuerza externa los puntos de equilibrio son imposibles, pero el carácter periódico de la fuerza permite las soluciones periódicas, que ahora, a diferencia de lo que ocurría en el caso conservativo donde hay un conjunto infinito de oscilaciones con períodos dependientes de la amplitud (es decir, de la energía), serán oscilaciones aisladas con un período compatible con el de la fuerza externa.

Es bien conocido lo que pasa en el caso lineal: tras un transitorio definido por las condiciones iniciales se pierda la memoria de éstas y la evolución entra en un régimen periódico permanente. Lo mismo sucede con el oscilador de Duffing para $\gamma = 0.2$ y $f = 0.23$: las soluciones tienden a uno de los dos atractores periódicos, las dos órbitas periódicas que abrazan cada uno de los desaparecidos puntos de equilibrio en $(\pm 1; 0)$.



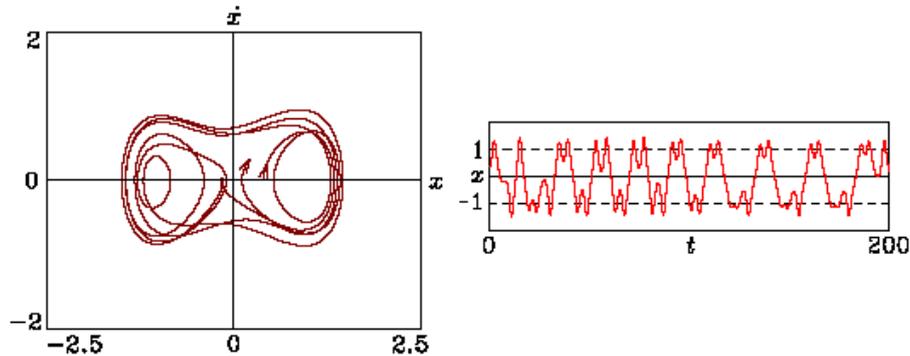
Cuencas de atracción para $\gamma = 0.2$ y $f = 0$



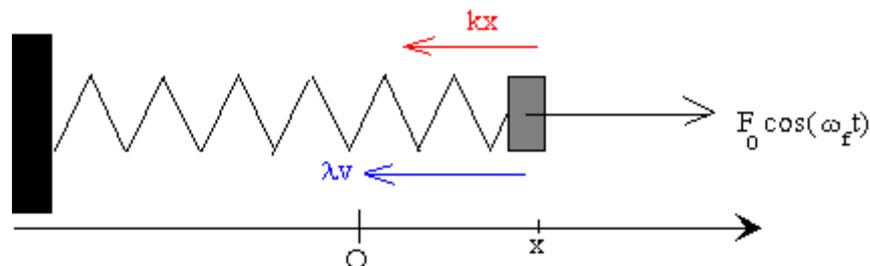
Una solución para $\gamma = 0.2$ y $f = 0.23$

Estrictamente hablando, hace falta un tiempo infinito para que la solución alcance uno de los dos atractores, pero desde cualquier punto de vista práctico, a partir de cierto momento, a menudo no muy lejano, puede considerarse que la solución se encuentra ya en el atractor y que se ha alcanzado el régimen permanente: una oscilación periódica.

Una solución para $\gamma = 0.2$ y $f = 0.3$



Tomando como ejemplo práctico un columpio, para mantener las oscilaciones hemos de aplicar una fuerza oscilante al oscilador amortiguado.



Sea $F_0 \cos(\omega_f t)$ la fuerza oscilante aplicada, siendo ω_f su frecuencia angular. La ecuación del movimiento será ahora

$$ma = -kx - \lambda v + F_0 \cos(\omega_f t)$$

Expresamos la ecuación del movimiento en forma de ecuación diferencial

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + a_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(a_f t) \quad a_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{y} \quad 2\gamma = \frac{\lambda}{m}$$

La solución de esta ecuación diferencial es complicada, y se compone de la suma de dos términos, el estado transitorio que depende de las condiciones iniciales y que desaparece al cabo de cierto tiempo, teóricamente infinito, y el estado estacionario, independiente de

las condiciones iniciales, y que es el que permanece, después de desaparecer el estado transitorio. Dicho estado estacionario tiene la expresión.

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_f t + \delta)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene las expresiones de A y δ .

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_f^2 \gamma^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f}$$

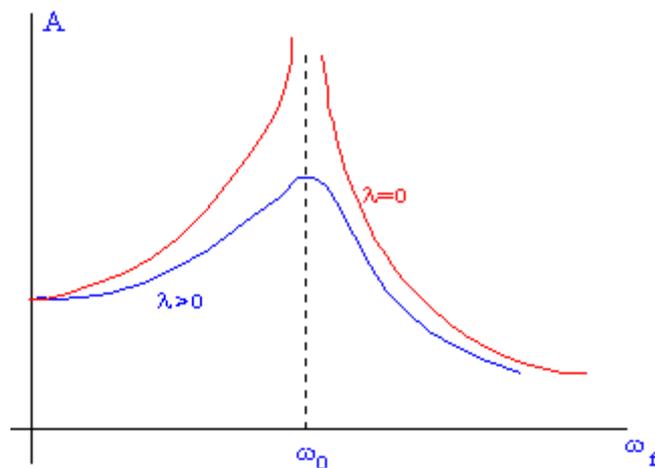


Fig 15. Respuesta en frecuencia de una oscilación forzada.

En la figura se muestra la respuesta en frecuencia de la oscilación forzada, en el estado estacionario. Como podemos observar a partir de la fórmula o la gráfica, la amplitud de la oscilación forzada en el estado estacionario disminuye rápidamente cuando la frecuencia de la oscilación forzada ω_f se hace mayor o menor que la frecuencia propia del oscilador ω_0 .

En el caso ideal que no exista rozamiento, la amplitud de la oscilación forzada se hace muy grande, tiende a infinito, cuando la frecuencia de la oscilación forzada ω_f se hace próxima a la frecuencia propia del oscilador ω_0 .

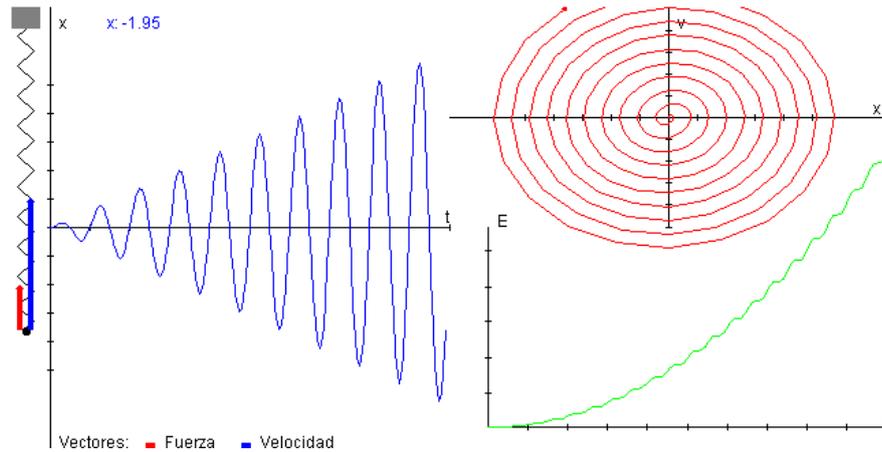


Fig 16. Oscilación forzada sin rozamiento con $W_f=W_0$ (Resonancia).

En el caso de que exista rozamiento ($\lambda > 0$) la amplitud se hace máxima cuando la frecuencia de la oscilación forzada w_f es próxima a la del oscilador w_0 .

La característica esencial del estado estacionario, es que la velocidad de la partícula:

$$v = \frac{dx}{dt} = A \omega_f \cos(\omega_f t + \delta)$$

está en fase $\delta=0$ con la fuerza oscilante cuando la frecuencia de la fuerza oscilante w_f es igual a la frecuencia propia del oscilador w_0 .

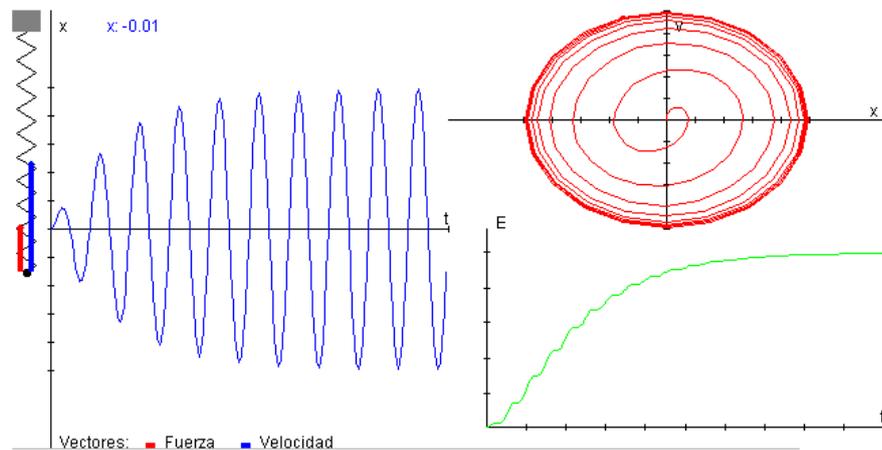


Fig 17. Representación de la posición, diagrama de fases y energía de una oscilación forzada con rozamiento y $W_f=W_0$ (Resonancia).

3.4.4.- Oscilaciones caóticas

Hasta ahora, dadas las condiciones iniciales apropiadas se puede determinar el movimiento de un cuerpo si conocemos las fuerzas que actúan sobre el mismo.

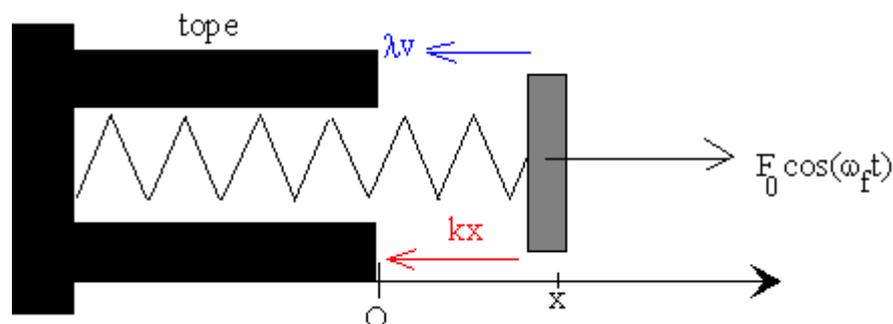
Un sistema que experimenta un movimiento caótico nunca se repite a sí mismo, sino que más bien se comporta de forma continuamente diferente, el movimiento puede parecer totalmente aleatorio y desordenado. No obstante, el movimiento caótico está muy lejos de ser totalmente desordenado y por el contrario, exhibe una estructura definida que resulta de pronto aparente. Otro aspecto del caos, es su extrema sensibilidad a las condiciones iniciales.

Consideremos, por ejemplo, un oscilador forzado. Podemos describir exactamente su comportamiento por que la fuerza restauradora que ejerce el muelle kx es lineal con respecto al desplazamiento, de hecho, el movimiento caótico solamente aparece en sistemas que no son lineales.

Como es natural, todos los muelles reales se desvían de la linealidad para desplazamientos suficientemente grandes, de forma que es inevitable el comportamiento no lineal en el mundo real. Sin embargo, en Física se suelen estudiar casi exclusivamente los sistemas lineales ya que su comportamiento es más simple de describir.

Para hacer que el oscilador forzado sea no lineal, introducimos una barrera que bloquee el movimiento del cuerpo. Se considera que la barrera tiene una masa infinita y que las colisiones del cuerpo oscilante con ella son perfectamente elásticas. Por tanto, lo que hace es devolver el cuerpo en la misma dirección en la que vino pero con sentido contrario y con el mismo valor de su velocidad.

Evidentemente, la fuerza que actúa sobre el cuerpo deja de ser una función lineal del desplazamiento, puesto que la barrera actúa sobre el cuerpo dándole un impulso brusco.



Observemos las siguientes gráficas en las que damos distintos valores a la frecuencia oscilante:

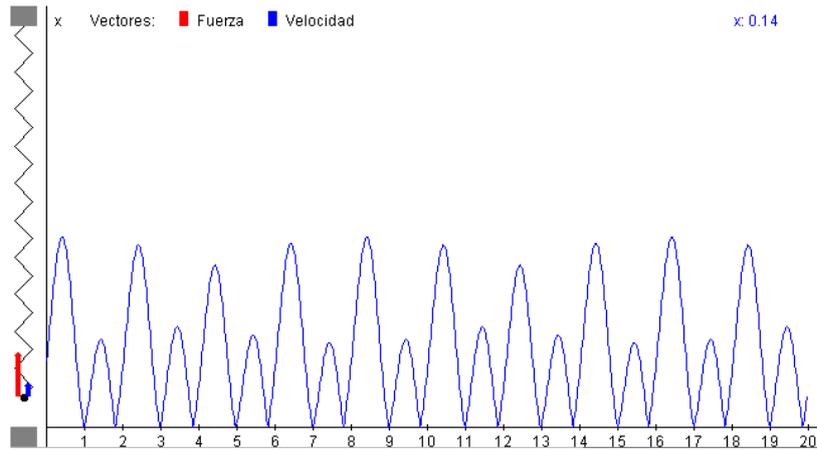


Fig 18. Oscilación caótica. Frecuencia de oscilación igual a 1.35 rad/s.

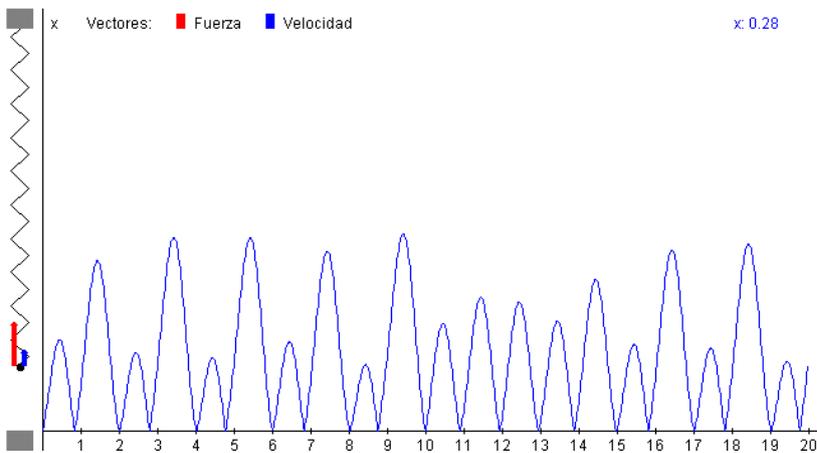


Fig 19. Oscilación caótica. Frecuencia de oscilación igual a 1.3625 rad/s.

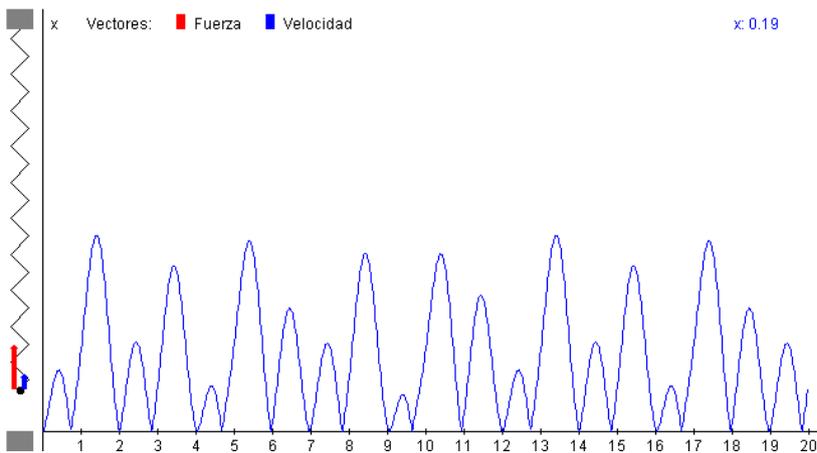


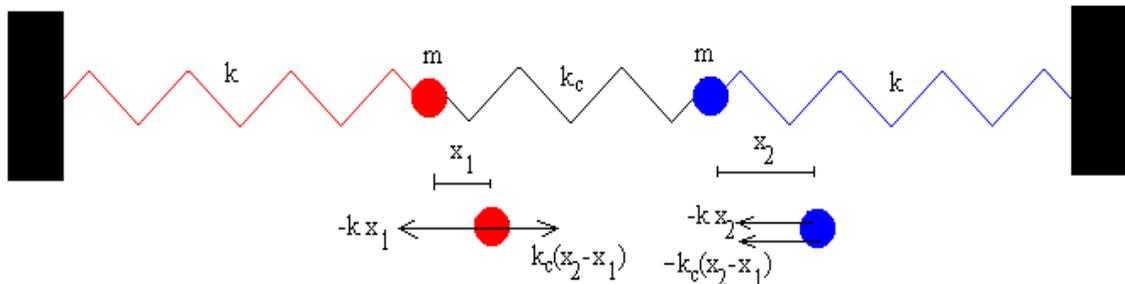
Fig 20. Oscilación caótica. Frecuencia de oscilación igual a 1.37 rad/s.

Podemos observar, que cuando la frecuencia de la fuerza oscilante vale 1.35 rad/s, el movimiento del cuerpo oscilante se repite después de cada dos rebotes, que consumen dos ciclos de la fuerza impulsora. Para la frecuencia 1.3625 rad/s el cuerpo rebota hasta cuatro alturas diferentes. Se produce una progresión infinita de duplicaciones de periodo,

aunque cada vez más próximos en frecuencia. Para la frecuencia 1.37 rad/s el periodo resulta ahora infinito, el cuerpo rebota de un modo caótico, el movimiento nunca se repite.

3.4.5. Oscilaciones acopladas

Para estudiar un sistema formado por dos osciladores acoplados, vamos a tomar como modelo el sistema formado por dos partículas iguales m situadas en los extremos de dos muelles de idéntica constante elástica k . El acoplamiento se efectúa uniendo las dos partículas mediante un muelle de constante k_c , tal como se puede ver en la figura.



Llamemos x_1 y x_2 a los desplazamientos de cada una de las partículas a partir de su posición de equilibrio, medidos como positivos cuando están a la derecha. El muelle de la izquierda se ha estirado x_1 , el de la derecha se ha comprimido x_2 y el central se ha deformado $x_2 - x_1$. Las fuerzas sobre cada una de las partículas se indican en la figura.

- Sobre la partícula de la izquierda, se ejerce una fuerza hacia la izquierda $-kx_1$, y una fuerza hacia la derecha debido a la deformación del muelle central $k_c(x_2 - x_1)$, suponemos que x_2 es mayor que x_1 .
- Sobre la partícula derecha, se ejerce una fuerza hacia la izquierda $-kx_2$ y otra fuerza hacia la izquierda debido a la deformación del muelle central $-k_c(x_2 - x_1)$.

El muelle central ejerce fuerzas iguales y de sentido contrario sobre cada una de las partículas.

Aplicamos la segunda ley de Newton a cada una de las partículas y escribimos las ecuaciones del movimiento en forma de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + k_c(x_2 - x_1)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -kx_2 - k_c(x_2 - x_1)$$

Sumando y restando las dos ecuaciones diferenciales tenemos, la ecuación diferencial de las oscilaciones libres.

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + \frac{k}{m}(x_1 + x_2) = 0$$

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} + \frac{k + 2k_c}{m}(x_1 - x_2) = 0$$

Son las ecuaciones diferenciales de dos movimientos armónicos simples de frecuencias.

$$\omega_a^2 = \frac{k}{m} \quad \text{y} \quad \omega_b^2 = \frac{k + 2k_c}{m}$$

Las soluciones de estas dos ecuaciones, son respectivamente:

$$y_a = x_1 + x_2 = y_{0a} \text{sen}(\omega_a t + j_a)$$

$$y_b = x_1 - x_2 = y_{0b} \text{sen}(\omega_b t + j_b)$$

Donde las amplitudes y_{0a} e y_{0b} y las fases iniciales j_a y j_b están determinadas por las condiciones iniciales: posición inicial y velocidad inicial de cada una de las partículas.

Despejando x_1 y x_2 de las dos ecuaciones anteriores tenemos

$$x_1 = (\Psi_{0a} \text{sen}(\omega_a t + \mu_a^2) + \Psi_{0b} \text{sen}(\omega_b t + \mu_b^2)) / 2$$

$$x_2 = (\Psi_{0a} \text{sen}(\omega_a t + \mu_a^2) - \Psi_{0b} \text{sen}(\omega_b t + \mu_b^2)) / 2$$

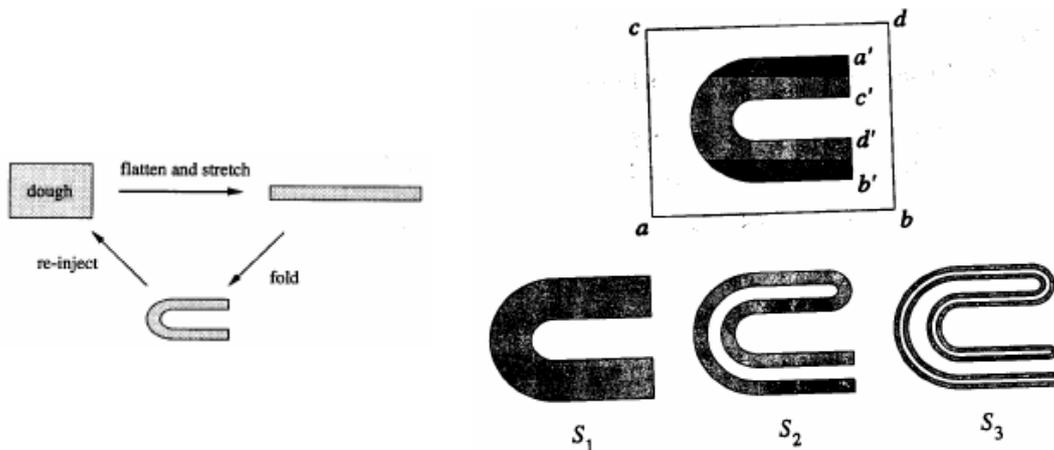
El movimiento general de dos osciladores acoplados puede considerarse como la superposición de dos modos normales de oscilación de frecuencias angulares ω_a y ω_b .

3.5.- ATRACTORES EXTRAÑOS O CAÓTICOS

Un *atractor extraño* es una imagen o gráfico en el espacio de fases de un sistema caótico concreto. Viene a representar el comportamiento a largo plazo de dicho sistema.

Los atractores extraños tienen dos propiedades difíciles de reconciliar: las trayectorias permanecen confinadas en una región del espacio de fases pero se separan de sus vecinas a velocidad exponencial (por lo menos al principio). El mecanismo básico que subyace bajo esta dinámica es conocido como “stretching and folding” (estiramiento y plegado): en un atractor extraño el flujo típicamente estira los volúmenes y luego los pliega sobre sí mismo siguiendo un tipo de “aplicación pastelera”. Este proceso genera como veremos una dependencia sensible respecto condiciones iniciales.

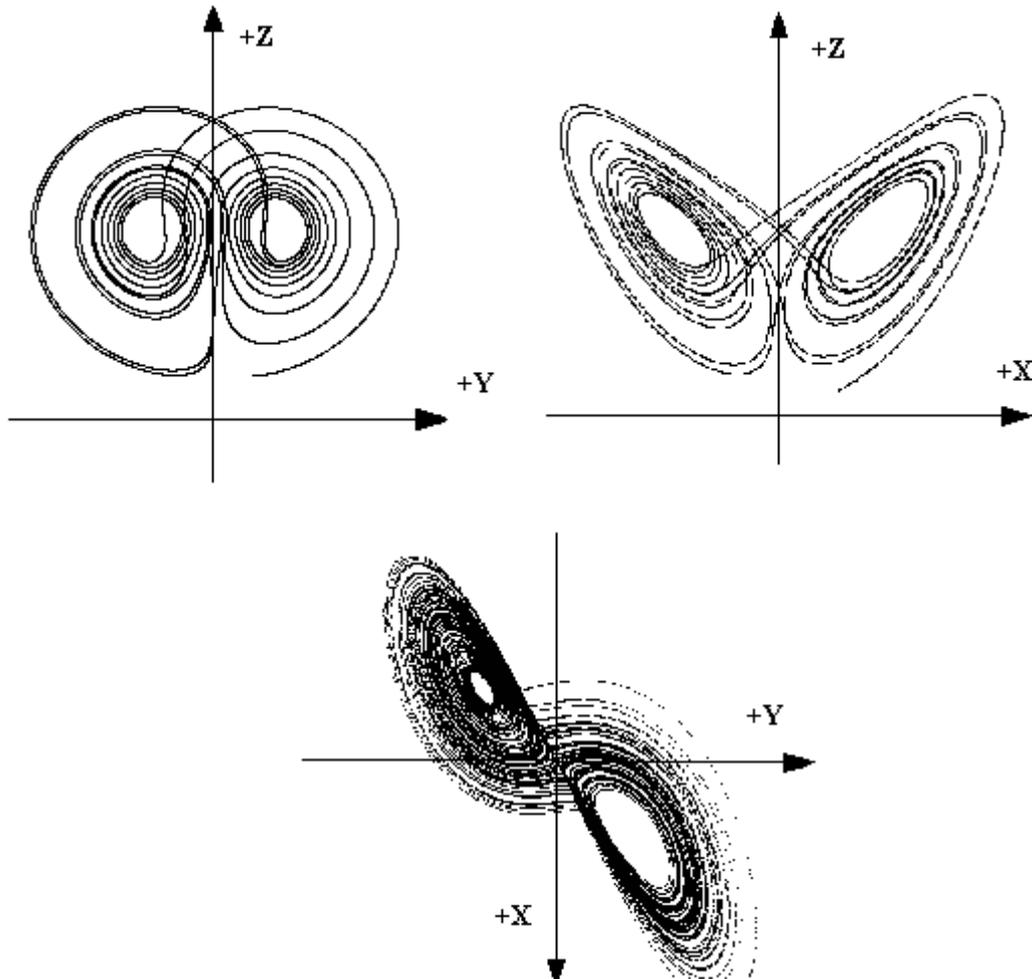
La figura representa esta operación (pastelera) en la que un rectángulo es aplastado,



estirado y plegado en forma de herradura. En el límite de S^∞ el conjunto consiste de infinitas láminas separadas por distintos espesores. De hecho una sección vertical reproduce un conjunto de Cantor. S^∞ es (localmente) producto de una curva suave con un conjunto de Cantor. La estructura fractal del atractor es consecuencia del proceso de estiramiento y plegamiento.

3.5.1.- Atractor de Lorenz

El primer atractor extraño fue el ahora famoso atractor de Lorenz, llamado así en honor de su descubridor.



Allá por el año 1963 E. Lorenz investigaba la razón profunda de que el tiempo meteorológico fuese imposible de predecir a largo plazo. Planteó un modelo matemático para la simulación por ordenador del tiempo meteorológico. El modelo en cuestión estaba basado en la convección de los fluidos; Lorenz lo simplificó casi abusivamente para adaptarlo a su ordenador, pero conservando, eso sí, su verdadera esencia: la no linealidad.

Las ecuaciones de Lorenz son un conjunto de tres ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, para cada una de las tres variables x , y , z que describen el estado del sistema. Conviene señalar que las condiciones necesarias para que exista caos en un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo son: deben haber al menos tres ecuaciones diferenciales y al menos tres variables y al menos alguna no linealidad. El modelo atmosférico que utilizó Lorenz consiste en una atmósfera bidimensional rectangular, cuyo extremo inferior está a una temperatura mayor que el superior. De esta manera el aire caliente subirá y el aire frío bajará creándose corrientes que harán un intercambio de calor por convección.

Las ecuaciones que describen este proceso son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= a(y - x) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= rx - y - xz \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= xy - bz\end{aligned}$$

Donde las variables que únicamente dependen del tiempo son:

"x" representa el flujo convectivo

"y" es la distribución de temperaturas horizontal

"z" es la distribución de temperaturas vertical

Además tenemos de los tres parámetros que intervienen en las ecuaciones:

"a" cociente entre la viscosidad y la conductividad térmica

"r" la diferencia de temperaturas entre las capas inferior y superior

"b" el cociente entre la altura y el ancho de nuestro rectángulo

El valor de estos parámetros del sistema determina el comportamiento de éste.

Fue así como descubrió una de las más singulares propiedades de los sistemas caóticos, denominada "dependencia sensitiva de las condiciones iniciales". Significa esta propiedad que, partiendo de dos puntos del espacio de fases, las dos trayectorias correspondientes acaban por divergir, aunque los puntos en cuestión estén tan próximos como queramos. Estos dos puntos representan sendos conjuntos de condiciones iniciales, siendo las trayectorias la distinta evolución del sistema según sea el punto de partida.

Dado que toda medición física de las condiciones iniciales de cualquier sistema conllevará, inevitablemente, un grado de imprecisión, por pequeño que éste sea, se comprende la imposibilidad de predicción a largo plazo del sistema, si éste posee sensibilidad a las condiciones iniciales.

En el modelo climático de Lorenz, éste comprobó que ínfimas variaciones de entrada, comparables a una pequeña borrasca local, se convertían, en breve tiempo, en enormes variaciones de salida de su ordenador. Esto es lo que se conoce por "efecto mariposa", a saber, el hecho de que si hoy agita con sus alas el aire de Pekín una mariposa, puede modificar el clima de Nueva York del mes que viene.

3.5.1.1.- Puntos fijos en las ecuaciones de Lorenz

El espacio de fases de las ecuaciones de Lorenz tiene tres dimensiones: x, y, z. Como hemos visto en secciones anteriores, puede representarse el comportamiento dinámico de un sistema mediante una trayectoria en dicho espacio de fases. Puede observarse que para los valores del conjunto de parámetros ($a = 10$, $r = 14$, y $b = 2.66667$), el comportamiento del sistema es estable, de forma que en el tiempo tiende a uno de dos

puntos fijos, normalmente llamados C+ y C-. Puede comprobar, variando el estado inicial del sistema (pero no los parámetros de control a , r y b), que en unos casos el sistema tiende a uno de los dos puntos fijos y en otros casos al otro.

La posición exacta de los puntos fijos C+ y C- varía a medida que los parámetros de control cambian (siempre que los cambios no sean muy grandes). El sistema tiene otro punto fijo en el origen de coordenadas del espacio de fases ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$). Este punto no cambia de posición con los parámetros, pero es inestable. Para verlo, situamos las condiciones iniciales en (0,0,0) y veremos que el sistema no se mueve de ese punto. Sin embargo, si elegimos como condiciones iniciales (0.2,0,0), el sistema tardará en moverse, pero acabará escapando del origen y convergiendo a C+ o C-. Debido a que todas las trayectorias que empiezan cerca del origen acaban escapando de él, este punto recibe el nombre de *repulsor*. Por el motivo contrario, C+ y C- reciben el nombre de *atractores*.

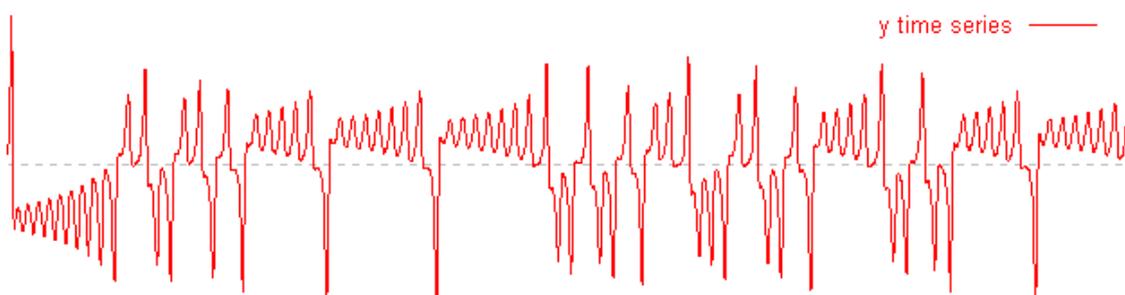
Como hemos mencionado anteriormente, C+ y C- se mueven a medida que los parámetros cambian. El parámetro r se utiliza habitualmente para controlar este hecho. Intentamos por ejemplo disminuir r de una unidad en una unidad. Veremos que los puntos fijos se acercan más y más entre sí hasta que finalmente, cuando r se hace más pequeño que 1, los dos puntos fijos estables se encuentran en el origen y permanecen allí. Es decir, por debajo de $r = 1$ el origen es un punto fijo estable, el único. De hecho, hemos seguido el procedimiento en sentido contrario al que se hace habitualmente. Si el comportamiento del sistema se estudia para r crecientes desde 0, se observa cómo el punto estable en el origen se bifurca en dos puntos fijos estables y uno inestable. Como hemos visto en una sección anterior, este fenómeno se conoce como bifurcación de horca, y tiene lugar para $r = 1$.

Si el parámetro de control se hace muy grande el comportamiento del sistema cambia radicalmente. Los puntos fijos C+ y C- pierden su estabilidad, pero las trayectorias no divergen, sino que se mantienen acotadas en el espacio.

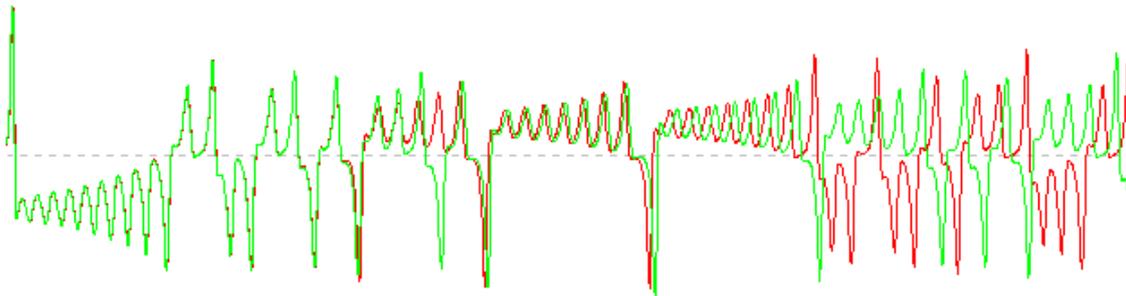
3.5.1.2.- Caos en las ecuaciones de Lorenz

Si r aumenta por encima de cierto valor (siendo $a = 10$ y $b = 2.66667$), ninguno de los puntos fijos es ya un atractor de la trayectoria. Sin embargo, puede demostrarse que la trayectoria está acotada y sin embargo todos los puntos fijos existentes en esta zona acotada del espacio son repulsores.

La trayectoria no tiene ningún sitio hacia donde tender, sino que va de un lado a otro siendo repelida por los tres puntos fijos, y sin embargo acotada en el espacio. Lo único que la trayectoria puede hacer es doblarse sobre sí misma de manera muy compleja. Parece que la curva se corta a sí misma muchas veces, pero esto es sólo una consecuencia de mostrar sólo dos dimensiones. De hecho las leyes de la mecánica impiden que una trayectoria en el espacio de fases se corte a sí misma, por muy larga que sea. La siguiente gráfica muestra una serie temporal de la variable y , donde podemos observar cómo la trayectoria se mueve alrededor de un punto fijo un par de veces, luego pasa al otro, y así sucesivamente, sin tender nunca a un comportamiento predecible a largo plazo.

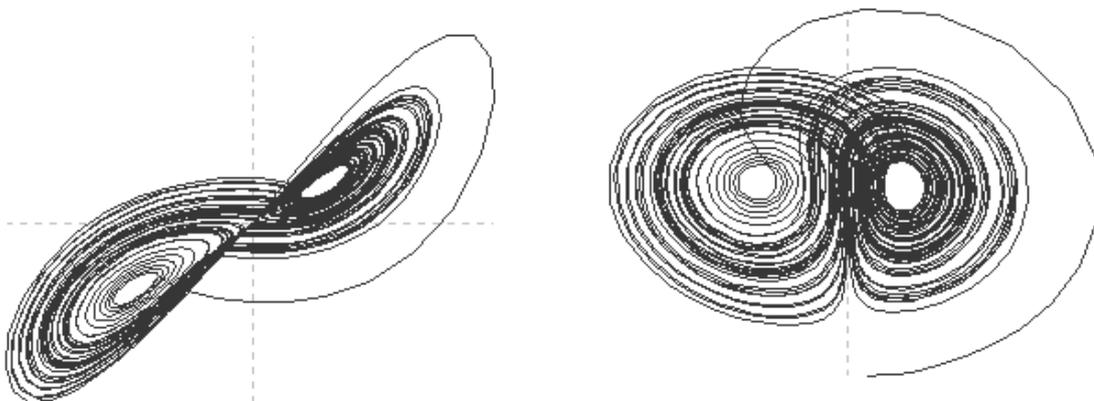


El conjunto de puntos en los que la trayectoria se encuentra recibe el nombre de *atractor*. Dadas las características tan especialmente complejas de este objeto que ya hemos descrito anteriormente, en este caso particular recibe el nombre de *atractor extraño*. Toda trayectoria sigue un camino en este atractor, pero el camino concreto que sigue es impredecible y muy inestable. Este modelo simple de movimiento convectivo en la atmósfera muestra por qué no es posible predecir el tiempo a largo plazo: el más pequeño cambio en las condiciones iniciales puede producir comportamientos a largo plazo extremadamente diferentes. Dos condiciones iniciales muy próximas acaban divergiendo muy rápidamente entre sí. La siguiente gráfica representa esto, mostrando dos series temporales con condiciones iniciales ligeramente diferentes:



Estas dos condiciones son virtualmente indistinguibles al principio, pero finalmente divergen y tienen futuros enteramente diferentes.

Como hemos dicho anteriormente, el sistema de Lorenz es en realidad un sistema tridimensional. La proyección del atractor de Lorenz mostrada en dos dimensiones es la más común, pero pierde toda la información contenida en la variable y . A continuación mostramos el atractor de Lorenz en los planos xy e yz .

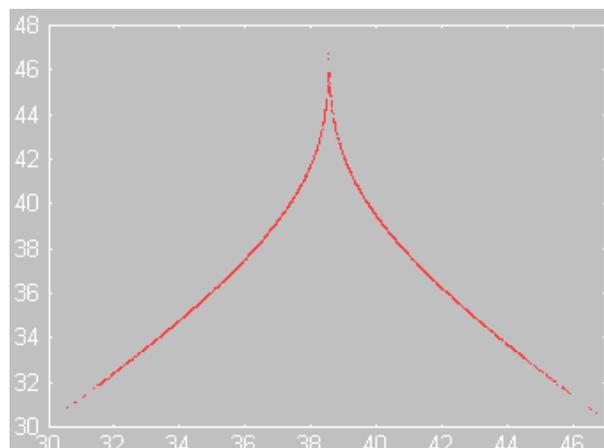


4.5.1.3.- Conclusión

Antes de concluir, conviene hacer notar otras características de las ecuaciones de Lorenz. Una de estas propiedades puede observarse analizando de nuevo la representación de la trayectoria en el plano yz. En palabras de Lorenz:

"Parece ser que la trayectoria abandona una espiral sólo después de exceder una cierta distancia crítica del centro. Además, la cantidad en la que se excede esta distancia parece determinar el punto en que se entra a la otra espiral..."

El significado de esta propiedad de las ecuaciones de Lorenz es el siguiente: si formamos una sucesión de los máximos valores de z en el tiempo, cada máximo ha de predecir el siguiente. Para comprobarlo, representamos el máximo n frente al n+1. Esto se conoce como *aplicación de Lorenz*, independientemente de si esta técnica se usa en las ecuaciones de Lorenz o no.



Los puntos parecen formar una curva bien definida. Esta 'curva' no es de hecho una curva, es un objeto de dimensión mayor a 1, pero es algo muy parecido a una curva.

A partir de ella podemos predecir el siguiente máximo de z, a partir del máximo anterior. Este es un resultado muy importante, ya que hemos de recordar que los sistemas caóticos son intrínsecamente impredecibles. Este nuevo método nos permite hacer alguna predicción.

Antes de finalizar este breve estudio de las ecuaciones de Lorenz, es interesante señalar una aplicación interesante de este sistema caótico. Se trata de utilizar las ecuaciones de Lorenz para codificar de forma segura información secreta. Esta técnica ha sido desarrollada por Kevin Cuomo y Alan Oppenheim, a partir de los trabajos de Lou Pecora y Tim Carroll sobre sincronización de caos. Se trata de construir un circuito (cuyo comportamiento sigue las ecuaciones de Lorenz) y utilizarlo para enmascarar un mensaje con ruido caótico mucho más intenso proveniente de la variable x de las ecuaciones de Lorenz. Esta señal no puede ser descifrada porque la máscara es caótica. Sin embargo, utilizando un elemento electrónico especial, esta señal puede introducirse en el receptor (un circuito idéntico al emisor) de manera que las variables y, z de éste se sincronizan con las originales, con lo que la máscara se puede eliminar y el mensaje se puede descifrar. Sólo aquellos individuos que dispongan del circuito adecuado podrán descifrar

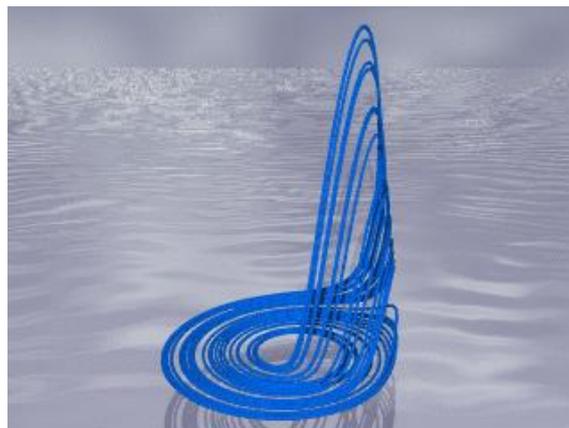
el mensaje. Puede comprobarse que cualquier error introducido en el sistema desaparece exponencialmente rápido, por lo que el método es viable.

3.5.2.- Atractor de Rössler

Este atractor no difiere mucho del de Lorenz, es un poco más sencillo (sólo tiene un término no lineal, el xz); lo descubrió Otto Rössler al estudiar las oscilaciones en las reacciones químicas, llegando a dar un modelo que tenía un comportamiento caótico para ciertos valores de los parámetros.

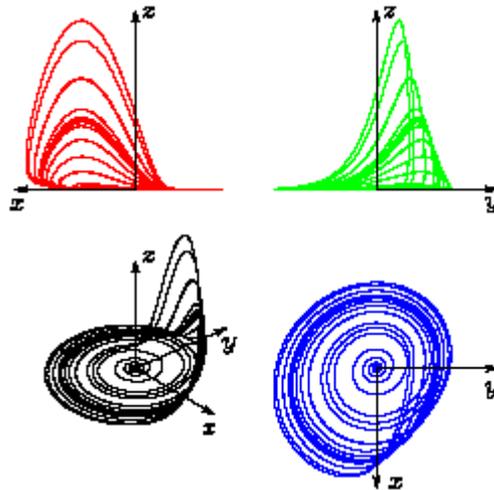
$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= -y - z \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= x + ay \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= b + xz - cz\end{aligned}$$

Donde $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son las variables espaciales, función del tiempo (variable independiente); a , b , c son parámetros de la reacción, para que se presente el caso de atractor caótico debe ser $c > 5$.



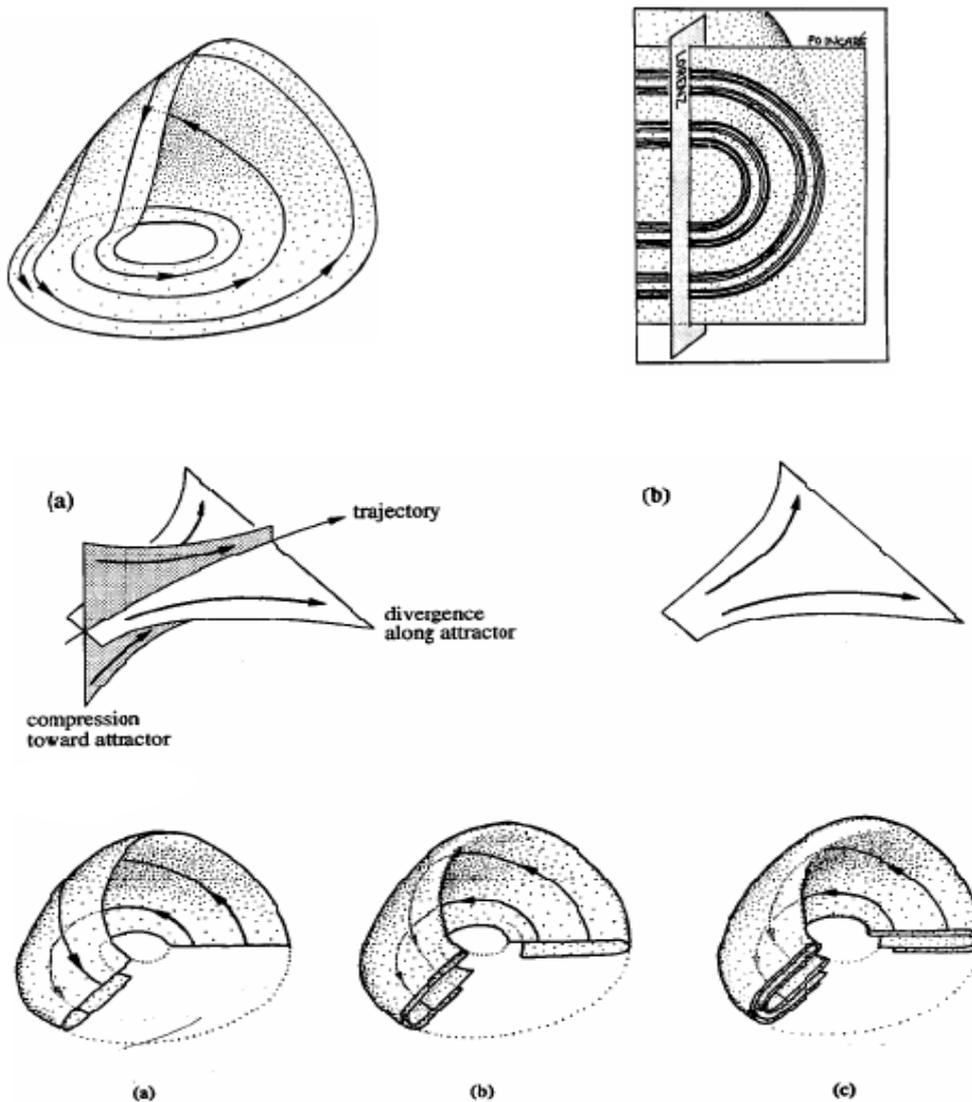
Atractor de Rössler en el espacio de fases tridimensional.

En temas anteriores vimos que el sistema, al aumentar c , sufre una cascada de duplicaciones de periodo conducentes al caos. Numéricamente, encontramos que el sistema posee un atractor extraño para $a = b = 0.2$, $c = 5.7$. El dibujo esquemático del atractor muestra como trayectorias cercanas se separan en la espiral (estiramiento), se cruzan con otras yendo a la tercera dimensión (plegado) y vuelven a circular a zonas cercanas a la inicial (re-inyección).



Proyecciones de una órbita del atractor de Rössler

Las secciones de Poincaré y de Lorenz del atractor revelan que el atractor es topológicamente equivalente al producto cartesiano de una cinta y un conjunto de Cantor.



3.5.3.- Oscilador de doble pozo forzado

El oscilador de doble pozo forzado (también llamado duffing oscillator) es un ejemplo de un oscilador periódico forzado con una elasticidad no lineal:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos \omega t$$

Donde la constante de amortiguamiento es $\delta \geq 0$, que es un modelo simple en el que también se produce caos, como en el oscilador de Van der Pol.

Para $\beta > 0$, el oscilador de Duffing puede ser interpretado como un oscilador forzado con un muelle que ejerce una fuerza escrita como:

$$F = -\beta x - \alpha x^3$$

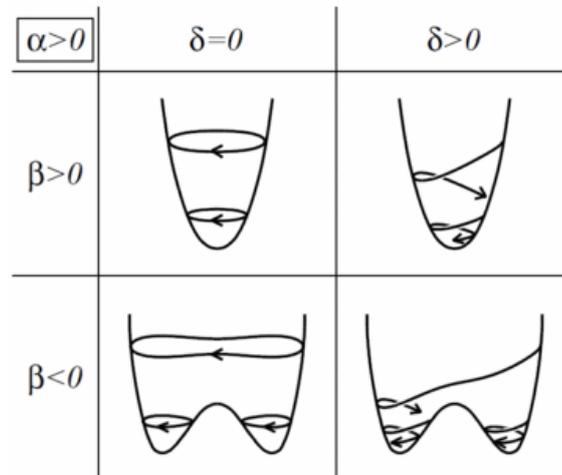
Cuando $\alpha > 0$, tenemos una oscilación llamada "hardening spring", y cuando $\alpha < 0$ recibe el nombre de "softening spring" aunque esta interpretación es válida solamente para pequeñas oscilaciones.

Para $\beta < 0$, el oscilador de duffing describe el movimiento de una partícula en un doble pozo de potencial, y se puede considerar como una varilla de acero que tiene un extremo fijado en un soporte rígido mientras el otro puede oscilar entre dos imanes colocados simétricamente.

En ausencia de fuerza externa ($\gamma=0$) y amortiguamiento ($\delta=0$), el oscilador de duffing se comporta como un sistema Hamiltoniano (oscilación periódica) y sigue la siguiente fórmula:

$$E(t) \equiv \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\beta x^2 + \frac{1}{4}\alpha x^4 = \text{const}$$

La forma de la energía la podemos ver en la siguiente figura:



Forma de la Energía para $\alpha > 0$.

Podemos observar que la energía tiene un solo pozo potencial para $\beta > 0$, mientras que con $\beta < 0$ tenemos un doble pozo potencial. La oscilación de x se mueve en la superficie de $E(t)$ manteniéndola constante.

Cuando $\delta > 0$, $E(t)$ cumple que:

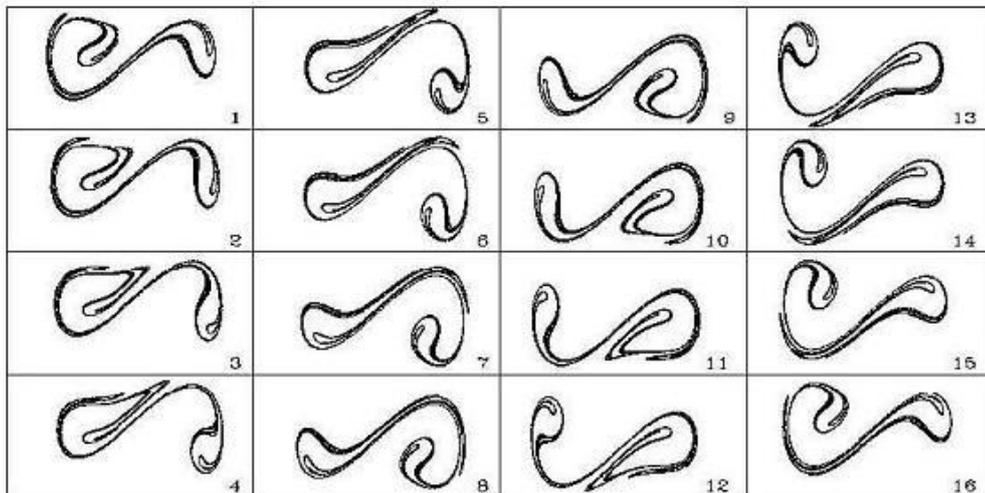
$$\frac{dE(t)}{dt} = -\delta \dot{x}^2 \leq 0$$

De esta manera, la trayectoria de x se mueve en la superficie de $E(t)$ decreméntandola hasta que converja a uno de los puntos de equilibrio donde la primera derivada de x es cero. Para $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\delta > 0$, el único punto de equilibrio es el origen. $E(t)$ será cero si y solo si $x=(0,0)$.

Para examinar la respuesta del sistema a una oscilación periódica forzada, debemos reescribir la primera ecuación de esta manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta \dot{x} - \beta x - \alpha x^3 + \gamma \cos \psi \\ \omega \end{pmatrix}$$

Donde $\psi(0)=0$. Es conveniente mencionar que el eje ψ describe un círculo porque ψ puede ser considerada periódica con periodo 2π . Dibujando el espacio de fases cuando el sistema atraviesa la sección de Poincaré ($\psi=\psi_0$), aparece un atractor extraño para valores concretos de los parámetros. Se producen cambios periódicos en cada atractor cuando ψ aumenta de 0 a 2π como muestra la figura siguiente, donde se pueden apreciar las propiedades de estiramiento y plegado del caos.



4.- SISTEMAS SIMULADOS

Hasta ahora, hemos introducido teóricamente el comportamiento de diversos sistemas dinámicos ante distintos valores iniciales. En este apartado representaremos y estudiaremos algunos de esos sistemas usando el método de redes, para la implementación de los sistemas mediante un circuito eléctrico, y el software Pspice para resolverlos.

Primero introduciremos dos tipos de osciladores básicos y observaremos que el resultado obtenido con Pspice se corresponde con los estudios teóricos vistos hasta ahora. En segundo lugar veremos dos tipos de osciladores más complejos que presentan un claro comportamiento caótico para un margen de valores concretos, que estudiaremos y representaremos usando Pspice para demostrar que el método de redes es una herramienta eficiente y muy útil para la resolución de todo tipo de sistemas dinámicos.

4.1.- OSCILADOR NO ARMÓNICO

El oscilador periódico o simple lo vimos en el apartado 4.6.1, y como veremos, es el sistema oscilador más básico que existe. En este apartado nos centraremos en mostrar los resultados obtenidos con Pspice al comparar un oscilador no armónico respecto a una oscilación armónica pura y sacaremos algunas conclusiones de interés.

4.1.1.- Ecuación de definición

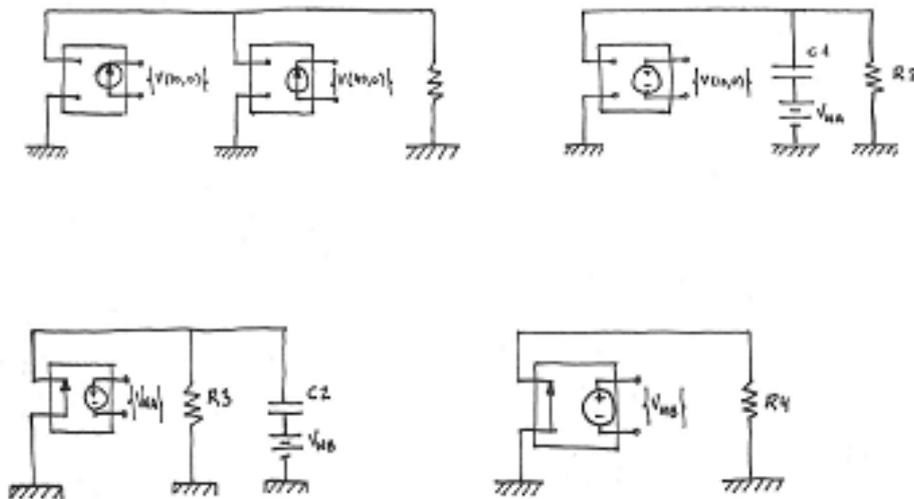
Para representar este tipo de oscilación usaremos la siguiente ecuación:

$$d^2y/dt^2 = -A_0 \text{sen}(y)$$

Donde la variable que únicamente depende del tiempo es “y”, que representa la posición de la partícula y la segunda derivada de la variable que representa la aceleración. El valor A_0 representa la amplitud de la oscilación.

4.1.2.- Análogo eléctrico

Usando el método de redes para obtener el circuito equivalente a las ecuaciones en definición, el modelo en red se obtiene enseguida:

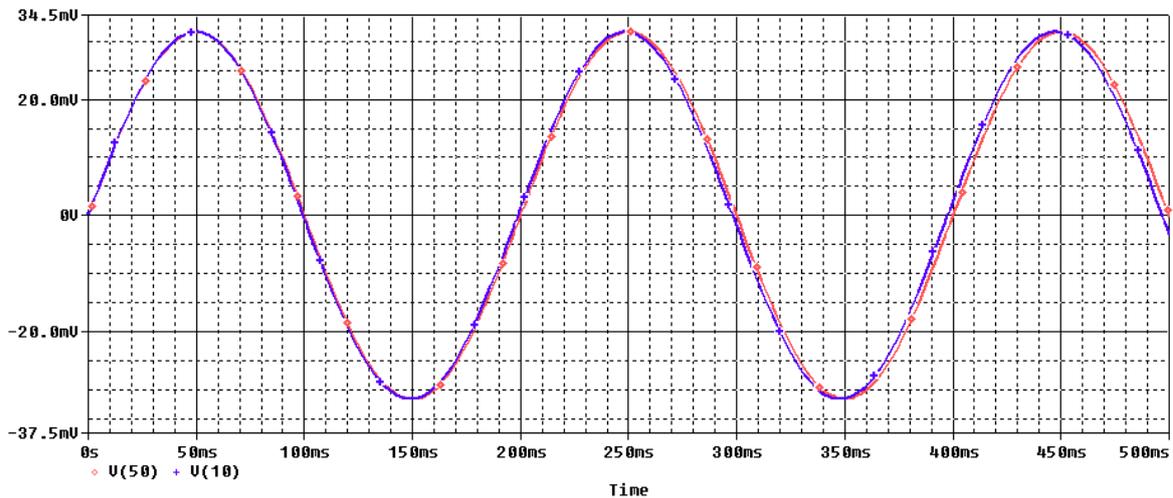


4.1.3.- Ejemplos de cálculo

En este apartado representaremos los resultados obtenidos con Pspice.

4.1.3.1.- Evolución temporal del sistema

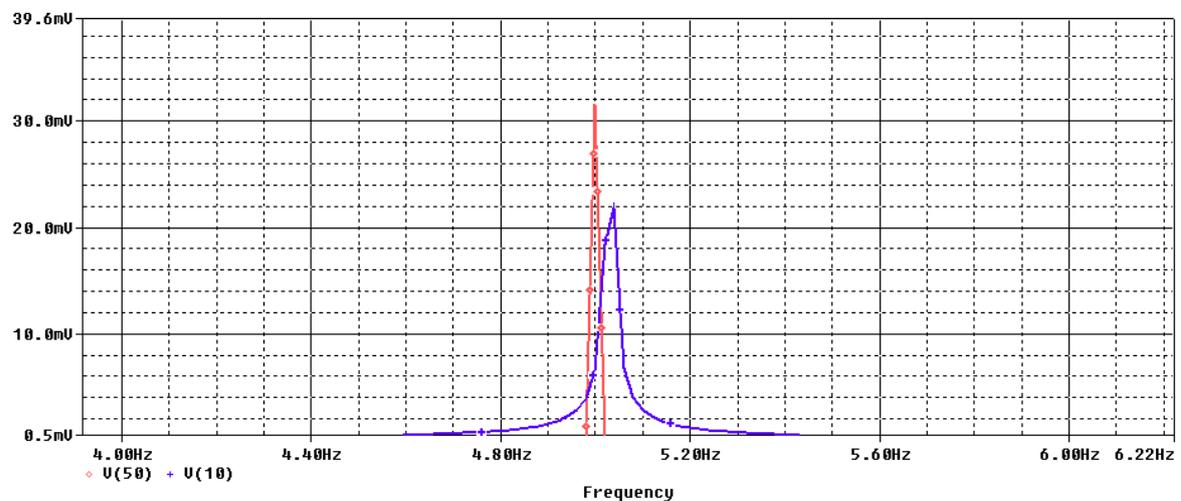
Una manera directa de visualizar las diferencias entre ambos tipos de osciladores, es analizar su evolución temporal superponiendo el oscilador no armónico y el oscilador armónico puro.



Comparación de un oscilador no armónico (azul) y otro armónico (rojo)

Como observamos, ambas oscilaciones son exactamente iguales en los primeros instantes de la simulación, pero transcurridos nada más que 75 ms, se puede ver como el oscilador no armónico se desfasa respecto al armónico. Para comprobar de una forma más clara y eficiente este comportamiento, es interesante analizar su respuesta frecuencial.

4.1.3.2.- Respuesta en frecuencia



Respuesta en frecuencia de un oscilador no armónico (azul) y uno armónico puro (rojo) de 5Hz

Como se puede apreciar, el oscilador armónico puro tiene unas bandas de transición muy abruptas y un máximo de 31.8 mV en la frecuencia de 5 Hz, mientras que el oscilador no armónico tiene unas bandas de transición más suaves y llega a un máximo de 22 mV.

4.2.- OSCILADOR AMORTIGUADO

En apartados anteriores vimos el comportamiento de este oscilador. Ahora nos centraremos en presentar los resultados obtenidos con Pspice y sacar algunas conclusiones de interés.

4.2.1.- Ecuación de definición

Tal como vimos en el apartado 4.6.2, el oscilador amortiguado viene dado por la expresión:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0$$

Donde llamaremos $\alpha = \omega_0$ y $\beta = 2\gamma$ y se nos quedará una ecuación:

$$d^2y/dt^2 = -\alpha y - \beta(dy/dt)$$

Donde la variable que únicamente depende del tiempo es "y", que representa la posición de la partícula, su primera derivada que representa la velocidad, y su segunda derivada que representa la aceleración de dicha partícula.

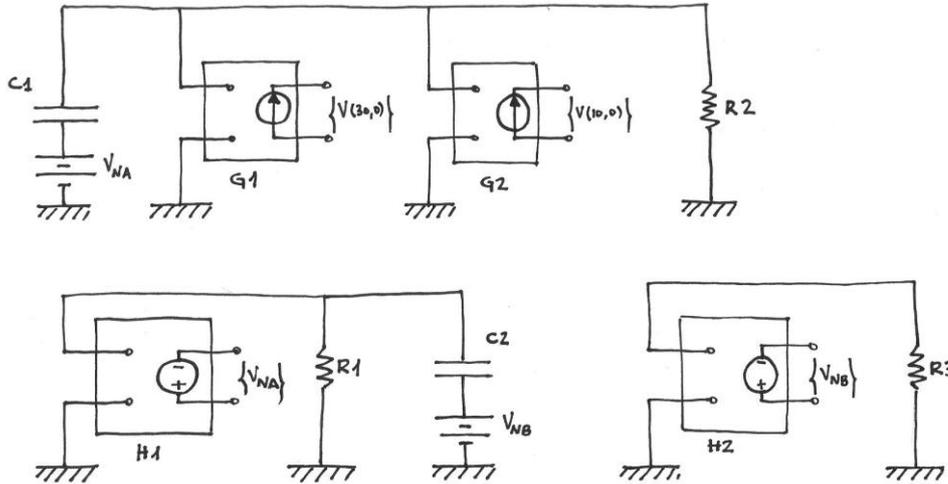
Además tenemos los dos parámetros que intervienen en la ecuación:

" α " coeficiente de amortiguamiento.

" β " coeficiente del medio físico que rodea al sistema.

4.2.2.- Análogo eléctrico

Usando el método de redes para obtener el circuito equivalente a las ecuaciones en definición, el modelo en red se obtiene enseguida:



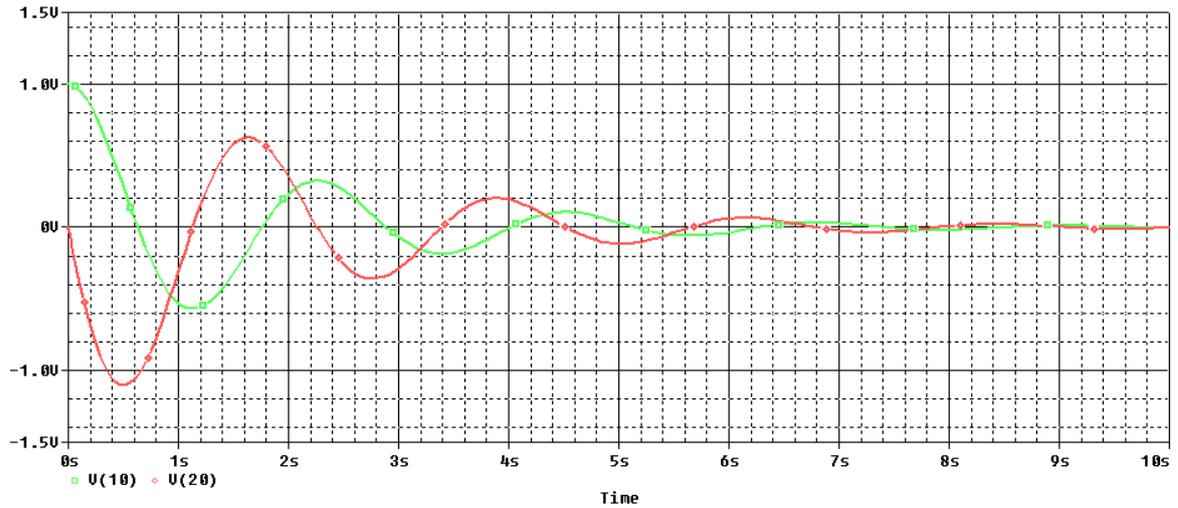
4.2.3.- Ejemplos de cálculo

Una vez obtenido el modelo en red del sistema, presentaremos los resultados obtenidos gráficamente usando Pspice.

4.2.3.1.- Evolución temporal del sistema

Es interesante ver la evolución de temporal de este sistema donde se refleja la relación entre la posición y la velocidad de una partícula para los distintos casos que veremos de oscilación amortiguada.

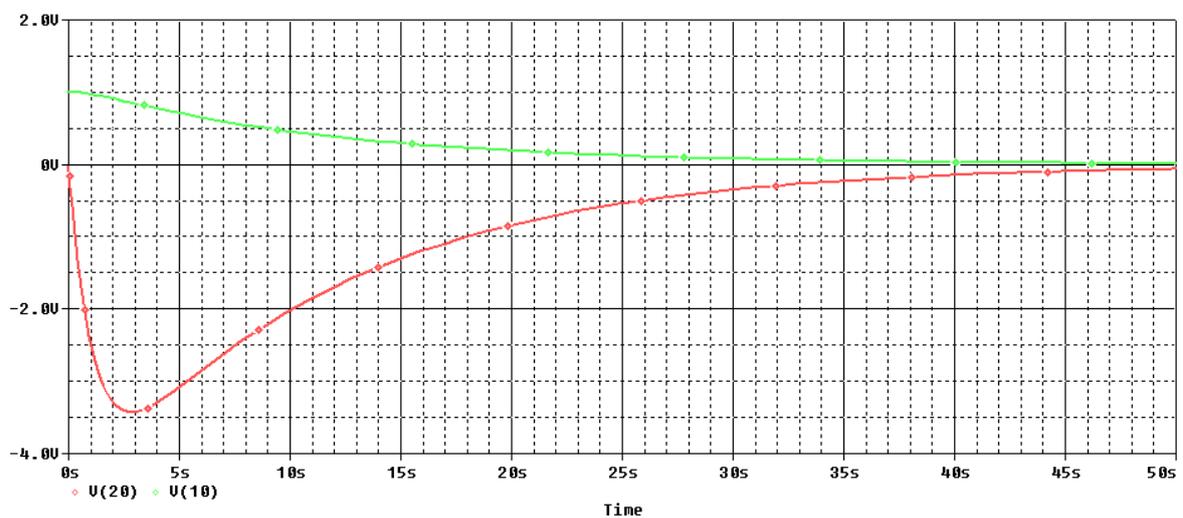
Como vimos en el apartado 4.6.2, podemos distinguir tres tipos de oscilaciones amortiguadas: las de amortiguamiento débil, amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.



Oscilación amortiguada para $\alpha=4$ y $\beta=0.5$ (Amortiguamiento débil)

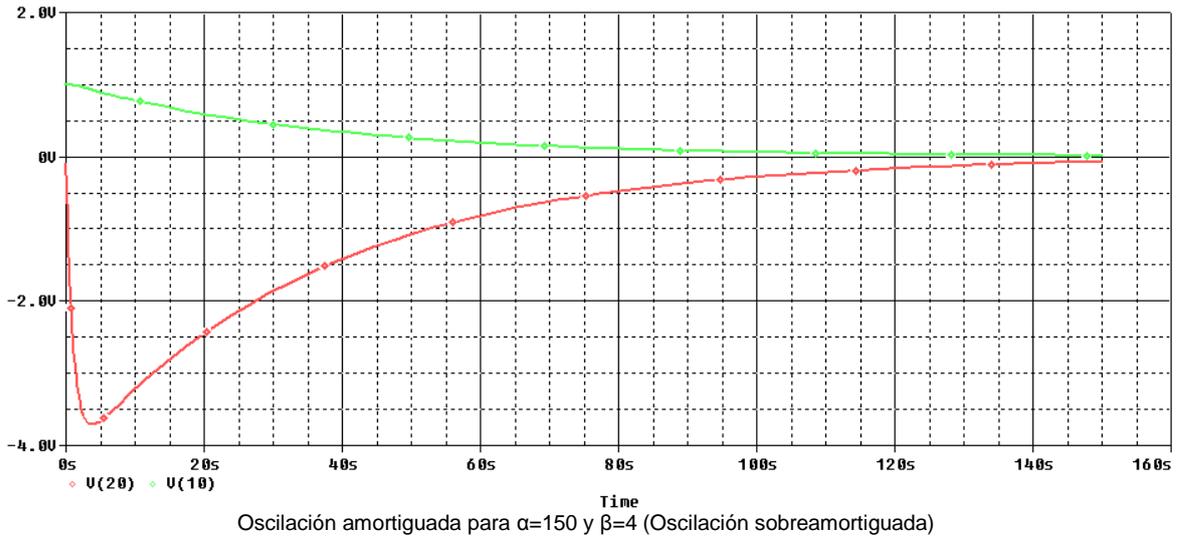
Podemos apreciar como la posición de la partícula ($V(10)$) se corresponde con su velocidad ($V(20)$) ya que en cada máximo y mínimo de la posición coincide que su velocidad se hace cero. El sistema irá oscilando hasta converger en un punto estable.

En el caso de una oscilación amortiguada crítica, no tendremos oscilación ya que el coeficiente de amortiguamiento es muy grande, por lo que la posición de la partícula se aproximará gradualmente a su posición de equilibrio.



Oscilación amortiguada para $\alpha=50$ y $\beta=4$ (Amortiguamiento crítico)

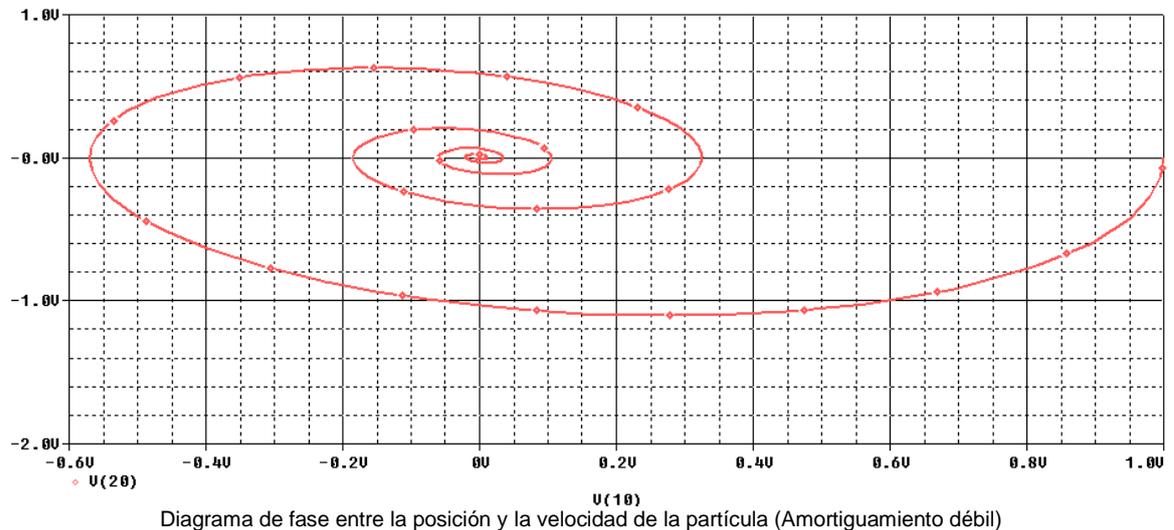
En la oscilación sobreamortiguada, como en la crítica, no tenemos ningún tipo de oscilación. Sin embargo, la partícula se aproxima de una manera más brusca al punto de equilibrio.



Una vez analizados estos casos, veremos el diagrama de fase del sistema en cada caso particular donde podemos ver de una manera más clara la relación entre la posición y la velocidad de una partícula.

4.2.3.2.- Diagramas de fase

La característica esencial de la oscilación amortiguada es que la amplitud de la oscilación disminuye exponencialmente con el tiempo. Por tanto, la energía del oscilador también disminuye. Estas pérdidas de energía son debidas al trabajo de la fuerza de rozamiento opuesta a la velocidad. En el espacio de las fases vemos que el móvil describe una espiral que converge hacia el origen.



En los casos de oscilación crítica y sobreamortiguada, donde no tenemos oscilación, podemos ver claramente que el móvil se desplaza desde la posición inicial al origen gradualmente de manera suave, como muestra la siguiente figura, con un máximo de tensión en su velocidad de 3.426 v (en valor absoluto).

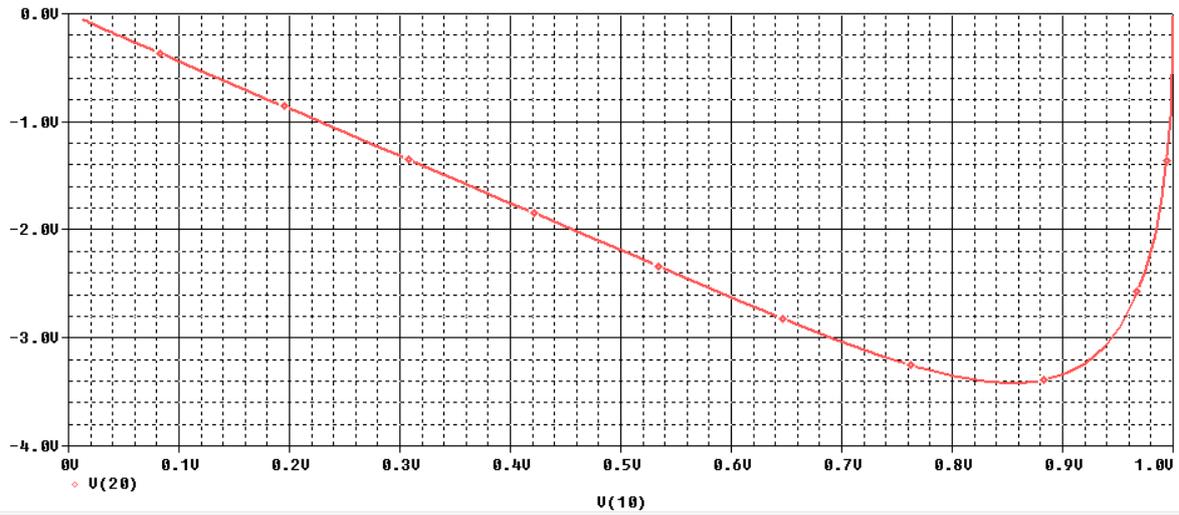


Diagrama de fase entre la posición y la velocidad de la partícula (Amortiguamiento crítico)

En la siguiente figura podemos observar que la oscilación sobreamortiguada no difiere mucho de la crítica, sin embargo, el valor máximo de la tensión es de 3.766 mV y la partícula tiende a cero más abruptamente.

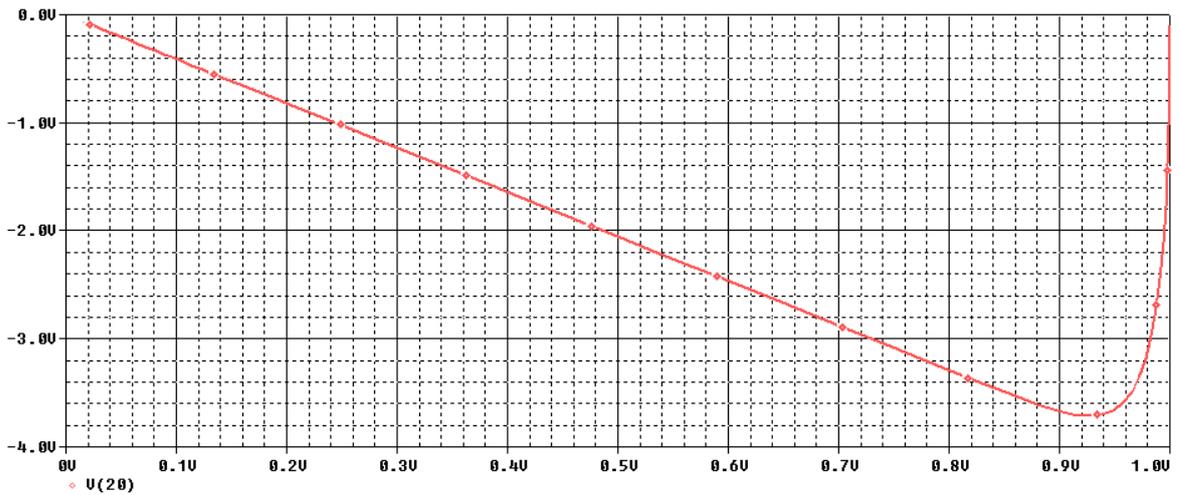


Diagrama de fase entre la posición y la velocidad de la partícula (Osc. Sobreamortiguada)

4.3.- ATRACTOR DE LORENZ

Con anterioridad hicimos una introducción a este atractor en el apartado 4.7.1 mostrando algunas de sus representaciones más típicas y describiendo sus características principales, cómo fue descubierto y otros datos de interés.

En este punto, por tanto, vamos a limitarnos a presentar los resultados de nuestro estudio con gráficas y resultados obtenidos de nuestra experiencia y a partir de ahí sacaremos algunas conclusiones de interés.

4.3.1.- Ecuaciones de definición

Aunque también fueron presentadas con anterioridad volvemos a escribir las ecuaciones que representan el atractor así como la definición de cada uno de los parámetros y variables que las componen. Son un conjunto de tres ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, para cada una de las tres variables x , y , z . El modelo atmosférico que utilizó Lorenz consiste en una atmósfera bidimensional rectangular, cuyo extremo inferior está a una temperatura mayor que el superior; dichas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= a(y - x) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= rx - y - xz \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= xy - bz\end{aligned}$$

Donde las variables que únicamente dependen del tiempo son:

"x" representa el flujo convectivo

"y" es la distribución de temperaturas horizontal

"z" es la distribución de temperaturas vertical

Además tenemos de los tres parámetros que intervienen en las ecuaciones:

"a" cociente entre la viscosidad y la conductividad térmica

"r" la diferencia de temperaturas entre las capas inferior y superior

"b" el cociente entre la altura y el ancho de nuestro rectángulo

4.3.2.- Análogo eléctrico

El caso del atractor de Lorenz es uno de los más clásicos de la dinámica no lineal moderna, ya que simboliza el orden dentro del caos. Se trata de un conjunto de tres ecuaciones diferenciales, no lineales y acopladas y las condiciones de contorno.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= a(y - x) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= rx - y - xz \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= xy - bz \\ x(0) &= y(0) = z(0) = 1 \end{aligned}$$

Los parámetros a y r se suelen denominar, respectivamente, números de Prandtl y Rayleigh (en realidad, este último es el cociente entre los números de Rayleigh y de Rayleigh crítico), mientras que b es un factor geométrico.

El diseño del modelo en red es inmediato, figura 1. El miembro de la izquierda de las ecuaciones se implementa en el modelo mediante un simple condensador de capacidad la unidad, pues la relación entre tensión (V) y corriente (j) en un condensador viene dada por la ecuación $j = C (dV/dt)$. En cuanto a los miembros de la derecha, estos se implementan mediante un (mismo) dispositivo, una fuente controlada cuya corriente se define mediante programación. Para la definición de esta corriente puede recurrirse a las tensiones de los condensadores $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ que, a su vez, son la solución del problema.

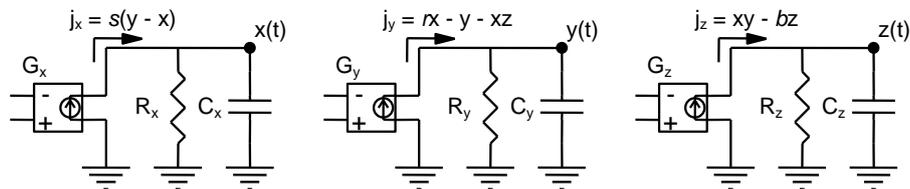


Fig. 1. Modelo en red de la celda universal

4.3.3.- Ejemplos de cálculo

A continuación presentaremos en varios apartados los resultados obtenidos en el estudio del proyecto.

4.1.3.1.- Evolución temporal de las coordenadas

Como ya vimos en el modelo en red del sistema, lo que tenemos es un circuito cuya evolución temporal se puede analizar a través de la salida que da PSpice para cada uno de los valores de tensión de los condensadores, siendo esos valores de tensión los de cada una de las coordenadas x , y , z .

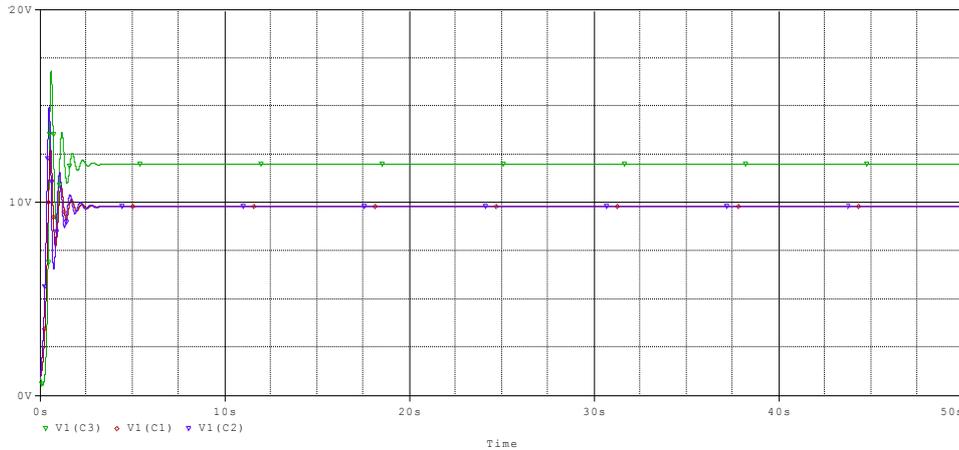
Seguidamente mostramos dicha evolución temporal para algunos casos que hemos considerado más interesantes, separando algunas de las respuestas en distintas gráficas para su mejor comprensión:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 10 \\ b = 8/3 \\ t \in [0,50s] \\ \Delta t = 0.001s \end{array} \right. \quad \text{Estos parámetros se mantienen constantes en todos los casos.}$$

Vamos a representar sólo los ejemplos más representativos de los calculados en el proyecto, ya que el resto de gráficas temporales son de muy similares características, si bien cambian las coordenadas de los puntos x , y , z , y los instantes de tiempo en que estas variables cambian de valor.

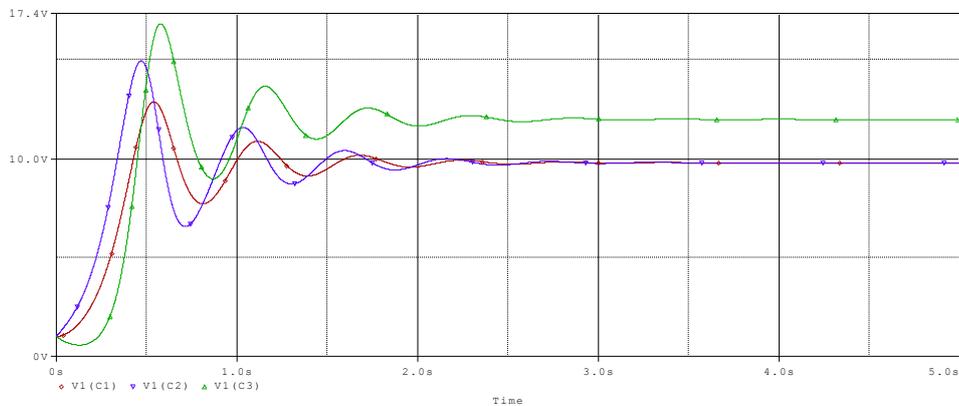
Estos ejemplos serán el caso de $r = 13$ donde se empieza a localizar un atractor en las coordenadas positivas del plano x , y , z ; $r = 99$ donde el atractor cambia de posición a coordenadas negativas del plano x , y , y positivo en z ; por último el caso de $r = 150$ donde ya no hay un atractor localizado y podemos observar la doble bifurcación en una zona acotada del espacio.

$r = 13$



Donde V1(C1), V1(C2) y V1(C3) son x, y, z, respectivamente.

En este caso en el que $r = 13$ hemos representado la evolución temporal de las tres variables x, y, z, en una misma gráfica ya que se puede ver perfectamente la variación de las tres conjuntamente. Si ampliamos sobre los primeros cinco segundos de simulación podemos observar que tras una pequeña fluctuación entre $t = 0s$ y $t = 4s$, a partir de ese momento las tres variables tienden a un valor casi constante.



Luego podemos deducir que no se produce comportamiento caótico y al mismo tiempo que el atractor estará definido en una región del espacio, de coordenadas $x = y$ y próximas a 10 y coordenada z próxima a 12.

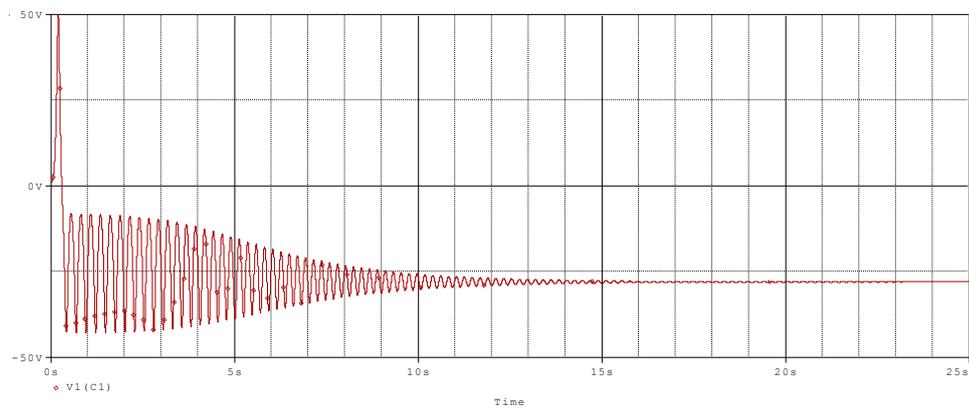
Efectivamente si vamos a la salida de PSpice y comprobamos el valor numérico de las coordenadas del atractor para este caso vemos que las mismas son:

$x = y = 9.79796$, $z = 12$ y que a partir del cuarto segundo de simulación la variación de estos valores es del orden de las milésimas.

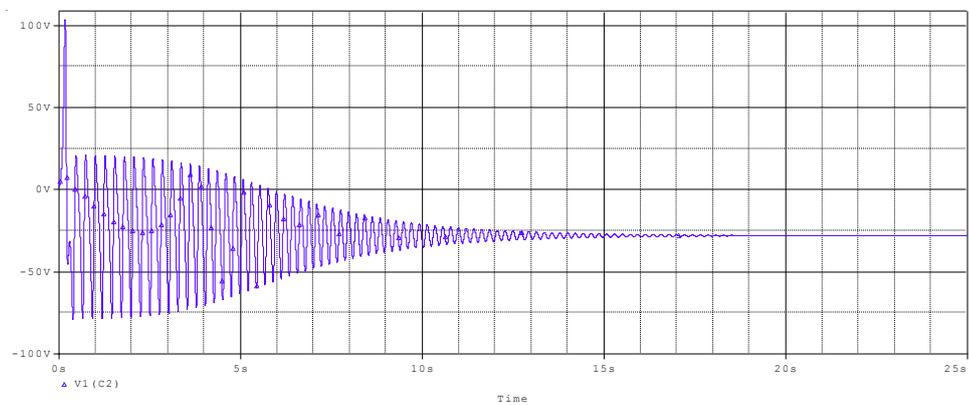
- $r = 99$

En este caso la respuesta temporal fluctúa durante algo más de 20 segundos y a partir de ese momento parece casi constante, por lo que representaremos en las siguientes gráficas la respuesta de cada una de las variables x , y , z , desde 0 hasta 25 segundos.

A partir de este punto representaremos las variables en gráficas separadas para poder observar con más claridad su comportamiento.

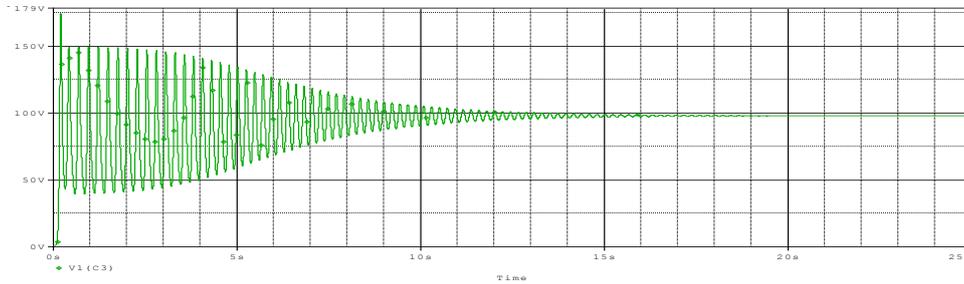


Donde V1(C1) representa a la variable x



Donde V1(C2) representa a la variable y

Para las variables x , y , la respuesta es muy similar, de hecho, a partir del instante $t = 25s$ tienden a un valor muy cercano a -30 , para ser exactos a -28 (valor que nos da la salida de PSpice).

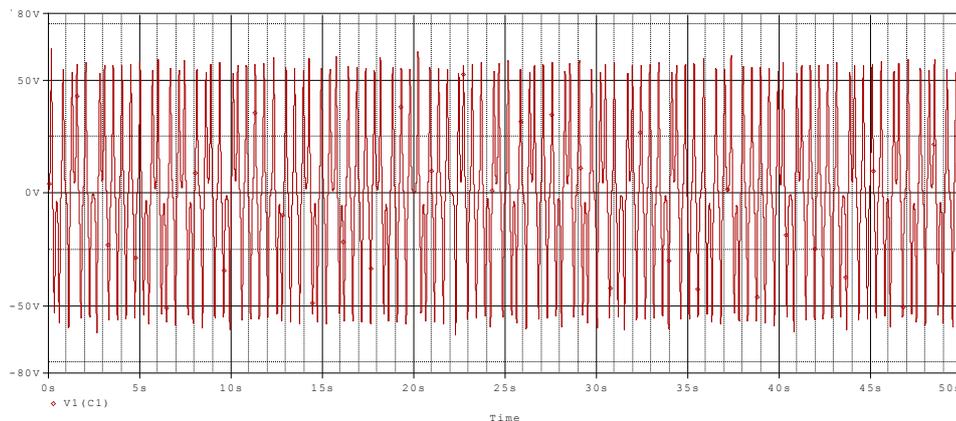


Donde V1(C3) representa a la variable z

Para la variable z vemos que la respuesta es de tipo similar a la de x , y , pero su valor es muy distinto, si bien tiende a estabilizarse a partir del mismo instante de tiempo. Vemos que el valor se aproxima a $z = 100$, para ser exactos la coordenada z del atractor es 98.

- **$r = 150$**

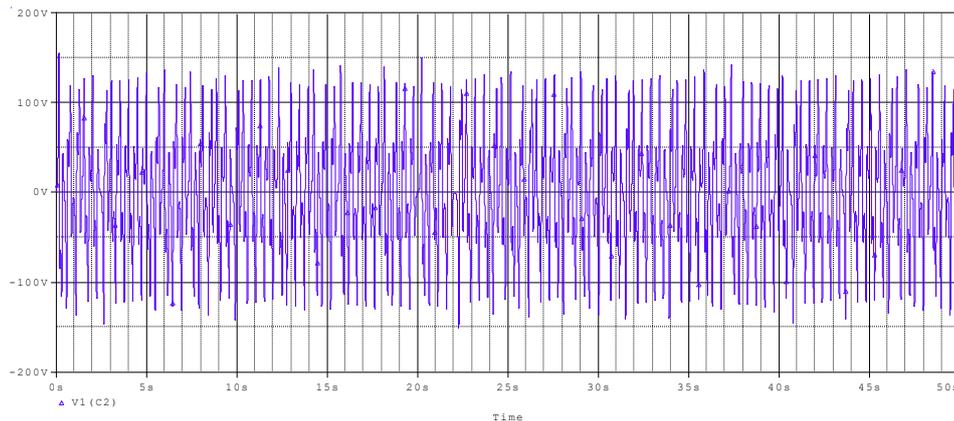
Como comprobaremos más adelante, a partir del valor $r = 100$ deja de haber un atractor localizado y el sistema se vuelve caótico, se bifurca doblemente y empieza a rotar alrededor de dos focos sobre los cuales gira pero hacia los que nunca se acerca; es por eso que para este caso en que $r = 150$, representaremos la evolución temporal de las variables para los 50 segundos de simulación y no para intervalos de tiempo menores como hicimos en los casos anteriores.



Donde V1(C1) representa a la variable x

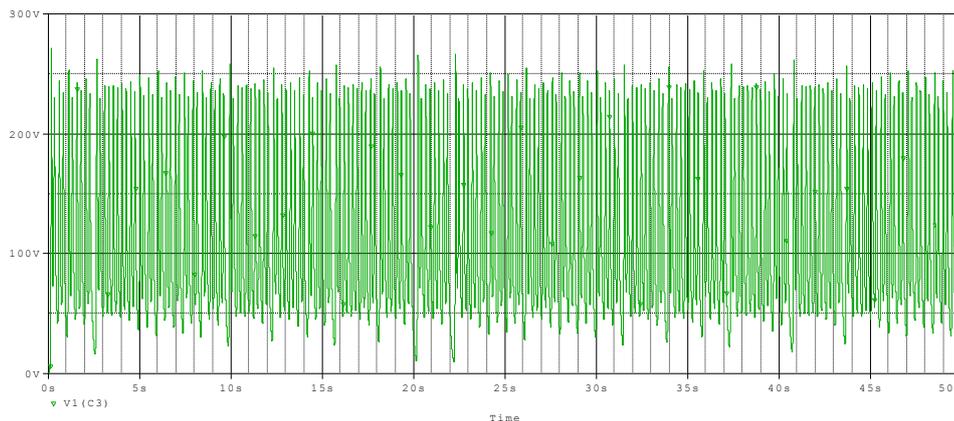
Vemos un comportamiento aparentemente caótico, y así es, pero hacemos notar algo interesante y es que los valores de x , aunque fluctúan de manera aleatoria alrededor del

valor 0, están acotados en una región del espacio para su coordenada vertical, donde vemos que nunca supera el valor de 65 (en valor absoluto). De hecho estos valores máximos absolutos reales son 64.0304 y -62.8498. Cuando representemos las imágenes del atractor para estos valores de r podremos observar que esto significa lo que apuntábamos anteriormente; que el atractor da vueltas alrededor de unas determinadas zonas del espacio, quedando a su vez su movimiento acotado en otras zonas del mismo (cuando se representa en 3D).



Donde V1(C2) representa a la variable y

Aquí observamos un comportamiento similar al de la variable x , si bien los valores entre los cuales está acotada la variable y son distintos, en este caso valores entre 160 y -160. Para ser exactos esos valores son 155.213 y -150.142.



Donde V1(C3) representa a la variable z

De nuevo observamos el mismo comportamiento en la variable z , y de nuevo sus valores quedan acotados en una región del espacio cuyos valores exactos son 271.316 y 0.90224.

4.3.3.2.- Atractores en función de los parámetros

En este punto vamos a representar las gráficas del atractor para los distintos valores de los parámetros estudiados y a la vista de dichas gráficas obtendremos algunos datos y presentaremos algunas conclusiones interesantes.

Las gráficas que representaremos no se han escogido de manera aleatoria ni tampoco los valores de los parámetros utilizados en la simulación. Para determinar los que finalmente representamos se realizaron simulaciones con diferentes valores de cada uno de los parámetros (a , b , r , t , Δt) y en vista de los resultados que se iban obteniendo escogimos como más representativos y válidos los que indicamos a continuación:

Los valores de los parámetros que hemos considerado constantes durante el estudio son para los valores de a y b los que se han obtenido de la bibliografía y son los más comúnmente aceptados para este atractor ($a = 10$, $b = 8/3$).

El intervalo de tiempo de simulación se ha escogido entre 0 y 50 segundos para obtener una representación del atractor adecuada, si bien para determinados valores de r pudimos comprobar que intervalos de tiempo menores eran suficientes; con este tiempo entre 0 y 50 segundos obtenemos un mayor número de puntos para representar el atractor; y lo mismo con el intervalo de tiempo entre un valor y el siguiente, en nuestro caso 0.001 segundos, tiempo suficiente para representar el atractor con la continuidad necesaria, es decir, con una densidad de puntos tal que las líneas realmente representen la evolución de atractor y no haya zonas rectas o discontinuidades.

Hemos de aclarar en este punto que otro parámetro importante del que aún no hemos hablado es la tolerancia del resultado. Este parámetro se fija en PSpice y representa lo cerca que tienen que estar los puntos en la simulación para que el programa los considere buenos, como solución válida del sistema de ecuaciones. Esta tolerancia es un parámetro muy importante en la simulación, pues variar su valor puede cambiar los resultados por completo, alejándose de la realidad del atractor. Las soluciones al sistema de ecuaciones pueden ser totalmente diferentes con sólo cambiar la tolerancia de las milésimas a las diezmilésimas, por ejemplo. En nuestro caso el valor adoptado para esta tolerancia es de 0.00001, cantidad suficiente para obtener datos de gran exactitud.

En lo que se refiere a las condiciones de partida hemos considerado el punto (1,1,1) para todas las gráficas, ya que el (0,0,0) es un caso particular para el atractor de Lorenz y los resultados no son factibles para nuestro estudio.

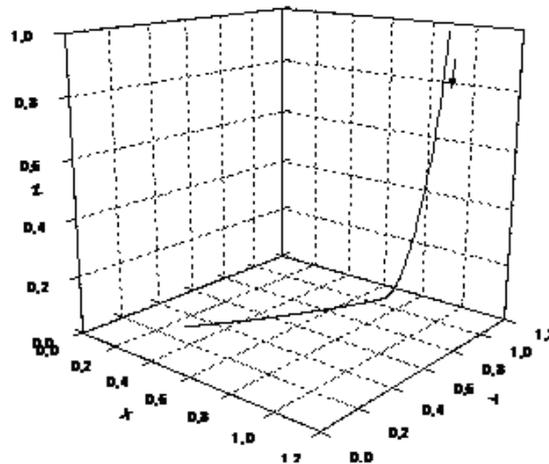
Finalmente los valores de nuestros parámetros que se consideran constantes durante la simulación son los siguientes:

$$\begin{cases} a = 10 \\ b = 8/3 \\ t \in [0,50]s \\ \Delta t = 0.001s \end{cases}$$

Por tanto hemos dicho que el valor que vamos a ir variando es el de r , y en función de él representaremos las gráficas en 3D del atractor de Lorenz.

Inicialmente empezamos a simular a grandes saltos en el valor de r para ver qué soluciones obteníamos y a partir de ahí delimitar las que iban a ser de mayor interés para nuestro propósito. A partir de esto fuimos delimitando algunas zonas más interesantes y realizando simulaciones con más detenimiento; finalmente exponemos aquí los resultados para los valores de r que consideramos más representativos.

- $r = 1$

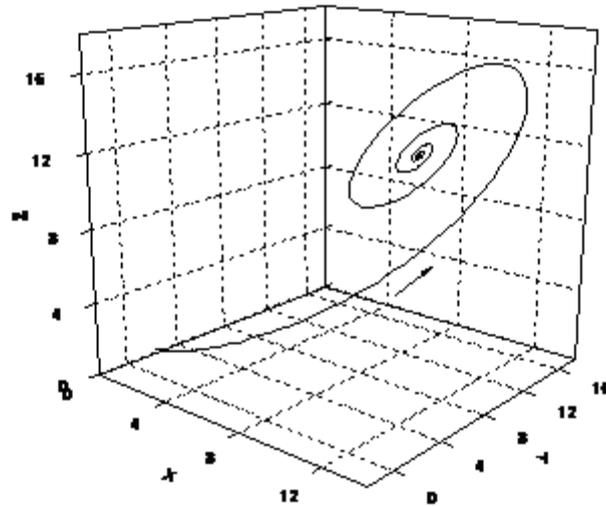


La gráfica parte del punto (1,1,1) y a partir de ahí empieza a desplazarse rápidamente hacia abajo hasta llegar a un instante en que hace una curva más cerrada y a partir del cual empieza a ir más lenta. La velocidad con la que evoluciona la gráfica depende de la cantidad de puntos que haya en cada región de dicha gráfica, por tanto en el primer segundo de simulación los puntos están mucho más espaciados que a partir de ese instante, donde cada vez están más juntos y por tanto la gráfica avanza a mucha menos velocidad, acercándose poco a poco al punto (0,0,0).

En la simulación que realizamos nosotros la gráfica no llega a dicho punto, pero cuando la hicimos hasta un instante de tiempo t mayor (del orden de 1000 segundos) pudimos observar la tendencia que estamos apuntando.

Lo que en todo caso nos tiene que interesar de este ejemplo es que no se produce comportamiento caótico, y si pudiéramos hablar de atractor dicho punto tendría que ser el (0,0,0) hacia el que la gráfica se dirige cuando el tiempo tiende a infinito.

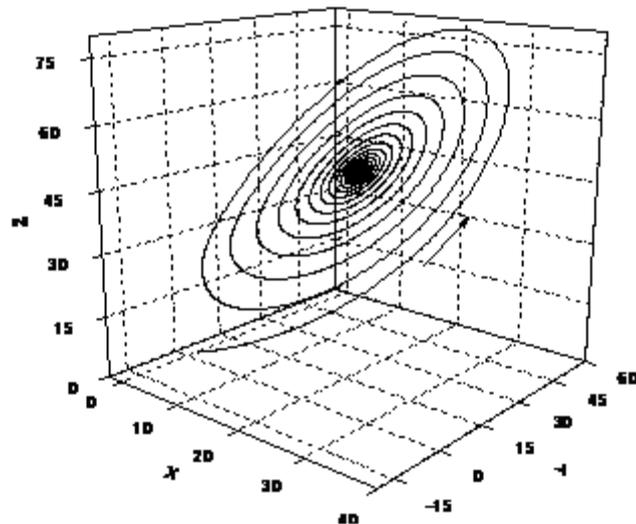
- $r = 13$



En esta gráfica tampoco se da un comportamiento caótico aunque si podemos ver la existencia de un punto hacia el que tiende el sistema, claramente localizado. Al igual que en el caso anterior partimos de la coordenada (1,1,1) y enseguida realiza una curva hasta llegar al instante $t = 0.577s$ donde la coordenada z toma su valor máximo (16.8375) y a partir de ese instante empezar a describir órbitas concéntricas alrededor del atractor, cada vez de menor radio y a una velocidad menor, pues la concentración de puntos en cada vez mayor. Recordemos que aunque nos refiramos al punto hacia el que tiende en sistema como *atractor*, en este caso no se da un comportamiento caótico.

Las coordenadas de ese punto son $x = y = 9.79796$, $z = 12$ y podemos considerar en vista de los resultados obtenidos que a partir del instante $t = 7.688s$ estas coordenadas del atractor son las indicadas para la tolerancia usada en la simulación, si bien para cálculos menos exhaustivos este instante de tiempo es menor y a partir del instante $t = 3.5s$ aproximadamente la variación en las coordenadas del atractor es del orden de las milésimas.

- $r = 50$

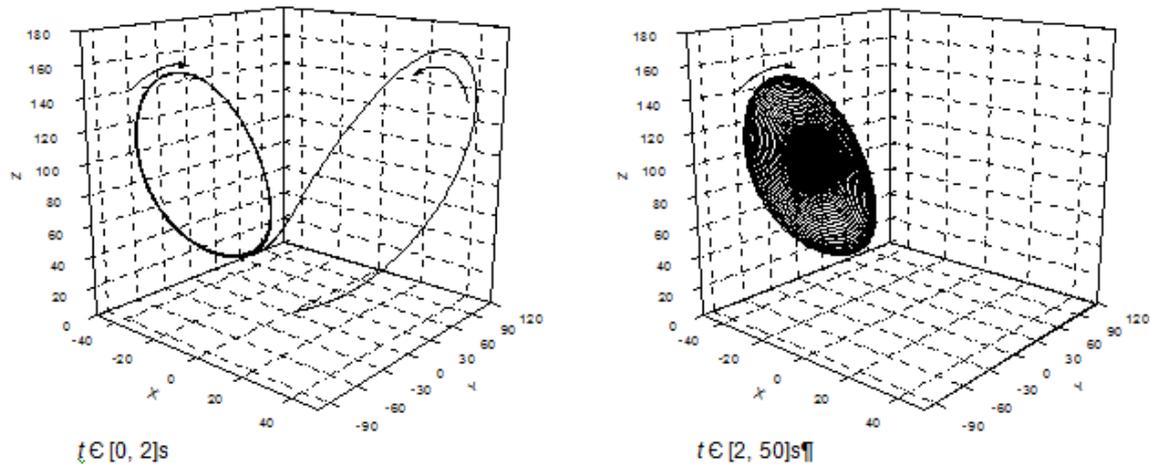


En este caso tenemos una situación similar al anterior ($r = 13$) si bien aquí la trayectoria de la gráfica es mucho más amplia y por tanto el tiempo que tarda en recorrerla antes de acercarse al atractor es mayor. Si nos fijamos en la evolución de la gráfica y en la concentración de los puntos vemos que la parte inferior de cada órbita alrededor del atractor tiene una mayor concentración de los mismos y por tanto el sistema tarda más tiempo en avanzar por esta parte. En concreto, la espiral da vueltas durante cerca de 12 segundos antes de centrarse en el atractor con una variación del orden de las milésimas, teniendo al final unas coordenadas para el atractor $x = y = 19.799$, $z = 49$.

Podemos en este punto afirmar que cuanto mayor es r más grande es el radio de giro de las gráficas y más tiempo tarda el sistema en llegar a una zona acotada del espacio suficientemente pequeña para poder considerarla como el atractor mismo.

A partir de este instante algunas de las representaciones gráficas las partiremos en dos o más, pues la concentración de puntos en algunas de ellas es demasiado grande y se hace difícil observar la situación de los puntos y las trayectorias del atractor.

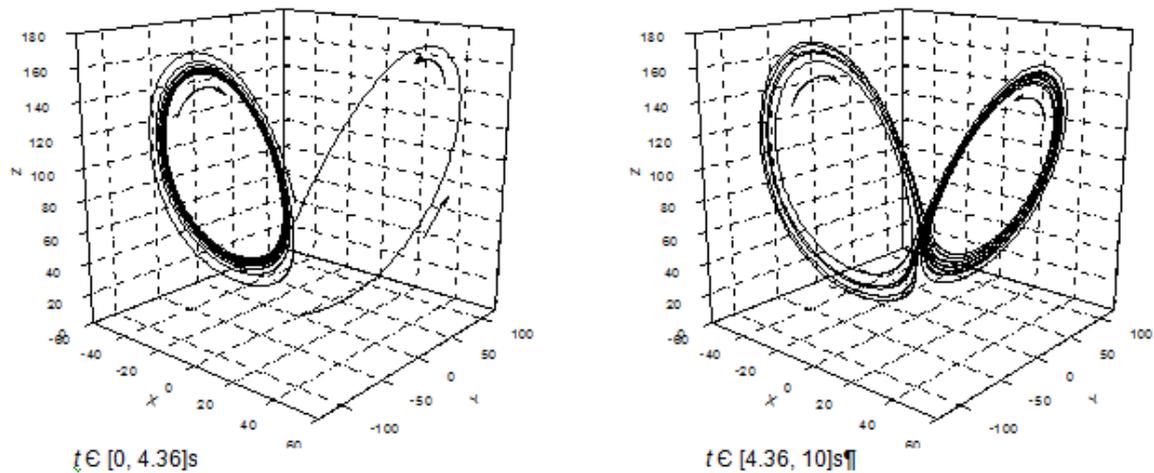
- $r = 99$



La gráfica de la izquierda parte del punto (1,1,1) y llega hasta el (-40.798, -66.5196, 129.535) que corresponde al instante $t = 2s$. La gráfica de la derecha parte de este mismo punto e instante de tiempo y acaba en las coordenadas del atractor para este caso, que son $x = y = -28$, $z = 98$ y en $t = 50s$. Lo más significativo de este caso es que el atractor, tras describir la primera curva en el mismo plano que en los casos anteriores, repentinamente cambia de dirección y de plano siendo ahora las coordenadas x , y y negativas. Este valor de $r = 99$ es el límite a partir del cual deja de existir un atractor localizado en el espacio y el sistema se bifurca en dos focos, es decir, dos trayectorias acotadas en el espacio en las que se puede intuir que hay dos atractores aunque no se puede obtener sus coordenadas; para ser exactos este punto de doble bifurcación se encuentra entre los valores $r = 99.6$ y $r = 99.7$. Este punto donde el comportamiento del sistema cambia radicalmente es el que marca el carácter caótico del sistema, hasta este valor de $r = 99.6$, todos los casos expuestos no observan un comportamiento caótico y son predecibles, sin embargo a partir de este punto nos encontraremos con una situación totalmente opuesta.

Volviendo a las gráficas que nos ocupan, vuelve a pasar como en casos anteriores donde la parte inferior de cada espiral alrededor del atractor tiene una mayor concentración de puntos y por tanto el desplazamiento es más lento. Como en casos anteriores y en vista de los datos podemos señalar el instante $t = 29s$ aproximadamente como el momento a partir del cual las coordenadas del atractor varían del orden de las milésimas. Observando este hecho podemos ver que sigue la tendencia a tardar cada vez más tiempo en llegar al atractor cuanto mayor es el valor de r . Recordemos que para valores de r menores el instante t en que se podían considerar las coordenadas del atractor constantes era menor.

- $r = 100$



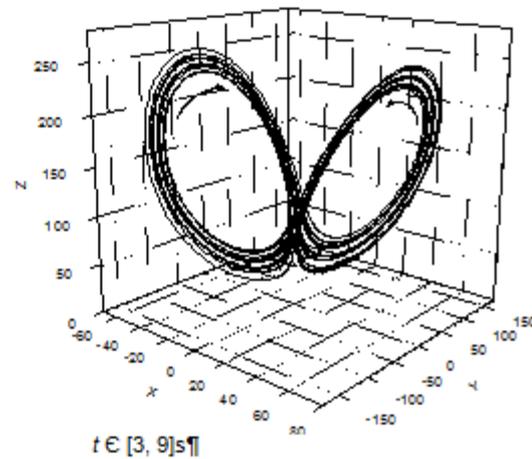
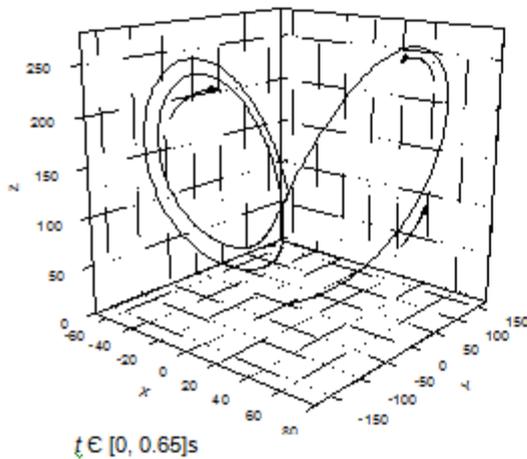
En este caso vemos que la gráfica parte casi idéntica a la del caso anterior ($r = 99$), realiza una curva en el plano de la derecha y a continuación se va al plano izquierdo tomando valores negativos para la coordenada x . Hasta aquí nada hace indicar que la tendencia del sistema sea diferente a lo que hemos visto hasta ahora, de hecho también observamos que los recorridos de las curvas por abajo son más lentos que por el resto de la curva, aunque sí se apunta una pequeña diferencia, y es que las espirales alrededor del atractor no tienen un radio cada vez menor, sino que algunas de ellas de repente aumentan de radio y envuelven a otras. Esto no se había observado hasta ahora en ninguno de los casos estudiados, donde una vez que la gráfica empezaba a dar vueltas siempre tendía irremisiblemente al atractor, disminuyendo el radio de su trayectoria paulatinamente.

La gráfica superior izquierda parte del punto (1,1,1) y $t = 0$ s y termina en el (-11.9778, 24.7597, 68.1111) y $t = 4.36$ s. A partir de este instante la gráfica hace algo hasta ahora inédito y que podemos observar en la gráfica de la derecha, que parte del punto donde acababa la anterior y llega hasta el punto (0.11141, -3.8052, 30.2297) y $t = 10$ s. El sistema cambia de trayectoria y vuelve a ir hacia el plano inicial en la parte derecha del espacio de fases y en este lado realiza varias vueltas con radios cada vez mayores hasta que vuelve a escapar al plano de la izquierda. Desde este momento ya es imposible pronosticar cuántas vueltas dará el sistema sobre cada región del espacio antes de volver a cambiar de trayectoria; de hecho a veces da una vuelta en cada plano, cambiando alternativamente y en otras ocasiones da varias vueltas seguidas en el mismo plano antes de cambiar. Lo que siempre ocurre es que las últimas vueltas en cada plano antes de pasar al opuesto son de radio mayor a las anteriores realizadas en el mismo ciclo, es decir, que si el sistema por ejemplo da 5 vueltas seguidas sobre un mismo plano, la última de ellas antes de cambiar de plano será la de mayor radio.

A partir del instante $t = 10$ s la gráfica es exactamente igual a la anterior solo que concentrando una mayor cantidad de puntos en las dos trayectorias del espacio y quedando por tanto acotadas las coordenadas de los puntos.

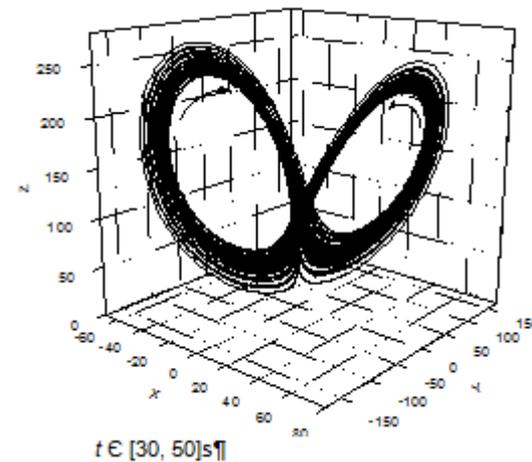
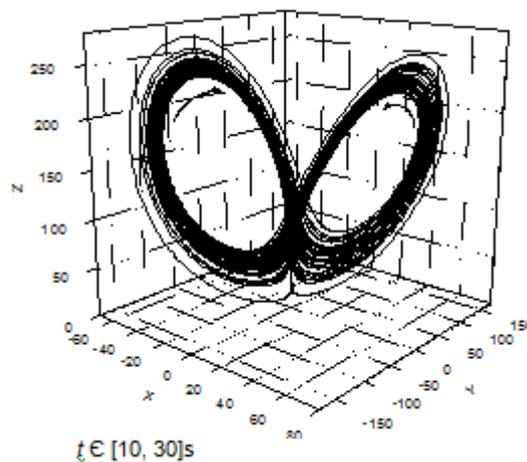
Como ya dijimos anteriormente, a partir del valor de $r = 99.7$ el sistema describe una doble trayectoria en el espacio de fases, por lo que en las gráficas siguientes operaremos de la misma manera que en este caso, es decir separando la gráfica en varias dependiendo de los instantes de tiempo.

- $r = 150$



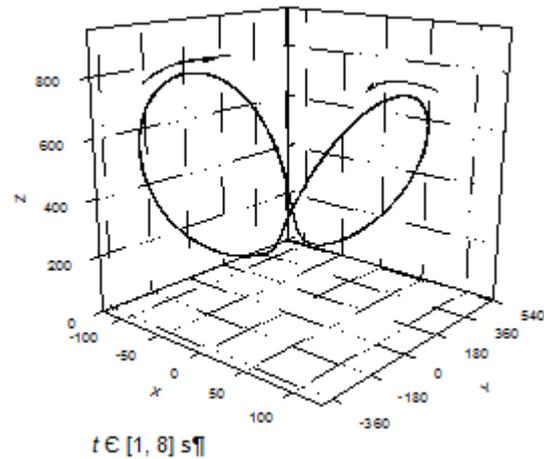
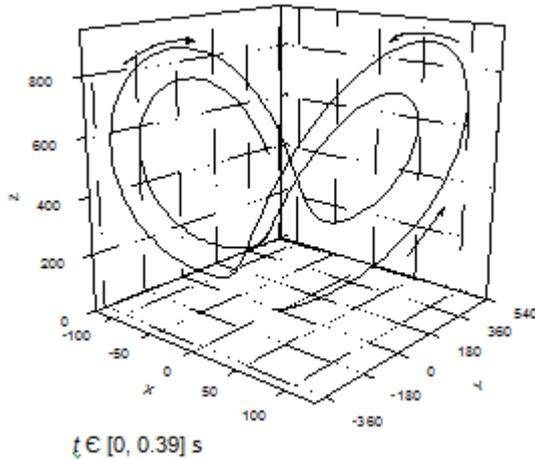
La gráfica de la izquierda parte como en los casos anteriores del punto $(1,1,1)$ y el instante $t = 0s$ y aparentemente evoluciona como en el caso anterior, si bien el momento en que cambia de trayectoria al plano de la derecha es muy anterior al caso de $r = 100$. En este caso es en el punto $(-16.2298, 46.6595, 104.411)$ y el instante $t = 0.65s$. Desde este momento hasta el final de la simulación apenas hay variaciones en el comportamiento del sistema aunque podemos observar algunas particularidades como son el hecho de que los radios de las trayectorias del atractor son mucho más grandes cuanto mayor es r . Del mismo modo otro hecho que observamos es que cuanto mayor es r más acotadas en el espacio están las trayectorias del atractor, es decir, que aunque los radios y desplazamientos del mismo sean mayores, la distancia entre órbitas es cada vez menor y los puntos están más juntos.

Para observar con mayor claridad estas particularidades presentamos las gráficas para algunos intervalos de tiempo indicados en cada caso.



En estas dos últimas gráficas vemos lo que acabamos de apuntar, que aunque las trayectorias son casi iguales, los puntos sin embargo están más juntos, las trayectorias se acercan entre ellas; hecho que observamos al ver zonas mucho más oscuras, es decir, con muchos más puntos.

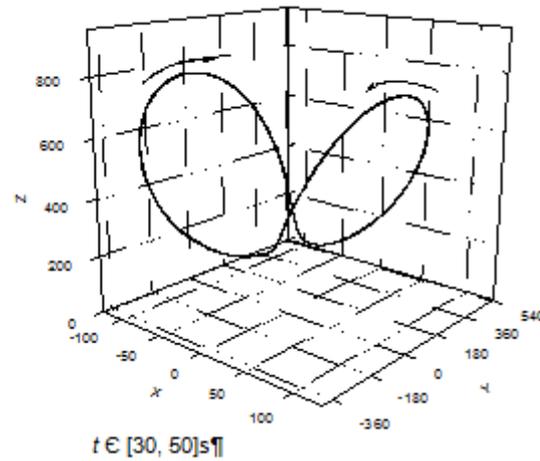
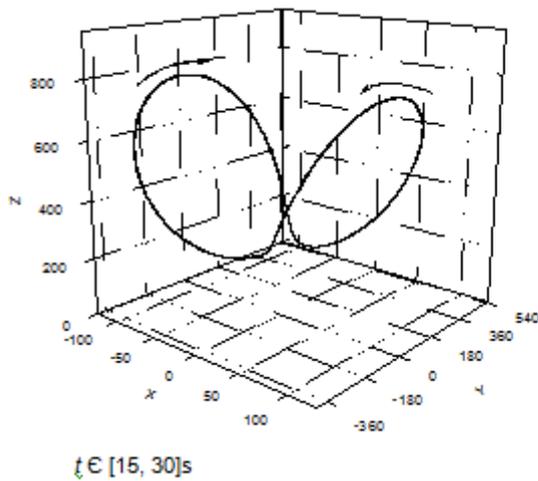
- $r = 500$



En este último caso vemos que el instante de tiempo a partir del cual pasa de un plano a otro es el menor de los analizados hasta ahora y además como ya apuntábamos anteriormente el radio de las trayectorias es mucho mayor.

Aparte de esto, en la gráfica de la derecha podemos ver que para instantes de tiempo mucho mayores que el inicial los puntos están increíblemente juntos, mucho más que en ninguno de los otros casos – en la primera gráfica se representan 390 puntos y en la segunda 7000 puntos, y sin embargo el grosor de las líneas es casi el mismo – y lo mismo si observamos las dos últimas gráficas, donde se representan por una sola línea de grosor poco superior al de un punto un total de hasta 20000 puntos. Esto confirma lo que también apuntábamos en el caso anterior de que las trayectorias del atractor están mucho más acotadas en el espacio de fases cuanto mayor es el valor de r .

Para observar esto con más claridad añadimos dos gráficas más para intervalos de tiempo cada vez mayores e incluyendo más puntos cada vez.



Por último indicar dos hechos, primero observar en estas dos gráficas que a la vista son prácticamente idénticas aunque representan intervalos de tiempo totalmente distintos, otra prueba más de lo tremendamente acotadas que están las trayectorias del atractor en el espacio.

Por otro lado apuntar que si seguimos punto por punto la trayectoria del atractor, en este caso no resulta tan impredecible como en los anteriores, ya que describe alternativamente una órbita en cada plano, y no como sucedía en otros casos en los que daba varias vueltas en un plano antes de pasar al opuesto.

4.4.- ATRACTOR DE RÖSSLER

Al igual que hicimos con el atractor de Lorenz en el apartado anterior, vamos a realizar ahora el estudio sobre el atractor de Rössler. Anteriormente ya presentamos este atractor en el apartado 4.7.2. mostrando algunas de sus representaciones más típicas y describiendo sus características principales.

A partir de este momento referiremos todos los datos al estudio de los casos en los que hemos profundizado e intentaremos sacar algunas conclusiones interesantes.

4.4.1.- Ecuaciones de definición

El atractor de Rössler es un sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, para cada una de las tres variables x , y , z . Este atractor es muy similar al de Lorenz (es un poco más sencillo, sólo tiene un término no lineal, el xz); lo descubrió Otto Rössler estudiando las oscilaciones en las reacciones químicas, llegando a dar un modelo que tenía un comportamiento caótico para ciertos valores de los parámetros.

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= -y - z \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= x + ay \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= b + xz - cz\end{aligned}$$

Donde $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son las variables espaciales, función del tiempo (variable independiente); a , b , c son parámetros de la reacción.

4.4.2.- Análogo eléctrico

Para el caso del atractor de Rössler el modelo en red del sistema es igual al caso de las ecuaciones de Lorenz, de hecho el sistema de Rössler es más sencillo que el de Lorenz, pues sólo hay un término no lineal. El único punto en que difiere el modelo para estas ecuaciones es el valor que se asigna mediante programación a la fuente de corriente y que define el término de la derecha de dichas ecuaciones; es decir, que el valor de la corriente es un término equivalente al miembro de la derecha en las ecuaciones de Rössler. Difieren también del caso de Lorenz las condiciones iniciales que en este caso son $x(0) = y(0) = z(0) = 0$. Esto se consigue simplemente considerando nula la carga inicial de los condensadores del modelo eléctrico.

4.4.3.- Ejemplos de cálculo

A continuación presentaremos los resultados obtenidos en el estudio del proyecto.

En este caso no presentaremos gráficas de las variables en función del tiempo porque no se obtienen gráficas representativas en PSpice, por lo que la mayoría de los resultados estarán referidos a las diferentes representaciones del atractor en función de los valores de los parámetros.

4.4.3.1.- Atractores en función de los parámetros

En este punto y al igual que hicimos con el atractor de Lorenz, vamos a representar las gráficas del atractor para los distintos valores de los parámetros estudiados y a la vista de dichas gráficas obtendremos algunas conclusiones interesantes.

Los valores de los parámetros y las gráficas escogidas para representarlo no han sido obtenidos de manera aleatoria. Para determinar los casos escogidos se realizaron simulaciones con diferentes valores de cada uno de los parámetros del sistema (a , b , c , t , Δt) y en vista de los resultados que se iban obteniendo escogimos como más representativos los que aparecerán a continuación:

En un primer momento y tras varias pruebas y simulaciones previas fijamos los valores de todos los parámetros a excepción de c , parámetro que nos sirvió como lo hizo r en el caso de Lorenz para desarrollar este estudio. Más adelante fijamos el valor de c para algunos casos que consideramos más representativos y variamos alguno de los otros parámetros (a , b) para ver qué sucedía con la evolución del sistema; por lo tanto, para los primeros casos consideraremos constantes todos los parámetros a excepción de c .

Los valores de a y b que consideramos constantes durante el primer estudio son los que obtuvimos de la bibliografía y son los más comúnmente utilizados para este atractor ($a = b = 0.2$).

Para el intervalo de tiempo de simulación empezamos simulando con periodos de tiempo cortos y fuimos ampliándolos poco a poco, de manera que pudimos comprobar que con intervalos por ejemplo entre 0 y 50 segundos obteníamos muy pocos puntos, pero no en densidad, sino en lo que representa la evolución del atractor, es decir, que este atractor necesita un tiempo mucho mayor para poder representarse en su totalidad. Fue así como llegamos a fijar el intervalo de tiempo finalmente entre 0 y 1000 segundos.

En cuanto al intervalo de tiempo escogido entre un punto y el siguiente (Δt) empezamos con valores grandes y en un primer momento lo fijamos en 0.1s. El problema lo encontramos más tarde cuando vimos que para algunas representaciones del atractor la cantidad de puntos que obteníamos en algunas regiones del espacio era insuficiente y por tanto no se podía observar la continuidad en las gráficas. Cuando intentamos disminuir Δt nos encontramos con otro problema, y era que en la simulación algunos valores de tiempo para la tolerancia usada eran demasiado pequeños y PSpice no podía realizar el análisis. La única solución que pudimos adoptar fue la de variar entonces la tolerancia.

Ya explicamos en el caso del atractor de Lorenz, qué representaba la tolerancia y como ya hemos dicho, en este caso nos vimos obligados a reducirla desde el valor inicial que consideramos de 0.0001 al de 0.0001, valor todavía aceptable para obtener los datos. Con esto ya pudimos reducir Δt hasta el valor de 0.01s. Con este valor aún tenemos algunos problemas, en concreto seguimos teniendo una cantidad de puntos insuficiente para representar algunas zonas del atractor, pues determinadas trayectorias tienen una densidad de puntos muy baja, y aumentarla para poder representar la continuidad de la

curva lleva a concentrar en otras zonas del atractor una cantidad de puntos inabordable. Para que nos hagamos una idea, con los parámetros actuales tenemos 100000 puntos para representar el atractor; en el caso de Lorenz, por ejemplo, el atractor que se representó con más puntos fue con 50000 y de hecho para plasmar las gráficas en papel ese número aún se redujo más para poder ser abordable por los programas informáticos, de manera que la mayoría de gráficas se acabaron representando por unos 10000 puntos. Aquí estamos indicando que 100000 puntos representados en su totalidad no son suficientes y tras algunas pruebas pudimos comprobar que serían necesarios del orden de un millón de puntos para poder representar el atractor con la continuidad deseada con lo problemático que eso es para algunos de los programas empleados. Solamente duplicar el número de puntos de 100000 a 200000 supone un tiempo de cálculo y ejecución mucho mayor y sin embargo en las representaciones gráficas no se aprecia apenas diferencia, por lo que adoptamos finalmente un $\Delta t = 0.01s$.

Otra opción que podríamos contemplar es la de simular con una mayor densidad de puntos sólo para las zonas donde es necesario, manteniendo un Δt menor en las zonas donde no es necesaria tanta exactitud, cosa que hicimos en algunos casos del atractor de Lorenz para poder representarlo adecuadamente, pero el problema es que debido al comportamiento totalmente caótico e inesperado del atractor de Rössler para algunos casos, se hacía imposible localizar los instantes de tiempo de entre los 1000 segundos de simulación en los que era necesario, es decir, que la gráfica describe trayectorias en varios planos de manera aparentemente aleatoria y sería prácticamente inabordable localizar las zonas en las que necesitamos esa mayor concentración de puntos.

Es por esto que en determinadas gráficas algunas zonas no se percibirán como curvas perfectamente continuas sino que aparecerán algunos tramos ligeramente más rectos. Nos hemos visto forzados a hacerlo así para poder representar el atractor con los medios disponibles, si bien en todo caso comprobamos que esa continuidad existe.

En lo que se refiere a las condiciones de partida hemos considerado el punto (0,0,0) para todas las gráficas.

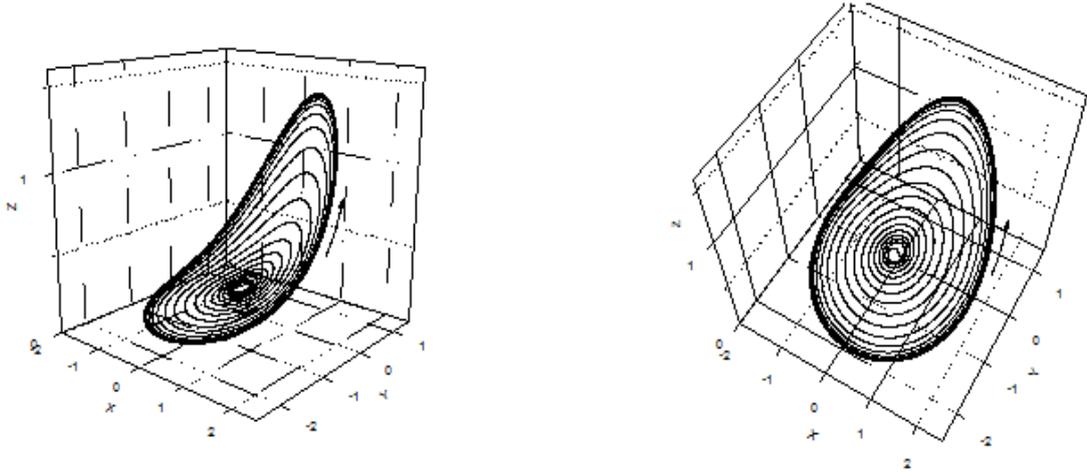
Finalmente los valores de nuestros parámetros que se consideran constantes para los primeros casos de la simulación son los siguientes:

$$\begin{cases} a = 0.2 \\ b = 0.2 \\ t \in [0,1000]s \\ \Delta t = 0.01s \end{cases}$$

Por tanto lo que vamos a hacer a continuación es ir variando el valor de c y representar las gráficas 3D del atractor en función de su valor.

En un principio operamos como hicimos en el caso del atractor de Lorenz, es decir, empezamos a simular a grandes saltos en el valor de c para ver qué soluciones obteníamos y a partir de ahí determinar las que iban a ser de mayor interés para nuestro propósito. A partir de esto fuimos delimitando algunas zonas más interesantes y realizando simulaciones con más detenimiento; finalmente exponemos aquí los resultados para los valores de c que consideramos más representativos.

- $c = 1$



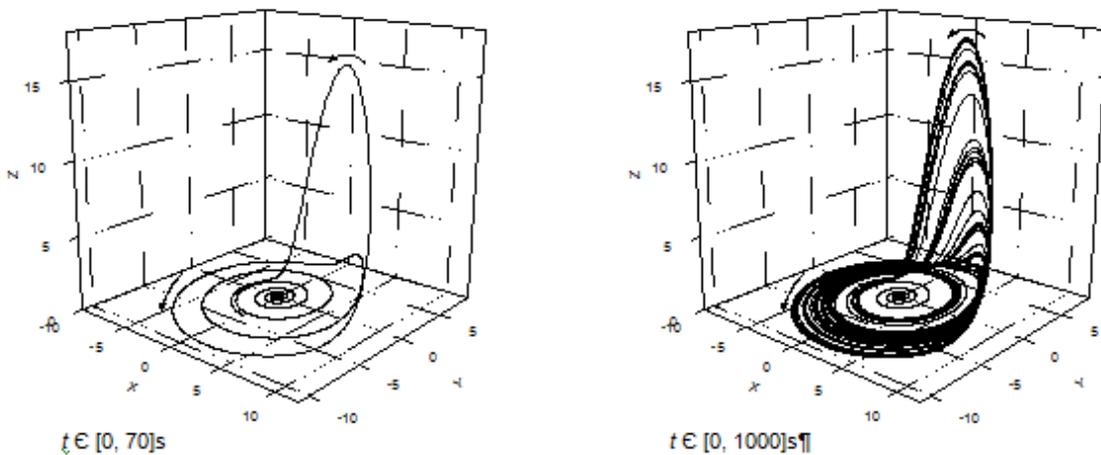
El atractor parte del punto $(0,0,0)$ en el instante $t = 0s$ y a partir de ese momento empieza a describir órbitas alrededor del atractor. En este caso es muy difícil dar unas coordenadas exactas o al menos aceptables del atractor, ya que el sistema se aleja muy rápidamente de este punto en los primeros instantes para ir ralentizándose conforme aumenta el tiempo, hecho que podemos observar más claramente en la vista de la derecha donde vemos el atractor en planta y observamos la poca concentración de puntos en su centro. Vemos que las órbitas son cada vez mayores y se van juntando cada vez más entre ellas, acotándose en una región del espacio muy pequeña. De hecho, todas las órbitas encerradas dentro de la mayor de ellas transcurren en los primeros 10 segundos de simulación, mientras para los restantes 990 segundos todas las órbitas son casi iguales y a simple vista están casi en la misma órbita. También hemos observado que, al igual que pasaba con el atractor de Lorenz, las zonas donde en atractor transcurre más lento son las curvas inferiores de cada órbita, lo que indica una mayor concentración de puntos en esas zonas.

Al mismo tiempo vemos que en los momentos iniciales, en concreto desde $t = 0s$ hasta $t = 4s$ aproximadamente el sistema se mueve en un mismo plano y a partir de ese instante las órbitas en la zona superior empiezan a desviarse hacia arriba dando esa forma como de "silla".

No sería correcto dar unas coordenadas del atractor en función de los resultados obtenidos. Sí podemos más o menos intuir la región del espacio en la que se encuentra, y aún realizando la simulación con un número de puntos mucho mayor no conseguimos para este valor de c delimitar lo suficiente la posición del atractor. De hecho aunque todo el sistema se mantiene girando constantemente alrededor de este foco, inicialmente tiende a alejarse de él, por lo que podríamos hablar más de un sistema donde existe un repulsor en lugar de un atractor, al menos durante los primeros 10 segundos de simulación. A partir de este instante deja de alejarse del centro y se mantiene realizando órbitas casi idénticas durante el resto de la simulación.

En algunos de los casos siguientes representaremos distintas perspectivas del mismo atractor o partiremos las gráficas de un mismo atractor en dos o más para poder apreciar más claramente su evolución a lo largo del tiempo y observar analogías y diferencias para los distintos valores de c .

- $c = 5$



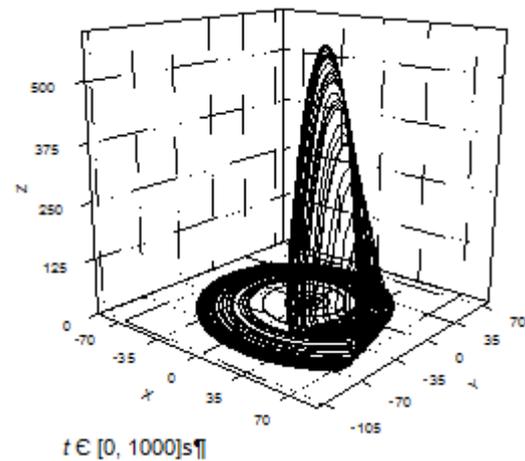
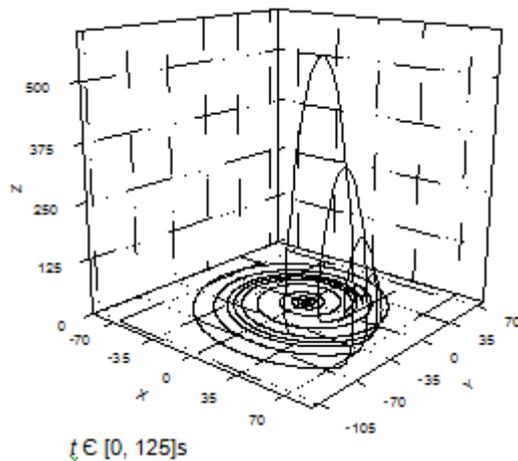
En la primera de las figuras podemos observar cómo el sistema empieza evolucionando igual que en el caso anterior ($c = 1$) con la única diferencia de que las órbitas del atractor son de mayor radio. Este hecho ya lo observamos en el atractor de Lorenz, donde conforme aumentaba el valor de r también lo hacían las dimensiones del atractor y la amplitud de su recorrido en el espacio de fases.

Otro hecho reseñable es que a partir del instante $t = 55s$ aproximadamente las órbitas que hasta ahora se habían mantenido en un mismo plano empiezan a deformarse hacia un plano aparentemente perpendicular al inicial y a partir de ese momento sucede lo que vemos en la representación del atractor completo, es decir, que recorre varias vueltas en el plano horizontal para luego subir al vertical, volver al horizontal y así de manera caótica una y otra vez sin orden aparente.

Otra diferencia con el caso anterior donde $c = 1$, es que las curvas hacia arriba están en un plano perpendicular al horizontal, hecho este que aún no sucedía en el caso anterior, pues las curvas se iban deformando conforme avanzaba el tiempo pero sin alcanzar nunca la perpendicularidad.

En este caso vemos la misma tendencia del sistema a escapar del atractor en los primeros instantes de la simulación para después mantenerse en trayectorias acotadas dentro del espacio de fases. En este caso si podemos dar unas coordenadas aproximadas para el atractor. Ese foco del que parte el atractor y empieza a alejarse está muy cercano al punto $(-9.94657E-6, -3.43655E-8, 0.0397)$.

- $c = 50$



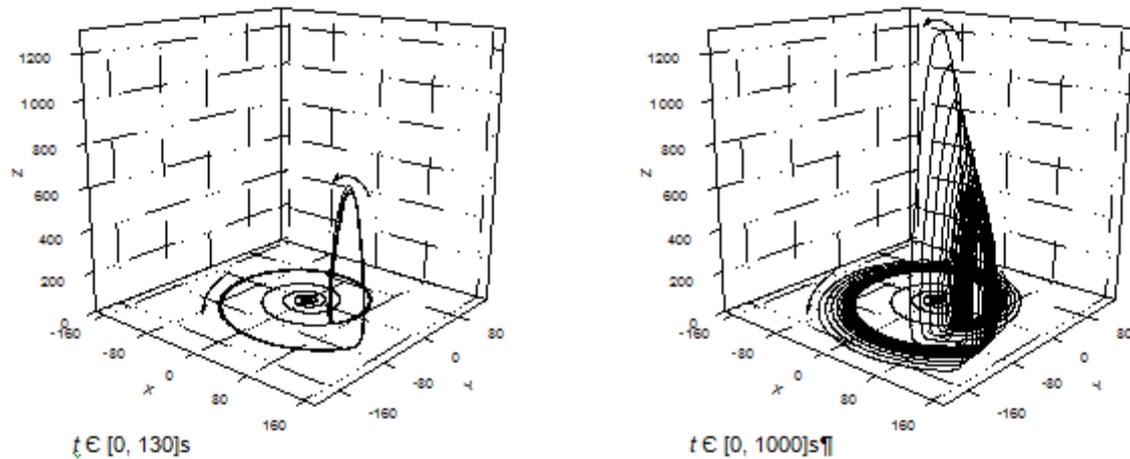
Vemos que este caso es muy similar al anterior, se muestran las tendencias que apuntábamos anteriormente de que el sistema describe órbitas de mayor radio, que éstas tienden a estar cada vez más juntas entre sí y que tarda más tiempo en escapar del atractor en las primeras trayectorias; para ser exactos hasta que no pasa el instante $t = 98s$ no se produce la primera trayectoria vertical.

Hemos mostrado en la primera gráfica los 125 primeros segundos de la simulación para ver claramente ese instante en que las trayectorias abandonan el plano horizontal y empiezan a subir; en la gráfica de la derecha hemos presentado el atractor en su totalidad para comprobar que la densidad de puntos es mucho mayor que en los casos anteriores, es decir, que las órbitas están cada vez más juntas, acotadas en una región del espacio cada vez más estrecha.

Las coordenadas aproximadas del atractor en esto caso son $(-4.78811E-4, -2.98551E-5, 0.004)$, muy cercanas a las expuestas en el caso anterior donde $c = 5$ lo que nos lleva a pensar que es posible que en ambos casos estemos hablando del mismo atractor y lo único que varíe son las trayectorias en el espacio de fases. Intentaremos corroborar este hecho con los casos restantes. Otro hecho destacable es que hay menor variación en las coordenadas aproximadas del atractor que en casos anteriores, lo que viene a indicar que hay un mayor número de puntos en esa zona para el mismo tiempo de simulación, o lo que es lo mismo, que el atractor avanza más lento en el espacio de fases.

En las trayectorias del plano vertical podemos empezar a observar lo que apuntamos anteriormente de que las trayectorias no son curvas perfectamente continuas sino que se aprecian tramos rectos, problema del cual ya explicamos los motivos.

- **c = 100**

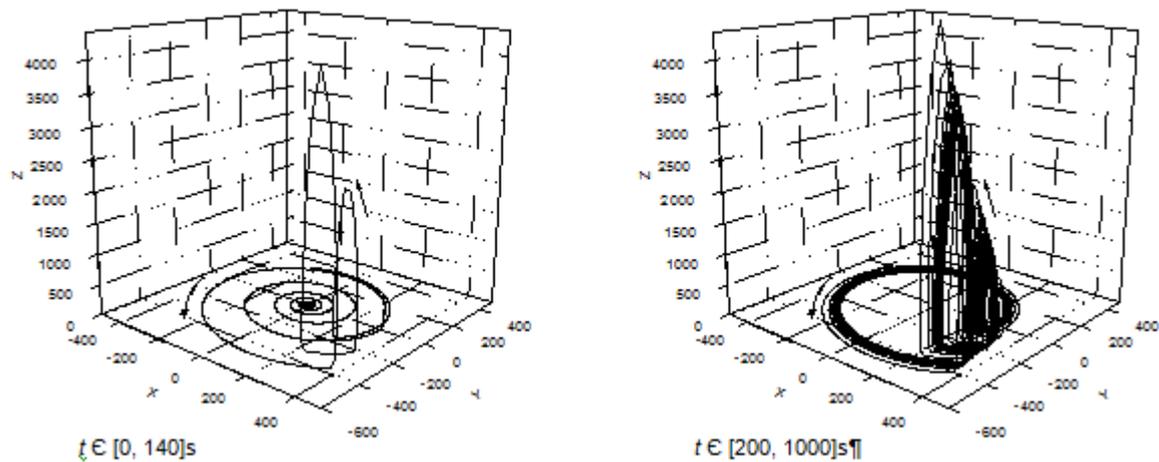


A la vista de las gráficas, pocos cambios podemos observar, en todo caso seguir corroborando algunos de los hechos que íbamos apuntando anteriormente, es decir, radios de las trayectorias cada vez mayores, proximidad de las trayectorias del atractor cada vez mayor (y por tanto mayor concentración de puntos), más tiempo de simulación antes de llegar al primer paso por el plano vertical – para ser exactos en este caso se produce dicho salto a partir del instante $t = 111s$ – y más tiempo antes de alejarse del atractor, por lo que el sistema es más lento en esas zonas (mayor concentración de puntos).

Otro hecho que se observaba en los casos anteriores pero al que no hemos hecho referencia aún es la mayor lejanía entre las primeras trayectorias que escapan del atractor (radios mayores y más separados entre sí), mientras que una vez que se llega a una situación en que las órbitas ya no se alejan más, entonces tienden a juntarse cada vez más, y conforme aumenta el valor de c podemos ver que la región del espacio donde quedan acotadas estas trayectorias es cada vez más estrecha.

Debido a la cada vez mayor concentración de puntos en los primeros segundos de simulación (el sistema avanza más lento), estamos de nuevo en disposición de dar unas coordenadas bastante aproximadas del atractor, que en este caso son $(-9.99893E-5, -2.61121E-6, 0.002)$, coordenadas bastante próximas a las obtenidas para los anteriores valores de c .

- **c = 300**



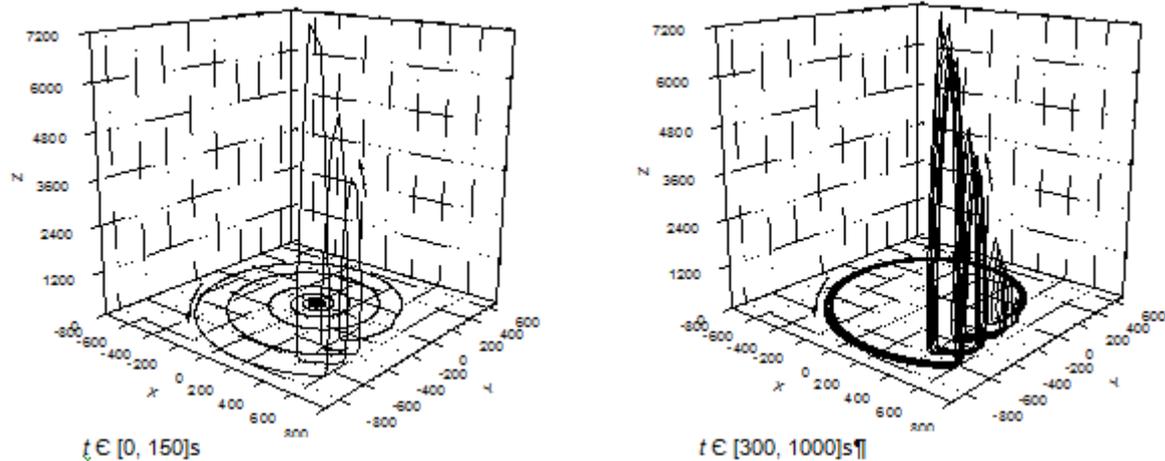
El hecho que más nos llama la atención de estas gráficas es la falta de continuidad en las trayectorias verticales, de hecho, cuanto mayor va siendo el valor de c , tanto más discontinuas son esas trayectorias, lo que nos indica que con ese aumento de c , se produce una disminución en la cantidad de puntos de esas trayectorias, o lo que es lo mismo, para el mismo tiempo de simulación de 1000 segundos y el mismo $\Delta t = 0.01s$ se tienen cada vez más puntos en las trayectorias horizontales y menos en las verticales.

Seguimos confirmando los hechos que se apuntaban en los apartados anteriores, radios de las trayectorias cada vez mayores, mayor separación entre ellos en las primeras órbitas y más tiempo que tarda el sistema en escapar del plano horizontal, en este ejemplo se produce de forma visible a partir del instante $t = 136s$, aunque un poco antes, en el instante $t = 130s$, se produce un pequeño desvío en la trayectoria horizontal del sistema, apenas perceptible en la gráfica.

En este caso la segunda gráfica que representamos no corresponde al tiempo completo de simulación sino a partir de 200 segundos. Con esto pretendemos mostrar con mayor claridad como a partir de instantes de tiempo suficientemente grandes las trayectorias están más juntas y más estrechamente acotadas en el espacio de fases, hecho este ya apuntado con anterioridad.

Por último y al igual que hicimos en los casos anteriores vamos a dar unas coordenadas aproximadas del atractor y comprobaremos que siguen estando próximas a las dadas para casos anteriores. En el que nos ocupa ahora son $(-5.77039E-5, -2.52368E-6, 6.66666E-4)$.

- $c = 500$



Lo que más llama la atención de estas gráficas es la falta de continuidad cada vez más palpable en las trayectorias verticales (cada densidad de puntos mínima).

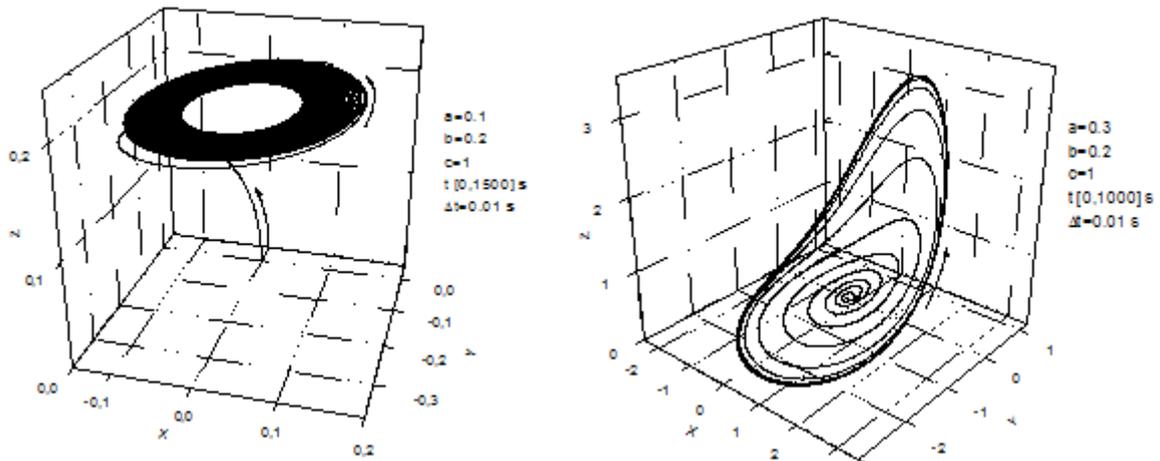
No volveremos a repetir los hechos que se siguen confirmando aquí y que ya hemos apuntado suficientemente en los casos anteriores; sólo indicar el instante $t = 143s$ en el que el atractor escapa por primera vez del plano horizontal y las coordenadas aproximadas de dicho atractor $(-3.11676E-5, -1.22672E-6, 4E-4)$.

A partir de este instante vamos a realizar un cambio en los parámetros del sistema. Vamos a escoger tres casos que hemos considerado más importantes de los estudiados hasta ahora ($c = 1$, $c = 5$, $c = 300$) y sobre ellos, manteniendo fijo el valor de c , variaremos algunos de los otros parámetros.

- **$c = 1$**

Además de mantener fijo el valor de c , vamos a conservar también el mismo intervalo de tiempo de simulación $[0, 1000] s$, así como $\Delta t = 0.01s$. Los parámetros que vamos a variar ahora son a y b . En cada una de las gráfica que presentamos a continuación hemos incluido los valores de los parámetros para una mayor claridad; empezamos variando el valor de a , dejando de momento $b = 0.2$ como en los casos anteriores.

Lo primero que notamos fue que para valores de $a > 0.3$ PSpice nos daba fallos de convergencia en el análisis y no llegaba a obtener ninguna solución al sistema. Probamos a variar algunos parámetros más como la tolerancia o Δt , para intentar solucionar estos problemas, pero tampoco obtuvimos resultados positivos en este caso, por lo tanto nos centramos en un estrecho margen de valores de a , en concreto las gráficas que se muestran a continuación son para $a = 0.1$ y $a = 0.3$.



Lo primero que observamos en la gráfica de la izquierda es que el intervalo de tiempo no es hasta 1000 segundos sino hasta 1500. Lo hicimos así porque si observamos la gráfica, vemos que es una espiral hacia el centro, y conforme el intervalo de tiempo es más grande esa espiral sigue acercándose a lo que sería un atractor, si bien no tiene sentido hablar de tal porque con estos valores de los parámetros es un sistema no caótico, es decir, la evolución del mismo es totalmente predecible y por tanto su estudio más detallado carece de interés.

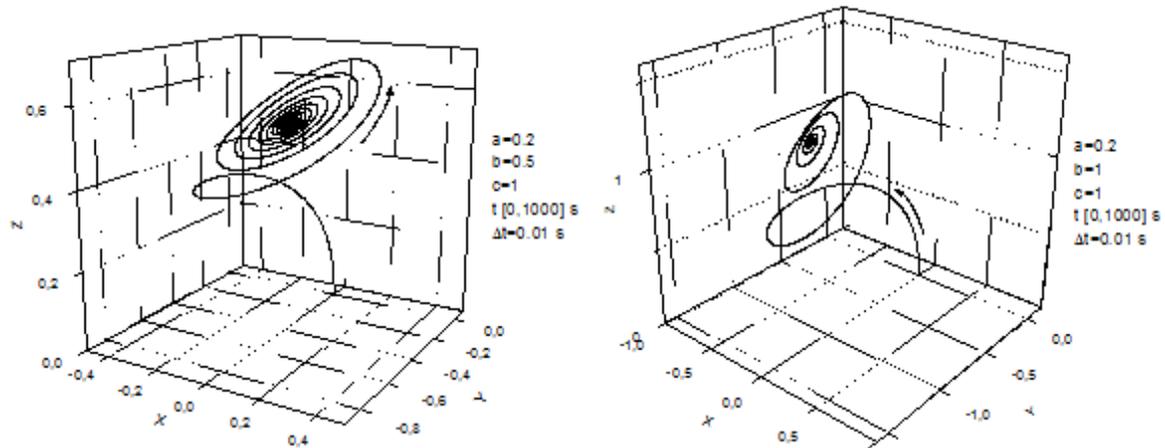
Para la otra gráfica, en la que $a = 0.3$, vemos que es del mismo tipo que la que obteníamos con $a = 0.2$ aunque no igual, y la principal diferencia es que la pendiente de la curva está algo más aplanada y hay menor número de trayectorias antes de llegar a la órbita más externa donde se concentran la mayor parte de ellas.

Este comportamiento sigue siendo no caótico, pues al final todas las trayectorias quedan confinadas en una región del espacio muy estrecha donde apenas si hay alguna variación en dichas trayectorias, la evolución del sistema se estabiliza y por tanto, también es predecible.

Vamos ahora a volver a fijar el valor de $a = 0.2$ y vamos a ver qué sucede cuando el valor que cambiamos es el del parámetro b . Aclarar en este punto que aunque también podríamos variar varios parámetros simultáneamente, eso complicaría el estudio de este proyecto de manera enorme, y es por eso que no lo haremos.

El primer valor que probamos fue el de $b = 0.1$. Pudimos observar que la gráfica era muy parecida a la del caso general donde $b = 0.2$, por lo que no la representamos aquí. Lo mismo sucedió con $b = 0.3$, las diferencias eran mínimas y por tanto, tampoco presentamos este ejemplo.

Los siguientes casos que probamos fue con $b = 0.5$ y $b = 1$ (figuras inferiores) de las que a continuación haremos algunos comentarios.



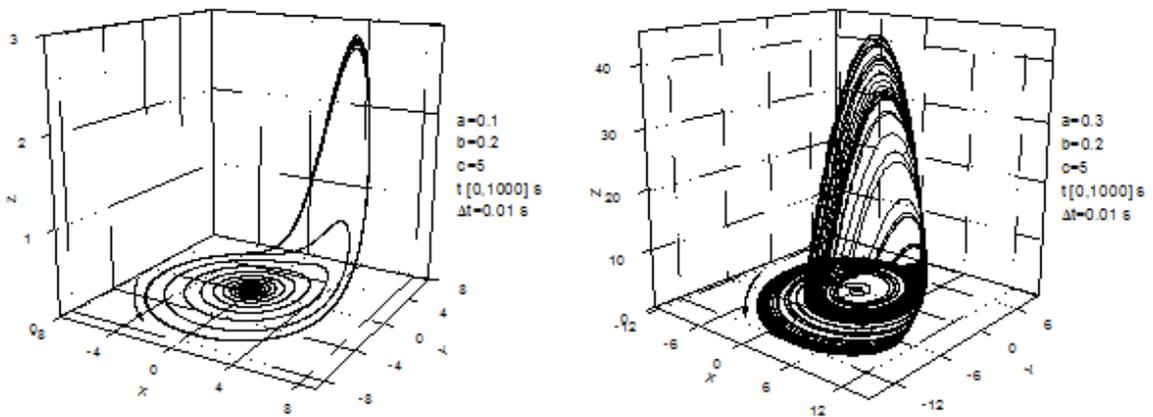
Para el primero de los casos, donde $b = 0.5$, vemos que el sistema tiene una trayectoria curva y creciente hasta que se estabiliza muy rápidamente en una espiral donde se va acercando al centro cada vez con una mayor concentración de puntos. El comportamiento no es en absoluto caótico y las coordenadas del punto central de la espiral que sería el atractor de este sistema son $(0.1127, -0.56351, 0.56351)$.

Cuando pasamos a analizar el caso en que $b = 1$, las únicas diferencias son por un lado que el sistema no va tan rápidamente a esa espiral, sino que recorre una trayectoria en forma de hélice y luego tiende al atractor más rápido que en el caso anterior, además de aumentar la inclinación de la curva con respecto al eje horizontal. De nuevo tenemos un comportamiento no caótico, pues el sistema vuelve a encerrarse en una trayectoria en espiral y unas coordenadas para el atractor $(0.27639, -1.38197, 1.38197)$.

Para valores de $b > 1$ volvemos a tener errores de convergencia al realizar la simulación el PSpice, por lo que no es posible el análisis.

El siguiente caso que estudiaremos es el de $c = 5$ en el que teníamos ya un comportamiento caótico, pues la curva escapaba inesperadamente del plano horizontal en repetidas ocasiones, y lo que haremos a continuación será lo mismo que hasta ahora, variar los valores de a y b para ver qué sucede con el sistema. El resto de parámetros se mantendrán constantes y en todo caso se indican en cada una de las gráficas para mayor claridad.

- **c = 5**



Para el primer caso en que $a = 0.1$ aunque el sistema es parecido al caso general, lo que más salta a la vista es que no se produce comportamiento caótico a pesar del cambio de curvatura, pues una vez que abandona el plano horizontal después de cada vuelta vuelve hacia arriba, de manera totalmente predecible, y más aún cuando todas las trayectorias a partir del instante $t = 115\text{s}$ se mantienen acotadas en una zona tremendamente estrecha del espacio. El primer salto fuera de la espiral horizontal se produce a partir del instante $t = 100\text{s}$ y no nos es posible en este caso dar unas coordenadas apropiadas para el atractor, ya que aunque parece ser un punto perfectamente localizado en el centro de la espiral, los datos muestran que el sistema se aleja muy rápidamente de ese punto y oscila alrededor de algunos valores que no están lo suficientemente juntos como para poder dar unas coordenadas con un error aceptable, de todos modos ese atractor existe aunque volvemos a hacer hincapié en que estos valores para los parámetros del sistema no dan comportamiento caótico.

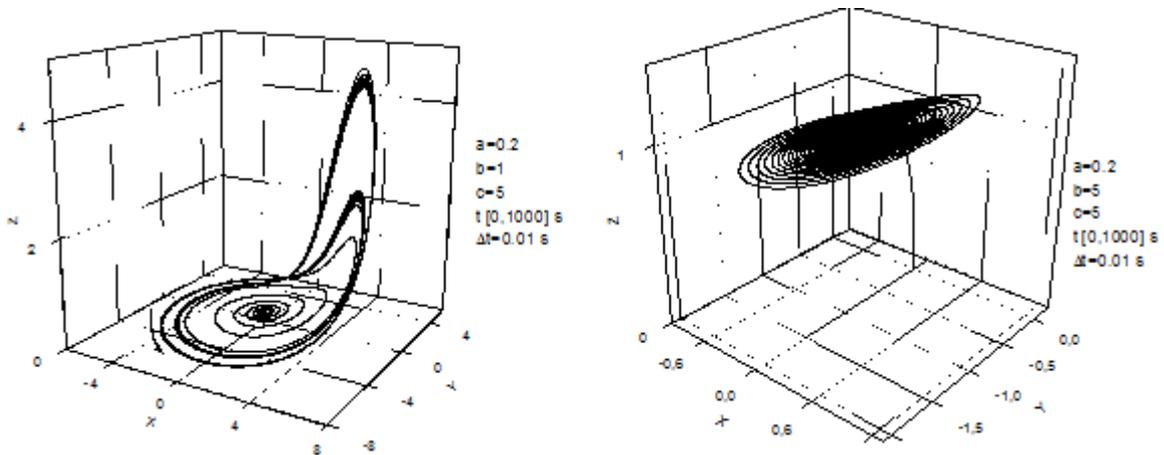
El otro caso analizado es el de la gráfica de la derecha (página anterior) donde $a = 0.3$. En él vemos un comportamiento casi idéntico al del caso general pero donde las curvas en el plano vertical están más aplanadas. Al igual que en el caso general no podemos, por un lado, dar las coordenadas del atractor porque el sistema evoluciona muy rápido desde ese punto, y a la vez podemos afirmar que el comportamiento es caótico al igual que en el caso estudiado donde $b = 0.2$. vemos que es así porque no podemos predecir las trayectorias ni los momentos donde las curvas escapan de un plano y pasan al otro si bien sólo podemos observar que se mantienen acotadas en algunas regiones del espacio.

Para casos donde $b > 0.3$ el sistema da errores de convergencia como ha pasado en casos anteriores y no es posible su análisis.

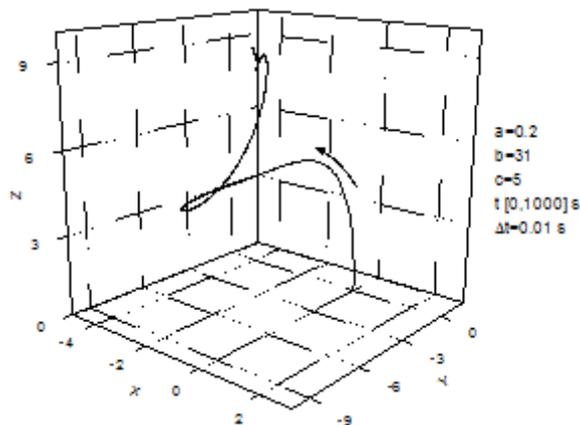
Pasamos ahora a fijar de nuevo el valor de $a = 0.2$ y variar el de b para observar los cambios que se producen.

En un primer momento probamos con variaciones pequeñas en b , dándole los valores $b = 0.1$, $b = 0.3$, $b = 0.5$. Estos tres casos son poco diferentes del caso general, si bien observamos un pequeño cambio y es que con el aumento del valor de b , se produce un

desplazamiento de las trayectorias verticales hacia el eje positivo de la coordenada x , viendo un caso extremo en el primero de los ejemplo que mostramos, donde $b = 1$.



En el otro caso mostrado, donde $b = 5$ vemos un cambio claro en la tendencia del sistema, donde la trayectoria de la misma se encierra en una espiral hacia un punto fijo de coordenadas $(0.20862, -1.04358, 1.04354)$. Ninguno de los casos mostrados representa un comportamiento caótico, y tampoco los que mostraremos a continuación para distintos valores de b , donde el comportamiento del sistema cambia por completo.



En la gráfica anterior se representa el caso donde $b = 10$. En él vemos cómo la espiral del caso anterior ($b = 5$) ha ido cambiando de plano y se ha ido ampliando poco a poco, reduciendo el número de órbitas y tendiendo a un punto central a gran velocidad, de hecho, a partir del instante $t = 89$ s las coordenadas de ese punto se mantienen constantes hasta el valor de las cienmilésimas, dicho punto es el $(0.43845, -2.19224, 2,19224)$. A partir de ese valor de b , la tendencia del sistema es a aumentar la pendiente del plano que contiene a la trayectoria con respecto al plano horizontal y al mismo tiempo a reducir el número de órbitas antes de llegar al atractor.

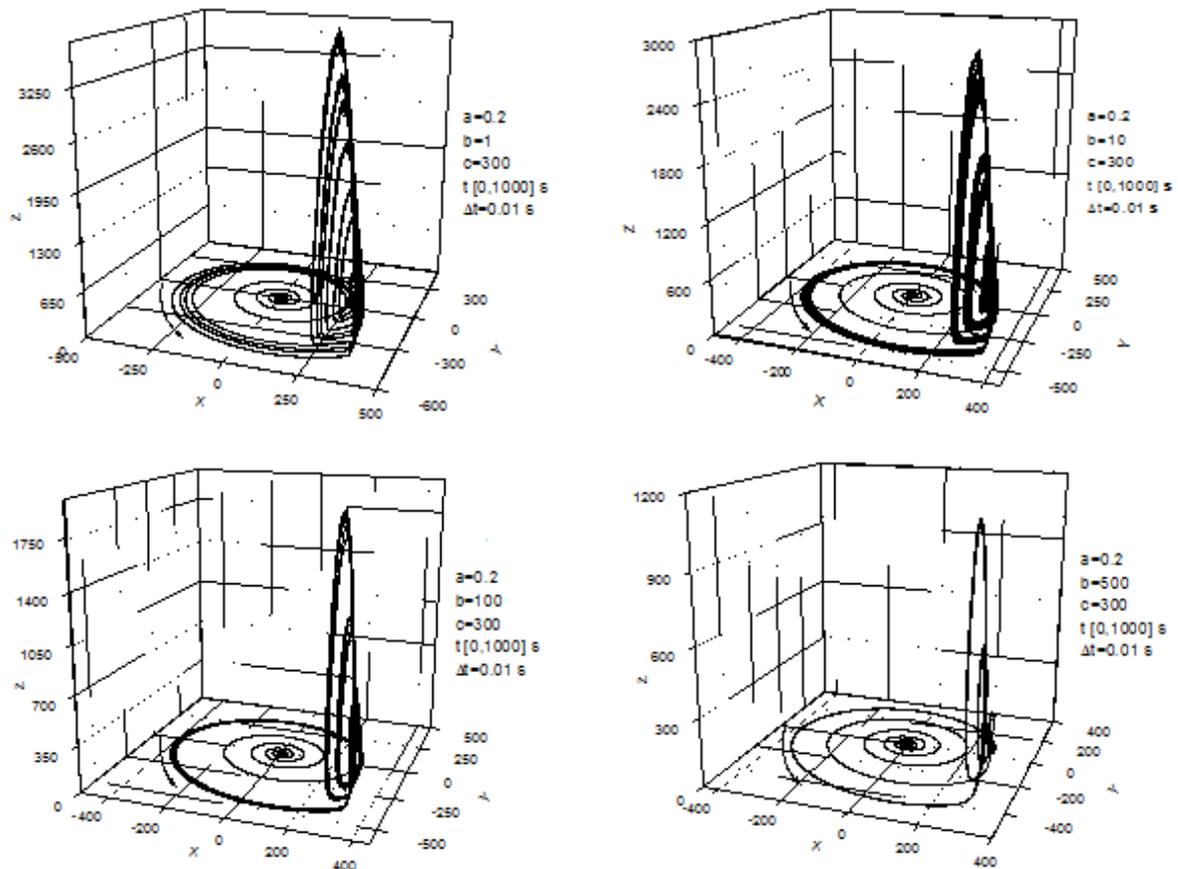
El otro caso que mostramos es el de $b = 31$, aunque a partir de $b = 20$ ya se puede observar una tendencia similar donde la trayectoria ya no son órbitas sino una curva con cierta forma similar a una hélice y que muy pronto tiende a un punto del espacio donde se

concentran la mayoría de los puntos, de hecho, de los 1000 segundos de simulación, a partir de $t = 9$ s la variación es menor de las milésimas para las coordenadas de ese punto, y además la concentración de puntos es grandísima, lo que a efectos de representación se muestra como una ralentización de la trayectoria hasta prácticamente pararse, pues algunas coordenadas se repiten durante intervalos de varios segundos sin moverse del mismo punto. Las coordenadas aproximadas de dicho punto hacia el que el sistema tiende en este caso son (2.27639, -11.382, 11.382). Este caso es el último estudiado, pues a partir de $b = 31$ volvemos a tener errores de convergencia y no es posible el análisis.

Como último caso interesante vamos a analizar de modo similar el comportamiento del atractor fijando $c = 300$ y variando los parámetros a y b como lo hemos ido haciendo hasta ahora.

Al igual que hicimos con los casos anteriores, hicimos una exploración previa con algunos valores de a y b a saltos más grandes primero y algo menores en zonas donde veíamos que podía existir algún comportamiento reseñable. En el caso de variar a , nos encontramos con que valores por encima de 0.3 nos daban error de convergencia, luego pudimos analizar sólo dos casos, para $a = 0.1$ y $a = 0.3$. No representamos ninguno de los dos por ser muy parecidos en su forma al caso general y carecer, por tanto, de interés.

Cuando realizamos el análisis para diversos valores de b , encontramos que el sistema se aleja poco del caso general aunque apuntaba algunas tendencias interesantes que iremos explicando a continuación. Presentamos conjuntamente cuatro de las gráficas obtenidas para algunos de esos valores de b que nos permitan observar lo que indicaremos a continuación.



Una de las primeras consecuencias del aumento de b que observamos, es que el atractor cada vez escapa más rápido del centro del sistema, es decir, que la concentración de puntos en esa zona es cada vez menor y por tanto las órbitas van siendo cada vez más rápidas, de manera que el instante de tiempo en que la trayectoria abandona el plano horizontal es cada vez menor. Por ejemplo, para los casos representados en la página anterior, esos valores de tiempo aproximados a partir de los cuales la trayectoria pasa por el plano vertical son $t = 11.7s$, $t = 9.2s$, $t = 7.3s$ y $t = 5.4s$, para valores crecientes de b .

Otro aspecto que se observa es que las órbitas que describe el atractor cada vez están más juntas entre ellas, hay mayor concentración de puntos y las trayectorias quedan acotadas en una región del espacio menor. Asimismo las curvas que transcurren por el eje vertical tienen cada vez menos altura aunque los radios de las espirales mayores en el plano horizontal son aproximadamente iguales en todos los casos. Una última observación interesante es que, para valores crecientes de b , vemos una tendencia a poder predecir la trayectoria aproximada del atractor, es decir, que a partir del momento en que escapa del plano horizontal por primera vez, ya siempre sigue trayectorias muy parecidas, sin ser imprevisible saber si la trayectoria está en uno u otro plano, todas

pasan por ambos planos y una periodicidad muy similar en todos los casos. Esto lo hemos podido observar para todos los casos donde $b > 1$.

Por último aclarar que, al igual que pasaba en algunos de los casos estudiados para valores de a y b constantes, se observa una discontinuidad bastante grande en algunas partes de las curvas (tramos rectos en algunas gráficas). Se debe a las mismas razones que ya se explicaron con anterioridad, donde aumentar la cantidad de puntos para poder representar esas zonas con la continuidad adecuada es inabordable con los medios de los que disponemos, aunque si se ha comprobado que dicha continuidad existe.

5.- CONCLUSIONES

Decir como conclusión general y más importante que queda demostrado que los atractores existen (para los casos estudiados de Lorenz y Rössler), que están identificados, localizados y perfectamente definidos, pero que su aparición depende de algunos factores críticos. Es decir, que muchos de los parámetros de los que hemos considerado en este estudio son críticos para definir la aparición del atractor con unos u otros valores de los parámetros; así, por ejemplo, valores como el tiempo de simulación t , el intervalo de tiempo entre valores contiguos Δt o la tolerancia permitida en el resultado son valores críticos que determinan para qué valores de los parámetros aparece el atractor caótico y en qué lugar aparece. Hay por tanto, que tener mucho cuidado en el estudio de estos sistemas, pues los valores y resultados que se obtengan pueden ser totalmente erróneos aunque durante el avance de las investigaciones el desarrollo de las mismas nos haga pensar lo contrario.

Otro punto que hemos podido comprobar en la práctica es la gran dependencia del resultado de las condiciones iniciales, por lo que siempre hemos operado con gran exactitud. Análisis similares para casos muy próximos entre sí nos dan resultados totalmente distintos, así, para algunos casos, pequeñas variaciones en algunos de los parámetros hacen que el sistema evolucione de manera totalmente distinta y que, a veces, donde había un atractor no caótico con las coordenadas totalmente definidas, aparezca otro atractor en una zona del espacio totalmente distinta para el cual es imposible dar unas coordenadas, pues el sistema se queda orbitando en trayectorias acotadas pero alejadas de ese punto. Este punto se puede observar con mayor claridad en algunas gráficas temporales que hemos mostrado en el desarrollo de este estudio.

Como resumen podemos concluir que:

- i) El método de simulación por redes es una herramienta muy adecuada para la simulación de osciladores de todo tipo, incluyendo aquellos que tienen características caóticas.
- ii) La simulación proporciona unos resultados numéricos muy precisos y por tanto fiables,
- iii) En todos los problemas estudiados se han obtenido resultados fiables, por lo que los modelos en red son equivalentes a los modelos matemáticos que definen estos sistemas físicos.

6.- BIBLIOGRAFÍA

- Stewart, I., "The Lorenz attractor exists", *Nature* **406**, 948-949 (2000).
- Mathews, J. H., "The Lorenz Attractor; Module for The Lorenz Attractor".
<http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/LorenzAttractorMod.html>
- Bourke, P., "The Lorenz Attractor, a thing of beauty; The Lorenz Attractor in 3D".
<http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/fractals/lorenz/>
- Schaffer, W. M., "Quantized Dynamics in The Lorenz Equations".
<http://bill.srn.arizona.edu/Quantized/quantized.htm>
- Ho, A. "Lorenz Attractor".
<http://www.zeuscat.com/andrew/chaos/lorenz.html>
- J. L. Subias. "Introducción a la Teoría del Caos", "Representando atractores por orbitales".
<http://produccion.cps.unizar.es/info/jlsubias/intrcaos.htm>
- Ho, A. "Rössler Attractor".
<http://www.zeuscat.com/andrew/chaos/lorenz.html>
- Lord, G. "Periodic Solutions".
<http://www.ma.hw.ac.uk/~gabriel/auto/node140.html>