Capítulo IV

Splines cúbicos suavizantes

4.1 Planteamiento del problema de suavización.

Consideramos el retículo

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b,$$

y la colección de números

$$y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m.$$

Puede suceder que los valores y_i en el arreglo

$$(x_i, y_i), \quad \forall \quad i = 1, \dots, m,$$

contengan cierto error. Esto significa que para todo $i = 0,1, \dots, m$ existe un intervalo

$$(c_I, d_I) \text{ ó } bien \quad (y_{I-\delta}, y_{I+\delta}),$$

tal que cualquier número perteneciente a él puede ser tomado como valor de y_i. Los valores y_i pueden ser, por ejemplo, los resultados (que contienen un error aleatorio) de las mediciones de cierta función $y(x)$ para los valores dados de la variable x. No es conveniente utilizar interpolación para construir la función $y(x)$ a partir de estos valores ''experimentales'', por cuanto la función interpolante reproducirá las oscilaciones condicionadas por la componente aleatoria en el arreglo $\{z_i\}$.

En este caso es más apropiado el método de suavización, uno de cuyos objetivos es disminuir la aleatoriedad en el resultado de las mediciones. Habitualmente, en tales problemas se pide hallar una función cuyos valores para $x = x_i, i = 1,2, \ldots, m$, pertenezcan a los intervalos correspondientes y que tenga, además propiedades bastante buenas (por ejemplo, derivadas primera y segunda continuas, su gráfico no es muy encorvado, es decir no tiene oscilaciones muy fuertes, etcétera).

Un problema similar tiene lugar también al construir, a partir de un arreglo (exacto)

$$(x_i, y_i), \quad \forall \quad i = 1, \ldots, m,$$

una función que pase no por los puntos dados, sino cerca de ellos y que, además, varíe de manera suficientemente suave. En otras palabras, es como si la función buscada suavizara el arreglo sin interpolarlo.

4.2 Spline Cúbico Suavizante. Definición.

Consideremos un retículo

$$\omega \ : a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b,$$

y dos colecciones de números

$$y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m.$$

Se denomina *spline cúbico suavizante* en un retículo ω a una función S(x) que:

1) En todo el intervalo

$$[x_i, x_{i+1}], \qquad \forall \quad i = 1, \dots, m-1,$$

es un polinomio de tercer grado

$$S(x) = S_i(x) = a_0^i + a_1^i (x - x_i) + a_2^i (x - x_i)^2 + a_3^i (x - x_i)^3 \,. \tag{4.1}$$

En todo el intervalo, el spline es un polinomio de tercer grado que se define mediante cuatro coeficientes. En total hay $(m-1)$ intervalos, por lo que, para definir completamente el Spline es necesario hallar $4(m-1)$ números:

$$a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, \quad \forall\, i = 1, \dots, m-1.$$

2) Es dos veces diferenciable con continuidad en el intervalo [a,b], es decir, pertenece a la clase C^2[a,b].

Esta condición significa continuidad de la función $S(x)$ y de sus derivadas $S'(x)$ y $S''(x)$ en todos los nodos internos del retículo w. Como el número de nodos internos es $m-2$, entonces tenemos $3(m-2)$ condiciones.

3) En ella alcanza su *mínimo el funcional*

$$J(f) = \int_a^b (f''(x))^2 dx \ + \ \sum_{i=0}^m \frac{1}{\rho_i}(f(x_i) - y_i)^2, \tag{4.2}$$

donde y_i y $\rho_i > 0$ son números dados. A los números ρ_i se les denomina pesos.

4) Satisface *condiciones de contorno* de uno de los tres tipos siguientes, explicadas a continuación.

4.3 Condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno se dan en forma de restricciones sobre los valores del spline y de sus derivadas en todos los nodos fronterizos del retículo ω.

A. Condiciones de contorno de primer tipo.

Las derivadas primeras de $S(x)$ son conocidas en los extremos del intervalo [*a,b*]:

$$S'(a) = z_1' \quad S'(b) = z_m'. \tag{4.3}$$

B. Condiciones de contorno de segundo tipo.

Las derivadas segundas de $S(x)$ son conocidas en los extremos del intervalo [*a,b*]:

$$S''(a) = z_1'' \quad S''(b) = z_2''. \tag{4.4}$$

C. Condiciones de contorno de tercer tipo.

$$S(a) = S(b),\ \ S'(a) = S'(b),\ S''(a) = S''(b). \tag{4.5}$$

Estas condiciones se denominan *periódicas.*

Teorema: El Spline cúbico $S(\mathrm{x})$ que minimiza el funcional y satisface las condiciones de contorno de uno de los tres tipos indicados está definido unívocamente.

Por último el spline cúbico que minimiza el funcional *J(f)* y satisfice las condiciones de contorno de *i-ésimo* tipo se denomina *spline suavizador de i-ésimo tipo.*

4.4 Elección de las condiciones de contorno.

La elección de las condiciones de contorno es uno de los problemas principales en los problemas de interpolación y aproximación mediante splines, y adquiere una importancia especial cuando es necesario garantizar una precisión alta del spline $S(x)$ en las proximidades de los extremos del intervalo $[a, b]$.

El efecto sobre la función spline en función de las condiciones de contorno elegidas, disminuirá conforme estemos más cerca de los puntos intermedios a interpolar, sin embargo nuestra función dependerá en los extremos en gran medida de las condiciones elegidas. La elección de las condiciones de contorno depende, a menudo, de la existencia de datos adicionales sobre el comportamiento de la función spline.

Si se conocen los valores de la derivada primera $f'(x)$ en los extremos del intervalo $[a, b]$, es decir, se conoce la dirección de la tangente de la curva en los extremos; entonces es lógico utilizar condiciones de contorno de primer tipo.

Si por el contrario, lo que se conocen son los valores de la derivada segunda $f''(x)$; entonces es lógico utilizar condiciones de contorno de segundo tipo.

Si existe la posibilidad de elegir entre condiciones de primer y segundo tipo, se dará preferencia a las primeras.

Si la función es periódica, se deben elegir condiciones de contorno de tercer tipo.

En caso de no existir información adicional sobre el comportamiento de la función, se pueden utilizar las condiciones naturales de contorno:

$$S''(a) = 0 \quad ; \quad S''(b) = 0.$$

Con estas condiciones la precisión en la aproximación puede disminuir bruscamente cerca de los extremos del intervalo $[a, b]$.

Otra opción es utilizar las condiciones de contorno de primer o de segundo tipo con valores aproximados; esto quiere decir, que se tomarán sus aproximaciones en diferencias, en vez de los valores exactos de sus derivadas.

4.5 Elección de los coeficientes de peso.

La elección de los coeficientes de peso ρ_i del funcional permite controlar, en cierta medida, las propiedades de los splines suavizantes.

Para ilustrar cómo influye este parámetro de peso o también llamado de suavizado, consideraremos una serie de puntos pertenecientes a un retículo, los cuales serán ajustados mediante 6 valores distintos de ρ.

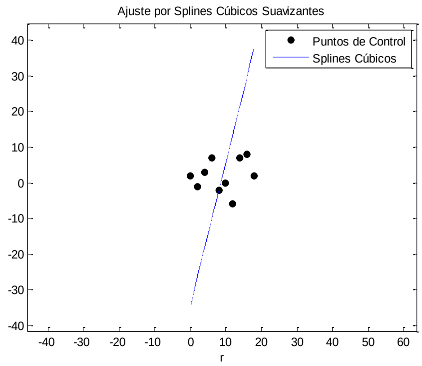

Figura 4.1: Spline cúbico suavizante para ρ = ∞

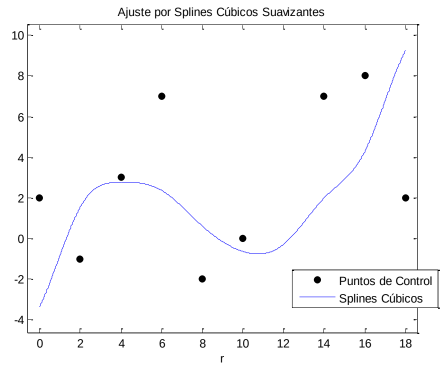

Figura 4.2 Spline cúbico suavizante para ρ = 10

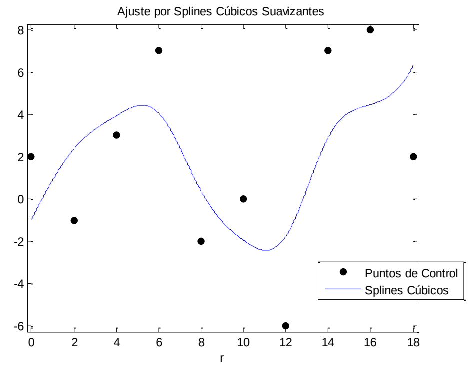

Figura 4.3: Spline cúbico suavizante para ρ = 1.5

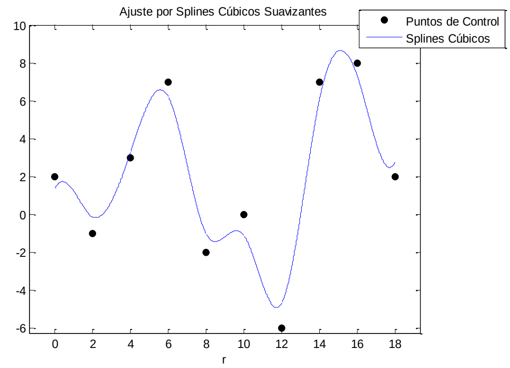

Figura 4.4: Spline cúbico suavizante para ρ = 0.1

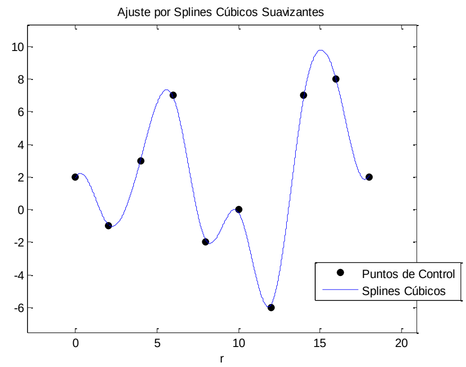

Figura 4.5: Spline cúbico suavizante para ρ = 0.01

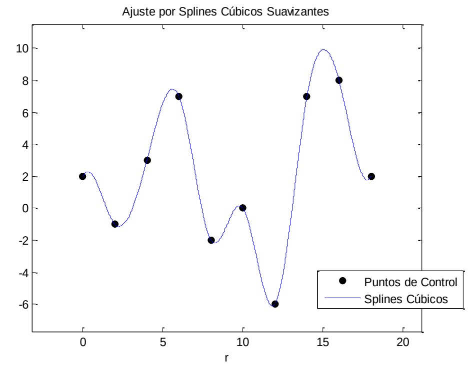

Figura 4.6: Spline cúbico suavizante para ρ = 0

Vemos en las figuras 4.1-4.6 como al disminuir el valor de los pesos (se ha tomado el mismo valor del peso para todos los puntos), la función spline se pega más a los puntos de control.

Como se puede apreciar en la figura 4.6 si se cumple que $\rho_i = 0$ para todo i, entonces $z_i = y_i$, y el spline suavizador resulta ser un spline interpolante. Esto se traduce en que cuanto mayor es la precisión con que están dadas las magnitudes y_i, tanto menores deben ser los coeficientes de peso respectivos. Si es necesario que el spline pase por el punto (x_k, y_k), el coeficiente de peso ρ_i ,$\forall\ i = 1, \ldots, m$, correspondiente se deba hacer igual a cero. Sin embargo si se cumple que $\rho_i = \infty$, el ajuste se convierte en una recta de regresión. Con esto queda ilustrado como la bondad del ajuste depende del parámetro ρ.

En los cálculos prácticos lo más importante es la elección de los números ρ_i. Notar que los pesos pueden ser diferentes para puntos distintos. Así por ejemplo en el caso práctico naval que expondremos exigiremos que $\rho_1 = \rho_m = 0$, es decir, que los pesos en los extremos sean cero y así la curva pase por estos puntos, pero los pesos serán distintos de cero en los demás puntos de control.

Definimos $\Delta_i$como el error de medición de la magnitud y_i. Entonces es lógico exigir que

$$|S(x_i) - y_i| \leq \Delta_i$$

El caso más sencillo de elección de los coeficientes de peso ρ_i puede ser

$$\rho_i = c\Delta_i$$

donde c es cierta constante suficientemente pequeña.

4.6 Construcción de la función Spline Cúbico Suavizante.

En cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$,$\forall\ i = 1, \dots, m-1$, se busca un polinomio de grado 3 que satisfaga:

$$S_i(x_i) = z_i, \quad S_i(x_{i+1}) = z_{i+1}$$
$$S_i''(x_i) = \eta_i, \quad S_i''(x_{i+1}) = \eta_{i+1}$$

Se requiere también una condición de continuidad en la primera derivada, pero ésta será impuesta posteriormente. La expresión

$$S(x) = S_i(x) = z_i(1-t) + z_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6}t(1-t)[(2-t)\eta_i + (1+t)\eta_{i+1}], \qquad (4.6)$$

ofrece un polinomio de grado 3 que cumple con las condiciones dichas.

Como comprobación, partimos de que la derivada segunda de un polinomio de grado 3 es un polinomio de grado 1, y en este caso debe de satisfacer $S_i''(x_i) = \eta_i, \quad S_i''(x_{i+1}) = \eta_{i+1}$, como ya se ha citado anteriormente. Así si consideramos que

$$t = \frac{x - x_i}{h_i} \quad \text{y} \quad x_{i+1} = x_i + h_i,$$

la derivada segunda del polinomio es:

$$S_i''(x) = (1-t)\eta_i + t\eta_{i+1}.$$

Si integramos el polinomio anterior y realizando un cambio de variable:

$$\int S_i''(x)dx = \int S_i''(t)h_i dt = h_i(-\eta_i \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}\eta_{i+1}) + C,$$

donde el cambio de variable ha sido,

$$\frac{x-x_i}{h_i} = t \rightarrow dx = h_i dt,$$

Si volvemos a integrar el polinomio:

$$S_i(x) = \int S_i'(x)dx = \int S_i'(t)h_i dt = \frac{h_i^2}{2}\int(-\eta_i(1-t)^2 + t^2\eta_{i+1})dt) + h_i tC + D,$$

$$S_i(x) = \frac{h_i^2}{6}[(1-t)^3\eta_i + t^3\eta_{i+1}] + h_i tC + D. \quad (4.7)$$

Para las condiciones establecidas; debe ser

$x = x_i \rightarrow S_i(x_i) = z_i$, con t=0,

$x = x_{i+1} \rightarrow S_i(x_{i+1}) = z_{i+1}$, con t=1,

$\frac{h_i^2}{6}[\eta_i] + D = z_i$ -> $D=z_i-\frac{h_i^2}{6}[\eta_i]$,

al sustituir el valor de D,

$\frac{h_i^2}{6}[\eta_{i+1}] + h_i C + D = z_{i+1}$ -> $h_i C=z_{i+1} - \frac{h_i^2}{6}[\eta_{i+1}] + z_i-\frac{h_i^2}{6}[\eta_i]$,

y por último C

$$C = \frac{z_{i+1} - z_i}{h_i} + \frac{h_i}{6}(\eta_i - \eta_{i+1}).$$

Sustituyendo los valores de las constantes de integración C y D de la ecuación 4.7,

$$h_i tC + D = (z_{i+1} - z_i)t + \frac{h_i^2}{6}(\eta_i - \eta_{i+1})t + z_i - \frac{h_i^2}{6}\eta_i.$$

Nuestro polinomio queda de la forma:

$$S_i(x) = \frac{h_i^2}{6}[(1-t)^3\eta_i + t^3\eta_{i+1}] + (z_{i+1} - z_i)t + \frac{h_i^2}{6}(\eta_i - \eta_{i+1})t + z_i - \frac{h_i^2}{6}\eta_i. \quad (4.8)$$

La forma lineal la podemos reescribir como

$$h_i tC + D - [z_i(1-t) + z_{i+1}t] + [z_i(1-t) + z_{i+1}t] =$$
$$= -\eta_{i+1}\frac{h_i^2}{6}t + \frac{h_i^2}{6}\eta_i t - \frac{h_i^2}{6}\eta_i + (1-t)z_i + t(z_i + 1).$$

Con las siguientes observaciones para los términos que acompañan a η_i

$$-t(1-t)(2-t) = -(t-t^2)(2-t) = -(2t - 2t^2 - t^2 + t^3) = -2t + 3t^2 - t^3 \text{ (I)}$$
$$(1-t)^3 = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1, \qquad \text{(II)}$$

y la diferencia de I y II,

$$(-2t + 3t^2 - t^3) - (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) = -t + 1,$$

sustituyendo:

$$(-t+1)\frac{h_i^2}{6}\eta_i. \quad (4.9)$$

Los términos que acompañan a $\boldsymbol{\eta_{i+1}}$ son

$$-t(1-t)(1+t) = -t(1-t^2) = -t + t^3 \text{ (I)}$$
$$t^3 \qquad \text{(II)},$$

y la diferencia de I y II

$$(-t+t^3)-t^3=t,$$

y de nuevo incluyendo los coeficientes

$$t\,\frac{h_i^2}{6}\eta_{i+1}. \tag{4.10}$$

Volviendo a la ecuación 4.8, y sustituyendo en ella las expresiones anteriores, 4.9 y 4.10, se obtiene el spline suavizante de la forma

$$S(x)=S_i(x)=z_i(1-t)+z_{i+1}t-\frac{h_i^2}{6}t(1-t)[(2-t)\eta_i+(1+t)\eta_{i+1}]. \tag{4.11}$$

4.7 Obtención de los coeficientes del Spline Cúbico Suavizante.

Vamos a trabajar en el intervalo

$$[x_i,x_{i+1}] \quad \forall \quad i=1,\ldots,m-1.$$

Si introducimos las notaciones

$$S(x_i)=z_i, \qquad S''(x_i)=\eta_i, \quad \forall \quad i=1,2,\ldots,m,$$

donde z_i y η_i son $2m+2$ valores desconocidos.

Como ya se demostró anteriormente el spline cúbico suavizante se busca de la forma:

$$S(x)=S_i(x)=z_i(1-t)+z_{i+1}t-\frac{h_i^2}{6}t(1-t)[(2-t)\eta_i+(1+t)\eta_{i+1}],$$

donde

$$h_i = x_{i+1} - x_i \ , \qquad t = \frac{x - x_i}{h_i},$$

y los números z_i, η_i, i=0,1,...,m, son la solución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales determinado por las condiciones impuestas.

La función $S_i(x)$ es continua en todo el intervalo [a,b]: para los dos primeros nodos, t tomará el valor t=0 y t=1 respectivamente, sustituyendo en la fórmula 4.11, obtenemos:

$$\boldsymbol{S_i(x_i) = z_i},$$
$$\boldsymbol{S_i(x_{i+1}) = z_{i+1}}.$$

Así los números z_i y η_i, deben ser elegidos de acuerdo a que el spline tenga derivada primera continua en el intervalo [a,b], para ello vamos a calcular la derivada primera de la función del spline suavizante, $S_i(x)$

En el en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$:

$$S'(x) = S'_{i-1}(x) = \frac{-z_{i-1} + z_i}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6}[(2 - 6t + 3t^2)\eta_{i-1} + (1 - 3t^2)\eta_i].$$

En el punto $x_i - 0$ (para t=1), tendremos

$$S'(x_i - 0) = S'_{i-1}(x_i) = \frac{-z_{i-1} + z_i}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6}[\eta_{i-1} + 2\eta_i]. \qquad (4.12)$$

Calculamos la derivada primera del spline el en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S'(x) = S'_i(x) = \frac{-z_i + z_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}[(2 - 6t + 3t^2)\eta_i + (1 - 3t^2)\eta_{i+1}].$$

En el punto $x_i + 0$ (para t=0) tendremos

$$S'(x_i + 0) = S_i'(x_i) = \frac{-z_i + z_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2\eta_i + \eta_{i+1}). \qquad (4.13)$$

Con la condición de continuidad para la primera derivada del spline en los puntos interiores del retículo ω,

$$S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0), \qquad \forall \qquad i = 1, \dots, m-1,$$

obtendremos m-1 relaciones tal que

$$\frac{-z_{i-1} + z_i}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6}[\eta_{i-1} + 2\eta_i] = \frac{-z_i + z_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2\eta_i + \eta_{i+1}),$$
$$\frac{-z_i + z_{i+1}}{h_i} + \frac{z_{i-1} - z_i}{h_{i-1}} = \frac{h_{i-1}}{6}(\eta_{i-1} + 2\eta_i) + \frac{h_i}{6}(2\eta_i + \eta_{i+1}).$$

Simplificando

$$\frac{z_{i-1}}{h_{i-1}} - \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}}\right) z_i + \frac{z_{i+1}}{h_i} = \frac{1}{6}(h_{i-1}\eta_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\eta_i + h_i\eta_{i+1}), \quad (4.14)$$

obteniendo m-1 ecuaciones.

De la condición de continuidad de la primera derivada del spline en los puntos interiores del retículo ω,

$$\frac{z_1}{h_1} - \left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_1}\right) z_2 + \frac{z_3}{h_2} = \frac{1}{6}[h_1\eta_1 + 2(h_1 + h_2)\eta_2 + h_2\eta_3],$$

$$\vdots$$

$$\frac{z_{i-1}}{h_{i-1}} - \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}}\right) z_i + \frac{z_{i+1}}{h_i} = \frac{1}{6}[h_{i-1}\eta_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\eta_i + h_i\eta_{i+1}],$$

$$\vdots$$

$$\frac{z_{m-2}}{h_{m-2}} - \left(\frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}}\right) z_{m-1} + \frac{z_m}{h_{m-1}} = \frac{1}{6}[h_{m-2}\eta_{m-2} + 2(h_{m-2} + h_{m-1})\eta_{m-1} + h_{m-1}\eta_m],$$

$$\forall \qquad i = 2, \dots, m-1.$$

Pudiendo obtenerse la siguiente relación matricial:

$$A\eta = 6Hz, \tag{4.15}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2}+h_{m-1}) & h_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{H}= \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} & (-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}) & \frac{1}{h_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & (-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h3}) & \frac{1}{h_3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h_{m-2}} & (-\frac{1}{h_{m-2}} - \frac{1}{h_{m-1}}) & \frac{1}{h_{m-1}} \end{bmatrix}$$

Quedando el sistema de ecuaciones incompleto, aún faltan ecuaciones.

Para la condición de minimización del *funcional* $J(S) = \int_a^b (S''(x))^2 dx \; + \; \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\rho i}(S(x_i) - y_i)^2$, calculamos el primer término

$$\int_a^b (S''(x))^2 dx \; = \int_0^1 [(1-t)\eta_i + t\eta_{i+1}]^2 h_i dt$$

$$t = \frac{x - x_i}{h_i} \to dx = h_i dt$$

Habiendo realizado el cambio de variable y desarrollando el binomio,

$$h_i \int_0^1 (1-t)^2 {\eta_i}^2 + t^2 {\eta_{i+1}}^2 + 2t(1-t)\eta_i \eta_{i+1} dt,$$

e integrando la expresión anterior,

$$\left[h_i \left[-\frac{(1-t)^3}{3} \right]_0^1 {\eta_i}^2 + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 {\eta_{i+1}}^2 + \left[t^2 - \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 \eta_i \eta_{i+1} \right] = h_i \left[\frac{1}{3} {\eta_i}^2 + \frac{1}{3} {\eta_{i+1}}^2 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_{i+1} \right].$$

Así obtenemos el primer miembro de la expresión del funcional:

$$\int_a^b (S''(x))^2 dx \; = h_i \left[\tfrac{1}{3} {\eta_i}^2 + \tfrac{1}{3} {\eta_{i+1}}^2 + \tfrac{1}{3} \eta_i \eta_{i+1} \right]. \qquad (4.16)$$

Vamos a desarrollar el funcional $J(s)$ mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange, la variable auxiliar λ_1, impondrá que se satisfaga la condición de contorno en el extremo izquierdo. La variable λ_m por su parte impondrá que se cumpla la condición de contorno del extremo derecho. Los valores λ_i , $i = 2, \dots, m-1$ impondrán que se satisfagan las condiciones debidas a la continuidad de la primera derivada.

Derivando el funcional respecto de λ , $\frac{dJ_a(s)}{d\lambda}$, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\tilde{\mathrm{A}}\eta = 6\hat{\mathrm{H}}z + F, \tag{4.17}$$

donde $\tilde{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{H}}$ y F , dependerán de las condiciones de contorno elegidas.

Despejando η en la ecuación 4.17:

$$\eta = \tilde{\mathrm{A}}^{-1}(6\,\ddot{\mathrm{H}}z + F). \tag{4.18}$$

donde necesitamos que $\tilde{\mathrm{A}}$ sea invertible.

Derivando el funcional auxiliar J_a respecto de η, $\frac{dJ_a(s)}{d\eta}$, obtenemos m ecuaciones más, que expresadas matricialmente quedan:

$$U\,\eta = V\lambda. \tag{4.19}$$

Al despejar λ en la ecuación 4.18,

$$\lambda = V^{-1}U\eta, \tag{4.20}$$

donde nuevamente pedimos que V sea invertible.

Sustituyendo el valor anterior de η de la ecuación 4.18 en la ecuación 4.20,

$$\lambda = V^{-1}U\tilde{A}^{-1}(6\,\ddot{H}z + F). \tag{4.21}$$

Al definir $M = V^{-1}U\tilde{A}^{-1}$, y sustituyendo:

$$\lambda = 6M\ddot{H}z + MF. \tag{4.22}$$

Derivando el funcional respeto de z, obtenemos

$$z = Y + \frac{1}{2}\rho\,J\lambda. \tag{4.23}$$

Y al sustituir el valor de λ de la ecuación 4.22:

$$z = Y + \frac{1}{2}\rho\,J\,(6M\ddot{H}z + MF) = Y + \frac{1}{2}K_1 z + K_{2,} \tag{4.24}$$

donde K_1, K_2son dos matrices auxiliares, introducidas para simplificar la notación del sistema resultante,

$$K_1 = \rho\,JM6\ddot{H},$$
$$K_2 = \rho\,JMF.$$

Y definiendo una tercera matriz auxiliar C

$$C = Id - \frac{1}{2}K_1,$$

el sistema resultante quedará

$$Cz = Y + K_2. \tag{4.25}$$

Para poder resolver este sistema de ecuaciones es necesario definir las matrices anteriores, que vendrán dadas en función de las condiciones de contorno elegidas, las cuales ya se comentó que se elegirían en función de los datos adicionales que tengamos sobre el comportamiento de la función.

Notar que este sistema siempre tendrá solución única para cualquier valor de ρ salvo para un número finito de valores de ρ que tienen que ver con los valores propios de la matriz C. En particular, para valores de ρ suficientemente pequeños (caso que nos es más interesante en la práctica) siempre hay solución única.

4.8 El sistema de ecuaciones final en función de las condiciones de contorno.

A continuación se va a detallar cuáles serán las dos ecuaciones que se podrán obtener en función de las condiciones de contorno, las cuales incluso podrán ser distintas en cada extremo.

En caso de conocer condiciones de ***primer tipo***, es decir, los valores de la primera derivada de $S(x)$ en los extremos del intervalo $[a,b]$; se obtendrían las dos ecuaciones que nos faltan para completar el sistema del siguiente modo:

- Obtenemos la derivada del trozo de Spline correspondiente al extremo.
- Evaluamos esta ecuación en punto extremo.
- Y lo igualamos al valor conocido de la primera derivada.

1) Para el extremo izquierdo (a):

$$S_1'(x_1) = \frac{-z_1 + z_2}{h_1} - \frac{h_1}{6}(2\eta_1 + \eta_1) = f'(a),$$

$$\frac{-z_1 + z_2}{h_1} = f'(a) + \frac{h_1}{6}(2\eta_1 + \eta_1).$$

2) Para el extremo derecho (b):

$$S'_{m-1}(x_m) = \frac{-z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}} + \frac{h_{m-1}}{6}[\eta_{m-1} + 2\eta_m] = f'(b),$$
$$\frac{-z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}} = f'(b) - \frac{h_{m-1}}{6}[\eta_{m-1} + 2\eta_m]$$

Si utilizáramos condiciones de ***segundo tipo***, es decir, damos los valores de la segunda derivada en los extremos del intervalo $[a, b]$; básicamente se han de dar los valores de η_1 y η_m:

$$f''(a) = \eta_1 \,, \quad f''(b) = \eta_m.$$

En caso de que la función a suavizar sea *periódica*, o de ***tercer tipo***,de periodo $T = b - a$, en particular, $f(a) = f(b)$ y por tanto $S_1(a) = S_{m-1}(b)$; se utilizarán condiciones de *tercer tipo*, las cuales darán las siguientes ecuaciones:

La primera ecuación adicional sería $S'_1(t_1) = S'_{m-1}(t_m)$, y sustituyendo:

$$\frac{-z_1 + z_2}{h_1} - \frac{h_1}{6}(2\eta_1 + \eta_1) = \frac{-z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}} + \frac{h_{m-1}}{6}[\eta_{m-1} + 2\eta_m],$$
$$\frac{-z_1 + z_2}{h_1} - \frac{-z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}} = \frac{h_{m-1}}{6}[\eta_{m-1} + 2\eta_m] + \frac{h_1}{6}(2\eta_1 + \eta_1).$$

La segunda ecuación obtenida sería $S''_1(t_1) = S''_{m-1}(t_m)$, en nuestro caso de suavización

$$\eta_1 - \eta_m = 0.$$

No siempre conocemos los mismos datos en ambos extremos del intervalo $[a, b]$, por lo que podemos tener diferentes condiciones en cada extremo, excepto en las condiciones de tercer tipo que exigen que la función sea periódica de periodo T=b-a y en particular $f(a) = f(b)$.

Por último antes de empezar a estudiar los diferentes casos en los que nos podremos encontrar a la hora de aproximar mediante splines suavizantes, recordamos que las condiciones de primer tipo tienen preferencia sobre las de segundo tipo, pudiendo aproximar estos valores.

A partir de aquí estudiaremos los casos más representativos, los cuales necesitan ser estudiados individualmente para poder demostrar que el sistema de ecuaciones resultante tiene solución y además es única, es decir vamos a demostrar que las matrices $\tilde{A}\; y\; V$ son invertibles en todos los casos.

Para estudiar la invertibilidad de dichas matrices vamos a hacer uso constantemente e un resultado que asegura que una matriz estrictamente diagonal dominante es invertible.

4.9 Comprobación del sistema compatible determinado.

Una vez construido un sistema de ecuaciones, es muy importante comprobar si el sistema es compatible determinado, con única solución, pudiendo obtenerse ésta y así poder obtener el spline correspondiente.

Si construimos el sistema completo $Az = B$ para que éste tenga solución compatible determinada sólo habrá que demostrar que la matriz A es invertible, es decir, que el determinante de A no es nulo.

En matemáticas, en particular en álgebra lineal, una matriz cuadrada *A* de orden *n* se dice que es **invertible**, **no singular**, **no degenerada** o **regular** si existe otra matriz cuadrada de orden *n*, llamada **matriz inversa** de *A* y representada como A^{-1}, tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n y el producto utilizado es el producto de matrices usual.

Existe un resultado que asegura que todo matriz estrictamente diagonal dominante es invertible.

Formalmente, se dice que la matriz A de orden n es *estrictamente diagonal dominante* cuando se satisface:

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| \qquad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

El resultado, conocido como lema de Hadamard, se prueba de la siguiente manera:

Si la matriz A no fuese invertible, la ecuación $Az = 0$ admitiría una solución no nula. Entonces existe:

$$z = [z_{1,}, \dots \dots, z_n]^T,$$

una solución. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\max_{1\leq i\leq n} |z_i| = 1.$$

Sea r un índice para el que es $|z_r| = 1$. Tomando módulos en la ecuación

$$a_{r1}z_1 + \cdots + a_{rr}z_r + \cdots + a_{rn}z_n = 0.$$

Se concluye que

$$|a_{rr}| \leq \sum_{i\neq r} |a_{r1}||z_1| \leq \sum_{i\neq r} |a_{r1}|.$$

Desigualdad que contradice la hipótesis de que la matriz A es estrictamente diagonal dominante. Esto permite dar por demostrado que una matriz estrictamente diagonal dominante es invertible.

4.10 El sistema de ecuaciones final y comprobación de que el sistema es compatible determinado para cada caso particular.

En este último apartado nos vamos a centrar en buscar el sistema de ecuaciones final para los casos particulares más representativos (los demás casos se deducen fácilmente a partir de éstos) y además demostraremos que cada uno de los sistemas que se forman, incluidas las condiciones de contorno, son compatibles determinados lo cual nos garantizará que la función spline se pueda construir.

Para abreviar se utilizarán las siguientes denominaciones:

1: condiciones de primer tipo (se conoce el valor de la primera derivada en el extremo).
2: condiciones de segundo tipo (se conoce el valor de la segunda derivada en el extremo).
3: condiciones de tercer tipo (existe periocidad).
CI: condición de contorno en el extremo izquierdo.
CD: condición de contorno en el extremo derecho.

4.10.1 Caso CI=1, CD=1.

Las condiciones en los extremos son de primer tipo, por lo que se conocen las primeras derivadas y tenemos las dos siguientes ecuaciones adicionales:

$$\frac{-z_1 + z_2}{h_1} = f'(a) + \frac{h_1}{6}(2\eta_1 + \eta_2),$$
$$\frac{-z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}} = f'(b) - \frac{h_{m-1}}{6}[\eta_{m-1} + 2\eta_m].$$

Al desarrollar el funcional para las condiciones de contorno establecidas

$$J_a(S) = h_1\left[\tfrac{1}{3}{\eta_1}^2 + \tfrac{1}{3}{\eta_2}^2 + \tfrac{1}{3}\eta_1\eta_2\right] + \cdots + h_{m-1}\left[\tfrac{1}{3}{\eta_{m-1}}^2 + \tfrac{1}{3}{\eta_m}^2 + \tfrac{1}{3}\eta_{m-1}\eta_m\right] + \tfrac{1}{\rho_1}(z_1 - y_1)^2 + \cdots + \tfrac{1}{\rho_m}(z_m - y_m)^2 + \lambda_1\left(\tfrac{-z_1+z_2}{h_1} - \tfrac{h_1}{6}(2\eta_1 + \eta_2) - f^{'}(a)\right) + \lambda_2\left[\left(\tfrac{z_1}{h_1} - \left(\tfrac{1}{h_2} + \tfrac{1}{h_1}\right)\right)z_2 + \tfrac{z_3}{h_2} - \tfrac{1}{6}\left(h_1\eta_1 + 2(h_1 + h_2)\eta_2 + h_2\eta_3\right)\right] + \cdots + \lambda_i\left[\left(\tfrac{z_{i-1}}{h_{i-1}} - \left(\tfrac{1}{h_i} + \tfrac{1}{h_{i-1}}\right)\right)z_i + \tfrac{z_{i+1}}{h_i} - \tfrac{1}{6}\left(h_{i-1}\eta_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\eta_i + h_i\eta_{i+1}\right)\right] + \cdots + \lambda_{m-1}\left[\left(\tfrac{z_{m-2}}{h_{m-2}} - \left(\tfrac{1}{h_{m-2}} + \tfrac{1}{h_{m-1}}\right)\right)z_{m-1} + \tfrac{z_m}{h_{m-1}} - \tfrac{1}{6}\left(h_{m-2}\eta_{m-2} + 2(h_{m-2} + h_{m-1})\eta_{m-1} + h_{m-1}\eta_m\right)\right] + \lambda_m\left(\tfrac{-z_{m-1}+z_m}{h_{m-1}} + \tfrac{h_{m-1}}{6}[\eta_{m-1} + 2\eta_m] - f^{'}(b)\right),$$

$$\forall \qquad i = 3, \ldots, m-2.$$

Operando el funcional $\dfrac{dJ_a(s)}{d\lambda}$ se obtiene el sistema de ecuaciones inicial ampliado

$$\tilde{A}\eta = 6\hat{H}z + F,$$

donde las matrices,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2}+h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h_{m-1}}{6} & -\frac{h_{m-1}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h_1} & (-\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}) & \frac{1}{h_2} & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{h_2} & (-\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h3}) & \frac{1}{h_3} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \frac{1}{h_{m-2}} & (-\frac{1}{h_{m-2}}-\frac{1}{h_{m-1}}) & \frac{1}{h_{m-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h_{m-1}} & \frac{1}{h_{m-1}} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{F}=\begin{bmatrix} f'(a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f'(b) \end{bmatrix}$$

Como se puede comprobar fácilmente la matriz A es estrictamente diagonal dominante y por tanto será invertible.

Realizando la siguiente operación al funcional $\frac{dJ_a(s)}{d\eta}$, obtenemos m ecuaciones más,

$$\frac{2}{3}h_1\eta_1+\frac{h_1}{3}\eta_2-\frac{h_1}{3}\lambda_1-\frac{h_1}{6}\lambda_2=0,$$
$$\frac{h_1}{3}\eta_1+\frac{2}{3}(h_1+h_2)\eta_2+\frac{h_2}{3}\eta_3-\frac{h_1}{6}\lambda_1-\frac{1}{3}(h_1+h_2)\lambda_2-\frac{h_2}{6}\lambda_3=0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{h_i}{3}\eta_{i-1}+\frac{2}{3}(h_{i-1}+h_i)\eta_i+\frac{h_i}{3}\eta_{i+1}-\frac{1}{3}(h_{i-1}+h_i)\lambda_i-\frac{h_i}{6}\lambda_{i+1}=0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{h_{m-3}}{3}\eta_{m-3}+\frac{2}{3}(h_{m-3}+h_{m-2})\eta_{m-2}+\frac{h_{m-2}}{3}\eta_{m-1}-\frac{1}{3}(h_{m-3}+h_{m-2})\lambda_{m-2}-\frac{h_{m-3}}{6}\lambda_{m-2}=0,$$
$$\frac{h_{m-2}}{3}\eta_{m-2}+\frac{2}{3}(h_{m-2}+h_{m-1})\eta_{m-1}+\frac{h_{m-1}}{3}\eta_m-\frac{1}{3}(h_{m-2}+h_{m-1})\lambda_{m-1}-\frac{h_{m-2}}{6}\lambda_{m-1}+\frac{h_{m-1}}{6}\lambda_m=0,$$
$$\frac{2}{3}h_{m-1}\eta_m+\frac{h_{m-1}}{3}\eta_{m-1}+\frac{h_{m-1}}{3}\lambda_m-\frac{h_{m-1}}{6}\lambda_{m-1}=0,$$
$$\forall \quad i=3,\dots,m-1.$$

Que también puede ser escrito matricialmente como

$$U\,\eta = V\lambda,$$

donde

$$U=\begin{bmatrix} \frac{2h_1}{3} & \frac{h_1}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{h_1}{3} & \frac{2(h_1+h_2)}{3} & \frac{h_2}{3} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{h_{m-2}}{3} & \frac{2(h_{m-2}+h_{m-1})}{3} & \frac{h_{m-1}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{3} & \frac{2h_{m-1}}{3} \end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{h_1}{6} & \frac{(h_1+h_2)}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \frac{h_2}{6} & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{h_{m-2}}{6} & \frac{2(h_{m-2}+h_{m-1})}{3} & -\frac{h_{m-1}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & -\frac{h_{m-1}}{3} \end{bmatrix}$$

La matriz V se observa fácilmente que es estrictamente diagonal dominante, y por lo tanto es invertible.

Derivando el funcional respecto de los z_i, $\frac{dJ_a(s)}{dz}$,

$$\frac{2}{\rho_1}(z_1 - y_1) - \frac{\lambda_1}{h_1} + \frac{\lambda_2}{h_1} = 0,$$
$$\frac{2}{\rho_2}(z_2 - y_2) + \frac{\lambda_1}{h_1} - \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{h_2} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{2}{\rho_{i+1}}(z_i - y_i) - \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)\lambda_i + \frac{\lambda_{i+1}}{h_i} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{2}{\rho_{m-2}}(z_{m-2} - y_{m-2}) - \left(\frac{1}{h_{m-3}} + \frac{1}{h_{m-2}}\right)\lambda_{m-2} + \frac{\lambda_{m-3}}{h_{m-3}} = 0,$$
$$\frac{2}{\rho_{m-1}}(z_{m-1} - y_{m-1}) - \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} - \left(\frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}}\right)\lambda_{m-1} + \frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-2}} = 0,$$
$$\frac{2}{\rho_m}(z_m - y_m) + \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} + \frac{\lambda_{m-1}}{h_{m-1}} = 0,$$
$$\forall \qquad i = 3, \dots, m-1.$$

Donde despejando z,

$$z_1 = y_1 + \frac{\rho_1}{2}\left(+\frac{\lambda_1}{h_1} - \frac{\lambda_2}{h_1}\right),$$
$$z_2 = y_2 + \frac{\rho_2}{2}\left(-\frac{\lambda_1}{h_1} + \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)\lambda_2 - \frac{\lambda_3}{h_2}\right),$$
$$\vdots$$
$$z_i = y_i + \frac{\rho_i}{2}\left(\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)\lambda_i - \frac{\lambda_{i+1}}{h_i}\right),$$
$$\vdots$$
$$z_{m-2} = y_{m-2} + \frac{\rho_{m-2}}{2}\left(\left(\frac{1}{h_{m-3}} + \frac{1}{h_{m-2}}\right)\lambda_{m-2} - \frac{\lambda_{m-3}}{h_{m-3}}\right),$$
$$z_{m-1} = y_{m-1} + \frac{\rho_{m-1}}{2}\left(\frac{\lambda_m}{h_{m-1}} + \left(\frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}}\right)\lambda_{m-1} - \frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-2}}\right),$$
$$z_m = y_m + \frac{\rho_m}{2}\left(-\frac{\lambda_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{\lambda_m}{h_{m-1}}\right),$$
$$\forall \qquad i = 3, \dots, m-1.$$

Matricialmente puede ser expresado como,

$$Z = Y + \frac{1}{2}\rho \, \mathrm{J} \, \lambda,$$

donde,

$$\mathrm{J}=\begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} & -\frac{1}{h_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h_{m-2}} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h_{m-2}} & \frac{1}{h_{m-2}}+\frac{1}{h_{m-1}} & \frac{1}{h_{m-1}} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{h_{m-1}} & -\frac{1}{h_{m-1}} \end{bmatrix}$$

4.10.2 Caso CI=2, CD=2.

Las condiciones en los extremos son de segundo tipo, por lo que se conocen las segundas derivadas y tenemos las dos siguientes ecuaciones adicionales:

$$f''(a) = \eta_{1,}$$
$$f''(b) = \eta_m.$$

Al desarrollar el funcional para las condiciones de contorno establecidas

$$J_a(s) = h_1\left[\frac{1}{3}{\eta_1}^2 + \frac{1}{3}{\eta_2}^2 + \frac{1}{3}\eta_1\eta_2\right] + \cdots + h_{m-1}\left[\frac{1}{3}{\eta_{m-1}}^2 + \frac{1}{3}{\eta_m}^2 + \frac{1}{3}\eta_{m-1}\eta_m\right] + \frac{1}{\rho_1}(z_1 - y_1)^2 + \cdots + \frac{1}{\rho_m}(z_m - y_m)^2 + \lambda_1(\eta_1 - f''(a)) + \cdots + \lambda_i\left[\left(\frac{z_{i-1}}{h_{i-1}} - \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}}\right)\right) z_i + \frac{z_{i+1}}{h_i} - \frac{1}{6}(h_{i-1}\eta_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\eta_i + h_i\eta_{i+1})\right] + \cdots + \lambda_{m-1}\left[\left(\frac{z_{m-2}}{h_{m-2}} - \left(\frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-3}}\right)\right) z_{m-2} + \frac{z_m}{h_{m-1}} - \frac{1}{6}(h_{m-2}\eta_{m-2} + 2(h_{m-2} + h_{m-1})\eta_{m-1} + h_{m-1}\eta_m)\right] + \lambda_m(\eta_m - f''(b))$$

$$\forall \qquad i = 2, \dots, m-1.$$

Operando el funcional $\frac{dJ_a(s)}{d\lambda}$ se obtiene el sistema de ecuaciones ampliado

$$\tilde{A}\eta = 6\hat{H}z + F,$$

donde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2}+h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h_1} & (-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}) & \frac{1}{h_2} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{h_2} & (-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \frac{1}{h_{m-2}} & (-\frac{1}{h_{m-2}} - \frac{1}{h_{m-1}}) & \frac{1}{h_{m-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} f''(a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f''(b) \end{bmatrix}$$

Y como se puede observar con facilidad la matriz A estrictamente diagonal dominante, y por lo tanto invertible.

Realizando la siguiente operación al funcional $\frac{dJ_a(s)}{d\eta}$, obtenemos m ecuaciones más,

$$\frac{2}{3}h_1\eta_1 + \frac{h_1}{3}\eta_2 + \lambda_1 - \frac{h_1}{6}\lambda_2 = 0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{h_i}{3}\eta_{i-1} + \frac{2}{3}(h_{i-1}+h_i)\eta_i + \frac{h_i}{3}\eta_{i+1} - \frac{1}{3}(h_{i-1}+h_i)\lambda_i - \frac{h_i}{6}\lambda_{i+1} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{h_i}{3}\eta_{m-2} + \frac{2}{3}(h_{m-2}+h_{m-1})\eta_{m-1} + \frac{h_{m-1}}{3}\eta_m - \frac{1}{3}(h_{m-2}+h_{m-1})\lambda_{m-1} - \frac{h_{m-2}}{6}\lambda_{m-1} = 0,$$
$$\frac{2}{3}h_{m-1}\eta_m + \frac{h_{m-1}}{3}\eta_{m-1} + \lambda_m - \frac{h_{m-1}}{6}\lambda_{m-1} = 0,$$
$$\forall \qquad i = 2, \dots, m-1.$$

Matricialmente puede ser expresado como

$$U\,\eta = V\lambda,$$

donde

$$U=\begin{bmatrix} \frac{2h_1}{3} & \frac{h_1}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{h_1}{3} & \frac{2(h_1+h_2)}{3} & \frac{h_2}{3} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{h_{m-2}}{3} & \frac{2(h_{m-2}+h_{m-1})}{3} & \frac{h_{m-1}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{3} & \frac{2h_{m-1}}{3} \end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix} -1 & \frac{h_1}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{(h_1+h_2)}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \frac{h_2}{6} & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{h_{m-2}}{6} & \frac{2(h_{m-2}+h_{m-1})}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & -1 \end{bmatrix}$$

Siendo la matriz V invertible, ya que su determinante es distinto de cero, como se comprueba fácilmente de desarrollar dicho determinante por la primera columna y posteriormente por la última. La matriz a la que se llega resulta ser estrictamente diagonal dominante y por tanto invertible y por tanto con determinante distinto de cero.

Derivando el funcional respecto de los z_i, $\dfrac{dJ_a(s)}{dz}$,

$$\frac{2}{\rho_1}(z_1 - y_1) + \frac{\lambda_2}{h_1} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{2}{\rho_i}(z_i - y_i) - (\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i})\lambda_i + \frac{\lambda_{i+1}}{h_i} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{2}{\rho_{m-1}}(z_{m-1} - y_{m-1}) - (\frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}})\lambda_{m-1} + \frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-2}} = 0,$$
$$\frac{2}{\rho_m}(z_m - y_m) + \frac{\lambda_{m-1}}{h_{m-1}} = 0,$$
$$\forall \quad i = 2, \dots, m-1.$$

Despejando z,

$$z_1 = y_1 + \frac{\rho_1}{2}\left(-\frac{\lambda_2}{h_1}\right),$$

$$\vdots$$

$$z_i = y_i + \frac{\rho_i}{2}\left(\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)\lambda_i - \frac{\lambda_{i+1}}{h_i}\right),$$

$$\vdots$$

$$z_{m-1} = y_{m-1} + \frac{\rho_{m-1}}{2}\left(\left(\frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}}\right)\lambda_{m-1} - \frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-2}}\right),$$

$$z_m = y_m + \frac{\rho_m}{2}\left(-\frac{\lambda_{m-1}}{h_{m-1}}\right),$$

$$\forall \qquad i = 2, \dots, m-1.$$

Matricialmente,

$$Z = Y + \frac{1}{2}\rho \, \mathrm{J} \, \lambda,$$

donde,

$$\mathrm{J}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{h_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h_{m-2}} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{h_{m-2}} & \frac{1}{h_{m-2}}+\frac{1}{h_{m-1}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{m-1}} & 0 \end{bmatrix}.$$

4.10.3Caso CI=3, CD=3

Para este caso las ecuaciones adicionales se obtienen considerando que la función a suavizar es periódica de periodo $T = b - a$, de modo que aplicando las condiciones de tercer tipo se obtendrán las siguientes ecuaciones:

$$\eta_1 - \eta_m = 0,$$
$$6\left(\frac{-z_1 + z_2}{h_1} - \frac{-z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}}\right) = h_1(2\eta_1 + \eta_2) + h_{m-1}[\eta_{m-1} + 2\eta_m].$$

Y necesitamos que los datos cumplan las condiciones de compatibilidad

$$\rho_1 = \rho_{m,}$$
$$y_1 = y_m.$$

Al desarrollar el funcional para las condiciones de contorno establecidas:

$$J_a(S) = h_1\left[\frac{1}{3}{\eta_1}^2 + \frac{1}{3}{\eta_2}^2 + \frac{1}{3}\eta_1\eta_2\right] + \cdots + h_{m-1}\left[\frac{1}{3}{\eta_{m-1}}^2 + \frac{1}{3}{\eta_m}^2 + \frac{1}{3}\eta_{m-1}\eta_m\right] + \frac{1}{\rho_1}(z_1 - y_1)^2 + \cdots + \frac{1}{\rho_m}(z_m - y_m)^2 + \lambda_1\big((\eta_1 - \eta_m)\big) + \lambda_2\left[\left(\frac{z_1}{h_1} - \left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_1}\right)\right)z_2 + \frac{z_3}{h_2} - \frac{1}{6}\big(h_1\eta_1 + 2(h_1 + h_2)\eta_2 + h_2\eta_3\big)\right] + \lambda_{i+1}\left[\left(\frac{z_i}{h_i} - \left(\frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_i}\right)\right)z_{i+1} + \frac{z_{i+2}}{h_{i+1}} - \frac{1}{6}\big(h_i\eta_i + 2(h_i + h_{i+1})\eta_{i+1} + h_{i+1}\eta_{i+2}\big)\right] + \cdots + \lambda_{m-1}\left[\left(\frac{z_{m-2}}{h_{m-2}} - \left(\frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-3}}\right)\right)z_{m-2} + \frac{z_m}{h_{m-1}} - \frac{1}{6}\big(h_{m-2}\eta_{m-2} + 2(h_{m-2} + h_{m-1})\eta_{m-1} + h_{m-1}\eta_m\big)\right] + \lambda_m\left(\frac{-z_1+z_2}{h_1} - \frac{-z_{m-1}+z_m}{h_{m-1}} - \frac{h_1}{6}(2\eta_1 + \eta_2) - \frac{h_{m-1}}{6}[\eta_{m-1} + 2\eta_m]\right) + \lambda_{m+1}(z_1 - z_m)$$

$$\forall \quad i = 2,3,\dots,m-3.$$

Operando el funcional $\frac{dJ_a(s)}{d\lambda}$ se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\tilde{A}\eta = 6\ddot{H}z + F,$$

donde

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{m-2} & 2(h_{m-2}+h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 2h_1 & h_1 & \dots & 0 & h_{m-1} & 2h_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{H}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h_1} & (-\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}) & \frac{1}{h_2} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{h_2} & (-\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h3}) & \frac{1}{h_3} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \frac{1}{h_{m-2}} & (-\frac{1}{h_{m-2}}-\frac{1}{h_{m-1}}) & \frac{1}{h_{m-1}} \\ -\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_{m-1}} & \frac{1}{h_1} & 0 & \dots & \frac{1}{h_{m-1}} & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz $\tilde{A}$ es invertible ya que su determinante es distinto de cero. Esto se comprueba sumando a la última columna la primera y desarrollando el determinante por la primera fila, ya que se llega a una matriz estrictamente diagonal dominante que como se sabe tiene determinante distinto de cero.

Realizando la siguiente operación al funcional $\frac{dJ_a(s)}{d\eta}$, obtenemos m ecuaciones más

$$\frac{2}{3}h_1\eta_1 + \frac{h_1}{3}\eta_2 + \lambda_1 - \frac{h_1}{6}\lambda_2 - \lambda_m\frac{h_1}{3} = 0,$$
$$\frac{h_1}{3}\eta_1 + \frac{2}{3}(h_1+h_2)\eta_2 + \frac{h_2}{3}\eta_3 - \frac{1}{3}(h_1+h_2)\lambda_2 - \frac{h_2}{6}\lambda_3 - \lambda_m\frac{h_1}{6} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{h_{i-1}}{3}\eta_{i-1} + \frac{2}{3}(h_{i-1}+h_i)\eta_i + \frac{h_i}{3}\eta_{i+1} - \frac{h_{i-1}}{6}\lambda_{i-1} - \frac{1}{3}(h_{i-1}+h_i)\lambda_i - \frac{h_i}{6}\lambda_{i+1} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{h_{m-2}}{3}\eta_{m-2} + \frac{2}{3}(h_{m-2}+h_{m-1})\eta_{m-1} + \frac{h_{m-1}}{3}\eta_m - \frac{h_{m-2}}{6}\lambda_{m-2} - \frac{1}{3}(h_{m-2}+h_{m-1})\lambda_{m-1} - \lambda_m\frac{h_{m-1}}{6} = 0,$$
$$-\lambda_1 + \frac{2}{3}h_{m-1}\eta_m + \frac{h_{m-1}}{3}\eta_{m-1} - \frac{h_{m-1}}{6}\lambda_{m-1} - \lambda_m\frac{h_{m-1}}{3} = 0,$$
$$\forall \qquad i = 3, \ldots, m-2.$$

Matricialmente puede ser expresado como

$$U\,\eta = V\lambda,$$

donde

$$U= \begin{bmatrix} \frac{2h_1}{3} & \frac{h_1}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{h_1}{3} & \frac{2(h_1+h_2)}{3} & \frac{h_2}{3} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{h_{m-2}}{3} & \frac{2(h_{m-2}+h_{m-1})}{3} & \frac{h_{m-1}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{3} & \frac{2h_{m-1}}{3} \end{bmatrix}$$

$$
V=\begin{bmatrix}
-1 & \frac{h_1}{6} & 0 & \dots & 0 & \frac{h_1}{3} \\
0 & \frac{(h_1+h_2)}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \ddots & \frac{h_1}{6} \\
\vdots & \frac{h_2}{6} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \frac{h_{m-2}}{6} & \frac{2(h_{m-2}+h_{m-1})}{3} & \frac{h_{m-1}}{6} \\
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & \frac{h_{m-1}}{3}
\end{bmatrix}
$$

La matriz V es invertible ya que su determinante es distinto de cero. Esto se comprueba sumando a la última fila la primera y desarrollando el determinante por la primera columna, ya que se llega a una matriz estrictamente diagonal dominante que como se sabe tiene determinante distinto de cero.

Derivando el funcional, respecto de los z_i, $\frac{dJ_a(s)}{dz}$,

$$
\begin{gathered}
\frac{2}{\rho_1}(z_1-y_1)+\frac{\lambda_2}{h_1}-\frac{\lambda_m}{h_1}+\lambda_{m+1}=0, \\
\frac{2}{\rho_2}(z_2-y_2)-(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2})\lambda_2+\frac{\lambda_3}{h_2}+\frac{\lambda_m}{h_1}=0, \\
\vdots \\
\frac{2}{\rho_i}(z_i-y_i)+\lambda_{i-1}\frac{1}{h_{i-1}}-(\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i})\lambda_i+\frac{\lambda_{i+1}}{h_i}=0, \\
\vdots \\
\frac{2}{\rho_{m-1}}(z_{m-1}-y_{m-1})-(\frac{1}{h_{m-2}}+\frac{1}{h_{m-1}})\lambda_{m-1}+\frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-2}}+\lambda_m\frac{1}{h_{m-1}}=0, \\
\frac{2}{\rho_m}(z_m-y_m)+\frac{\lambda_{m-1}}{h_{m-1}}-\frac{\lambda_m}{h_{m-1}}-\lambda_{m+1}=0, \\
\forall \quad i=3,\dots,m-2.
\end{gathered}
$$

De la primera y la última ecuación y de la condición $z_1 = z_m$, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\frac{2}{\rho_1}(z_1 - y_1) + \frac{\lambda_2}{h_1} - \frac{\lambda_m}{h_1} + \lambda_{m+1} = 0,$$
$$\frac{2}{\rho_m}(z_m - y_m) + \frac{\lambda_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} - \lambda_{m+1} = 0,$$
$$z_1 = z_m,$$

Restando a la primera ecuación la segunda, sustituyendo la tercera y teniendo en cuenta las condiciones de compatibilidad se obtiene el valor de λ_{m+1}

$$2\lambda_{m+1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_m}{h_1} - \frac{\lambda_{m-1} - \lambda_m}{h_{m-1}},$$
$$\lambda_{m+1} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_2 - \lambda_m}{h_1} - \frac{1}{2}\frac{\lambda_{m-1} - \lambda_m}{h_{m-1}}.$$

Sustituyendo este valor de λ_{m+1}en el sistema de ecuaciones obtenido derivando el funcional respecto de los z_i

$$\frac{2}{\rho_1}(z_1 - y_1) + \frac{3}{2}\frac{\lambda_2 - \lambda_m}{h_1} - \frac{1}{2}\frac{\lambda_{m-1} - \lambda_m}{h_{m-1}} = 0,$$
$$\frac{2}{\rho_2}(z_2 - y_2) - (\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2})\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{h_2} + \frac{\lambda_m}{h_1} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{2}{\rho_i}(z_i - y_i) + \lambda_{i-1}\frac{1}{h_{i-1}} - (\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i})\lambda_i + \frac{\lambda_{i+1}}{h_i} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{2}{\rho_{m-1}}(z_{m-1} - y_{m-1}) - (\frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}})\lambda_{m-1} + \frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-2}} + \lambda_m\frac{1}{h_{m-1}} = 0,$$
$$\frac{2}{\rho_m}(z_1 - y_m) + \frac{3}{2}\frac{\lambda_{m-1} - \lambda_m}{h_{m-1}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda_2 - \lambda_m}{h_1} = 0,$$
$$\forall \qquad i = 3, \dots, m-2.$$

Despejando z,

$$
\begin{gathered}
z_1 = y_1 - \frac{\rho_1}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{\lambda_2 - \lambda_m}{h_1} - \frac{1}{2}\frac{\lambda_{m-1} - \lambda_m}{h_{m-1}}\right),\\
z_2 = y_2 - \frac{\rho_2}{2}\left(-\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{h_2} + \frac{\lambda_m}{h_1}\right),\\
\vdots\\
z_i = y_i - \frac{\rho_i}{2}\left(-\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)\lambda_i + \frac{\lambda_{i+1}}{h_i} + \frac{\lambda_{i-1}}{h_{i-1}}\right),\\
\vdots\\
z_{m-1} = y_{m-1} - \frac{\rho_{m-1}}{2}\left(-\left(\frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}}\right)\lambda_{m-1} + \frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-2}} + \lambda_m\frac{1}{h_{m-1}}\right),\\
z_m = z_1 = y_m - \frac{\rho_m}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{\lambda_{m-1} - \lambda_m}{h_{m-1}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda_2 - \lambda_m}{h_1}\right),\\
\forall \qquad i = 3, \dots, m-2.
\end{gathered}
$$

Matricialmente puede expresarse como

$$Z = Y + \frac{1}{2}\rho\, \mathrm{J}\, \lambda,$$

donde

$$
\mathrm{J}=\begin{bmatrix}
0 & -\frac{1}{2h_1} & 0 & \cdots & -\frac{1}{h_{m-1}} & -\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_{m-1}}\\
0 & \frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h_1}\\
0 & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3} & \ddots & 0 & \vdots\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h_{m-2}} & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{h_{m-2}} & \frac{1}{h_{m-2}}+\frac{1}{h_{m-1}} & -\frac{1}{h_{m-1}}\\
0 & -\frac{1}{2h_1} & \cdots & 0 & -\frac{1}{h_{m-1}} & \frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_{m-1}}
\end{bmatrix}.
$$

4.10.4 Otros casos.

Existen otras posibles combinaciones además de las ya estudiadas en este capítulo, sin embargo, puesto que serán las mismas sólo que variando una de las dos ecuaciones frontera, se desarrollarán de igual modo demostrando que son matrices estrictamente diagonales dominantes y según el enunciado del lema de Hadamard serán por tanto, invertibles y su sistema tendrá solución compatible determinada.