



Universidad
Politécnica
de Cartagena



industriales

etsii UPCT

EVALUACIÓN DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE TRANSMISIONES DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS RECTOS DE PERFIL ASIMÉTRICO

Titulación: Ingeniería Técnica Industrial
Especialidad en Mecánica

Alumno/a: Ángel de Dios Sánchez Martínez

Directores: Alfonso Fuentes Aznar
Ignacio González Pérez

Cartagena, 11 de enero de 2013

Índice general

1. Introducción y objetivos	1
1. Un poco de historia	1
2. Introducción y estado del arte	4
3. Objetivos	7
4. Estructura y planteamiento	8
2. Fundamentos teóricos	10
1. Introducción	10
2. Envolvente a una familia de superficies	10
3. Condiciones suficientes de existencia de la envolvente a una familia de superficies	14
4. Relaciones cinemáticas básicas	16
5. Determinación de las elipses instantáneas de contacto	17
6. Simulación del engrane y análisis del contacto	19
7. Prediseño de una función parabólica de errores de transmisión	22
8. Aplicación del método de los elementos finitos en el diseño de engranajes . .	27
3. Diseño y generación de engranajes cilíndricos de perfil asimétrico	35
1. Introducción	35
2. Generación de engranajes cilíndrico-rectos	35
3. Sección transversal de la herramienta de tallado	37
3.1. Superficies de tallado de los perfiles activos de los dientes Σ_P	40

3.2.	Borde de cabeza del perfil de tallado Σ_F	41
4.	Superficie de la cremallera generadora	42
5.	Planteamiento de la ecuación de engrane	44
6.	Geometría de los engranajes cilíndrico-rectos	47
6.1.	Superficies de los perfiles activos de los dientes.	47
6.2.	Superficies de entalle entre la superficie de pie y las superficies activas de los dientes.	48
4.	IGD (Integrated Gear Design)	51
1.	Introducción	51
2.	Definición de la geometría de los engranajes	52
2.1.	Generación de engranajes de perfil asimétrico	56
3.	Definición de la geometría modificada y aplicación de un rebaje de cabeza	62
4.	Análisis del contacto y simulación del engrane	65
5.	Generación automática del modelo de elementos finitos	70
5.	Resultados	77
1.	Definición de los casos a analizar	77
2.	Análisis de la transmisión de engranajes cilíndrico-rectos de referencia	79
2.1.	Dentadura de perfil simétrico con ángulo de presión 20 grados	79
2.2.	Dentadura de perfil simétrico con ángulo de presión 25 grados	79
3.	Análisis del rebaje de cabeza óptimo	82
3.1.	Dentadura de perfil simétrico con ángulo de presión 20 grados	83
3.2.	Dentadura de perfil simétrico con ángulo de presión 25 grados	87
4.	Transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos de perfil asimétrico	89
4.1.	Ángulo de presión de referencia de 20°	89
4.2.	Ángulo de presión de referencia de 25°	96
6.	Conclusiones	102

Bibliografía

105

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1. Un poco de historia

El primer uso que se conoce de una rueda dentada o engranaje data de los años 2600 A.C. Cuenta la leyenda que el Emperador Huang Di, que habría reinado en China entre el 2698 y 2598 A.C, estaba en guerra con otro líder rival, llamado Chi You. En una de las batallas de esta guerra, Chi You mediante un conjuro hizo caer una espesa niebla sobre los hombres de Huang Di para confundirlos. Sin embargo, estos contaban con un arma secreta, un carro que tenía el poder de apuntar al sur. Siguiendo su rumbo no sólo fueron capaces de escapar de la niebla, sino que además consiguieron la victoria. Esta leyenda podría ser verdad, pero la historia retrasa la invención de este carro bastantes siglos después, en concreto al siglo III y habría sido obra de un ingeniero llamado Ma Jun. Este carro es una especie de brújula mecánica que transporta una dirección a lo largo del camino por el que avanza. Su secreto es el diferencial en el sistema de engranajes que integra la diferente rotación entre las ruedas, detectando de esta manera la rotación en la base del carro. El mecanismo compensa esta rotación haciendo girar la figura que hace de apuntador en dirección contraria.

Por otro lado, escritos de Filón de Bizancio, escritor griego (280 A.C. - 220 A.C.), indican que las ruedas de oración encontradas en templos griegos usaban trenes de engranajes en su funcionamiento por lo que parece probable que los Egipcios y Babilonios usaron engra-

najes por los años 1000 A.C. Por el año 100 A.C., la fabricación de engranajes ya se hacía tanto en madera como en metal, con dientes triangulares o pines como dientes. Este tipo de engranajes se observa en el mecanismo de Antikythera, convirtiéndose en el mecanismo de engranajes más antiguo cuyos restos se conservan. Se trata de una calculadora astronómica datada entre el 150 y el 100 A.C. y compuesta por al menos 30 engranajes de bronce con dientes triangulares. Presenta características tecnológicas avanzadas como por ejemplo trenes de engranajes epicicloidales que, hasta el descubrimiento de este mecanismo, se creían inventados en el siglo XIX. Por citas de Cicerón se sabe que el mecanismo de Antikythera no fue un ejemplo aislado sino que existieron al menos otros dos mecanismos similares en esa época, construidos por Arquímedes y por Posidonio. Por otro lado, a Arquímedes se le suele considerar uno de los inventores de los engranajes porque diseñó un tornillo sinfín.

No está claro cómo se transmitió la tecnología de los engranajes en los siglos siguientes. Es posible que el conocimiento de la época del mecanismo de Antikythera sobreviviese y contribuyese al florecimiento de la ciencia y la tecnología en el mundo islámico de los siglos IX al XIII. Por ejemplo, un manuscrito andalusí del siglo XI menciona por vez primera el uso en relojes mecánicos tanto de engranajes epicíclicos como de engranajes segmentados. Los trabajos islámicos sobre astronomía y mecánica pueden haber sido la base que permitió que volvieran a fabricarse calculadoras astronómicas en la Edad Moderna. En los inicios del Renacimiento esta tecnología se utilizó en Europa para el desarrollo de sofisticados relojes, en la mayoría de los casos destinados a edificios públicos como catedrales.

Leonardo da Vinci, muerto en Francia en 1519, dejó numerosos dibujos y esquemas de algunos de los mecanismos utilizados hoy diariamente, incluido varios tipos de engranajes de tipo helicoidal. Los primeros datos que existen sobre la transmisión de rotación con velocidad angular uniforme por medio de engranajes, corresponden al año 1674, cuando el famoso astrónomo danés Olaf Roemer (1644-1710) propuso la forma o perfil del diente en epicicloide.

Robert Willis (1800-1875), considerado uno de los primeros ingenieros mecánicos, fue el que obtuvo la primera aplicación práctica de la epicicloide al emplearla en la construcción de

una serie de engranajes intercambiables. De la misma manera, de los primeros matemáticos fue la idea del empleo de la evolvente de círculo en el perfil del diente, pero también se deben a Willis las realizaciones prácticas. A Willis se le debe la creación del odontógrafo, aparato que sirve para el trazado simplificado del perfil del diente de evolvente.

Es muy posible que fuera el francés Phillipe de Lahire el primero en concebir el diente de perfil en evolvente en 1695, muy poco tiempo después de que Roemer concibiera el epicicloidal.

La primera aplicación práctica del diente en evolvente fue debida al suizo Leonhard Euler (1707). En 1856, Christian Schiele descubrió el sistema de fresado de engranajes rectos por medio de la fresa madre, pero el procedimiento no se llevaría a la práctica hasta 1887.

En 1874, el norteamericano William Gleason inventó la primera fresadora de engranajes cónicos y gracias a la acción de sus hijos, especialmente su hija Kate Gleason (1865-1933), convirtió a su empresa Gleason Works, radicada en Rochester (Nueva York, EEUU) en una de los fabricantes de máquinas herramientas más importantes del mundo.

En 1897, el inventor alemán Robert Hermann Pfauter (1885-1914), inventó y patentó una máquina universal de tallar engranajes rectos y helicoidales por fresa madre. A raíz de este invento y otras muchos inventos y aplicaciones que realizó sobre el mecanizado de engranajes, fundó la empresa Pfauter Company que, con el paso del tiempo, se ha convertido en una multinacional fabricante de todo tipo de máquinas-herramientas, habiendo sido absorbida recientemente por Gleason Works.

En 1906, el ingeniero y empresario alemán Friedrich Wilhelm Lorenz (1842-1924) se especializó en crear maquinaria y equipos de mecanizado de engranajes y en 1906 fabricó una talladora de engranajes capaz de mecanizar los dientes de una rueda de 6 m de diámetro, módulo 100 y una longitud del dentado de 1,5 m.

A finales del siglo XIX, coincidiendo con la época dorada del desarrollo de los engranajes, el inventor y fundador de la empresa Fellows Gear Shaper Company, Edwin R. Fellows (1846-1945), inventó un método revolucionario para mecanizar tornillos sinfín glóbicos tales como los que se montaban en las cajas de dirección de los vehículos antes de que fuesen hidráulicas.

En 1905, M. Chambon, de Lyon (Francia), fue el creador de la máquina para el dentado de engranajes cónicos por procedimiento de fresa madre. Aproximadamente por esas fechas André Citroën inventó los engranajes helicoidales dobles.

2. Introducción y estado del arte

Las transmisiones de engranajes están formadas por dos ruedas dentadas o engranajes, de las cuales la de mayor número de dientes se denomina rueda y la de menor número de dientes se denomina piñón. Una de las aplicaciones más importantes de las transmisiones de engranajes es la transmisión del movimiento desde un eje hasta otro eje situado a cierta distancia y que ha de realizar un trabajo, de manera que uno de los engranajes está montado en un eje conectado a la fuente de energía siendo éste conocido como engranaje conductor y el otro está montado en un eje que recibe el movimiento del engranaje conductor y que se denomina engranaje conducido.

En las primeras transmisiones, la relación de transmisión dada como el cociente de los números de dientes de piñón y rueda se satisfacía sólo si se considera el cociente de las velocidades angulares medias $\omega_m^{(1)}$ del piñón y $\omega_m^{(2)}$ de la rueda

$$\frac{\omega_m^{(1)}}{\omega_m^{(2)}} = \frac{N_2}{N_1} \quad (1.2.1)$$

donde N_1 y N_2 son los números de dientes del piñón y de la rueda, respectivamente. Esta relación se deduce de la condición de engrane consecutivo de las parejas de dientes. Hay que recordar, tal como se mencionaba en el apartado anterior que los primeros dientes utilizados eran bastones o palos cortos que entran en contacto de forma consecutiva, satisfaciendo la relación dada en (1.2.1).

Sin embargo, la relación de transmisión instantánea m_{12} dada por el cociente de las velocidades angulares instantáneas $\omega^{(1)}$ del piñón y $\omega^{(2)}$ de la rueda, es decir,

$$m_{12} = \frac{\omega^{(1)}}{\omega^{(2)}} \quad (1.2.2)$$

es en general distinta de la relación dada por (1.2.1). Tales transmisiones estaban pensadas para transmitir movimiento con potencias muy bajas. Desde entonces hasta el siglo XIX se han utilizado distintos tipos de dientes, con perfiles triangulares, de círculo, etc., pero en todas estas transmisiones la relación de transmisión instantánea m_{12} es en general distinta de la relación dada por (1.2.1), por lo que la transmisión de potencia y movimiento no es uniforme y continua.

Introducido el concepto de superficies conjugadas, las transmisiones por engranajes podían satisfacer el requerimiento de $m_{12} = N_2/N_1$ en cada instante del ciclo de engrane y con ello mejorar considerablemente el funcionamiento de la transmisión. La teoría moderna de engranajes establece condiciones necesarias y suficientes de existencia de superficies conjugadas. En realidad, la acción conjugada no significa que la relación m_{12} sea constante en cada instante, sino que puede venir dada por una función definida por el diseñador. Un ejemplo lo constituyen los engranajes no cilíndricos.

La variedad de tipos de superficies conjugadas es tan amplia como la imaginación del ser humano. Sin embargo, ha sido la superficie cuya curva base es una evolvente de círculo la que ha tenido más aceptación y uso generalizado en la industria por sus numerosas ventajas.

En engranajes rectos y helicoidales con ejes paralelos, el contacto entre las superficies conjugadas con perfil de evolvente es lineal como se observa en las Figuras 1.2.1(a) y (b) para el caso de engranajes rectos y helicoidales, respectivamente. Las líneas de contacto en el caso del engranaje helicoidal son rectas tangentes al cilindro base de la evolvente mientras que en el engranaje recto son paralelas al eje de dicho cilindro.

Si bien la acción conjugada representa unas condiciones ideales de funcionamiento, lo cierto es que las condiciones teóricas definidas en la generación de las superficies nunca se dan en el funcionamiento real de la transmisión. Los errores de alineación de la transmisión, de fabricación de las superficies, la propia deformación elástica de las mismas como consecuencia de la carga aplicada, o la deflexión de los ejes, son los responsables de que la acción entre las superficies deje, en la mayoría de los casos, de ser conjugada. La relación m_{12} es entonces distinta de (1.2.1).

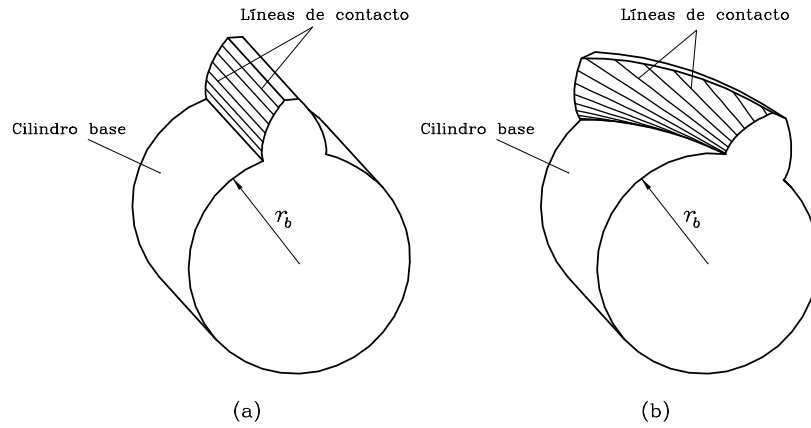


Figura 1.2.1: Tipos de contacto en engranajes: (a) rectos con ejes paralelos y (b) helicoidales con ejes paralelos.

Los errores de alineación, fabricación y la deformación elástica de las superficies y de los ejes que soportan los engranajes son los responsables de que la posición angular de la rueda respecto al piñón difiera de la posición teórica que debería tener si existiera acción conjugada. A este error en la posición angular se le denomina error de transmisión. Matemáticamente, el error en la posición angular de la rueda viene dado como

$$\Delta\phi_2(\phi_1) = \left(\phi_2(\phi_1) - \phi_2(\phi_1^{(0)}) \right) - \frac{N_1}{N_2} \left(\phi_1 - \phi_1^{(0)} \right) \quad (1.2.3)$$

donde ϕ_2 indica la posición angular de la rueda, ϕ_1 la posición angular del piñón, y $\phi_1^{(0)}$ un valor inicial de referencia del ángulo de giro del piñón.

Además de la aparición de los errores de transmisión, otra de las consecuencias de que la acción entre las superficies de los dientes deje de ser conjugada es la distribución no uniforme de la carga sobre las superficies de los dientes. Esta consecuencia es tomada en cuenta por las normas de diseño de engranajes a través de distintos factores cuyo propósito es estimar la capacidad de carga que puede tener una transmisión por engranajes. Sin embargo, la tendencia actual es usar programas de ordenador para la generación virtual de la geometría de los engranajes, el análisis del contacto y la obtención de las tensiones de contacto y flexión por métodos numéricos, como el método de los elementos finitos o el métodos de

los elementos de contorno. En esta línea trabaja el Grupo de Investigación Transmisiones Avanzadas de Engranajes con el objetivo de aunar en un programa de ordenador llamado IGD (Integrated Gear Design) la experiencia de sus miembros en la aplicación de la teoría de engranajes moderna así como de técnicas avanzadas de diseño y análisis de transmisiones avanzadas de engranajes.

3. Objetivos

La revisión de la literatura sobre el empleo de engranajes asimétricos muestra dos propuestas aparentemente contradictorias con respecto al lado del diente que debe actuar como lado conductor para conseguir las distintas ventajas que el uso de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos de perfil de evolvente pueden tener, y que se enumeran a continuación: mayor capacidad de carga, mayor duración, menor peso, menor nivel de ruido y menor tamaño.

Por un lado, en los trabajos [1] o recientemente [2] se propone que el lado conductor debe ser el lado con menor ángulo de presión, dejando el mayor ángulo de presión para el lado de respaldo. Por otro lado, gran cantidad de trabajos como [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] proponen que el lado conductor debe corresponder al lado de mayor ángulo de presión, por lo que el lado de respaldo, en este caso, correspondería al lado de menor ángulo de presión.

En este proyecto, se aplicarán técnicas avanzadas de diseño y análisis de transmisiones de engranajes para validar las ventajas de la aplicación de engranajes cilíndrico-rectos y para determinar el lado de aplicación del mayor ángulo de presión. Se investigará la evolución de las tensiones de contacto y flexión, así como la presión de contacto para el ciclo completo de engrane y se compararán los resultados con los obtenidos en transmisiones de dentadura de perfil simétrico. Con objeto de llevar a cabo la comparación de las tensiones de contacto, se aplicará un procedimiento de optimización del rebaje de cabeza para minimizar las tensiones de contacto a lo largo de todo el ciclo de engrane. Por último, se estudiarán y compararán los resultados obtenidos para distintos diseños de transmisiones de engranajes asimétricos y

se formulará una propuesta sobre el lado más favorable de aplicación del mayor ángulo de presión.

4. Estructura y planteamiento

El presente proyecto fin de carrera se ha estructurado en los siguientes capítulos:

- Capítulo 1. Introducción y objetivos.
- Capítulo 2. Fundamentos teóricos.
- Capítulo 3. Diseño y generación de engranajes cilíndricos de perfil asimétrico.
- Capítulo 4. IGD (Integrated Gear Design).
- Capítulo 5. Resultados.
- Capítulo 6. Conclusiones.

En el Capítulo 1 se ha hecho una pequeña reseña histórica sobre el uso de las primeras transmisiones de engranajes, así como una breve introducción al diseño y aplicación de las transmisiones de engranajes asimétricos, para terminar con una formulación de los principales objetivos de este proyecto fin de carrera y la descripción de su correspondiente estructura y planteamiento.

En el Capítulo 2 se muestran los fundamentos teóricos de la teoría de engranajes moderna, relacionados con la generación de superficies, determinación de singularidades, análisis del contacto y aplicación del método de los elementos finitos para el análisis de tensiones.

En el capítulo 3 se describen los procesos de generación y diseño de engranajes cilíndrico-rectos de perfil asimétrico.

En el Capítulo 4 se presenta la herramienta computacional utilizada para el desarrollo de este proyecto, denominada IGD (Integrated Gear Design), y desarrollada en el seno del Grupo de Investigación Transmisiones Avanzadas de Engranajes (GITAE) de la Universidad Politécnica de Cartagena.

En el Capítulo 5 se presentan y analizan los resultados obtenidos del análisis de tensiones por el método de los elementos finitos de los distintos casos de diseño considerados para el estudio del comportamiento mecánico de las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos de perfil asimétrico con respecto a transmisiones equivalentes de perfil simétrico para los ángulos de presión más comunes de 20 y 25 grados.

Por último, en el Capítulo 6 se exponen las principales conclusiones del presente proyecto fin de carrera.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

1. Introducción

La teoría de engranajes es una rama de la ciencia relacionada con la geometría diferencial, el diseño y la fabricación. A continuación, se presentan los fundamentos teóricos del presente proyecto fin de carrera, los cuales están relacionados con la generación de superficies, determinación de singularidades, análisis del contacto y aplicación del método de los elementos finitos. Estos fundamentos vienen explicados ampliamente en [11, 12] y constituyen los pilares sobre los que se fundamenta el desarrollo de la herramienta computacional IGD.

2. Envolvente a una familia de superficies

En el anterior capítulo se vió la importancia de la acción conjugada en el contacto de las superficies de los dientes de los engranajes. La generación de superficies conjugadas está basada en el concepto de envolvente de una familia de superficies. La determinación de la superficie generada Σ_2 a partir de la superficie generadora Σ_1 requiere la utilización de los sistemas de coordenadas S_1 , S_2 y S_f , rígidamente conectados a Σ_1 , Σ_2 y a la carcasa de la transmisión donde se encuentran montados los ejes de rotación de Σ_1 y Σ_2 , respectivamente.

La determinación de la superficie Σ_2 está basada en el siguiente proceso:

- (i) La superficie generadora Σ_1 se considera conocida y viene representada por

$$\mathbf{r}_1(u, \theta) \in C^1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta} \neq 0, \quad (u, \theta) \in E \quad (2.2.1)$$

donde (u, θ) son los parámetros de la superficie, E es el dominio en el que están definidos los parámetros, y C^1 indica que la función vectorial tiene derivadas parciales continuas hasta al menos el primer orden. La desigualdad en (2.2.1) indica que Σ_1 es una superficie regular.

- (ii) La localización y orientación de los ejes de la transmisión y la función $\psi_2(\psi_1)$, donde ψ_1 y ψ_2 son los ángulos de rotación de las superficies Σ_1 y Σ_2 , se consideran conocidos.
- (iii) La transformación de coordenadas del sistema S_1 al sistema S_2 permite obtener la familia de superficies de Σ_1 en el sistema S_2 , como

$$\mathbf{r}_2(u, \theta, \psi) = \mathbf{M}_{21}(\psi)\mathbf{r}_1(u, \theta) \quad (2.2.2)$$

donde ψ es el parámetro generalizado del movimiento. La matriz $\mathbf{M}_{21}(\psi)$ se expresa como $\mathbf{M}_{21}(\psi) = \mathbf{M}_{2f}(\psi_2)\mathbf{M}_{f1}(\psi_1)$. Normalmente, $\psi = \psi_1$ y $\psi_2 = \psi_2(\psi_1) = \psi_2(\psi)$. Para un valor dado de ψ , la ecuación (2.2.2) representa la familia de superficies Σ_1 en el sistema S_2 .

- (iv) La superficie Σ_2 es la envolvente a la familia de superficies Σ_1 en S_2 siendo tangente a cada una de las superficies definida en (2.2.2). La determinación de Σ_2 requiere la consideración simultánea de la ecuación vectorial (2.2.2) y la ecuación

$$f(u, \theta, \psi) = 0 \quad (2.2.3)$$

denominada ecuación de engrane.

Las matrices \mathbf{M} utilizadas son de orden 4 x 4 ya que se utilizan coordenadas homogéneas. La utilización de coordenadas homogéneas fue propuesta para la transformación de coordenadas en la teoría de mecanismos por [13] y [14]. En la teoría de engranajes se consideran dos procedimientos para obtención de la ecuación de engrane (2.2.3).

Procedimiento 1. Se basa en las siguientes consideraciones:

- (1) Consideremos que la ecuación de engrane (2.2.3) se satisface en el punto $P(u^{(0)}, \theta^{(0)}, \psi^{(0)})$.

La función $f \in C^1$ es conocida y supongamos que una de sus tres derivadas parciales (f_u, f_θ, f_ψ), por ejemplo f_u , es distinta de cero en P . Entonces, por el teorema de existencia de funciones implícitas [15], la Ecuación (2.2.3) puede resolverse en las proximidades de $P(u^{(0)}, \theta^{(0)}, \psi^{(0)})$ por la función $u(\theta, \psi)$.

- (2) La superficie Σ_2 se puede representar entonces como $r_2(\theta, \psi, u(\theta, \psi))$. Consideremos dos vectores tangentes a Σ_2

$$\mathbf{R}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \mathbf{R}_\psi = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \psi} + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \psi} \quad (2.2.4)$$

- (3) La normal $N_2^{(1)}$ a la superficie Σ_1 en el sistema S_2 viene dada como

$$N_2^{(1)} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta} \quad (2.2.5)$$

donde el subíndice “2” en $N_2^{(1)}$ indica que la normal se representa en el sistema S_2 mientras que el superíndice “(1)” indica que se esta considerando la normal a Σ_1 .

- (3) Si la envolvente Σ_2 existe, ésta será tangente a Σ_1 . Por tanto Σ_1 y Σ_2 deben tener un plano tangente común. El plano tangente $\Pi_2^{(2)}$ a Σ_2 viene definido por la pareja de vectores \mathbf{R}_θ y \mathbf{R}_ψ . El plano tangente $\Pi_2^{(1)}$ a Σ_1 viene determinado por la pareja de vectores $\partial \mathbf{r}_2 / \partial u$ y $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \theta$. El vector \mathbf{R}_θ pertenece además al plano $\Pi_2^{(1)}$. Las superficies Σ_1 y Σ_2 tendrán un plano tangente común si los vectores $\partial \mathbf{r}_2 / \partial u$, $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \theta$ y $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \psi$ pertenecen al mismo plano por lo que la ecuación

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \psi} = 0 \quad (2.2.6)$$

representa la condición necesaria de existencia de la envolvente, y se la conoce como ecuación de engrane.

Procedimiento 2. Se basa en las siguientes consideraciones:

- (1) El producto vectorial en la ecuación (2.2.6) representa en el sistema S_2 la normal a Σ_1 (ver Ecuación (2.2.5)).
- (2) El vector $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \psi$ es colinear con el vector velocidad $\mathbf{v}_2^{(12)}$, el cual representa la velocidad relativa de un punto de Σ_1 con respecto al punto coincidente en Σ_2 . Por tanto, la Ecuación (2.2.6) se puede expresar como

$$\mathbf{N}_2^{(1)} \cdot \mathbf{v}_2^{(12)} = f(u, \theta, \psi) = 0 \quad (2.2.7)$$

- (3) El producto escalar en (2.2.7) es independiente del sistema de coordenadas utilizado, por lo que

$$\mathbf{N}_i^{(1)} \cdot \mathbf{v}_i^{(12)} = f(u, \theta, \psi) = 0 \quad (i = 1, f, 2) \quad (2.2.8)$$

La determinación de la ecuación de engrane (2.2.8) es más sencilla si se considera el sistema $i = 1$ ó $i = f$. La Ecuación (2.2.8) fue propuesta casi simultáneamente por Dudley y Porisky, Dadidov, Litvin, Shishkov y Saari [16]. Litvin ha demostrado que la Ecuación (2.2.8) es la condición necesaria de existencia de la envolvente a una familia de superficies [17].

En el caso de engranajes rectos, la normal común a los perfiles en el punto de tangencia pasa por el centro instantáneo de rotación [18].

En el caso de transmisiones en donde los ejes se intersectan, como es el caso de las transmisiones con engranajes cónicos espirales, la normal común pasa a través del eje instantáneo de rotación, por lo que la ecuación de engrane para este tipo de transmisiones con ejes que se intersectan viene dada por

$$\frac{X_i - x_i}{\mathbf{N}_{x_i}^{(1)}} = \frac{Y_i - y_i}{\mathbf{N}_{y_i}^{(1)}} = \frac{Z_i - z_i}{\mathbf{N}_{z_i}^{(1)}} \quad (2.2.9)$$

donde (X_i, Y_i, Z_i) son las coordenadas de un punto del eje instantáneo de rotación, (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas de un punto de la superficie generadora o conductora y $(\mathbf{N}_{x_i}^{(1)}, \mathbf{N}_{y_i}^{(1)}, \mathbf{N}_{z_i}^{(1)})$ son las componentes de la normal a la superficie generadora Σ_1 .

3. Condiciones suficientes de existencia de la envolvente a una familia de superficies

Las condiciones suficientes de existencia de la envolvente a una familia de superficies garantizan que la envolvente existe, es una superficie regular y es tangente a cada una de las superficies de la familia a lo largo de una línea. Estas condiciones fueron descritas en [19] en la teoría general de envolventes y adaptada en [11].

(i) Se considera la familia de superficies $\mathbf{r}(u, \theta, \psi) \in C^2$.

(ii) Se designa por $M(u^{(0)}, \theta^{(0)}, \psi^{(0)})$ el conjunto de parámetros donde se satisfacen las siguientes ecuaciones:

(1) La ecuación de engrane:

$$f(u, \theta, \psi) = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\theta) \cdot \mathbf{r}_\psi \quad (2.3.1)$$

(2) Condición de regularidad de la superficie Σ_1 generadora de la familia de superficies

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\theta \neq 0 \quad (2.3.2)$$

(3) La desigualdad:

$$|f_u| + |f_\theta| \neq 0 \quad (2.3.3)$$

(4) La desigualdad:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\psi)f_u + (\mathbf{r}_\psi \times \mathbf{r}_u)f_\theta + (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\theta)f_\psi \neq 0 \quad (2.3.4)$$

La verificación de las condiciones de (1) a (4) permiten establecer en el entorno de M que la envolvente Σ_2 a la familia de superficies $\mathbf{r}(u, \theta, \phi)$ existe como una superficie regular, contacta con la superficie Σ_1 a lo largo de una línea de tangencia y la normal a Σ_2 es colineal con la normal a Σ_1 . La función vectorial $\mathbf{r}(u, \theta, \phi)$ y la ecuación de engrane $f(u, \theta, \phi) = 0$, consideradas simultáneamente, representan en el entorno de M la superficie envolvente Σ_2 a

través de tres parámetros relacionados. La existencia de dicha envolvente en el dominio de valores de (u, θ, ϕ) requiere que las consideraciones de (1) a (4) se verifiquen en todo el dominio.

Como demostración consideremos que la desigualdad (2.3.3) se satisface porque se verifica $f_u \neq 0$. Entonces, por el teorema de la existencia de funciones implícitas, la Ecuación (2.3.1) se puede resolver por la función $u(\theta, \psi) \in C^1$. Diferenciando la Ec. (2.3.1), se obtiene

$$f_u u_\theta + f_\theta = 0 \quad f_u u_\psi + f_\psi = 0 \quad (2.3.5)$$

$$u_\theta = -\frac{f_\theta}{f_u} \quad u_\psi = -\frac{f_\psi}{f_u} \quad (2.3.6)$$

A partir de las ecuaciones (2.3.6) y (2.3.4) se obtiene

$$\mathbf{R}_\theta = \mathbf{r}_\theta - \frac{f_\theta}{f_u} \mathbf{r}_u \quad \mathbf{R}_\psi = \mathbf{r}_\psi - \frac{f_\psi}{f_u} \mathbf{r}_u \quad (2.3.7)$$

El producto vectorial $\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}_\psi$ corresponde a la normal a la envolvente de \mathbf{N} , la cual verifica la condición dada en (2.3.4). Por tanto la envolvente es una superficie regular. Por otro lado, dado que se verifica la condición dada en (2.3.1), el plano tangente a la superficie Σ_1 , definido por los vectores \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_θ , coincide con el plano tangente a la envolvente definido por los vectores \mathbf{R}_θ y \mathbf{R}_ψ , por lo que la normal a la envolvente es colineal con la normal a la superficie Σ_1 en el punto M . La demostración es similar si se verifica $f_\theta \neq 0$ en lugar de $f_u \neq 0$.

Representación de la envolvente Σ_2 en forma biparamétrica. La representación de Σ_2 en función de dos parámetros está basada en las siguientes consideraciones:

- (i) Supóngase que la desigualdad (2.3.3) se satisface porque

$$f_u \neq 0 \quad (2.3.8)$$

- (ii) El teorema de existencia de funciones implícitas establece que, debido a la observación de la desigualdad (2.3.8), la ecuación de engrane (2.3.1) se puede resolver en el entorno del punto M por la función

$$u = u(\theta, \psi) \quad (2.3.9)$$

(iii) Entonces, la superficie Σ_2 se puede representar como

$$\mathbf{R}_2(\theta, \psi) = \mathbf{r}_2(u(\theta, \psi), \theta, \psi) \quad (2.3.10)$$

(iv) La normal a Σ_2 viene dada como

$$\mathbf{N}_2^{(2)} = \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \psi} \quad (2.3.11)$$

Un procedimiento similar se puede aplicar cuando la igualdad (2.3.3) se satisface porque $f_\theta \neq 0$ en lugar de verificarse (2.3.8). En este caso, la superficie envolvente se obtiene mediante

$$\mathbf{R}_2(u, \psi) = \mathbf{r}_2(u, \theta(u, \psi), \psi) \quad (2.3.12)$$

y su normal será

$$\mathbf{N}_2^{(2)} = \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \psi} \quad (2.3.13)$$

4. Relaciones cinemáticas básicas

Las relaciones cinemáticas básicas propuestas por Litvin en [11, 12] relacionan las velocidades del punto de contacto y del vértice de la normal unitaria de las superficies en engrane. La velocidad del punto de contacto viene dada por dos componentes: la de arrastre con la superficie y la relativa respecto a la superficie. Considerando la condición continua de tangencia entre las superficies en engrane, se tiene

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = \mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12)} \quad (2.4.1)$$

donde $\mathbf{v}_r^{(i)}$ ($i = 1, 2$) es la velocidad relativa del punto de contacto sobre la superficie Σ_i . De forma similar, la relación entre las velocidades del vértice de la normal unitaria viene dada por

$$\dot{\mathbf{n}}_r^{(2)} = \dot{\mathbf{n}}_r^{(1)} + (\boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \mathbf{n}) \quad (2.4.2)$$

donde $\mathbf{n}_r^{(i)}$ ($i = 1, 2$) es la velocidad relativa del vértice de la normal en su movimiento sobre la superficie y $\boldsymbol{\omega}^{(12)}$ es la velocidad angular relativa del engranaje 1 respecto al engranaje 2.

La ventaja de la utilización de las ecuaciones (2.4.1) y (2.4.2) es que permiten la determinación de $\mathbf{v}_r^{(2)}$ y $\dot{\mathbf{n}}_r^{(2)}$ sin tener que utilizar las ecuaciones, en general muy complicadas, de la envolvente Σ_2 . A partir de (2.4.1) y (2.4.2), es posible resolver los principales problemas que se presentan en la teoría de engranajes: (a) determinación de singularidades en la superficie generada por Σ_2 , (b) determinación de las curvaturas principales en Σ_2 y (c) determinación de las dimensiones y orientación de las elipses instantáneas de contacto.

5. Determinación de las elipses instantáneas de contacto

Litvin ha propuesto [11, 12] un método para la determinación de las dimensiones y orientación de las elipses instantáneas de contacto a partir de las curvaturas y direcciones principales de las superficies y de la deformación elástica de las mismas. Debido a la elasticidad de las superficies en contacto, el contacto puntual entre superficies se extiende a lo largo de un área elíptica. El centro de simetría de la elipse instantánea de contacto coincide con el punto teórico de tangencia. La huella de contacto esta formada por el conjunto de estas elipses instantáneas de contacto. El método propuesto viene desarrollado en [11, 12] y supone conocido el parámetro de deformación elástica δ de las superficies, que depende de la carga aplicada, la rigidez de los dientes en contacto y el módulo de elasticidad del material de los engranajes. El parámetro δ se ha considerado igual a 0.006 mm, valor asociado a engranajes con poca carga. Aunque la dimensión de la elipse depende del valor del parámetro δ , la orientación y la relación entre los ejes mayor y menor es independiente de δ y sólo depende de las curvaturas y direcciones principales de las superficies en contacto. La Fig. 2.5.1 muestra la elipse instantánea de contacto. Se suponen conocidas las curvaturas principales, $k_I^{(1)}$ y $k_{II}^{(1)}$ en el punto de contacto M y las direcciones principales de curvatura, $\mathbf{e}_I^{(1)}$ y $\mathbf{e}_{II}^{(1)}$, de Σ_1 . Igualmente se conocen las curvaturas, $k_I^{(2)}$ y $k_{II}^{(2)}$, y las direcciones principales, $\mathbf{e}_I^{(2)}$ y $\mathbf{e}_{II}^{(2)}$, de Σ_2 . La dimensión de la elipse, dada por los semiejes a y b , y la orientación de la

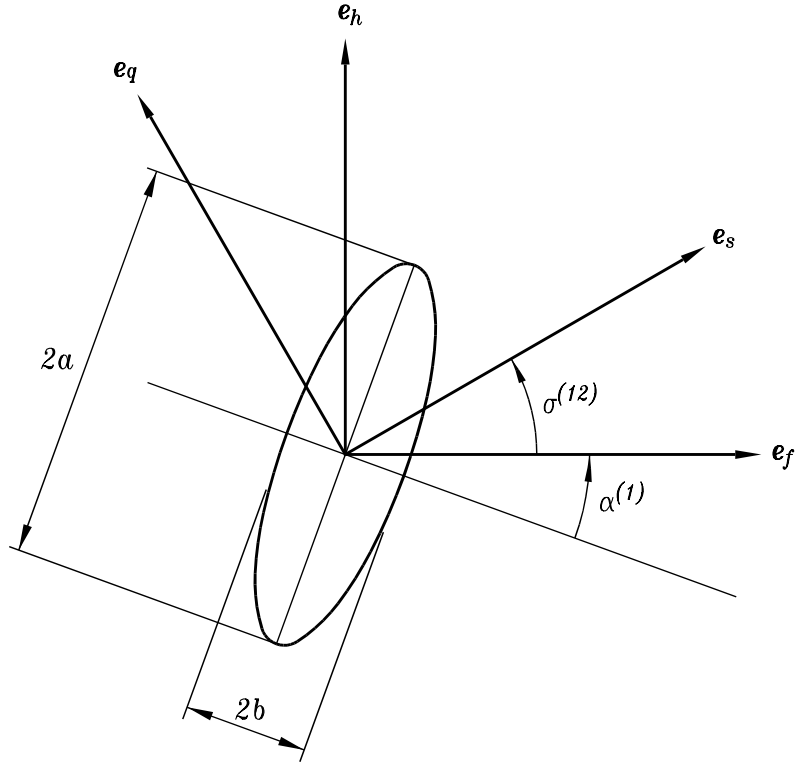


Figura 2.5.1: Elipse instantánea y direcciones principales.

misma, dada por el ángulo $\alpha^{(1)}$, vienen dados por

$$a = \left| \frac{\delta}{A} \right|^{1/2} \quad b = \left| \frac{\delta}{B} \right|^{1/2} \quad (2.5.1)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha^{(1)} = \frac{g_2 \operatorname{sen} 2\sigma^{(12)}}{g_1 - g_2 \cos 2\sigma^{(12)}} \quad (2.5.2)$$

donde

$$A = \frac{1}{4} [k_{\Sigma}^{(1)} - k_{\Sigma}^{(2)} - (g_1^2 - 2g_1g_2 \cos 2\sigma^{(12)} + g_2^2)^{1/2}] \quad (2.5.3)$$

$$B = \frac{1}{4} [k_{\Sigma}^{(1)} - k_{\Sigma}^{(2)} + (g_1^2 - 2g_1g_2 \cos 2\sigma^{(12)} + g_2^2)^{1/2}] \quad (2.5.4)$$

$$k_{\Sigma}^{(i)} = k_I^{(i)} + k_{II}^{(ii)}, \quad g_i = k_I^{(i)} - k_{II}^{(ii)} \quad i = 1, 2 \quad (2.5.5)$$

siendo $\sigma^{(12)}$ el ángulo entre las direcciones principales $\mathbf{e}_I^{(1)}$ y $\mathbf{e}_I^{(2)}$ (Fig. 2.5.1).

6. Simulación del engrane y análisis del contacto

La simulación del engrane de las superficies de los dientes en contacto se realiza mediante el análisis de contacto o "TCA" (Tooth Contact Analysis). Este análisis permite:

- (i) Determinar la trayectoria de contacto en cada una de las superficies.
- (ii) Determinar los errores de transmisión debidos a los errores de alineación, fabricación o montaje.
- (iii) Determinar la huella de contacto formada por el conjunto de las elipses instantáneas de contacto, que incluye la orientación y dimensión de las mismas a lo largo del camino de contacto.

Para la ejecución de estos objetivos, las superficies de los dientes se consideran conocidas, así como la localización y orientación de los ejes de ambos engranajes considerando los errores de alineación. Las superficies Σ_1 y Σ_2 vienen dadas en los sistemas coordenados S_1 y S_2 , respectivamente, por las siguientes funciones

$$\mathbf{r}_i(u_i, \theta_i) \in C^2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_i} \times \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta_i} \neq 0, \quad (u_i, \theta_i) \in E_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.6.1)$$

donde las normales unitarias vienen representadas por

$$\mathbf{n}_i = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_i} \times \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta_i}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_i} \times \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta_i} \right|} \quad (i = 1, 2) \quad (2.6.2)$$

Considerando que el engranaje 1 gira con la superficie Σ_1 alrededor de un eje fijo localizado en el sistema S_f , la familia de superficies generada por Σ_1 en S_f viene dada por

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) = \mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \mathbf{r}_1^{(1)}(u_1, \theta_1) \quad (2.6.3)$$

y la normal unitaria a la superficie Σ_1 se representa en S_f como

$$\mathbf{n}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) = \mathbf{L}_{f1}(\phi_1) \mathbf{n}_1^{(1)}(u_1, \theta_1) \quad (2.6.4)$$

donde ϕ_1 es el ángulo de rotación del engranaje 1.

El engranaje 2 gira con la superficie Σ_2 alrededor de otro eje fijo, pero localizado en el sistema S_q . La localización y orientación de S_q simula los errores de alineación de la transmisión. La familia de superficies que genera Σ_2 en el sistema fijo S_f viene dada por

$$\mathbf{r}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) = \mathbf{M}_{fq}\mathbf{M}_{q2}(\phi_2)\mathbf{r}_2^{(2)}(u_2, \theta_2) \quad (2.6.5)$$

y la normal unitaria correspondiente por

$$\mathbf{n}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) = \mathbf{L}_{fq}\mathbf{L}_{q2}(\phi_2)\mathbf{n}_2^{(2)}(u_2, \theta_2) \quad (2.6.6)$$

donde ϕ_2 es el ángulo de rotación del engranaje 2. Las matrices \mathbf{L} son de orden 3×3 y resultan de eliminar la última fila y la última columna de las correspondientes matrices \mathbf{M} . Las superficies Σ_1 y Σ_2 deben ser tangentes a lo largo del camino de contacto y para ello se debe verificar la igualdad de los vectores de posición y la colinealidad de las normales unitarias a las superficies en el punto instantáneo de contacto, como se muestra en la Fig. 2.6.1, por lo que se debe verificar

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) - \mathbf{r}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) = 0 \quad (2.6.7)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) - \mathbf{n}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) = 0 \quad (2.6.8)$$

La Ec. (2.6.7) representa tres ecuaciones escalares, pero la Ec. (2.6.8) representa sólo dos ecuaciones escalares independientes al ser $|\mathbf{n}_f^{(1)}| = |\mathbf{n}_f^{(2)}| = 1$. Las Ecuaciones (2.6.7) y (2.6.8) representan por tanto, cinco ecuaciones escalares independientes con seis incógnitas: $u_1, \theta_1, \phi_1, u_2, \theta_2, \phi_2$. El sistema de ecuaciones se puede representar como

$$f_i(u_1, \theta_1, \phi_1, u_2, \theta_2, \phi_2) = 0, \quad f_i \in C^1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (2.6.9)$$

El objetivo del análisis es obtener del sistema de ecuaciones representado en (2.6.9) las funciones

$$u_1(\phi_1), \theta_1(\phi_1), u_2(\phi_1), \theta_2(\phi_1), \phi_2(\phi_1) \in C^1 \quad (2.6.10)$$

De acuerdo con el teorema de existencia de funciones implícitas [15], las funciones (2.6.10) existen en las proximidades del punto

$$P^{(0)} = (u_1^{(0)}, \theta_1^{(0)}, \phi_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \phi_2^{(0)}) \quad (2.6.11)$$

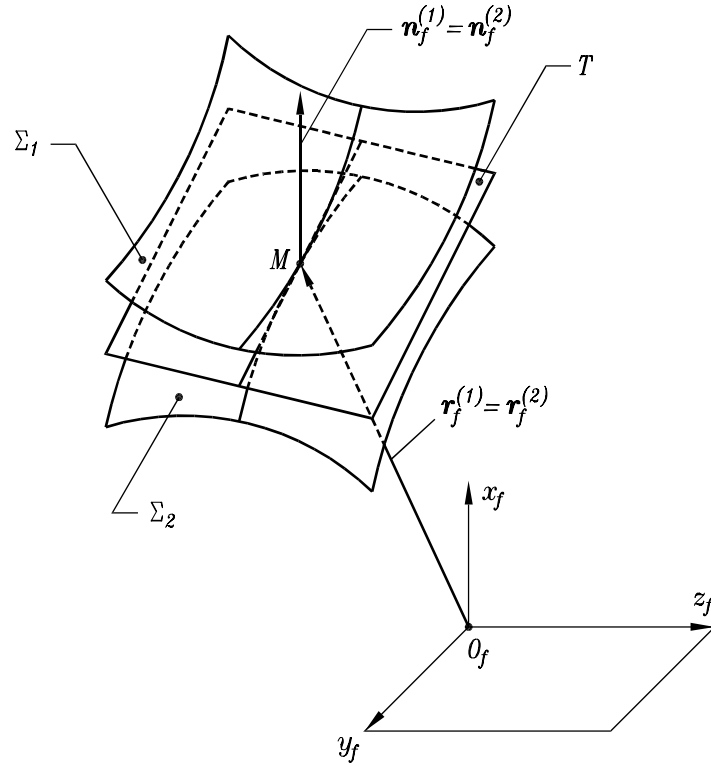


Figura 2.6.1: Condición de contacto puntual.

si se verifica: (i) las funciones $[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5] \in C^1$ en un entorno de $P^{(0)}$, (ii) el sistema de ecuaciones (2.6.9) se satisface en $P^{(0)}$ y (iii) el Jacobiano del sistema (2.6.9) en $P^{(0)}$ difiere de cero

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)}{D(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2, \phi_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_5}{\partial u_1} & \frac{\partial f_5}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_5}{\partial u_2} & \frac{\partial f_5}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_5}{\partial \phi_2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.6.12)$$

Las funciones dadas en (2.6.10) proporcionan toda la información sobre el engrane de las superficies en contacto. La función $\phi_2(\phi_1)$ representa la relación entre los ángulos de rotación de los engranajes. Las funciones $u_1(\phi_1)$ y $\theta_1(\phi_1)$ determinan el camino de contacto sobre la superficie Σ_1 mediante la función $\mathbf{r}_1(u_1, \theta_1)$, mientras que las funciones $u_2(\phi_1)$ y $\theta_2(\phi_2)$ determinan el camino de contacto sobre la superficie Σ_2 mediante la función $\mathbf{r}_2(u_2, \theta_2)$. La línea de acción viene dada por la función

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1(\phi_1), \theta_1(\phi_1), \phi_1) \quad (2.6.13)$$

o bien por la función

$$\mathbf{r}_f^{(2)}(u_2(\phi_1), \theta_2(\phi_1), \phi_2(\phi_1)) \quad (2.6.14)$$

En determinados casos, la superficie de uno de los engranajes puede venir dada como función de tres parámetros relacionados por una ecuación adicional correspondiente a la ecuación de engrane utilizada en la generación. En este caso, el sistema de ecuaciones dado en (2.6.9) presenta una ecuación más y una incógnita más correspondiente al parámetro generalizado del movimiento en el proceso de generación.

7. Prediseño de una función parabólica de errores de transmisión

Los errores tanto de alineación como de fabricación siempre, en mayor o menor medida, se van a presentar en cualquier transmisión. El prediseño de una función parabólica de errores de transmisión permitirá absorber funciones cuasilineales y discontinuas de los mismos producidas por defectos de alineación o fabricación y será un factor clave para la reducción de ruido y vibración en transmisiones de engranajes.

El prediseño de esta función parabólica de errores de transmisión se basa en las siguientes consideraciones:

- (i) La función de transmisión ideal de engrane es una función lineal y viene dada por

$$\phi_2 = \frac{N_1}{N_2} \phi_1 \quad (2.7.1)$$

siendo N_i y ϕ_i ($i = 1, 2$), los números de dientes y el ángulo de rotación del piñón ($i = 1$) y rueda ($i = 2$), respectivamente.

- (ii) Debido a errores de alineación, fabricación o montaje (por ejemplo, cambio del ángulo de cruce entre ejes, cambio de la distancia entre centros, desplazamiento axial de los engranajes, etc.), la función de transmisión se convierte en una función cuasilineal y

discontinua (Fig. 2.7.1(a)) con periodicidad igual al ciclo de engrane de una pareja de dientes que viene dado por

$$\phi = \frac{2\pi}{N} \quad (2.7.2)$$

siendo N el número de dientes del engranaje considerado. La función de errores de transmisión correspondiente se muestra en la Fig. 2.7.1(b). Este tipo de función de transmisión se ha confirmado mediante la simulación del engrane y análisis del contacto. Debido al salto de la velocidad angular en el inicio y final del ciclo de engrane, la aceleración tiene un valor muy alto que causa grandes vibraciones y ruido en la transmisión.

Está demostrado en [11], [16] y [12] que una función parabólica de errores de transmisión puede absorber una función lineal producida por los errores de alineación y fabricación.

La Figura 2.7.2(a) muestra la interacción de la función parabólica prediseñada de errores de transmisión $\Delta\phi_2^{(1)} = -a\phi_1^2$ con la función lineal $\Delta\phi_2^{(2)} = b\phi_1$ provocada por los errores de alineación y fabricación. La función resultante $\Delta\psi_2(\psi_1)$, obtenida mediante la suma de las funciones $(\Delta\phi_2^{(1)} + \Delta\phi_2^{(2)})$, es una función parabólica $\Delta\psi_2 = -a\psi_1^2$ con el mismo coeficiente de parábola. Se puede decir, por tanto, que la función prediseñada de errores de transmisión $\Delta\phi_2^{(1)}(\phi_1)$ ha absorbido la función lineal $\Delta\phi_2^{(2)}(\phi_1)$ provocada por la desalineaciones.

La Figura 2.7.2(b) muestra la función resultante de errores de transmisión $\Delta\psi_2(\psi_1)$ para varios ciclos de engrane. Es evidente que la relación de transmisión ya no es una función lineal discontinua sino una función continua en la que los saltos de velocidad angular en los puntos de transferencia se han reducido notablemente.

La Figura 2.7.2(a) muestra un cambio en el origen de la función $\Delta\psi_2(\psi_1)$ con respecto al origen de $\Delta\phi_2^{(1)}(\phi_1)$. Dicho cambio de origen se determina mediante $c = b/2a$ y $d = b^2/4a$. Los parámetros c y d indican que los puntos iniciales de tangencia entre piñón y rueda se han modificado ligeramente sobre la superficie de contacto.

El coeficiente b caracteriza la sensibilidad de una transmisión por engranajes frente a los errores de transmisión. En el caso de un valor lo suficientemente grande del coeficiente b , la función parabólica $\Delta\psi_2(\psi_1)$ puede ser discontinua en los puntos de transferencia del

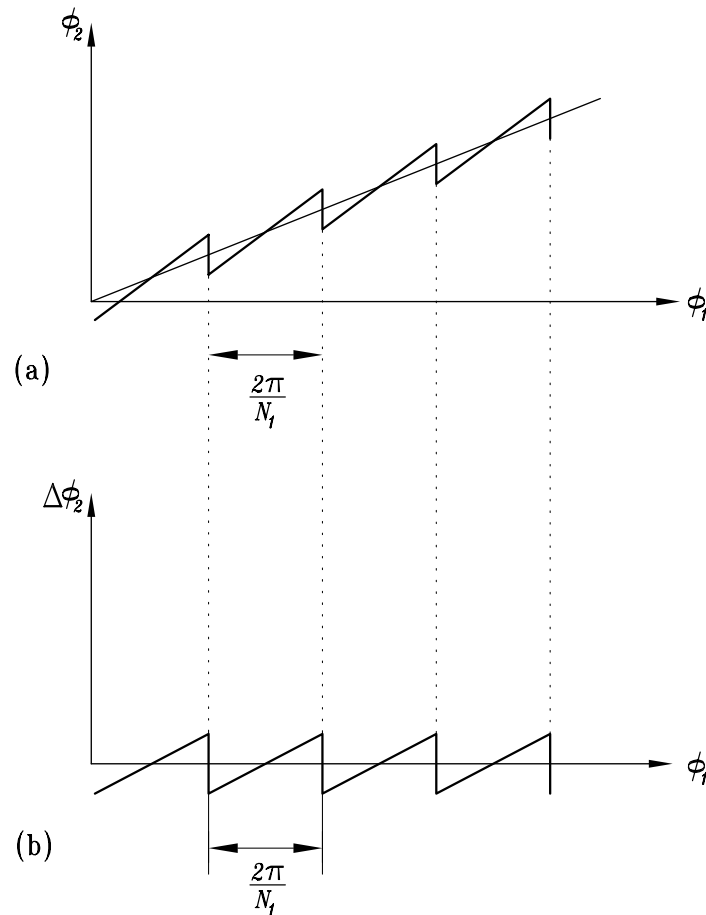


Figura 2.7.1: Relación de transmisión $\phi_2(\phi_1)$ y función $\Delta\phi_2(\phi_1)$ de errores de transmisión en una transmisión convencional desalineada.

engrane. Para evitar esto, la función prediseñada $\Delta\phi_2^{(1)}(\phi_1)$ debe ser proporcionada en el intervalo dado por

$$\phi_1(A) - \phi_1(B) \geq \frac{2\pi}{N_1} + \frac{b}{a} \quad (2.7.3)$$

donde A y B son los extremos de la función $\Delta\phi_2(\phi_1)$ indicados en la figura Fig 2.7.2(a). Los correspondientes extremos A^* y B^* en la función resultante $\Delta\psi_2(\psi_1)$ (Fig 2.7.2(b)) ocupan posiciones asimétricas respecto al eje de la parábola. No obstante, el engrane consecutivo de las parejas de dientes permite que la función resultante de errores de transmisión esté constituida por tramos simétricos como consecuencia del solapamiento de la función $\Delta\psi_2(\psi_1)$, siempre y cuando se cumpla la condición dada por (2.7.3). En la práctica, cuando el valor de

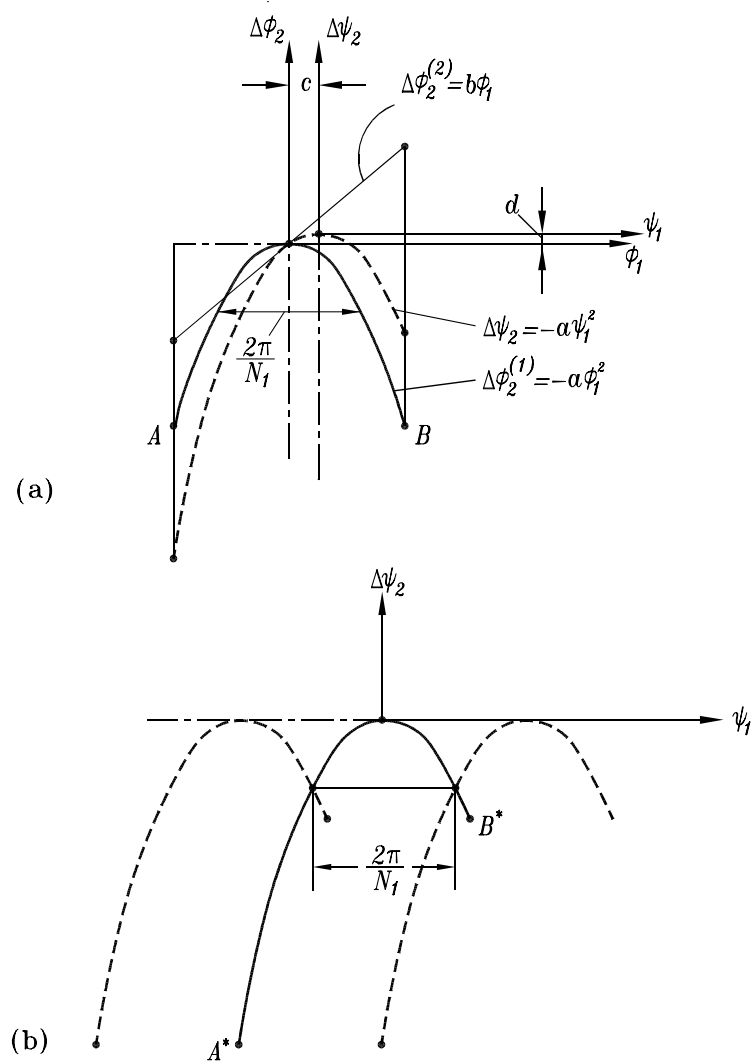


Figura 2.7.2: Interacción de una función parabólica y una lineal de errores de transmisión.

b es grande, se debe incrementar el valor máximo $|\Delta\phi_2^{(1)}(\phi_1)|_{max}$ de la función prediseñada de errores de transmisión (mediante el incremento del coeficiente a de la función parabólica) para conseguir una función continua $\Delta\psi_2(\psi_1)$.

La relación de transmisión de una transmisión por engranajes con una función prediseñada de errores de transmisión se muestra en la Figura 2.7.3(a). La función parabólica prediseñada de errores de transmisión se muestra en la Fig 2.7.3(b). Esta función debe ser negativa para que permita que la rueda gire con retraso con respecto al piñón. De este modo,

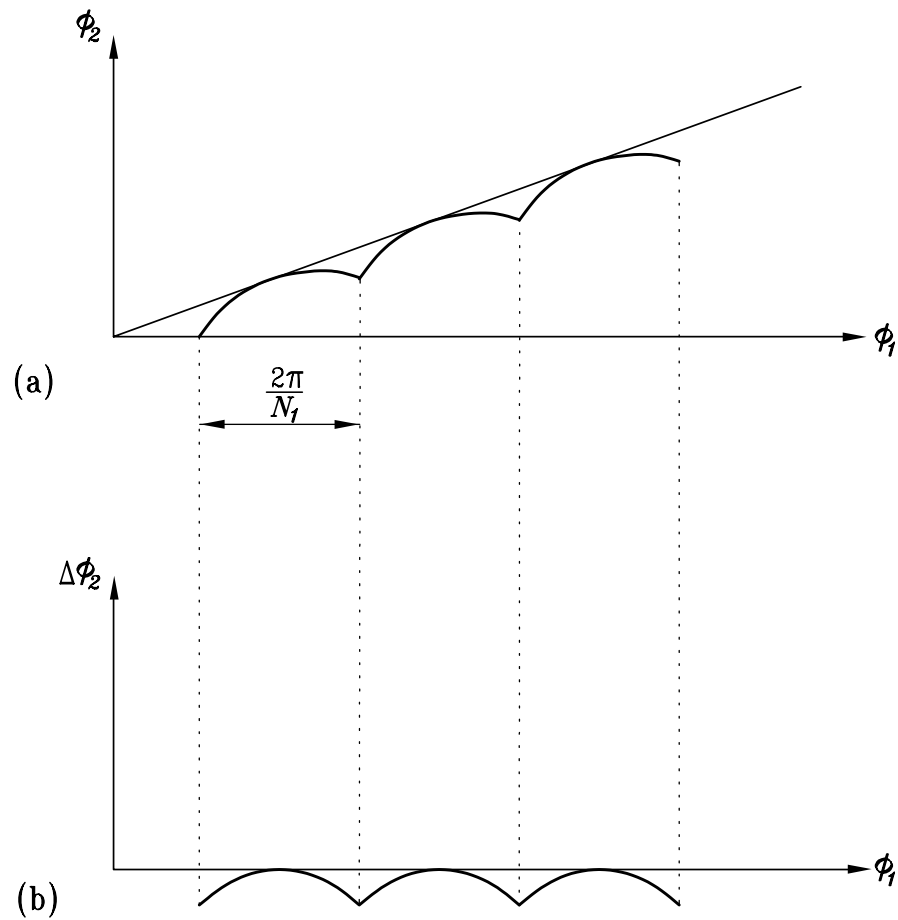


Figura 2.7.3: Relación de transmisión $\phi_2(\phi_1)$ y función $(\Delta\phi_2(\phi_1))$ de errores de transmisión en una transmisión con geometría modificada.

las deformaciones elásticas del elemento conducido respecto al elemento conductor permitirán suavizar la transferencia del engrane entre las parejas de dientes e incrementar el grado de recubrimiento debido a deformaciones elásticas.

Obviamente, la existencia de una función prediseñada parabólica de errores de transmisión induce tales errores en una transmisión sin errores de alineación estando representados mediante una función parabólica continua y periódica de valor máximo limitado. Sin embargo, esta función será capaz de absorber las funciones lineales de errores de transmisión producidas por los errores de alineación cuando éstos aparezcan. Como regla práctica de diseño se puede decir que los errores de transmisión producidos por desalineaciones se pueden

absorber por funciones prediseñadas parabólicas de errores de transmisión con el siguiente valor máximo

$$|\Delta\phi_2^{(1)}(\phi_1)|_{max} = a \left(\frac{\pi}{N_1} \right)^2 = [6 \sim 8] \text{ seg. ang.} \quad (2.7.4)$$

8. Aplicación del método de los elementos finitos en el diseño de engranajes

En el ciclo de diseño de una transmisión de engranajes, el análisis de tensiones constituye una etapa muy importante. En el presente proyecto fin de carrera, el análisis tensional se basa en el método de los elementos finitos [20] y permite: (i) determinar las tensiones de contacto y flexión, (ii) investigar la formación del contacto y (iii) detectar áreas de contacto severo durante el ciclo de engrane.

El primer paso en el análisis tensional es la construcción del modelo de elementos finitos, el cual requiere: (i) el mallado de los dientes, (ii) la definición de las superficies de contacto y (iii) el establecimiento de las condiciones de contorno. La fase de proceso o construcción del modelo de elementos finitos se realiza de forma automática y parametrizada, teniendo en cuenta la geometría de las superficies de los dientes. Una vez generado el modelo, se lleva a cabo el análisis por elementos finitos con un programa de propósito general [21, 22, 23, 24].

La generación del modelo de elementos finitos se realiza siguiendo los siguientes pasos:

Paso 1. Se determina el modelo geométrico del diente a partir de las ecuaciones de las superficies que lo conforman. La Figura 2.8.1(a) muestra el volumen a modelizar correspondiente a un diente de un engranaje helicoidal.

Paso 2. El volumen a modelizar de cada diente se divide en seis subvolúmenes utilizando las superficies auxiliares intermedias 1 a 6 según se observa en la Figura 2.8.1(b).

Paso 3. Se determinan analíticamente las coordenadas de los nodos en función del número de elementos previamente definidos en las direcciones longitudinal y del perfil del diente (Figura 2.8.1(c)).

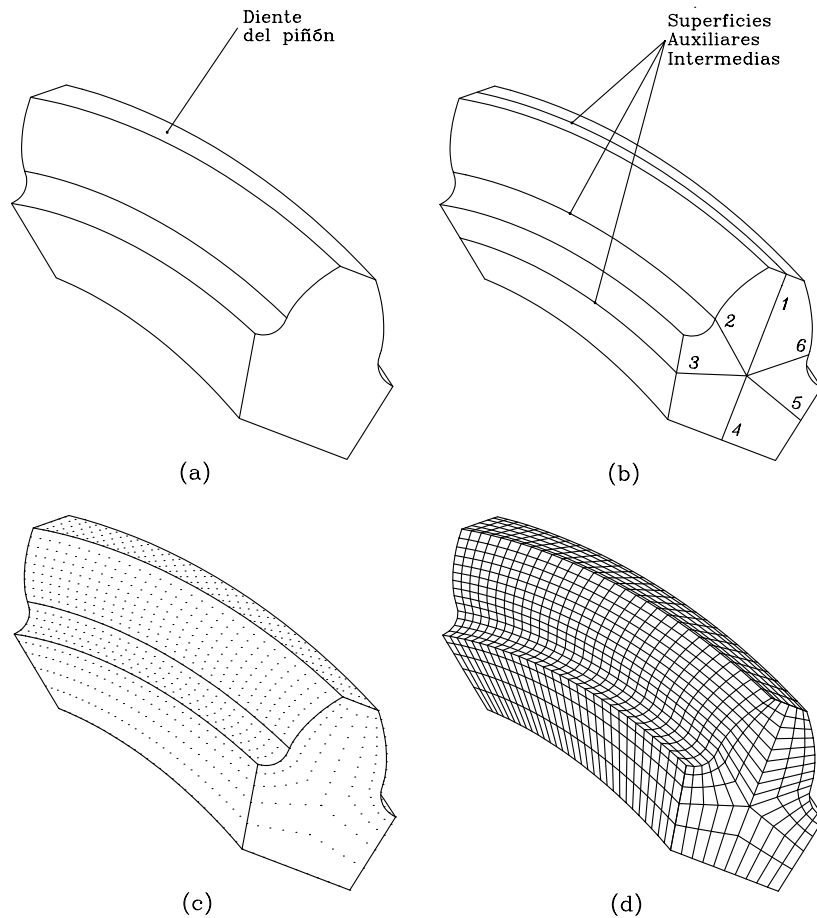


Figura 2.8.1: Esquema de: (a) volumen del diente a modelizar, (b) superficies auxiliares, (c) determinación de nodos y (d) discretización del volumen por elementos finitos.

Paso 4. Se discretiza cada uno de los seis subvolúmenes en elementos finitos utilizando los nodos determinados en el paso anterior (Figura 2.8.1(d)).

Paso 5. Las condiciones de contorno (véase Figura 2.8.2 para el caso de un modelo de tres dientes) se establece conforme a las siguientes ideas:

- (i) Se fijan los nodos a ambos lados y en la parte inferior de la base de la rueda, es decir, se restringen sus seis grados de libertad.
- (ii) Se define una superficie rígida formada por los nodos de ambos lados y de la parte inferior de la base del piñón. Las superficies rígidas son estructuras geométricas tridi-

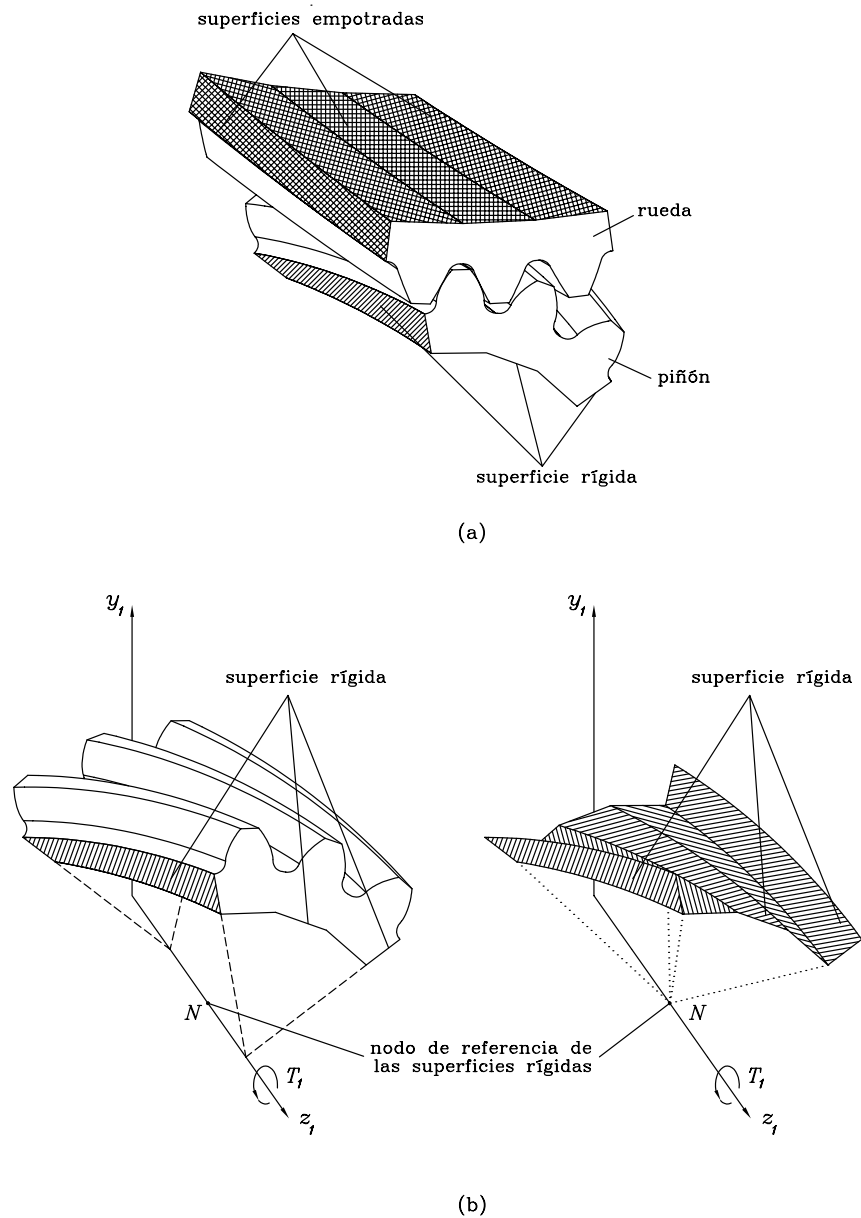


Figura 2.8.2: Esquema de: (a) condiciones de contorno en piñón y rueda, (b) superficies rígidas para la aplicación de las condiciones de contorno en el piñón.

mensionales que no pueden ser deformadas pero que pueden desplazarse o girar como sólido rígido [21, 22, 23, 24]. Además, las superficies rígidas disminuyen el tiempo de cálculo dado que las traslaciones y rotaciones están asociadas a las de un solo nodo, llamado nodo de referencia.

- (iii) Se define el nodo N en el eje del piñón como nodo de referencia de la superficie rígida. El nodo de referencia N y la superficie constituyen un cuerpo rígido.
- (iv) Se establece como único grado de libertad del nodo N el giro en torno al eje del piñón estando los restantes cinco grados de libertad restringidos a cero. La aplicación de un par T según el grado de libertad libre del nodo N permite transmitir dicho par al modelo del piñón a través de la superficie rígida.

Paso 6. El algoritmo de contacto del programa de análisis por elementos finitos utilizado requiere la definición de las superficies de contacto. El procedimiento de construcción del modelo permite identificar automáticamente todos los elementos necesarios para la formación de dichas superficies. Se deben definir dos tipos de superficies [21, 22, 23, 24], la superficie maestra y la superficie esclava. Generalmente la superficie maestra es aquella que pertenece al elemento más rígido o con el mallado menos denso, en caso de que los dos elementos en contacto tengan rigideces similares.

Las principales características del modelo así construido son las siguientes:

- (a) El modelo de elementos finitos se puede determinar automáticamente para cualquier posición del piñón y de la rueda obtenida a través del TCA (análisis del contacto). La convergencia está asegurada porque al menos existe un punto de contacto entre las superficies.
- (b) La suposición de la distribución de carga sobre la superficie del diente no es necesaria dado que el algoritmo de contacto del programa de análisis por elementos finitos [21, 22, 23, 24] permite obtener el área de contacto y las tensiones de contacto y flexión a partir de la aplicación de un par torsor en el eje de giro del piñón mientras la rueda se mantiene fija. El modelo de elementos finitos considerado tiene en cuenta las superficies reales de piñón y rueda en contacto en un determinado punto como resultado de la aplicación del análisis del contacto (TCA).
- (c) Se pueden obtener modelos de elementos finitos con cualquier número de dientes. Por ejemplo la Figura 2.8.3 muestra el modelo de elementos finitos de una transmisión

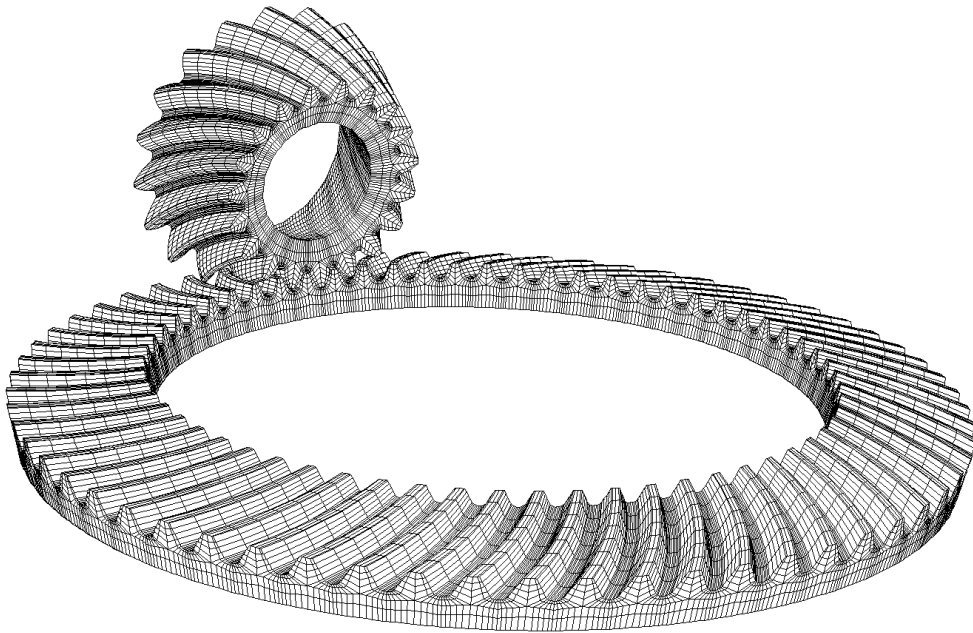


Figura 2.8.3: Modelo de elementos finitos de una transmisión de engranajes cónicos espirales completa.

cónica espiral completa. Modelos de tres o cinco pares de dientes son más adecuados dada la capacidad de los ordenadores utilizados para el análisis tensional. En la Figura 2.8.4 se muestra el modelo de elementos finitos de tres pares de dientes correspondientes a una transmisión de engranajes cónicos espirales. La Figura 2.8.5 muestra el modelo de elementos finitos también de tres pares de dientes correspondientes a una transmisión de engranajes rectos. La Figura 2.8.6 muestra un modelo de cinco pares de dientes correspondientes a una transmisión helicoidal.

El uso de modelos de elementos finitos de varios pares de dientes tiene las siguientes ventajas:

- (i) Las condiciones de contorno referente a restricciones en los movimientos están lo suficientemente alejadas de las zonas donde están aplicadas las cargas.

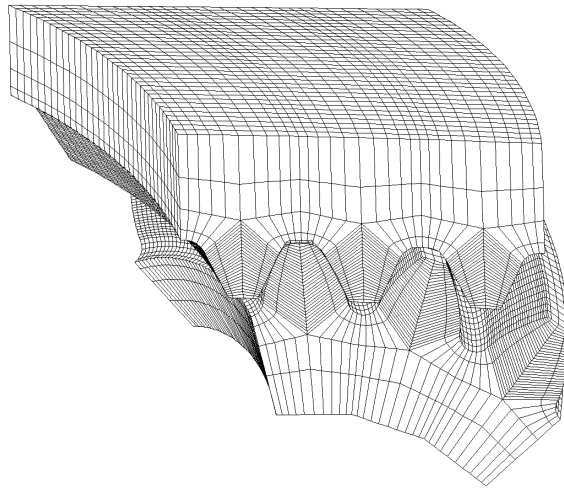


Figura 2.8.4: Modelo de elementos finitos de tres pares de dientes en una transmisión de engranajes cónicos espirales.

- (ii) Debido a la elasticidad de las superficies de los dientes de los engranajes pueden existir varias parejas de dientes en contacto al mismo tiempo. Por tanto, es posible estudiar el reparto de carga entre parejas de dientes en contacto simultáneo así como detectar contactos en el borde y áreas de contacto severo.

El método tradicional de la construcción del método de elementos finitos mediante la aplicación de programas CAD presenta, respecto al método propuesto en el presente proyecto, los siguientes inconvenientes.

- (1) La construcción del modelo requiere en primer lugar la determinación numérica del modelo alámbrico mediante curvas espaciales. El modelo alámbrico consiste en secciones planas de los dientes que son utilizadas para la obtención del modelo sólido.
- (2) El mallado requiere la aplicación de programas de diseño asistido por ordenador.
- (3) A continuación se deben definir las condiciones de contorno en el modelo.
- (4) El aumento de las secciones en el modelo alámbrico permite aumentar la precisión del modelo sólido pero requiere más tiempo.

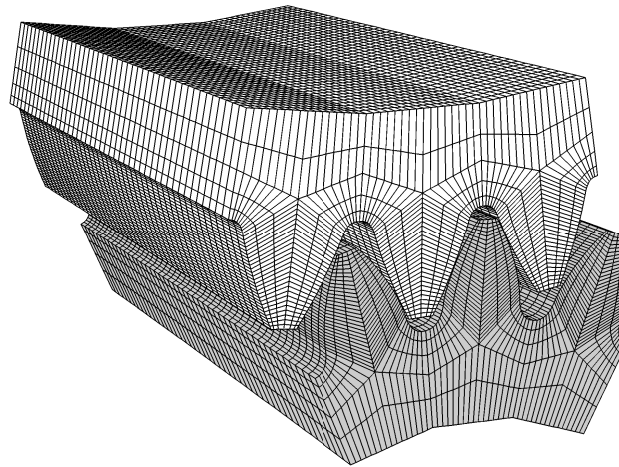


Figura 2.8.5: Modelo de elementos finitos de tres pares de dientes en una transmisión de engranajes rectos.

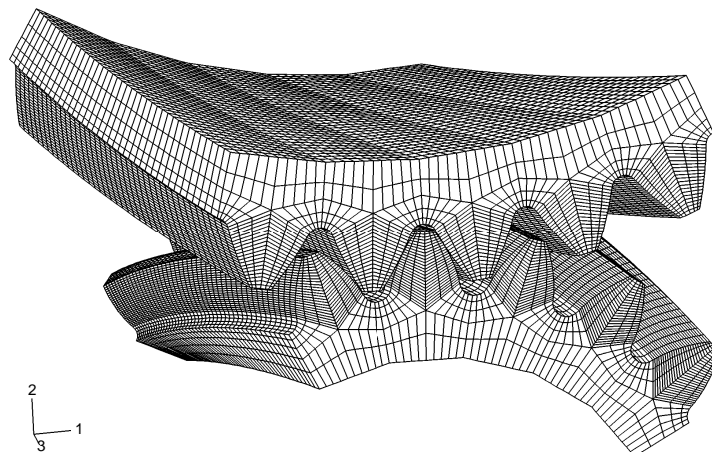


Figura 2.8.6: Modelo de elementos finitos de cinco pares de dientes en una transmisión de engranajes helicoidales.

- (5) El desarrollo de cada uno de los puntos descritos anteriormente requiere una formación adecuada del usuario del programa CAD, tiempo de elaboración, tienen que ser realizados para cada tipo de geometría propuesta en el diseño, para cada punto de contacto

y para los distintos casos de diseño considerados.

Capítulo 3

Diseño y generación de engranajes cilíndricos de perfil asimétrico

1. Introducción

En el presente capítulo se describe el procedimiento de generación de engranajes cilíndrico-rectos de perfil de evolvente tanto de perfil simétrico como de perfil asimétrico así como la geometría y movimientos de las herramientas involucradas en el proceso. Para ello se derivarán las expresiones analíticas de las superficies de los dientes de los engranajes, presentando los sistemas de coordenadas empleados y las matrices de transformación de coordenadas utilizadas. Este procedimiento constituye la base fundamental sobre la que se ha desarrollado la herramienta computacional IGD - Integrated Gear Design mediante la cual se han generado los modelos de las transmisiones para el análisis tensional mediante elementos finitos.

2. Generación de engranajes cilíndrico-rectos

El tallado de engranajes cilíndrico-rectos se basa en un proceso de generación haciendo uso de una fresa madre, que simula el movimiento de rodadura sin deslizamiento de una cremallera generadora sobre el cilindro primitivo del elemento de la transmisión que se fabrica.

Por tanto, la superficie de los dientes de los engranajes se obtiene como la envolvente de la familia de superficies de la cremallera en las sucesivas posiciones durante el proceso de generación. Adicionalmente, durante el proceso de tallado, la cremallera describe un movimiento oscilatorio lineal de avance a lo largo del eje del elemento dentado de la transmisión que está siendo generado.

El procedimiento de generación de engranajes cilíndrico-rectos descrito anteriormente se muestra representado esquemáticamente en la Figura 3.2.1. Tal como se observa en dicha figura, durante el proceso de fabricación el cilindro primitivo del engranaje que está siendo tallado es tangente al plano primitivo de la cremallera. Asimismo, el engranaje que está siendo tallado gira con una velocidad angular ω_{GB} , mientras que la cremallera se desplaza con una velocidad v_{RC} . En virtud de la condición de rodadura sin deslizamiento entre el plano primitivo de la cremallera y el cilindro primitivo del engranaje, se establece que la relación entre la velocidad angular ω_{GB} y la velocidad de traslación v_{RC} , viene dada por

$$v_{RC} = \omega_{GB} r_p \quad (3.2.1)$$

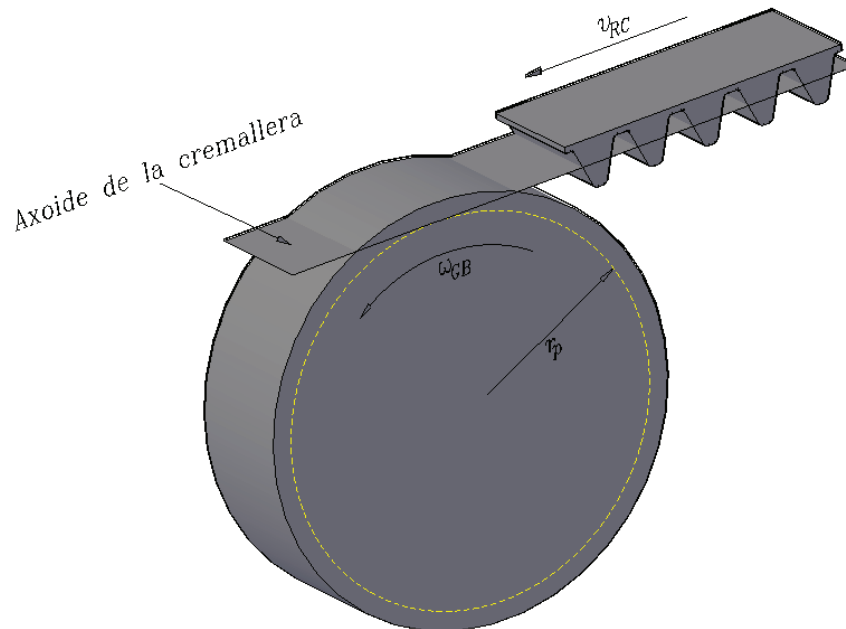


Figura 3.2.1: Esquema del procedimiento de fabricación de engranajes cilíndrico-rectos.

3. Sección transversal de la herramienta de tallado

En este apartado se describe la geometría de la sección transversal un diente de la cremallera de generación de un engranaje cilíndrico-recto. La citada sección transversal aparece representada en la Figura 3.3.1.

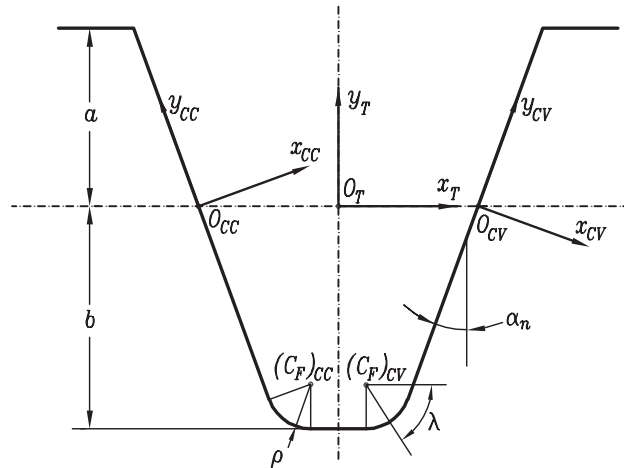


Figura 3.3.1: Sección transversal de la cremallera generadora de un engranaje cilíndrico-recto.

Los parámetros que definen la sección transversal de las cuchillas de tallado son los siguientes:

- Módulo de la transmisión de engranajes, m_n .

- Altura de cabeza o *addendum*, a .

$$a = m_n \quad (3.3.1)$$

- Altura de pie o *dedendum*, b .

$$b = 1,25m_n \quad (3.3.2)$$

- Ángulo de presión normal de referencia, α_n .

- Radio de acuerdo ρ .

¹Caso de transmisiones de engranajes estándar.

Para la definición analítica de las superficies generadoras de las herramientas de tallado, se han establecido en la sección transversal de la misma un total de tres sistemas de referencia auxiliares, los cuales aparecen representados en la Figura 3.3.1 y descritos a continuación:

- $S_T(x_T, y_T, z_T)$. Se trata de un sistema de referencia solidario a la sección transversal del diente de la herramienta de tallado y cuyo origen O_T se localiza en el punto de intersección entre el eje de simetría de la sección transversal y el plano primitivo de la herramienta de tallado empleada. El eje de coordenadas y_T se encuentra dirigido en la dirección de dicho eje de simetría y orientado en el sentido del *addendum*.
- $S_{CC}(x_{CC}, y_{CC}, z_{CC})$. Se trata de un sistema de referencia solidario al filo de la superficie izquierda de la herramienta de tallado, responsable de tallar el lado derecho del diente del engranaje. Su origen O_{CC} se localiza en el punto de intersección entre el filo de tallado considerado y el plano primitivo de la herramienta de tallado empleada. El eje de coordenadas y_{CC} se encuentra dirigido en la dirección de dicho filo de tallado y orientado en el sentido del *addendum*.
- $S_{CV}(x_{CV}, y_{CV}, z_{CV})$. Se trata de un sistema de referencia solidario al filo de la superficie derecha de la herramienta de tallado, responsable de tallar el lado izquierdo del diente del engranaje. Al igual que en el caso anterior, su origen O_{CV} se localiza en el punto de intersección entre el filo de tallado considerado y el plano primitivo de la herramienta de tallado empleada. El eje de coordenadas y_{CV} se encuentra dirigido en la dirección de dicho filo de tallado y orientado en el sentido del *addendum*.

Tal como se aprecia en la Figura 3.3.1, la superficie de generación de la herramienta de tallado Σ_T está compuesta fundamentalmente por cuatro regiones claramente diferenciadas, las cuales aparecen descritas a continuación:

- Superficie izquierda generadora $(\Sigma_P)_{CC}$. Esta superficie es la responsable del tallado del perfil activo derecho de los dientes del engranaje. La sección transversal de la superficie de tallado considerada en el presente proyecto es un perfil recto, de modo que la sección

transversal de las superficies activas de los dientes generados será un perfil de evolvente. La coordenada superficial paramétrica de caracterización de dicho perfil a lo largo de éste es u_{CC} , cuyo origen es coincidente con el origen O_{CC} y cuyo sentido positivo es coincidente con el sentido positivo del eje de coordenadas y_{CC} . El rango de variación de la coordenada paramétrica superficial u_{CC} es el siguiente:

$$-\left(\frac{b - \rho(1 - \operatorname{sen} \alpha_n)}{\cos \alpha_n}\right) < u_{CC} < \frac{a}{\cos \alpha_n}. \quad (3.3.3)$$

- Superficie derecha generadora $(\Sigma_P)_{CV}$. Esta superficie es la responsable del tallado del perfil activo izquierdo de los dientes del engranaje. Al igual que en el caso anterior, la sección transversal de la superficie de tallado considerada en el presente proyecto es un perfil recto y la sección transversal de las superficies activas de los dientes generados será un perfil de evolvente. La coordenada superficial paramétrica de caracterización de dicho perfil a lo largo de éste es u_{CV} , cuyo origen es coincidente con el origen O_{CV} y cuyo sentido positivo es coincidente con el sentido positivo del eje de coordenadas y_{CV} . Si el perfil es simétrico, el rango de variación de la coordenada paramétrica superficial u_{CV} es coincidente con el rango de variación de la coordenada paramétrica superficial u_{CC} , el cual aparece reflejado en la Ecuación (3.3.3). Si por el contrario se considera un perfil asimétrico con distintos ángulos de presión para el lado izquierdo y derecho del diente, los rangos de variación son distintos por lo que la Ecuación (3.3.3) habrá de ser particularizada con el valor del ángulo de presión correspondiente α_n .
- Radio del borde de cabeza del perfil izquierdo de la herramienta $(\Sigma_F)_{CC}$. Este radio de cabeza es el responsable del tallado de la superficie de entalle entre la superficie de pie y la superficie activa derecha de los dientes del engranaje. El centro del radio de cabeza es $(C_F)_{CC}$ y la coordenada paramétrica de caracterización del mismo a lo largo de éste es λ_{CC} , siendo su origen la posición horizontal y su sentido de giro antihorario. El rango de variación de la coordenada paramétrica superficial λ_{CC} es el siguiente:

$$\alpha_n < \lambda_{CC} < \frac{\pi}{2}. \quad (3.3.4)$$

- Radio del borde de cabeza del perfil derecho de tallado $(\Sigma_F)_{CV}$. Este radio de cabeza es el responsable del tallado de la superficie de entalle entre la superficie de pie y la superficie activa izquierda de los dientes del engranaje. El centro del radio de acuerdo es $(C_F)_{CV}$ y la coordenada paramétrica de caracterización de dicho radio de cabeza a lo largo de éste es λ_{CV} , siendo su origen la posición horizontal y su sentido de giro horario.

Por último, se representarán los puntos pertenecientes a cada una de las regiones que integran la superficie Σ_T en el sistema de referencia S_T . Para ello, y a efectos de simplificación, se representarán únicamente las ecuaciones correspondientes al perfil izquierdo de la herramienta de tallado. La derivación del perfil derecho seguirá un procedimiento similar.

3.1. Superficies de tallado de los perfiles activos de los dientes Σ_P

El vector de posición de un punto P perteneciente al perfil de una superficie de tallado representado en un sistema de referencia solidario al mismo y expresado en coordenadas homogéneas viene dado por la Ecuación (3.3.5). En dicha ecuación, la coordenada paramétrica superficial u corresponde a la distancia $\overline{O_{CC}P_{CC}}$.

$$\mathbf{r}_{CC}^{(P_{CC})}(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

Por otro lado, la matriz de transformación de coordenadas que resulta preciso aplicar para la transformación de coordenadas entre los sistemas de referencia S_{CC} hasta el sistema de referencia S_T es

$$\mathbf{M}_{T,CC} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n & -\text{sen } \alpha_n & 0 & -\frac{\pi}{4}m_n \\ \text{sen } \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.6)$$

De este modo, la ecuación del perfil de la superficie izquierda de tallado en el sistema de referencia S_T vienen dadas por

$$\mathbf{r}_T^{(P_{CC})}(u) = \mathbf{M}_{T,CC} \mathbf{r}_{CC}^{(P_{CC})}(u) \quad (3.3.7)$$

Finalmente, introduciendo, por un lado, las Ecuaciones (3.3.5) y (3.3.6) en la Ecuación (3.3.7) es posible obtener la representación de la superficie Σ_P en el sistema de referencia S_T tras el desarrollo de las operaciones matemáticas pertinentes. La Ecuación (3.3.8) se obtiene como resultado de dicho desarrollo matemático.

$$\mathbf{r}_T^{(P_{CC})}(u) = \begin{bmatrix} (u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n) \\ u \operatorname{cos} \alpha_n \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

3.2. Borde de cabeza del perfil de tallado Σ_F

El vector de posición de un punto P perteneciente al borde de cabeza representado en el sistema de referencia S_T se obtiene a través de la siguiente expresión analíticas de carácter vectorial

$$\mathbf{r}_T^{(P)} = \mathbf{r}_T^{(C_F)_{CC}} + \mathbf{r}_{(C_F)_{CC}}^{(P)} \quad (3.3.9)$$

Por un lado, el vector de posición de un punto P perteneciente al borde de cabeza representado en un sistema de referencia paralelo al sistema de referencia S_T y cuyo origen sea coincidente con el centro del radio de acuerdo C_F viene dado por

$$\mathbf{r}_{(C_F)_{CC}}^{(P)}(\lambda) = \begin{bmatrix} -\rho \operatorname{cos} \lambda \\ -\rho \operatorname{sen} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.10)$$

Por otro lado, el vector de posición del centro del arco circular correspondiente al borde de cabeza que posee la sección transversal de la herramienta de tallado considerada en el

sistema de referencia S_T viene dada por

$$\mathbf{r}_T^{(CF)CC} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\pi}{4}m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho(1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) - \rho \cos \alpha_n\right) \\ \rho - b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.11)$$

Finalmente, introduciendo, por un lado, las Ecuaciones (3.3.10) y (3.3.11) en la Ecuación (3.3.9) es posible obtener la representación de la superficie Σ_F en el sistema de referencia S_T tras el desarrollo de las operaciones matemáticas pertinentes. La Ecuación (3.3.12) se obtiene como resultado de dicho desarrollo matemático.

$$\mathbf{r}_T^{(P)}(\lambda) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\pi}{4}m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho(1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho(\cos \lambda - \cos \alpha_n)\right) \\ \rho(1 - \operatorname{sen} \lambda) - b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.12)$$

4. Superficie de la cremallera generadora

En el presente apartado se representa la geometría de las superficies de tallado de la cremallera generadora en un sistema de referencia solidario a la misma, y que se denotará de ahora en adelante como $S_C(x_C, y_C, z_C)$.

El proceso de transformación de coordenadas desde el sistema de referencia S_T , solidario a la sección transversal de las cuchillas de tallado, hasta el sistema de referencia S_C , en el que se describe la geometría de cada herramienta, se representa mediante las siguientes ecuaciones de transformación de coordenadas

$$\mathbf{r}_C^{(P)}(\theta, u) = \mathbf{M}_{CT}(\theta)\mathbf{r}_T^{(P)}(u) \quad (3.4.1)$$

$$\mathbf{r}_C^{(P)}(\theta, \lambda) = \mathbf{M}_{CT}(\theta)\mathbf{r}_T^{(P)}(\lambda) \quad (3.4.2)$$

Tal como se puede apreciar en las Ecuaciones (3.4.1) y (3.4.2), en todos los casos analizados las coordenadas superficiales paramétricas que representan la superficie de la herramienta

de generación de las transmisiones de engranajes son θ y u , en el caso de las superficies de tallado de las superficies activas de los dientes, y θ y λ , en el caso de las superficies de tallado de entalle entre la superficie de pie y las superficies activas de los dientes.

El proceso de transformación de coordenadas que representa la matriz \mathbf{M}_{CT} se muestra en la Figura 3.4.1. Tal como se aprecia en dicha figura, el proceso de transformación de coordenadas consta de un único movimiento de traslación a lo largo del eje Z_C de una distancia igual a θ .

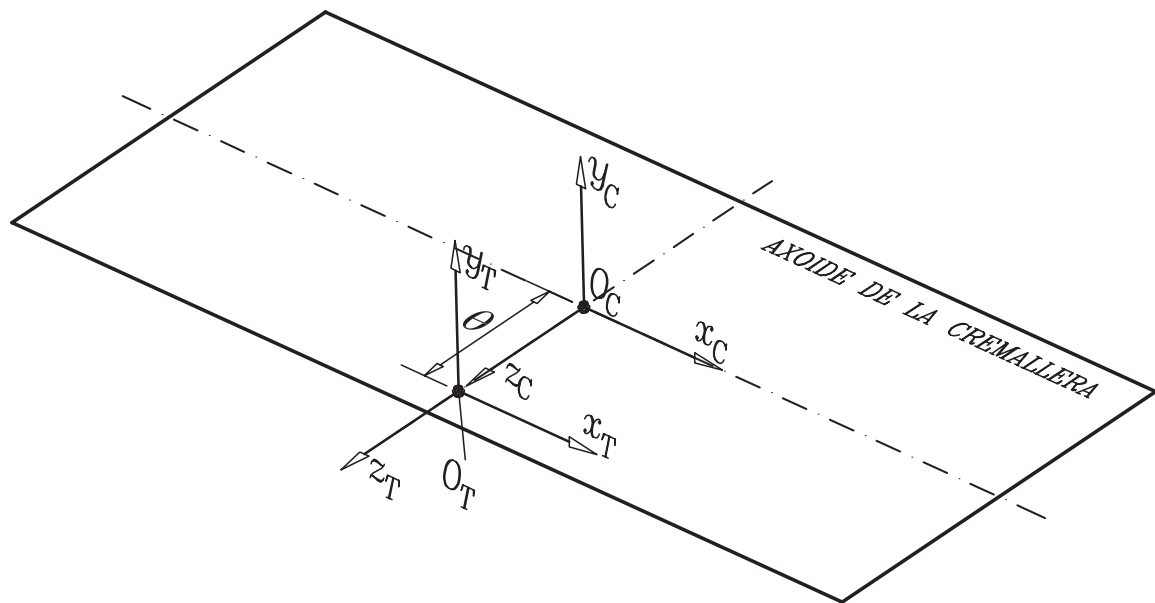


Figura 3.4.1: Proceso de transformación de coordenadas desde el sistema de referencia S_T hasta el sistema de referencia S_C .

A raíz de lo expuesto en el párrafo anterior resulta posible definir la matriz de transformación de coordenadas \mathbf{M}_{CT} mediante

$$\mathbf{M}_{CT}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.3)$$

Finalmente, introduciendo, por un lado, las Ecuaciones (3.3.8) y (3.4.3) en la Ecuación (3.4.1), y, por otro lado, las Ecuaciones (3.3.12) y (3.4.3) en la Ecuación (3.4.2), resulta posible obtener las expresiones analíticas de las superficies de tallado en el sistema de referencia S_C , dadas por las Ecuaciones (3.4.4) y (3.4.5),

$$\mathbf{r}_C^{(P)}(\theta, u) = \begin{bmatrix} (u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n) \\ u \operatorname{cos} \alpha_n \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.4)$$

$$\mathbf{r}_C^{(P)}(\theta, \lambda) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\operatorname{cos} \lambda - \operatorname{cos} \alpha_n)\right) \\ \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.5)$$

El rango de variación de la coordenada paramétrica superficial θ viene dado por

$$-\frac{W}{2} < \theta < \frac{W}{2} \quad (3.4.6)$$

5. Planteamiento de la ecuación de engrane

En el presente apartado se va a proceder a plantear una expresión analítica conocida en la Teoría de Engranajes como ecuación de engrane, la cual constituye la condición necesaria de existencia de las superficies de los elementos dentados que integran una transmisión de engranajes. Según la citada condición, la superficie de un engranaje existe si permanece tangente a la superficie de su herramienta generadora [12].

Las expresiones analíticas correspondientes a las ecuaciones de engrane desarrolladas y propuestas en geometría diferencial aparecen recogidas en las Ecuaciones (3.5.1) y (3.5.2) para la superficie activa y de la base del diente, respectivamente.

$$f(u, \theta, \phi) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \phi} = 0 \quad (3.5.1)$$

$$f(\lambda, \theta, \phi) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \phi} = 0 \quad (3.5.2)$$

Las ecuaciones de engrane presentadas anteriormente relacionan las coordenadas superficiales paramétricas θ y u , en el caso de la Ecuación (3.5.1), o θ y λ , en el caso de la Ecuación (3.5.2), con el parámetro generalizado del movimiento ϕ .

Para llevar a cabo el planteamiento de las Ecuaciones de Engrane (3.5.1) y (3.5.2), resulta preciso determinar previamente la representación paramétrica de la familia de superficies generada en el sistema de referencia solidario al engranaje por la superficie de la herramienta de tallado Σ_C , para lo cual resulta preciso definir un proceso de transformación de coordenadas desde el sistema de referencia S_C hasta el sistema de referencia solidario al engranaje que está siendo generado, el cual se denominará de ahora en adelante $S_1(x_1, y_1, z_1)$. Dicho proceso de transformación de coordenadas aparece representado de forma esquemática en la Figura 3.5.1, y se caracteriza por una matriz de transformación de coordenadas \mathbf{M}_{1C} , la cual viene dada por

$$\mathbf{M}_{1f}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

$$\mathbf{M}_{fC}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r_p \phi \\ 0 & 1 & 0 & r_p \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5.4)$$

$$\mathbf{M}_{1C}(\phi) = \mathbf{M}_{1f}(\phi) \mathbf{M}_{fC}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 & r_p (\text{sen } \phi - \phi \cos \phi) \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 & r_p (\cos \phi + \phi \text{sen } \phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5.5)$$

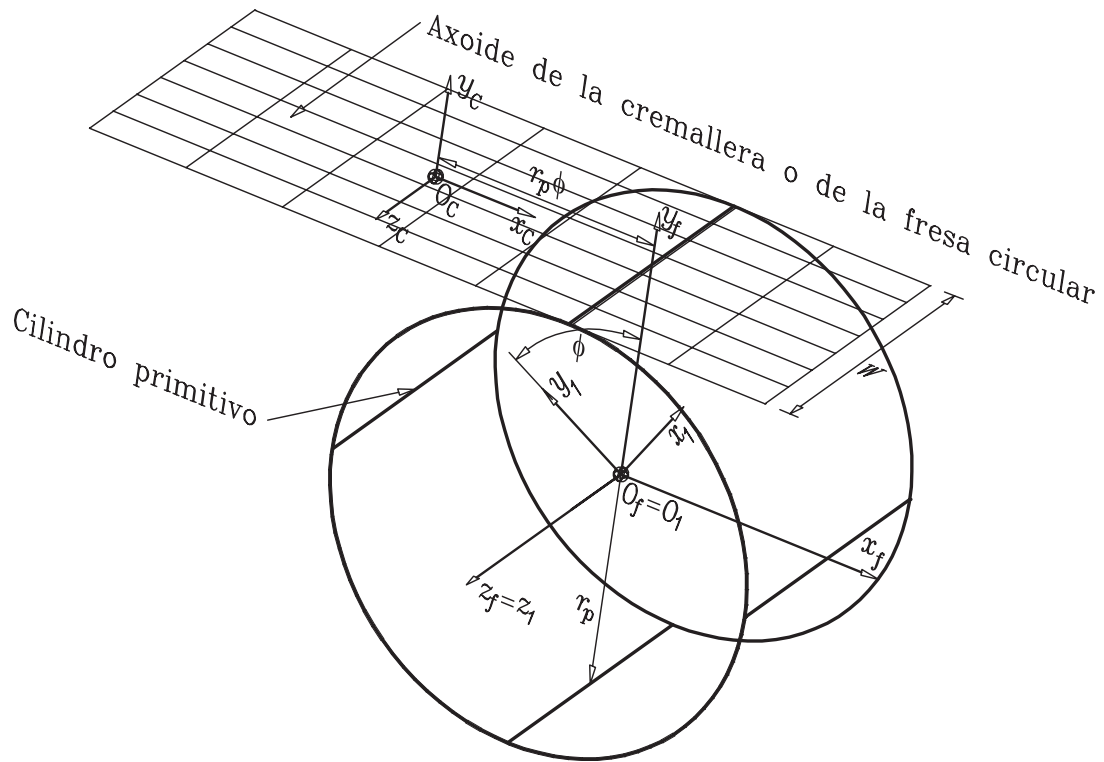


Figura 3.5.1: Representación esquemática del proceso de generación de engranajes cilíndricos

En el caso de que las Ecuaciones (3.5.1) y (3.5.2) se satisfagan, entonces la superficie de envolvente formada por la familia de posiciones adoptadas por la superficie de la cremallera talladora en el sistema de referencia S_1 , la cual se denominará de ahora en adelante por Σ_ϕ , existe, y puede ser representada en dicho sistema de referencia por medio de la consideración simultánea de las ecuaciones (3.5.6) y (3.5.7).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} x_1^{(P)}(u, \theta, \phi) \\ y_1^{(P)}(u, \theta, \phi) \\ z_1^{(P)}(u, \theta, \phi) \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{1C}(\phi) \mathbf{r}_C^{(P)}(u, \theta) \\ f(u, \theta, \phi) = 0 \end{array} \right. \quad (3.5.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} x_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) \\ y_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) \\ z_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{1C}(\phi) \mathbf{r}_C^{(P)}(\lambda, \theta) \\ f(\lambda, \theta, \phi) = 0 \end{array} \right. \quad (3.5.7)$$

Las ecuaciones (3.5.6) y (3.5.7) constituyen el modelo matemático de las superficies de los dientes de un engranaje cilíndrico-recto.

6. Geometría de los engranajes cilíndrico-rectos

En virtud de lo todo lo expuesto anteriormente, resulta preciso distinguir dos casos distintos, los cuales aparecen descritos en los siguientes apartados.

6.1. Superficies de los perfiles activos de los dientes.

La representación paramétrica de la superficie de envolvente Σ_ϕ correspondiente a este caso se obtiene por sustitución de las Ecuaciones (3.4.4) y (3.5.5) en la primera ecuación del conjunto (3.5.6). Los resultados de dicha sustitución aparecen recogidos a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = \cos \phi \left(u \sin \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + u \cos \alpha_n \sin \phi + r_p (\sin \phi - \phi \cos \phi) \\ y_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = -\sin \phi \left(u \sin \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + u \cos \alpha_n \cos \phi + r_p (\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ z_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = \theta \end{array} \right. \quad (3.6.1)$$

Tomando como punto de partida el conjunto de expresiones analíticas designado por (3.6.1) resulta posible obtener analíticamente cada uno de los tres términos que componen la Ecuación de Engrane (3.5.1). La determinación de dicha terna de términos aparece recogida

en las Ecuaciones (3.6.2), (3.6.3) y (3.6.4).

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \cos \phi \operatorname{sen} \alpha_n + \cos \alpha_n \operatorname{sen} \phi \\ -\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \alpha_n + \cos \alpha_n \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \phi \left(u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + u \cos \alpha_n \cos \phi + r_p \phi \operatorname{sen} \phi \\ -\cos \phi \left(u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) - u \cos \alpha_n \operatorname{sen} \phi + r_p \phi \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.4)$$

Introduciendo las expresiones analíticas (3.6.2), (3.6.3) y (3.6.4) en la Ecuación (3.5.1), operando y reordenando términos, es posible obtener la formulación final de la ecuación de engrane, la cual aparece recogida en la Ecuación (3.6.5).

$$f(u, \theta, \phi) = u + \frac{\pi}{4} m_n \operatorname{sen} \alpha_n - r_p \phi \operatorname{sen} \alpha_n = 0 \quad (3.6.5)$$

Así pues, finalmente las Ecuaciones (3.6.1) y (3.6.5) constituyen conjuntamente el modelo matemático de la superficie de los perfiles activos de los dientes de un engranaje cilíndrico-recto.

6.2. Superficies de entalle entre la superficie de pie y las superficies activas de los dientes.

La representación paramétrica de la superficie de envolvente Σ_ϕ correspondiente a este caso se obtiene por sustitución de las Ecuaciones (3.4.5) y (3.5.5) en la primera ecuación

del conjunto designado por (3.5.7). Los resultados de dicha sustitución aparecen recogidos a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = -\cos \phi \left(\frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ \quad + \operatorname{sen} \phi (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) + r_p (\operatorname{sen} \phi - \phi \cos \phi) \\ y_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = \operatorname{sen} \phi \left(\frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ \quad + \cos \phi (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) + r_p (\cos \phi + \phi \cos \phi) \\ z_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = \theta \end{array} \right. \quad (3.6.6)$$

Tomando como punto de partida el conjunto de expresiones analíticas designadas por (3.6.6), resulta posible obtener analíticamente cada uno de los tres términos que componen la Ecuación de Engrane (3.5.2). La determinación de dicha terna de términos aparece recogida en las Ecuaciones (3.6.7), (3.6.8) y (3.6.9).

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \rho \cos \phi \operatorname{sen} \alpha - \rho \operatorname{sen} \phi \cos \lambda \\ -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \alpha - \rho \cos \phi \cos \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \phi \left(\frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ \quad + \cos \phi (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) + r_p \phi \operatorname{sen} \phi \\ \cos \phi \left(\frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ \quad - \operatorname{sen} \phi (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) + r_p \phi \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.9)$$

Introduciendo las expresiones analíticas (3.6.7), (3.6.8) y (3.6.9) en la Ecuación (3.5.2), operando y reordenando términos, es posible obtener la formulación final de la ecuación de engrane, la cual aparece recogida en la Ecuación (3.6.10).

$$f(\lambda, \theta, \phi) = \frac{\pi}{4}m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho(1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho(\cos \lambda - \cos \alpha_n) + \frac{\rho(1 - \operatorname{sen} \lambda) - b}{\operatorname{tg} \lambda} r_p \phi = 0 \quad (3.6.10)$$

Así pues, finalmente las Ecuaciones (3.6.6) y (3.6.10) constituyen conjuntamente el modelo matemático de la superficie de entalle entre la superficie de pie y las superficies activas de los dientes de un engranaje cilíndrico-recto.

Capítulo 4

IGD (Integrated Gear Design)

1. Introducción

En el presente proyecto fin de carrera se ha utilizado para la generación virtual de la geometría y los modelos de elementos finitos la herramienta computacional IGD - Integrated Gear Design, desarrollada por los miembros del Grupo de Investigación Transmisiones Avanzadas de Engranajes (GITAE) adscrito al Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Politécnica de Cartagena. En esta herramienta computacional se ha volcado la experiencia de más de diez años de desarrollo y aplicación de la teoría de engranajes moderna y su aplicación al diseño y análisis de transmisiones avanzadas de engranajes. En este capítulo se hace una breve introducción al procedimiento de uso para el diseño y análisis de transmisiones de engranajes rectos de perfil asimétrico así como de sus técnicas de simulación del engranaje, análisis de contacto y generación automática de modelos de elementos finitos.

Al ejecutar el programa IGD, y una vez superado el chequeo de licencia mediante la conexión con el servidor de licencias del grupo GITAE, aparecerá la ventana principal (Figura 4.1.1). Ésta está diseñada de manera que su uso es simple e intuitivo. En ella se pueden apreciar cuatro regiones: el menú principal en la parte superior, las opciones de visualización justo debajo del menú principal, el árbol del proyecto en la parte izquierda y la ventana de visualización que cubre gran parte de la interfaz de usuario.

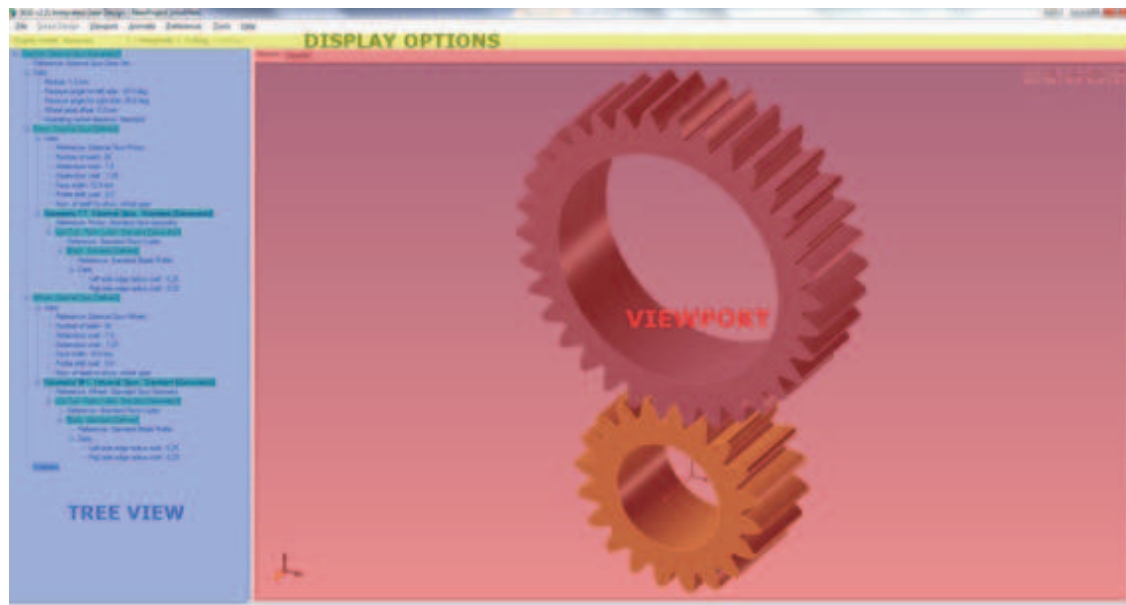


Figura 4.1.1: Ventana principal del programa IGD.

2. Definición de la geometría de los engranajes

El primer paso es la definición del tipo de transmisión a generar y analizar. Para ello, se selecciona File/New Project en el menú principal, apareciendo una ventana que permite seleccionar el tipo de transmisión deseada. Solamente aparecerán disponibles aquellas transmisiones para las cuales el usuario tiene licencia de uso, como se observa en la Figura 4.2.1.

Como se puede observar en la Figura 4.2.1, y para la transmisión objeto de análisis en este proyecto, se selecciona la opción Spur Gear o transmisión de engranajes rectos, dentro del grupo de transmisiones de ejes paralelos y del subgrupo de engranajes de dentado externo. Una vez se ha seleccionado la opción Spur Gear, y cliqueado con el ratón en el botón Ok, se crearán en el árbol de proyecto las ramas correspondientes a una transmisión de engranajes rectos, siendo éstas las referidas al piñón, a la rueda y a sus correspondientes análisis.

Se continuará con el diseño pinchando con el botón derecho sobre la rama GearSet: External Spur [Not defined] en el árbol de proyecto, tras lo cual aparecerá el menú contextual correspondiente. En este menú se seleccionará Define. A continuación aparecerá una ventana de introducción de datos de definición de la transmisión tales como el módulo, el ángulo de

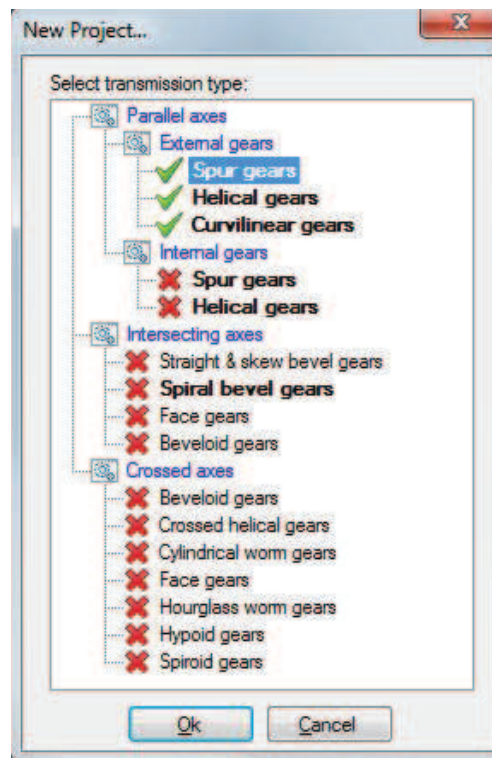


Figura 4.2.1: Ventana de selección del tipo de transmisión.

presión del lado izquierdo del diente, el ángulo de presión del lado derecho del diente, y nos dará la posibilidad de seleccionar el montaje de los engranajes a la distancia entre centros nominal o introducir una distancia predeterminada. Para definir una de las transmisiones que se analizarán en este proyecto, se introducirán los datos correspondientes tal como se indica en la figura 4.2.2.

Una vez se ha completado la introducción de dichos datos, se continuará con la definición del piñón y rueda de la transmisión. Se ha de proceder de manera similar a la definición de la transmisión, haciendo clic con el botón derecho sobre la rama Pinion del árbol de proyecto y seleccionando Define en el menú contextual. En este caso se introducirán los datos referentes al número de dientes, coeficiente de adendo, coeficiente de dedendo, ancho de cara del diente, coeficiente de desplazamiento y número de dientes del engranaje que mostrará mas adelante en la ventana de visualización del modelo (Figura 4.2.3).

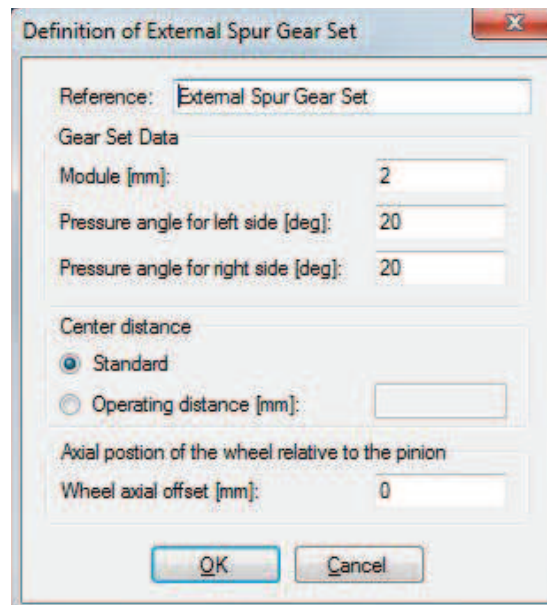


Figura 4.2.2: Ventana de definición de un transmisión de engranajes cilíndrico-rectos.

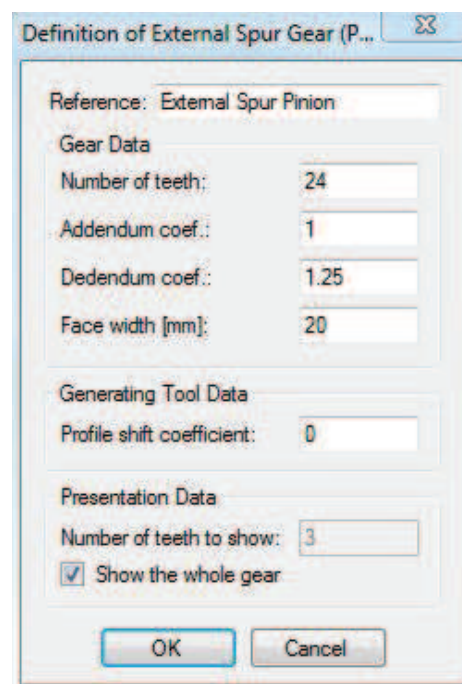


Figura 4.2.3: Ventana de definición de un engranaje recto.

Al aceptar los datos introducidos para el piñón de la transmisión, éste quedará definido, pero para su generación, se tendrá que definir igualmente el perfil de la cremallera generadora en la correspondiente rama del árbol de proyecto. Se pulsará el botón derecho del ratón en Blade: Standard [Not defined], y se seleccionará Define. Puesto que se trata de un perfil estándar, solamente habrá que definir el redondeo de cabeza del perfil de la herramienta responsable de tallar el perfil de base del engranaje (Figura 4.2.4).

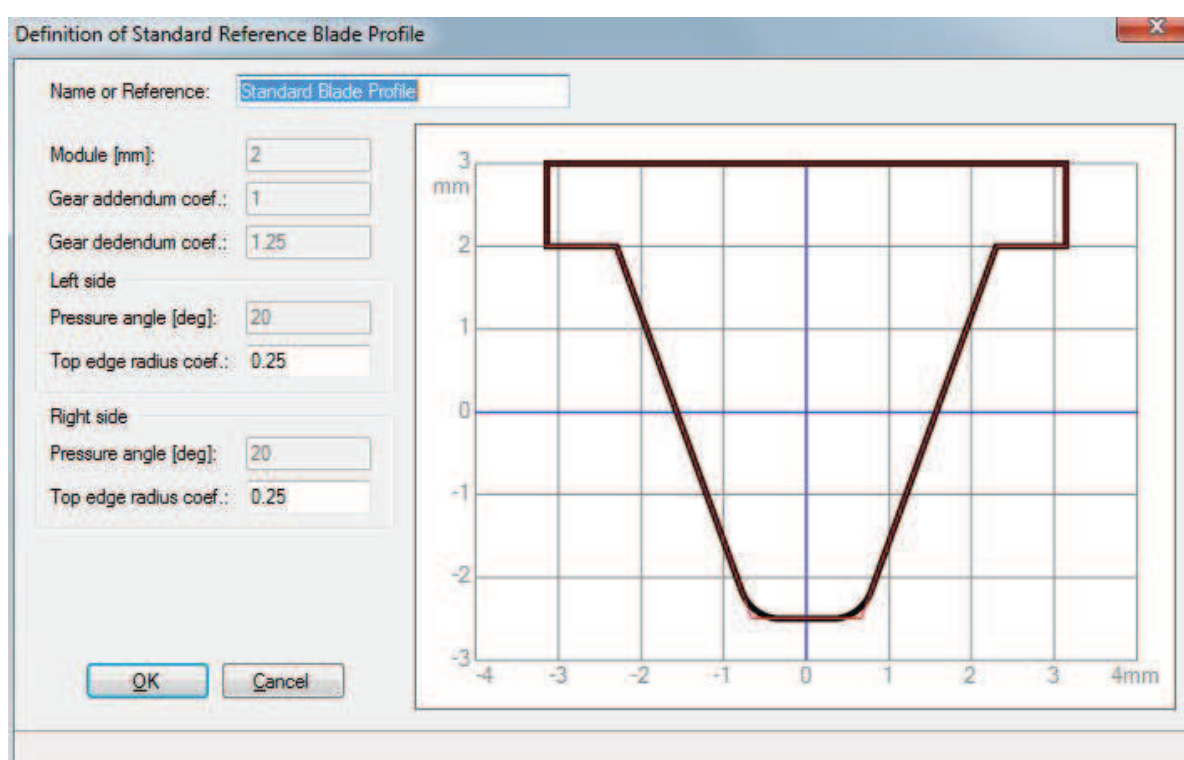


Figura 4.2.4: Ventana de definición del perfil de la cremallera de tallado.

Después de los pasos anteriormente descritos, el programa tiene la información suficiente para la generación de los modelos tanto de la cremallera como del engranaje. Para ello, se seleccionará con el botón derecho la rama Gen Tool: Rack-Cutter: Standard [Generated] en el árbol del proyecto para a continuación seleccionar Generate and show en el menú contextual. En la ventana de visualización se podrá ver la geometría de la cremallera de generación, tal como se muestra en la Figura 4.2.5.

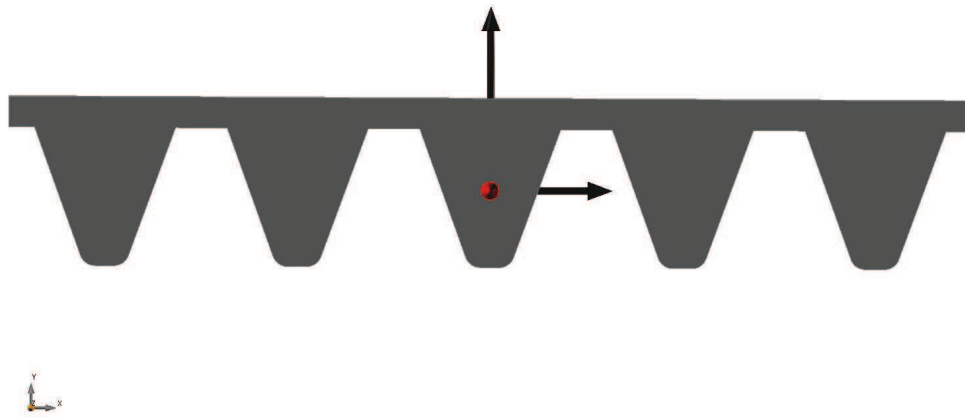


Figura 4.2.5: Geometría de la cremallera generadora del engranaje.

El siguiente paso sería la generación del piñón de la transmisión. Se hace clic con el botón derecho en la rama `Geometry P1: External Spur: Standard [Defined]` del árbol de proyecto, seleccionando la opción `Generate and show`. En la ventana de visualización de IGD se mostrará el modelo 3D del engranaje correspondiente como se observa en la Figura 4.2.6.

De manera similar a lo descrito anteriormente se generará la geometría de la rueda de la transmisión que se está estudiando, en cuyo caso se introducen los datos que se muestran en la Figura 4.2.7.

La cremallera generadora de la rueda será la misma que para el piñón (Figura 4.2.5). La geometría de la rueda de 34 dientes se observa en la Figura 4.2.8.

2.1. Generación de engranajes de perfil asimétrico

En general, el procedimiento a utilizar para la generación virtual de un engranaje cilíndrico-recto de perfil asimétrico es similar a lo expuesto anteriormente. El único punto que cambia es la introducción de distintos ángulos de presión para cada uno de los lados del diente del engranaje en la ventana de definición de la transmisión.

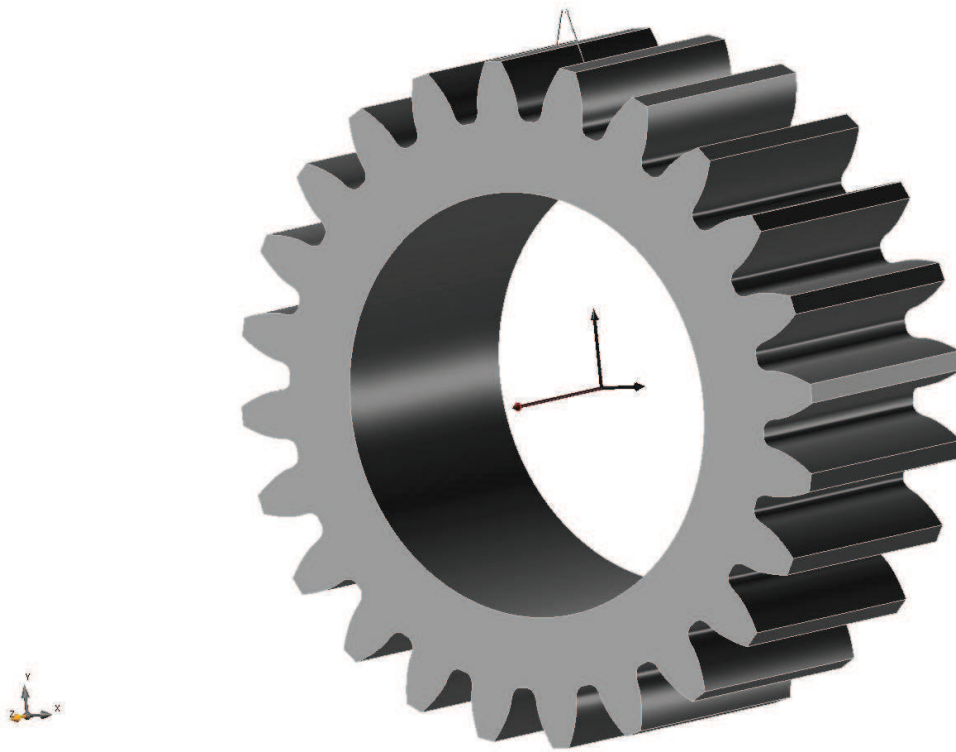


Figura 4.2.6: Modelo 3D de un engranaje cilíndrico recto generado con IGD.

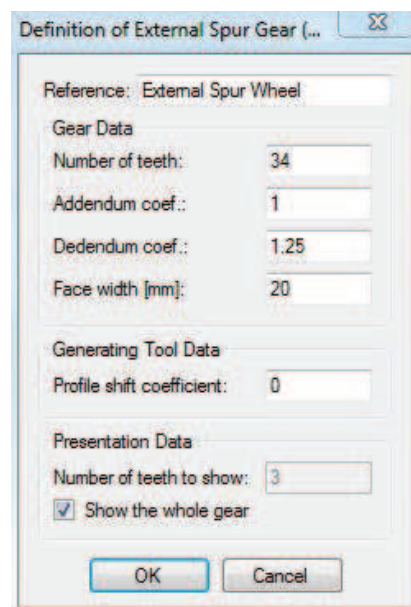


Figura 4.2.7: Ventana de definición de un engranaje recto.

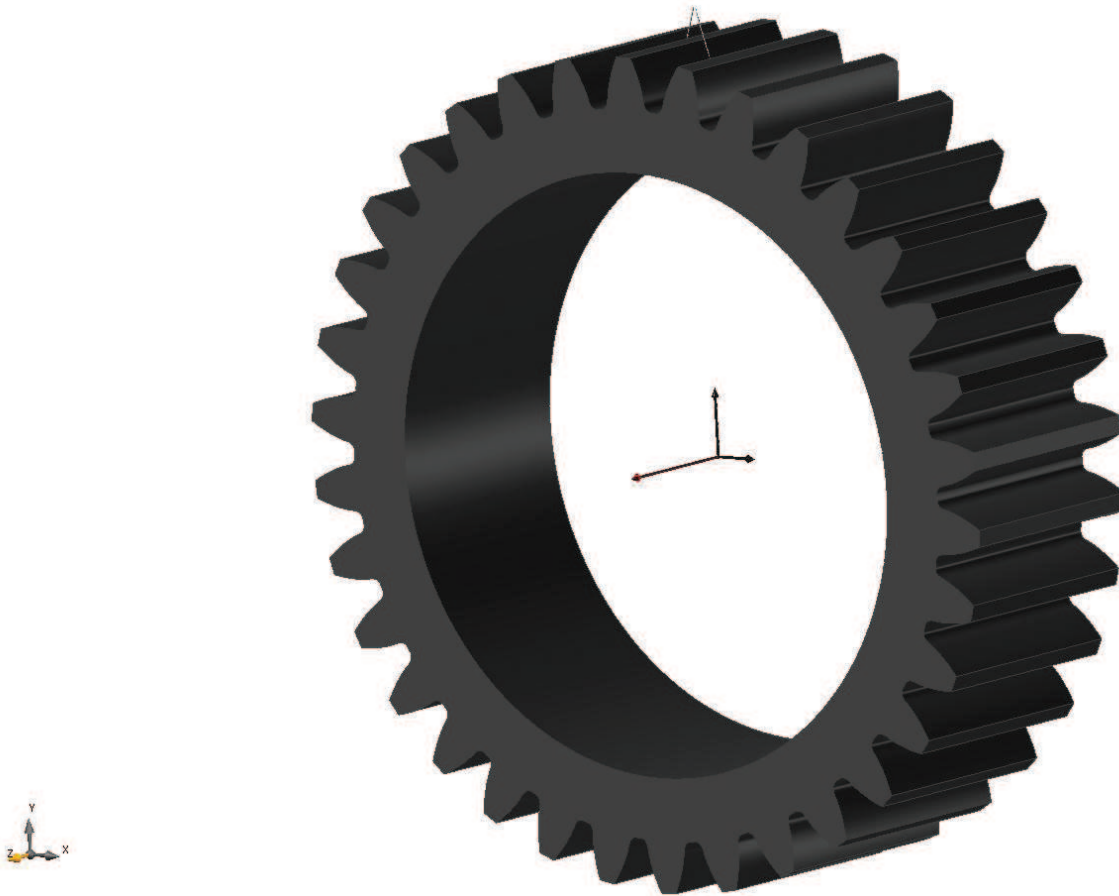


Figura 4.2.8: Modelo 3D de la rueda de una transmisión de engranajes cilíndrico-rectos generado con IGD.

Como ejemplo se va a considerar la generación de un engranaje asimétrico con un ángulo de presión en el lado izquierdo de 20° y un ángulo de presión en el lado derecho de 30° . Al igual que para el caso de engranaje de perfil simétrico, el tipo de transmisión a seleccionar será *Spur Gear* en la ventana de definición de la transmisión (Figura 4.2.1). Para continuar se ha de hacer clic con el botón derecho en la rama del árbol de proyecto *GearSet: External Spur [Not defined]* y seleccionando *Define* en el menú contextual. En la ventana de definición de la transmisión, se tendrá que introducir un ángulo de 20° como ángulo de presión para el lado izquierdo (*Pressure angle for the left side*) y un ángulo de 30° como ángulo de presión para el lado derecho (*Pressure angle for the right side*) como muestra la figura 4.2.9.

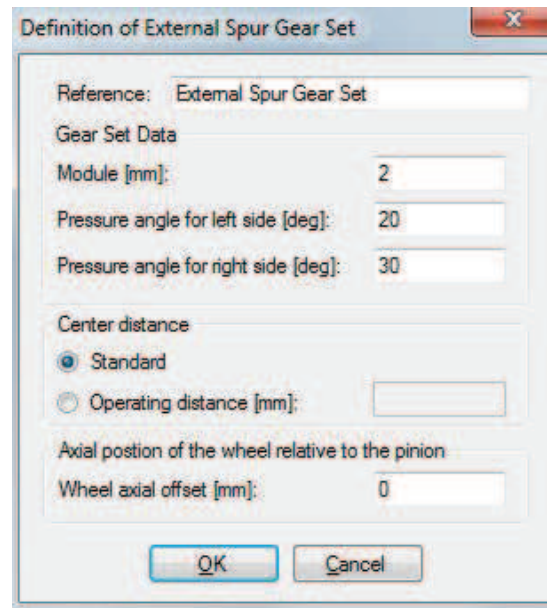


Figura 4.2.9: Ventana de definición de una transmisión de engranajes rectos para un caso de perfil asimétrico.

Al igual que para el caso de la transmisión con engranajes de perfil simétrico, se continuará la definición del piñón y rueda de la transmisión. Se ha de proceder de manera similar a como se definió la transmisión, haciendo clic con el botón derecho sobre la rama Pinion del árbol de proyecto y seleccionando Define en el menú contextual. En este caso se introducirán los mismos datos que para el diseño con perfil simétrico ya que los datos básicos de la transmisión y de definición de piñón y rueda son los mismos: número de dientes, coeficiente de adendo, coeficiente de dedendo, ancho de cara del diente, coeficiente de desplazamiento del y número de dientes (Figura 4.2.3).

Para definir el perfil de la cremallera generadora, se pulsará el botón derecho del ratón en la correspondiente rama del árbol de proyecto Blade: Standard [Not defined], y se seleccionará Define. Por defecto, si un engranaje dispone de una geometría estándar, ésta se creará por defecto, siendo éste el caso de los engranajes cilíndricos para los que por defecto se genera la geometría de perfil de evolvente. En la ventana de definición del perfil de la cremallera se definirá el redondeo de cabeza del perfil de la herramienta responsable de tallar el perfil de

base del engranaje, ya que los ángulos de presión ya han sido asignados según los datos de definición de la transmisión (Figura 4.2.10).

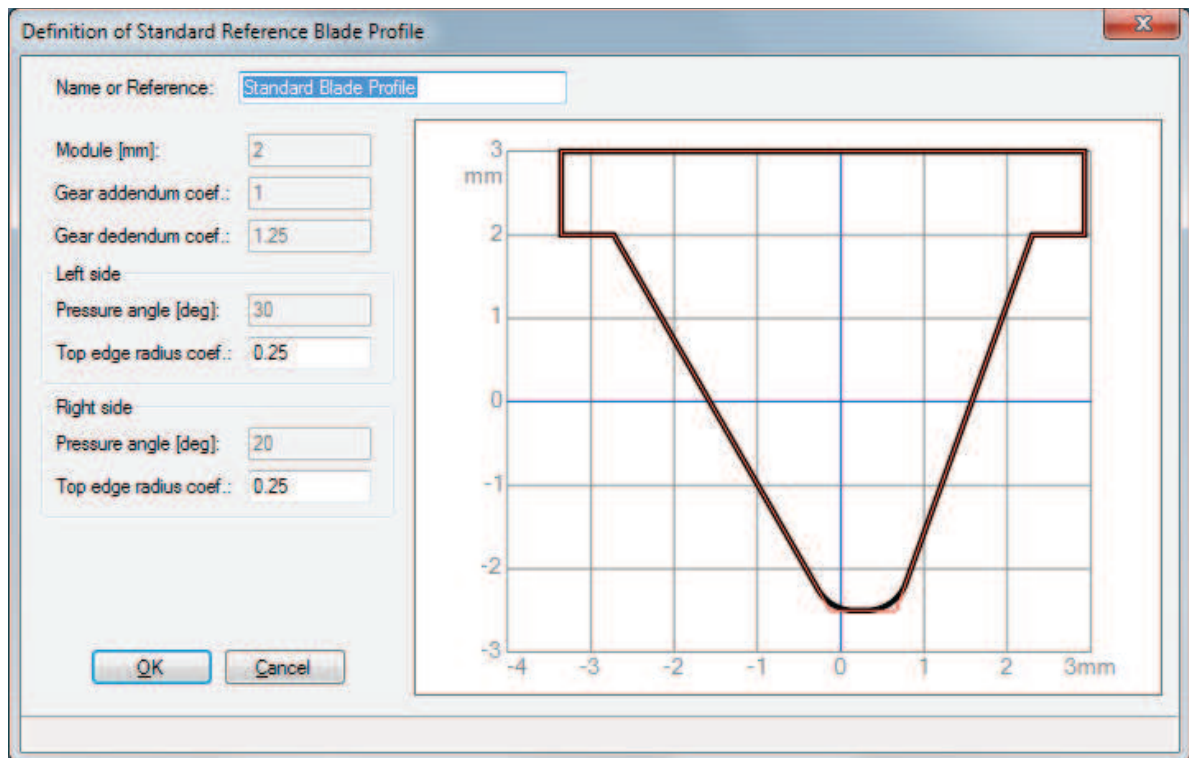


Figura 4.2.10: Ventana de definición del perfil de la cremallera de tallado para un caso de perfil asimétrico.

A continuación se podrá generar el modelo 3D de la cremallera generadora. Se habrá de hacer clic derecho con el ratón sobre la rama Gen Tool: Rack-Cutter: Standard [Generated] en el árbol del proyecto para a continuación seleccionar *Generate and show* en el menú contextual. En la ventana de visualización se podrá ver la geometría de la cremallera de generación de perfil asimétrico, tal como se muestra en la Figura 4.2.11.

El siguiente paso es la generación del piñón de la transmisión de perfil asimétrico. Se hace clic con el botón derecho en la rama Geometry P1: External Spur: Standard [Defined] del árbol de proyecto, seleccionando la opción *Generate and show*. En la ventana de visualización de IGD se mostrará el modelo 3D del engranaje correspondiente como se observa en la Figura 4.2.12.

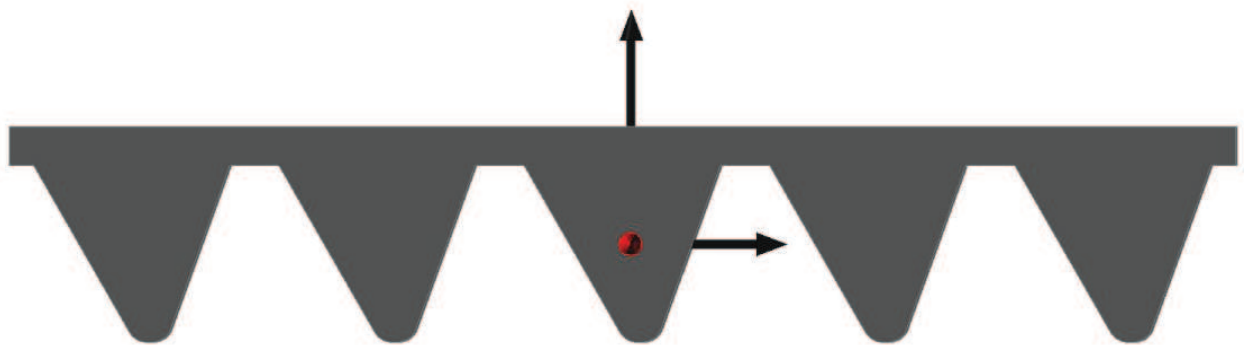


Figura 4.2.11: Geometría de la cremallera generadora de perfil asimétrico.

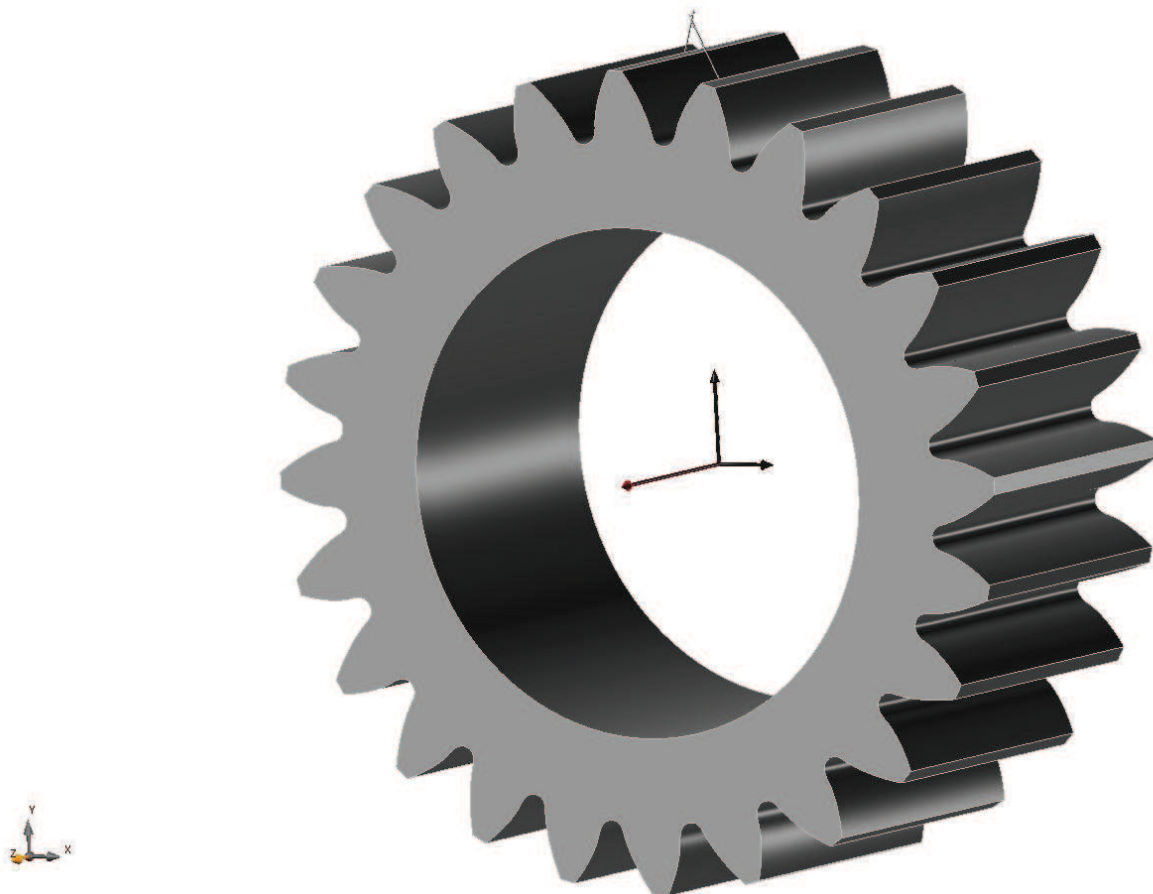


Figura 4.2.12: Modelo 3D del piñón de la transmisión de engranajes cilíndrico-rectos de perfil asimétrico generado con IGD.

3. Definición de la geometría modificada y aplicación de un rebaje de cabeza

A la hora de modificar la geometría estándar de un engranaje, IGD permite añadir tantas nuevas geometrías como el diseñador quiera. Estas geometrías modificadas permiten considerar herramientas generadoras con perfiles distintos al estándar (perfil recto) e incluso aplicar rebajes de cabeza y de pie para eliminar zonas de altas tensiones de contacto.

Para definir una geometría modificada, será necesario disponer en el árbol de proyecto de una transmisión definida con un piñón y una rueda con su geometría estándar generada. A continuación, se hará clic con botón derecho en la rama del árbol Pinion: External Spur [Defined] y se seleccionará la opción Add new geometry del menú contextual.

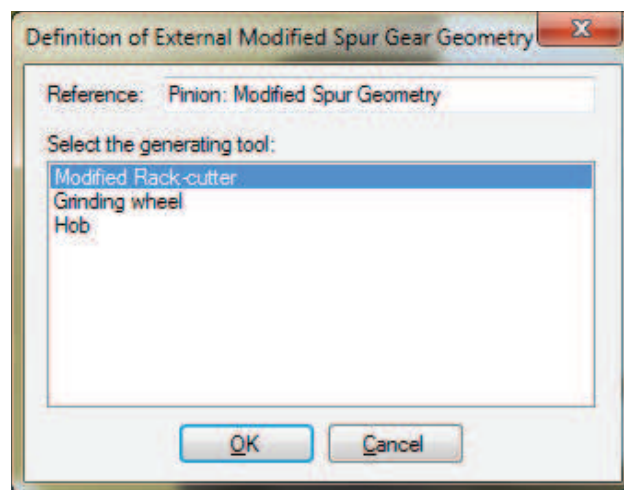


Figura 4.3.1: Ventana de definición de la geometría modificada.

En la ventana de definición de una nueva geometría se elegirá la opción **Modified spur gear geometry**, con lo que el programa añadirá una nueva rama en el árbol de proyecto de IGD con el nombre **Geometry P2: External Spur: Modified [Not defined]**. Se vuelve a hacer clic con botón derecho en la nueva rama mencionada anteriormente y se selecciona la opción **Define** del menú contextual. La Figura 4.3.1 muestra la ventana de definición del tipo de geometría modificada. A la hora de modificar la geometría estándar de un engranaje cilíndrico, se debe

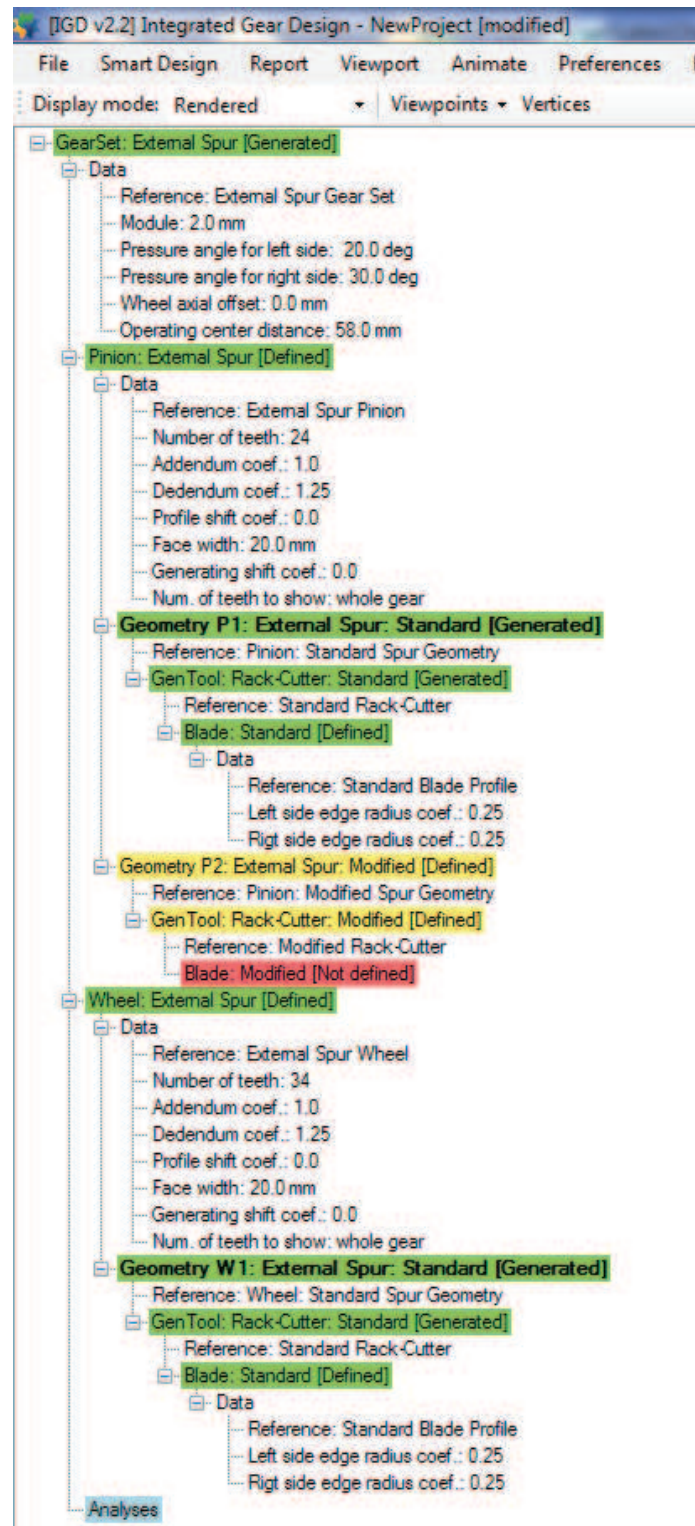


Figura 4.3.2: Ventana de definición de la geometría modificada.

considerar la herramienta con la que se piensa aplicar la modificación. En nuestro caso se seleccionará la opción Modified rack-cutter.

La Figura 4.3.2 muestra el árbol del proyecto tal como se tiene configurado hasta el momento. Una vez definida la geometría modificada mediante una cremallera de perfil modificado, se hará clic con el botón derecho en la rama del árbol Blade Modified [Not defined], siendo éste el único elemento del árbol que queda sin definir por el momento, y se selecciona la opción Define en el menú contextual. Para introducir un rebaje de cabeza, se considera la definición del blade tal como se muestra en la figura 4.3.3. No hay que olvidar hacer clic en el botón Copy TO the other side para trasladar la misma definición de la geometría del perfil al otro lado de la cuchilla.

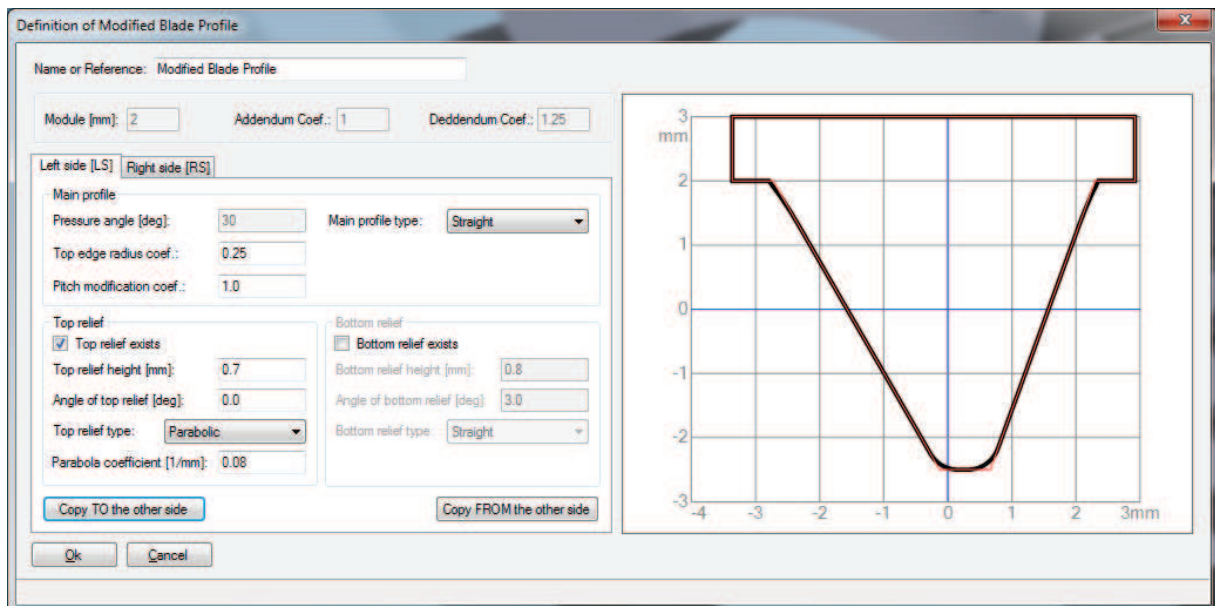


Figura 4.3.3: Ventana de definición del perfil modificado de una cremallera.

Una vez definido el perfil modificado de la cremallera, se podrán generar los modelos de la herramienta generadora y del engranaje de perfil asimétrico con rebaje de cabeza.

Para la rueda se habrá de añadir una nueva geometría modificada para aplicar un cierto rebaje de cabeza para lo que se seguirá un procedimiento similar al expuesto anteriormente. La Figura 4.3.4 muestra el modelo 3D de la geometría de la rueda con perfil asimétrico y

con rebaje de cabeza.

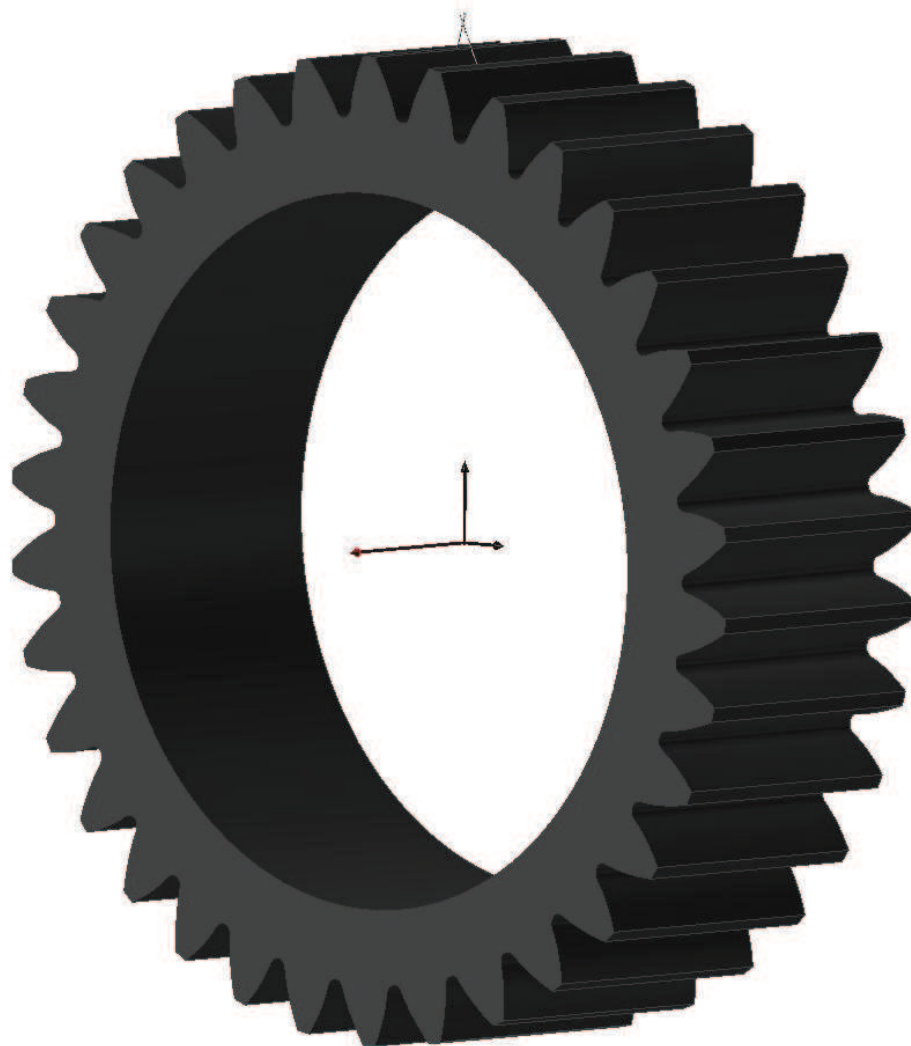


Figura 4.3.4: Modelo 3D de la geometría de la rueda con perfil asimétrico y con rebaje de cabeza.

4. Análisis del contacto y simulación del engrane

Una vez definidas las geometrías a considerar para el piñón y la rueda, llega el momento de comenzar con el análisis del contacto y la simulación del engrane. Como resultados se

obtendrá tanto el patrón de contacto sobre las superficies como la función de errores de transmisión.

Para definir un análisis, hacer clic con el botón derecho sobre la rama *Analyses* del árbol de proyecto. Se desplegará un menú contextual en el que se seleccionará *Add new analysis*, que a su vez despliega otro submenú donde se podrán elegir los distintos análisis disponibles para la transmisión de engranajes. En este submenú se elegirá el tipo de análisis TCA - FEM analysis, compuesto por el análisis del contacto (TCA) y la generación de los modelos de elementos finitos correspondientes (FEM). Esta elección generará un nuevo elemento en el árbol de proyecto denominado *Analysis 1: TCA & FEM [not defined]*.

Para definir el análisis hay que pinchar con el botón derecho en *Analysis 1: TCA & FEM [not defined]* y seleccionar *Define* en el menú contextual, con lo cual aparecerá un cuadro de diálogo con una serie de opciones como muestra la Figura 4.4.1.

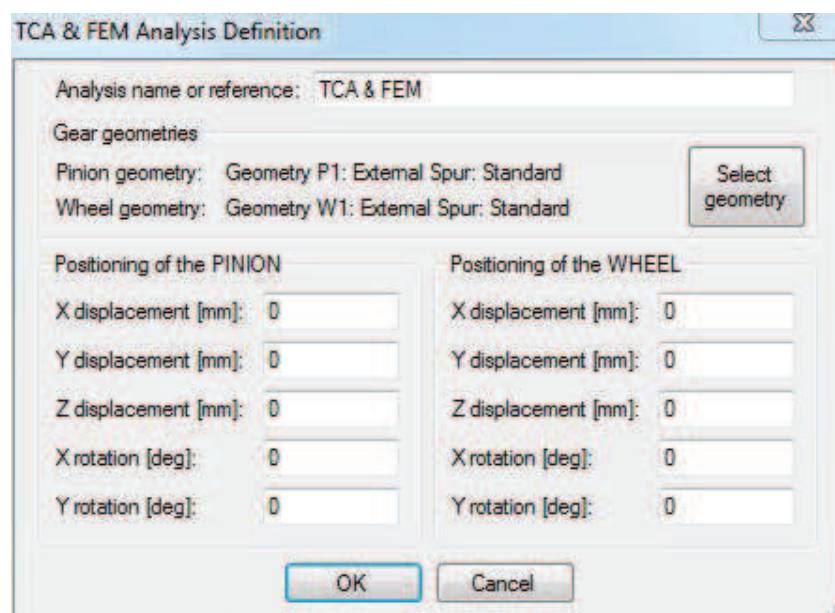


Figura 4.4.1: Ventana de definición de un análisis TCA & FEM.

Básicamente, la definición de un análisis consiste en la selección de las geometrías de los engranajes con los que se va a realizar el análisis e introducir los errores de posicionado de piñón y rueda en caso de que estos existan. Esto permitirá analizar como cambia el patrón de

contacto con los distintos errores de alineación, fabricación y montaje, y la obtención de las correspondientes funciones de errores de transmisión. Para realizar un análisis en condiciones de perfecta alineación, se introducirá cero en todos los cuadros de texto.

Una vez hecho este paso, se ha de continuar definiendo el análisis de contacto (TCA) entre los dientes del piñón y la rueda. Para ello, se hace clic con el botón derecho sobre la rama del árbol (TCA) Tooth Contact Analysis 1 [Not defined] y se selecciona la opción Define. La Figura 4.4.2 muestra la ventana de definición de un análisis de contacto (TCA).

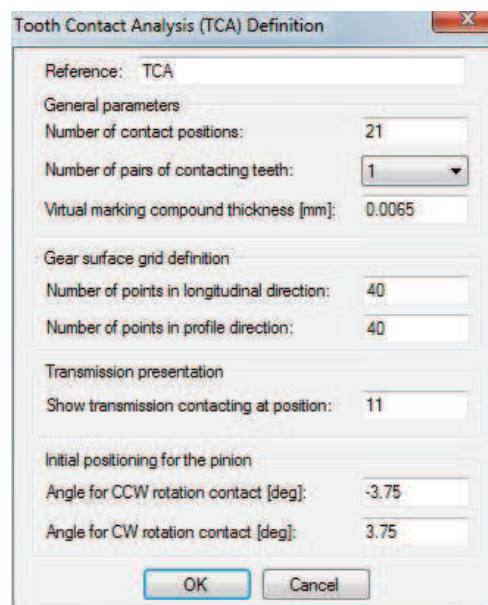


Figura 4.4.2: Ventana de definición de un análisis de contacto (TCA).

En la ventana de definición del análisis de contacto (TCA) se habrá de definir los siguientes parámetros:

- Número de posiciones de contacto: 21
- Número de parejas de dientes en contacto. IGD permite considerar 1 o 3 parejas de dientes en contacto. En los análisis de contacto utilizados en este proyecto se considerará una pareja de dientes en contacto.

- Definición de una malla sobre la superficie de piñón y rueda mediante la introducción del número de puntos en dirección longitudinal y en la dirección del perfil. Por lo general, la consideración de una malla 40 x 40 suele dar buenos resultados.
- Posición para la representación de la transmisión. Se elegirá uno de los 21 puntos de contacto.
- Posición inicial del piñón cuando se considera una dirección de giro antihoraria y una dirección de giro horaria. En esta posición se establecerá el punto medio de contacto para el TCA.

Una vez definido el análisis, el árbol de proyecto tendrá una estructura como la que se muestra en la Figura 4.4.3.

A la hora de realizar el análisis de contacto se ha de elegir el sentido de rotación del piñón de la transmisión. Obsérvese en la Figura 4.4.3 que existen dos posibles objetos de análisis de contacto: Pinion CCW (Z+) rotation TCA y Pinion CW (Z+) rotation TCA. El primero de ellos permite el análisis de contacto cuando el piñón gira en el sentido contrario a las agujas del reloj (CCW) y el segundo cuando gira en el sentido de las agujas del reloj (CW). Para ejecutar un análisis, se hará clic con el botón derecho del ratón sobre el objeto de análisis correspondiente y se seleccionará la opción **Compute** en el menú contextual. Transcurridos unos minutos los resultados del análisis se mostrarán en la pantalla.

La Figura 4.4.4 muestra un resumen de los resultados de un análisis de contacto cuando el piñón gira en sentido contrario a las agujas del reloj. En la parte superior se observa el patrón de contacto, que como era de esperar, cubre toda la superficie de los dientes del piñón. En la parte inferior se observa la función de errores de transmisión que como también era de esperar para una transmisión completamente alineada son cero a lo largo de todo el ciclo de engrane.

En la Figura 4.4.5 se muestra el patrón de contacto sobre las superficies de los dientes del piñón. De la misma manera, la Figura 4.4.6 muestra el patrón de contacto sobre las superficies de los dientes de la rueda.

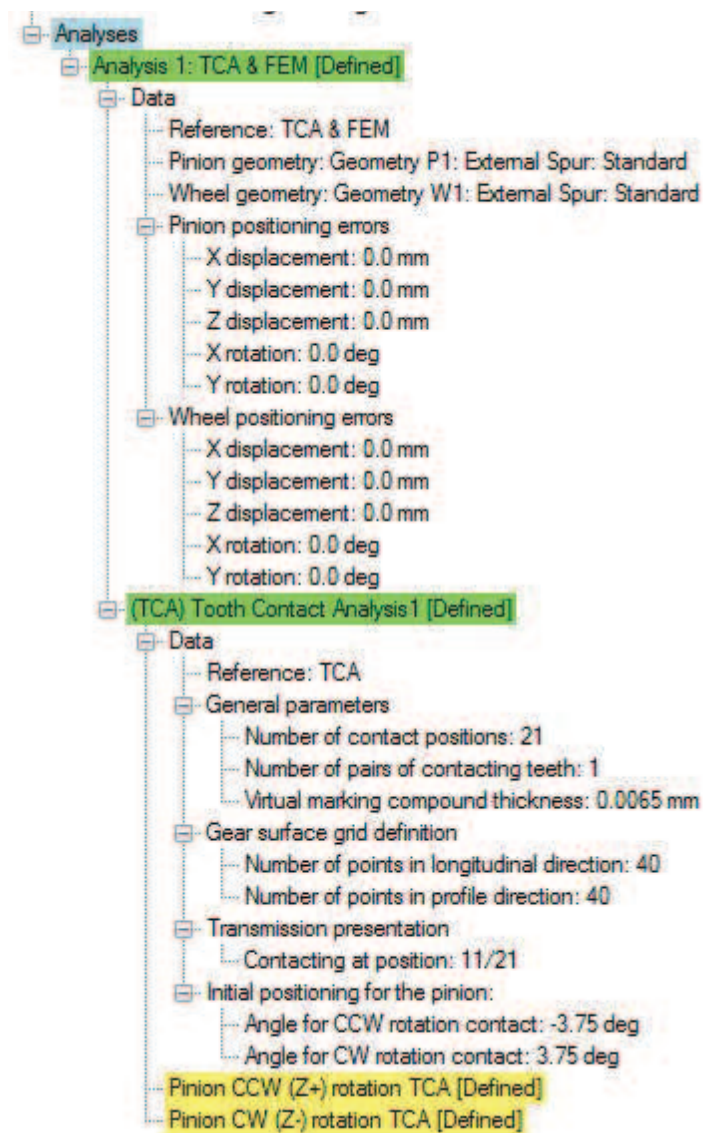


Figura 4.4.3: Estructura del árbol de proyecto una vez definido un análisis de contacto.

En caso de considerar un error angular en el posicionado del piñón de 0.1° , los patrones de contacto se desplazan hacia uno de los bordes de las superficies como se observa en las Figuras 4.4.7 y 4.4.8.



Figura 4.4.4: Resumen de los resultados de un análisis de contacto.

5. Generación automática del modelo de elementos finitos

Una vez analizado el contacto, es posible la generación automática del modelo de elementos finitos. Para ello, se hace clic con el botón derecho sobre la rama del árbol de proyecto Analysis 1: TCA & FEM [Defined] y se selecciona del menú contextual la opción Add new FE model. Un nuevo objeto se añade de esta forma a la rama de árbol. Para su definición se ha

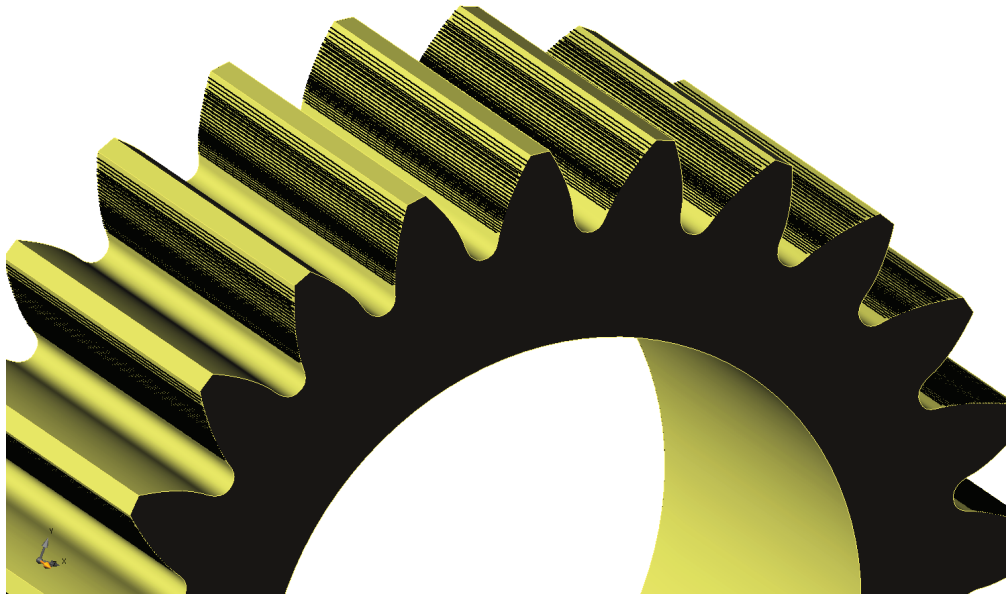


Figura 4.4.5: Patrón de contacto sobre las superficies de los dientes del piñón.

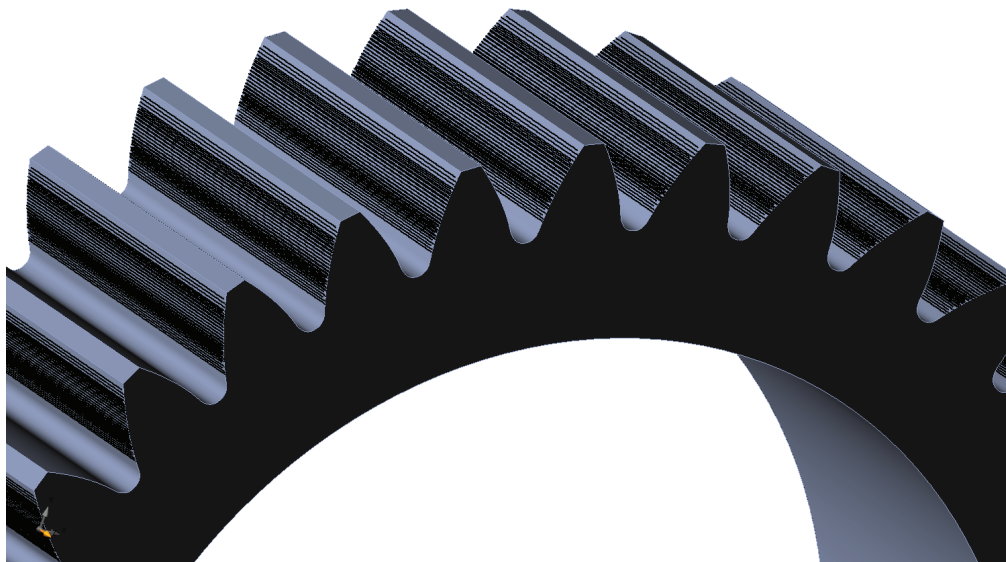


Figura 4.4.6: Patrón de contacto sobre las superficies de los dientes de la rueda.

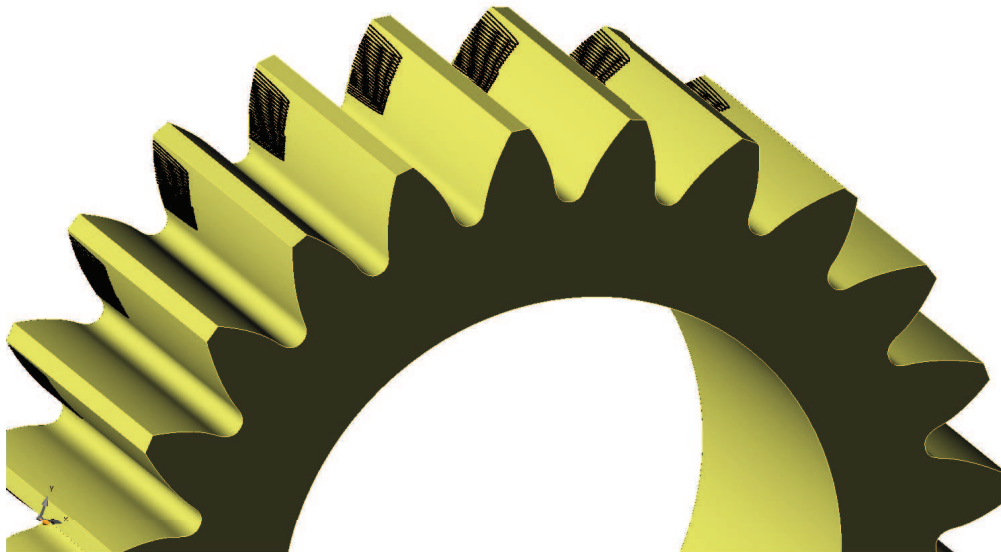


Figura 4.4.7: Patrón de contacto sobre las superficies de los dientes del piñón en condiciones de desalineación.



Figura 4.4.8: Patrón de contacto sobre las superficies de los dientes de la rueda en condiciones de desalineación.

de hacer clic derecho en Finite Element Model 1.1 [Not defined] y escoger la opción Define. A continuación aparecerá la ventana de definición del modelo de elementos finitos tal como se muestra en la Figura 4.5.1. Dichos valores estarán supeditados a la elección de:

1. Par seleccionado.
2. Sentido de rotación del engranaje.
3. Número de pares de dientes de contacto.

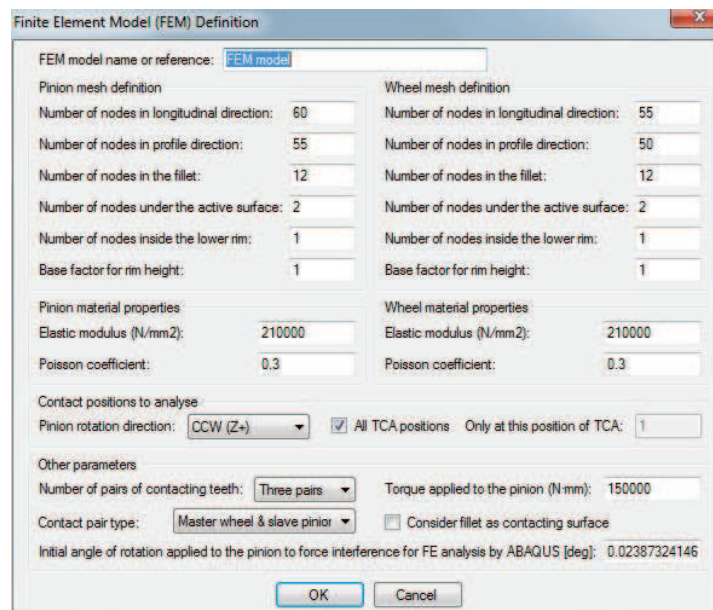


Figura 4.5.1: Ventana de definición del modelo de elementos finitos.

En la Figura 4.5.1 se ha elegido un par de 150000 N·mm, un sentido de giro del piñón en sentido antihorario (Z+) y el análisis de tres parejas de dientes de contacto. Eligiendo esta vez la opción Show después de generar el modelo y tras hacer clic derecho en Finite Element Model 1.1 [Generated] se representará en la pantalla de visualización el modelo que se observa en la Figura 4.5.2.

Otras posibilidades de generación del modelo de elementos finitos se muestran en las Figuras 4.5.3 para una sola pareja de dientes en contacto, en la Figura 4.5.4 para cinco parejas de dientes en contacto y en la Figura 4.5.5 para la transmisión completa.

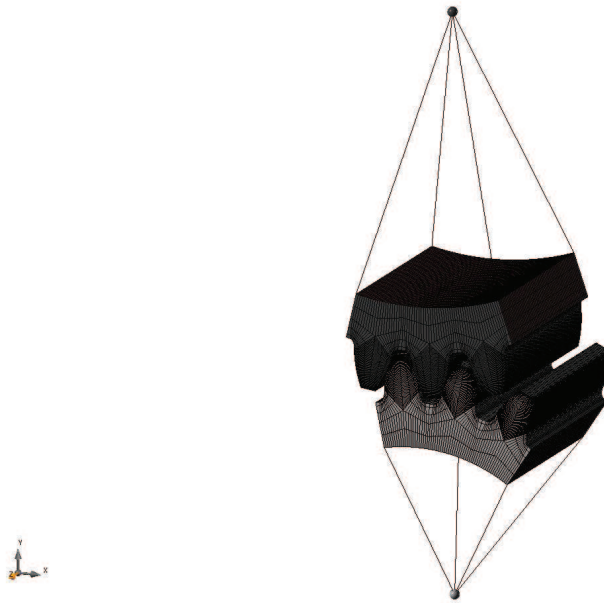


Figura 4.5.2: Representación del modelo de elementos finitos en IGD.



Figura 4.5.3: Representación del modelo de elementos finitos de una pareja de dientes en contacto en IGD.

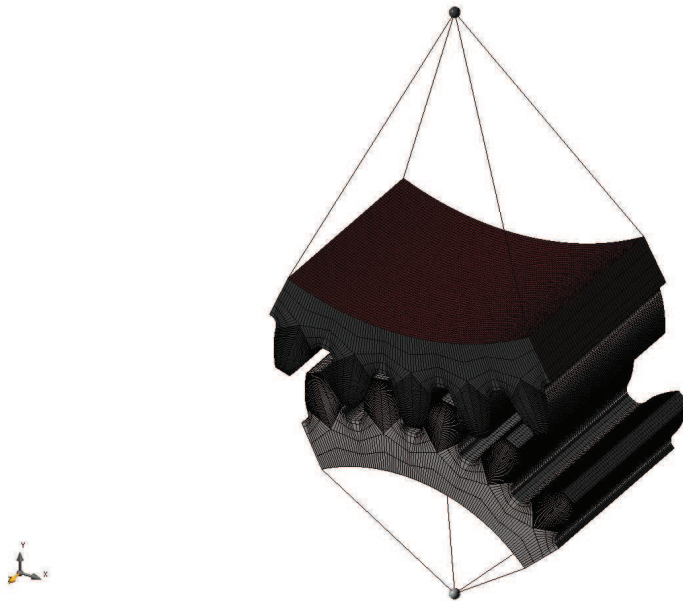


Figura 4.5.4: Representación del modelo de elementos finitos de cinco parejas de dientes en contacto en IGD.

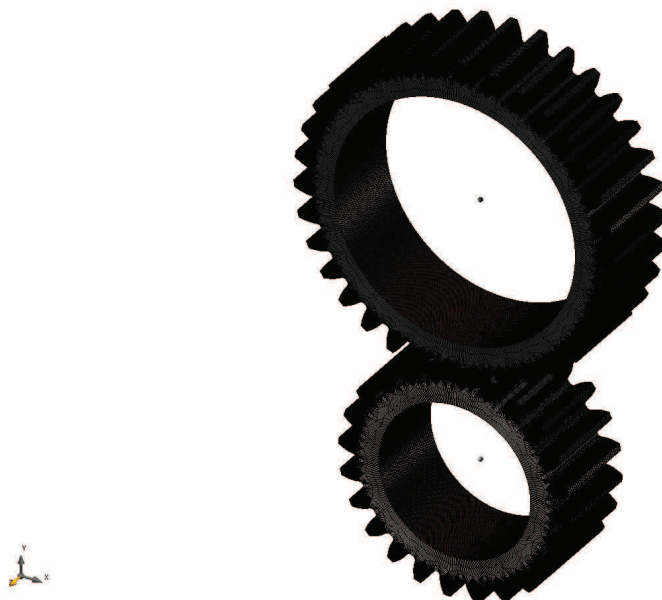


Figura 4.5.5: Representación del modelo de elementos finitos de la transmisión completa en IGD.

Una vez se ha generado el modelo de elementos finitos, se ha de exportar a ABAQUS o NASTRAN para proceder al cálculo. Para ello, se hace clic derecho sobre Finite Element Model 1.1 [Generated], se selecciona la opción Export FEM y se selecciona ABAQUS o NASTRAN del submenú contextual. En este proyecto fin de carrera se ha utilizado el programa de propósito general ABAQUS para el análisis por elementos finitos.

Capítulo 5

Resultados

1. Definición de los casos a analizar

La validación de las ventajas de la aplicación de engranajes cilíndrico-rectos de perfil asimétrico y la determinación del lado de aplicación del mayor ángulo de presión se realizará mediante el análisis de una transmisión de engranajes cilíndrico-rectos de referencia cuyos datos básicos de diseño se muestran en la Tabla 5.1.1.

	Piñón	Rueda
Numero de dientes	24	34
Módulo (mm)	2	
Coefficiente de adendo	1.0	
Coefficiente de dedendo	1.25	
Ancho de cara (mm)	20.0	
Par de entrada (Nm)	210.0	

Cuadro 5.1.1: Datos básicos de la transmisión de engranajes cilíndrico-rectos de referencia.

Se considerará un par aplicado al piñón de la transmisión de 210 N·m para todos los casos que se analizarán en este trabajo, que si bien se puede considerar elevado para la

transmisión de referencia cuyos datos aparecen en la Tabla 5.1.1 permitirá detectar, en caso de que existan, aquellas zonas de elevadas tensiones de contacto que provocarán el deterioro prematuro de la transmisión y obtener más claramente las posibles diferencias con respecto a transmisiones equivalentes de perfil asimétrico. Así mismo, mediante un procedimiento de optimización del rebaje de cabeza se minimizarán las tensiones de contacto a lo largo de todo el ciclo de engrane. De esta forma, la comparación de la evolución de las tensiones de contacto y flexión de los distintos casos de diseño considerados se realizará sobre la base de unos diseños en los que los efectos de los posibles contactos en los bordes de las superficies han quedado minimizados en algunos casos o anulados en otros.

Para la obtención de datos numéricos con los que obtener conclusiones precisas sobre las ventajas de aplicación de engranajes de perfil asimétrico se usará un procedimiento general fundamentado en las siguientes etapas:

1. Optimización de la transferencia de carga entre parejas sucesivas de dientes en contacto por medio de la aplicación de un proceso de rebaje de cabeza del diente.
2. Aplicación de algoritmos de simulación del engrane y análisis del contacto.
3. Análisis tensional de las transmisiones mediante elementos finitos.

En primer lugar se considerará un ángulo de presión para la transmisión de referencia de 20 grados. Posteriormente, se analizará la misma transmisión de referencia para un ángulo de presión de 25 grados para contrastar los resultados obtenidos y generalizar las conclusiones que se puedan extraer de ellos. Las tensiones de contacto y flexión se obtendrán a lo largo de todo un ciclo de engrane tanto para la transmisión de referencia como para transmisiones de perfil asimétrico similares.

2. Análisis de la transmisión de engranajes cilíndrico-rectos de referencia

En este apartado se va a realizar el análisis tensional de la transmisión de engranajes cilíndrico-rectos de referencia con perfil simétrico considerando en primer lugar un ángulo de presión de 20 grados para a continuación hacer lo mismo considerando un ángulo de presión de 25 grados. El objetivo de este análisis es detectar posibles zonas de altas tensiones de contacto a lo largo del ciclo de engrane.

2.1. Dentadura de perfil simétrico con ángulo de presión 20 grados

La Figura 5.2.1(a) muestra la evolución de la tensión de contacto sobre los dientes del piñón para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane. Se observa claramente que se obtienen elevadas tensiones de contacto para las posiciones de contacto 7 y 8 correspondientes al contacto de la cabeza de los dientes del piñón con la base de los dientes de la rueda. Así mismo, la Figura 5.2.1(b) muestra la evolución de la presión de contacto. Se aprecian dos zonas de elevada presión de contacto correspondientes tanto al contacto de la cabeza de los dientes del piñón con la base de los dientes de la rueda (posiciones de contacto 7 y 8) como al contacto de la base de los dientes del piñón con la base de los dientes de la rueda.

La Figura 5.2.2 muestra la evolución de la tensión de flexión en un diente del piñón para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane. En esta figura se observa claramente el aumento de las tensiones de flexión para el intervalo de carga no compartida.

2.2. Dentadura de perfil simétrico con ángulo de presión 25 grados

La Figura 5.2.3(a) muestra la evolución de la tensión de contacto sobre los dientes del piñón para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane para la transmisión de engranajes de referencia con ángulo de presión de 25 grados. Al igual que para el caso con

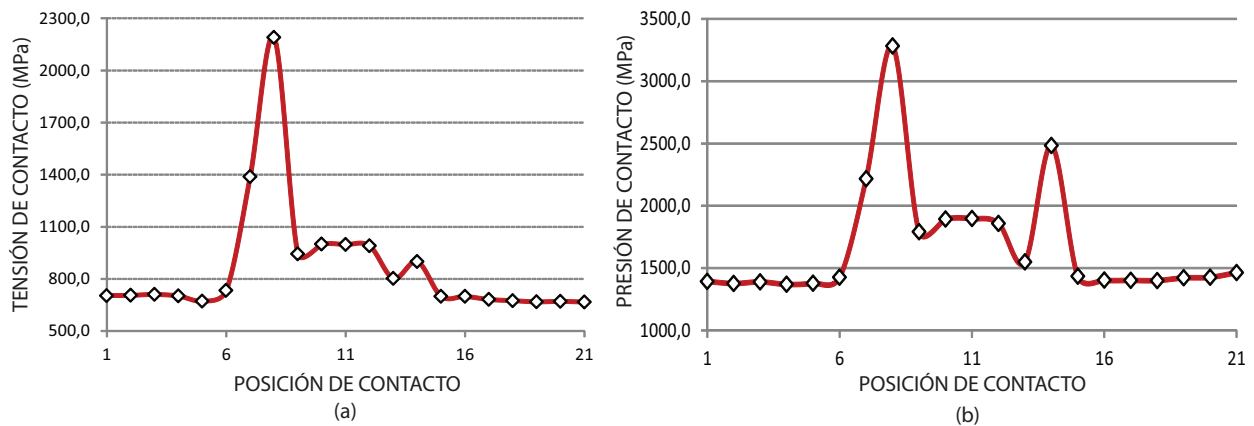


Figura 5.2.1: Evolución de (a) la tensión de contacto y (b) la presión de contacto para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane para la transmisión de engranajes de referencia con ángulo de presión 20 grados.

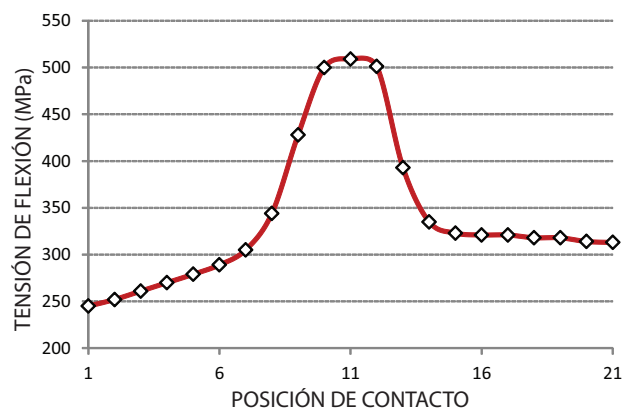


Figura 5.2.2: Evolución de la tensión de flexión para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane para la transmisión de engranajes de referencia con ángulo de presión 20 grados.

ángulo de presión de 20 grados, se observa que aparecen elevadas tensiones de contacto para las posiciones de contacto 6 y 7 correspondientes al contacto de la cabeza de los dientes del piñón con la base de los dientes de la rueda. La Figura 5.2.3(b) muestra la evolución de la presión de contacto, apreciándose una zonas de elevada presión de contacto correspondiente al contacto de la cabeza de los dientes del piñón con la base de los dientes de la rueda

(posiciones de contacto 6 y 7).

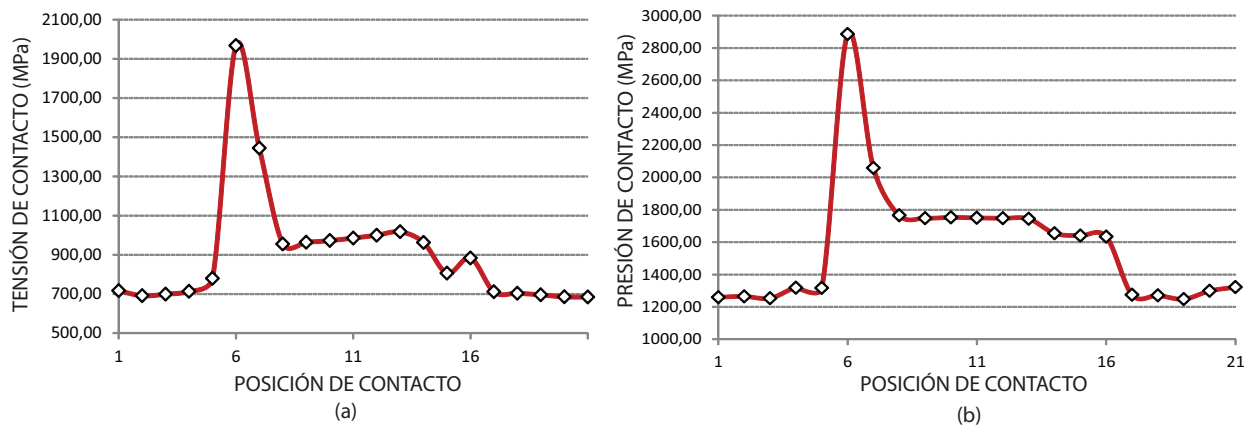


Figura 5.2.3: Evolución de (a) la tensión de contacto y (b) la presión de contacto para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane para la transmisión de engranajes de referencia con ángulo de presión 25 grados.

La Figura 5.2.4 muestra la evolución de la tensión de flexión en un diente del piñón para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane. En esta figura se observa claramente el aumento de las tensiones de flexión para el intervalo de carga no compartida.

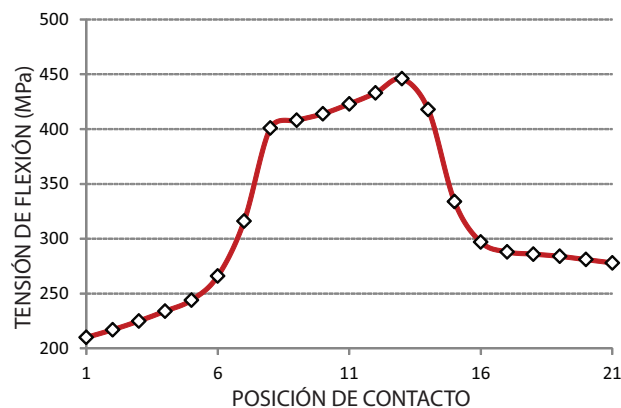


Figura 5.2.4: Evolución de la tensión de flexión para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane para la transmisión de engranajes de referencia con ángulo de presión 25 grados.

3. Análisis del rebaje de cabeza óptimo

La existencia de un grado óptimo de rebaje de cabeza de los dientes de los elementos de una transmisión de engranajes específica para unas determinadas sollicitaciones mecánicas de operación se justifica en base a las siguientes consideraciones:

- Un grado de rebaje de cabeza inferior al óptimo o inexistente dará lugar a unos excesivos incrementos de las tensiones y de las presiones de contacto en las posiciones angulares en las cuales se establece contacto entre el borde de cabeza de las superficies de los dientes del piñón y la superficie activa de los dientes de la rueda o viceversa.
- Sin embargo, un grado de rebaje de cabeza superior al óptimo también dará lugar a unos excesivos incrementos de las tensiones y de las presiones de contacto, debido a que el contacto al final del ciclo de engrane entre una pareja de dientes, aún no siendo en borde, tendrá lugar en la región rebajada de la superficie del flanco del diente del piñón, zona en la cual el radio de curvatura de la superficie como consecuencia del rebaje es reducido y, en consecuencia, el valor de la presión de contacto será elevado.

Además de la incidencia sobre la tensión y presión de contacto descrita en el párrafo anterior, un incremento del grado de rebaje de cabeza de los dientes de los elementos de una transmisión de engranajes da lugar a un incremento del valor promedio de la tensión de flexión en la base de los dientes de los engranajes a lo largo del ciclo completo de engrane. Dicho incremento se justifica en base a la reducción del arco de conducción que ocasiona el rebaje de la punta de cabeza de los dientes, lo que a su vez conlleva la reducción del grado de recubrimiento de la transmisión de engranajes. A raíz de lo expuesto, queda justificado que la aplicación de un rebaje de cabeza de los dientes de una transmisión de engranajes debe ser controlada mediante técnicas de simulación avanzadas que incluyan la generación virtual de las geometrías modificadas de las superficies así como el análisis tensional por elementos finitos con objeto de evitar un excesivo incremento de las tensiones de contacto. Para ello resulta fundamental la aplicación del programa IGD (Integrated Gear Design) desarrollado en el seno del grupo de investigación Transmisiones Avanzadas de Engranajes.

Entre los distintos tipos de rebaje de cabeza, en el presente proyecto se va a aplicar un rebaje de cabeza de tipo parabólico tangente al perfil de envolvente, con objeto de evitar la aparición de aristas o discontinuidades sobre las superficies de los dientes. Para alcanzar la optimización del rebaje de cabeza que permita lograr una evolución lo más uniforme posible de las tensiones y presiones de contacto sobre el ciclo de engrane completo, se han llevado a cabo simulaciones numéricas del análisis tensional en cada uno de los casos de transmisiones de engranajes cilíndricos bajo estudio, en las que se ha ido incrementando gradualmente el coeficiente de parábola a_{pf} característico del rebaje de cabeza en la herramienta de generación de la transmisión de engranajes considerada.

3.1. Dentadura de perfil simétrico con ángulo de presión 20 grados

A la vista de las Figuras 5.2.1 y 5.2.3, se pone de manifiesto la necesidad de aplicar un rebaje de cabeza con el objetivo de eliminar esas zonas de altas presiones y tensiones de contacto que se han detectado en los análisis descritos en el apartado anterior. Para ello se utilizará el perfil mostrado en la Figura 5.3.1 en el que el perfil recto generador del perfil de evolvente principal de la superficie del diente se desvía en un cierto punto, situado a una distancia h_{tr} de la altura de adendo del perfil. Por otro lado, el perfil considerado es parabólico estando caracterizado por un coeficiente de parábola a_{pf} . Los parámetros geométricos característicos del proceso de rebaje de cabeza aplicado a la transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos de referencia se muestran en Tabla 5.3.1.

Caso	1	2	3	4	5
a_{pf} [1/mm]	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08
h_{tr} [mm]	0.7				

Cuadro 5.3.1: Casos de diseño para la optimización del rebaje de cabeza.

Tal como se aprecia en la Tabla 5.3.1, en todos los casos analizados se ha empleado la misma altura de rebaje de cabeza h_{tr} . La justificación a dicha elección es introducir en todos

los casos analizados modificaciones de la superficie de los dientes fuera del zona de carga no compartida y, de este modo, no inducir errores de transmisión.

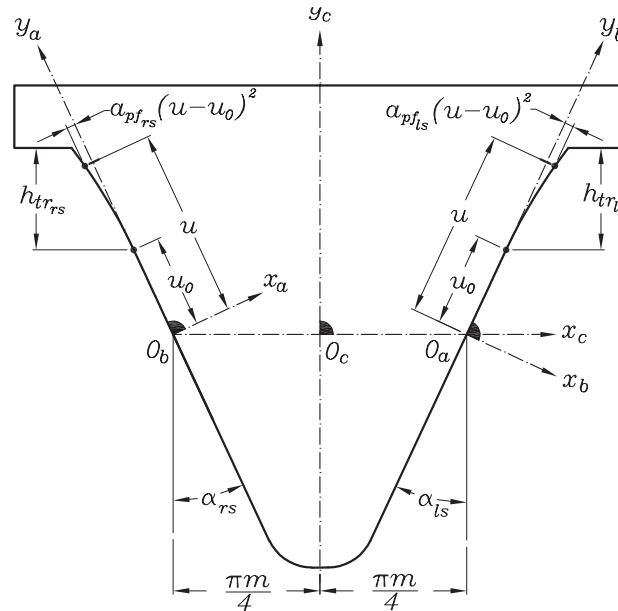


Figura 5.3.1: Perfil modificado de la cremallera de generación para la aplicación del rebaje de cabeza.

La Figura 5.3.2 muestra el modelo virtual del proceso de generación de la transmisión de engranajes cilíndrico-rectos de referencia en el que la cremallera generadora, situada en la parte superior del engranaje que está siendo generado, está provista del perfil mostrado en la Figura 5.3.1.

La Figura 5.3.3(a) muestra la evolución de la tensión de contacto y la Figura 5.3.3(b)) la evolución de la presión de contacto sobre los dientes del piñón de la transmisión de referencia de ángulo de presión 20° para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane en función de cinco grados de rebaje distintos. Se observa como se consigue una evolución suave tanto de tensiones de contacto como presiones de contacto a lo largo de todo el ciclo de engrane con la aplicación de un rebaje de cabeza caracterizado por un coeficiente de parábola para el perfil generador en la zona de cabeza de 0.08 1/mm . Entre paréntesis en la leyenda de las Figuras 5.3.3(a) y 5.3.3(b) se muestra el máximo rebaje de cabeza conseguido en micras.

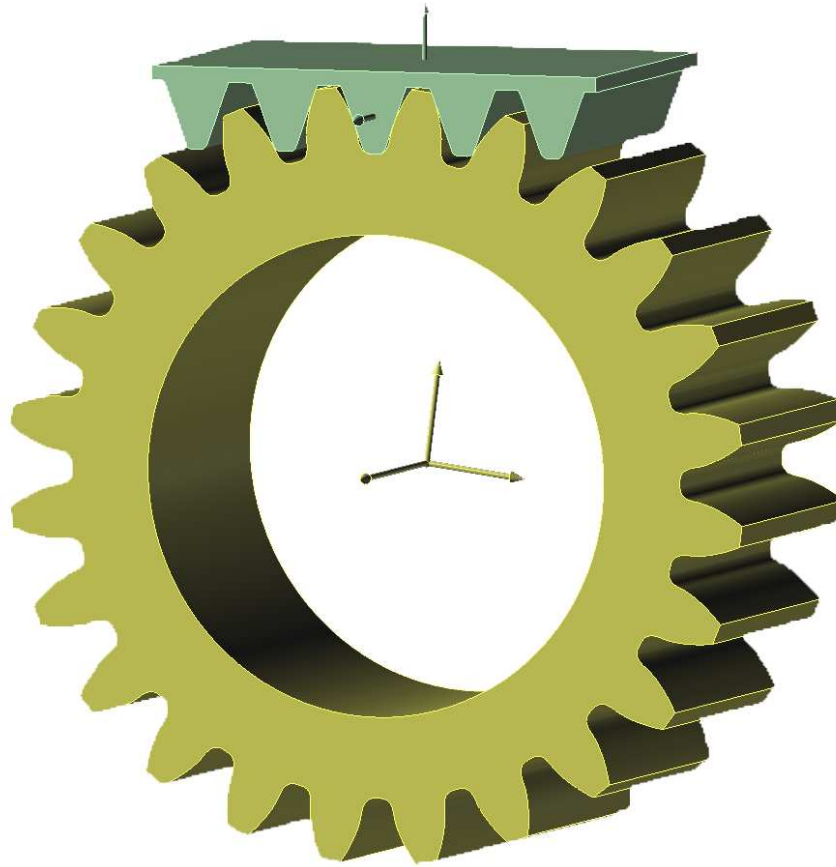


Figura 5.3.2: Modelo virtual del proceso de generación de la transmisión de engranajes cilíndrico-rectos de referencia mediante cremallera de perfil modificado.

Las tensiones de contacto se han reducido en más del 50 % mediante la aplicación del rebaje de cabeza. Se pone de manifiesto la gran influencia del rebaje de cabeza sobre las tensiones de contacto sobre los dientes de los engranajes. La reducción de las tensiones de contacto obtenidas contribuye a un aumento considerable de la vida y resistencia de la transmisión.

La Figura 5.3.4 muestra la evolución de la tensión de flexión en un diente del piñón para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane. La aplicación del rebaje de cabeza aumenta el intervalo de carga no compartida y con ello eleva ligeramente el nivel máximo de las tensiones de flexión. No obstante, la reducción tan elevada de las tensiones de contacto hace aconsejable su aplicación al diseño de transmisiones de engranajes aunque con ello se eleven ligeramente las tensiones de flexión.

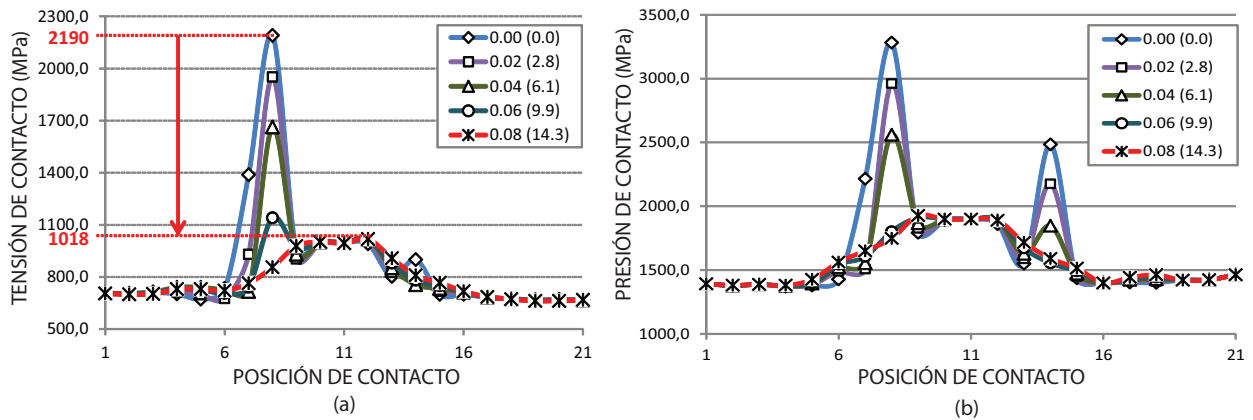


Figura 5.3.3: Evolución de (a) la tensión de contacto y (b) la presión de contacto para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane para distintos grados de rebaje de cabeza.

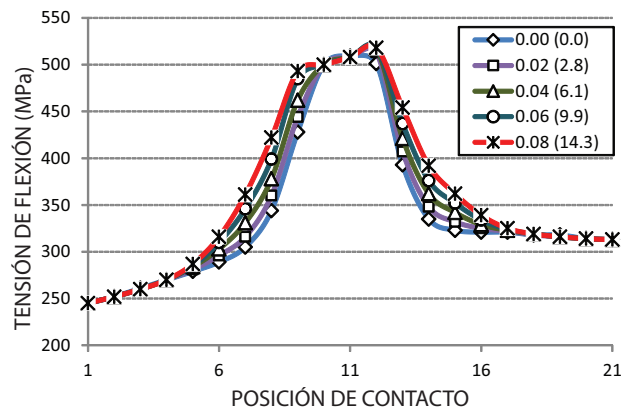


Figura 5.3.4: Evolución de la tensión de flexión para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane para distintos grados de rebaje de cabeza.

La Figura 5.3.5 muestra los perfiles modificados del piñón y de la rueda para el diseño óptimo del rebaje de cabeza correspondientes al caso $a_{pf} = 0,08$ 1/mm mostrado en la Figura 5.3.3. Al piñón se le aplica un rebaje de cabeza máximo de $14,3 \mu\text{m}$ y para la rueda $9,1 \mu\text{m}$.

La Figura 5.3.6(a) muestra las tensiones de contacto para el piñón de la transmisión de engranajes de referencia sin la aplicación del rebaje de cabeza en el punto de contacto número 7 y la Figura 5.3.6(b) las tensiones de contacto para el piñón de la transmisión de engranajes

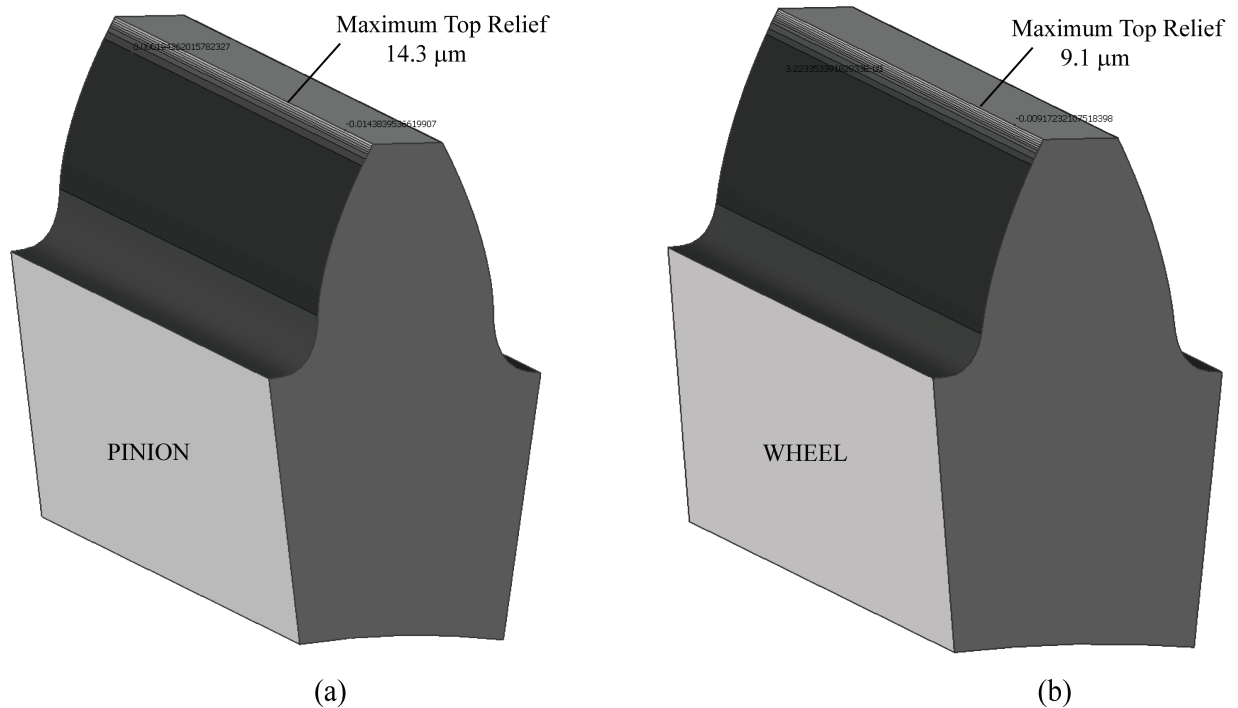


Figura 5.3.5: Comparación de los mejores relieves modificados para el diseño optimizado del (a) piñón y (b) de los miembros de la rueda del diseño de conjunto de engranajes.

de referencia con aplicación del rebaje de cabeza óptimo de $14.3 \mu\text{m}$ para el mismo punto de contacto. En la Figura se aprecia que las tensiones en las superficies de los dientes del piñón se reducen notablemente permitiendo de este modo una transferencia de carga suave entre las sucesivas parejas de dientes en contacto.

3.2. Dentadura de perfil simétrico con ángulo de presión 25 grados

Los parámetros geométricos característicos del proceso de rebaje de cabeza aplicado a la transmisión de engranajes cilíndrico-recto de referencia con ángulo de presión 25° se muestran en Tabla 5.3.2.

Al igual que para el caso anterior, en todos los casos analizados se ha empleado la misma altura de rebaje de cabeza $h_{tr} = 0,7 \text{ mm}$, al comprobar que dicha elección introduce modificaciones de la superficie de los dientes fuera de la zona de carga no compartida y, de este

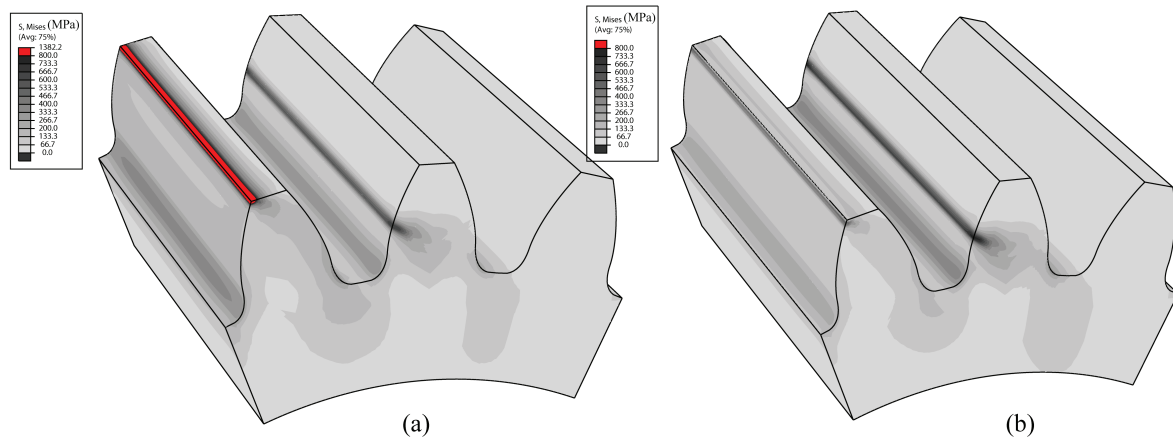


Figura 5.3.6: Tensiones de contacto en la superficie de los dientes del piñón de la transmisión de referencia para (a) el perfil sin modificar y (b) con perfil modificado mediante rebaje de cabeza de $14.3 \mu\text{m}$.

Caso	1	2	3	4
a_{pf} [1/mm]	0.00	0.02	0.04	0.06
h_{tr} [mm]	0.7			

Cuadro 5.3.2: Casos de diseño para la optimización del rebaje de cabeza de la transmisión de referencia con ángulo de presión 25° .

modo, no induce errores de transmisión.

La Figura 5.3.7(a) muestra la evolución de la tensión de contacto y la Figura 5.3.3(b) la evolución de la presión de contacto sobre los dientes del piñón de la transmisión de referencia con ángulo de presión 25° para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane en función de cuatro grados de rebaje distintos. Se observa la consecución de una evolución suave tanto de tensiones de contacto como de presiones de contacto a lo largo de todo el ciclo de engrane con la aplicación de un rebaje de cabeza caracterizado por un coeficiente de parábola para el perfil generador en la zona de cabeza de 0.06 1/mm . Entre paréntesis en la leyenda de las Figuras 5.3.7(a) y 5.3.7(b) se muestra el máximo rebaje de cabeza conseguido en micras. Las tensiones de contacto se han reducido casi el 50 % mediante la aplicación

del rebaje de cabeza. Al igual que para la transmisión con ángulo de presión 20° el rebaje de cabeza tiene una gran influencia sobre las tensiones de contacto sobre los dientes de los engranajes.

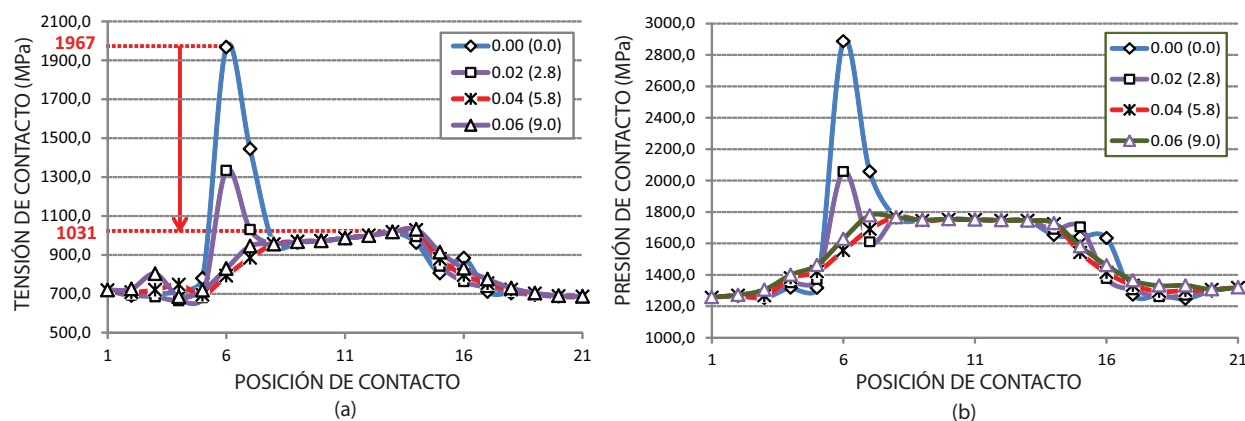


Figura 5.3.7: Evolución de (a) la tensión de contacto y (b) la presión de contacto para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane para distintos grados de rebaje de cabeza.

La Figura 5.3.8 muestra la evolución de la tensión de flexión en un diente del piñón de la transmisión de referencia con ángulo de presión 25° para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane. La aplicación del rebaje de cabeza, tal como ocurría en el caso anterior para ángulos de presión de 20° , aumenta el intervalo de carga no compartida y con ello eleva ligeramente el nivel máximo de las tensiones de flexión.

4. Transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos de perfil asimétrico

4.1. Ángulo de presión de referencia de 20°

La Figura 5.4.1 muestra tres de los casos de diseño de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos de perfil asimétrico que se compararán con la transmisión de engranajes de referencia con perfil simétrico y ángulo de presión de 20 grados. Para la determinación

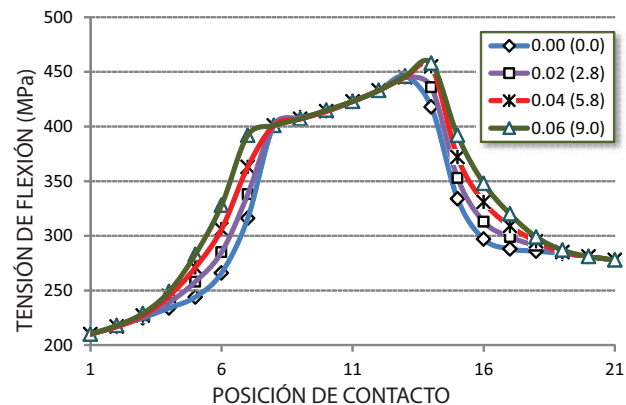


Figura 5.3.8: Evolución de la tensión de flexión para 21 posiciones de contacto a lo largo de un ciclo de engrane para distintos grados de rebaje de cabeza.

del perfil conductor, se considerará que el piñón gira en el sentido opuesto a las agujas del reloj y por tanto será el perfil izquierdo el lado conductor en cada uno de los casos y el perfil derecho el lado de respaldo. En la Figura 5.4.1(a) se muestra un engranaje de perfil simétrico con 20 grados de ángulo de presión tanto para el lado conductor como para el lado de respaldo (en adelante 20 x 20). En la Figura 5.4.1(b) se representa un engranaje de perfil asimétrico con un ángulo de presión de 30 grados para el lado conductor y 20 grados para el lado de respaldo (en adelante 30 x 20), y finalmente, en la Figura 5.4.1(c) se representa un engranaje de perfil asimétrico con un ángulo de presión de 20 grados para el lado conductor y 30 grados para el otro lado del diente (en adelante 20 x 30).

Influencia del aumento del ángulo de presión en el lado de respaldo

En este apartado se analizarán y compararán las siguientes tres transmisiones, todas ellas con la aplicación de un rebaje de cabeza óptimo para la eliminación de zonas de altas tensiones de contacto:

- Transmisión 20 x 20: Perfil simétrico de referencia con ángulo de presión 20 grados.
- Transmisión 20 x 25: Perfil asimétrico con ángulo de presión 20 grados para el lado conductor y 25 para el lado de respaldo.

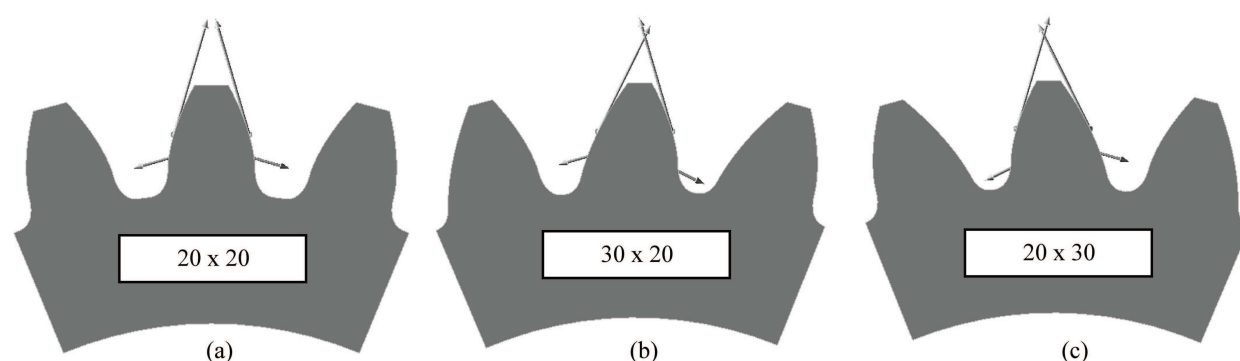


Figura 5.4.1: Comparación de perfiles simétricos y asimétricos: (a) transmisión 20 x 20; (b) transmisión 30 x 20; (c) transmisión 20 x 30.

- Transmisión 20 x 30: Perfil asimétrico con ángulo de presión 20 grados para el lado conductor y 30 para el lado de respaldo.

La Figura 5.4.2 muestra la evolución de las tensiones de contacto (Figura 5.4.2(a)) y la presión de contacto (Figura 5.4.2(b)) para el piñón de las tres transmisiones descritas anteriormente. La leyenda de la Figura 5.4.2 es auto-explicativa. Como se muestra en la Figura 5.4.2(a), la máxima tensión de contacto en el piñón sólo depende del ángulo de presión del lado conductor. De la misma manera, la Figura 5.4.2(b) muestra que la presión de contacto máxima sólo depende del ángulo de presión del lado conductor. A la vista de estos resultados se podría concluir que el aumento del ángulo de presión del lado de respaldo no reduce las tensiones de contacto ni la presión de contacto.

La Figura 5.4.3 muestra la evolución de las tensiones de flexión para el piñón de las tres transmisiones descritas anteriormente. En este caso, se podría concluir que el incremento del ángulo de presión en el lado de respaldo contribuye a conseguir una reducción de las tensiones de flexión. Estos resultados coinciden con lo expuesto en los trabajos [1] y [2].

Influencia del aumento del ángulo de presión en el lado conductor

En este apartado se analizarán y compararán las siguientes tres transmisiones, todas ellas con la aplicación de un rebaje de cabeza óptimo para la eliminación de zonas de altas

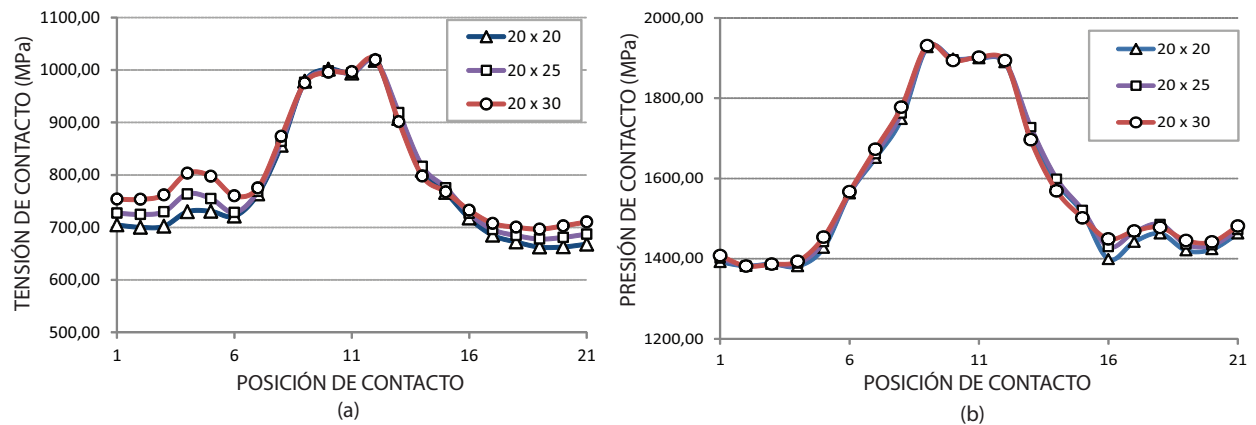


Figura 5.4.2: Evolución de: (a) la tensión de contacto y (b) la presión de contacto para el piñón para transmisiones con distinto ángulo de presión en el lado de respaldo.

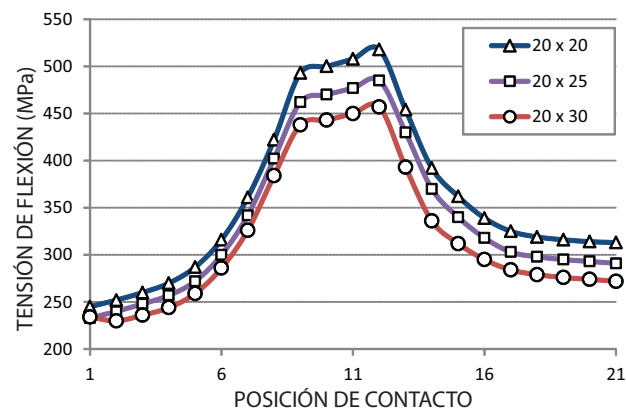


Figura 5.4.3: Evolución de la tensión de flexión en el piñón para transmisiones con distinto ángulo de presión en el lado de respaldo.

tensiones de contacto:

- Transmisión 20 x 20: Perfil simétrico de referencia con ángulo de presión 20 grados.
- Transmisión 25 x 20: Perfil asimétrico con ángulo de presión 25 grados para el lado conductor y 20 para el lado de respaldo.
- Transmisión 30 x 20: Perfil asimétrico con ángulo de presión 30 grados para el lado conductor y 20 para el lado de respaldo.

La Figura 5.4.4 muestra la evolución de las tensiones de contacto (Figura 5.4.4(a)) y la presión de contacto (Figura 5.4.4(b)) para el piñón de las tres transmisiones descritas anteriormente. En este caso se observa que tanto las tensiones de contacto como la presión de contacto en las superficies de los dientes del piñón depende del ángulo de presión en el lado conductor. Como se muestra en la figura, la tensión de contacto mínima se obtiene para el caso de diseño con ángulo de presión más alto en el lado conductor. A la vista de estos resultados se podría concluir que el aumento del ángulo de presión del lado conductor contribuye a reducir tanto las tensiones de contacto como la presión de contacto.

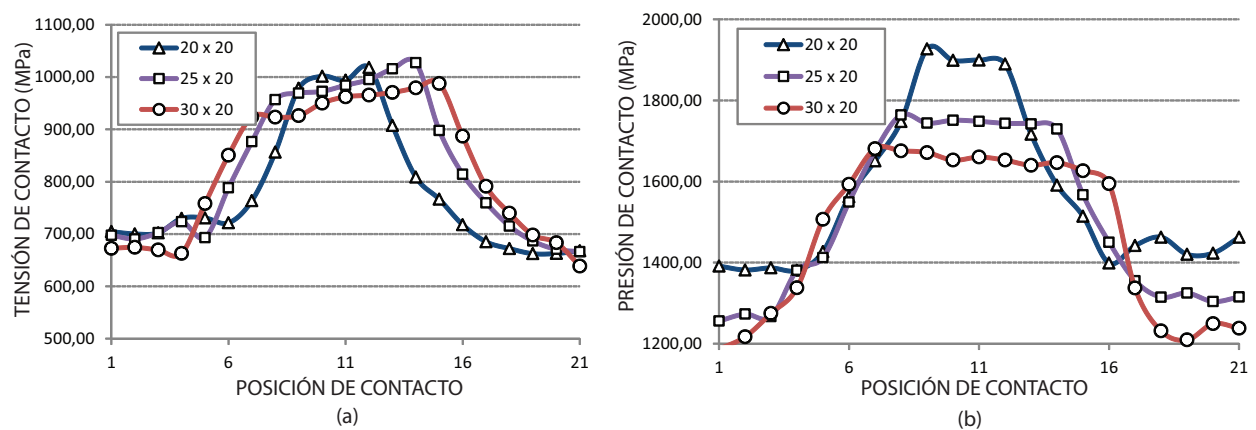


Figura 5.4.4: Evolución de: (a) la tensión de contacto y (b) la presión de contacto para el piñón para transmisiones con distinto ángulo de presión en el lado conductor.

La Figura 5.4.5 muestra la evolución de las tensiones de flexión para el piñón de las tres transmisiones descritas anteriormente. En este caso también se observa que el incremento del ángulo de presión en el lado conductor contribuye a conseguir una reducción de las tensiones de flexión. A la vista de las Figuras 5.4.4 y 5.4.5 se puede concluir que la aplicación del ángulo de presión más alto en el lado conductor no sólo se obtiene una reducción de las tensiones de flexión sino también se obtiene una reducción de las tensiones de contacto y de la presión de contacto, aumentando de esta manera la vida y resistencia de la transmisión.

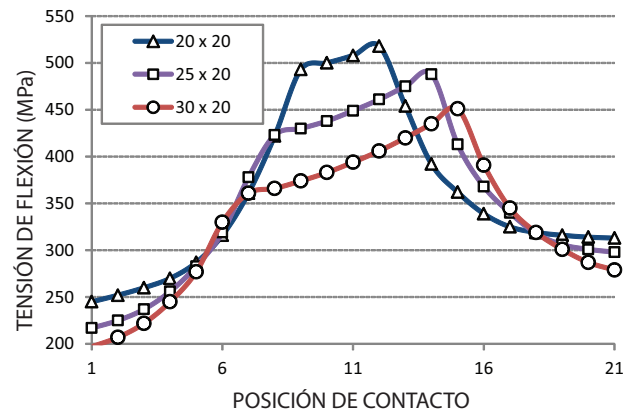


Figura 5.4.5: Evolución de la tensión de flexión en el piñón para transmisiones con distinto ángulo de presión en el lado de respaldo.

Comparativa de distintas configuraciones de un mismo perfil asimétrico

A la vista de los resultados anteriores, parece que la aplicación del mayor ángulo de presión en el lado conductor no sólo reduce las tensiones de flexión sino que también contribuye a la reducción de las tensiones de contacto. Con objeto de tener una mejor visión de los resultados anteriores, se compararán en este apartado las siguientes tres transmisiones:

- Transmisión 20 x 20: Perfil simétrico de referencia con ángulo de presión 20 grados.
- Transmisión 30 x 20: Perfil asimétrico con ángulo de presión 30 grados para el lado conductor y 20 para el lado de respaldo.
- Transmisión 20 x 30: Perfil asimétrico con ángulo de presión 20 grados para el lado conductor y 30 para el lado de respaldo.

La Figura 5.4.6 muestra la evolución de las tensiones de contacto (Figura 5.4.6(a)) y la presión de contacto (Figura 5.4.6(b)) para el piñón de las tres transmisiones descritas anteriormente. La Figura 5.4.6(a) muestra que la reducción de las tensiones de contacto sólo se consigue para el diseño 30 x 20, diseño en el que se aplica un ángulo de presión más alto en el lado conductor. En cuanto a los esfuerzos de flexión, la Figura 5.4.7 muestra que la reducción se logra en valores casi similares para los dos diseños asimétricos considerados,

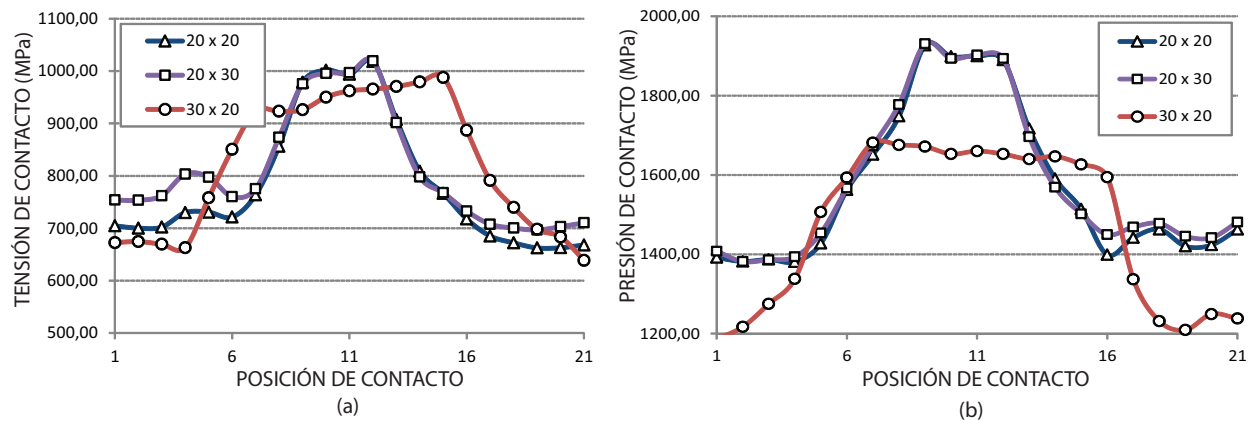


Figura 5.4.6: Evolución de: (a) la tensión de contacto y (b) la presión de contacto para el piñón para distintas configuraciones de una misma transmisión asimétrica.

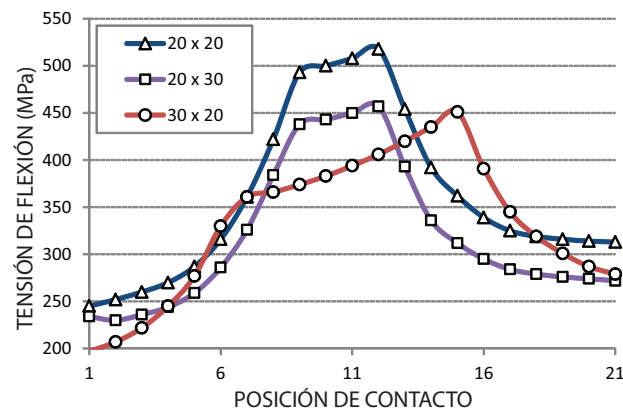


Figura 5.4.7: Evolución de la tensión de flexión en el piñón para distintas configuraciones de una misma transmisión asimétrica.

estando estos resultados de acuerdo con los trabajos publicados anteriormente con afirmaciones aparentemente contradictorias en cuando a la aplicación del mayor ángulo de presión. Las dos opciones son adecuadas si el objetivo es sólo reducir las tensiones de flexión. Sin embargo, la aplicación del mayor ángulo de presión al lado conductor, no sólo contribuye a la reducción de las tensiones de contacto sino también reduce la máxima tensión de flexión.

4.2. Ángulo de presión de referencia de 25°

La Figura 5.4.8 muestra tres de los casos de diseño de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos de perfil asimétrico teniendo como referencia una transmisión de engranajes cilíndrico-rectos con ángulo de presión de 25°. Para la determinación del perfil conductor, se considerará que el piñón gira en el sentido opuesto a las agujas del reloj y por tanto será el perfil izquierdo el lado conductor en cada uno de los casos y el perfil derecho el lado de respaldo. En la Figura 5.4.8(a) se muestra un engranaje de perfil simétrico con 25 grados de ángulo de presión tanto para el lado conductor como para el lado de respaldo (en adelante 25 x 25). En la Figura 5.4.8(b) se representa un engranaje de perfil asimétrico con un ángulo de presión de 28 grados para el lado conductor y 25 grados para el lado de respaldo (en adelante 28 x 25), y finalmente, en la Figura 5.4.8(c) se representa un engranaje de perfil asimétrico con un ángulo de presión de 25 grados para el lado conductor y 28 grados para el otro lado del diente (en adelante 25 x 28). Cuando el engranaje de referencia tiene un ángulo de presión de 25° en uno de los lados, el ángulo de presión del otro lado queda limitado por el apuntamiento del diente. Es por ello por lo que el máximo ángulo de presión utilizado para la transmisión de ángulo de presión de 25° es 28° ya que para 30° se produciría el apuntamiento del diente.

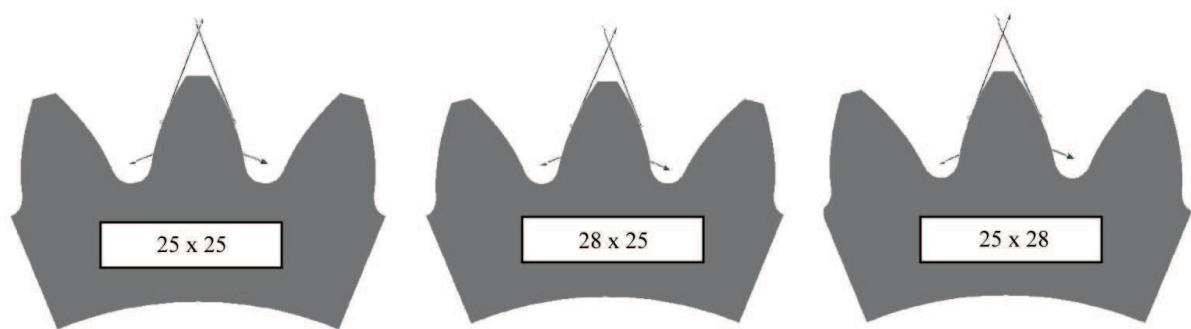


Figura 5.4.8: Comparación de perfiles simétricos y asimétricos: (a) transmisión 25 x 25; (b) transmisión 28 x 25; (c) transmisión 25 x 28.

Sin embargo, para completar los casos de diseño anteriores, se tendrán en cuenta además los casos anteriormente analizados de transmisiones de perfil asimétrico 25 x 20 y 20 x 25 a la hora de analizar la influencia de aumentos del ángulo de presión en los lados conductor y de respaldo.

Influencia del aumento del ángulo de presión en el lado de respaldo

En este apartado se analizarán y compararán las siguientes tres transmisiones, todas ellas con la aplicación de un rebaje de cabeza óptimo para la eliminación de zonas de altas tensiones de contacto:

- Transmisión 25 x 20: Perfil asimétrico con ángulo de presión 25° para el lado conductor y 20° para el lado de respaldo.
- Transmisión 25 x 25: Perfil simétrico de referencia con ángulo de presión 25°.
- Transmisión 25 x 28: Perfil asimétrico con ángulo de presión 25° para el lado conductor y 28° para el lado de respaldo.

La Figura 5.4.9(a) muestra la evolución de las tensiones de contacto y la Figura 5.4.9(b) la evolución de la presión de contacto para el piñón de las tres transmisiones descritas anteriormente. Como se muestra en la Figura 5.4.9(a), la máxima tensión de contacto en el piñón sólo depende del ángulo de presión del lado conductor. De la misma manera, la Figura 5.4.9(b) muestra que la presión de contacto máxima sólo depende del ángulo de presión del lado conductor. A la vista de estos resultados y aquellos obtenidos considerando el ángulo de presión de referencia de 20° se puede concluir que el aumento del ángulo de presión del lado de respaldo no reduce las tensiones de contacto ni la presión de contacto.

La Figura 5.4.10 muestra la evolución de las tensiones de flexión para el piñón de las tres transmisiones descritas anteriormente. En este caso, también se puede concluir que el incremento del ángulo de presión en el lado de respaldo contribuye a conseguir una reducción de las tensiones de flexión.

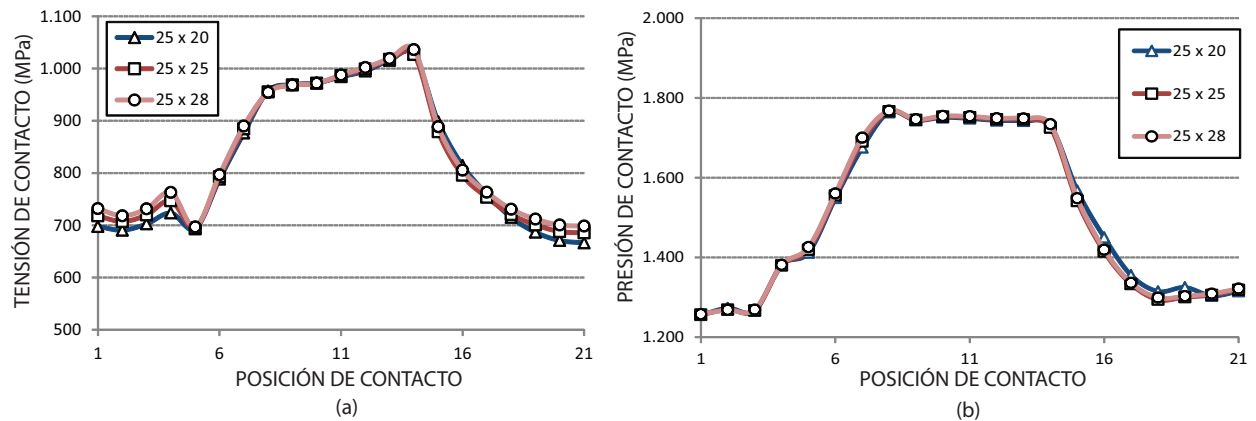


Figura 5.4.9: Evolución de: (a) la tensión de contacto y (b) la presión de contacto para el piñón para transmisiones con distinto ángulo de presión en el lado de respaldo.

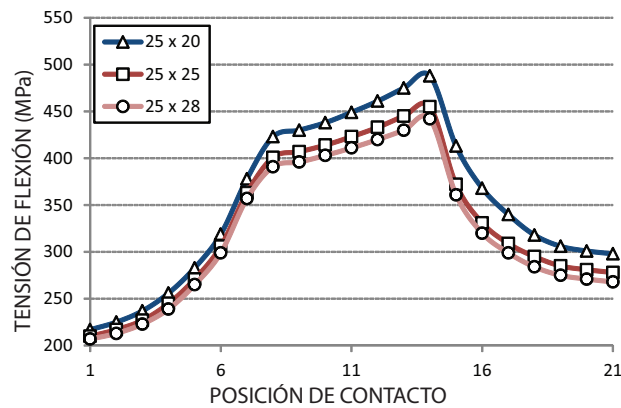


Figura 5.4.10: Evolución de la tensión de flexión en el piñón para transmisiones con distinto ángulo de presión en el lado de respaldo.

Influencia del aumento del ángulo de presión en el lado conductor

En este apartado se analizarán y compararán las siguientes tres transmisiones, todas ellas con la aplicación de un rebaje de cabeza óptimo para la eliminación de zonas de altas tensiones de contacto:

- Transmisión 20 x 25: Perfil asimétrico con ángulo de presión 20° para el lado conductor y 25° para el lado de respaldo.

- Transmisión 25 x 25: Perfil simétrico de referencia con ángulo de presión 20° .
- Transmisión 28 x 25: Perfil asimétrico con ángulo de presión 30° para el lado conductor y 20° para el lado de respaldo.

La Figura 5.4.11(a) muestra la evolución de las tensiones de contacto y la Figura 5.4.11(b) la evolución de la presión de contacto para el piñón de las tres transmisiones descritas anteriormente. En este caso, al igual que para los casos equivalentes con ángulo de presión 20° , se observa que tanto las tensiones de contacto como la presión de contacto en las superficies de los dientes del piñón depende del ángulo de presión en el lado conductor. Como se muestra en la figura, la tensión de contacto mínima se obtiene para el caso de diseño con ángulo de presión más alto en el lado conductor. A la vista de estos resultados y los obtenidos anteriormente se concluye que el aumento del ángulo de presión del lado conductor contribuye a reducir tanto las tensiones de contacto como la presión de contacto.

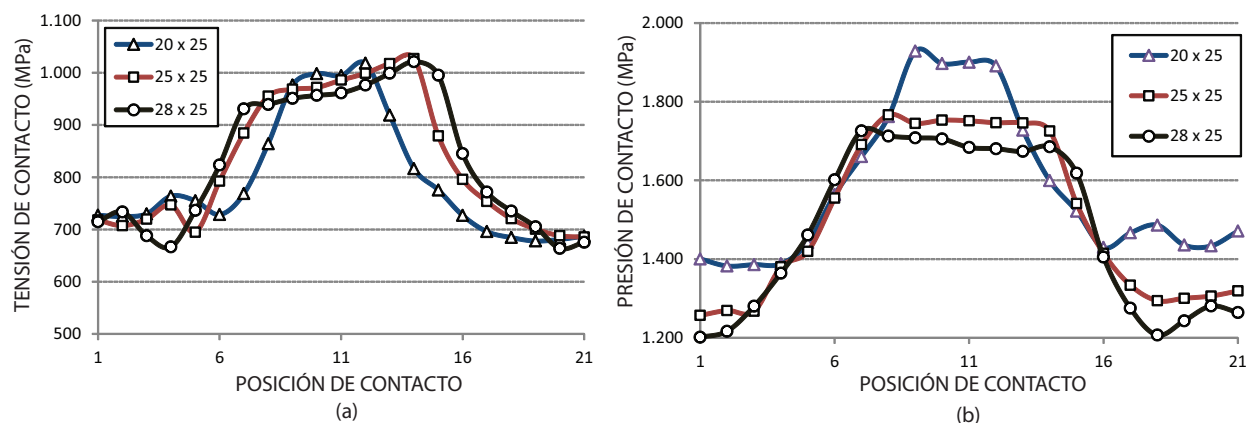


Figura 5.4.11: Evolución de: (a) la tensión de contacto y (b) la presión de contacto para el piñón para transmisiones con distinto ángulo de presión en el lado conductor.

La Figura 5.4.12 muestra la evolución de las tensiones de flexión para el piñón de las tres transmisiones descritas anteriormente. En este caso también se observa que el incremento del ángulo de presión en el lado conductor contribuye a conseguir una reducción de las tensiones de flexión. A la vista de las Figuras 5.4.11 y 5.4.12 y las correspondientes al caso de referencia de 20° (Figuras 5.4.4 y 5.4.5), se concluye que con la aplicación del ángulo de presión más

alto en el lado conductor no sólo se obtiene una reducción de las tensiones de flexión sino también se obtiene una reducción de las tensiones de contacto y de la presión de contacto, aumentando de esta manera la vida y resistencia de la transmisión.

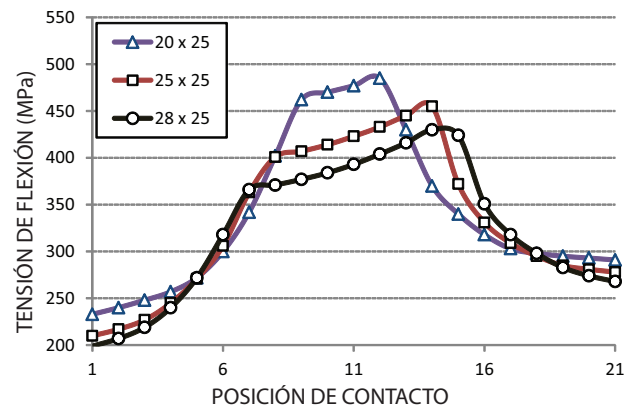


Figura 5.4.12: Evolución de la tensión de flexión en el piñón para transmisiones con distinto ángulo de presión en el lado de respaldo.

Comparativa de distintas configuraciones

En este apartado se comparan las siguientes tres transmisiones:

- Transmisión 25 x 25: Perfil simétrico de referencia con ángulo de presión 25°.
- Transmisión 30 x 20: Perfil asimétrico con ángulo de presión 30° para el lado conductor y 20° para el lado de respaldo.
- Transmisión 20 x 30: Perfil asimétrico con ángulo de presión 20° para el lado conductor y 30° para el lado de respaldo.

La Figura 5.4.13(a) muestra la evolución de las tensiones de contacto y la Figura 5.4.13(b) la evolución de la presión de contacto para el piñón de las configuraciones descritas anteriormente. La Figura 5.4.13(a) muestra una reducción en torno al 10 % tanto de la tensión de contacto como de la presión de contacto para la transmisión 30 x 20 con respecto a la transmisión de referencia 25 x 25. La configuración 20 x 30 siendo 20° el ángulo de presión

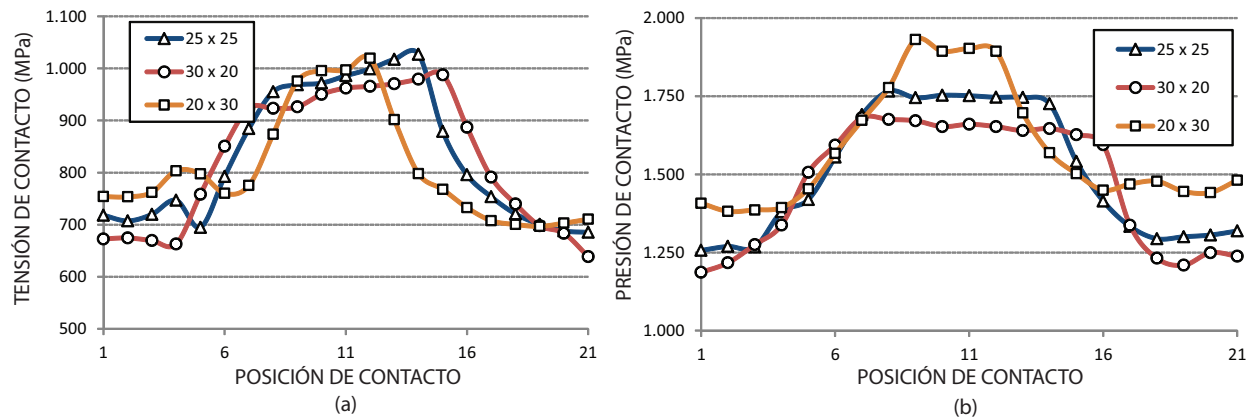


Figura 5.4.13: Evolución de: (a) la tensión de contacto y (b) la presión de contacto para el piñón para distintas configuraciones.

del lado conductor, es menor favorable desde el punto de vista mecánico que la transmisión de perfil simétrico 25 x 25.

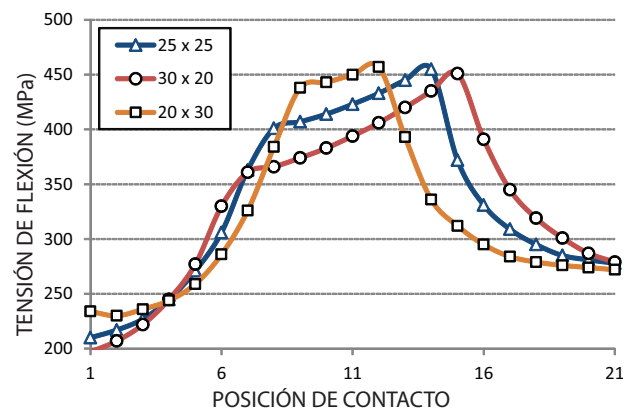


Figura 5.4.14: Evolución de la tensión de flexión en el piñón para distintas configuraciones.

La Figura 5.4.14 muestra la evolución de las tensiones de flexión para el piñón de las tres configuraciones descritas anteriormente. Como se observa en la figura, Las tres configuraciones arrojan valores máximos similares de la máxima tensión de flexión, si bien se puede notar una muy ligera reducción para la transmisión 30 x 20 con respecto a la transmisión de perfil simétrico 25 x 25.

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente proyecto se ha analizado el comportamiento mecánico de las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos de perfil asimétrico con respecto a transmisiones de referencia con perfil simétrico.

La motivación de este proyecto se basó en afirmaciones aparentemente contradictorias con respecto al lado de las superficies del diente al que hay que aplicar el mayor ángulo de presión. Por un lado, en los trabajos [1] o recientemente [2] se propone que el lado conductor debe ser el lado con menor ángulo de presión, dejando el mayor ángulo de presión para el lado de respaldo. Por otro lado, gran cantidad de trabajos como [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] proponen que el lado conductor debe corresponder al lado de mayor ángulo de presión, por lo que el lado de respaldo, en este caso, correspondería al lado de menor ángulo de presión.

En este proyecto, se han aplicado técnicas avanzadas de diseño y análisis de transmisiones de engranajes para la validación de las ventajas de la aplicación de engranajes cilíndrico-rectos de perfil asimétrico y para determinar el lado de aplicación del mayor ángulo de presión. Se han analizado por el método de los elementos finitos distintas configuraciones de transmisiones de perfil asimétrico teniendo como base para la comparación del comportamiento mecánico transmisiones de engranajes rectos de perfil simétrico con ángulos de presión de 20 y 25 grados. Se ha obtenido la evolución de las tensiones de contacto y flexión, así como la presión de contacto para el ciclo completo de engrane y se han comparado

los resultados con los obtenidos en transmisiones de dentadura de perfil simétrico. Esto ha supuesto una notable mejora con respecto a los trabajos publicados con anterioridad en los que por lo general se analiza la transmisión en un sólo punto de contacto, pudiéndose llegar de esa forma, en algunos casos, a conclusiones erróneas.

Con objeto de llevar a cabo la comparación de las tensiones de contacto, se ha buscado el rebaje de cabeza óptimo para cada transmisión de manera que se ha evitado la aparición de zonas de altas tensiones de contacto, minimizando de este modo las máximas tensiones de contacto a lo largo de todo el ciclo de engrane. Por último, se han estudiado y comparado los resultados obtenidos para distintos diseños de transmisiones de engranajes asimétricos.

Del análisis de los resultados obtenidos, se pueden formular las siguientes conclusiones:

1. La utilización de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos de perfil asimétrico, diseñadas siguiendo las recomendaciones de más abajo, permite de una manera efectiva la reducción de las máximas tensiones de contacto y de flexión a lo largo de todo el ciclo de engrane con respecto a transmisiones equivalentes de perfil simétrico, y por lo tanto contribuye al aumento de la resistencia y de la vida de funcionamiento de las transmisiones.
2. Las máximas tensiones y presiones de contacto sobre los dientes del engranaje dependen sólo del ángulo de presión del lado de conductor del engranaje, no influyendo el ángulo de presión utilizado para el lado de respaldo.
3. Las máximas tensiones de flexión se reducen cuando se aumenta el ángulo de presión del diente, no sólo para el lado de respaldo como se establece en [3, 4], sino también para el lado conductor.
4. El lado conductor del engranaje debe tener el mayor ángulo de presión, cuando el objetivo es reducir las tensiones de contacto y las presiones de contacto, y no sólo reducir los esfuerzos de flexión.
5. La optimización del coeficiente de parábola a_{pf} característico del rebaje de cabeza permite reducir notablemente el nivel de las tensiones máximas de contacto a lo largo

del ciclo completo de engrane, aunque supone un leve incremento del nivel máximo de las tensiones de flexión en la base del diente. Sin embargo, dado que en la mayoría de transmisiones de engranajes la principal causa de fallo es la picadura o fatiga superficial producida por las elevadas tensiones de contacto, la optimización de la geometría de los flancos lograda por medio del rebaje de cabeza permite un aumento notable del factor de seguridad frente a picadura lográndose de esta forma incrementar la duración esperada de estas transmisiones, sin afectar de manera considerable el ligero descenso del factor de seguridad a rotura en la base del diente como consecuencia del pequeño aumento de las tensiones de flexión.

Bibliografía

- [1] L. Hayer, “Advanced transmission components investigation,” tech. rep., Sikorski Aircraft Division, USAAVRADCOTR-82-D-11, 1986.
- [2] A. Sanders, D. R. Houser, A. Kahraman, J. Harianto, and S. Shon, “An experimental investigation of the effect of tooth asymmetry and tooth root shape on root stresses and single tooth bending fatigue life of gear teeth,” *ASME Conference Proceedings*, vol. 2011, no. 54853, pp. 297–305, 2011.
- [3] A. L. Kapelevich, “Geometry and design of involute spur gears with asymmetric teeth,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35, pp. 117–130, Jan. 2000.
- [4] F. Karpat, S. Ekworo-Osire, and M. P. H. Khandaker, “Probabilistic analysis of mems asymmetric gear tooth,” *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 130, no. 4, 2008.
- [5] K. Cavdar, F. Karpat, and F. C. Babalik, “Computer aided analysis of bending strength of involute spur gears with asymmetric profile,” *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 127, no. 3, pp. 477–484, 2005.
- [6] C. Fetvaci and E. Imrak, “Mathematical model of a spur gear with asymmetric involute teeth and its cutting simulation,” *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 36, no. 1, pp. 34–46, 2008.

-
- [7] V. S. Kumar, D. V. Muni, and G. Muthuveerappan, "Optimization of asymmetric spur gear drives to improve the bending load capacity," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 43, pp. 829–858, July 2008.
- [8] F. L. Litvin, Q. Lian, and A. L. Kapelevich, "Asymmetric modified spur gear drives: Reduction of noise, localization of contact, simulation of meshing and stress analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 188, pp. 363–390, July 2000.
- [9] F. L. Litvin, A. Fuentes, and M. Howkins, "Design, generation and tca of new type of asymmetric face-gear," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, pp. 5837–5865, 2001.
- [10] F. L. Litvin, A. Fuentes, J. M. Hawkins, and R. F. Handschuh, "Design, generation and tooth contact analysis (tca) of asymmetric face gear drive with modified geometry," *NASA/TM 2001-210614, ARL-TR-2373*, Jan. 2001.
- [11] F. L. Litvin, *Gear Geometry and Applied Theory*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1994.
- [12] F. L. Litvin and A. Fuentes, *Gear Geometry and Applied Theory*. New York (USA): Cambridge University Press, second ed., Sept. 2004.
- [13] J. Denavit and R. S. Hartenberg, "A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 22, pp. 215–221, 1955.
- [14] F. L. Litvin, "Application of matrices and dual number calculations to analysis of spatial gearings," *In Proceedings of Leningrad Polytechnic Institute*, vol. 182, p. (in Russia, 1955).
- [15] G. A. Korn and T. M. Korn, *Mathematics Handbook for Scientist and Engineers*. McGraw-Hill, Inc., 2nd ed., 1968.
- [16] F. L. Litvin, "Development of gear technology and theory of gearing," *NASA Reference Publication 1406, ARL-TR-1500*, 1998.

-
- [17] F. L. Litvin, *Theory of Gearing*. Washington, D. C.: NASA RP-1212 (AVSCOM 88-C-C035), 1989.
- [18] R. I. Willis, *Principles of Mechanisms*. Longman, Green and Co., London, 1841.
- [19] V. A. Zalgaller, *Theory of Envelopes*. Publishing House Nauka (in Russian), Moscow, 1975.
- [20] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method*. John Wiley & Sons, 5th ed., Sept. 2000.
- [21] *ABAQUS Analysis User's Manual. Volumen II: Analysis (Version 6.5)*. ABAQUS, Inc., Rising Sun Mills 166 Valley Street, Providence, RI 02909-2499, 2004.
- [22] *ABAQUS Analysis User's Manual. Volumen III: Materials (Version 6.5)*. ABAQUS, Inc., Rising Sun Mills 166 Valley Street, Providence, RI 02909-2499, 2004.
- [23] *ABAQUS Analysis User's Manual. Volumen IV: Elements (Version 6.5)*. ABAQUS, Inc., Rising Sun Mills 166 Valley Street, Providence, RI 02909-2499, 2004.
- [24] *ABAQUS Analysis User's Manual. Volumen V: Prescribed Conditions, Constraints & Interactions (Version 6.5)*. ABAQUS, Inc., Rising Sun Mills 166 Valley Street, Providence, RI 02909-2499, 2004.