



# Gestión de las líneas de espera en el caso real de un centro óptico en Cartagena

---

Ángel Diego Beriso Castillo

Curso 2012/2013

**Directores:**

**Roberto Javier Cañavate Bernal**

**María Belén Cobacho Tornel**

Trabajo Fin de Grado para la obtención del título de Graduado en Administración y  
Dirección de Empresas

## ÍNDICE

1.- Introducción .....	3
1.1.- Motivación y objetivo.....	4
2.- Introducción a la Teoría de Colas .....	6
2.1.- Principales elementos de la Teoría de Colas .....	7
2.2.- Terminología, notación y fórmulas de Little.....	11
2.3.- La distribución exponencial.....	14
2.4.- Procesos de nacimiento y muerte .....	17
2.5.- Modelos de colas .....	18
2.5.1.- Modelo de colas M/M/1 .....	18
2.5.2.- Modelo de colas M/M/s .....	21
2.5.3.- Modelo de colas M/M/1/k y M/M/s/k.....	23
2.5.4.- Otros modelos de colas con distribuciones no exponenciales .....	23
2.6.- Clasificación de los problemas de Teoría de Colas.....	25
3.- Gestión de líneas de espera en una pequeña empresa de Cartagena ( <i>Centro Óptico García Gallego</i> ).....	27
3.1.- Descripción de la empresa y el entorno.....	27
3.2.- Metodología.....	29
3.3.- Estudio preliminar. Problema de análisis .....	31
3.3.1.- Primera aproximación.....	33
3.3.2.- Segunda aproximación.....	57
4.- Conclusiones .....	69
5.- Bibliografía .....	71

## 1.- Introducción

El presente Trabajo Fin de Grado está enmarcado en los de tipo técnico, organizativo o económico con una primera fase eminentemente teórica en la que se introduce al lector en el papel de la Investigación Operativa (I.O.) en el campo de las Ciencias Sociales y, más concretamente, en los sistemas de líneas de espera. Muy numerosos son, hoy en día, los estudios al respecto que han derivado en grandes ganancias tanto por incremento de beneficios como por reducción de costes a raíz de la optimización de los sistemas de producción en general.

En el mundo de la empresa, al igual que en otros ámbitos de la economía, impera el propósito de lograr sistemas más eficientes, entendiendo como *sistema* unente que para una entrada determinada da como resultado un producto o servicio de salida bajo un determinado coste (incluyendo el tiempo como un coste importante para las organizaciones). Un sistema puede referirse a una empresa u organización en su conjunto o a una de las partes que la puedan componer. En ocasiones se procura desarrollar nuevas técnicas de producción, es decir, utilizar el conocimiento necesario para efectuar un salto tecnológicogracias una inversión adecuada. En el presente trabajo se evalúa la situación previa en una empresa real y a partir de dicha evaluación se busca una forma de optimizar los recursos disponibles relacionados con las líneas de espera (pudiendo asumir inversiones) para una mejor gestión de los mismos. Esto es, se trata de un escenario estático en el que no se consideran factores como mejoras tecnológicas o variaciones en el mercado laboral que influyan en los costes, cambios legislativos, etc. Para ello se utilizarán técnicas de Investigación Operativa (I.O.) y más concretamente, análisis de sistemas de espera.

Este tipo de estudios cobran gran importancia en la actualidad ya que, si bien las colas o líneas de espera forman parte de nuestra vida diaria, éstas suponen siempre una molestia, especialmente cuando son demasiado largas. Sin embargo, no sólo se trata de molestias personales: una gestión de colas ineficiente extendida en un país puede lastrar su productividad y por consiguiente la eficiencia de su economía y la calidad de vida de sus habitantes. Las consecuencias de una mala gestión de estas líneas también pueden no ser económicas, como aquellas de tipo social que derivan, por ejemplo, de las largas listas de espera en los servicios de salud.

Se debe tener en cuenta además que las líneas de espera no afectan sólo a personas, sino también a vehículos, máquinas, datos en las líneas de telecomunicaciones y procesos (como podría ser una fase completa de fabricación) que pueden encontrarse en situaciones de espera para compartir unos determinados recursos limitados.

En el presente trabajo se comienza por una introducción al lector en la I.O. para a continuación centrar el enfoque en el caso concreto de los problemas relativos a líneas de espera. Se exponen los fundamentos de la Teoría de Colas (T.C.) y se presentan algunos de los modelos matemáticos existentes para el estudio de este tipo de situaciones con el fin de recorrer los principales casos y poner al lector en disposición de afrontar la comprensión del caso práctico subsiguiente. El apartado correspondiente a dicho caso de aplicación incluye el análisis de la gestión actual de la línea de espera a partir de la toma de datos *in situ*, de manera que los resultados aportan información que permite hacer consideraciones a tener en cuenta y simulaciones de diferentes situaciones que se presentan en la parte final del estudio, donde además se ofrece un diseño alternativo. Para finalizar, se exponen las suposiciones del escenario de estudio con las posibles limitaciones del análisis llevado a cabo que construyen la base de estudios futuros en el mismo ámbito de aplicación.

### **1.1.- Motivación y objetivo**

Tras haber cursado las asignaturas de *Matemáticas para la empresa II* (2º de G.A.D.E.) e *Investigación Operativa* (3º de G.A.D.E.) en la Facultad de Ciencias de la Empresa (UPCT), decidí que mi Trabajo Fin de Grado debía versar acerca de la utilización de las matemáticas en el seno de la empresa. El motivo es que la estrategia siempre ha sido de mi interés y, para incrementar las probabilidades de éxito de un plan empresarial (reduciendo, por tanto, el riesgo), considero que es fundamental la utilización de modelos matemáticos para el apoyo a la toma de decisiones.

Toda situación o fenómeno de la realidad puede ser descrito de manera matemática (con mayor o menor número de limitaciones) para su posterior estudio, obtención de resultados e interpretación de los mismos. Las limitaciones de los modelos serán las que dicten bajo qué supuestos son válidos los resultados como, por ejemplo, que los elementos en estudio deban ceñirse a un rango de valores enteros. En resumen,

pocas situaciones económicas no son susceptibles de ser descritas en términos de optimización.

Algunas de las características intrínsecas a una persona con iniciativa (como un empresario) son la experiencia, visión e intuición. Bien cierto es que estas características suponen una ventaja en el diseño y puesta en práctica de la estrategia empresarial. Pero, bajo mi punto de vista, y dado que en la mayoría de casos se poseen herramientas que pueden ayudar, es imprescindible apoyarse en modelos que simplifiquen la realidad y nos permitan diferenciar entre opciones aparentemente equivalentes a priori. Por ejemplo, gracias a simulaciones matemáticas se pueden conocer, aceptando un margen de error, posibles desenlaces a determinadas acciones, esto es, proyecciones que permiten predecir las consecuencias de una determinada estrategia. Es importante, en el mundo de la empresa, que el empresario intente tener bajo control todas aquellas consecuencias que se puedan estimar mediante la aplicación de técnicas adecuadas, no dejando nada al azar.

La meta del presente estudio es la utilización de la *Teoría de Colas* en la gestión de las líneas de espera de una empresa en Cartagena, la cual se alcanza mediante la consecución secuencial de los objetivos que a continuación se citan:

- Estudiar y analizar los fundamentos de la Teoría de Colas, utilizando como punto de partida los conocimientos adquiridos durante la carrera de las asignaturas de matemáticas, estadística e informática.
- Comprender y desarrollar el fundamento teórico de las distribuciones probabilísticas utilizadas para afrontar el estudio de la Teoría de Colas.
- Establecer una metodología que permita aplicar la Teoría de Colas en el caso de una pequeña empresa real.
- Aplicar la metodología elegida para el análisis de las líneas de espera del negocio escogido.
- Extraer conclusiones que puedan servir para la ayuda a la toma de decisiones a raíz de la interpretación de resultados: coste de la capacidad de servicio versus coste por consecuencias de excesivas esperas.

## 2.- Introducción a la Teoría de Colas

La *Teoría de Colas* (T.C.) es una disciplina perteneciente a la Investigación Operativa, encargada de proponer modelos para el manejo eficiente de las líneas de espera, sean estas personas, productos, automóviles o llamadas telefónicas entre otras (Hillier & Lieberman, 1997).

Entre un gran número de investigadores que utilizaron procedimientos científicos a lo largo del pasado siglo XX, se encuentra el ingeniero danés *Agner Kraup Erlang* (Dinamarca, 1878-1929) que hizo experimentos relacionados con las fluctuaciones de la demanda telefónica quedando estos trabajos como fundamento de muchos modelos matemáticos que se usan actualmente en los estudios de *Teoría de Colas* o *Líneas de Espera*. Mientras Erlang trabajaba para la Compañía de Telefonía de Copenhague (CTC) se le presentó el problema de cuántos circuitos serían necesarios para proporcionar un servicio telefónico aceptable de manera que se cubriese una demanda incierta. Erlang realizó medidas sobre el terreno y mediante tablas numéricas y algunas funciones matemáticas (en especial, funciones logarítmicas) desarrolló su teoría sobre el tráfico telefónico de manera que se determinaban el número de líneas de conmutación necesarias (líneas telefónicas utilizables de manera simultánea) para cubrir la demanda incluso en los momentos críticos de mayor demanda. Entre sus publicaciones más importantes se encuentran “*La Teoría de las probabilidades y las conversaciones telefónicas*” (1909), en la cual se demostró que el tráfico telefónico aleatorio sigue una distribución de Poisson y “*Solución de algunos problemas en la teoría de probabilidades de importancia en centrales automáticas telefónicas*” (1917), donde se encuentra su formulación clásica para el cálculo de pérdidas y tiempos de espera.

El interés por los trabajos de Erlang continuó después de su muerte y en 1944 el “*Erlang*”<sup>1</sup> era ya utilizado como medida del tráfico telefónico. Esta medida fue reconocida internacionalmente a final de la Segunda Guerra Mundial.

---

<sup>1</sup>Erlang: unidad adimensional utilizada en telefonía como una medida estadística del volumen de tráfico.

La Teoría de Colas, resultado de las investigaciones de Erlang, es ahora una herramienta de gran valor para muchos negocios con problemas de congestión en flujos de entrada/salida.

A continuación se citan algunos estudios anteriores que aplican el análisis de líneas de espera en las Ciencias Sociales. Gómez Jiménez (2008) en su estudio acerca de la aplicación de la Teoría de Colas en una entidad financiera ofrece una solución para mejorar el tiempo medio de servicio y, con ello, la calidad de servicio en su oficina principal. Otros estudios, como el de Bernal et al. (2005) incide en la simulación de sistemas de colas mediante hoja de cálculo para más tarde ser cuando Bernal et al. (2009) realiza a través de una hoja de cálculo la simulación y optimización de un modelo de espera con prioridades para la lista de espera de un hospital en los servicios de cirugía, oftalmología y traumatología. En otros muchos ámbitos organizacionales, tal y como hace Trani (2007) en el caso de un sistema aeroportuario, se ha aplicado la Teoría de Colas para estimar las demoras de los aviones y averiguar si existen periodos en los que la demanda exceda el nivel de servicio.

## **2.1.- Principales elementos de la Teoría de Colas**

El proceso básico de un modelo de colas es el siguiente: los clientes que requieren un servicio se generan en el tiempo en una fuente de entrada la cual procura clientes (que pueden ser personas, objetos,...) a una determinada tasa que entran al sistema y se unen a la cola o línea de espera. Los miembros que esperan en la cola para ser atendidos, lo son de acuerdo con una disciplina de cola, concepto tratado a continuación. Posteriormente se lleva a cabo el servicio mediante un determinado mecanismo y, finalmente, el cliente sale del sistema de colas habiendo sido atendido. Nótese que ésta es la descripción del proceso genérica, es decir, se pueden presentar una gran casuística introduciendo cambios en cada uno de los elementos que forman el sistema de colas.

En la figura 1 se ilustra un proceso básico de colas mediante el esquema de un sistema al que llegan clientes (según una determinada tasa) a lo largo del tiempo. Estos

clientes, cuando llegan al sistema, se unen a la cola en donde esperan hasta el momento en el que son seleccionados bajo alguna regla concreta (disciplina de cola) para recibir el servicio. Se lleva a cabo entonces el proceso de servicio mediante un mecanismo u operativa concreta y, finalmente, el cliente sale del sistema de colas (véase Figura 1).

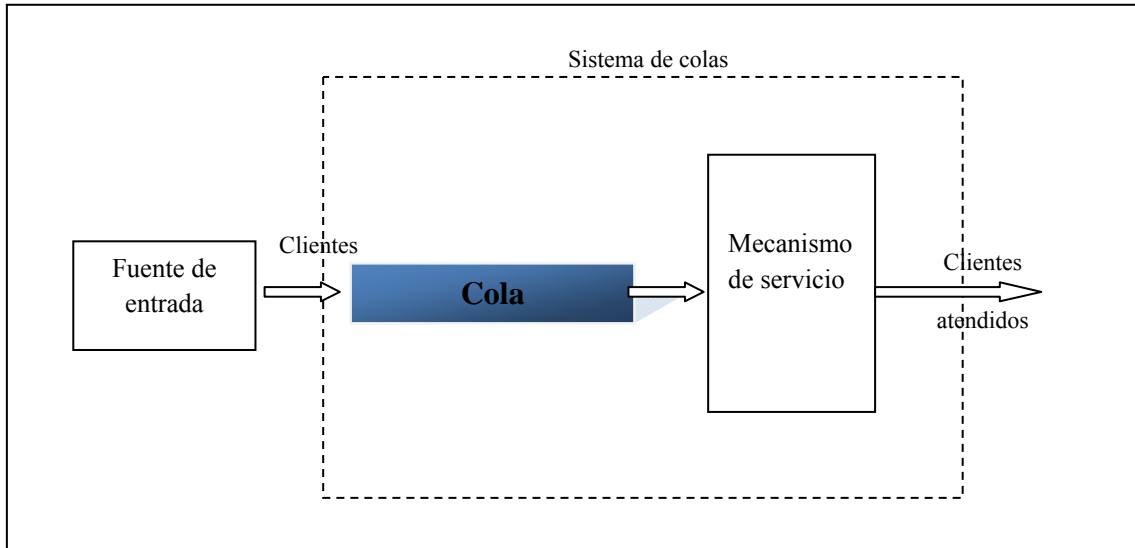


Figura 1. Proceso básico de colas. Fuente: Hillier y Lieberman, 2008.

Todos estos elementos que conforman el sistema de colas son a continuación descritos un poco más en detalle (Hillier y Lieberman, 2008):

**Fuente de entrada:** La fuente de entrada es el proceso por el cual se generan clientes, análogo al comportamiento de llegadas de una determinada población (clientes que requieren un servicio y por ello se unen al sistema de espera). El tamaño de la población es una característica que indica los clientes que pueden llegar a requerir el servicio ofertado (clientes potenciales), lo que también se conoce como “población de entrada”. En la T.C. puede suponerse que dicho tamaño es finito o infinito (fuente de entrada limitada o ilimitada, respectivamente). A menudo se trabaja bajo el supuesto de tamaño de población infinita ya que el caso en que la población es finita es más complejo analíticamente, puesto que el número de clientes en el sistema afecta en cada momento al número potencial de clientes fuera del sistema.

La característica más importante de la fuente de entrada es el patrón estadístico que cumplen las llegadas de clientes al sistema. En la mayoría de los sistemas de colas los clientes llegan de acuerdo a un *proceso de Poisson*, es decir, el número de clientes que llegan hasta un determinado momento sigue una distribución de Poisson. Un



supuesto equivalente es aquél en el que el tiempo que transcurre entre dos llegadas sigue una distribución exponencial. Este tipo de procesos de Poisson vienen descritos en la sección 2.3.

Otros patrones de generación de clientes en los que las distribuciones no se ajustan al modelo exponencial, son mucho más complicados de abordar analíticamente.

**Cola:** Elemento del sistema en el cual esperan los clientes a ser atendidos. Una de las principales características es el *tamaño de la cola*, pudiendo discriminar entre dos tipos: colas *finitas* e *infinitas*. A pesar de que en la realidad no existen colas de capacidad ilimitada las situaciones se suelen modelar bajo el supuesto de *cola infinita* en aquellos casos en los que la población tiene un gran tamaño ya que además de resultar una buena aproximación a la realidad permite simplificar el análisis dejando sólo los supuestos de *cola finita* para los casos en los que se llega a su capacidad máxima real frecuentemente.

Otra característica inherente a una cola es la que respecta al protocolo de selección de clientes que pasan a ser atendidos, conocido como *disciplina de la cola*. Entre las disciplinas de colas más comunes se encuentran los siguientes (Enciso Quispe, 2011):

- FIFO (First-In First-Out): es la disciplina que se da con mayor frecuencia en los sistemas de colas, mediante la cual los clientes son atendidos según el orden en que llegaron (primero en entrar, primero en salir).
- LIFO (Last-In First-Out): En este caso se le da servicio en primer lugar al último cliente que llegó. Por lo tanto, mediante este protocolo de decisión la cola esta ordenada en orden inverso al de la llegada de los usuarios. Esta disciplina, aunque no seamos conscientes de ello, se da en numerosas situaciones de la vida cotidiana y también en el seno de las organizaciones ya que, por ejemplo, hay existencias que van entrando en almacén (existencias no perecederas) y son consumidas en primer lugar aquellas que fueron las últimas en ser almacenadas.
- SIRO (Service-In Random-Order): se sortea de manera aleatoria cuál de los usuarios en espera accederá al servicio. Esta selección de clientes se suele llevar a cabo cuando es irrelevante el orden en que se les proporcione servicio, o como ocurre en el caso de empresas (cuyos trabajadores son los servidores) dedicadas a realizar sondeos para estimar las cuotas televisivas o hábitos de consumo de una determinada población objetivo.

- Otras: Existen otros procedimientos para determinar el orden de acceso al servicio de los clientes según prioridades otorgadas a algunos usuarios en función de sus características. Por ejemplo, procesar en primer lugar las peticiones que requieran menor tiempo de servicio (“*Shortest processing time*”), atender prioritariamente las reservas (“*Reservations first*”), las emergencias (“*Emergencies first*”), disciplina que se utiliza en los servicios de urgencias hospitalarias, seleccionar en primer lugar los clientes que proporcionen mayor beneficio (“*highest-profit customer first*”), etc. (Cuellar Quiñones, 2010).

**Mecanismo de servicio:** Este elemento de los sistemas de colas viene caracterizado tanto por las *estaciones de servicio* (servidores o dependientes) como por los *canales de servicio* que desembocan en cada uno de los servidores. Una única cola puede desembocar en varios servidores que van siendo ocupados de acuerdo a la disciplina de selección, como el caso habitual de asignación al primer servidor que queda libre (también se puede establecer una disciplina de asignación de clientes a los servidores como por ejemplo la que haría ocupar a los dependientes con menor experiencia en primer lugar). Del mismo modo que podemos encontrar multiplicidad en el número de servidores, es posible encontrar múltiples colas que surtan clientes a un único o a múltiples servidores. Por lo tanto, los modelos de colas deben especificar tanto el número de estaciones de servicio (canales de servicio en serie) como el número de servidores. Los modelos más sencillos se componen de una estación y uno o varios servidores, como es el caso de la aplicación que se ha llevado a cabo en este estudio.

La variable más importante que caracteriza el mecanismo de servicio es el *tiempo de servicio*, refiriéndose a aquel tiempo que transcurre desde que el cliente empieza a ser atendido hasta que acontece su total despacho. En un modelo de un sistema de colas debe estar especificada la distribución de probabilidad de los tiempos de servicio de cada servidor, aunque normalmente se suele suponer la misma distribución para todos los servidores. La distribución de servicio que más se emplea en la práctica (tanto por ajustarse a un gran número de situaciones como por su simplicidad de cálculo) es la *distribución exponencial*, descrita en detalle más adelante. Otras distribuciones que se utilizan son la *distribución degenerada* (para tiempos de servicio constantes) y la *distribución Erlang (gamma)* para combinaciones de distribuciones exponenciales.

## 2.2.- Terminología, notación y fórmulas de Little

David Kendall introdujo en 1953 una notación que permite describir las colas y mostrar las características de las mismas pudiendo así clasificar los diferentes tipos de líneas de espera por medio de iniciales. De este modo, un sistema se denota como sigue (Kendall, 1953):

$A/S/c/K/N/D$

- “A” se refiere al modelo de llegadas a la cola. Sus posibles valores son:
  - M: tiempos entre llegadas distribuidos de manera exponencial (proceso de Poisson).
  - D: tiempos entre llegadas deterministas, con tiempo promedio constante.
  - G: tiempos entre llegadas generales (cualquier distribución).
  - $E_k$ : para indicar que existe una distribución tipo *Erlang*.
- “S” hace referencia al modelo de servicio, es decir, a la distribución probabilística de los tiempos de servicio. Puede tomar los mismos valores que A.
- “c” es el número de servidores (o número de dependientes), también conocido por  $s$ .
- “K” es la capacidad del sistema, esto es, el número máximo de clientes que puede haber en el sistema. En caso de tratarse de un sistema de cola infinita, este parámetro se puede omitir.
- “N” es la disciplina de la cola. Este parámetro admite cualquier tipo de disciplina (FIFO, LIFO, SIRO, etc.) y se puede omitir en caso de ser FIFO.
- “D” se refiere al tamaño de la población de entrada. En caso de ser infinita este parámetro se puede omitir.

Para poder analizar los diferentes sistemas de colas, es necesario definir previamente las variables que afectan a dicho sistema y esto se lleva a cabo mediante la siguiente terminología estándar (Hillier y Lieberman, 2010):

$N$  = Estado del sistema = número de clientes en el sistema.

$N(t)$  = número de usuarios en el sistema de colas en el instante  $t$  ( $t \geq 0$ ). También, estado del sistema en el instante  $t$ .

$s$  = número de servidores en el sistema de colas.

Longitud de la cola = número de clientes que esperan servicio. La longitud de la cola también se puede ver cómo el número de clientes en el sistema ( $N$ ) menos los clientes que están siendo atendidos (que coinciden con el número de servidores, “ $c$ ” o también “ $s$ ”). Por tanto, para un sistema de cola finita la longitud de la cola en un instante  $t \geq 0$ , vendrá dada por:

$$Long\_cola = N(t) - s \quad (\text{Ecuación 1. Longitud de la cola})$$

$P_n(t)$  = Probabilidad de que en el instante  $t$  haya  $n$  clientes en el sistema, dada la probabilidad en el instante de tiempo inicial.

$\lambda_n$  = tasa media de llegadas cuando hay  $n$  clientes en el sistema o también número esperado de llegadas de clientes por unidad de tiempo cuando se encuentran  $n$  clientes en el sistema.

$\mu_n$  = tasa media de servicio en todo el sistema, es decir, número esperado de clientes que son despachados por unidad de tiempo por todos los servidores en su conjunto.

En muchas ocasiones el número de clientes en el sistema no afecta a la tasa media de llegadas y la tasa media de servicio. En este caso,  $\lambda_n$  y  $\mu_n$  pasarán a denotarse por  $\lambda$  y  $\mu$ , respectivamente. En el caso de varios servidores, la igualdad  $\mu_n = s \cdot \mu$  será cierta siempre que los  $s$  servidores estén ocupados. En este escenario, la inversa de cada una de las tasas nos dará el tiempo asociado a ella puesto que la tasa viene expresada en eventos/tiempo y, por consiguiente, las magnitudes de las siguientes constantes serán tiempo/evento:

- $1/\lambda$ : tiempo esperado entre llegadas.
- $1/\mu$ : tiempo esperado de servicio.

Dado que estas tasas representan los flujos de entrada y salida al sistema, se define el *factor de utilización* mediante el siguiente cociente:

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} \quad (\text{Ecuación 2. Factor de utilización})$$

Este parámetro nos da una idea acerca de la capacidad del sistema que es utilizada en promedio por los clientes entrantes. Nótese que cuando la tasa de servicio sea mayor que la tasa de llegada de clientes, el valor del factor de utilización estará por debajo de la unidad y, en caso contrario, se encontrará por encima de 1 en cuyo caso el tamaño de la cola tenderá a crecer con el tiempo ya que el ritmo de llegada de clientes es mayor que el ritmo con que son servidos.

Cuando se estudian simulaciones de este tipo de sistemas se observa que se encuentran bastante afectados por las condiciones iniciales y el tiempo transcurrido desde el inicio, de manera que se dice que el sistema se encuentra en régimen transitorio. Pasado el suficiente tiempo, el sistema se vuelve independiente del tiempo transcurrido y del estado inicial de manera que se dice que ha entrado en régimen permanente o *estado estable*. Más adelante se realizarán análisis en el contexto de estabilidad bajo el cual la distribución de probabilidad del estado del sistema se conserva a lo largo del tiempo. La notación que se utiliza cuando el sistema se encuentra en dicho estado es la siguiente:

$P_n$  = probabilidad de que haya un número  $n$  de clientes en el sistema.

$L$  = número esperado de clientes en el sistema. Este número puede ser expresado como el sumatorio de las probabilidades de cada estado por el número de clientes en su correspondiente estado:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n \quad (\text{Ecuación 3. N}^\circ \text{ clientes en el sistema})$$

$L_q$  = Longitud esperada de la cola. Esta variable es una medida de los clientes esperando en cola excluidos aquellos que están recibiendo servicio, razón por la cual en la siguiente fórmula el primer término del sumatorio fuerza que  $n \geq s$ :

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n - s) \cdot P_n \quad (\text{Ecuación 4. Longitud esperada de la cola})$$

$W$  = tiempo de espera en el sistema incluyendo el tiempo de servicio ( $1/\mu$ ) para cada cliente. En condiciones de estabilidad, utilizaremos la esperanza de la variable aleatoria:

$$W = E[w] = \frac{L}{\lambda} \quad (\text{Ecuación 5. Tiempo en el sistema})$$

$W_q$  = tiempo de espera en la cola excluido el tiempo de servicio para cada cliente. Al igual que para la variable anterior, en condiciones de estabilidad tenemos:

$$W_q = E[w_q] = \frac{L_q}{\lambda} \quad (\text{Ecuación 6. Tiempo de espera en cola})$$

Se pueden establecer relaciones entre las variables anteriormente descritas, como las relaciones entre  $L$ ,  $W$ ,  $L_q$  y  $W_q$ :

Suponiendo  $\lambda_n = \text{cte}$ , para todo  $n$ , John D. C. Little (1961) demostró que en un proceso de colas en estado estable el número de clientes en el sistema independientemente del tiempo transcurrido es igual a la tasa de llegadas por el tiempo de espera medio en el sistema, esto es:

$$L = \lambda \cdot W \quad (\text{Ecuación 7. Fórmula de Little})$$

De la anterior ecuación se deduce la siguiente:  $L_q = \lambda \cdot W_q$ , y también sabemos que  $L = L_s + L_q$ , lo que quiere decir que el número de clientes en el sistema es igual al número de clientes siendo servidos más el número de clientes esperando en la cola. Suponiendo que el tiempo medio de servicio es una constante  $1/\mu$  para toda  $n \geq 1$ . Se tiene entonces que el tiempo en el sistema es igual al tiempo en cola más el tiempo de servicio:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (T_{\text{sist}} = T_{\text{cola}} + T_{\text{serv}}) \quad (\text{Ecuación 8. Tiempo en el sistema})$$

Donde  $T_{\text{sist}}$  se refiere al tiempo que el cliente pasa dentro del sistema que se descompone en el tiempo de espera en cola  $T_{\text{cola}}$  y el tiempo de servicio  $T_{\text{serv}}$ .

Gracias estas igualdades, también conocidas como *Ley de Little*, se tienen un conjunto de ecuaciones muy útiles ya que conociendo el valor de una de las variables involucradas se pueden obtener el resto fácilmente.

### 2.3.- La distribución exponencial

En la mayoría de los sistemas de colas, el proceso de llegadas sigue una distribución de Poisson. Esta circunstancia se produce cuando el tiempo entre la llegada

de un cliente y el siguiente sigue una distribución exponencial o una distribución continua de exponenciales, conocida como *distribución erlangiana*. Dado que estos tiempos son variables aleatorias, se precisa de funciones que asocien una medida de probabilidad a cada posible valor de dichas variables y, puesto que la distribución de Poisson de una variable aleatoria se ajusta a un evento que se va repitiendo independientemente a lo largo del tiempo (condición de estado estable en un sistema de colas) hace que sea la función más adecuada para describir el comportamiento tanto de llegadas de clientes como de tiempos de servicio. Otra característica es que el promedio de veces que ocurre un evento por unidad de tiempo es constante:  $\lambda$ , en el caso del proceso de llegadas y  $\mu$  para el mecanismo de servicio. Estas variables resultan esenciales en la expresión de las funciones de densidad de las distribuciones de Poisson correspondientes. En efecto, supóngase que una variable aleatoria  $T$  representa los tiempos entre llegadas o los tiempos de servicio (evento de finalización del servicio), entonces esta variable tiene una función exponencial con parámetro  $\lambda$  si su función de densidad de probabilidad es:

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{el resto} \end{cases} \quad \text{(Ecuación 9. Función densidad de probabilidad exponencial)}$$

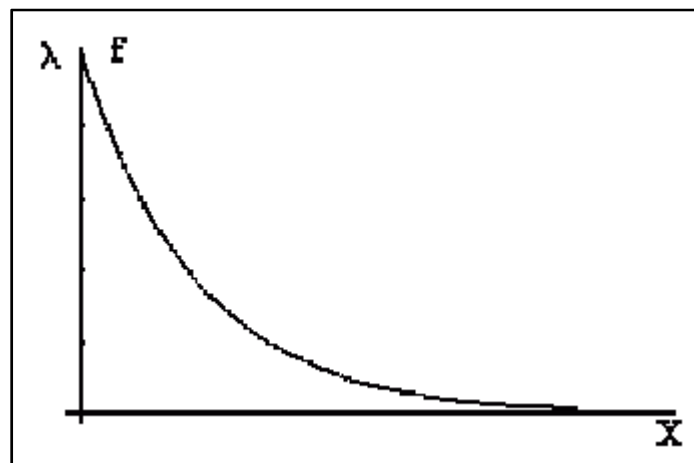


Figura 2. Función densidad de probabilidad exponencial. Fuente: elaboración propia

Las probabilidades acumuladas serán (para  $t \geq 0$ ):

$$(a) P[T \leq t] = 1 - e^{-\lambda t} \quad (\text{Ecuación 10 (a), (b).})$$

$$(b) P[T > t] = e^{-\lambda t} \quad (\text{Probabilidad acumulada})$$

Y el valor esperado y varianza de la variable aleatoria (v.a.)  $T$  son:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{Ecuación 11. Esperanza de la v.a. exponencial})$$

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (\text{Ecuación 12. Varianza de la v.a. exponencial})$$

Las variables aleatorias de distribución exponencial poseen una serie de propiedades que las caracterizan y tienen implicaciones para los modelos de colas. A continuación se señalan algunas de las propiedades más importantes indicadas en Hillier y Lieberman (2010):

Propiedad 1: La característica más destacable de la distribución exponencial es que no tiene memoria, es decir, el siguiente estado al que pasa el sistema sólo depende del estado actual en el que se encuentra. Matemáticamente, se dice que una variable aleatoria no tiene memoria si:

$$P\{T > t + \Delta t / T > \Delta t\} = P\{T > t\} \quad (\text{Ecuación 13. Propiedad 1 distribución exponencial})$$

Esta propiedad se cumple en el caso de los tiempos entre llegadas, ya que la variable en sí depende del momento en que ocurrió la última llegada. Y, en el caso de los tiempos de servicio la semejanza reside en la diferente casuística a la hora de dar un servicio en el que para casos particulares se requiere un tiempo más extenso que para la mayoría, algo bastante realista en muchos sistemas.

Propiedad 2: Se trata de una función de  $t$  estrictamente decreciente (para  $t \geq 0$ ). Dado que estas probabilidades son el área bajo la curva de la función de densidad de probabilidad, consecuencia de esta propiedad es que:

$$P\{0 \leq T \leq \Delta t\} > P\{t \leq T \leq t + \Delta t\} \quad (\text{Ecuación 14. Propiedad 2 distribución exponencial})$$



Por lo tanto, las situaciones en las que  $T$  tiene un valor mayor se dan con menor probabilidad.

Estas dos propiedades son las más importantes de esta distribución y las que afectan en mayor medida a los sistemas de colas en los que existen variables aleatorias que sigan distribuciones exponenciales. Entre el resto de propiedades que caracterizan esta función merece ser mencionada la que la relaciona con una distribución de Poisson que describe la ocurrencia de un determinado evento durante un periodo de tiempo, puesto que está relacionada con la distribución del tiempo que transcurre entre dos eventos la cual es exponencial.

Además otra propiedad importante hace referencia a la generación de variables aleatorias nuevas como composición de otras o como descomposición en diversas variables a partir de una, de manera que se conserva la distribución primitiva. Esta propiedad también tiene implicaciones para los modelos de colas ya que en referencia a los tiempos entre llegadas, en ocasiones, se puede segmentar la población de entrada según tipos de clientes siguiendo cada uno de dichos tipos una distribución exponencial. Entonces, el mínimo de las variables aleatorias seguirá una distribución exponencial y se podrán tratar los clientes sin distinciones. Para los tiempos de servicio ocurre lo mismo cuando tenemos servidores que trabajan a diferentes tasas y cuyos tiempos de servicio siguen distribuciones exponenciales.

#### **2.4.- Procesos de nacimiento y muerte**

La mayor parte de los modelos de colas suponen entradas (llegadas de clientes) y salidas (clientes servidos) del sistema de acuerdo a un cierto comportamiento. Estos flujos representan un *proceso* probabilístico de *nacimiento y muerte* que se refiere a las llegadas de clientes y la salida de clientes, respectivamente. Este proceso describe en términos probabilísticos cómo cambia  $N(t)$ , estado del sistema, con el transcurso del tiempo (al aumentar  $t$ ).

Los procesos de nacimiento y muerte están sujetos a los siguientes supuestos (Hillier y Lieberman, 2010):

Supuesto 1: Dado  $N(t)=n$ , la distribución de probabilidad del tiempo que falta hasta la siguiente llegada es exponencial con parámetro  $\lambda_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ).

Supuesto 2:  $N(t)=n$ , la distribución de probabilidad del tiempo que falta para la próxima muerte (cliente servido) es exponencial con parámetro  $\mu_n$  ( $n=1, 2, \dots$ )

Supuesto 3: Las variables aleatorias de los supuestos anteriores son mutuamente independientes lo que quiere decir que en una transición al estado siguiente sólo ocurre un nacimiento y en una transición al estado anterior solamente un evento de muerte.

Todo proceso de nacimiento y muerte es equivalente a una *cadena de Markov* (véase la figura 3) en tiempo continuo, siendo esta un diagrama que ilustra los sucesivos estados del sistema y las transiciones de un estado a otro con sus respectivas tasas.

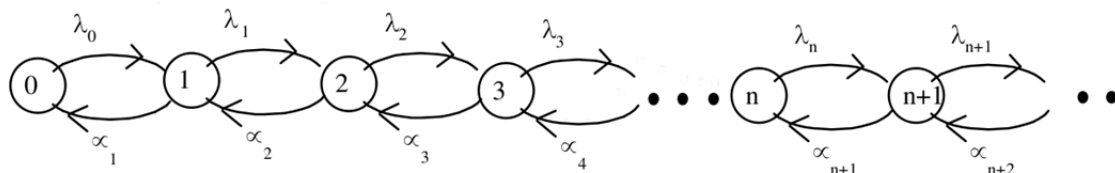


Figura 3. Ejemplo cadena de Markov Fuente: Universidad Uruguay

Aquellos modelos de colas que se pueden representar por una cadena de Markov son mucho más manejables analíticamente que otros modelos ya que se analiza el sistema después de que haya entrado en estado estable

## 2.5.- Modelos de colas

Los procesos de nacimiento y muerte ofrecen una gran flexibilidad en el momento de modelar sistemas de espera y son los más sencillos de analizar. En los diferentes modelos encontraremos que las tasas de nacimiento y muerte de los estados pueden tomar valores particulares según el modelo de espera.

### 2.5.1.- Modelo de colas M/M/1

Según la notación de Kendall, este sistema de espera se caracteriza por que tanto los tiempos entre llegadas como los tiempos de servicio están distribuidos de manera exponencial y el número de servidores es 1. Además, puesto que el resto de

características están omitidas, sabemos que la capacidad del sistema es infinita (cola de tamaño infinito), la disciplina de la cola es FIFO y el tamaño de la población de entrada es infinito (el número de clientes en el sistema o estado del sistema no afecta a la tasa de llegadas). La siguiente figura ilustra la configuración de los elementos del modelo M/M/1:

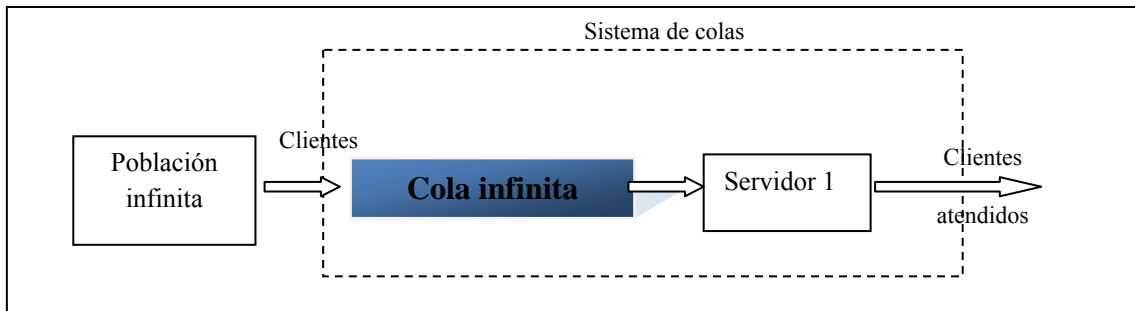


Figura 4. Esquema modelo M/M/1. Elaboración propia

Con todas estas características, el modelo M/M/1 es por tanto el más simple y cumple que:

- El tiempo entre llegadas está exponencialmente distribuido según una función de densidad exponencial de parámetro  $\lambda_n=\lambda$ .
- El tiempo de servicio está distribuido de manera exponencial y la probabilidad de que tome los diferentes valores se puede describir por una función de densidad de probabilidad de parámetro  $\mu_n=\mu$ .
- Hay un único servidor,  $s=1$ .

La cadena de Markov de la Figura 5 nos da una perspectiva de los diferentes estados por los que puede pasar el sistema y las tasas correspondientes de transición al siguiente o anterior estado.

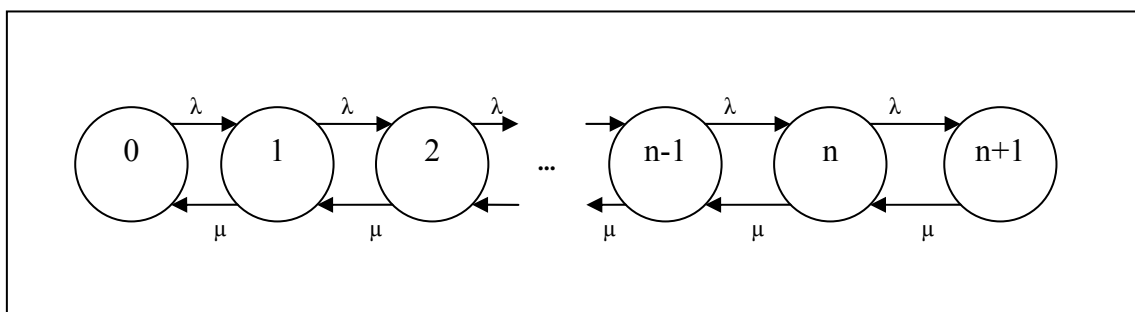


Figura 5. Cadena de Markov del modelo M/M/1. Fuente: García Linares 2008.

En las siguientes líneas se ofrecen los resultados teóricos para las variables de interés, presentando en primer lugar la fórmula para el cálculo del factor de utilización, siendo éste una medida del número medio de servidores ocupados:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (\text{Ecuación 15. Factor de utilización del modelo M/M/1})$$

El factor de utilización para el caso de un servidor coincide con la probabilidad de que un cliente nuevo tenga que esperar para ser servido, puesto que es lo mismo que el tiempo medio que el servidor está ocupado siendo éste un valor entre cero y la unidad.

El resto de variables de interés para los sistemas de colas son el número medio de clientes en el sistema ( $L$ ), número medio de clientes en la cola ( $L_q$ ), tiempo medio de cada cliente dentro del sistema ( $W$ ), el cual se descompone en la suma del tiempo medio de servicio ( $1/\mu$ ) y del tiempo medio de espera en cola ( $W_q$ ). Estas fórmulas están sujetas a la condición de estabilidad (en caso de inestabilidad no son de aplicación ya que nos encontraríamos con sumas de series divergentes) impuesta consecuencia de tener como resultado un factor de utilización menor a la unidad y todas ellas son resultado de demostraciones matemáticas que no han sido incluidas en este documento ya que se aleja del cometido principal y no son relevantes para la realización del trabajo. La probabilidad de que el sistema se encuentre en estado  $0$  (" $P_0$ ") es utilizada en varias de las demostraciones matemáticas mencionadas y nos indica la probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema de colas. Ésta junto con las fórmulas para el resto de variables de interés se presentan a continuación:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad (\text{Ecuación 16. Probabilidad del estado } 0)$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (\text{Ecuación 17: Número medio de clientes en el sistema})$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (\text{Ecuación 18. Número medio de clientes en cola})$$

$$W = \frac{L}{\lambda} \quad (\text{Ecuación 19. Tiempo medio de estancia en el sistema})$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (\text{Ecuación 20. Tiempo medio de espera en cola})$$

Por último, a partir de la probabilidad del estado  $0$ , se puede obtener la probabilidad de que el sistema se encuentre en los sucesivos estados despejando las

expresiones en función de  $P_0$ . La probabilidad de que haya un número de clientes en el sistema es:

$$P_n = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad (\text{Ecuación 21. Probabilidad del estado } n)$$

### 2.5.2.- Modelo de colas M/M/s

Este modelo supone que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son variables aleatorias distribuidas exponencialmente y, como para el caso anterior, la cola es de capacidad infinita, la disciplina es FIFO y la población es infinita. La diferencia respecto al caso anterior reside en que ahora el número de servidores  $s$  puede ser cualquier número natural mayor o igual a la unidad. Y cuando  $s > 1$ , las expresiones no son tan sencillas, como por ejemplo la tasa de servicio  $\mu_n$  para la cual hay que distinguir 2 casos:

- $\mu_n = n \cdot \mu$ , cuando  $n \leq s$ .
- $\mu_n = s \cdot \mu$ , cuando  $n \geq s$ .

donde  $\mu$  es la tasa media de servicio de todos los servidores en su conjunto y la tasa máxima de servicio para  $s$  servidores es  $s \cdot \mu$ .

El siguiente diagrama de tasas representa los posibles estados del sistema y las transiciones entre ellos. En este caso la tasa de llegadas no se ve afectada por el estado en que se encuentre el sistema, pero sí la tasa media de servicio, pudiendo ser tal múltiplo de la tasa media de servicio por servidor como servidores en activo haya. A razón de dicha tasa es mediante la cual el sistema pasa a estados inferiores:

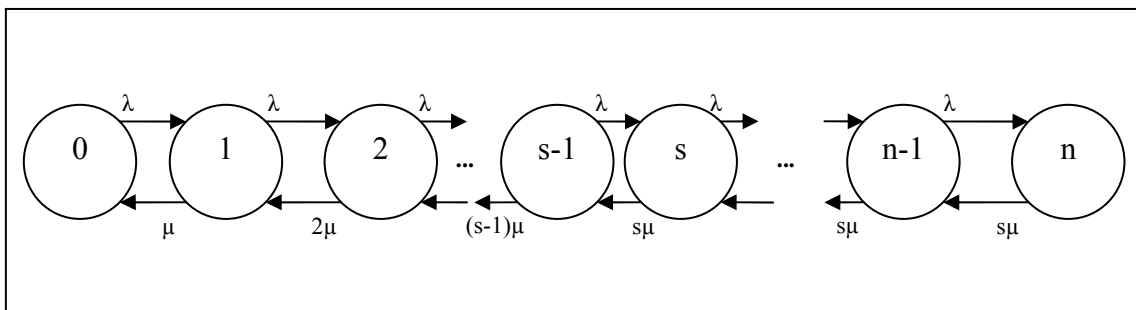


Figura 6. Cadena de Markov del modelo M/M/s. Fuente: Hillier y Lieberman, 2008.

Al igual que ocurría para el diseño anterior en el que sólo prestaba servicio un servidor, bajo condiciones de estabilidad se pueden aplicar las fórmulas para la obtención de los principales parámetros del sistema. En este caso la condición de estabilidad que supone tener un factor de utilización menor a la unidad, se calcula de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} \quad (\text{Ecuación 22. Factor de utilización del modelo M/M/s})$$

Al igual que para el caso de un servidor, la probabilidad de que el sistema se encuentre en estado 0 (“ $P_0$ ”) es muy útil para hallar otras probabilidades de manera recursiva y realizar demostraciones matemáticas, indicándonos además la probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema de colas.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda}\right)} \quad (\text{Ecuación 23. Probabilidad del estado } 0, \text{ M/M/s})$$

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \lambda \mu}{(s-1)! (s \mu - \lambda)^2} \cdot P_0 \quad (\text{Ecuación 24. Número medio de clientes en cola})$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad (\text{Ecuación 25: Número medio de clientes en el sistema M/M/s})$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (\text{Ecuación 26. Tiempo medio de espera en cola})$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (\text{Ecuación 27. Tiempo medio de estancia en el sistema})$$

Y como para el caso de un servidor, a continuación se exponen las fórmulas que se utilizan en este caso para hallar la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado  $n$  que será descompuesta para dos casos diferentes que se presentan:

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \cdot P_0 \quad \forall n \leq k \quad (\text{Ecuación 28. Probabilidad del estado } n, \text{ con } n \leq s)$$

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s! \cdot s^{(n-s)}} \cdot P_0 \quad \forall n > k \quad (\text{Ecuación 29. Probabilidad del estado } n, \text{ con } n \leq s)$$

Como se puede apreciar, conforme se añaden elementos al sistema (servidores en este caso) o se consideran más aspectos, las fórmulas se complican de forma significativa en especial para el cálculo de las probabilidades. Este será el modelo que más se ajuste al caso práctico realizado, por tanto, el resto de modelos serán presentados escuetamente con el único objetivo de informar al lector sobre su existencia, finalizando con una tabla resumen (tabla 1).

### **2.5.3.- Modelo de colas M/M/1/k y M/M/s/k.**

Este tipo de sistemas de colas se caracterizan por tener una cola finita, como así lo indica en su cuarta inicial de la notación de Kendall. El número máximo de clientes en el sistema en estos modelos se encuentra limitado a “ $k$ ”, que coincide con la suma del número de servidores y el tamaño de la cola, por lo que la capacidad de la cola es  $k-s$ .

El modelo M/M/1/k es aquel en el que un servidor atiende todas las peticiones, pero por lo general este modelo se etiqueta como M/M/s/k para un número genérico de servidores  $s$ . Otra lectura de la situación que puede describir este sistema es aquella en la que los clientes que llegan dejan la cola a partir de una determinada longitud ya que no están dispuestos a soportar una larga espera.

Existen una serie de ecuaciones adaptadas a estos modelos y descritas por Hillier y Lieberman (2010), pero no serán presentadas puesto que se trata de expresiones complicadas y no aportan valor añadido al trabajo que se enfoca en la aplicación a un caso práctico más sencillo.

### **2.5.4.- Otros modelos de colas con distribuciones no exponenciales**

Hasta ahora, se han visto modelos de colas en los que tanto el proceso de llegadas como el mecanismo de servicio debían seguir una distribución de Poisson (denotada por la inicial “M” mediante la nomenclatura de Kendall). Sin embargo, se encuentra catalogado un gran número de sistemas fuera de este contexto.

Los modelos M/G/1 (y su versión para un número  $s$  de servidores, M/G/s) son aquellos en los que los clientes se unen al sistema cada cierto intervalo de tiempo el cual

sigue una distribución exponencial. Por otro lado, sobre los tiempos de servicio no hay ninguna distribución concreta impuesta, de modo que seguirán una distribución genérica y de ahí la “G” en su notación. La gran ventaja de este tipo de modelos estriba en la flexibilidad en cuanto a la distribución de los tiempos de servicio aunque no se han podido obtener aún resultados análogos al caso de un servidor, para el caso de varios.

Otro modelo de colas es aquel denotado por las iniciales M/D/s, en el que como para los casos anteriores, el proceso de entrada sigue una distribución de Poisson. Mas en lo que respecta a los tiempos de servicio suele haber poca variación de un cliente a otro con lo que se pueden igualar todos a una constante (distribución de tiempos de servicio *degenerada*). Estos modelos son especialmente útiles en el caso de procesos repetitivos como aquellos pertenecientes al funcionamiento interno y no tanto los relacionados con un trato personalizado al cliente. Sin embargo, en servicios homogéneos (como podría ser el servicio de graduación en el caso real de un centro óptico) sí que se ajusta a la realidad con fidelidad.

En el camino intermedio entre los modelos que presentan tiempos de servicios constantes (varianza cero,  $\sigma=0$ ) y aquellos que se distribuyen de manera exponencial (varianza igual a todo el rango de tiempos de servicio,  $\sigma=1/\mu$ ), se encuentran aquellos que cubren casos intermedios ( $0 \leq \sigma \leq 1/\mu$ ) que recogen la mayor parte de las distribuciones de tiempo de servicio reales. Estos modelos son denotados por M/E<sub>k</sub>/s y su distribución de tiempos de servicio se corresponde con la *distribución de Erlang* (denominada así por el fundador de la teoría de colas).

Existen otros tipos de modelos de colas con disciplina de prioridades que son utilizados para dar servicio a un cliente u otro en función de sus prioridades asignadas. Muchos sistemas reales, como la realización de trabajos urgentes antes que otros, se ajustan a este tipo de modelos. Se establecen clases de prioridades para la selección de clientes, pero dentro de éstas los clientes son atendidos según la disciplina FIFO y cada clase prioritaria está sometida a un proceso de entradas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales.



A modo de resumen y para finalizar con la presentación de los principales modelos de colas, en la tabla 1 se muestran agrupados de acuerdo con el procedimiento matemático de solución:

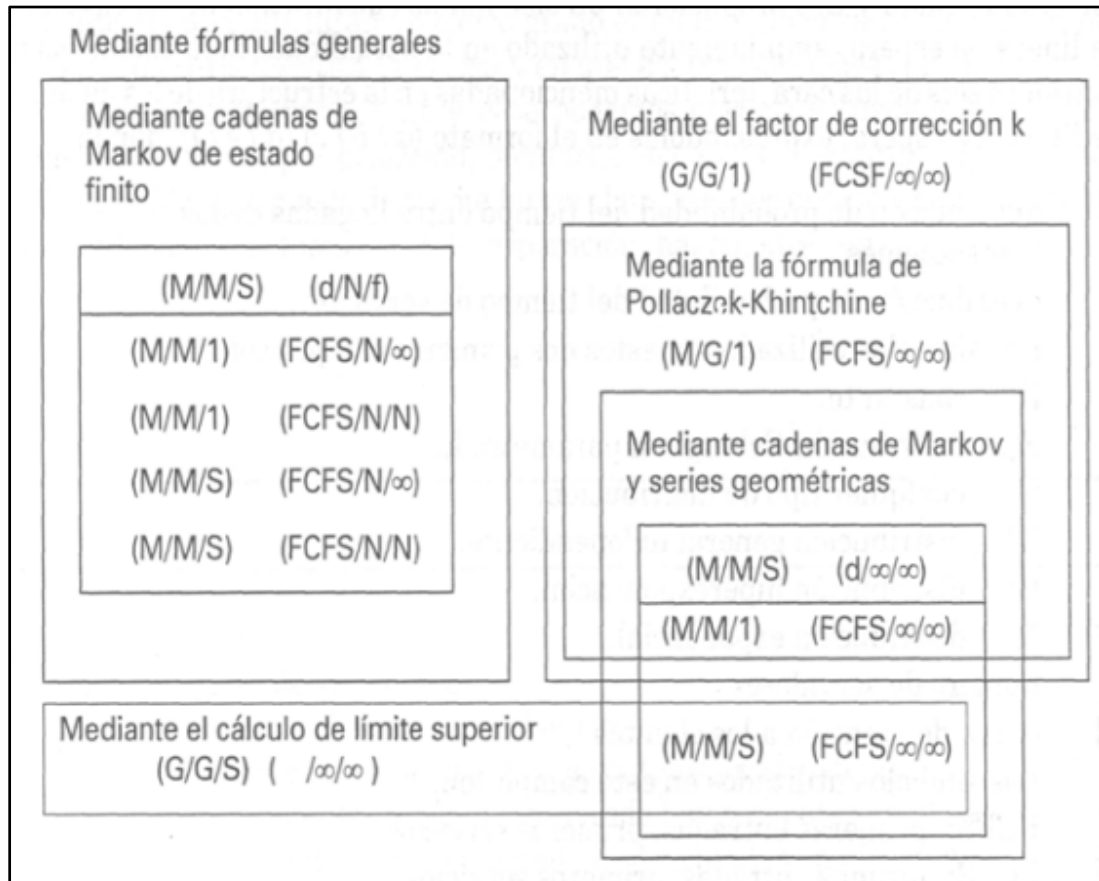


Tabla 1. Modelos según proceso matemático de resolución. Fuente: Aranzang y García (2006)

## 2.6.- Clasificación de los problemas de Teoría de Colas

Los problemas que se sirven de la T.C. para su resolución pueden ser agrupados básicamente en dos grupos (García Linares, 2008):

### 1) Problemas de análisis.

Podríamos estar interesados en saber si los recursos de un sistema están siendo utilizados de forma eficiente y, el sistema ofrece un rendimiento global satisfactorio. Para este tipo de problema habrá que analizar las siguientes variables:

- Tiempo promedio que un cliente tiene que esperar en la fila antes de ser atendido ( $E[W_q]$ ).
- Tiempo que tardan los dependientes (servidores) en procesar el pedido ( $1/\mu$ ).
- Número medio ( $E[L_q]$ ) y número máximo ( $L_{q-max}$ ) de clientes que esperan en la cola.

Una vez que se ha realizado el análisis la información es utilizada para tomar decisiones como incrementar el número de servidores, mejorar su eficiencia o, aumentar el tamaño o capacidad de la línea de espera.

## 2) Problemas de diseño.

En otras ocasiones, se busca determinar algunas variables clave en base a requisitos que se imponen en el diseño, tal como un nivel mínimo de calidad de servicio. Para este tipo de problemas habrá que atender a los siguientes parámetros:

- Servidores que deben emplearse para ofrecer un servicio de una calidad mínima determinada.
- Número de colas que deben emplearse (normalmente igual o menor al número de servidores).
- Servidores para cuestiones especiales como por ejemplo aquellos que pueden estar destinados a realizar siempre una misma tarea de duración constante que, a su vez, pueden incluso servir a los que atienden directamente a la *población de entrada*.

Estas variables de diseño se deciden después de valorar diferentes alternativas, haciendo comparativas entre las diversas soluciones óptimas y sus respectivas sensibilidades a los factores limitados.

En el presente trabajo se combinan ambos tipos de problema: una primera fase de análisis a partir de la cual se extraen conclusiones que permiten aportar sugerencias de mejora a la gerencia de la empresa bajo estudio. El estudio continúa con una fase de diseño en la que, una vez conocidas las variables más sensibles o restrictivas a partir de la fase de análisis, se propone un diseño alternativo que pueda mejorar la configuración inicial del sistema de líneas de espera en la empresa de estudio.

### 3.- Gestión de líneas de espera en una pequeña empresa de Cartagena (Centro Óptico García Gallego)

En las siguientes páginas se analiza el sistema de líneas de espera para una pequeña empresa situada en Cartagena. De este modo, serán aplicados los conceptos introducidos a lo largo de esta memoria siguiendo una metodología concreta que es expuesta posteriormente.

#### 3.1.- Descripción de la empresa y el entorno

El centro óptico *García Gallego* fue dado de alta bajo la forma jurídica de *Comunidad de Bienes* el 1/01/2006. Después de visitar varias ópticas en la ciudad, descubrí este negocio por las vallas publicitarias en algunas de las principales vías de la ciudad en 2008, con el comienzo de la crisis y ofreciendo “precios-anticrisis” (Figura 7).



Figura 7. Valla publicitaria Centro Óptico García Gallego.

Una Comunidad de Bienes (art. 392, Código Civil) es una colectividad clasificada como ente sin personalidad jurídica en el Código Civil, por tanto, se rige por el Código de Comercio en materia mercantil y por el Código Civil en materia de derechos y obligaciones. Las otras características fundamentales son que la responsabilidad frente a acreedores de los socios es ilimitada, que al no tener personalidad jurídica propia, los bienes pertenecen a los comuneros en la proporción que se determine en el contrato de sociedad y, no hay exigencia de una aportación mínima obligatoria para las personas que la constituyan.

El Centro Óptico García Gallego es una PYME sita actualmente en Ronda Ciudad de la Unión nº8, bajo A, Cartagena. En la figura 8 se muestra la situación del negocio dentro del ámbito urbano de la ciudad. El local goza de buenos accesos desde las principales vías como son *Paseo Alfonso XIII* y *Alameda de San Antón*, así como desde la *Autovía A-30* ya sea a través de *Torre ciega*, *Avda. Víctor Beltrí* o su punto de finalización donde se une con el ya nombrado *Paseo Alfonso XIII*. Al estar situado en *Ronda Ciudad de la Unión*, son altas las probabilidades de que llame la atención de numerosos clientes que pasan diariamente por delante tanto a bordo de un vehículo como a pie, lo que unido a la disponibilidad de aparcamiento hace que la ubicación de la empresa se considere muy buena. En la imagen de la figura 8 se muestra su localización exacta en el punto marcado como “A”:

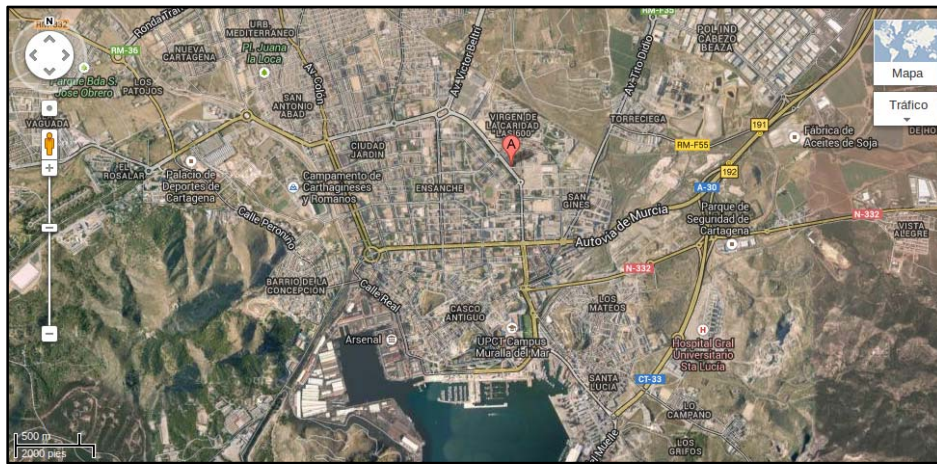


Figura 8. Panorámica de la ciudad de Cartagena con la ubicación de la empresa de estudio. Fuente: google.maps

En las siguientes imágenes se muestra la fachada del negocio el cual se encuentra en la intersección de *Ronda Ciudad de la Unión* y *calle Ciudadela*. Por lo tanto, aparte de gozar de una buena ubicación como se ha comentado, también disfruta de amplios escaparates para llamar la atención de los conductores y viandantes.



Figura 9. Fachada calle Ciudadela del Centro Óptico García Gallego.

Los servicios y productos ofertados son aquellos relacionados con actividades ópticas como graduación ocular y venta de instrumentos tales como gafas, lentillas, productos específicos de limpieza, etc.

Estos servicios son ofrecidos normalmente por cuatro trabajadoras a excepción de los sábados por la mañana cuando el personal se incrementa en una trabajadora más. Entre estas trabajadoras, tres de ellas están diplomadas en Óptica y Optometría y el resto tienen formación resultado de haber cursado o bien del *Ciclo Formativo superior en Óptica de Anteojería*, o bien, estudios medios o superiores de Administración de Empresas para ejercer de agente de ventas. Una de las trabajadoras diplomadas es además la administradora de la empresa. Con dicha persona he realizado dos entrevistas en las que ha aportado algunos datos relevantes para el estudio, como se verá más adelante.

El horario de apertura del centro óptico abarca de lunes a viernes (de 10:00 a 14:00 y de 17:00 a 20:30 h.) y los sábados solamente por la mañana (de 10:00 a 13:30 h.).

### **3.2.- Metodología**

Para abordar el análisis matemático que module el sistema de espera real que se da en el seno del centro óptico se seguirá la metodología común llevada a cabo para solucionar problemas de I.O. con las consideraciones y matices pertinentes relativos a la T.C.

En el temario de las asignaturas impartidas relacionadas con la I.O. se indica siempre un proceso metodológico que se divide en cuatro etapas, las cuales están integradas en este estudio: definición del problema, modelado matemático, solución del modelo y presentación/interpretación de resultados. La metodología seguida en este caso añade aspectos relativos a la elaboración del Trabajo Fin de Grado en su conjunto, como se comenta a continuación.

Elección del tema: Mi voluntad era desarrollar un estudio acerca de algún tema relacionado con la I.O. y con esta idea me dirigí a los directores del presente estudio

quienes me propusieron que versara sobre T.C. puesto que en la carrera se habían visto diferentes tipos de problema pero no éste en concreto. Así, el tema estaba decidido y sólo faltaba buscar un negocio con líneas de espera susceptibles de ser útiles para la aplicación de los contenidos teóricos.

Documentación: Los directores del proyecto me proporcionaron bibliografía específica para que tomara contacto con las características de este tipo de problemas. Los fundamentos de la T.C. adquiridos, junto con numerosas consultas bibliográficas adicionales en busca de conceptos estadísticos necesarios, herramientas concretas de *Microsoft Excel*, manejo del software *WinQSB*, aplicaciones a otros casos, etc. aportan los conocimientos necesarios para comenzar de desarrollo del estudio.

Elección de la empresa (detección del problema): En primer lugar se pensó en un sistema de colas con bastante afluencia de clientes y un número considerable de servidores, como es el caso de un establecimiento franquiciado de *McDonalds*. Debido a la complejidad por el número de servidores, pero sobretudo a un funcionamiento ya optimizado del sistema de líneas de espera y, por consiguiente, las pocas oportunidades de mejora de la presente, se decidió elegir una empresa diferente, con habituales colas de clientes, una gestión de las líneas de espera poco desarrollada y, por tanto con muchas posibles oportunidades de mejora.

Recogida de datos: Como resultado de la fase de documentación, se establece el conjunto de variables de interés en los sistemas de colas y teniendo esto en cuenta se elabora una plantilla (figura 12) para recoger los datos de manera cómoda y ordenada. Después de comenzar la recolecta de datos, se pone de manifiesto la imposibilidad de tomar medidas de tantas variables en tiempo real, por lo que el muestreo se redujo a la anotación de tres eventos para cada cliente, lo que implica un seguimiento de cada uno de los que entra al sistema. Este seguimiento se lleva a cabo mediante la identificación por algún rasgo físico de cada cliente o grupo de clientes (amigos, varios miembros de una familia, parejas, etc.), de manera que es anotada su hora de llegada a la cola, la hora a la que se comienza a prestarle el servicio y la hora en la que el cliente sale del establecimiento. Así se pueden conocer a posteriori los valores de dos de las variables de mayor relevancia (identificación de las variables de decisión, paso metodológico de la I.O.): el tiempo entre dos llegadas consecutivas contabilizando la diferencia horaria entre las llegadas de clientes y el tiempo de servicio para cada cliente calculando la



diferencia entre el evento de empezar a ser atendido y la salida del centro óptico. El número de servidores y gasto aproximado por cliente son otras dos variables de vital importancia: la primera se conoce resultado de la observación (4 dependientes de lunes a viernes y 5 en el horario de apertura de sábado por la mañana); y la segunda fue estimada por la gerencia de la empresa (véase sección 3.3.1).

Desarrollo teórico: A partir de las lecturas y consultas bibliográficas se comienza a redactar la parte teórica del estudio, base de la posterior implementación práctica. Partiendo del contexto de la I.O. se concreta el texto en torno a la T.C. para entrar de lleno en el estudio de este tipo de problemas y en las características que los dotan de interés.

Aplicación al caso práctico y elaboración del modelo: Una vez realizada la recogida selectiva de datos, como se ha explicado en un apartado anterior se procede a la puesta en práctica de la T.C. en el caso real del centro óptico elegido. En primer lugar, se busca la adecuación de la línea de espera de la empresa a uno de los modelos basados en los procesos de nacimientos y muerte (apartado 2.4) para lo cual es preciso determinar estadísticamente si tanto el proceso de llegadas como los tiempos de servicio se ajustan bajo un cierto nivel de confianza a la función de densidad de la distribución de probabilidad exponencial.

Presentación de resultados. Cotejo de resultados con la evidencia teórica: en esta última fase se interpretan los resultados obtenidos en el contorno definido por las limitaciones del modelado del caso real. Además, se cotejan los resultados de la aplicación práctica con los de la fase de estudio teórico y con los obtenidos a través del software de resolución de problemas de cuantitativos *WinQSB* que permite simulaciones de situaciones difíciles de abordar de manera analítica.

### **3.3.- Estudio preliminar. Problema de análisis**

En la clasificación que se dio de los problemas de T.C. se vieron dos diferentes problemáticas (apartado 2.6). En primer lugar se realizará el problema de análisis para, dada la configuración actual del sistema de espera, averiguar si los recursos de un

sistema están siendo utilizados de forma eficiente y, si el sistema ofrece un rendimiento global satisfactorio.

En la Figura 10, un plano de la Óptica pone de manifiesto la configuración del local. La superficie aproximada del bajo es de 85m<sup>2</sup> y ha sido dividido tal y como se muestra seguidamente en la estancia principal (dónde se encuentra el recibidor delante del cual se forma la cola), almacén, taller (dónde en ocasiones se encuentra una de las dependientas), despacho y sala de graduación.

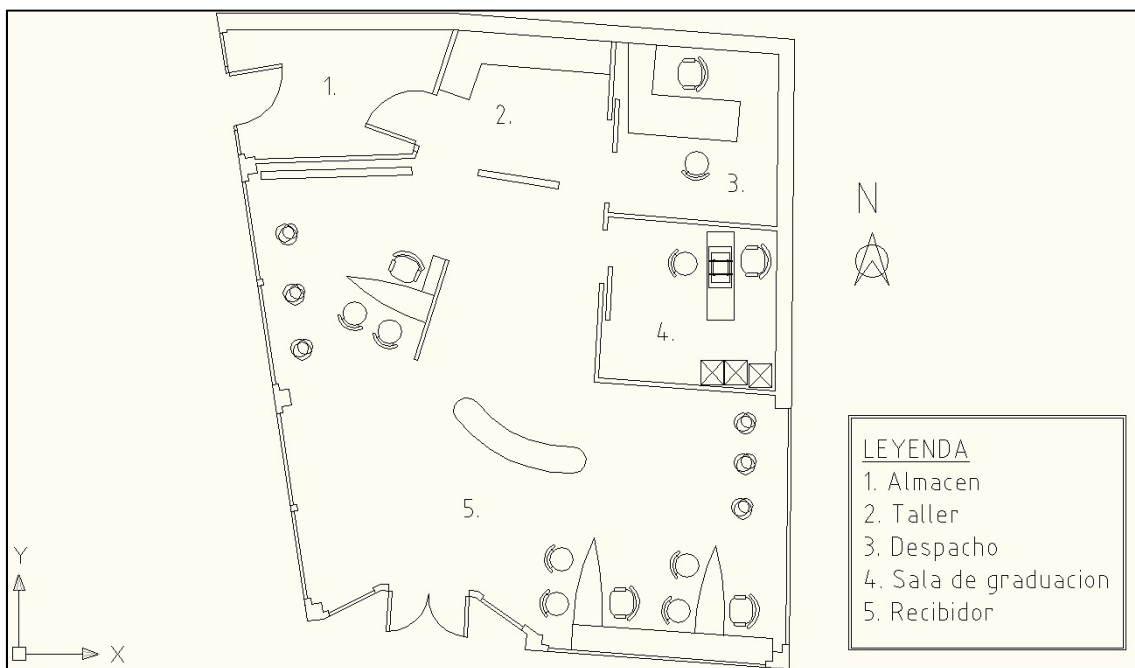


Figura 10. Plano del interior del Centro Óptico García Gallego. Elaboración Propia.

En la leyenda del plano (véase Figura 10) aparece como número “5” el recibidor, espacio que comprende la formación de la cola. Un margen de aproximadamente dos metros y medio es el espacio disponible para la espera de los clientes, de modo que cuando hay clientes siendo atendidos y al menos dos esperando en cola se producen situaciones incómodas puesto que la puerta de la óptica es automática con sensor de presencia. De hecho, uno de los días de recogida de datos se produjo una pequeña incidencia al haber cinco clientes en cola: la última señora se colocó para esperar en la parte derecha del recibidor (conforme se entra al local) pero muy próxima a la línea de desplazamiento de la puerta automática con lo que cuando llegó el siguiente cliente el borde inferior de la puerta le golpeó en el tobillo provocándole una pequeña herida. Situaciones incómodas como ésta, unidas al gasto de la puerta automática y los sistemas de ventilación que se ponen en marcha al encontrarse la puerta abierta hacen pensar que



la zona de espera no esté correctamente configurada, sabiendo además por observación que la longitud media de la cola ocasiona este tipo de problemas diariamente.

Otros elementos que constan en el plano como el almacén, taller y despacho no son influyentes en el estudio del sistema de colas. La sala de graduación, aunque interviene en la prestación directa de servicio al cliente, tampoco implica consideraciones especiales ya que las citas de las personas a graduar son normalmente programadas de antemano.

### **3.3.1.- Primera aproximación.**

En esta sección se describe una primera aproximación de la situación real que acontece en la óptica con el objeto de aplicar la T.C. al supuesto concreto en cuestión.

#### **Variables involucradas. Recogida de datos**

Lo que primero se debe considerar es el estado del sistema en los intervalos en los cuales se producirán anotaciones acerca de las variables que lo caracterizan. Se observa el sistema cuando está funcionando con normalidad, esto es, quedan descartados los casos de comportamientos anómalos (régimen transitorio, como ocurre durante la primera media hora desde el inicio de la jornada en la que se realizan tareas distintas por parte del personal y el comportamiento de llegadas de clientes es diferente) y se analiza el funcionamiento en régimen permanente representativo de la mayoría de las situaciones que puedan acontecer. Así, el sistema es analizado en su fase estable en la que los valores de los tiempos tienden a converger. En la figura 11 se ilustra dicha fase de puesta en funcionamiento y la entrada a partir de un determinado momento en el estado estable de operación o “*Steady-State Operation*” (Anderson et al., 2006) en el que será analizado el sistema de colas. De este modo, el tiempo de espera en función del número de clientes presenta el comportamiento que muestra la figura 11:

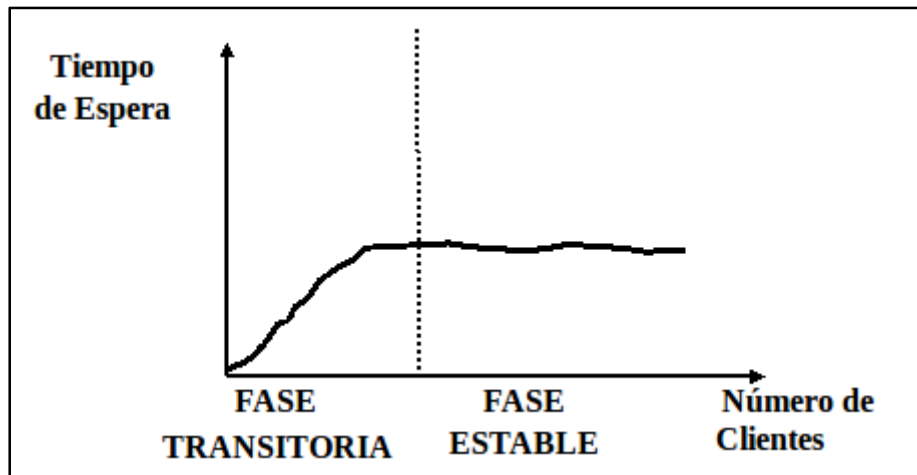


Figura 11. Fases del tiempo de espera. Fuente: Hertz Fernández Jeri, (2000)

En un principio, a raíz de las consultas bibliográficas realizadas para el desarrollo teórico de la presente memoria, fueron elegidas muchas variables para la recogida de datos, tales como el tiempo entre llegadas de clientes, el tiempo de servicio, número de servidores, número medio de servidores ocupados, tiempo medio de espera en cola, longitud media de la cola a la llegada de un nuevo cliente, gasto medio por cliente e incluso para aquellos clientes que se cansan de esperar y se van, la longitud de la cola o tiempo de espera en cola que les hizo tomar esa decisión. Por esta razón, el primer diseño de la tabla para recogida de datos contemplaba demasiadas variables, algunas de las cuales difíciles de tomar en tiempo real (Figura 12).



Finalmente sólo se contemplaron datos de las variables cuyo color de fondo de la fila es el blanco: tiempo medio de servicio por cliente ( $1/\mu$ ) y tiempo medio entre llegadas de clientes ( $1/\lambda$ ), puesto que el resto se podían calcular a partir de la anotación de la hora de los eventos de llegadas, comienzo de servicio y finalización del servicio. El gasto medio por cliente fue estimado por la administradora del centro óptico en 40€. El modelo anterior para recogida de datos es válido tanto para los días de lunes a viernes como para el sábado por la mañana al segmentar el horario en intervalos identificados con una letra. Estas letras aportan la flexibilidad de poder referirse a un intervalo de tiempo u otro según cómo se desarrolle el proceso de recogida de datos.

En la tabla 2 se muestran los datos agrupados según el día de la semana. El número total de clientes, como se puede observar en la última fila de cálculo de resultados totales, es de 183 personas para esta primera aproximación. Los datos para dichos clientes han sido tomados en un intervalo total de 1120 minutos (18 horas y 40 minutos) y considerándolos todos de manera conjunta se obtiene un tiempo medio entre llegadas de clientes de poco más de 7 minutos y un tiempo medio de servicio de 7'661 minutos (7 minutos y 40 segundos aproximadamente). Esta primera comparación entre las medias de las variables ya nos puede llevar a pensar que con cuatro servidores con idéntica tasa de servicio y capaces de atender a cualquier cliente apenas se deberían generar esperas, algo que contrasta con algunas situaciones observadas.

Resumen de datos obtenidos por día de observación					
	Muestras (clientes)	Tiempo de muestreo (min)	Media min/llegadas	Media Tserv (min)	s
Lunes	16	150	9,375	8,182	4
Martes	43	300	6,977	6,703	4
Miércoles	13	120	9,231	6,167	4
Jueves	32	180	5,625	7,245	4
Viernes	24	180	7,500	8,292	4
Sábado	55	190	3,455	9,380	4
Rdos. Totales	183	1120	7,027	7,661	4

Tabla 2. Resumen de los datos observados por días. Elaboración propia

En la tabla 2 sido marcadas las cifras para el tiempo medio de servicio dadas en minutos de manera que en rojo se encuentran aquellas que superan la de las observaciones y en verde el tiempo medio de aquellos días en los que es inferior al citado promedio global. Por último, se especifica el número de servidores que trabajan cada día de la semana a la tasa de servicio correspondiente que consta en la misma fila.

Una vez en posesión de los datos, se procede a la evaluación de la distribución de las funciones de probabilidad de los tiempos entre llegadas y de los tiempos de servicio y, siendo así, poder aplicar los modelos de colas basados en procesos de nacimiento y muerte (véase apartado 2.4).

### **Caracterización del proceso de llegadas**

Para formular un modelo de colas, es preciso conocer en primer lugar la distribución por la que se rigen los tiempos de llegada y de servicio en el sistema. Este ajuste del comportamiento de las variables involucradas, entre ellas la tasa de llegada de clientes al sistema, debe estar lo suficientemente ajustado a la realidad para que el modelo proporcione resultados razonables y fiables, siendo además lo suficientemente sencilla para que el modelo sea matemáticamente manejable.

Para poder utilizar modelos de colas basados en procesos de nacimiento y muerte, se debe contrastar si los datos recogidos (tanto de tiempos entre llegadas como de tiempos de servicio) en la fase anterior del estudio se distribuyen de acuerdo a una distribución exponencial. Para ello necesitamos realizar una prueba de bondad de ajuste de manera que permita verificar que la población de la cual proviene dicha muestra se ajusta a una distribución exponencial dentro de un cierto nivel de significación. Por tanto, comparamos la distribución observada con la distribución esperada del mismo parámetro  $\lambda$  para verificar si ambas distribuciones se ajustan bien o no. Además, se podrá conocer el nivel de confianza del ajuste y, por consiguiente, la fiabilidad de los resultados obtenidos mediante un test de hipótesis al conjunto total de datos.

La prueba de *Chi-cuadrado* es un test de ajuste que se lleva a cabo mediante contraste de hipótesis a través del cual se puede averiguar si existen diferencias estadísticamente significativas entre la distribución observada y la distribución esperada. El test parte de la hipótesis de que las dos variables no están relacionadas, es decir, hay independencia entre las variables, de manera que rechazar la hipótesis de partida o hipótesis nula nos llevaría a concluir (con un determinado nivel de significación) que las variables se encuentran relacionadas:

$H_0$ : Independencia de las variables.

$H_1$ : Variables estadísticamente relacionadas

La fórmula general de Chi-cuadrado, a través de la cual se realiza el contraste de hipótesis, es aplicable en todos los casos y tiene la siguiente forma (Morales Vallejo, 2008):

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \quad (\text{Ecuación 30. Fórmula de Chi-cuadrado})$$

Donde  $f_o$  son las frecuencias observadas de cada uno de los intervalos en los que se ha dividido la muestra y  $f_e$  son las frecuencias esperadas (aquellas que responden perfectamente a una distribución exponencial de los tiempos entre llegadas).

La tolerancia porcentual de error que viene cuantificada por el nivel de significación será fijada en este estudio al valor de 0,05. Este es el margen de error dentro del cual los resultados serán válidos.

El test será llevado a cabo sobre el total de datos disponibles para cada función de distribución observada, de modo que los tiempos serán analizados de forma conjunta. Por este motivo también se ha decidido presentar la distribución de la variable para el conjunto total de observaciones, es decir, teniendo en cuenta el valor del tiempo entre llegadas para los 183 clientes de los que se tomaron datos. La Figura 13 presenta el histograma de frecuencias para una segmentación del rango en cinco intervalos siguiendo las indicaciones de Morales Vallejo (2008), según las cuales es recomendable que los intervalos tengan una frecuencia de al menos cinco, lo que no ocurre en el caso del último intervalo que recoge los datos correspondientes a la *cola* de la función.

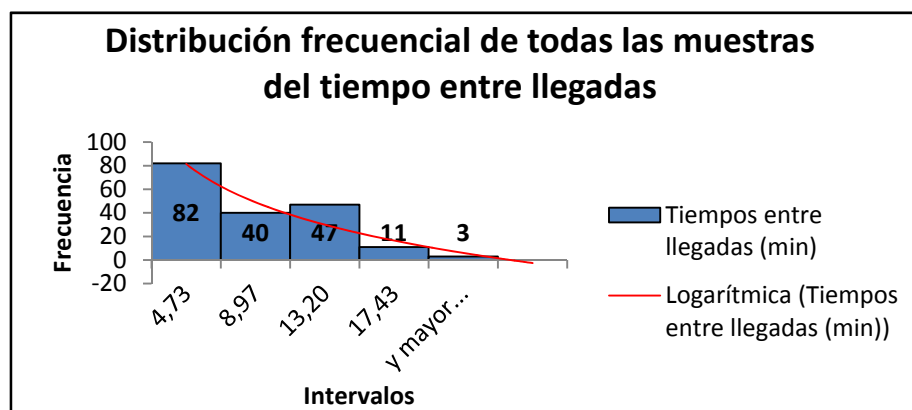


Figura 13. Distribución frecuencial de todos los tiempos entre llegadas (5 intervalos). Elaboración propia

En caso de que el valor obtenido sea mayor al valor de  $\chi^2$ , entonces se puede descartar la hipótesis nula y, estaremos en condiciones de afirmar con un nivel de confianza del 95% que la función de distribución observada está estadísticamente relacionada con la distribución exponencial esperada.

Gracias a la hoja de cálculo Excel, se puede calcular con facilidad el sumatorio del cuadrado de las desviaciones de las frecuencias observadas respecto a las frecuencias teóricas o esperadas. Dicho esto, se presenta la descomposición del cálculo en la tabla de la siguiente tabla:

Test-Chi	[0'5,4'73)	[4'73,8'97)	[8'97,13'20)	[13'20,17'43)	[17'43,∞)	TOTAL
o	82	40	47	11	3	183
e	113	39	16	9	6	183
(o-e)	-31	1	31	2	-3	
(o-e) <sup>2</sup>	961	1	961	4	9	
(o-e) <sup>2</sup> /e	8,504	0,026	60,063	0,444	1,500	70,537

Tabla 3. Cálculo del estadístico  $\chi^2$  para el tiempo entre llegadas. Elaboración propia

Que responde al caso particular de aplicación de la fórmula general de Chi-cuadrado que sigue:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(fo_i - fe_i)^2}{fe_i} = 70,537 \quad (\text{Ecuación 31. Fórmula de Chi-cuadrado, caso particular})$$

Este valor que obtenemos hay que compararlo con el valor de la distribución Chi en las tablas que para el caso de un nivel de significación de 0,05 (o un nivel de confianza del 95%) y 4 grados de libertad (número de categorías menos una,  $G.L.=k-1$ ) es de 0,711. Puesto que el valor obtenido resultado de la aplicación de la fórmula es ampliamente mayor que el valor en las tablas, se puede rechazar con seguridad la hipótesis nula ( $H_0 =$  Independencia entre las variables) y, así, concluir que con un nivel de confianza del 95% la distribución de los tiempos entre llegadas está estadísticamente relacionada con la distribución en frecuencias de una variable aleatoria exponencial. De manera gráfica, el valor obtenido de la tabla supone el umbral a partir del cual la hipótesis nula es rechazada y, por debajo del cual se acepta:

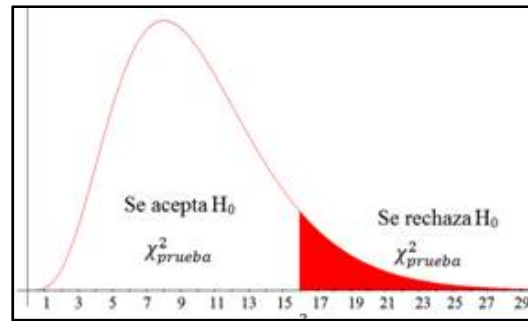


Figura 14. Gráfica distribución  $\chi^2$ . Fuente: Suárez (2012)

### Distribución de los tiempos de servicio

La metodología seguida para comprobar que la distribución de los tiempos de servicio puede ser caracterizada por una función de densidad de probabilidad exponencial es la misma que la ya utilizada para el caso del fenómeno de llegadas. También para este caso se realizará la prueba de bondad de ajuste que permita determinar que la variable aleatoria que caracteriza el tiempo de servicio se encuentra estadísticamente relacionada con una función exponencial de la misma media.

Siguiendo con el cauce procedimental establecido en la sección anterior se estudian ahora de manera conjunta los datos para la variable tiempo de servicio de los 183 clientes acerca de cuyos eventos se tomaron medidas temporales. Sobre la totalidad de estas muestras (figura 16) se realizará el Test Chi-cuadrado para la verificación (escogido un nivel de significación que será de 0,05) de su congruencia con un comportamiento exponencial puro.

Se parte pues de la hipótesis nula nos llevaría a concluir que no existe dependencia estadística. Por el contrario, rechazar la hipótesis de partida pondría de manifiesto una determinada relación entre sendas variables aleatorias. A continuación, la formulación de la hipótesis nula y la hipótesis alternativa:

$H_0$ : Independencia de las variables.

$H_1$ : Variables estadísticamente relacionadas.

Valoradas las muestras de manera separada, se presenta en la Figura 15 la gráfica correspondiente al compendio de muestras para el tiempo de servicio fijando en



cinco el número de intervalos por las condiciones impuestas por el test antes comentadas.

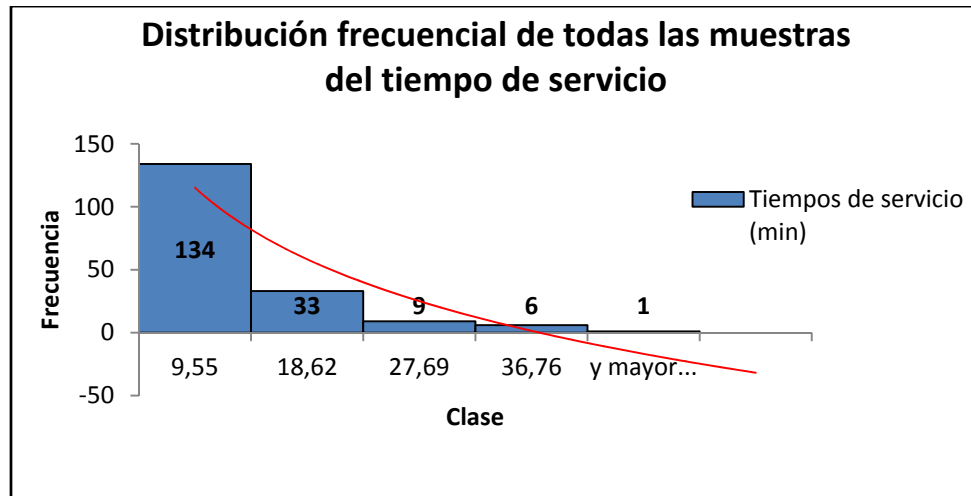


Figura 15. Distribución frecuencial de todos los tiempos de servicio (5 intervalos). Elaboración propia

Se procede pues a presentar el resultado de la fórmula calculado mediante la hoja de cálculo sin redundar en los aspectos generales relativos a la prueba Chi-cuadrado. De esta forma, se presenta la descomposición para el cálculo en la tabla que sigue (tabla 4):

Test-Chi	[0'48,9'55]	[9'55,18'62]	[18'62,27'69]	[27'69,36'76]	[36'76,∞)	TOTAL
o	134	33	9	6	1	183
e	132	36	13	1	1	183
(o-e)	2	-3	-4	5	0	
(o-e) <sup>2</sup>	4	9	16	25	0	
(o-e) <sup>2</sup> /e	0,030	0,250	1,231	25,000	0,000	26,511

Tabla 4. Cálculo del estadístico  $\chi^2$  para el tiempo de servicio. Elaboración propia

El valor del estadístico es en este caso de 26,511 que comparado con el valor que aparece en las tablas de  $\chi^2$  ( $\chi^2_{0,95,4}=0,711$ ) para un nivel de significación del 5% y 4 grados de libertad, provoca que se rechace la hipótesis nula de modo que queda contrastada la relación estadística entre las variables.

Una vez realizado el contraste y expuestas las limitaciones a tener en cuenta de esta prueba, se continua el estudio con la identificación del modelo a utilizar que como resultado de estos test de hipótesis se sabe que se podrá emplear un modelo basado en procesos de nacimiento y muerte.

## **Identificación y clasificación del modelo a utilizar**

Presentada la distribución del centro óptico, en este apartado se procederá a modelar el sistema de líneas de espera. Para determinar el modelo al que mejor se ajusta la operativa de la empresa serán analizados los elementos del sistema de colas partiendo del conocimiento previo del patrón de llegadas y clientes servidos a lo largo del tiempo.

**Fuente de entrada:** La población o clientela potencial se considera infinita puesto que el número de clientes que puede haber en el sistema en cada instante de tiempo no influye en la tasa de llegada de nuevos clientes. A raíz de esta evidencia, se modela la población de entrada como una fuente que genera clientes de manera ilimitada lo cual supone una simplificación tal y como se explicó en el apartado 2.1. Esta consideración implica que el último parámetro en la clasificación del sistema según la notación de Kendall (“D” que se refiere al tamaño de la población de entrada) sea infinito y pueda ser omitido.

Otra característica de este elemento es el patrón estadístico de llegadas de clientes que ha sido verificado. Esta comprobación implica un primer parámetro “M” para el sistema mediante la notación de Kendall, puesto que los tiempos entre llegadas siguen una distribución exponencial.

**Cola:** Aunque el espacio reservado para la formación de la cola frente al mostrador del local sea limitado, la capacidad de la cola se considera infinita ya que puede haber tal número de clientes esperando para recibir servicio como todos aquellos que estén dispuestos a esperar después de unirse a dicha cola. Decir además que se trata de una única cola de la que según una disciplina FIFO se van seleccionando clientes al ritmo al que queden servidores libres por haber cursado sus tareas en relación a un cliente. Las dos características anteriores propias de este elemento determinan la nomenclatura concreta de los parámetros “K” y “N” (antepenúltimo y penúltimo, respectivamente) según la notación de Kendall. El primero de ellos se puede omitir ya que hace referencia a la capacidad del sistema que es ilimitada debido al tamaño infinito de la cola y, el segundo, hace referencia a la disciplina de la cola y por tratarse del caso FIFO también puede ser omitido a la hora de denotar el sistema.

**Mecanismo de servicio:** Este último elemento del sistema se caracteriza, por un lado, por el patrón estadístico de los tiempos de servicio cuya distribución fue contrastada con la exponencial poniendo en evidencia la relación. Este resultado hace que el segundo

parámetro en la notación de Kendall sea “M” lo que significa que los tiempos de servicios se hallan distribuidos según una distribución exponencial para el nivel de confianza elegido.

Por otro lado, en referencia al mecanismo de servicio del sistema se consideran cuatro servidores (dependientas) ya que son las que se encuentran dentro del local dando servicio a la generalidad de los clientes.

Por tanto, la notación de Kendall correspondiente al modelo de representación del Centro Óptico García Gallego sería la siguiente: “M/M/4”. El esquema del sistema de colas es presentado a través de la figura 16:

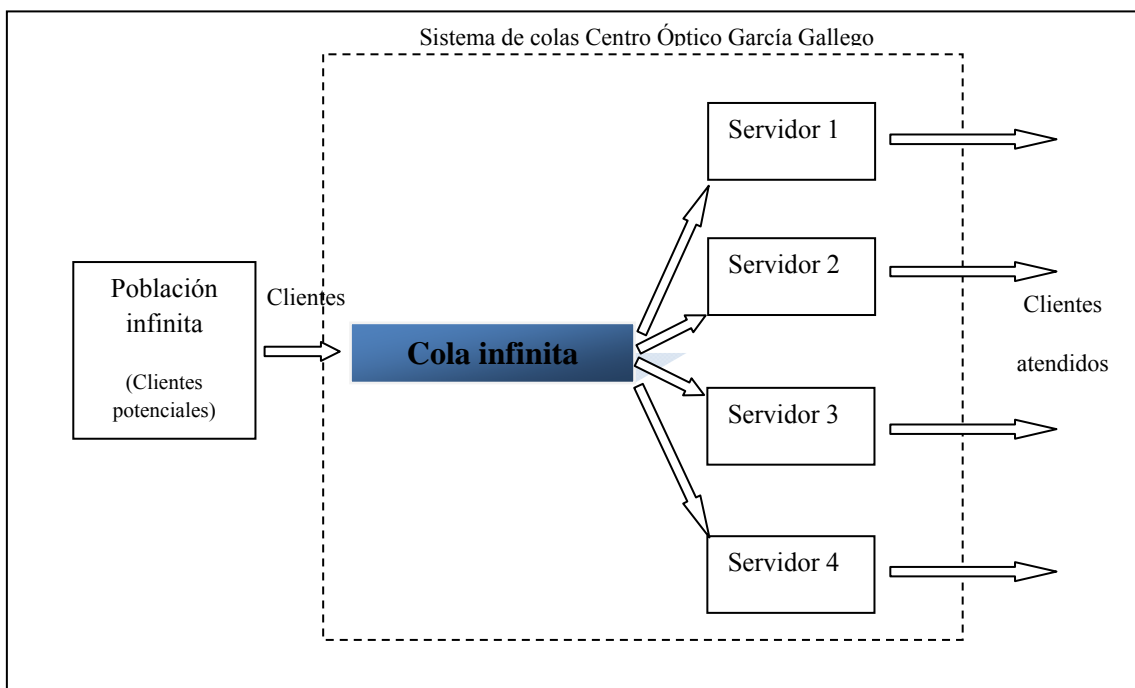


Figura 16. Esquema del sistema de colas del Centro Óptico García Gallego. Elaboración propia

Antes de comenzar, se presenta el valor del factor de utilización el cual es menor a la unidad.

Factor de utilización:

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{1}{4 \cdot \frac{7,661}{7,027}} = 0,2725 \quad (\text{Ecuación 32})$$

Lo que quiere decir que el sistema trabaja con una tasa de ocupación media del 27,25% de su capacidad. Además, este porcentaje también supone una medida de la

probabilidad de que un cliente nuevo tenga que esperar para ser servido (donde  $0 \leq \rho \leq 1$ ) o del número medio de servidores ocupados ( $0,2725 * 4 = 1,09$  servidores) lo que parece indicar que sobran dependientas siendo algo que, sin embargo, contrasta con la formación de colas observada.

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema (estado 0):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{4-1} \frac{\left(\frac{7,661}{7,027}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{7,661}{7,027}\right)^4}{4!} \left( \frac{4 \cdot \frac{1}{7,661}}{4 \cdot \frac{1}{7,661} - \frac{1}{7,027}} \right)} = 0,3354 \quad (\text{Ecuación 33})$$

Número medio de clientes en cola:

$$L_q = \frac{\left(\frac{7,661}{7,027}\right)^4 \frac{1}{7,661 \cdot 7,027}}{(4-1)! \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{7,661} - \frac{1}{7,027}\right)^2} \cdot 0,3354 = 0,1459 \quad (\text{Ecuación 34})$$

Número medio de clientes en el sistema M/M/s:

$$L = 0,1459 + \frac{7,661}{7,027} = 1,2361 \quad (\text{Ecuación 35})$$

Tiempo medio de espera en cola:

$$W_q = \frac{0,1459}{\frac{1}{7,027}} = 1,0255 \quad (\text{Ecuación 36})$$

Tiempo medio de estancia en el sistema:

$$W = 1,0255 + \frac{1}{7,661} = 1,1561 \quad (\text{Ecuación 37})$$

### **Análisis numérico (WINQSB)**

Los anteriores resultados consecuencia de la aplicación de las fórmulas de la T.C. son útiles para analizar el sistema en condiciones de estabilidad, supuesto que se cumple en relación a los datos globales recogidos. Este análisis se realizará a continuación con ayuda de *WinQSB* gracias a la cual el proceso es menos laborioso.

En el presente apartado se estudia el sistema de colas mediante el software *WinQSB* utilizado durante la carrera para resolución de problemas de I.O. Se trata de un programa que contiene diversas herramientas para resolver gran cantidad de problemas de decisión en el ámbito de la I.O. que por su versatilidad y sencillo manejo se convierte en una herramienta muy útil. Del total de los 19 módulos que posee *WinQSB*, tres de ellos están directamente relacionados con la temática de la Teoría de Colas (Martínez Rubín Celis, 2009):

- Procesos de Markov (*Markov Process-MKP*): Este programa resuelve y analiza procesos de Markov.
- Sistemas de colas (*Queuing Analysis-QA*): Este programa resuelve el rendimiento de sistemas de colas de etapa simple usando la fórmula de cercanía, aproximación o simulación.
- Simulación de sistemas de cola (*Queuing Analysis Simulation-(QSS)*): Este programa modela y simula sistemas de colas simples y multietapas con componentes, incluyendo poblaciones de clientes, servidores, colas y/o de basuras.

De los programas anteriormente presentados, será utilizado el módulo de análisis de colas (“*Queuing Analysis-QA*”).

En primer lugar, se crea un nuevo problema (*File*→*New Problem*). Entonces, en la pantalla emergente titulada “*Problem Specification*” se deben especificar una serie de parámetros de la manera en que se muestra en la figura 17:

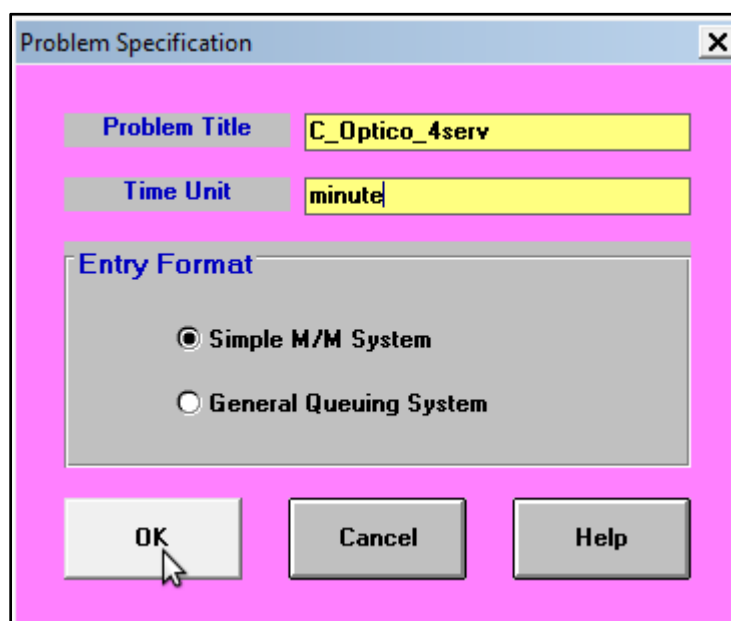


Figura 17. Ventana “*Problem Specification*”, *WinQSB*. Fuente: Elaboración propia

En el primer campo de texto se ha de introducir el título que deseamos poner a nuestro problema. Para el caso práctico que nos ocupa considerando 4 dependientas (situación más habitual) el título escogido ha sido “*C\_Optico\_4serv*” y la unidad de tiempo (que por defecto está fijada a horas, “*hour*”) que hemos utilizado para presentar resultados ha sido el minuto, que es lo que se establece en el siguiente campo (“*minute*”). En el cuadro de formato de entrada se selecciona entre las dos opciones existentes “*Simple M/M System*” ya que como se demostró para el sistema de colas analizado los tiempos entre llegadas y los de servicio siguen sendas distribuciones de Poisson. El software, como se puede ver en la Figura 17, nos proporciona la posibilidad de estudiar líneas de espera con distribuciones generales para los tiempos involucrados. Una vez completados los datos necesarios, se presiona el botón “*OK*” y se especifican los valores de entrada para cada caso en particular. En este caso dichos valores son los que constan en la tabla 5:

Data Description	ENTRY
Number of servers	4
Service rate (per server per minute)	0.1305
Customer arrival rate (per minute)	0.1423
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M

Tabla 5. Entrada de datos componente “*QA*”, *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

El significado de cada uno de los valores introducidos es el siguiente:

- Número de servidores (“*Number of servers*”): para el caso del centro óptico son cuatro.
- Tasa de servicio por servidor y minuto (“*Rate server (per server per minute)*”): casilla para especificar el número medio de clientes despachados por servidor y por unidad temporal (minuto). Para el caso en estudio tenemos que tomar el valor del tiempo medio de servicio (calculado en la tabla 2) y hacer la inversa para obtener la tasa de servicio media por minuto.

$$\mu = \frac{1}{7,661} = 0,1305 \text{ clientes\_atendidos / dependienta / min} \quad (\text{Ecuación 38})$$

- Tasa de llegada de clientes por minuto (“*Customer Arrival rate per minute*”): se ha de especificar en esta fila la tasa de llegada de clientes, que para el caso

práctico calculamos como la inversa del tiempo medio entre llegadas también calculado en la tabla mencionada con anterioridad:

$$\lambda = \frac{1}{7,027} = 0,1423 \text{ llegadas / min} \quad (\text{Ecuación39})$$

- Capacidad de la cola (“*Queue Capacity (maximum waiting space)*”): lugar para especificar el tamaño de la cola que en caso de ser modelada como infinita se representa por una “*M*” que *WinQSB* entiende como un número lo suficientemente grande.
- Población de entrada (“*Customer population*”): variable para concretar el tamaño de la población de entrada que en la mayoría de los casos será infinita, representada como para el caso anterior con la letra “*M*”.

En el submenú desplegable a partir de la pestaña “*Solve and Analyze*” se puede resolver el sistema (“*Solve the Performance*”) o, también se puede simular el sistema durante un determinado intervalo de tiempo (“*Simulate the System*”). Además, *WinQSB* nos ofrece la posibilidad de realizar cómodamente análisis tanto de sensibilidad como de capacidad (“*Perform Sensitivity Analysis*” y “*Perform Capacity Analysis*”, respectivamente).

En el siguiente paso obtendremos los valores correspondientes a la solución del sistema para 4 servidores (como son llamadas en el programa: “*Performance Measure*”) dado que, como se sabe por el desarrollo teórico del modelo para el caso real, el factor de utilización es menor que 1 y el sistema puede ser analizado en régimen de estabilidad.

1	System: M/M/4	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per minute =	0,1423
3	Service rate per server (mu) per minute =	0,1305
4	Overall system effective arrival rate per minute =	0,1423
5	Overall system effective service rate per minute =	0,1423
6	Overall system utilization =	27,2605 %
7	Average number of customers in the system (L) =	1,1006
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,0102
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,3748
10	Average time customer spends in the system (W) =	7,7344 minutes
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,0715 minutes
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	2,6337 minutes
13	The probability that all servers are idle (Po) =	33,5345 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	2,7157 %

Tabla 6. Medidas de desempeño para 4 servidores, *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

Tal y como se obtenía para la aplicación al caso práctico de la T.C. se obtiene un factor de utilización que nos indica que el sistema trabaja en media al 27,26% de su capacidad. Del mismo modo, coinciden el resto de las medidas de interés obtenidas en la fase analítica de aplicación de la teoría. Además, como se observa en la tabla 7 podemos conocer la probabilidad de que el sistema se encuentre en cualquiera de los estados por los que pasa. También, en este caso los valores obtenidos (comparación de la probabilidad del estado  $0, P_0$ ) se corresponden con los obtenidos en la sección de identificación y clasificación del modelo.

<b>n</b>	<b>Estimated Probability of n Customers in the System</b>	<b>Cumulative Probability</b>
<b>0</b>	<b>0,3353</b>	<b>0,3353</b>
<b>1</b>	<b>0,3657</b>	<b>0,7010</b>
<b>2</b>	<b>0,1994</b>	<b>0,9004</b>
<b>3</b>	<b>0,0725</b>	<b>0,9728</b>
<b>4</b>	<b>0,0198</b>	<b>0,9926</b>
<b>5</b>	<b>0,0054</b>	<b>0,9980</b>
<b>6</b>	<b>0,0015</b>	<b>0,9994</b>
<b>7</b>	<b>0,0004</b>	<b>0,9999</b>
<b>8</b>	<b>0,0001</b>	<b>1,0000</b>
<b>9</b>	<b>0,0000</b>	<b>1,0000</b>
<b>10</b>	<b>0,0000</b>	<b>1,0000</b>
<b>11</b>	<b>0,0000</b>	<b>1,0000</b>

Tabla 7. Medidas de desempeño para 4 servidores, *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

Estos resultados muestran que apenas se llegan a ocupar todos los servidores de manera simultánea durante las 4 horas de simulación, lo que parece contradecir la observación de la realidad. Sin embargo, la situación podría ser entendida mejor si tenemos en cuenta que una de las cuatro dependientas trabajaba en el taller la mayoría del tiempo y sólo participaba en la atención al público en momentos puntuales de congestión.

Dada la infrautilización de la capacidad del sistema en media que muestran los resultados, es necesario un estudio de sensibilidad sobre el número de servidores ya que el análisis numérico de esta primera aproximación hace pensar que la empresa pueda estar operando de manera ineficiente. Por lo tanto, realizamos dicho análisis para el problema anterior sobre el número de servidores tras completar la ventana relativa a las especificaciones del análisis de sensibilidad (figura 18):



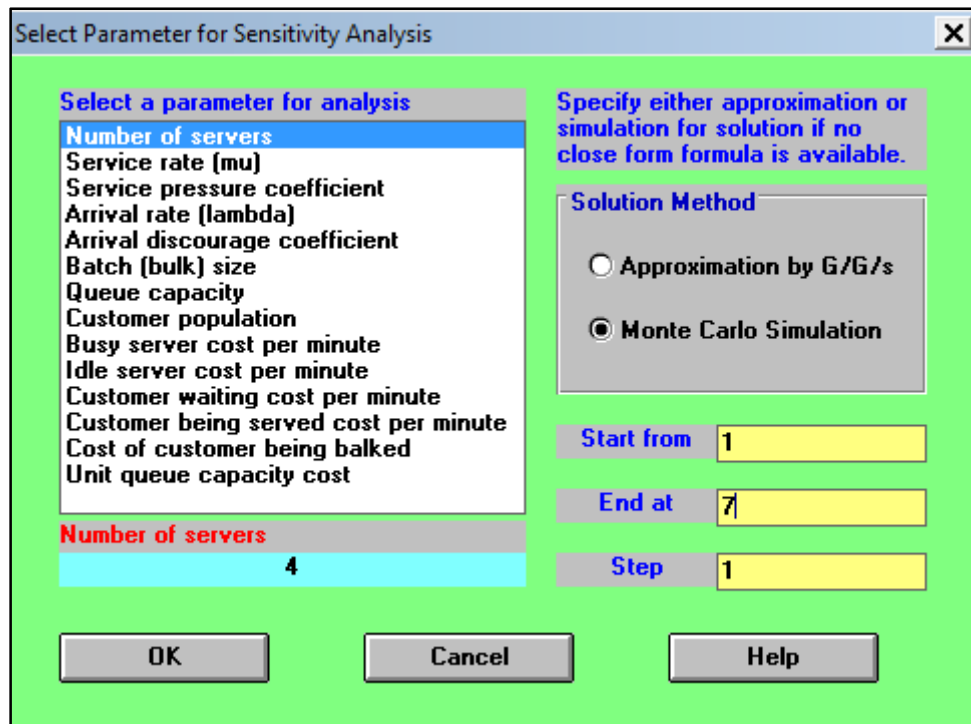


Figura 18. Ventana de especificación de parámetros para análisis de sensibilidad, *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

Como se muestra, se realiza un análisis mediante simulación por el *Método de Montecarlo* (Rodríguez Aragón, 2011) que permite obtener aproximaciones de los valores principales del problema mediante la recreación de las condiciones de la situación empírica. Como se ha comentado, se realizará el análisis sobre el número de servidores hasta un máximo de siete, límite impuesto por la capacidad disponible en el local para puestos de trabajo.

Value	Effective Arrival Rate	System Utilization	L	Lq	Lb	W	Wq	Wb	P0	Pw
1	Unstable	System!								
2	0,1423	0,5452	1,5517	0,4612	1,1988	10,9041	3,2413	8,4246	0,2943	0,3847
3	0,1423	0,3635	1,1545	0,0641	0,5710	8,1133	0,4504	4,0128	0,3306	0,1122
4	0,1423	0,2726	1,1006	0,0102	0,3748	7,7344	0,0715	2,6337	0,3353	0,0272
5	0,1423	0,2181	1,0920	0,0015	0,2789	7,6737	0,0108	1,9600	0,3360	0,0055
6	0,1423	0,1817	1,0906	0,0002	0,2221	7,6643	0,0015	1,5608	0,3361	0,0010
7	0,1423	0,1558	1,0904	0,0000	0,1845	7,6630	0,0002	1,2967	0,3361	0,0001

Tabla 8. Análisis de sensibilidad sobre  $s$ , *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

Como muestra la tabla 8, para el caso de un servidor (modelo M/M/1) el sistema operaría bajo condiciones de inestabilidad (factor de utilización mayor a la unidad) y, a partir de dos servidores (fila 2 de la tabla 8) el sistema trabaja de manera estable. A la

derecha se encuentran una serie de columnas con los valores de las variables de interés que se han comentado a lo largo del estudio.

Con un total de 2 personas atendiendo clientes (una tercera dependienta podría estar trabajando de manera continua en el taller) y, analizando el sistema en estado estable, el tiempo medio de estancia en el sistema es ligeramente inferior a 11 minutos, el tiempo medio de espera en cola es de 3,2413 minutos y la probabilidad de que no haya ningún cliente en el sistema desciende hasta 29,43%. Sin embargo, con tres dependientas el tiempo medio de espera de los clientes en la cola ( $Wq$ ) es inferior a medio minuto, una cantidad que parece indicar un número de dependientas algo excesivo desde el punto de vista económico. Como resultado de la interpretación del análisis de sensibilidad se puede afirmar que de son suficientes dos dependientas dedicadas a tiempo completo a la atención al público más una tercera dependienta que podría estar trabajando de manera continua en el taller pero incorporándose en casos de picos de demanda a la atención al cliente, aliviando así la posible acumulación de personas en espera.

Para obtener conclusiones de este tipo de sistemas de espera es recomendable contar con una estimación de la tolerancia de los clientes a esperar un determinado tiempo en cola. Suponemos, a raíz de observaciones y estimaciones de la administradora del negocio que el tiempo que está dispuesto a esperar un cliente es en promedio de 20 minutos. Los servicios relacionados con algún aspecto de la salud tienen (por la importancia que se le atribuyen o bien porque son de carácter indispensable) la suerte de contar con mayor tolerancia de espera por parte de los clientes o pacientes, lo que muchas veces redundaría en una baja calidad del servicio. Así, es preciso estimar un límite de tiempo (como es el caso) a partir del cual los clientes empiezan a estar molestos, e implementar un sistema con una calidad de servicio que cubra dicho límite y que a su vez no provoque que los servidores se estén infrautilizando (lo que a priori parecen revelar los resultados).

Se sabe, por estimaciones realizadas por la administradora del negocio, que el sueldo medio de los trabajadores es de 1200€ brutos. Este gasto de personal supone a la empresa un gasto horario de 7,5€ por persona. De manera que sabiendo que existe un exceso medio de una dependienta (40 horas), la cuantificación mensual de la pérdida asociada al exceso de servidores asciende por tanto a 1200€, es decir, el coste de

personal medio correspondiente a una persona. Dicha estimación sería beneficio en caso de prescindir del exceso de personal.

**Caso concreto: sábado**

A continuación se profundiza en el análisis considerando por separado los datos disponibles para el caso específico de los sábados, que supone la situación más extrema observada dada la gran diferencia entre la tasa de llegadas y de servicio.

Se analiza la peor situación a la cual se somete al sistema en el que se partirá del caso en el que dos personas serán capaces de atender la demanda, configuración obtenida a partir de los primeros cálculos para el conjunto de días de la semana. Vamos a analizar lo que ocurriría los sábados si la óptica mantuviese dicha configuración puesto que estos días la afluencia de público es mayor. En primer lugar, al igual que para el caso anterior se completan los valores correspondientes a este día aislado (tabla 9) en el que el tiempo medio de servicio es más alto y la tasa de llegada de clientes también es mayor:

$$\lambda = \frac{1}{3,455} = 0,2894 \text{ llegadas / min} \quad \text{(Ecuación 40)}$$

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per minute)	0.1066
Customer arrival rate (per minute)	0.2894
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M

Tabla 9. Entrada de datos componente “QA”, WinQSB. Fuente: elaboración propia

Si el tiempo medio de servicio correspondiente al conjunto de datos recogidos para el caso del sábado por la mañana es de 9,380 minutos (tabla 2), el hecho de que un nuevo cliente no quiera unirse a la cola o la abandone ocurre a partir de que se hayan acumulado 2,1321 clientes en cola (estimados 20 minutos de tolerancia media a la espera). En la mayoría de las ocasiones esto ocurre cuando se produce una acumulación de 3 o más clientes en espera (que habitualmente van acompañados de alguien) ya que además del tiempo esperado de espera en cola, el recibidor del local donde se forma la cola no puede albergar a más de 8 personas de pie. Con este planteamiento de partida, como consecuencia en parte del análisis numérico del sistema y en parte por la experiencia empírica, se procede a calcular en este escenario los datos asociados a la pérdida de clientes.

En este caso, la tasa de llegadas es superior a la tasa de servicio por el número de servidores, por lo que el sistema se encuentra en zona de inestabilidad ( $\rho=1,3574$ ) y *WinQSB* nos lo notifica con el mensaje de inestabilidad ilustrado en la figura 19:

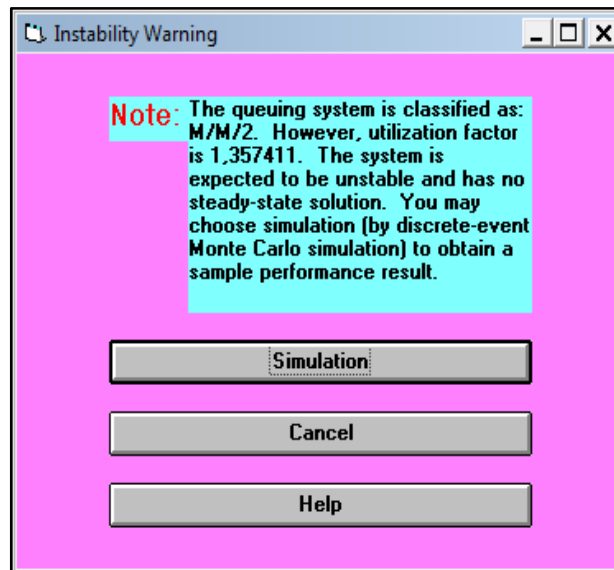
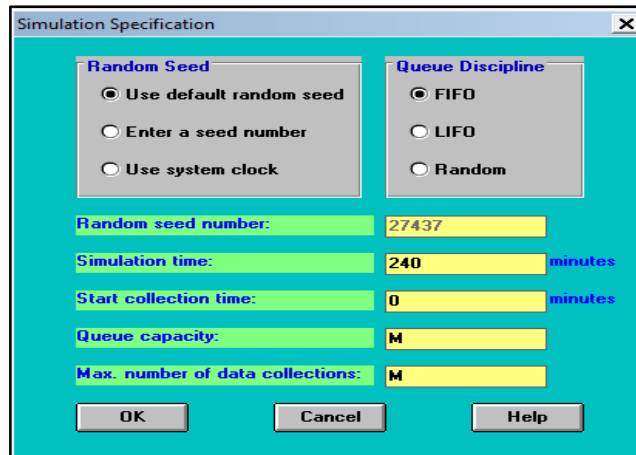


Figura 19. Mensaje de inestabilidad *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

No obstante, gracias a este software de resolución de problemas de I.O. se puede simular la situación de inestabilidad que se produce, durante un determinado intervalo de tiempo, que será de 4 horas como quedó justificado en la simulación anterior. Si se mantiene el número de trabajadores calculado con anterioridad ( $s = 2$ ), sin tener en cuenta la persona de ayuda, es obvio que van a aparecer tiempos de espera excesivos como así se presenta en la tabla 12 con los resultados de la simulación.

Este tipo de situaciones (partiendo de la simplificación derivada de utilizar los datos globales de la muestra) se dan en el seno de la empresa pero con una duración de cuatro horas a lo sumo, que es el tiempo que están las puertas abiertas al público sin interrupción. Con esta consideración y la observación experimental, se pretende acercar la simulación al desarrollo normal mediante la realización de la misma durante un intervalo de tan sólo 240 minutos, que es el tiempo máximo en el que puede operar el sistema antes de ser *cerrado*. Se selecciona pues la opción “*Simulation*” y se procede a completar los parámetros de simulación como se pone de manifiesto en la figura 20:


 Figura 20. Especificación de los parámetros de simulación, *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

Se utiliza la semilla por defecto para la generación de números aleatorios que permitan simular el sistema de colas. La disciplina de la cola es FIFO y el tiempo de simulación escogido es aquel que transcurre desde el instante 0 hasta 240 minutos después. Tanto la capacidad de la cola como el número máximo de datos recogidos se fijan a un valor “*M*” lo suficientemente grande como para representar infinito.

Es entonces cuando tenemos datos acerca de su funcionamiento durante el periodo de evaluación, presentados a través de la siguiente tabla:

	Performance Measure	Result
1	System: <b>M/M/2</b>	From Simulation
2	Customer arrival rate ( $\lambda$ ) per minute =	0,2894
3	Service rate per server ( $\mu$ ) per minute =	0,1066
4	Overall system effective arrival rate per minute =	0,3163
5	Overall system effective service rate per minute =	0,2289
6	Overall system utilization =	83,9779 %
7	Average number of customers in the system (L) =	6,4519
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	4,7723
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	6,1976
10	Average time customer spends in the system (W) =	17,6935 minutes
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	10,7512 minutes
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	13,9621 minutes
13	The probability that all servers are idle (Po) =	9,0468 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	77,0025 %
15	Average number of customers being balked per minute =	0
16	Total cost of busy server per minute =	\$0
17	Total cost of idle server per minute =	\$0
18	Total cost of customer waiting per minute =	\$0
19	Total cost of customer being served per minute =	\$0
20	Total cost of customer being balked per minute =	\$0
21	Total queue space cost per minute =	\$0
22	Total system cost per minute =	\$0
23	Simulation time in minute =	240,0000
24	Starting data collection time in minute =	0
25	Number of observations collected =	55
26	Maximum number of customers in the queue =	19
27	Total simulation CPU time in second =	0,0600

 Tabla 10. Simulación para 2 servidores y 240 minutos (sábado), *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

Comenzando por los resultados en la parte inferior de la tabla XXX se especifica que el número de observaciones a raíz de la generación de eventos aleatorios para las variables del sistema asciende a un total de 55 (“*Number of observations collected*”), llegando a una longitud máxima de la cola en el tiempo de simulación de 19 clientes (“*Maximum number of customers in the queue*”), lo cual indica que para el caso del sábado una configuración del sistema con dos servidores sería insuficiente para afrontar la demanda. Continuando con la interpretación de la tabla de resultados de salida en la parte superior se pueden ver los valores de entrada introducidos en pasos anteriores y, a partir del valor del factor de utilización (“*Overall system utilization*”,  $\rho=83,9779$ ) se encuentran nuestras variables de interés para analizar el funcionamiento del sistema de líneas de espera ( $L$ ,  $L_q$ ,  $W$  y  $W_q$ ).

En este caso nos centraremos en el número máximo de clientes en la cola, al cual se llega al final del periodo de simulación debido a que en condiciones de inestabilidad el sistema crece de manera indefinida. Se trata de un máximo de 19 clientes en cola y dado que cada cliente llega en media en intervalos de 3,4554 minutos, los clientes nuevos que lleguen y encuentren una cola demasiado larga optarán probablemente por no unirse a ella, con el consiguiente gasto asociado para la empresa por pérdida de clientes.

Como era previsible, es claramente perjudicial para la empresa operar de una manera fija en cuanto a la configuración del mecanismo de servicio se refiere. Sería de gran ayuda para el apoyo de la gestión contar con un apoyo analítico de manera que se minimizase el riesgo en la toma de decisiones. Con este propósito se elabora la tabla 11, en la que se recogen los resultados del análisis de sensibilidad sobre la variable  $s$  (número de servidores) para los datos correspondientes al sábado por la mañana.

Value	Effective Arrival Rate	System Utilization	L	Lq	Lb	W	Wq	Wb	P0	Pw
1	Unstable	System!								
2	Unstable	System!								
3	0,2894	0,9049	10,5763	7,8615	9,5197	36,5456	27,1647	32,8947	0,0235	0,8258
4	0,2894	0,6787	3,5518	0,8370	2,1124	12,2730	2,8921	7,2993	0,0562	0,3962
5	0,2894	0,5430	2,9185	0,2036	1,1880	10,0845	0,7037	4,1051	0,0637	0,1714
6	0,2894	0,4525	2,7699	0,0551	0,8264	9,5711	0,1903	2,8555	0,0656	0,0666
7	0,2894	0,3878	2,7296	0,0147	0,6335	9,4318	0,0510	2,1891	0,0661	0,0233

Tabla 11. Análisis de sensibilidad sobre  $s$  (sábado), *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

En la tabla 11 se ilustra la manera en que el sistema pasa de ser inestable a operar bajo condiciones de estabilidad y, en este caso es a partir de la utilización de tres

dependientas cuando el factor de utilización ya es menor a la unidad. En el caso de la configuración con tres servidores el sistema entra en zona de estabilidad, pero los tiempos de estancia en el sistema y el tiempo de espera en cola siguen siendo demasiado elevados ( $W=36,5456$  min. y  $W_q=27,1647$  min., respectivamente. Además, el número medio de clientes en el sistema es superior a diez ( $L=10,5763$ ) y la probabilidad de que no haya ningún cliente en el sistema se reduce a sólo un 2,35%, lo que suponen valores muy ajustados que no garantizan una calidad de servicio mínima de acuerdo con el tiempo que le corresponde esperar al cliente. Por ello, el sistema con  $s=4$  servidores es el más adecuado (cuyos valores figuran en la tabla 12) y como se puede observar el tiempo medio de estancia en el sistema baja hasta un tercio en comparación con el caso de tres servidores (y atendiendo al tiempo de espera en cola, éste queda a un nivel mucho más bajo, en sólo 2,8921 minutos), descartando con esta afirmación también una configuración de cinco servidores puesto que con cuatro ya no se perderían clientes y la empresa estaría incurriendo en costes innecesarios por sobredimensionamiento.

Aplicando los resultados de la Teoría de Colas al caso de 4 servidores en la óptica durante los sábados (ya que se cumple la condición de estabilidad por ser el factor de utilización menor a la unidad) se obtienen los siguientes datos:

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/4	From Formula
2	Customer arrival rate ( $\lambda$ ) per minute =	0,2894
3	Service rate per server ( $\mu$ ) per minute =	0,1066
4	Overall system effective arrival rate per minute =	0,2894
5	Overall system effective service rate per minute =	0,2894
6	Overall system utilization =	67,8705 %
7	Average number of customers in the system (L) =	3,5518
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,8370
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	2,1124
10	Average time customer spends in the system (W) =	12,2730 minutes
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	2,8921 minutes
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	7,2993 minutes
13	The probability that all servers are idle (Po) =	5,6245 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	39,6220 %

Tabla 12. Medidas de desempeño para 4 servidores, *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

Se ha visto que la mejor configuración del sistema para los sábados pasa de las dos dependientas (y otra que en ocasiones ayuda) que se estimaron necesarias a cuatro. Puesto que los datos para el sábado difieren del resto, nos preguntamos ahora que pasaría si a pesar de todo la tasa de clientes no fuera exactamente la obtenida durante la toma de datos. Partiendo entonces del modelo de cuatro dependientas para atender los

mayores flujos de clientes, se quiere evaluar de qué manera dicha configuración respondería a mayores o menores tasas de llegada. En caso de ser menores las tasas de llegada, se considera como cota inferior los valores que se dan para el conjunto de datos, la pérdida estaría cuantificada en los costes adicionales de personal correspondientes al sueldo de dos personas durante las cuatro horas en las que la óptica está abierta al público durante la mañana, 60€. Para analizar el caso contrario, se procede a la realización de un análisis de sensibilidad sobre la tasa de llegadas haciendo que ésta varíe desde el valor 0 hasta 1 en intervalos de 0,10 como se ilustra en la figura 21:

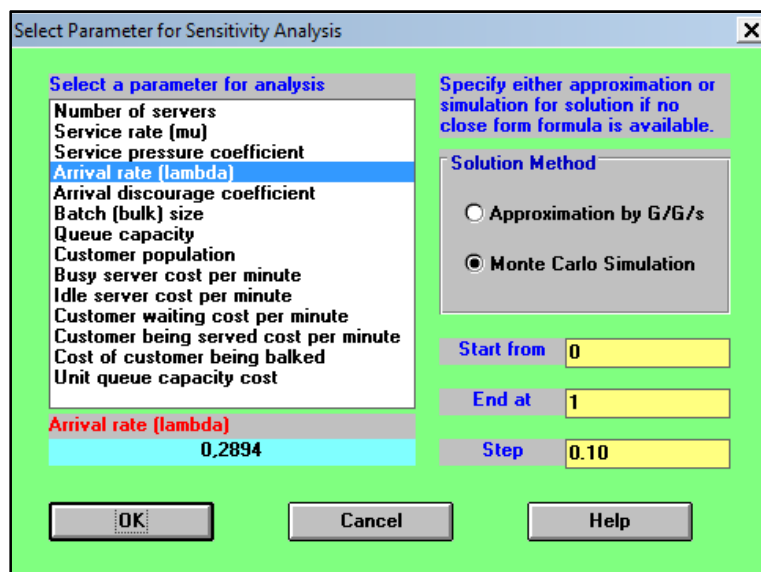


Figura 21. Cuadro de entrada análisis sensibilidad ( $\lambda$ ), WinQSB. Fuente: elaboración propia

Los resultados del análisis mostrados en la tabla 13 ponen de manifiesto cómo hasta tasas de llegada de hasta 0,3 (una llegada cada 3,33 minutos) permiten operar manteniendo los niveles de calidad, pero a partir de que los clientes lleguen en media cada dos minutos y medio ( $\lambda = 0,4$ ) el tiempo medio de estancia en el sistema se dispara. Y es a partir de llegadas cada dos minutos cuando el sistema abandonaría la zona de estabilidad.



Value	Effective Arrival Rate	System Utilization	L	Lq	Lb	W	Wq	Wb	P0	Pw
0	0,2894	0,9049	10,5763	7,8615	9,5197	36,5456	27,1647	32,8947	0,0235	0,8258
0,1	0,1000	0,2345	0,9431	0,0050	0,3064	9,4314	0,0505	3,0637	0,3910	0,0165
0,2	0,2000	0,4690	2,0042	0,1280	0,8834	10,0210	0,6401	4,4170	0,1490	0,1449
0,3	0,3000	0,7036	3,8448	1,0305	2,3734	12,8160	3,4351	7,9114	0,0492	0,4342
0,4	0,4000	0,9381	16,8775	13,1252	15,1515	42,1938	32,8129	37,8788	0,0065	0,8663
0,5	Unstable	System!								
0,6	Unstable	System!								
0,7	Unstable	System!								
0,8	Unstable	System!								
0,9	Unstable	System!								
1	Unstable	System!								

Tabla 13. Análisis de sensibilidad sobre  $\lambda$  (sábado), *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

Por tanto este modelo permitiría, además de los intervalos entre llegadas actuales de media 3,455 minutos atender demandas que supongan una frecuencia de llegada de hasta cada dos minutos y medio aunque también podría operar en condiciones de inestabilidad durante un tiempo limitado.

El local está configurado para albergar sistemas de hasta siete personas atendiendo, número a partir del cual la restricción viene dada por parte del local, puesto que con su configuración actual no hay espacio para seguir ampliando la plantilla. En caso de mayores ventas, la superficie destinada a la formación de la cola también supondría un problema ya que como ha sido descrito es un espacio muy limitado. Se deberían incurrir en costes fijos para rediseñar el local y, en estudios posteriores, llevar a cabo un cálculo de rentabilidad para estimar la recuperación de la inversión.

### 3.3.2.- Segunda aproximación

Se procede en este apartado a realizar una segunda aproximación dado que la primera aproximación (apartado 3.3.1), por no corresponderse los datos de la tabla 6 (que indican que no debería de haber colas), no representaba de manera adecuada la realidad observada en la que sí que se formaban colas. Se expondrán en la nueva fase de recogida de datos todas las singularidades que afectan a este sistema en concreto, originando una situación mucho más compleja de analizar. Por ello se tomó la decisión de realizar una nueva toma de datos en base a una plantilla más sencilla y teniendo en cuenta las tareas concretas de cada una de las dependientas para así discriminar los tiempos de aquellas que se alejen de la prestación directa de servicios a los clientes.

Por lo tanto, se emplea esta segunda aproximación a la realidad para, a raíz de la nueva toma de datos, extraer conclusiones de cómo podría responder el sistema en las situaciones en las que ya ha sido analizado en la primera aproximación.

### Recogida de datos

Como se ha introducido, se realizan nuevas recogidas de datos utilizando la plantilla de la figura 22 en la que se deja un espacio para anotar observaciones relativas a las tareas realizadas por las dependientas.

Cientes	Hora llegada	Hora atención	Hora salida	Servidor 4º

Figura 22. Plantilla de recogida de datos, 2ª aproximación. Fuente: elaboración propia

En una nueva primera jornada de recogida de datos se observa a las dependientas así como los clientes para intentar averiguar en qué difiere el modelo de la realidad para que los resultados no encajen del todo. Se reúnen una serie de circunstancias que se tienen en cuenta para esta segunda aproximación del modelo:

- Una de las dependientas sale al mostrador para ayudar a las compañeras sólo en casos aislados de acumulación excesiva de clientes en la cola, realizando trabajos de manera permanente en el taller. Así, se considerará que esta persona no forma parte del sistema de atención de clientes puesto que la mayoría de su tiempo trabajado corresponde a trabajo interno.
- La administradora del centro óptico aunque también atiende clientes, suele llevar a cabo labores de organización y frecuenta la oficina desde dónde realiza llamadas telefónicas, por lo tanto, no se considera como un servidor que forme parte del sistema de colas.
- La disciplina de la cola no es puramente FIFO ya que en ocasiones se hace esperar al cliente en función del servicio que solicite para ser atendido por una

persona concreta. Entonces, desde el mostrador, pasa el turno al cliente siguiente.

- El servicio de graduación es gratuito (aunque suele ir acompañado de una posterior compra de lentes) y posee una cola propia puesto que hay sólo una sala para graduar la vista de los clientes. Además, los tiempos asociados a este servicio y su cola difieren del resto por ser mucho mayores.
- Frecuentemente encontramos a una persona en el mostrador que atiende al cliente cuyo turno corresponda. Esta dependienta que maneja un ordenador, en ocasiones deriva clientes a otra que realiza habitualmente las funciones comerciales de venta de gafas, situación que se ha simplificado en el estudio considerando que todas están disponibles para atender clientes en paralelo.
- En ocasiones, las dependientas trabajan actualizando información en los ordenadores, preparando pedidos, ordenando material, reparando gafas, reuniéndose con la administradora, etc. Es decir, no hay un número fijo de servidores puesto que no es totalmente realista que las dependientas dediquen el 100% de su tiempo al despacho de clientes.
- Otras complicaciones. Respecto a la fase de recogida de datos se pueden enumerar además una serie de complicaciones añadidas que dificultan un poco más la coherencia entre los resultados teóricos y el caso práctico. Una de estas complicaciones es la presencia de familias cuyos miembros no llegan o salen de la óptica al mismo tiempo. Esto ocurre cuando, por ejemplo, una madre con dos niños entra en la óptica y más tarde accede un caballero con un niño que en principio se considera como un cliente nuevo. El problema reside en el hecho de que estas personas que aparentemente son clientes distintos acaban siendo el mismo cliente ya que acuden en familia para solicitar servicio sólo para los hijos. En la medida de lo posible se han corregido estos errores en la toma de datos al conocer la relación entre clientes por su comportamiento. También supone un problema el despacho de más de un cliente después de esperar la cola de manera conjunta (esto supone un tiempo de espera asociado con más de un tiempo de servicio). Y, por otro lado, la conexión de la óptica con una ortopedia adyacente (propiedad al 25% de la administradora del centro óptico) provoca que se mezclen clientes y se vean salir por la puerta de la óptica clientes que no han entrado por dicha puerta principal. Por último, la imposibilidad de conocer el tiempo de servicio de los clientes siendo ya atendidos a comienzo de la

recogida de datos es otra limitación que se afronta obviando dichos clientes para los cuales no se tienen todos los datos.

Todo ello nos lleva a concluir que se trata de un proceso de varias colas mezcladas así que intentamos aislar una de ellas (la que se encarga de servir el conjunto general de peticiones que atañen a las funciones principales de las dependientas, excluido el servicio de graduación) para simular su comportamiento tal y como era el objetivo inicial del Trabajo Fin de Grado. Así mismo, será obviada tanto la persona que destina la mayor parte de su tiempo a trabajos internos (labores en el taller) como la dueña del negocio, asumiendo el hecho de que no existe ningún modelo que se ajuste de manera perfecta a esta realidad concreta observada.

En la tabla 14 se presenta el resumen de los datos recogidos para los dos días adicionales de toma de datos, eliminando los tiempos que los clientes de la óptica dedican a la graduación, tanto para aquellos que disponían de cita previa, como para aquellos que son remitidos desde un servidor a la sala de graduación. Los datos corresponden a un total de 43 nuevas observaciones para las que la tasa media de llegadas es de 0,1629 clientes/min. y la tasa media de servicio 0,0918 clientes/min.

Resumen de los nuevos datos obtenidos							
	Muestras (clientes)	Tiempo muestreo (min)	Media(t entre lleg.)	$\lambda$	Media (t serv)	$\mu$	Servidores
Día 1 (M)	21	132	6,2857	0,1591	12,5238	0,0798	2
Día 2 (X)	22	132	6,0000	0,1667	9,6364	0,1038	2
<b>TOTAL</b>	<b>43</b>	<b>264</b>	<b>6,1429</b>	<b>0,1629</b>	<b>11,0801</b>	<b>0,0918</b>	<b>2</b>

Tabla 14. Resumen de datos, 2ª aproximación. Fuente: elaboración propia

La tabla 14 ilustra el hecho de que no existen cambios importantes respecto del tiempo medio entre llegadas en comparación con la primera toma de datos. Sin embargo, teniendo en cuenta todas las consideraciones que caracterizan esta segunda aproximación, el tiempo medio de servicio es ahora de poco más de once minutos lo que dota de significado la realización de esta segunda aproximación y justifica la nueva toma de datos.

Al igual que como se hizo en la sección anterior, a continuación se procede a cotejar la similitud de comportamiento de las variables estudiadas con la distribución exponencial para así emplear un modelo de colas u otro.

### Caracterización del proceso de llegadas

En esta fase, de manera muy breve, se realiza el test de hipótesis relativo a los datos tomados para los tiempos entre llegadas de las 43 muestras nuevas. El tiempo medio entre llegadas es de 6,1429 minutos y nada respecto al mismo ha cambiado de manera significativa en comparación con los valores de esta misma variable en la primera aproximación de este trabajo.

Se plantea entonces la siguiente hipótesis nula entre la variable observada y una variable aleatoria exponencialmente distribuida:

$H_0$ : Independencia de las variables.

$H_1$ : Variables estadísticamente relacionadas

Aplicando la fórmula general de Chi-cuadrado, a través de la cual se realiza el contraste de hipótesis, quedaría de la siguiente manera para el caso particular que nos ocupa:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(fo_i - fe_i)^2}{fe_i} = 6,173 \text{ (Ecuación 41. Fórmula de Chi-cuadrado, caso particular)}$$

Al igual que ya se hizo anteriormente, se procede al cálculo del sumatorio para realizar el contraste de hipótesis mediante la hoja de cálculo Excel. La tabla 15 ilustra el cálculo de la fórmula:

Test-Chi	[0,3'8)	[3'8,7'6)	[7'6,11'4)	[11'4,15'2)	[15'2,19)	TOTAL
o	20	13	6	2	2	43
e	21	8	9	1	4	43
(o-e)	-1	5	-3	1	-2	
(o-e) <sup>2</sup>	1	25	9	1	4	
(o-e) <sup>2</sup> /e	0,048	3,125	1,000	1,000	1,000	6,173

Tabla 15. Fórmula Chi-cuadrado, 2ª aproximación, tiempo entre llegadas. Fuente: elaboración propia

Se compara el valor del estadístico con el valor de la distribución Chi en las tablas que para un nivel de confianza del 95% y 4 grados de libertad (número de categorías menos una,  $G.L.=k-1$ ) es de 0,711. El valor obtenido resultado de la aplicación de la fórmula es mayor que el valor en las tablas por lo que se puede rechazar con la hipótesis nula contundentemente ( $H_0$  = Independencia entre las variables) y, así, concluir que con un nivel de confianza del 95% la distribución de los tiempos entre llegadas se encuentra estadísticamente relacionada con la distribución en frecuencias de

una variable aleatoria exponencial. Resultado análogo al obtenido para el caso de la primera aproximación a la realidad a través de un modelo de colas.

### Distribución de los tiempos de servicio

Los tiempos de servicio sí que se van a ver afectados por las nuevas consideraciones a tener en cuenta: la persona encargada de los trabajos del taller la cual solía atender peticiones de procesado breve y, la persona encargada de practicar las graduaciones. Como los tiempos de servicios de estas dos personas en relación con el despacho de clientes de la cola principal son despreciables no forman parte de este modelo los tiempos relativos a los procesos de graduación y las intervenciones de la persona del taller, separando estos en la medida de lo posible de los tiempos correspondientes únicamente a la venta de lentes posterior.

Se plantea ahora, de igual manera que para los tiempos entre llegadas, el contraste de hipótesis que verifica la analogía de esta variable a un comportamiento exponencial, como sigue:

H<sub>0</sub>: Variables independientes

H<sub>1</sub>: Variables estadísticamente relacionadas.

La aplicación de la fórmula general del estadístico Chi-cuadrado para el caso de los tiempos de servicio quedaría de la siguiente manera:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(fo_i - fe_i)^2}{fe_i} = 1,592 \text{ (Ecuación 42. Fórmula de Chi-cuadrado, caso particular)}$$

La descomposición del cálculo del sumatorio llevada a cabo mediante Excel como hasta ahora, se presenta en la tabla 16:

Test-Chi	[1,10'6)	[10'6,20'2)	[20'2,29'8)	[29'8,39'4)	[39'4,49)	TOTAL
o	32	5	4	1	1	43
e	30	8	3	1	1	43
(o-e)	2	-3	1	0	0	
(o-e) <sup>2</sup>	4	9	1	0	0	
(o-e) <sup>2</sup> /e	0,133	1,125	0,333	0,000	0,000	1,592

Tabla 16. Fórmula Chi-cuadrado, 2ª aproximación, tiempo de servicio. Fuente: elaboración propia

Se coteja el valor del estadístico con el valor de la distribución  $\chi^2$  en las tablas que para un nivel de confianza del 95% y 4 grados de libertad es de 0,711. El valor obtenido resultado de la aplicación de la fórmula es mayor que el valor en las tablas, por

lo que se puede rechazar la hipótesis nula y concluir que con un nivel de confianza del 95% la distribución de los tiempos entre llegadas se encuentra estadísticamente relacionada con la distribución en frecuencias de una variable aleatoria exponencial.

Seguidamente se procede a la identificación del nuevo modelo dentro de los pertenecientes a la T.C. que han sido presentados en el apartado 2.5.

### **Identificación y clasificación del modelo a utilizar**

En este apartado se procederá a modelar el sistema de líneas de espera para determinar el modelo al que mejor se ajusta esta segunda aproximación a la realidad por lo que, al igual que se hizo, serán analizados los elementos del sistema de colas partiendo del conocimiento previo del patrón de llegadas y clientes servidos a lo largo del tiempo.

No hay cambios relativos a los aspectos que afectan a la fuente de entrada y a la cola del sistema por lo que no serán explícitamente nombrados a fin de evitar redundancias. Si conviene señalar que a pesar de no haber cambios en el modelado de la cola, se debe tener en cuenta que la disciplina que gobierna su dinámica no es puramente FIFO, hecho que fue advertido en la sección de recogida de datos de esta segunda aproximación.

El mecanismo de servicio modelado en esta ocasión sí que sufre algunos cambios respecto a la primera versión. Aunque se han tomado datos sin considerar tiempos de servicio que no forman parte del actual modelo, éstos siguen estando distribuidos de manera exponencial. Sin embargo, el número de dependientas que efectivamente desempeñan labores que conciernen al funcionamiento de la línea de espera en este caso se reduce a dos, a raíz de las nuevas consideraciones derivadas de la complejidad inherente al funcionamiento real del sistema. Es necesario considerar también que el tiempo medio de servicio es uniforme para todas las dependientas.

Por tanto, la notación de Kendall correspondiente al modelo de representación del Centro Óptico García Gallego sería la siguiente: “M/M/2”. El esquema del sistema de colas es presentado a través de la figura 23:

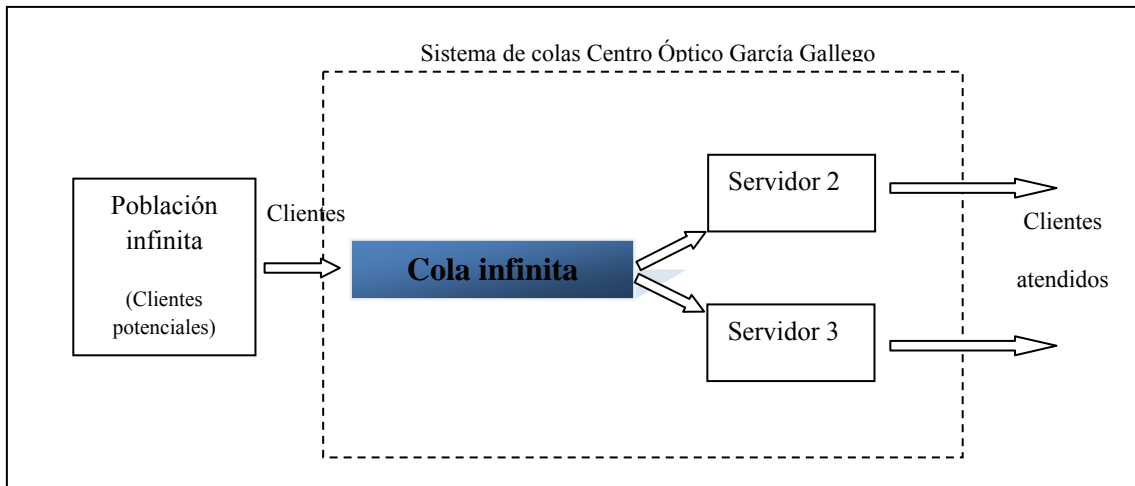


Figura 23. Esquema del sistema de colas del Centro Óptico García Gallego. Elaboración propia

Volviendo sobre la tabla 14, donde constan los valores de  $\lambda$  y  $\mu$ , se puede calcular el factor de utilización correspondiente a este modelo de descripción del comportamiento del sistema de espera del centro óptico.

Factor de utilización:

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{0,1629}{2 \cdot 0,0918} = 0,8872 \quad (\text{Ecuación 43})$$

Esto quiere decir que el sistema trabaja con una tasa de ocupación media del 88,72% de su capacidad, o lo que es lo mismo, los servidores se encuentran dicho porcentaje del tiempo de trabajo ocupados. El número medio de servidores ocupados ( $0,8872 \cdot 2 = 1,7745$  servidores) lo que se ajusta a la tendencia de formación de colas observada en momentos puntuales, siempre teniendo presentes las limitaciones expuestas.

El resto de parámetros de interés se calculan a continuación, utilizando las fórmulas correspondientes al modelo M/M/2 e incluida la probabilidad de que el sistema se encuentre en estado 0 puesto que es necesaria para cálculos subsiguientes.

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema (estado 0):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{\left(\frac{0,1629}{0,0918}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{0,1629}{0,0918}\right)^2}{2!} \cdot \left(\frac{2 \cdot 0,0918}{2 \cdot 0,0918 - 0,1629}\right)} = 0,0598 \quad (\text{Ecuación 44})$$



Número medio de clientes en cola:

$$L_q = \frac{\left(\frac{0,1629}{0,0918}\right)^2 \cdot 0,1629 \cdot 0,0918}{(2-1)!(2 \cdot 0,0918 - 0,1629)^2} \cdot 0,0756 = 6,5483 \quad (\text{Ecuación 45})$$

Número medio de clientes en el sistema M/M/s:

$$L = 6,5483 + \frac{0,1629}{0,0918} = 8,3224 \quad (\text{Ecuación 46})$$

Tiempo medio de espera en cola:

$$W_q = \frac{6,5483}{0,1629} = 40,2037 \quad (\text{Ecuación 47})$$

Tiempo medio de estancia en el sistema:

$$W = 40,2037 + 11,0801 = 51,0957 \quad (\text{Ecuación 48})$$

Los anteriores resultados consecuencia de la aplicación de las fórmulas de la T.C. son útiles para analizar el sistema en condiciones de estabilidad, supuesto que se cumple en relación a los nuevos datos recogidos.

### **Análisis numérico (*WinQSB*)**

En el presente apartado se analiza el sistema mediante el software que se ha sido utilizado sin detenerse en aspectos relativos a *WinQSB* o en fases elementales descritas anteriormente en detalle.

En primer lugar, introducimos los parámetros generales que caracterizan este sistema de colas, tal y como se muestra en la tabla 17. Como se puede ver, se han utilizado mayor número de decimales para conseguir una mayor precisión y mitigar el efecto de esta posible fuente de discrepancia entre la realidad y el modelo.

<b>Data Description</b>	<b>ENTRY</b>
<b>Number of servers</b>	<b>2</b>
<b>Service rate (per server per minute)</b>	<b>0.09181075</b>
<b>Customer arrival rate (per minute)</b>	<b>0.16287879</b>
<b>Queue capacity (maximum waiting space)</b>	<b>M</b>
<b>Customer population</b>	<b>M</b>

Tabla 17. Entrada de datos 2ª aproximación, *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

Como se puede observar, los valores coinciden con los calculados anteriormente aunque no de manera exacta debido al redondeo que se produce al tomar en consideración más o menos decimales. Para este análisis con *WinQSB* se ha decidido

tomar hasta ocho decimales dado que no complica el proceso al tiempo que se obtienen resultados más precisos. En la tabla 18 se muestran los valores correspondientes al análisis del sistema en régimen permanente:

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate ( $\lambda$ ) per minute =	0,1629
3	Service rate per server ( $\mu$ ) per minute =	0,0918
4	Overall system effective arrival rate per minute =	0,1629
5	Overall system effective service rate per minute =	0,1629
6	Overall system utilization =	88,7036 %
7	Average number of customers in the system (L) =	8,3224
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	6,5483
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	7,8523
10	Average time customer spends in the system (W) =	51,0957 minutes
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	40,2038 minutes
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	48,2097 minutes
13	The probability that all servers are idle (Po) =	5,9863 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	83,3935 %

Tabla 18. Resultado análisis 2ª aproximación, modelo MM3, *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

Los valores correspondientes a los tiempos de espera (tiempo de estancia en el sistema y tiempo medio de espera en cola), analizados en condiciones de estabilidad, son superiores a los observados realmente ya que se han hecho simplificaciones eliminando servidores que destinaban muy poca parte de su tiempo a atender clientes. Esta aproximación a la realidad no considera los tiempos destinados por otras dependientes a aliviar la cola con el consiguiente incremento puntual de la tasa de servicio que permite que los clientes no esperen más de 20-25 minutos en cualquier caso.

Dado que el número de servidores no es fijo y *WinQSB* no nos permite la introducción de decimales en el número de servidores, se ha considerado como mejor aproximación dos servidores y medio trabajando a la misma tasa de servicio, la media entre los resultados obtenidos de resolver el sistema con dos y con tres servidores. En la tabla 19 se muestran los resultados para el caso del modelo M/M/3 a partir de los cuales se realizarán los cálculos sobre las variables de interés que aproximen el comportamiento del sistema con dos servidores y medio.

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/3	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per minute =	0,1629
3	Service rate per server (mu) per minute =	0,0918
4	Overall system effective arrival rate per minute =	0,1629
5	Overall system effective service rate per minute =	0,1629
6	Overall system utilization =	59,1503 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2,2725
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,4980
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	1,4480
10	Average time customer spends in the system (W) =	13,9504 minutes
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	3,0571 minutes
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	8,8889 minutes
13	The probability that all servers are idle (Po) =	15,0858 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	34,3925 %
15	Average number of customers being balked per minute =	0

Tabla 19. Resultado análisis 2ª aproximación, modelo MM3, *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

Mediante el promedio de los resultados anteriores para el caso de dos y tres servidores se obtienen los siguientes valores:

Número medio de clientes en cola:

$$L_q = \frac{6,5483 + 0,4980}{2} = 3,5233 \quad (\text{Ecuación 49})$$

Número medio de clientes en el sistema M/M/s:

$$L = \frac{8,3224 + 2,2725}{2} = 5,2974 \quad (\text{Ecuación 50})$$

Tiempo medio de espera en cola:

$$W_q = \frac{40,2038 + 3,0571}{2} = 21,6304 \quad (\text{Ecuación 51})$$

Tiempo medio de estancia en el sistema:

$$W = \frac{51,0957 + 13,9504}{2} = 32,5230 \quad (\text{Ecuación 52})$$

Estas cifras sí que se ajustan con mayor fidelidad a la situación observada, con eventuales colas de hasta cuatro clientes y tiempo de espera en torno a los veinte minutos. Esta aproximación, por lo tanto, nos aporta unas cifras que se corresponden con la realidad de una manera más precisa que las obtenidas con anterioridad.

Con el nuevo conjunto de datos tomados no se pueden hacer muchas predicciones puesto que la muestra es pequeña y los resultados no vincularían la realidad con fidelidad. Sí que se puede llevar a cabo un análisis de la sensibilidad sobre

la variable “*tasa de llegadas*” lo que nos pondría en disposición de obtener datos acerca del funcionamiento de la línea de espera para la configuración actual del modelo en diferentes rangos de flujos de llegada de clientes.

Value	Effective Arrival Rate	System Utilization	L	Lq	Lb	W	Wq	Wb	P0	Pw
0	0,1454	0,5473	1,7130	0,6185	1,5402	11,5740	3,8323	9,5428	0,3071	0,4016
0,05	0,0500	0,2723	0,5882	0,0436	0,3742	11,7643	0,8723	7,4838	0,5720	0,1166
0,1	0,1000	0,5446	1,5484	0,4593	1,1959	15,4845	4,5925	11,9586	0,2948	0,3840
0,15	0,1500	0,8169	4,9110	3,2772	4,4614	32,7403	21,8483	29,7429	0,1008	0,7346
0,2	Unstable	System!								
0,25	Unstable	System!								

Tabla 20. Análisis de sensibilidad sobre  $\lambda$ , 2ª aproximación, *WinQSB*. Fuente: elaboración propia

Gracias a este análisis somos capaces de afirmar que el sistema se encontrará operando bajo condiciones de estabilidad con dos empleados siempre que el tiempo entre llegadas no sea inferior a cinco minutos (o la tasa de llegadas no sea superior a  $\lambda=0,2$ ). Además, la línea de espera es capaz de funcionar atendiendo tasas de llegadas de 0,15 clientes por minuto (6 minutos y 40 segundos entre un cliente y el siguiente) sin consecuencias demasiado negativas puesto que el número medio de clientes en el sistema no supera los cinco lo que supone que en media no llega a haber más de tres clientes en cola. El tiempo medio de estancia en el sistema sería un poco elevado para tasas de llegadas de entorno a 0,15, pero sin importantes consecuencias negativas ya que el tiempo medio de espera es de 21 minutos, cifra en torno a la que se encuentra la tolerancia estimada de espera de los clientes.

## 4.- Conclusiones

En este Trabajo Fin de Grado se ha realizado el análisis de los diferentes sistemas de colas mediante los cuales pueden ser analizados las diferentes líneas de espera que nos encontramos en la realidad.

Se ha comprobado que los sistemas de colas abarcan un amplio espectro de problemáticas y cada línea de espera concreta se debe modelar de acuerdo a sus características, de modo que no existe la posibilidad de realizar análisis sistemáticos de manera directa válidos para diferentes casos.

También se ha puesto de manifiesto la complejidad inherente al modelado de sistemas de colas que no responden a los casos más sencillos. A pesar de ello, se demuestra una gran utilidad y posibilidad de análisis a través de software especializado como *WinQSB* y otras aplicaciones de pago existentes mucho más completas. Con análisis de este tipo se puede ayudar a la toma de decisiones, apoyadas en estimaciones monetarias de las consecuencias con un nivel de confianza significativo. No sólo se consiguen mayores ingresos o menores costes de manera directa con este tipo de investigaciones, sino también incrementar la calidad del servicio al cliente lo que influye a largo plazo en la imagen de la empresa y en el nivel de ventas.

En referencia al caso práctico abordado también se extraen una serie de conclusiones concretas:

Es imprescindible tener en cuenta las consideraciones de cada caso. En el caso del *Centro Óptico García Gallego*, después de la primera aproximación se pone de manifiesto la necesidad de una nueva recogida de datos puesto que no se tuvieron en cuenta las singularidades comentadas en base a las cuales se realiza la siguiente aproximación. Para el caso del sábado estudiado por separado en la primera aproximación, queda probado para el nivel de confianza con el que se han cotejado los datos con la distribución exponencial, que se perderían clientes en el caso de utilizar un modelo tipo M/M/2. En relación a los resultados obtenidos a partir de la segunda aproximación, a pesar de que el tamaño de la muestra no es muy grande, se sabe que la línea de espera funciona con una eficiencia promedio aceptable y los resultados son mucho más próximos a la realidad observada, con problemas aún presentes como la

inexistencia de un número fijo de servidores. Este hecho nos llevó a aproximar el funcionamiento de la óptica con dos servidores y medio (considerando aparte el servicio de graduación y la persona que ocupa la mayor parte de su tiempo en el taller) puesto que es el supuesto de mayor similitud con la realidad. La justificación de esta segunda aproximación reside en el hecho de que, mediante una nueva metodología de recogida de datos, los tiempos medios de servicio son diferentes y aportan resultados más coherentes.

La conclusión acerca del funcionamiento general del negocio es que se está trabajando con una combinación adecuada de servidores y medios físicos ya que en función de los datos del estudio la óptica funciona correctamente y los tiempos de espera son razonablemente asequibles para este tipo de servicio.

No por ello se deben obviar limitaciones que afectan a la aplicación de la Teoría de Colas en este caso concreto. Estas limitaciones son tales como la asunción de tasas idénticas de servicio para todos los servidores o como la disciplina de servicio que no es puramente FIFO.

Teniendo en cuenta las limitaciones comentadas, en el futuro sería recomendable una ampliación del estudio con actuaciones tales como algunas de las que se citan a continuación:

- Análisis de tareas y sus tiempos asociados.
- Análisis de costes mediante *WinQSB*.
- Integración de un modelo de colas con prioridad para la descripción del comportamiento de los clientes con citas.
- Diseño de un modelo específico con estaciones de manera que se concatenan colas con servicios intermedios para la descripción del comportamiento de los clientes que, después de esperar la cola principal, se incorporan a otra cola para ser graduados.

## 5.- Bibliografía

- Anderson, D.R., Sweeney, D.J., Williams, T.A., Camm, J.D., Martin, D. (2006). *“Quantitative Methods for Business”*. South-Western.
- Ayala García J.J., Deán Arnedo R.H., Mola Ávila J.A. (2009). *“Manual y Aplicaciones de Funciones Estadísticas y Análisis de Datos en Microsoft Excel 2007”*. Univ. Tecnológica de Bolívar, Cartagena.
- Azarang M., García E. (2006) *“Simulación y análisis de modelos estocásticos”*. Ed. Mc. Graw Hill. México.
- Bernal García, J.J., Martínez María-Dolores S. M., Sánchez García, J. F. (2009). *“La hoja de cálculo como apoyo a la simulación de los fenómenos de espera con prioridades. Una aplicación a la sanidad”*. Rect@, Vol. 10: 77-104.
- Bernal J.J., Martínez S., Sánchez J.F. (2005). *“Aplicación de la simulación con hoja de cálculo a la teoría de colas”*. Rect@. Actas\_13, pp. 1-11. Comunidad Valenciana.
- Chang, Y.L. (2000). *“WinQSB”*. Ed. Willey.
- Cuéllar Quiñones, J.C. (2010). *“Algoritmos de planificación en redes de paquetes”*. Ed. Universidad Icesi. Cali, Colombia.
- Enciso Quisque, L. (2011): *“Teoría de Colas”*. Escuela de Ciencias de la Computación. Universidad Católica de Loja. 2ª Ed. de la Universidad Técnica Particular de Loja, Ecuador.
- Gómez Jiménez, F.A. *“Aplicación de la Teoría de Colas en una entidad financiera: herramienta para mejoramiento de los procesos de atención al cliente”* Revista Universidad EAFIT. Vol. 44. No. 150'. Colombia.
- Hertz Fernández Jeri, L. (2000). *“Teoría de Colas”*. Departamento de Ingeniería en Gestión Empresarial. Universidad Nacional Agraria La Molina, Lima.
- Hillier, F.S., Lieberman G.J. *“Introduction to Operations Research”*. 8<sup>th</sup> ed. Mc. Graw-Hill International.
- Hillier, F.S., Lieberman, G.J. (2010). *“Introducción a la investigación de operaciones”*. Novena edición Mc.Graw-Hill.
- Kendall, D. G. (1953). *“Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain”*. The Annals of Mathematical Statistics 24 (3): 338.

- Little, J. D. C. (1961). "*A Proof for the Queuing Formula:  $L = \lambda W$* ". *Operations Research* 9 (3): 383–320.
- Millán, E. (2002). "La Investigación Operativa". Madrid.
- Morales Vallejo, P (2008). "*Estadística aplicada a las Ciencias Sociales*". Univ. Pontificia de Comillas. Madrid.
- Queueing Theory Basics:  
[http://www.eventhelix.com/RealtimeMantra/CongestionControl/queueing\\_theory.htm#.UjcKx9fbytY](http://www.eventhelix.com/RealtimeMantra/CongestionControl/queueing_theory.htm#.UjcKx9fbytY)
- Reinaga Obregón, J (2006). "*Prueba de bondad de ajuste*"
- Rodríguez-Aragón, L.J. (2011). "Simulación, método de Monte Carlo". Área de Estadística e Investigación Operativa. Universitat Oberta de Catalunya.
- Suárez, Mario, (2012). "*Interaprendizaje de Probabilidades y Estadística Inferencial con Excel, Winstats y Graph*". Primera Edición. Imprenta M&V, Ibarra, Ecuador.
- Technical Note Six (2003). "*Waiting Line Management*"
- Trani A. (2007). "Teoría de Colas. Aplicaciones en aviación". Instituto Politécnico de Virginia.
- Univ. Tecnológica Panamá (2012). "*Teoría de Colas. Notación de Kendall*"