



8- CÁLCULO ESTRUCTURAL POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM)

8.3- Modelización matemática

8.3.1-Obtención de constantes elásticas de una lámina por el programa

Regla de las mezclas

Modelo de Halphin-Tsai

8.3.2-Macromecánica de una lámina.

8.3.3.- Macromecánica del laminado.

8.3.4- Modelización matemática del comportamiento de las estructuras sándwich

Modelo de Reissner Mindlin

Aplicación del Método de los Elementos Finitos (MEF)

8.3.5- Desarrollo de una interfaz de usuario para el programa RamSeries

8.3.6-Validación del Método

8.3.7- Conclusiones

8.4-Peculiaridades del programa *Ram series* ®

8.4.1- Solver

8.4.2-Generación de malla

8.4.3-Presiones principales

8.4.5-Von Misses

8.4.6-Normativa de referencia del programa Ramseries



8.3- Modelización matemática

8.3.1-Obtención de constantes elásticas de una lámina por el programa

Regla de las mezclas

Para producir la expresión matricial del material y por tanto las constantes elásticas de cualquier laminado, es necesario determinar E_1 , E_2 , ν_{12} (ó ν_{21}) y G_{12} para una lámina unidireccional. Se trata de homogeneizar el material a nivel microscópico de manera que se pueda tratar la lámina como un material homogéneo ortótropo. Esto se realiza mediante el estudio micromecánico de la lámina. El valor de las constantes elásticas depende de:

E_f : módulo de Young de la fibra

E_m : módulo de Young de la matriz

ν_f : cociente de Poisson de la fibra

ν_m : coeficiente de Poisson de la matriz

V_f : relación entre volumen de fibra y volumen total de la lámina

V_m : relación entre volumen de la matriz y volumen total de la lámina

Determinación del espesor

$$e(\text{mm}) = \frac{\omega}{(1 - \mu) * \rho_f * \rho_m * 1000} \left[\frac{\rho_f}{W_f} - (\rho_f - \rho_m) \right]$$

Determinación de E_1

$$E_1 = (E_f - E_m)V_f + E_m$$

Determinación de ν_{12}

$$\nu_{12} = (\nu_f - \nu_m)V_f + \nu_m$$

Determinación de E_2

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{E_f E_m}{(V_f E_m + V_m E_f)} = \frac{E_f E_m}{E_m V_f + E_f (1 - V_f)} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}$$

Determinación de G_{12}

$$G_{12} = \frac{1}{\frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m}} = \frac{G_f G_m}{V_f G_m + V_m G_f} = \frac{G_f G_m}{V_f G_m + (1 - V_f) G_f}$$



El programa ofrece otras formulaciones obtenidas empíricamente, como las obtenidas en el modelo de Halphin-Tsai.

Modelo de Halphin-Tsai: Módulo cortante interlaminar

$$G_{23} = G_m \frac{V_f + \eta_{23}(1 - V_f)}{\eta_{23}((1 - V_f) + V_f G_m / G_m)} \quad ; \quad \eta_{23} = \frac{3 - 4\nu_m + G_m / G_f}{4(1 - \nu_m)}$$

Para el módulo de cortante G_{13} se suele asumir con relativa seguridad en materiales ortótropos, que $G_{12} = G_{13}$.

La ecuación del módulo de resistencia transversal es:

$$\frac{E_2}{E_m} = \frac{1 + \xi\eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad ; \quad \eta = \frac{(E_f / E_m) - 1}{(E_f / E_m) + \xi}$$

La ecuación de Halphin-Tsai para el módulo cortante en el plano G_{12} es:

$$\frac{G_{12}}{G_m} = \frac{1 + \xi\eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad ; \quad \eta = \frac{(G_f / G_m) - 1}{(G_f / G_m) + \xi}$$

$$\xi = 1 + 40V_f^{10}$$



8.3.2- Macromecánica de una lámina.

Las fibras están orientadas en direcciones definidas y no de una manera aleatoria, por ejemplo en una dirección o en direcciones perpendiculares, o a $\pm 45^\circ$, figura 3.

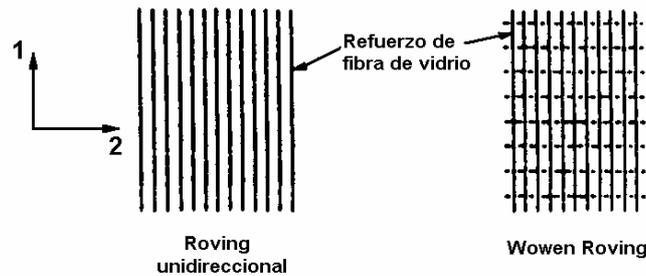


Figura 3.- Orientación de fibras de refuerzo en laminados ortotrópicos.

En el análisis de material ortotrópico los subíndices representan lo siguiente:

- Subíndice 1 para la dirección principal del material, la única en el caso de fibras en material unidireccional.
- Subíndice 2 para la dirección perpendicular a la principal.

Esta notación no debe confundirse con la que corresponde a las de tensiones principales. Cuando se aplica una tensión en ambas direcciones de manera independiente, se produce un alargamiento de las fibras en esa dirección y una contracción del material en la dirección perpendicular, ver figura 4.

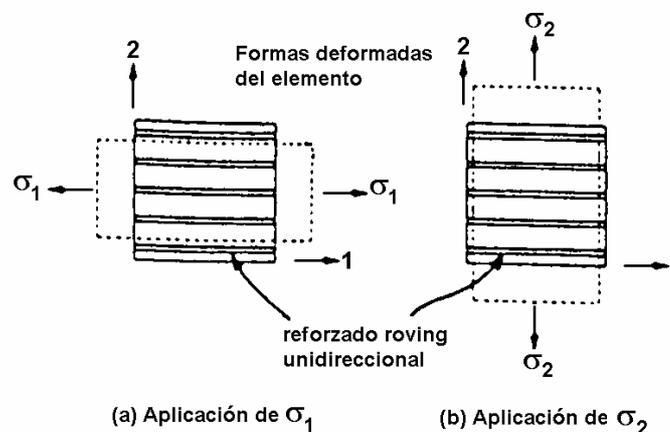


Figura 4.- Efecto de la aplicación de tensiones a materiales ortotrópicos.



Si E_1 es el Módulo de Young del material en la dirección 1 y ν_{12} es el coeficiente de Poisson del material, se cumple que el alargamiento en la dirección principal es:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}$$

y en la dirección perpendicular es:

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1}$$

De forma similar, la aplicación de una tensión en la dirección 2 causa una deformación en esa dirección cuyo valor es:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

y en la dirección perpendicular 1:

$$\varepsilon_1 = -\nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2}$$

Si se aplican las tensiones de forma simultánea, y puesto que las deformaciones son pequeñas, se cumple que las deformaciones en las direcciones 1 y 2 valen simultáneamente:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2}$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1}$$

y puesto en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$$

La matriz es simétrica, por lo que se cumple que:



$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$$

La matriz del material se puede obtener invirtiendo la anterior:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

Efecto de la tensión cortante

El módulo de rigidez del material ortotrópico con respecto a las direcciones 1-2 es G_{12} . Por tanto, $\tau_{12} = G_{12}\gamma_{12}$.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

El valor de G_{12} es distinto de $\frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}$ y de $\frac{E_2}{2(1 + \nu_{21})}$, y no es igual, como ocurre en el caso de materiales isotrópicos. G_{12} es una constante elástica separada, independiente de los valores de Módulo de Young y de los coeficientes de Poisson.

Una lámina de material ortotrópico está completamente definida por cuatro constantes elásticas independientes, E_1 , E_2 , ν_{12} (o ν_{21}) y G_{12} .

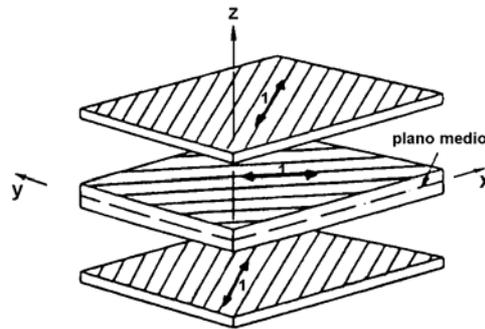


Figura 5.- Vista general explosionada de un laminado simétrico de tres capas.

Si un laminado está sometido a una carga por unidad de longitud en el borde de N_x , N_y y N_{xy} , se producen unas tensiones σ_x , σ_y y τ_{xy} . Para determinar las deformaciones es necesario conocer las constantes elásticas en el sistema de referencia x-y, E_x , E_y , ν_{xy} y G_{xy} . Es claro que cada lámina contribuirá a los valores de E_x , E_y , ν_{xy} y G_{xy} , así como que la dirección principal de cada lámina no está alineada con la dirección x del sistema de referencia, figura 5. Es necesario transformar las tensiones y deformaciones en las direcciones 1-2 a tensiones y deformaciones en las direcciones x-y. De la figura 6 se obtienen las relaciones entre tensiones en ambos sistemas de referencia.

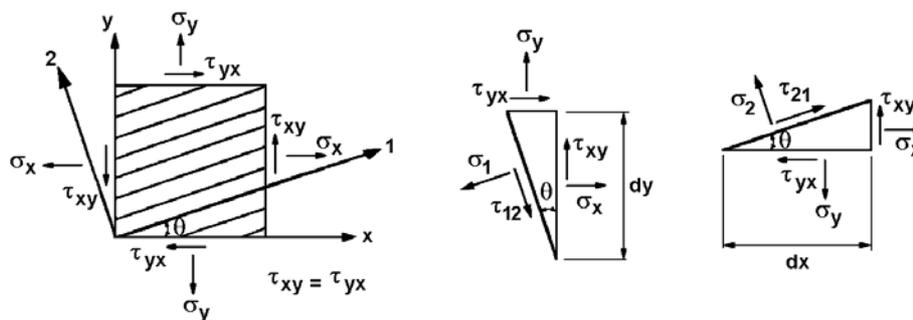


Figura 6.- Relación entre sistemas de referencia.

De la figura central se obtiene el valor de σ_1 :

$$\frac{\sigma_1 dy}{\cos \theta} = (\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) dy + (\sigma_y \sin \theta + \tau_{yx} \cos \theta) dy \operatorname{tg} \theta$$

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta + \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \operatorname{tg} \theta \cos \theta + \tau_{yx} \cos^2 \theta \operatorname{tg} \theta =$$

$$= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$



De la figura de la derecha se obtienen los valores de σ_2 y τ_{12} :

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_2 dx}{\cos \theta} &= (\sigma_x \sin \theta - \tau_{xy} \cos \theta) dx \operatorname{tg} \theta + (\sigma_y \cos \theta - \tau_{yx} \sin \theta) dx \\ \sigma_2 &= \sigma_x \sin \theta \cos \theta \operatorname{tg} \theta - \tau_{xy} \sin \theta \cos^2 \theta \operatorname{tg} \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{yx} \sin \theta \cos \theta = \\ &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{12} dy}{\cos \theta} &= (-\sigma_x \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta) dy + (\sigma_y \cos \theta - \tau_{yx} \sin \theta) dy \operatorname{tg} \theta \\ \tau_{12} &= -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \cos^2 \theta + \sigma_y \cos \theta \cos \theta \operatorname{tg} \theta - \tau_{yx} \sin \theta \cos \theta \operatorname{tg} \theta = \\ &= -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}$$

Poniendo las expresiones en forma matricial, las tensiones en los ejes del material son:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Invirtiendo la matriz, se obtienen las tensiones en los ejes globales:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

Análogamente, las deformaciones se transforman de la misma manera:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

Relacionando estas ecuaciones y:



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q][T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \bar{Q}[\varepsilon]$$

donde los valores de la matriz \bar{Q} se obtienen realizando el producto matricial

$$[T]^{-1} [Q][T]:$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{13} = \bar{Q}_{31} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{23} = \bar{Q}_{32} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{33} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{33} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned}$$

y:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad ; \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad ; \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad ; \quad Q_{33} = G_{12}$$

son funciones de las constantes elásticas unidireccionales vistas anteriormente. La matriz del material para todo el laminado se puede obtener sumando las matrices transformadas de cada capa.

Los cálculos realizados hasta ahora son válidos para el caso de tensión plana. Esta es la hipótesis que se aplica en la teoría clásica de placas laminadas. Sin embargo, a la hora de aplicar teorías más complejas como la de deformación a cortante de primer orden, es necesario considerar, además, los esfuerzos tangenciales en los otros ejes de la lámina. Para considerar el esfuerzo cortante interlaminar, es necesario complementar las ecuaciones de tensión plana con las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{23} & 0 \\ 0 & G_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & 0 \\ 0 & Q_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} = [Q^*] \begin{bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix}$$

donde Q^* es la matriz de rigidez interlaminar.



La matriz de transformación para las tensiones interlaminares es:

$$[T^*] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

De esta forma, se pueden relacionar las tensiones en los ejes locales de la lámina y los globales:

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = [T^*]^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} = [T^*]^{-1} [Q^*] \begin{bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} = [T^*]^{-1} [Q^*] [T^*] \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{12}^* \\ \bar{Q}_{12}^* & \bar{Q}_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \bar{Q}^* \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

donde los valores de \bar{Q}^* son:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^* &= Q_{11}^* \cos^2 \theta + Q_{22}^* \text{sen}^2 \theta \\ \bar{Q}_{22}^* &= Q_{11}^* \text{sen}^2 \theta + Q_{22}^* \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12}^* &= (Q_{22}^* - Q_{11}^*) \text{sen } \theta \cos \theta \end{aligned}$$

8.3.3.- Macromecánica del laminado

Una vez estudiado el comportamiento de una lámina y su caracterización micromecánica tal y como se verá posteriormente, se dispone de los valores necesarios para realizar el análisis completo del comportamiento macromecánico del laminado. Se pasará de un material laminar no homogéneo, en el sentido de que cada capa puede tener distintas propiedades, a un material equivalente homogéneo y ortótropo. El análisis de laminados se realiza a partir del modelo de la teoría clásica de placas laminadas, cuyas dos hipótesis son:

- Una sección recta y perpendicular a la superficie media permanece recta después de que la placa se deforme, figura 7. Esta suposición se basa en observaciones experimentales, e implica que las deformaciones unitarias tangenciales son constantes a través del espesor. Esta hipótesis es válida para laminados finos y es una buena aproximación en la mayor parte de los casos, excepto cuando el laminado es grueso y las capas tienen muy diferente rigidez a cortante.



- La longitud de la línea AD permanece constante, figura 7. Esto implica que la deformación unitaria normal es 0. Esta hipótesis se basa también en observaciones experimentales. Es una buena hipótesis que se satisface en la mayor parte de los casos, excepto para laminados muy gruesos.

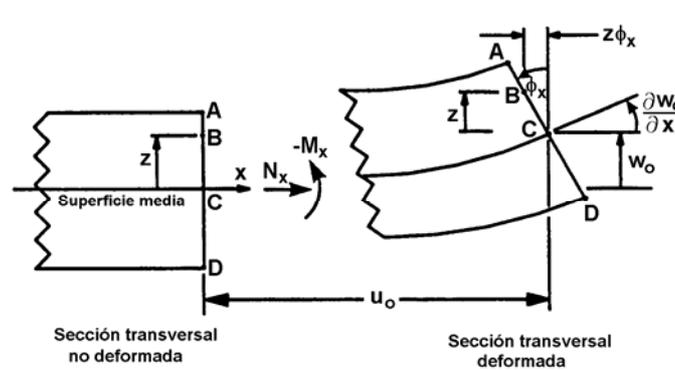


Figura 7.- Geometría de deformación en el plano x-z.

Se considera el sistema de coordenadas de las figuras 7 y 8, donde la superficie media está situada a la mitad del espesor de la plancha.

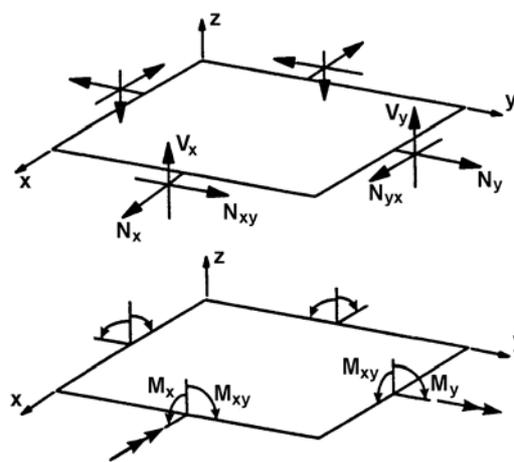


Figura 8.- Fuerzas y momentos resultantes en una placa plana.

Usando la primera hipótesis anterior, los desplazamientos en cada punto a través del espesor son:



$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y)$$

donde $u(x,y,z)$ y $v(x,y,z)$ son los desplazamientos de cada punto (x,y,z) a lo largo de la direcciones "x" e "y" respectivamente. Las funciones u_0 , v_0 , w_0 , representan los desplazamientos de cada punto (x,y) de la superficie media de la placa, Las funciones $\Phi_x(x,y)$ y $\Phi_y(x,y)$ son los giros en sentido antihorario de la normal a la superficie media en cada punto de la misma, línea AD de la figura 7.

Utilizando la segunda hipótesis anterior, y sabiendo que los valores de Φ_x y Φ_y son muy pequeños, la deformación transversal es la misma para cada punto a lo largo del espesor de la plancha:

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

Las variables independientes en las expresiones anteriores son, $u_0(x,y)$, $v_0(x,y)$, $w_0(x,y)$, $\Phi_x(x,y)$ y $\Phi_y(x,y)$. El hecho de que todas sean independientes de la coordenada z es la principal característica de la teoría clásica de placas, en contraste con el problema elástico tridimensional, en donde las variables u , v y w dependen de las tres coordenadas x , y , z .

Las deformaciones unitarias en cada punto de la placa son función de los desplazamientos:

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

que se pueden expresar en función de los valores de u , v y w anteriores, como:



$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y, z) &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y(x, y, z) &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz}(x, y, z) &= -\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \gamma_{xz}(x, y, z) &= -\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\end{aligned}$$

Como se observa, γ_{yz} y γ_{xz} son independientes de la coordenada "z", es decir, son constantes a través del espesor, debido a la primera hipótesis. Las tres primeras ecuaciones se pueden expresar matricialmente como:

$$\varepsilon = \varepsilon_m + z \varepsilon_f \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

donde ε_x^0 , ε_y^0 , γ_{xy}^0 son las deformaciones unitarias de la superficie media. Con esta expresión, las deformaciones en cualquier punto de la placa son conocidas una vez determinadas la deformación y la curvatura de la superficie media. Conocidas las deformaciones en un punto de la placa, es factible conocer las tensiones. Para ello, sólo hay que identificar la capa en la que se encuentra el punto y aplicar la relación matricial vista en micromecánica de una lámina:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidas las tensiones en los ejes globales, como se ha visto es sencillo convertirlas a ejes locales de cada lámina. En estos ejes locales es posible aplicar los criterios de rotura.



Los valores de ε_x^0 , ε_y^0 , γ_{xy}^0 , de las curvaturas de flexión, y de torsión, se definen como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0(x, y) &= \frac{\partial u_0}{\partial x} & \kappa_x(x, y) &= -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0(x, y) &= \frac{\partial v_0}{\partial y} & \kappa_y(x, y) &= -\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0(x, y) &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} & \kappa_{xy}(x, y) &= -\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

Las deformaciones unitarias interlaminares por cortante son la cuarta y quinta ecuaciones de partida anteriores:

$$\begin{aligned}\gamma_{yz}(x, y, z) &= -\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \gamma_{xz}(x, y, z) &= -\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\end{aligned}$$

Por conveniencia se separan las deformaciones unitarias en deformaciones en el plano ($\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$) y curvaturas ($\kappa_x^0, \kappa_y^0, \kappa_{xy}^0$), de manera que si sólo actúan fuerzas en el plano, sólo se inducen las deformaciones en el mismo y no es necesario considerar las curvaturas. Si sólo se aplican momentos o cargas transversales, sólo es necesario calcular las curvaturas.

La distribución lineal de tensiones en una capa del laminado, figura 9, es causada por la flexión y por tanto por la curvatura, y el término constante es causado por el alargamiento. La distribución de tensiones es lineal a través del espesor porque las deformaciones unitarias son lineales a través del mismo, y la ecuación constitutiva (rigidez) es constante a través del espesor de cada capa.

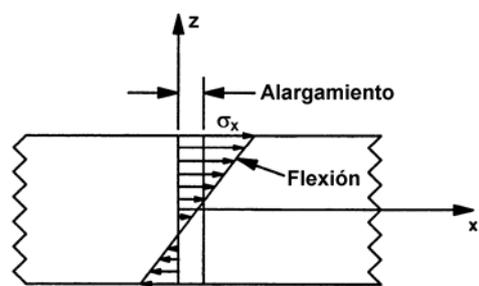


Figura 9.- Distribución de tensiones en una capa debidas a flexión y alargamiento.



Mientras las deformaciones unitarias permanecen lineales para toda la placa laminada, las tensiones son lineales por capas, figura 10, porque las rigideces son distintas en cada una de ellas, ya que lo normal es que el laminado esté compuesto por capas de características distintas.

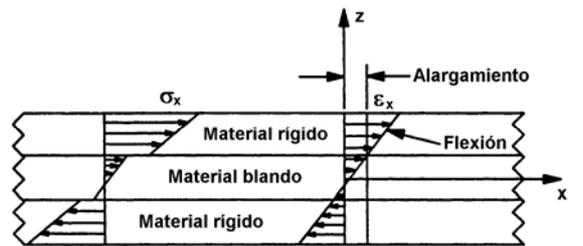


Figura 10.- Deformaciones unitarias y tensiones debidas a flexión y alargamiento de placa laminada.

Si el espesor de la placa es mucho menor que las otras dos dimensiones de la misma, las deformaciones por cortante τ_{xz} y τ_{yz} se pueden despreciar, y los giros de la línea normal AD de la figura 7, son iguales a las pendientes de la superficie media:

$$\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

Sustituyendo en las expresiones de las curvaturas, quedan:

$$\kappa_x(x, y) = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$\kappa_y(x, y) = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

$$\kappa_{xy}(x, y) = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

Estas curvaturas, junto con las deformaciones unitarias $(\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0)$, constituyen la base de la teoría clásica de placas, es decir, supone que τ_{xz} y τ_{yz} son nulas. Cuando se



tiene en cuenta sus valores, la teoría correspondiente se denomina teoría de deformación por cortante de primer orden. La teoría clásica da buenos resultados para placas isotrópicas (acero, aluminio), porque estos materiales son muy rígidos a cortante $G \approx E/2.5$, por lo que la deformación por cortante, si no es cero, es muy pequeña. Sin embargo, los materiales compuestos tienen bajo módulo a cortante, $G < E/10$, y requieren tener en cuenta la deformación transversal por cortante.

Para realizar el análisis completo del laminado hay que obtener estas deformaciones, y para ello, hay que conocer la relación entre las deformaciones y las fuerzas y momentos aplicados, que son las variables de entrada conocidas. Es necesario integrar las tensiones a través del espesor para obtener sus resultantes. Al realizar esto, se consigue pasar de nuevo de un material laminar a un material homogéneo.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz$$

$$\begin{bmatrix} V_y \\ V_x \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} dz$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz$$

donde N_x , N_y y N_{xy} son las fuerzas axiales y cortante en el plano por unidad de longitud a lo largo del borde de la placa, V_x y V_y son las fuerzas cortantes por unidad de longitud y M_x , M_y y M_{xy} son los momentos por unidad de longitud, según se ve en la figura 8.

Las fuerzas y momentos resultantes se calculan realizando la integración de forma discontinua a lo ancho de N capas, ya que las tensiones en cada capa son lineales, pero no son continuas de una capa a otra:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz$$



$$\begin{bmatrix} V_y \\ V_x \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}^k dz$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^k z dz$$

donde z_k es la coordenada de la superficie exterior de la capa k -ésima, figura 11.

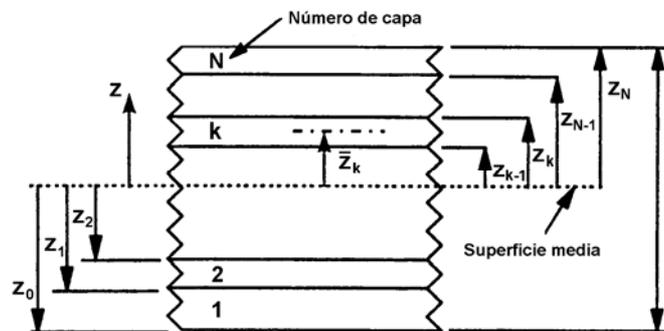


Figura 11.- Geometría de un laminado de N capas.

Sustituyendo las tensiones por su relación con las deformaciones, queda:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^k dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} dz + \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} dz$$

Se realiza de forma análoga para las fuerzas cortantes y momentos flectores. Al ser la matriz \bar{Q} constante para cada capa y ser las deformaciones y curvaturas de la superficie media independientes de la coordenada "z", es posible realizar una operación de sumatorio sobre sus componentes, mientras que sólo se realiza la integración sobre el espesor de cada capa.

En forma matricial extensa y compacta se puede expresar:



$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_y \\ V_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{bmatrix}$$

Las matrices [A], [B], [D] y [H] se conocen respectivamente como matriz extensional, matriz de acoplamiento, matriz de flexión y matriz de rigidez a cortante. Son simétricas, y los coeficientes se obtienen realizando la integración de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} [N] &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\sigma] dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q} [\varepsilon] dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q} (\varepsilon_m + z\varepsilon_f) dz = \\ &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}(k) \left[\varepsilon_m (z_k - z_{k-1}) + \frac{1}{2} \varepsilon_f (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right] \end{aligned}$$

$$[N] = [A \quad B] \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_f \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k t_k \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k t_k \bar{z}_k \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3$$



$$\begin{aligned}
 [M] &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\sigma] z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q} [\varepsilon] z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q} (\varepsilon_m z + z^2 \varepsilon_f) dz = \\
 &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}(k) \left[\frac{1}{2} \varepsilon_m (z_k^2 - z_{k-1}^2) + \frac{1}{3} \varepsilon_f (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right]
 \end{aligned}$$

$$[M] = [B \quad D] \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_f \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k t_k \bar{z}_k \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k \left(t_k \bar{z}_k^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3$$

De forma similar se obtienen los coeficientes de la matriz [H]:

$$H_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}^*]_k \left[t_k - \frac{4}{t^2} \left(t_k \bar{z}_k^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \right] \quad ; \quad i, j = 1, 2$$

donde \bar{z}_k es la coordenada de la superficie media de la lámina k, figura 11.

Una vez obtenidos los coeficientes de estas matrices, se invierte la matriz global para obtener el vector de deformaciones, que permite obtener las tensiones en cada capa.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N \\ M \\ V \end{bmatrix}$$

A continuación, se resume el proceso completo de cálculo de un elemento laminado:

- A partir de las constantes de fibra y resina se calculan las propiedades de la capa o lámina:

$$\begin{array}{l} E_m, G_m, \nu_m \\ E_f, G_f, \nu_f \end{array} \Rightarrow E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$$



- Obtener los valores de Q ($E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$) y Q^* (G_{23}, G_{13}).

- Obtener los valores $\bar{Q}(Q, \theta)$ y $\bar{Q}^*(Q^*, \theta)$.

- Cálculo de las matrices $[A]$, $[B]$, $[D]$ y $[H]$.

- Obtención de las deformaciones :
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \varepsilon_m + z \varepsilon_f .$$

- Obtención de las tensiones en ejes locales
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \bar{Q} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \bar{Q}\varepsilon ;$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = [\bar{Q}^*] \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \bar{Q}^* \varepsilon_c .$$

- Obtención de las tensiones en los ejes globales del material:
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

- Por último, comparar las tensiones en los ejes del material con las tensiones máximas.

Existen diferentes criterios de fallo, como el de Tsai-Hill y el de Tsai-Wu.



8.3.4- Modelización matemática del comportamiento de las estructuras sándwich

Básicamente existen dos métodos básicos para el análisis de las estructuras sándwich. Los dos métodos tienen en consideración la no linealidad geométrica de la contribución de las fuerzas cortantes en la flecha total. Son el modelo de primer orden (FSDT) y el modelo de mayor grado.

En términos generales, se puede afirmar que es más conveniente utilizar la teoría de primer orden para obtener las deformaciones globales y resolver el problema de estabilidad.

Para la aplicación de la teoría de FSDT el programa se ha basado en el modelo de Reissner Mindlin que supone que las pieles exteriores actúan como membranas cuando sus espesores son despreciables con respecto al espesor del núcleo $h_f \ll h_c$. Se ha de señalar que la teoría de Reissner Mindlin no incluye la compresibilidad del núcleo, de manera que éste sólo puede absorber las tensiones tangenciales.

Las hipótesis y aproximaciones nos ayudan a simplificar los cálculos analíticos y reducir la complejidad de las ecuaciones diferenciales, pero estas simplificaciones tienen que ser consistentes con el fenómeno físico y real del problema que estamos resolviendo. En el caso de estructuras sándwich vamos a suponer un estado de tensión plana en las pieles exteriores, hipótesis respaldada por el hecho de utilizar pieles delgadas. Se desprecia también la contribución del núcleo en la rigidez a la flexión, lo que resulta correcto si trabajamos con núcleos débiles. Un núcleo es débil cuando se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{E_f}{E_c} \frac{h_f}{h_c} \left(\frac{d}{h_c} \right)^2 \geq 16.7$$

Finalmente, se hace notar que en la FSDT la tensión normal transversal es nula y por lo tanto se descartan los problemas derivados de la de laminación.

Formulación de la FSDT según el modelo de Reissner Mindlin

Asumiendo el estado de tensión plana para cada lámina del laminado podemos escribir la relación constitutiva de cada capa mediante las siguientes expresiones que



relacionan las tensiones y deformaciones en las direcciones de orientación de las fibras que se denominan ejes del material.

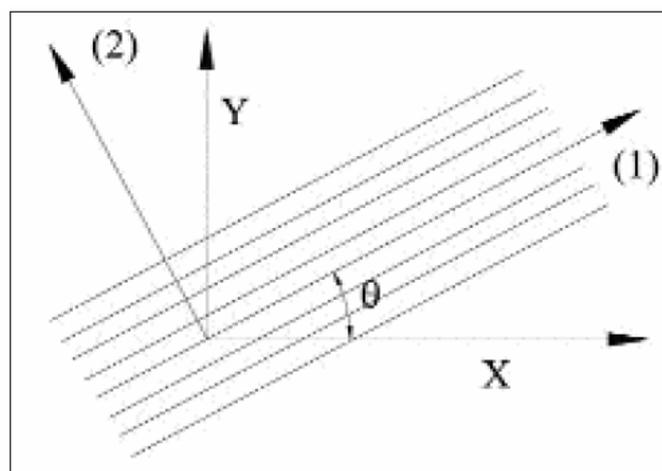
$$\begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}^k \quad \begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}^k = Q^{*k} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}^k$$

$$Q_{31} = \frac{E_{11}}{\Delta}, Q_{12} = \frac{E_2}{\Delta}, Q_{22} = G_{12}.$$

$$Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{13}.$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}$$

La dirección (1) .Dirección longitudinal, es paralela a la orientación de las fibras mientras que la dirección (2) .Dirección transversal, es perpendicular a (1) en el plano de la lámina



Para encontrar la relación entre las tensiones y deformaciones en los ejes locales de la lámina (xOy) tenemos que realizar la siguiente transformación:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}]^k \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[\bar{Q}]^k = [T^{-1}]^k \cdot [Q]^k \cdot [T^{-1}]^k$$

$$[T^{-1}]^k = [R] \cdot [T]^k \cdot [R^{-1}]$$

$$[T]^k = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \\ -\cos \theta \cdot \sin \theta & \cos \theta \cdot \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}^k, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



De donde se obtiene,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} &= \bar{Q}^* \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \\ \bar{Q}_{44}^* &= Q_{44}^* \cdot \cos^2 \theta + Q_{55}^* \cdot \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{55}^* &= Q_{44}^* \cdot \sin^2 \theta + Q_{55}^* \cdot \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{45}^* &= (Q_{44}^* - Q_{55}^*) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

Las hipótesis utilizadas para la formulación de las anteriores relaciones son las mismas que plantea el modelo de Reissner Mindlin:

- Una línea recta y perpendicular a la superficie media permanece recta después de la transformación. Esta hipótesis está basada en hechos experimentales demostrados para placas delgadas, esto implica que γ_{xz} y γ_{yz} son constantes a través del espesor. Esta teoría falla cuando hablamos de espesores grandes y por ello es necesaria la utilización de la teoría de deformación a cortante de primer orden que supone una variación de las deformaciones angulares γ_{xz} y γ_{yz} a través del espesor del laminado.

- Un segmento del espesor perpendicular a la superficie media permanece inextensible lo que implica una deformación unitaria nula en la dirección perpendicular al plano medio. Esta hipótesis es acorde con las observaciones experimentales excepto en el caso de placas muy gruesas.

Finalmente, para simplificar la formulación es conveniente trabajar con funciones que dependen exclusivamente de x e y, para ello realizamos una integración a través del espesor que nos permite encontrar las siguientes resultantes de tensiones:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz, \begin{Bmatrix} FC_x \\ FC_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz, \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \cdot dz$$

Una vez calculadas las integrales anteriores obtenemos las siguientes relaciones:



$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ FC \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix}$$

$$N = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, FC = \begin{Bmatrix} FC_x \\ FC_y \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_z^0 \end{Bmatrix}, \varepsilon_f = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \varepsilon_c = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

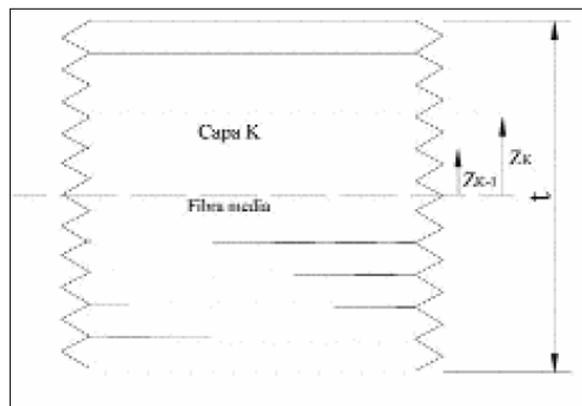
Donde

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k \cdot (z_k - z_{k-1}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$$H_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k \cdot \left[t_k - \frac{4}{t^2} \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right], \quad i, j = 1, 2.$$





Aplicación del Método de los Elementos Finitos (MEF)

La formulación integral necesaria para la resolución por el MEF se basa en el planteamiento de la ecuación del equilibrio interno, aplicando la teoría de los trabajos virtuales e igualando el trabajo virtual de los esfuerzos internos y externos:

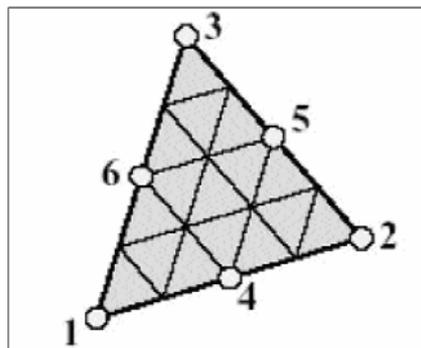
$$\int_A \delta \bar{\epsilon}^T \cdot \bar{\sigma} \cdot dA - \int_A \delta u^T \cdot q \cdot dA$$

$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} N \\ M \\ FC \end{Bmatrix}, \quad \bar{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \epsilon_f \\ \epsilon_c \end{Bmatrix},$$

$$u = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_x \quad \theta_y\}^T,$$

$$q = \{q_x \quad q_y \quad q_z \quad m_x \quad m_y\}^T$$

El siguiente paso es discretizar la estructura mediante su división en elementos, que en nuestro caso van a ser triángulos de seis nodos (ver figura). Este tipo de elemento ha sido seleccionado por su facilidad para automatizar el proceso de discretización (generación de la malla) así como por la calidad de los resultados que ofrece.



Siguiendo la aplicación típica del MEF, los desplazamientos de los puntos interiores de estos elementos se interpolan en función de los desplazamientos en los nodos de la siguiente manera:

$$u = \sum_{i=1}^n N_i \cdot a_i^{(e)} = N \cdot a^{(e)}$$

$$\begin{array}{ll} N_1 = (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta) & N_2 = \xi(2\xi-1) \\ N_3 = \eta(2\eta-1) & N_4 = 4\xi(1-\xi-\eta) \\ N_5 = 4\xi\eta & N_6 = 4\eta(1-\xi-\eta) \end{array}$$

Expresando de igual forma todas las variables del problema, podemos escribir:



$$\bar{\epsilon} = L.u \Rightarrow \bar{\epsilon} = L.N.\alpha^{(e)} = B\alpha^{(e)} = B_i\alpha_i^{(e)}$$

$$B_i = \begin{Bmatrix} B_{m_i} \\ B_{f_i} \\ B_{c_i} \end{Bmatrix},$$

$$B_m = \begin{bmatrix} N_{1x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1y} & 0 & 0 & 0 \\ N_{1x} & N_{1y} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{1x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{1y} \\ 0 & 0 & 0 & -N_{1y} & -N_{1x} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{1x} & -N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_{1y} & 0 & -N_1 \end{bmatrix}$$

Siendo,

$$\bar{\sigma} = C \cdot \bar{\epsilon}$$

$$C = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix}, \bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} N \\ M \\ FC \end{Bmatrix}, \bar{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \epsilon_f \\ \epsilon_c \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo los parámetros de la ecuación del equilibrio por sus valores llegamos a la siguiente expresión:

$$K_{ij}^{(e)} = \int_A B_i^T C B_j dA, \quad f_i^{(e)} = \int_A N_i q dA, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Y finalmente, aplicando la integración numérica mediante la cuadratura de Gauss-Legendre bidimensional obtenemos los siguientes resultados:

$$K_{ij}^{(e)} = \sum_{r=1}^{n_r} \sum_{s=1}^{n_s} [B_i^T C B_j |J|]_{rs} \cdot w_r \cdot w_s$$

$$f_i^{(e)} = \sum_{r=1}^{n_r} \sum_{s=1}^{n_s} [N_i q |J|]_{rs} \cdot w_r \cdot w_s$$

Es importante señalar que para evitar el fenómeno del bloqueo inducido por los términos provenientes de la deformación a cortante transversal en placas delgadas, se utiliza la subintegración de la matriz Bc usando para ello una cuadratura reducida.



8.3.5- Desarrollo de una interfaz de usuario para el programa RamSeries

El trabajo de desarrollo del modelo de cálculo se ha complementado con el desarrollo de una interfaz de usuario específica. El lenguaje de programación usado es Tcl/Tk . Este lenguaje es de tipo *script*, no compilado y se divide en dos bloques: el TCL, funciones e instrucciones propias de un lenguaje de programación estándar y Tk (*ToolKit*) funciones y procedimientos para el desarrollo de ventanas gráficas (*widget*).

Esta interfaz ha sido desarrollada bajo el concepto de *Tkwidget* del entorno de pre y post proceso del programa RamSeries, basada en el sistema GiD. El *Tkwidget* permite el desarrollo de nuevas interfaces gráficas de usuarios bajo el entorno GiD. *Tkwidget* facilita distintos procedimientos de comunicación entre las estructuras de datos internas de GiD y la nueva interfaz creada.

La interfaz de usuario desarrollada se divide en dos aplicaciones bien diferenciadas:

- *Laminate Shell*: Aplicación para la definición y generación de un material laminado.

- *Naval Stiffeners*: Aplicación para la definición y generación de rigidizadores de materiales compuestos de tipo naval con sección trapezoidal variable.

Laminate Shell

Esta aplicación permite definir todas las propiedades de un laminado y asignarlo a una superficie del modelo en estudio.

La interfaz gráfica está organizada en forma de *notebook* y consta de dos páginas

- *Materials*: En esta página es posible definir las propiedades mecánicas y activar el criterio de rotura (Tsai-Wu) para cada capa que formará el material laminado. Existen dos maneras de poder definir las propiedades mecánicas de una capa, introduciendo los módulos de Young, coeficiente de Poisson y módulos de corte directamente o mediante una descripción en composición de fibra y resina; evidentemente en este segundo caso la aplicación realiza un cálculo automático de las propiedades mecánicas y del espesor de la capa.

- *Secuencia de laminado*: En esta página se define la secuencia de laminado, asignando los espesores y ángulos de las fibras de cada capa. La ventana permite la descripción visual del laminado.



Naval Stiffeners

Esta aplicación permite definir todas las propiedades de un rigidizador naval y asignarlo a una línea del modelo en estudio. La interfaz gráfica está organizada en forma de *notebook* y consta de tres páginas:

- *Materials*: En esta página es posible definir las propiedades mecánicas para cada capa que formará el material laminado. Existen dos maneras de poder definir las propiedades mecánicas de una capa, introduciendo los módulos de Young, coeficiente de Poisson y módulos de corte directamente o mediante una descripción en composición de fibra-resina; evidentemente en este segundo caso la aplicación realiza un cálculo automático de las propiedades mecánicas y del espesor de la capa.

- *Secuencia de laminado*: En esta página se define la secuencia de laminado, asignando los espesores y ángulos de las fibras de cada capa. Como resultado de este proceso se realiza el cálculo automático de espesores y propiedades mecánicas. La ventana permite la descripción visual del laminado.

- *Definición de las propiedades del rigidizador*: En esta página se permite la asignación de chapas asociadas, obteniendo el módulo a cortante del núcleo y permitiendo el cálculo de las propiedades geométricas de la sección.





8.3.6-Validación del Método

Para la validación del código de elementos finitos desarrollado se realizaron diferentes pruebas. En primer lugar se comprobó el correcto funcionamiento de la homogenización en cuanto a las pieles se refiere. Para esto se comparó el resultado analítico de una placa laminada con las flechas obtenidas del modelo de elementos finitos. Habiendo obtenido unos resultados adecuados, se pasó al estudio de distintas configuraciones sándwich. En particular, se estudió una placa laminada de pieles ortótropas con núcleo de PVC en un caso y de madera de balsa en otro. Se realizaron estudios basados en diferentes hipótesis, por un lado asumiendo un estado de tensión plana en las pieles y un núcleo que solo soporta la cortante y, por otro, teniendo en cuenta la rigidez a flexión del núcleo. De esta forma, es posible comparar el efecto que tiene la hipótesis de un núcleo blando sobre la flecha total. Estos estudios se compararon con resultados analíticos y experimentales para una placa sometida a una presión homogénea fuera del plano. A continuación se presentan los resultados más representativos de este estudio.

Placa laminada sólida

El caso de análisis consiste en una placa de longitud $a = 1,6$ m (eje x), anchura $b = 0,8$ m (eje y) y espesor $t = 0,016$ m. Esta placa se considera simplemente apoyada en todos sus bordes y está cargada con una presión uniformemente distribuida en la dirección de z de $q = 0,02$ MPa. El laminado se compone de vidrio E como refuerzo y resina epoxy como matriz. La secuencia de laminación era $[0/90/+45]_4s$ con un espesor por capa de 0,5 mm.

De esta forma, las propiedades de las capas resultan ser

E_x	E_y	ν_{xy}	G_{xy}	G_{yz}
45 GPa	12 GPa	0,19	5,5 GPa	0,385 GPa

La solución a este problema se puede obtener mediante el método de Navier, según el cual:

$$w_{max} = \sum_{n=1}^{\infty} W_{max} \sin(m\pi / 2) \sin(n\pi / 2)$$

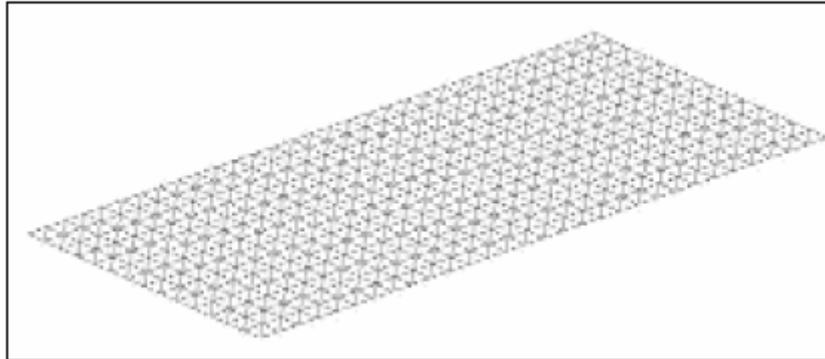
Donde $s = a/b$, y



$$W_{nav} = \frac{16qb^4}{\pi^6 mn [D_{11}m^4s^4 + 2(D_{12} + 2D_{33})m^2n^2s^2 + D_{22}n^4]}$$

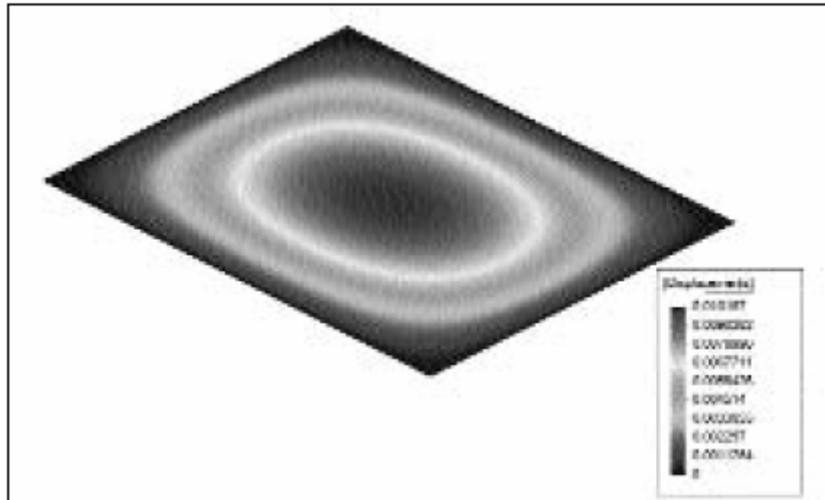
Para este caso la flecha resultante es de 9,62 mm.

Este mismo cálculo se realizó utilizando el método de los elementos finitos (MEF) con la malla que se muestra en la figura 8.



La malla fue generada de manera automática con el programa de cálculo RamSeries. Asimismo la introducción de datos, el cálculo y el postproceso de los resultados, se realizó dentro del mismo programa.

La máxima flecha obtenida del cálculo de elementos finitos fue de 10,15 mm. Esto proporciona una diferencia del 5 % frente al cálculo analítico. Es importante hacer notar que la resolución del método de Navier deja sin considerar la flecha producida por la deformación a cortante de la placa, por lo que se puede afirmar que el error de la solución MEF debe ser menor de ese valor, ya que la deformación final, una vez considerada la deformación por cortante, ha de ser mayor de los 9,62 milímetros que nos ofrece el método de Navier.



Placa sándwich

Para el caso de la placa laminada en sándwich en primer lugar se realizó un estudio de convergencia. En este estudio se buscaba obtener la densidad de malla adecuada para realizar el resto de las comprobaciones. El caso de análisis consistía en una placa de 1,83 por 0,92 metros. Esta placa estaba empotrada en sus lados cortos (0,92 m) y apoyada en los largos (1,83 m). Se obtuvieron para unas pieles compuestas de tejido plano (igual número de fibras en la dirección de la urdimbre que de la trama) de fibra de vidrio E con un gramaje de 680 gramos/m². La resina que se usó como matriz fue el vinylester Derkane 8084. El núcleo del panel era de espuma lineal de PVC con una densidad de 70 kg/m³. El proceso de manufactura utilizado fue el de SCRIMPVARTM (infusión de resina asistida por vacío). Esto se traduce en unas propiedades del material tales como:

	E_x	E_y	ν_{xy}	G_{xy}	G_{yz}
PRFV	24,13 GPa	24,13 GPa	0,115	3,65 GPa	3,65 GPa
PVC	896,3 MPa	896,3 MPa	0,15	393 MPa	393 MPa

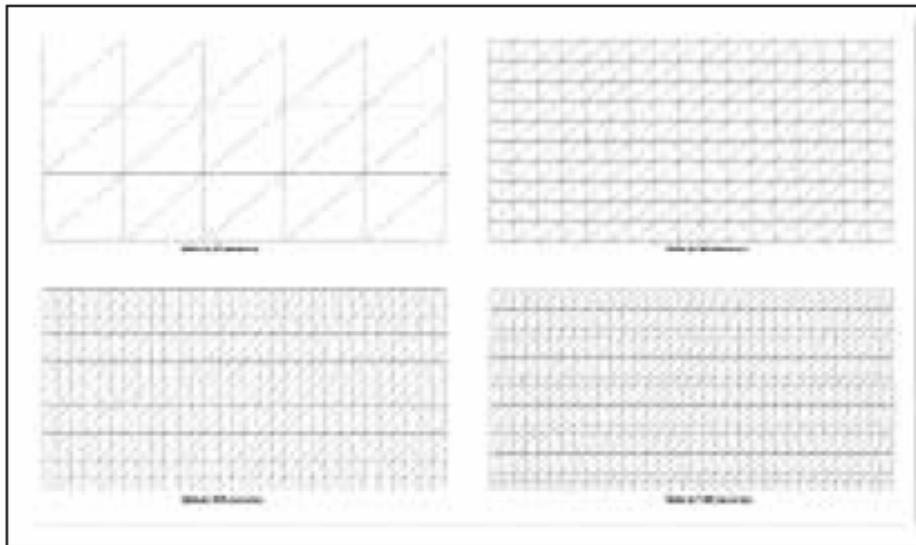
Este material se distribuyó en el laminado para el programa de cálculo de la siguiente forma: dos pieles con las propiedades del plástico reforzado en fibra de vidrio (PRFV) y un espesor de 3,2 milímetros, y un núcleo de PVC de 12,7 milímetros. A efectos del proceso de la obtención de las matrices constitutivas del material tratado como homogéneo, se utilizó cada material como si fuese una capa del laminado. De esta forma y mediante el modelo de FSDT obtenemos sus matrices A, B, D, y H que se utilizarán para el cálculo del modelo de elementos finitos.



En cuanto a las mallas de cálculo, se generaron 8 diferentes de 30, 56,168, 340, 634, 840, 1.080, y 1.428 elementos, tal y como se muestra en la figura 10.

Los resultados obtenidos para una presión homogénea de 24.800 Pa se detallan a continuación:

Nº Elementos	30	56	168	340	624	840	1.080	1.428
Flecha máx.	12,47	16,24	17,45	17,99	18,15	18,17	18,19	18,15



En este caso, observamos que un mallado intermedio de 624 elementos sería suficiente para obtener buenos resultados. Para conseguir una mayor precisión en los cálculos posteriores, se ha utilizado el siguiente escalón en las mallas, es decir 840 elementos para posteriores análisis. Esta puede parecer una malla bastante fina para un caso relativamente simple, pero considerando el reducido tiempo de ejecución necesario se decidió utilizarla en aras de una mayor precisión. Este tipo de comparativa nos da además una idea cualitativa de qué tipo de malla utilizar en caso de realizar otra serie de análisis de geometrías más complejas. En este caso el error cometido es de un 0,6 % ($(\text{experimental-numérico}/\text{experimental})$), lo que supera las expectativas de cálculo de la mayoría de los casos prácticos en ingeniería. Es también importante mencionar que este error está muy por debajo de la banda de incertidumbre de la medición experimental.

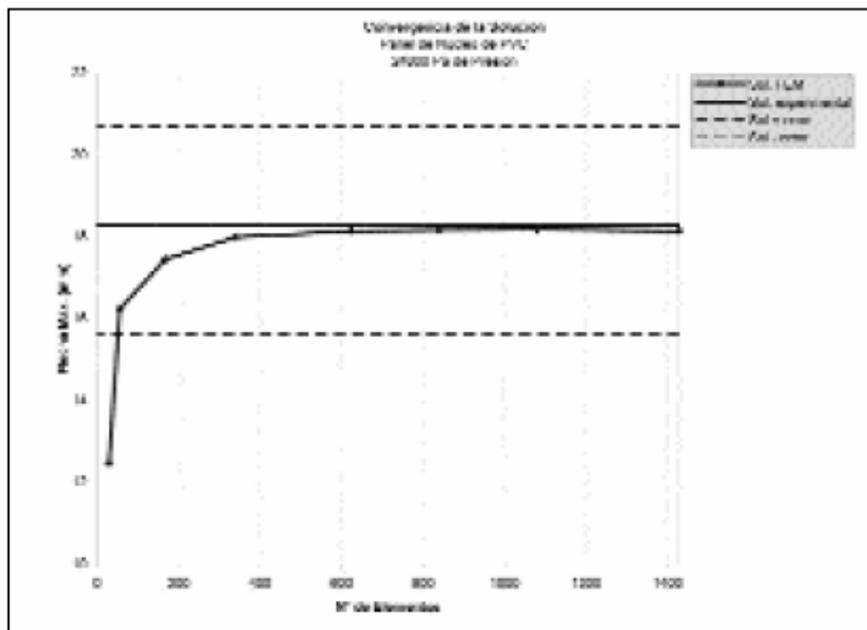
Una vez definida la malla a utilizar, se realizó un análisis de la curva de deformación para compararla con los resultados experimentales. Así, sobre el mismo panel se realizaron los cálculos para tres presiones diferentes para las que se tenían valores de flecha obtenidos experimentalmente. Con las mismas condiciones de contorno y el mismo material se resolvió el problema por medio del MEF para unas presiones de 13.100, 24.800 y 48.200 Pa. Estas presiones representan la carga necesaria



en el caso experimental para obtener flechas de $L/200$ y $L/50$, respectivamente, siendo L la longitud del panel. Estos resultados fueron analizados junto con el caso anterior que representa la presión experimental necesaria para conseguir una flecha de $L/100$.

Los resultados obtenidos fueron:

Experimental			Numérico		
Presión	Flecha		Presión	Flecha	Error
13.100 Pa	$L/200$	9,15 mm	13.100 Pa	9,54 mm	4,2 %
24.800 Pa	$L/100$	18,3 mm	24.800 Pa	18,17 mm	0,6 %
48.200 Pa	$L/50$	36,6 mm	48.200 Pa	35,37 mm	3,3 %



Todos estos cálculos se realizaron considerando todas las propiedades de cada uno de los materiales constituyentes. De esta forma, el núcleo está considerado como una capa más y soporta su parte proporcional de las cargas de flexión. Igualmente, también se considera la contribución de las pieles a la resistencia a la cortante. Sin embargo, la forma clásica de calcular las estructuras sándwich (que comúnmente son de pieles delgadas) es la de considerar que el núcleo soporta toda la cortante y nada de la flexión y que las pieles están en un estado de tensión plana.

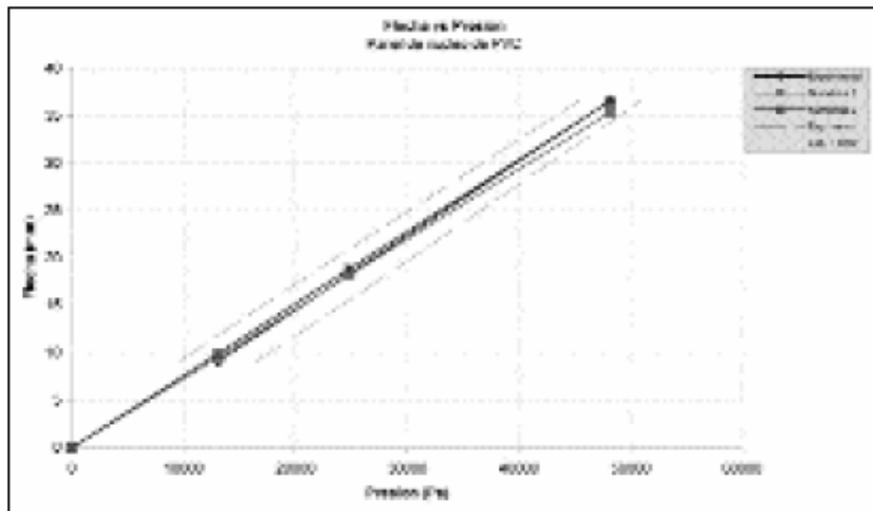
Por esta razón se realizaron dos estudios diferentes. Por un lado se compara el cálculo del panel con el núcleo de PVC, asumiendo que las pieles se encuentran en un estado de tensión plana y el núcleo soportando el esfuerzo cortante. Por otro lado, se realizó un cálculo de un panel con un material de núcleo más rígido en cuanto a propiedades de flexión, y menos rígido en cuanto a propiedades de cortante como es la madera de balsa.



Las propiedades del panel de PVC fueron las utilizadas en el caso presentado anteriormente, mientras que para el panel con el núcleo de madera de balsa se consideraron unas propiedades análogas para las pieles y unas propiedades del núcleo:

	E_x	E_y	ν_{xy}	G_{xy}	G_{yz}
Balsa	3,696 Gpa	55,16 MPa	0,2	103,4 MPa	103,4 MPa

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente figura, donde los resultados experimentales se comparan con los resultados de la solución de elementos finitos ignorada la rigidez a flexión del núcleo (numérica 1), y con la solución de elementos finitos considerando dicha rigidez (numérica 2). También se incluye en la figura la banda de error experimental para cada caso:



Numéricamente, los resultados obtenidos son:

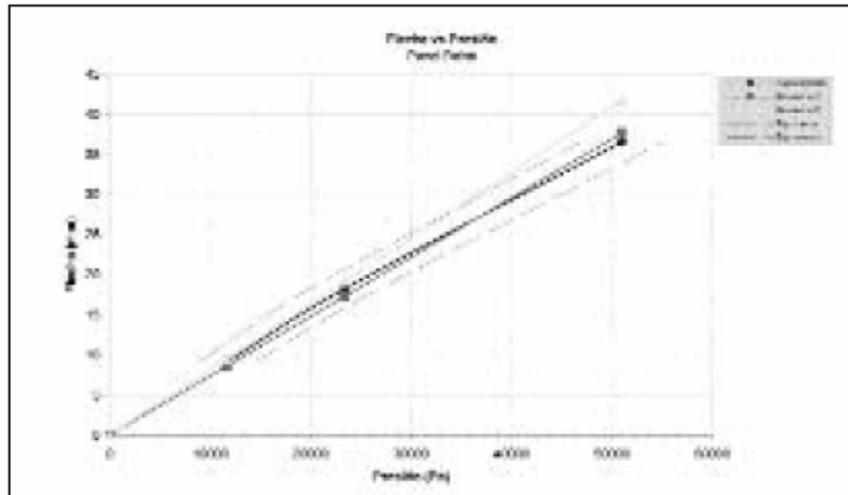
Resultados Panel con Núcleo de PVC

Flecha Experimental	Numérica 1 (completo)	% Error Exp-Num /Exp	Numérica 2 (simplificado)	% Error Exp-Num /Exp
9,15 mm	9,54 mm	4,3 %	9,93 mm	8,5 %
18,3 mm	18,17 mm	0,7 %	18,82mm	2,8 %
36,6 mm	35,37 mm	3,4 %	36,57 mm	0,1 %



Resultados Panel con Núcleo de Balsa

Flecha Experimental	Numérica 1 (completo)	% Error Exp-Num1/Exp	Numérica 2 (simplificado)	% Error Exp-Num2/Exp
9,15 mm	8,67 mm	5,2 %	9,60 mm	4,5 %
18,3 mm	17,36 mm	5,1 %	19,23 mm	5,1 %
36,6 mm	37,75 mm	3,1 %	41,84 mm	14,3 %



Como se puede observar, tanto en las figuras como en los resultados numéricos, el margen de error está muy por debajo de lo requerido en los casos prácticos en ingeniería naval. Más aun si tenemos en cuenta la banda de error de los resultados experimentales. Por ello podemos afirmar que tanto el panel con el núcleo de PVC como el construido con el núcleo de madera de balsa quedan modelizados con una precisión aceptable cuando se tienen en cuenta todas sus propiedades. En cuanto al modelo simplificado, si bien su utilidad también parece clara, lo es menos en cuanto al panel de madera de balsa, donde se llega a cometer un error del 14,3 %, en el caso de la presión más alta.



8.3.7- Conclusiones

Se ha implementado y validado un método para estudiar el comportamiento de placas sándwich en configuraciones comúnmente utilizadas en la industria naval. El trabajo de implementación ha consistido en la conversión de un programa de cálculo clásico MEF para su utilización en estructuras tipo sándwich. La especial idiosincrasia de este tipo de estructuras se puede observar en los resultados obtenidos en los ejemplos de este artículo.

Se observa que los resultados obtenidos están en todos los casos dentro del margen de error aceptado para este tipo de cálculo. Así, un análisis simplificado nos puede permitir encontrar con un cierto grado de confianza el comportamiento de la estructura. Sin embargo, el bajo coste computacional extra de realizar un análisis teniendo en cuenta todas las propiedades del núcleo y las pieles parece a priori un aliciente para realizar este tipo de cálculos siguiendo este modelo. La dificultad de esta implementación es la baja disponibilidad en muchos casos de propiedades mecánicas suficientes y suficientemente fiables para su implementación. En esos casos se ha observado que el cálculo teniendo en cuenta solamente las propiedades en el plano de las pieles y fuera de él, del núcleo, da unos resultados aceptables. A este respecto, se ha de tener en cuenta que el tipo de sándwich estudiado tiene una relación de espesores pieles-núcleo (d/h_f) de 4, con lo que nos encontramos en la zona de pieles gruesas. En esta zona la hipótesis de que las pieles no soportan cortante se viola y por tanto la utilización del modelo simplificado se vuelve dudosa. Sin embargo, los resultados obtenidos, si bien con un error mayor (3,8 % y 8,1 % de error medio para la placa con núcleo de PVC y balsa, respectivamente) se pueden considerar aceptables para una primera aproximación. En efecto, estos resultados se encuentran aún dentro de la banda de incertidumbre de los resultados experimentales en el caso del panel con núcleo PVC.

En el caso del panel con núcleo de madera de balsa los resultados son algo peores y su error supera a la incertidumbre experimental. Esto podría ser debido a la menor rigidez a cortante de la madera de balsa con respecto al PVC. De esta forma la contribución de las pieles al soporte de las fuerzas cortantes es más importante aún y ha de tenerse en cuenta. Se observa además que el comportamiento del panel con el núcleo de balsa en los resultados experimentales se desvía mucho más del comportamiento lineal que el del panel con el núcleo de PVC. Todo esto unido a la mayor rigidez a



flexión de la madera de balsa parece indicar que sería más recomendable considerar la utilización del modelo más completo para su cálculo.

De esta forma, el modelo más completo, aquel que incluye menos simplificaciones y utiliza todas las propiedades portantes de los elementos del sándwich en su cálculo, obtiene mejores resultados en ambos tipos de panel. Específicamente, 2,8% y 4,5 % de error medio para el panel con el núcleo de PVC y para el del núcleo de balsa, respectivamente. Una vez más, el panel con el núcleo de balsa se presenta más complicado de modelar apropiadamente. Como se puede observar en los resultados experimentales, este panel muestra un comportamiento menos afín a un modelo lineal en la relación presión-flecha y para modelarlo con más precisión sería necesario recurrir a tipos de cálculo más complejos.

Por último, es especialmente destacable el hecho de que esta implementación ha sido completamente integrada dentro de un programa de cálculo (RamSeries), incluyendo una variedad de herramientas de pre y postproceso que lo hacen especialmente adecuado para su uso en la industria naval. En este sentido es importante señalar que las primeras aplicaciones prácticas del modelo ya han sido llevadas a cabo, a plena satisfacción de los usuarios.



8.4-Peculiaridades del programa *Ram series* ®

8.4.1- Solver

El programa selecciona el mejor solver dependiendo del tamaño del problema, las opciones con el solver (ecuaciones que se usó internamente) son:

Skyline: Se utiliza el solver Txolesky con el almacén de la matriz skyline. Es un solver directo que requiere una gran cantidad de memoria. La ventaja es que siempre da una solución si el problema se define correctamente. Si hay diferentes casos de carga, el solver directamente puede guardar mucho tiempo de proceso.

Sparse: Utiliza un solver de gradientes conjugados con matriz vacía. Este es un solver iterativo que requiere mucha menos memoria que uno directo. Puede que no converja en algunos casos. Si no da una solución, después de comprobar la definición del problema, probar con el solver Skyline. Si se comprueba esta opción, varios parámetros podrán cambiar: Tolerancia del Solver: Cuando el proceso de iteración del solver alarga esta tolerancia, el solver se parará. Mínima tolerancia del Solver: Si el solver llega a este máximo número de iteraciones, esta tolerancia decidirá si los resultados se aceptan.

Normalmente, la mejor opción es seleccionar **Automatic**. Los usuarios avanzados suelen seleccionar el solver **Skyline** si no ocupa mucha memoria y el solver **Sparse** para grandes problemas.

Smooth per material: Cuando se mezclan dos materiales muy diferentes, como acero y hormigón, las tensiones no son continuas entre los materiales. Entonces, es necesario seleccionar esta opción para ver el salto de las tensiones entre el contorno de los dos materiales.

8.4.2-Generación de malla

Ramsolid acepta 4-noded and 10-noded tetraedros como elementos que definen el sólido. Esto, es posible para enmallar los volúmenes con cualquier tetraedro Normal ó Cuadráticos (ver Meshing->Quadratic Elements).

Se utilizará siempre tetraedros cuadráticos excepto cuando, debido a la complejidad de la geometría, el mínimo del total de nodos es demasiado grande para la



capacidad del ordenador. Estos dan mucha más precisión en los resultados para el mismo total de nodos.

Si se utilizan muchos elementos para enmallar la geometría, se obtendrá más exactitud en los resultados. Al mismo tiempo, se necesita mucho tiempo de proceso de ordenador y de memoria RAM. Seleccione Calculate->View process info después de hacer un análisis preliminar, para obtener información de los requisitos de la memoria y el tiempo que se necesita de ordenador.

También es interesante para enmallar los pequeños elementos en las zonas del sólido que tendrá un gradiente mayor en los resultados. Para estimar la precisión de los resultados referidos al número de nodos en la malla y en el tipo de tetraedros, comprobar el test de gráficos.

Para obtener los tamaños deseados de los elementos, utilizar las opciones de GiD para controlar el tamaño de malla, como:

Meshing->Assing unstr. Sizes->Points

Meshing->Assing unstr. Sizes->Lines

Meshing->Assing unstr. Sizes->Surfaces

Meshing->Assing unstr. Sizes->By cordal error

8.4.3-Presiones principales

Siguiendo la teoría de la elasticidad, las fuerzas en un volumen diferencial pueden expresarse en ejes globales mediante este tensor:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Siempre es posible encontrar otra base $X_Y_Z_$, diferente para cada nodo, donde el tensor está representado como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_i & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{iii} \end{bmatrix}$$



Estos son los valores propios de la matriz y la nueva base se ha hecho con "eigenvectors". Estos valores representan el máximo y el mínimo de valores de fuerza para cada punto del sólido.

8.4.5-Von Misses

Von Misses es una tensión escalar que da un significado al valor de todas las fuerzas en un punto dado del sólido. Se puede comparar con el máximo aceptable de fuerzas para este material. Esta expresión viene dada por:

$$\sigma_{\text{von}} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}{2}}$$

8.4.6-Normativa de referencia del programa Ramseries

Diseño de acuerdo con las reglas de las sociedades de clasificación:

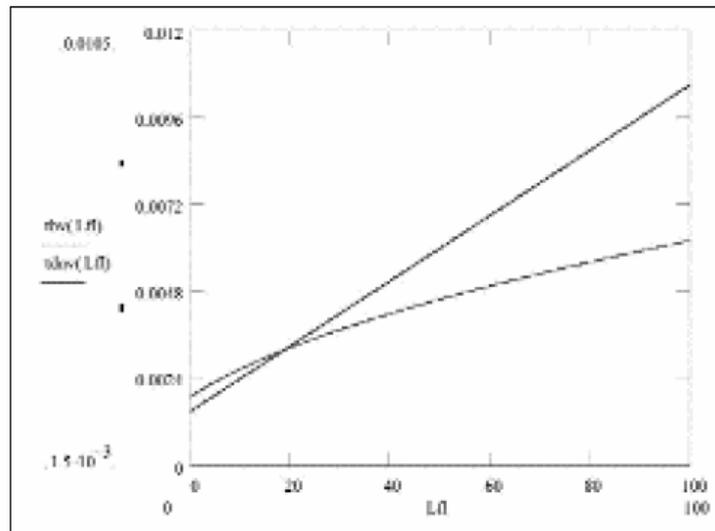
En este apartado vamos a presentar en pocas líneas algunos aspectos relacionados con los criterios de diseño proporcionados por las sociedades de clasificación Bureau Veritas (BV) y Det Norske Veritas (DNV).

El espesor mínimo requerido para las pieles exteriores se calcula según

$$BV \quad t_{\text{min}} = 0.6 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{0.97 \cdot L_{fl} + 10}$$

$$DNV \quad t_{\text{min}} = 10^{-3} \cdot \frac{1.5 + 0.009 \cdot L_{fl}}{\sqrt{\frac{\sigma_m}{1.6 \cdot 10^3}}}$$

Como puede apreciarse, la ecuación lineal del DNV para espesores mínimos de las pieles exteriores penaliza los buques de gran eslora, mientras que la ecuación proporcionada por el BV parece más razonable.



Las tensiones normales, tangenciales y flechas máximas para una presión dada q están expresadas mediante las siguientes ecuaciones:

$$BV \quad \sigma_{\max} = 0.052 \cdot \frac{qb^2}{W} \leq 0.22 \sigma_{\text{mi}}$$

$$\tau_{\max} = 0.55 \cdot \frac{qb}{d} \leq 0.4 \tau_{\text{mi}}$$

$$DNV \quad \sigma_{\max} = 0.050 \cdot \frac{qb^2}{W} \leq 0.30 \sigma_{\text{mi}}$$

$$\tau_{\max} = 0.34 \cdot \frac{qb}{d} \leq 0.35 \tau_{\text{mi}}$$

donde W es el módulo de la placa sándwich. Para una placa con pieles exteriores del mismo espesor tenemos $W = d t_{pe}$, donde d es la distancia entre los ejes neutros de las pieles exteriores. Las ecuaciones están obtenidas para placas con relación de aspecto igual a la unidad y simplemente soportadas. La ecuación del DNV proporciona ecuaciones que dependen de unos factores de corrección que dependen a su vez de las condiciones de contorno y de la relación de aspecto de los paneles a calcular, todo esto hace que las reglas del DNV sean más detalladas y precisas que las del BV.

Las tensiones desarrolladas en las pieles exteriores son aproximadamente las mismas para las dos reglas (las del BV son un 4 % más altas que las del DNV), mientras que las tensiones máximas dadas por DNV son un 35 % más altas que las impuestas por el BV. Las tensiones tangenciales máximas proporcionadas por el BV son un 62 % más altas que las del DNV. Esto es debido a la simplificación utilizada en las reglas del BV que se manifiesta en que las reglas del BV cubren todas las condiciones de contorno y todas las relaciones de aspecto. Para grandes relaciones de aspecto las tensiones



tangenciales que se desarrollan en el núcleo proporcionadas por el BV son solamente un 8 % mayor que las del DNV, ya que las reglas del BV están basadas principalmente en la teoría de vigas. Las flechas relativas del punto medio de un panel sometido a una presión q están expresadas mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} BV \quad w &= 2.47 \cdot \frac{qb^4}{E_f \cdot d^2 \cdot I_f} + 75.6 \cdot \frac{qb^2}{G_n \cdot d} & w \leq \frac{b}{100} \\ DNV \quad w &= 2.03 \cdot \frac{qb^4}{E_f \cdot d^2 \cdot I_f} + 74 \cdot \frac{qb^2}{G_n \cdot d} & w \leq \frac{b}{100} \end{aligned}$$

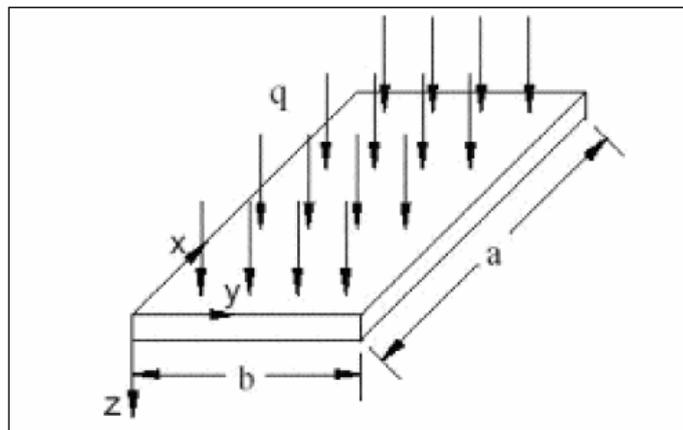
donde E_f es el módulo elástico de las pieles exteriores y G_n el módulo a cortante del núcleo. Las fórmulas están dadas para una placa con bordes empotrados. Para expresar las ecuaciones del BV y del DNV de la misma forma se han realizado las siguientes simplificaciones en la fórmula del BV.

$$d \approx 1.1t_n \quad \nu \approx 0.25 \quad I \approx \frac{d^2}{2} I_f$$

Según se observa, las reglas del BV son más conservadoras que las del DNV y nos proporcionan una flecha para una placa sándwich simétrica con bordes empotrados mientras que con las reglas del DNV podemos realizar los cálculos para varias configuraciones de las pieles exteriores y unos bordes simplemente apoyados.

Métodos Analíticos y Aproximados de cálculo

En este apartado presentamos diferentes métodos analíticos y aproximados para el cálculo del sencillo ejemplo que se muestra en la siguiente figura



En la siguiente tabla se muestran los parámetros geométricos, mecánicos y de la carga del problema a analizar:



Característica	Notación	Valor
Longitud del panel	a	1.240 mm
Anchura del panel	b	725 mm
Espesor de la piel exterior	h_f	1 mm
Modulo de Young de la PE	E_f	9.300 Mpa
Coefficiente de Poisson	ν_f	0,3
Espesor del núcleo	h_c	25 mm
Módulo a cortante del Núcleo	G_c	40 MPa
Coefficiente de Poisson del núcleo	ν_f	0,3
Presión	q	0,01MPa

Método analítico 1

Utilizando la teoría desarrollada para paneles sándwich planos con los cuatro bordes simplemente apoyados (Zenkert, D. 1997) y teniendo en cuenta el efecto de la contribución de la deformación a cortante en la flecha total se llegan a las siguientes expresiones:

$$D = \frac{E_f \cdot h_f \cdot (h_f + h_c)^2}{2} = 3.14 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

D: Rigidez del panel.

E_f : Modulo de Young de la piel exterior = 9.300 N/mm².

h_f : espesor de la piel exterior.

h_c : espesor del núcleo.

La rigidez a cortante se calcula de la siguiente forma:

$$S = \frac{G_{H100} \cdot (h_f + h_c)^2}{h_c} = 1.1.106 \text{ N/mm}$$

S: Rigidez a cortante [N/mm].

G_{H100} : Modulo a cortante del núcleo H100 = 40 N/mm².



$$w_b = \frac{16.q.b^4.[1-\nu^2]}{\pi^4.D} \cdot \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m.\pi.x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{m.\pi.y}{b}\right)}{m.n \cdot \left[\left(\frac{m.b}{a}\right)^2 + n^2\right]^2}$$

La flecha causada por la flexión puede ser descrita mediante una suma de serie de Fourier y esta calculada para el punto medio del panel:

w_b : flecha máxima causada por flexión.

q : carga uniformemente distribuida = 0,01 Mpa.

ν : Coeficiente de Poisson = 0,3.

a : longitud del panel.

b : anchura del panel.

Siendo el resultado que se obtiene de $w_b = 7,11$ mm

La flecha causada por el efecto de la deformación a cortante es igual a $w_s = 0,52$ mm, que se obtiene de:

$$w_s = \frac{16.q.b^4}{\pi^4.S} \cdot \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m.\pi.x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{m.\pi.y}{b}\right)}{m.n \cdot \left[\left(\frac{m.b}{a}\right)^2 + n^2\right]^2}$$

La flecha total es la suma de las dos flechas causadas por el efecto de flexión y de la cortante (aplicando el teorema de la superposición) $w_t = w_b + w_s = 7,63$ mm

Método aproximado 1

Utilizamos la fórmula propuesta por D. Zenkert (1997), dada por

$$\bar{w} = \frac{16.q.b^4.(1-\nu^2)}{\pi^4.D \cdot \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1\right]} + \frac{16.q.b^2}{\pi^4.S \cdot \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1\right]}$$

$$\bar{w} = 12,5 \text{ mm}$$



Esta fórmula nos da un error del 61 %. La explicación de este fenómeno reside en el hecho de considerar solamente términos de primer orden en el desarrollo de Fourier, especialmente en el término de la flexión.

Método analítico 2

En este apartado utilizaremos una aproximación desarrollada por S.P Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger (1959) que calcula la flecha del hormigón reforzado. Haciendo el símil Acero-pieles exteriores y Hormigón-Núcleo

El momento de inercia de las pieles exteriores respecto a la fibra media es igual a:

$$I_f = 2 \left[\frac{h_f^3}{12} + h_f \left(\frac{h_f + h_c}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_f = 338.2 \text{ mm}^4$$

El momento de inercia del núcleo respecto a la fibra media es igual a:

$$I_c = \frac{h_c^3}{12}$$

$$I_c = 1302 \text{ mm}^4$$

Se calcula la rigidez a flexión de la siguiente manera:

$$D = \frac{E_c}{1 - \nu^2} (I_c + (n - 1)I_f)$$

$$n = \frac{E_f}{E_c} = 89.4$$

$$D = 3.57 \cdot 10^6 \text{ N.mm}^2$$

Se calcula la flecha máxima mediante la siguiente ecuación:

$$w_{\max} = \alpha \frac{q h^4}{D}$$

$$\alpha = 0.00888$$

$$w_{\max} = 6.87 \text{ mm}$$

El valor del parámetro (depende del factor de forma a/b que es igual a 1,71 obtenido a partir de los datos proporcionados en el libro de S.P. Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger, (1959, p.120). De acuerdo con la teoría desarrollada por M, Levy



(Timoshenko, S.P. & Woinnowsky-Kriger, S., 1959, pp. 113), el momento máximo es igual a:

$$\begin{aligned} (M_x)_{\max} &= \beta \cdot q \cdot b^2 \\ (M_x)_{\max} &= 479 \text{ N} \cdot \text{mm} \end{aligned}$$

β : factor numérico que depende del factor de forma del panel, es igual a 0,0912.

q : carga aplicada = 0,01 N/mm²

b : anchura del panel = 725 mm

$$\begin{aligned} (M_y)_{\max} &= \beta \cdot q \cdot b^2 \\ (M_y)_{\max} &= 255 \text{ N} \cdot \text{mm} \end{aligned}$$

β : factor numérico que depende del factor de forma del panel, es igual a 0,0485.

q : carga aplicada = 0,01 N/mm²

b : anchura del panel = 725 mm

De esta manera, las deformaciones unitarias máximas (en sentido Ox) son iguales a:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{M_x \cdot z}{D} \\ \epsilon_x &= 1930 \cdot \mu \frac{\text{mm}}{\text{mm}} \end{aligned}$$

Hay que señalar que el nivel de deformación es muy alto ya que el límite es de 2000 μ de acuerdo con (Teti, G.C.R, 1989).

Nomenclatura

d : Distancia entre las fibras medias de las pieles

h_c : Espesor del núcleo

h_f : Espesor de la piel exterior

h_t : Espesor total del laminado

N_r, n_s : Puntos de integración a lo largo de las direcciones \square, \square

W_q : Pesos asociados a cada punto de integración

B_m : Matriz de deformación membranal

B_f : Matriz de deformación por flexión



B_c : Matriz de deformación por cortante

D : Rigidez flexión

$$D = E_f \cdot \frac{h_f^3}{6} + E_f \cdot \frac{h_f d^2}{2} + E_c \cdot \frac{h_c^3}{12}$$

D_{xy} : Rigidez torsional:

$$D_{xy} = G_{xy} \cdot h_f \cdot d^2$$

E : Módulo de Young

G : Módulo de cortante

J : Jacobiano de la transformación entre las coordenadas naturales del elemento

ξ , η y las cartesianas x , y

L : Operador diferencial genérico

M_{pe} : Masa de la piel exterior

M_n : Masa del núcleo

N_i : Función de forma del nodo i

S : Rigidez a cortante:

$$S = \frac{G_c d^3}{h_c}$$

$[T]^k$: Matriz de transformación de coordenadas

θ : Ángulo de orientación de las fibras

ξ , η : Coordenadas naturales del elemento finito isoparamétrico

ε : Deformación

σ : Tensión

γ : Deformación angular

ν : Coeficiente de Poisson