

# **TESIS**

## **MODELO DE CÁLCULO A PRESIÓN SUPERFICIAL DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE PERFIL DE EVOLVENTE**

POR

**Manuel ESTREMS AMESTOY**

Ingeniero Industrial

Presentada en la

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES**

de la

**UNIVERSIDAD DE MURCIA**

para la obtención del

**Grado de Doctor Ingeniero Industrial**

**CARTAGENA, Marzo de 1998**

# **TESIS DOCTORAL**

## **MODELO DE CÁLCULO A PRESIÓN SUPERFICIAL DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE PERFIL DE EVOLVENTE**

por MANUEL ESTREMS AMESTOY

Directores de la Tesis: Dr. José Ignacio Pedrero Moya

Dr. Félix Faura Mateu

Tribunal calificador

Presidente: Dr. Angel María Sánchez Pérez

Vocales: Dr. Mariano Artés Gómez

Dr. Fernando Torres Leza

Dr. Miguel Angel Sebastián Pérez

Dr. Javier García-Lomas Jung

# Agradecimientos

Quisiera mostrar mi especial agradecimiento a los directores de la tesis, profesores Dr. José Ignacio Pedrero y Dr. Félix Faura por su inestimable apoyo durante la elaboración de la misma, y al Dr. Alfonso Fuentes Aznar sus aportaciones en el planteamiento de los desarrollos matemáticos.

Asimismo, agradezco la colaboración en la elaboración de la tesis al Departamento de Ingeniería de Materiales y Fabricación, y al Departamento de Ingeniería Mecánica y Energética de la E.T.S.I. Industriales de la Universidad de Murcia.

También agradezco a la DGICYT la concesión del proyecto de investigación: "Estudio de la generación de perfiles conjugados para dentaduras de engranajes. Desarrollo de los modelos de comportamiento a rotura en la base y presión superficial" (código de referencia: PB95-0876-C02-02) en cuyo marco se ha realizado gran parte de la tesis.

# ÍNDICE

Nomenclatura	6
Resumen y planteamiento	9
I Estado del arte	13
II Fundamentos teóricos	25
II.1 Geometría de la transmisión por engranajes cilíndricos de perfil de evolvente	26
II.2 Estudio cinemático. Velocidad elastohidrodinámica y velocidad de deslizamiento	40
II.3 Mecánica del contacto. Contacto hertziano y contacto elastohidrodinámico	46
II.4 Lubricación elastohidrodinámica en el contacto. Perfil de presiones	59
II.5 Determinación del coeficiente de fricción	69
III Modelo de cálculo de las normas AGMA e ISO	73
III.1 Modelo AGMA	73
III.2 Modelo ISO	78
III.3 Consideraciones a las normas ISO y AGMA	80
III.4 Recapitulación	83
IV Modelo de reparto de carga entre dientes de engranajes	84
IV.1 Reparto de carga entre dos pares de dientes rectos	85
IV.2 Reparto de carga a lo largo de la línea de contacto de engranajes helicoidales	100

IV.3	Recapitulación . . . . .	143
V	Lubricación y mecánica del contacto . . . . .	147
V.1	Lubricación elastohidrodinámica en el contacto entre dientes de engranajes. Desplazamiento específico del perfil de presiones . . . .	147
V.2	Mecánica del contacto en engranajes. . . . .	161
VI	Influencia del proceso de fabricación en la resistencia a presión superficial . . . . .	186
VI.1	Mecanizado de engranajes por generación . . . . .	187
VI.2	Acabado superficial . . . . .	189
VI.3	Caracterización de las superficies . . . . .	190
VI.4	Contacto entre superficies curvas rugosas. . . . .	192
VI.5	Recapitulación . . . . .	194
VII	Propuesta de criterio de fallo por fatiga superficial en engranajes . . . . .	196
VII.1	Condiciones críticas de carga: factor de intensidad de carga, $K_F$ . .	197
VII.2	Desplazamiento del perfil de presiones: factor de distorsión por lubricación, $K_\xi$ . . . . .	199
VII.3	Engranajes no lubricados: factor de contacto rugoso, $K_\alpha$ . . . . .	201
VII.4	Formulación del criterio de fallo por presión superficial . . . . .	202
VIII	Conclusiones y desarrollos futuros . . . . .	203
IX	Bibliografía . . . . .	207
Apéndices	. . . . .	219
I	Código usado en la modelización por elementos finitos del diente conjugado. . . . .	219
II	Código usado en la modelización por elementos finitos del diente. . . . .	223
III	Listado de parámetros en el fichero de uno de los resultados . . . . .	227
IV	Parámetros y resultados de los modelados por FEM . . . . .	232
	Caso de $F=2$ y $\psi=-30^\circ$ . . . . .	232
	Caso de $F=2$ y $\psi=30^\circ$ . . . . .	232
	Caso de $F=3$ y $\psi=30^\circ$ . . . . .	233
	Caso de $F=2$ y $\psi=30^\circ$ con SOLID8 . . . . .	233

# NOMENCLATURA

## Caracteres latinos

$a$	semiancho de contacto
$A$	área
$b$	adendo de la herramienta de tallado
$C$	centro de rueda
$C$	distancia entre centros
$C_p$	constante elástica de contacto
$d$	descentrado de presiones elastohidrodinámicas
$e$	espesor del diente
$E$	módulo de elasticidad
$f$	coeficiente de rozamiento
$f_x, f_s, f_n$	deformaciones del punto de aplicación de la carga debido a la flexión, cortante, y compresión.
$F$	fuerza total
$F_N$	carga aplicada entre un par de dientes
$F_{Nt}$	proyección de la carga aplicada entre un par de dientes sobre la normal a la línea de centros
$F$	ancho de la rueda
$G$	módulo cortante
$h$	distancia entre perfiles en contacto
$h^*$	espesor de película de lubricante
$H$	potencia transmitida
$H$	altura de presión reducida
$I$	intersección de la línea de acción con la circunferencia de base

$I$	momento de inercia
$K$	rigidez del diente
$l_{ef}$	longitud efectiva de contacto
$n_a$	parte decimal del grado de recubrimiento frontal
$n_r$	parte decimal del grado de recubrimiento en el salto
$O$	punto de contacto
$p$	presión
$p_o$	presión máxima de Hertz
$P$	fuerza puntual
$P_b$	longitud de paso en la circunferencia de base
$P$	intersección de la línea de acción con la línea de centros
$q$	presión reducida
$r$	radio (coordenada cilíndrica)
$r_b$	radio de base
$r_m$	radio medio de engrane
$r_p$	radio primitivo
$r_o$	radio del fin de acuerdo
$r_f$	radio de acuerdo de la herramienta
$R$	radio de curvatura
$T$	temperatura absoluta
$u$	desplazamiento
$U$	energía de aplicación de la carga
$U$	velocidad elastohidrodinámica
$v$	velocidad relativa
$\Delta v$	velocidad de deslizamiento
$V$	velocidad lineal absoluta
$W$	deformación en dirección $z$
$x$	desplazamiento de herramienta en el tallado
$x_f$	porción de paso en la transmisión desde longitud de contacto mínima
$x_i, y_i, z_i$	coordenadas absolutas del punto $i$
$X_i, Y_i, Z_i$	coordenadas relativas del punto $i$
$Y_o$	distancia a la base del diente
$Y_p$	radio de aplicación efectiva de la carga
$z$	número de dientes
$Z$	longitud de contacto
$Z$	coeficiente de Roelands

## Caracteres griegos

$\alpha$	coeficiente adimensional de rugosidad superficial
----------	---

$\alpha_o$	coeficiente piezoviscoso
$\alpha_\infty$	acercamiento en el infinito de dos sólidos rígidos en contacto
$\gamma$	espesor angular
$\gamma_b$	espesor angular del diente en la circunferencia de base
$\varepsilon$	deformación unitaria
$\varepsilon_\alpha$	grado de recubrimiento frontal
$\varepsilon_\beta$	grado de recubrimiento en el salto
$\eta$	viscosidad
$\eta_o$	viscosidad en condiciones normales
$\eta_s$	densidad de picos (n° de picos por unidad de área)
$\kappa_s$	curvatura de los picos
$\Lambda$	espesor específico de película
$\mu$	desplazamiento reducido del perfil elastohidrodinámico
$\nu$	módulo de Poisson
$\xi$	semiancho específico
$\phi$	ángulo de presión de funcionamiento
$\phi_h$	ángulo de perfil de herramienta
$\phi_{nP}$	ángulo de aplicación de la carga
$\psi$	ángulo de hélice
$\psi_b$	ángulo de hélice en la base
$\rho$	densidad
$\sigma$	tensión
$\sigma_c$	tensión nominal
$\sigma_s$	desviación típica de la altura de la rugosidad
$\sigma_{ac}$	límite de fluencia plástica
$\omega$	velocidad angular

## Subíndices

1	piñón
2	rueda
b	base
f	frontal
h	herramienta
u	funcionamiento
r	rodadura
m	medio

## RESUMEN Y PLANTEAMIENTO

Una de las causas de fallo que con mayor frecuencia se presentan en transmisiones por engranajes es la conocida como fatiga superficial o picadura. Se caracteriza por una especie de desmoronamiento en la zona de rodadura, en cuya superficie se produce desprendimiento de material, en forma de conos, muy característico de este fenómeno. Pese a ser menos temido que el fallo por rotura en la base, por lo general repentino y de naturaleza catastrófica, la aparición de la picadura, aunque progresiva, termina alterando las características de una buena transmisión, introduciendo ruido, vibraciones y sobrecargas, que pueden llegar a alcanzar valores inaceptables. Asimismo, cuando se trabaja con aceros endurecidos, el riesgo de aparición de picaduras suele ser muy superior al de rotura, lo que determina la necesidad de un buen modelo de comportamiento, del que se puedan extraer predicciones fiables.

Hoy se admite que el fallo por picadura responde a un fenómeno de fatiga. La distribución de presiones en la superficie, en la región próxima al punto de contacto, crea un estado tensional en la subsuperficie del diente, que depende tanto de la geometría de los dientes en contacto como de las características de la lubricación. La máxima tensión de cortadura producida por esta distribución subsuperficial localiza el origen de la grieta, caso de rebasarse el valor de la tensión de fatiga admisible para los ciclos de carga establecidos. Esta grieta incipiente se propaga hasta la superficie, favorecida eventualmente por la inyección a presión de lubricante, hasta provocar el desprendimiento de material.

Para predecir el comportamiento del material frente a esta sollicitación, las normas internacionales de diseño, en particular las dos más extendidas, AGMA e ISO, formulan un modelo basado en la distribución de presiones de Hertz para el contacto entre sólidos. En función de los radios de curvatura de los perfiles de los dientes y los módulos de

elasticidad de los materiales, localizan el punto de máxima presión superficial y su valor, para a partir de ellos determinar el valor crítico de la tensión de cortadura en la subsuperficie y compararlo con la resistencia correspondiente. La carga normal se supone uniformemente distribuida a lo largo de la línea de contacto, cuya longitud varía a lo largo del engrane, y la resistencia se estima en función de la dureza del material y los ciclos de carga previstos, si bien, para facilitar los cálculos y a la vista de la proporcionalidad entre la tensión de cortadura máxima y la presión superficial en el punto de contacto, dichos valores de la resistencia se dan afectados de ese factor de proporcionalidad, para ser comparados directamente con la presión de Hertz en el punto de contacto.

Sin embargo, este modelo no parece ser del todo preciso. Sorprende, en primer lugar, que los puntos donde las dos normas anteriores localizan la presión de contacto crítica no coincidan. Mientras ISO considera como punto crítico el punto de rodadura, AGMA toma, para engranajes helicoidales, el llamado punto medio del piñón, que sólo coincide con el de rodadura cuando la distancia entre centros de funcionamiento coincide con la nominal, y para engranajes rectos el punto de contacto único inferior del piñón, que no coincide con el de rodadura más que en casos auténticamente singulares. Pero más sorprendente aún resulta el hecho de que ni uno ni otro coinciden con el punto teórico de máxima presión superficial que predice el modelo de Hertz. Como quiera que la práctica, a pesar de ello, parece corroborar los resultados así obtenidos, en especial en la localización de la aparición de la picadura, cabe concluir que, si bien los ajustes efectuados parecen eficaces, el modelo no es preciso.

En la presente Tesis Doctoral se ha realizado una exhaustiva revisión del modelo de cálculo a presión superficial de engranajes cilíndricos, rectos y helicoidales. En primer lugar, se ha estudiado la distribución de la carga a lo largo de la línea de contacto, en cada punto de la línea de engrane. En lugar de suponer reparto uniforme de la misma, se ha partido de la hipótesis de mínimo potencial de deformación. A partir de la geometría de los dientes se han obtenido los potenciales de deformación, que se han minimizado mediante la aplicación de métodos variacionales, obteniéndose así tanto la distribución de la carga entre las parejas de dientes simultáneamente en contacto, como entre las distintas secciones de un mismo diente, en las que el reparto de carga no resulta uniforme si se trata de dentaduras helicoidales. Todo ello, naturalmente, en todos los puntos de la línea de engrane, en cada uno de los cuales varía tanto el módulo de rigidez del diente como la longitud de la línea de contacto.

Aplicada esta distribución de carga al cálculo de la presión de contacto mediante la teoría de Hertz, el punto crítico se localiza ya en la zona de aparición de la picadura que muestra la experiencia, y los valores teóricos de las presiones máximas se asemejan más a los que predicen las normas, que aunque se localizan en puntos que siguen sin coincidir con el crítico teórico (si bien ahora están mucho más próximos), al emplear una distribución de

carga más desfavorable, los efectos se compensan, y los valores se aproximan. Sin embargo, todavía aparecen discrepancias para determinados casos, discrepancias tanto mayores cuanto mayores son los desplazamientos o la relación entre la distancia entre centros de funcionamiento y la nominal. En efecto, la hipótesis de Hertz para la distribución de presiones en la zona de contacto es admisible en el caso de superficies planas y lisas, pero la presencia de lubricante puede introducir notables distorsiones, que arrojarían una distribución de presiones en absoluto hertziana. En esta situación, la presión en el punto de contacto y la tensión de cortadura crítica en la subsuperficie dejan de ser proporcionales.

A partir del modelo de distorsión de la distribución de presiones en la zona de contacto de Greenwood, se ha determinado el valor y la localización de la tensión de cortadura máxima en la subsuperficie, obteniéndose un valor mayor y una localización más cercana a la superficie de lo que predice la teoría de Hertz, y se han establecido los límites de aplicación del modelo de Hertz. La tensión de cortadura crítica así obtenida se ha relacionado con la presión de contacto de Hertz, lo que permite tener en cuenta las anteriores consideraciones en el modelo de cálculo tradicional mediante la simple inclusión de un factor de distorsión por lubricación, para el que se proponen unos valores en este trabajo.

De modo análogo, tampoco es aplicable el modelo de Hertz al contacto no lubricado entre superficies rugosas. Para el caso de engranajes no lubricados se ha empleado el modelo de distribución de presiones de Johnson, y como antes, se ha relacionado la presión de contacto máxima con la de Hertz, lo que de nuevo permite adaptar el modelo tradicional mediante la inclusión de un nuevo factor, que se ha llamado factor de contacto rugoso, cuyos valores también se presentan en la presente Tesis.

En resumen, en este trabajo se propone un nuevo modelo de cálculo a presión superficial de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente, basado en la determinación de la máxima tensión de cortadura en la subsuperficie del diente que produce una distribución de presiones en la zona de contacto, eventualmente distorsionada por efecto de la lubricación o de la rugosidad, producida a su vez por una distribución de la carga a lo largo de la línea de contacto no uniforme, que minimiza el potencial de deformación, y todo ello estudiado en todos los puntos de contacto, a lo largo de toda la línea de engrane. La formulación del modelo se ha llevado a cabo mediante la obtención de las relaciones entre las tensiones de cortadura críticas obtenidas y las que predice el modelo de Hertz, para posteriormente expresar dichas relaciones en términos de la presión de contacto de Hertz. De este modo, el modelo se formula exactamente igual que lo hace el modelo tradicional, recogido en las normas AGMA e ISO, entre otras, con la única salvedad de que la tensión de contacto de cálculo se ve afectada por la inclusión de tres factores: el factor de intensidad de carga, el factor de distorsión por lubricación y el factor de contacto rugoso, que toman en

consideración todas las mejoras introducidas en este trabajo, y cuyos valores y métodos de cálculo se presentan en el mismo.

Así pues, los objetivos perseguidos durante el desarrollo de la presente Tesis Doctoral se pueden concretar en los siguientes:

- Establecer las relaciones geométricas de los parámetros que intervienen en el modelo, como los radios de curvatura del perfil o las variaciones del espesor del diente con el radio (necesarios para la determinación de la presión de contacto y la rigidez del diente, respectivamente), partiendo de la geometría de la herramienta de tallado y de las condiciones de operación.
- Revisar los modelos de cálculo a presión superficial contemplados en las normas internacionales de diseño, verificando sus hipótesis de partida y acotando su rango de validez.
- Desarrollar un modelo de distribución de carga a lo largo de la línea de contacto bajo la hipótesis de mínimo potencial de deformación.
- Aplicar los modelos de Greenwood y Johnson a la distribución de presiones en la zona de contacto, a los casos de engranajes lubricados y no lubricados con superficies rugosas, respectivamente.
- Obtener el mapa tensional en la subsuperficie de los dientes, con las hipótesis de reparto de carga y distribución de presiones anteriores, y establecer un nuevo modelo de cálculo a presión superficial, basado en la localización y evaluación de la máxima tensión de cortadura en la subsuperficie, que es la causa real del fenómeno de picadura, a lo largo de toda la línea de contacto y de toda la línea de engrane.
- Formular el modelo obtenido en términos de la presión de contacto de Hertz, de manera que la tensión de contacto de cálculo se pueda expresar con la ecuación comúnmente utilizada, afectada por los factores de intensidad de carga, de distorsión por lubricación y de contacto rugoso.
- Presentar los métodos de cálculo y los valores obtenidos para los factores citados.

# I ESTADO DEL ARTE

Entre los modos de fallo en engranajes recogidos en la literatura técnica [2] [38] [47] [57], los más frecuentes, con mucha diferencia respecto al resto, son: fallo por fatiga a flexión, fatiga superficial, desgaste y gripado.

El fallo por fatiga superficial, es el fallo más corriente en engranajes y tarde o temprano acaba apareciendo. La mayoría de los modelos de fallo sitúan el origen de la grieta en la subsuperficie, en el punto de máxima tensión tangencial, propagándose por repetición de ciclos de cargas hasta la superficie y originando un desconchado o picadura. Este fenómeno se ha estudiado experimentalmente con bancos de ensayo dedicados a estudiar materiales y condiciones de lubricación [35] y se ha modelizado teóricamente la vida del engranaje como suma del tiempo de inicio de grieta y el tiempo de su crecimiento hasta la producción de la picadura. Entre los modelos que suponen el origen de la grieta en la subsuperficie están los de Faure [35], Blake [12] y Abersek et al.[1]. Éste último establece incluso un modelo de dislocaciones para determinar el tiempo de origen de grieta. Trabajos recientes como el de Tallian [86], suponen en sus modelos que el fallo se origina en la superficie debido a las deficiencias del acabado superficial y a que la alta calidad de los materiales actuales hacen improbable el origen de grieta en la subsuperficie. Cheng et al. [21] establece las condiciones de origen de grieta cuando existen entallas en la superficie. La propagación de grieta se estima haciendo uso de la mecánica de la fractura, en combinación con métodos probabilísticos [86] [1] [13]. La norma AGMA [2] propone, sin embargo, la teoría del daño acumulado de Miner para estimar la vida del diente antes del fallo por fatiga. Las características del lubricante también influyen en el fallo por fatiga superficial, mostrando una vida más larga cuando los lubricantes tienen aditivos tipo sulfuroso, como muestra el trabajo de Townsend et al. [89].

El fallo por desgaste superficial adquiere importancia cuando hay contacto directo entre los dos dientes de engranajes y la velocidad de deslizamiento es alta. Una consecuencia del

desgaste es el aumento del error de transmisión por cambio de geometría, lo cual origina mayor carga dinámica, más ruido y menor vida al acelerar el fallo por fatiga. El contacto directo se produce cuando la película de lubricante no separa totalmente las dos superficies, o bien porque el espesor de película es del orden de la rugosidad superficial, (cuya relación es utilizada por las normas al estudiar este tipo de fallo [2] [25]), o bien porque el contacto entre dientes es seco por diseño añadiendo sobre las superficies una película de lubricante sólido que se usa sólo en casos muy particulares [29]. Para evitar el desgaste en el diseño de la transmisión se debe aumentar el espesor de película lo suficiente para que no exista contacto directo entre asperezas. Esto se consigue aumentando la velocidad, disminuyendo la fuerza tangencial, o limitando la velocidad de deslizamiento [70]. Las normas AGMA [2] e ISO [25] tratan el fenómeno de desgaste como un problema probabilístico mientras que otros autores [80] estudian con más profundidad el problema viendo cómo influyen muchos factores importantes, como los fenómenos químicos que ocurren entre el lubricante y la superficie. El desgaste tiene un efecto favorable, aunque un trabajo de Fan et al. [34] ha estudiado el efecto desfavorable que puede tener cierto grado de desgaste para estabilizar la longitud de grieta en la superficie.

El gripado o "scuffing" es un daño localizado causado por la soldadura en fase sólida que se produce entre dos superficies deslizantes sin fundición local de la superficie. Cuando se produce el "scuffing", hay una brusca elevación de la fuerza de fricción acompañada de ruidos y vibraciones. En la superficie afectada se observa un desgaste severo y deformaciones plásticas. Hasta ahora, no existe acuerdo general en el detalle de este mecanismo de fallo. Es un tipo de fallo que ocurre al principio de la vida del engranaje y se puede evitar estableciendo un conveniente rodaje, elevando la viscosidad del lubricante, y añadiendo aditivos químicos "antiscuff" al lubricante [29]. Respecto a modelos de cálculo, hay dos criterios más usuales, el de la temperatura local crítica [14], y el de la intensidad crítica de potencia de fricción [64]. Los dos modelos han sido comparados recientemente en un trabajo desarrollado por Horn [51] observando que coinciden en lo esencial. El método de la intensidad de potencia crítica es más fiable bajo condiciones límites de lubricación, pero el más usado en el diseño de engranajes es el de la temperatura local crítica. Este modelo considera que el fallo ocurre cuando el lubricante alcanza una temperatura característica propia del mismo lubricante en la que se rompe la película y se produce el contacto directo entre las dos superficies metálicas favoreciendo las microsoldaduras de contacto. Esta temperatura no debe ser sobrepasada por la suma de: la temperatura del lubricante antes del contacto, y la temperatura de "flash", que es la elevación de temperatura debido al contacto. Para el cálculo de la temperatura inicial de un modo práctico, un trabajo de Deng [24] propone una fórmula experimental en función de las dimensiones y condiciones de funcionamiento. Para el cálculo de la temperatura de "flash", la norma AGMA [2] usa la expresión de Blok [14], aunque se han desarrollado diversos modelos en los últimos años basándose en una fuente de calor elíptica sobre una superficie semiindefinida [15] o también en la difusión de calor en el diente de engranaje

con una geometría determinada modelizado por el método de los elementos finitos (MEF) [4]. Existen otros factores que influyen en la temperatura de "flash", como las características químicas de la superficie, el contenido de oxígeno en el lubricante, y la textura de la rugosidad [54].

Los modelos de fallo más usados, son los aplicados por las normas ISO [25] y AGMA [2].

Para el estudio del cálculo de tensiones y deformaciones en los dientes de engranajes es más sencillo el estudio del caso plano que el tridimensional. Las normas AGMA e ISO modelizan el comportamiento elástico del diente del engranaje suponiendo deformación plana, asimilándolo a una viga de sección variable y considerando válida la teoría de Navier de la distribución de presiones por flexión. Con la aparición de las computadoras se ha ampliado la capacidad de análisis, y los dientes se modelizan con su geometría propia. El estudio del caso tridimensional también es factible con la facilidad para implementar métodos numéricos en el ordenador.

El método que consiste en asemejar el comportamiento elástico del diente a una viga en voladizo es el más usado por ser el más intuitivo, posibilita una discretización sencilla, es rápido en su cálculo y proporciona soluciones bastante aproximadas a la real. Este método ha sido utilizado recientemente por Yoon et al. [98] para hallar la deformación de dientes de forma no estándar, y por Atanasiu [8] para extrapolar la expresión de la norma ISO al caso de número pequeño de dientes. Este comportamiento lo suponen las normas para hallar las tensiones en la sección crítica del diente suponiendo distribución de tensiones de Navier. Aplicado al cálculo de deformaciones, consiste en determinar la flecha de la línea media del diente considerando la viga unidimensional con momento de inercia y sección distinta a cada altura de la misma.

Existen dos métodos de solución exacta para la determinación de la deformada del diente: el método del potencial complejo (CPM) y el método de los elementos de contorno (BEM). El primero consiste en solucionar el problema elástico en el campo complejo en donde a través de las técnicas de transformación conforme se convierte el perfil del diente en una superficie semiindefinida. Entonces se pueden aplicar las ecuaciones de la elasticidad clásica. Un modo práctico de calcular las deformaciones del diente ha sido descrito por Cardou et al. [20]. La transformación conforme de la superficie semiindefinida no desemboca en el perfil exacto teórico del diente por lo que el método es aproximado. Por otro lado, no tiene bien definidas las condiciones de contorno y tiene el inconveniente de no tener la capacidad para resolver problemas tridimensionales.

El método de los elementos de contorno se basa en las fórmulas integrales de Green para el campo elástico, y ha demostrado ser muy efectivo en el tratamiento de problemas de contacto [44]. El método también se puede aplicar a los problemas tridimensionales. Ha

sido aplicado a los engranajes por Hadgikov et al. [44].

Para el cálculo dinámico de los dientes de engranajes, el método más usado es el MEF, el cual posee una gran robustez y flexibilidad. El método se ha aplicado por muchos autores como Wilcox [96] modelizando los dos dientes en contacto, con elementos de contacto en la superficie de los dos dientes. Para que este método sea fiable se requiere un mallado muy fino, sobre todo en las proximidades del punto de contacto, en ambas piezas; al introducir elementos de contacto en la superficie de los dientes, el proceso de resolución se alarga al convertirse en un problema no lineal que requiere iteraciones; el proceso se complica aún más al tratar el problema tridimensional. Como conclusión, el planteamiento y resolución requiere una gran inversión en tiempo de preproceso, capacidad de cálculo, y una inversión de tiempo en la resolución e interpretación de los resultados. Los programas proporcionan datos ciegos que necesitan de una interpretación para reconocer si son fiables o no los resultados, para introducir mejoras y para optimizar el diseño. Por todas estas razones las investigaciones han ido enfocadas hacia la resolución de problemas parciales fácilmente interpretables, y hacia la eficiencia computacional en tiempo y en equipo invertido.

El MEF aplicado al cálculo de la deformación del diente ha tenido la dificultad de tener mal resuelto el problema de las cargas en puntos singulares, y en concreto, el problema de la estrecha zona del contacto entre dos dientes. Esta dificultad se ha solventado, bien discretizando con mayor número de elementos la zona de contacto, o bien, ideando métodos derivados o similares al de los elementos finitos como el "Global Local Finite Element Method" (GLFEM) aplicado por Moriwaki [65]. Esta variante trata de combinar las soluciones para el problema del contacto con el método de elementos finitos en una formulación global. La principal dificultad en su aplicación es su costosa programación. La discretización con mayor número de elementos en la zona de contacto se puede hacer si se elabora una rutina de mallado automático para cada estado de carga combinado con la distribución de la carga en un área para evitar la singularidad de la carga puntual. Éste es el procedimiento llevado a cabo por Vijayarangan [93] el cual realizó un estudio de la influencia de la fricción entre dientes en las tensiones subsuperficiales.

Entre los primeros trabajos realizados con el MEF, está el temprano trabajo realizado por Wilcox [96] en el que desarrolla un modelo complejo de engrane entre varios pares de dientes, usando la técnica de subestructuración para facilitar su resolución, también en el caso tridimensional, y está implementado en el programa CAEG de Gleason que funciona sobre estaciones de trabajo. También el trabajo de Rao [77] modeliza un diente helicoidal y sus líneas de carga, aunque con la simplificación de distribuir uniformemente la carga a lo largo de las líneas de contacto. Su modelo está enfocado al cálculo de las tensiones en la base del diente. Stegemiller [83] hizo uso del MEF con éxito para obtener correlaciones que indican la deformación en la base del diente, elaborando un interesante modo de

aumentar la eficiencia computacional. En su modelo Stegemiller aproximó la forma del diente a la de una cremallera, obteniendo que los resultados son prácticamente idénticos a usar la forma geométrica exacta del diente. Von Eiff [94] realizó un estudio exhaustivo en el caso plano con el método de elementos finitos con mallados muy finos. El estudio fue enfocado hacia el cálculo de la tensión en la base del diente y la localización de la sección crítica, sus resultados fueron comparados con las tensiones nominales proporcionadas por las normas AGMA e ISO.

Desde los años 70 se han desarrollado variantes del MEF algunas de las cuales se han aplicado con éxito al problema de los engranajes, demostrando su eficacia. Moriwaki et al. [65] aplicó el GLFEM obteniendo una mejora en la precisión de los resultados y en el tiempo de resolución. Baret et al. [10] confirmó que los elementos finitos jerárquicos (versión p-FEM) son realmente eficientes permitiendo afinar los resultados sin cambiar el mallado.

Recientemente [60], se ha usado el MEF para hallar matrices de flexibilidad de varios dientes en contacto con el objetivo de añadir la deformación del diente bajo carga al error de transmisión. Completando de este modo el procedimiento de análisis del contacto entre dientes (TCA) [40] desarrollado por los Ingenieros de Gleason. Este procedimiento sirve para hallar el error de transmisión, y las elipses de contacto durante el engrane para cargas pequeñas. La deformación de los dientes la obtienen calculando previamente la distribución de la carga a lo largo de la línea de contacto, y aplicando la distribución calculada en un modelo de elementos finitos, obteniendo de este modo las tensiones subsuperficiales a lo largo de la zona de contacto, las tensiones en la base del diente y las deformaciones del diente bajo grandes cargas que se usarán para recalcular los errores de transmisión.

La primera publicación en la que se plantea esta técnica se debe a Litvin et al. [60] el cual sigue un procedimiento que ha denominado LTCA (load tooth contact analysis) que consta de las siguientes etapas:

- Determinación de la fuerza de contacto en el punto actual de tangencia entre superficies.
- Determinación de la elipse de contacto para los engranajes cargados y distribución de la fuerza sobre el área de contacto
- Discretización de los dientes del piñón y de la rueda en elementos sólidos para aplicar el MEF.
- Determinación de la deformada del diente.
- Determinación de los errores de transmisión causados por los desalineamientos y deformadas de los dientes.
- Análisis del reparto de carga entre dientes y determinación del área de contacto real.
- Análisis de tensiones.

La distribución de fuerza obtenida en el caso práctico desarrollado en la publicación la obtuvo discretizando la fuerza total en siete fuerzas puntuales aplicados sobre los nodos del modelo de elementos finitos. El mallado de elementos finitos se hizo de modo que los nodos estaban alineados y uniformemente distribuidos a lo largo de la línea de contacto. La distribución de carga obtenida dio un valor a la fuerza máxima de 1.5 veces el valor de la media, localizada alrededor del punto medio de la línea de contacto.

Otro modo de proceder en el uso del MEF para el cálculo de la distribución de fuerzas entre un par de dientes viene descrito en un trabajo realizado por Zhang et al. [99], el cual usó el TCA como preprocesador. Se habla por primera vez de matriz de flexibilidad para determinar la energía de deformación, y aplicando una corrección del algoritmo simplex desarrollada por Conry et al. [22], obtuvo el vector de fuerzas que hace mínima la deformación. En el ejemplo desarrollado en el trabajo discretizó el diente en elementos de 20 nodos isoparamétricos, de tal forma que en la cara del diente había en total 25 nodos. Aplicando una carga puntual sobre cada uno de ellos se obtiene el vector de desplazamiento compuesto por el desplazamiento del punto donde se aplica la carga y del resto de nodos de los que están en la cara del diente. De este modo se desarrollan los 25 estados de carga. El desplazamiento en la línea de contacto se obtiene por interpolación de los componentes de toda la cara, obteniendo mediante reordenamiento de los datos obtenidos la matriz de flexibilidad.

Otro método totalmente distinto para determinar la deformación del diente es asemejarlo a una placa en voladizo cargada en un punto. La solución a este problema fue hallada numéricamente por Jaramillo [53] resolviendo las ecuaciones de la elasticidad mediante la integral de Fourier. Timoshenko et al.[88] aportan otras soluciones al cálculo de las placas en voladizo. Estas soluciones teóricas han sido utilizadas para corroborar resultados obtenidos con los métodos numéricos.

El método de Ritz es otro método aproximado que se basa en asumir que la solución al problema tiene una forma analítica con unos parámetros ajustables. Estos parámetros son escogidos de forma que hagan la energía elástica mínima, o dicho en otros términos, que hagan el funcional estacionario. El funcional sería derivado respecto a cada parámetro e igualado a cero. Es un método variacional cuyos fundamentos teóricos son muy similares a los del MEF. Su precisión depende de que las funciones a ajustar sean las adecuadas. Yau et al. [97] hicieron una modelización de la deformación del diente de engranaje, tomando como funciones a ajustar los modos de vibración de una placa en voladizo, obteniendo un modelo que llaman "Shear Plate Model". Este modelo tiene la ventaja de que es tridimensional y obtiene mejores resultados que con el método de elementos finitos, a la vez que el tiempo de ordenador también se reduce notablemente.

La norma ISO propone un modelo de rigidez del diente descrito por Henriot [47] el cual

tiene una expresión simple. Un borrador de la norma propone una mejora al modelo ISO de rigidez del par de dientes en contacto que ha sido publicada recientemente por Cai [18]. Ambas tratan de establecer una función de rigidez del conjunto total de dos pares de dientes conjugados, aunque la utilidad que se le ha dado ha sido principalmente en el campo de estudio de vibraciones.

El espesor del anillo de la rueda también influirá en la deformación del diente. El estudio de su influencia ha estado enfocado hacia su efecto sobre las tensiones en la base del diente, así von Eiff [94], después de numerosos análisis por elementos finitos estableció que su efecto se podía despreciar cuando su valor superara cinco veces el módulo. Bibel et al. [11] también le dedican un estudio exhaustivo.

Después de obtener el modelo de deformación del diente se trata de saber utilizarlo para la determinación de la energía del sistema elástico continuo. Los sistemas multicuerpo se resuelven recurriendo a la minimización de la función energía total, sujeta a condiciones de contorno y otras especiales, como la impenetrabilidad, leyes de fricción, etc. La función energía de desplazamiento no es lineal, por lo que no vale ninguno de los múltiples procedimientos de programación lineal que existen en la literatura, con lo que se suele recurrir a otros métodos iterativos, o a linealizar el problema como lo hizo Vijayarangan et al. [93]. Conry y Seireg [22] realizaron una modificación del algoritmo para solucionar el problema. Este es el método que se ha utilizado en el trabajo de Zhang [99] comentado anteriormente. Todos estos algoritmos son iterativos, necesitan unos valores iniciales, y es difícil asegurar la convergencia a la solución correcta.

El procedimiento de minimizar la energía sirve tanto para determinar la porción de carga que le corresponde a cada par de dientes que están transmitiendo potencia, como para la determinación del perfil de fuerzas a lo largo de la línea de contacto entre un par de dientes en un instante determinado.

Una vez obtenida la fuerza que actúa en cada punto de los dientes durante el engrane, junto con el diagrama de velocidades, se estaría preparado para afrontar el problema de la lubricación. La lubricación es otro factor importante que influye de manera determinante en el comportamiento del diente ante el fallo superficial. Ya se ha indicado anteriormente la influencia de la composición química del lubricante en los fallos de desgaste y picadura. Por una parte el espesor de película tiene que ser lo suficientemente grande para evitar el contacto directo metal-metal de las asperezas, y por otra tampoco debe ser muy grande pues iría en detrimento del rendimiento de la transmisión.

La lubricación puede seguir varios regímenes. Cuando la fuerza que soporta la película es muy baja, los dientes en contacto tienen una deformación despreciable y el régimen se denomina newtoniano. Si las cargas llegan a tomar un valor considerable, las superficies

se deforman elásticamente y se dice que el régimen es viscoelástico, y cuando la carga es tan alta que deforma plásticamente las superficies en contacto se dice que se ha entrado en régimen viscoplástico. Una clase de régimen viscoelástico es el llamado elastohidrodinámico que se produce cuando la viscosidad del lubricante crece exponencialmente con la presión (regla de Barus) a una temperatura constante. Esta regla es una aproximación de un ajuste más perfecto pero más difícil de tratar matemáticamente, conocido como la relación de Roelands [36].

Para la obtención de la solución del problema elastohidrodinámico se tienen que resolver las ecuaciones del flujo de fluido y las de la elasticidad de los sólidos. Dowson y Higginson [26] proporcionaron una solución numérica a las ecuaciones, y aunque se hayan aportado posteriores mejoras al método como las de Paolo [68], sus correlaciones de espesor de película se continúan utilizando en la actualidad. Grubin resolvió analíticamente las ecuaciones bajo la hipótesis de que las cargas altas las soportan superficies planas, y obtuvo que el campo de presiones que se ejercía sobre las superficies coincidía con el dado en el contacto seco, es decir, con el de Hertz. Greenwood [41] haciendo un cambio de referencia en la resolución de las ecuaciones realizó una extensión del problema de Grubin y obtuvo una solución analítica más perfecta cuyo campo de presiones ya tenía todas las características observadas en la solución numérica, como el pico en la presión ejercida sobre la superficie. Pan y Hamrock [67] proporcionan unas correlaciones ampliando las de Dowson para el pico de presiones y su localización. Ishii et al. [52] desarrollaron un sistema experto para el control de la lubricación con estas expresiones.

Las soluciones elastohidrodinámicas para el caso plano se pueden aplicar al tridimensional incluso cuando la profundidad de contacto es menor que el semiancho de contacto, como señalaron Evans y Snidle [33]. También sirven para condiciones no estacionarias, pues la formación del régimen es casi inmediata, como lo muestra el trabajo de Hooke [50]. Sólo en la estimación de la fuerza de rozamiento se ha detectado un pequeño y despreciable lazo de histéresis, en la representación gráfica de la fuerza en función de la velocidad, al cambiar rápidamente el sentido del deslizamiento [49].

Otro factor que influye en el régimen de lubricación y en la resistencia superficial del diente es la rugosidad superficial. Las características superficiales del diente vienen dadas por las condiciones de fabricación empleadas en el acabado de la superficie, especialmente depende de la geometría de la herramienta y de las condiciones de corte.

Para estudiar la influencia de la rugosidad superficial en el régimen de lubricación, el parámetro más empleado es el espesor específico de película  $\Lambda$  que se define como la relación entre el espesor de película y la desviación típica de la rugosidad de las superficies [31][75].

Según Evans y Johnson [31], cuando  $\Lambda$  es mayor que 6 veces la desviación típica de la rugosidad la influencia de ésta es despreciable. Cuando  $\Lambda$  está entre 0,6 y 6, el régimen es semi-elastohidrodinámico, es decir, el régimen elastohidrodinámico ocurre a pequeña escala entre cada una de las asperezas, con lo que cambia el punto de vista y los parámetros. Cuando  $\Lambda$  es menor de 0,6 el factor predominante ya no es el lubricante sino el contacto directo entre asperezas.

Además de la desviación típica de la rugosidad superficial, tiene mucha importancia la orientación o textura de las estrías de la rugosidad. Según los experimentos de Johnson y Spence [54] cuando la rugosidad superficial está direccionada paralelamente a las líneas de contacto (sentido longitudinal del diente), el coeficiente medio de rozamiento y desgaste disminuye, mientras que si la textura es perpendicular a las líneas de contacto (sentido radial) el rozamiento y desgaste se aceleran. La causa de este fenómeno se debe al efecto de la lubricación entre asperezas que entra en un régimen microelasto-hidrodinámico cuyo espesor de película aumenta al disminuir el radio.

Los modelos de fricción y desgaste considerados por las normas ISO [25] y AGMA [2] suponen un régimen semi-elastohidrodinámico, con correlaciones semiempíricas. Policarpou et al. [75] han desarrollado correlaciones con un buen ajuste añadiendo en lubricación, entre los factores a tener en cuenta, el parámetro de resistividad eléctrica entre superficies.

El rendimiento de la transmisión está en relación directamente proporcional con el coeficiente de rozamiento medio, tal como observaron Johnson y Spence [54]. En el mismo trabajo se demostró una expresión del rendimiento compuesta por dos factores: el rozamiento medio entre dientes y otro factor que depende únicamente de la geometría de la transmisión.

Otros factores que pueden influir en el desarrollo del fallo superficial, es el rodaje realizado antes de poner a funcionar el elemento a plena carga. El rodaje tiene un efecto beneficioso pues prepara la superficie para una mayor resistencia a picadura y desgaste. Durante las horas de rodaje, las asperezas se van suavizando de manera muy progresiva por desgaste, de tal modo que se limitan tensiones residuales y deformaciones plásticas que podrían ser fácilmente origen de grieta. Este predominio de las deformaciones elásticas frente a las plásticas es el efecto predominante del rodaje [58].

Los modelos de propagación de grieta por fatiga superficial han sido elaborados a partir del modelo de Hertz, [13] [86]. El cálculo de las tensiones subsuperficiales en un contacto plano entre cilindros está muy tipificado desde el primer trabajo de Hertz [48] cuyas fórmulas se siguen utilizando en la actualidad, y sobre el que han seguido realizando estudios, como Poritsky [76], que mediante el potencial complejo plano dedujo las funciones de Airy del contacto entre dos cilindros, y Johnson [55], que generalizó su teoría

para contactos hertzianos mediante la resolución de integrales de Cauchy. En el caso plano, el cálculo de las deformaciones de contacto depende de la imposición de las condiciones de contorno. Cuando se trabaja en el espacio tridimensional este problema no aparece, pudiéndose determinar la flexibilidad del área de contacto, como realizó Szalwinsky [84]. El contacto hertziano es el utilizado en los modelos de fallo superficial de las normas ISO y AGMA. Sin embargo, nada hay escrito sobre el contacto de superficies plenamente lubricadas en la que el perfil de presiones puede llegar a ser muy diferente de la elipse hertziana.

Hay otros factores que hacen que el perfil de presiones no sea totalmente hertziano, como es el que las superficies en contacto no sean cilindros, o que la aproximación parabólica en función únicamente de los radios de curvatura en el punto de contacto no sea suficiente, al variar ésta en función del radio de base que define el perfil de envolvente.

También influye la rugosidad superficial, cuando el contacto es semi-elastohidrodinámico o seco, donde hay un área de contacto real y otra aparente. La real es la que se produce entre las rugosidades. Para modelizar el contacto, Greenwood y Williamson [42] parametrizaron la superficie a partir del perfil dado por el rugosímetro en función de la densidad de picos, su curvatura, y su pendiente. La rugosidad afecta a la forma del perfil de presiones hertziano en cuanto disminuye el valor máximo de presión y aumenta el ancho de contacto, esta distribución es función de la relación entre el área real y el área aparente.

Realizando las operaciones convenientes y suponiendo superficies la distribución de alturas de rugosidad gaussiana, el área real de contacto es proporcional a la carga aplicada, lo que justifica en cierto grado la ley de Amonton [55] sobre el coeficiente de fricción, aunque luego, en la práctica, intervienen otros muchos factores, como el comportamiento de las capas de óxido formadas en las superficies [66]. Para la deducción de la ley de Amonton se ha supuesto que la deformación de las asperezas es elástica, lo que se ha de procurar siempre para no estimular la iniciación de grietas en la superficie.

El coeficiente de fricción influye también en el perfil de presiones, añadiendo una componente a las tensiones superficiales y subsuperficiales. Estas fuerzas de fricción pueden proceder del contacto entre rugosidades, y de la viscosidad del lubricante. De los modelos de fricción cuando existe lubricación plena, el más admitido es el de Blok [14], que hace proporcional la fuerza de fricción a la relación entre espesor de película y el coeficiente piezoviscoso del lubricante. Esta relación ha sido corroborada por el modelo teórico de Greenwood [41].

Otros factores que se podrían tener en cuenta son la velocidad de variación de la carga que debe ser menor que la velocidad de propagación del sonido del material para que se suponga un estado tensional estático [55]. El factor de tamaño también es importante, ya

que cuanto más grande es la superficie, mayor es la probabilidad de encontrar defectos donde iniciarse la grieta [56]. Fenómenos que suelen ocurrir en el contacto, como el de adherencia-deslizamiento [66] o la adhesión entre superficies al actuar una fuerza tangencial [84], no suelen ocurrir en la transmisión por engranajes debido a la lubricación y a las altas velocidades a las que se suelen trabajar.

El trabajo quedaría incompleto si no se tuvieran en cuenta los aspectos constructivos y de montaje, ya que lo que se debe estudiar es el comportamiento de fallos superficial del engranaje real, y no del teórico que saldría de una fabricación ideal.

Las diferencias entre el perfil teórico y el real debidas a la fabricación se deben principalmente a las imprecisiones en los asientos de los amarres, en la geometría de la herramienta, a la falta de rigidez de la máquina, y a los cambios geométricos inducidos por los tratamientos térmicos a los que se somete la pieza para endurecerla superficialmente. Estas causas más los desajustes en el montaje hacen que la transmisión no sea homogénea, de forma que los errores de transmisión aumentan y con ellos crecen la intensidad de las vibraciones y el ruido, a la vez que disminuye la vida útil de la transmisión.

Entre las herramientas disponibles para determinar con precisión el error de transmisión destaca el TCA (tooth contact analysis) [40] desarrollada por los ingenieros de Gleason y cuya metodología constaría de los siguientes pasos:

- Localización de los puntos de contacto.
- Determinación de los errores de transmisión debidos a los desalineamientos.
- Prediseño de una función parabólica para la absorción de los errores de transmisión.
- Determinación final de los errores de transmisión.
- Determinación de las trayectorias de contacto sobre las superficies del piñón y de la rueda.
- Desarrollo del LTCA.

Junto con el desarrollo de técnicas computacionales (TCA), la tecnología de engranajes ha evolucionado por el lado de minimizar las desviaciones de la superficie real de la teórica introducida en el TCA. Con el objetivo de minimizar esta desviación Litvin et al. [62] ha desarrollado un método para modificar los asientos de los amarres, a partir de los datos del perfil real obtenidos con la máquina de medición de coordenadas tridimensional. Con estos datos aplica un procedimiento de minimización por mínimos cuadrados de las desviaciones, obteniendo los nuevos parámetros de los amarres que minimizan la desviación real respecto al teórico.

El siguiente paso será la obtención de una función del error de transmisión del error a partir de las funciones de interpolación de las desviaciones finales del perfil obtenido a su vez

de los datos sacados de la máquina de medición de coordenadas 3D del perfil.

## II FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En este capítulo se van a establecer los fundamentos en los que se ha basado todo el desarrollo de la tesis. No se va a demostrar ninguna expresión que ya esté publicada, se han deducido aquellas expresiones que se pueden considerar como nuevas o que no se encuentran bien especificadas en la bibliografía. Las expresiones expuestas han sido necesarias para los programas de ordenador que se han tenido que desarrollar.

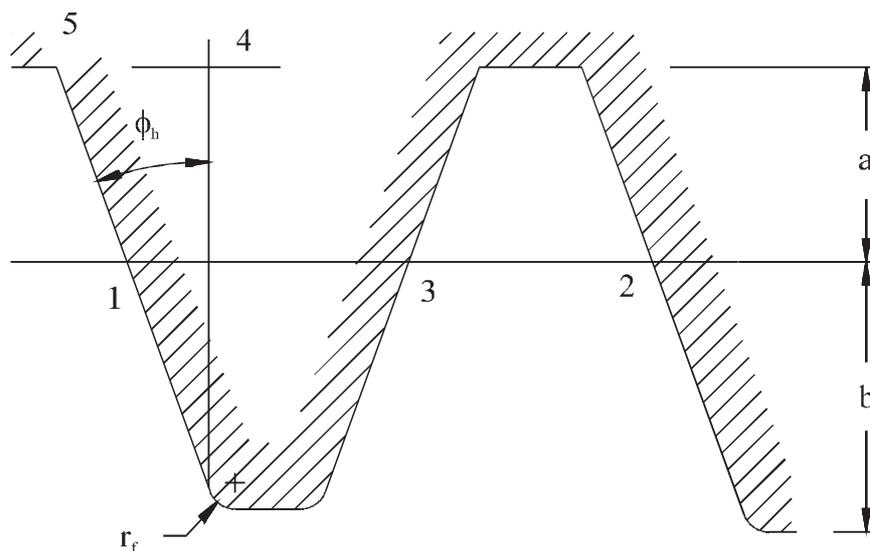
Se va a comenzar por establecer el modelo geométrico, para lo cual se ha supuesto que los dientes se hayan generado a partir del tallado por cremallera lo que origina un perfil de evolvente en la parte generada por el perfil recto de la talladora, y una trocoide en la parte generada por el radio de acuerdo. La generación con piñón origina el mismo perfil de evolvente, y la geometría de la huella se diferencia muy poco de la trocoide, por lo que se puede considerar a efectos prácticos que son iguales a los generados con cremallera.

A continuación se establecerán el modelo geométrico de engrane, con la línea de contacto, los parámetros de diseño, etc. En este mismo apartado se impondrán todas las condiciones de validez, necesarias para el correcto funcionamiento de la transmisión, como la ausencia de penetración, apuntamiento, interferencia, holgura mínima, etc.

A continuación se realizará el modelo cinemático, necesario especialmente para establecer las condiciones de lubricación. Se ha profundizado en el análisis de la mecánica del contacto, como base del fallo superficial por fatiga, analizando la procedencia de las expresiones con el fin de establecer su alcance y en su caso proponer alguna modificación para casos concretos. La lubricación elastohidrodinámica también ha requerido un estudio aparte analizando las propiedades del lubricante y comparando los diversos modelos existentes, así como su influencia en el perfil de presiones en el contacto, el coeficiente de fricción y en el rendimiento de la transmisión.

## II.1 Geometría de la transmisión por engranajes cilíndricos de perfil de evolvente

Al establecer el modelo geométrico, se ha supuesto que los dientes se han generado a partir del tallado por cremallera lo que origina un perfil de evolvente en la parte generada por el perfil recto de la talladora, y una trocoide en la parte generada por el radio de acuerdo. A continuación se establecerá el modelo geométrico de engrane, con la línea de contacto los parámetros de diseño, etc. En este mismo apartado se impondrán todas las condiciones de validez, necesarias para el correcto funcionamiento de la transmisión, como la no penetración, apuntamiento, interferencia, holgura mínima, etc.

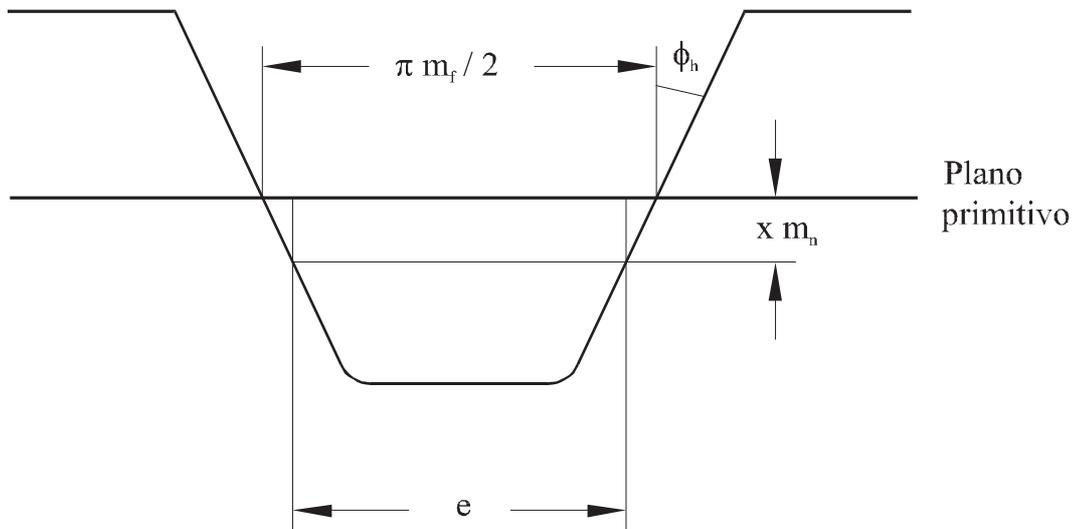


**Figura 1** Cremallera de tallado

### Geometría de la herramienta

La herramienta que se ha usado para el tallado teórico del diente es una cremallera cuyas dimensiones se pueden observar en la Figura 1. Las características principales que definen a la cremallera son el módulo que es el paso dividido por  $\pi$ , el ángulo de presión  $\phi_h$ , el radio de acuerdo  $r_f$ , y el dedendo  $b$ . Estas dimensiones tienen unos valores normalizados aunque a lo largo del trabajo se han tomado rangos en lugar de los valores discretos usados

en la industria. También se ha tomado como parámetro de diseño el desplazamiento de la herramienta en el tallado cuyo concepto viene representado en la Figura 2



**Figura 2** Desplazamiento de la herramienta en el tallado

### Propiedades geométricas del perfil de evolvente

La evolvente de una circunferencia de radio  $r_b$  se define como el lugar geométrico de los puntos que verifican que la tangente por ellos a una circunferencia, llamada circunferencia de base, define un punto de tangencia que dista del punto considerado una distancia igual a la longitud del arco de la circunferencia de base limitado por el punto de tangencia y un dado de la circunferencia [38].

Sus ecuaciones vendrían dadas por:

$$\rho = r_b \sqrt{1 + \theta^2} \quad (1)$$

$$\beta = \theta - \arctg \theta$$

Una característica del perfil de evolvente es que la evoluta de dicha curva (el lugar geométrico de las rectas normales) es la circunferencia de base.

La longitud de curva entre dos puntos vendrá dado por la siguiente expresión:

$$l = \frac{r_b}{2}(\theta_1^2 - \theta_2^2) = \frac{1}{2r_b}(\rho_1^2 - \rho_2^2) \quad (2)$$

El radio de curvatura de una curva de evolvente es igual a la distancia del mismo al punto en que la normal por él es tangente a la circunferencia de base:

$$\rho_c = r_b \theta = \sqrt{r^2 - r_b^2} \quad (3)$$

### Espesor del diente recto

Recordando las expresiones deducidas en la tesis doctoral de Alfonso Fuentes [38], se parte del espesor angular  $\gamma$  del perfil de evolvente como base para hallar el espesor cartesiano  $e$  del diente. Es espesor cartesiano será necesario para asemejar el comportamiento elástico del diente a una viga en voladizo, tal como se realizará en el apartado IV.1.

$$\gamma = \frac{\pi}{z} + \frac{4x}{z} \text{tg}\phi_h + 2(\text{tg}\phi_f - \phi_p) - 2 \left( \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1} - \text{arctg} \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1} \right) \quad (4)$$

$$e = 2r \text{sen} \frac{\gamma}{2} \quad (5)$$

Esta expresión es válida desde el radio de entronque en el que comienza el perfil de evolvente.

Para un radio menor, el espesor angular vendrá dado por las ecuaciones paramétricas de la trocoide en la huella del diente.

$$r = \sqrt{[r_o - r_f(\text{sen}\varphi - \text{sen}\phi_h)]^2 + \frac{1}{\text{tg}^2\varphi} [r_p - r_o + r_f(\text{sen}\varphi - \text{sen}\phi_h)]^2} \quad (6)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{r_p - r_o - r_f \operatorname{sen}\phi_h}{r_p \operatorname{tg}\varphi} + \frac{r_f}{r_p} \cos\phi_h + \beta + \phi_h - \frac{r_o \operatorname{tg}\phi_h}{r_p}\right) = \frac{r_p - r_o + r_f(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\phi_h)}{\operatorname{tg}\varphi[r_o - r_f(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\phi_h)]} \quad (7)$$

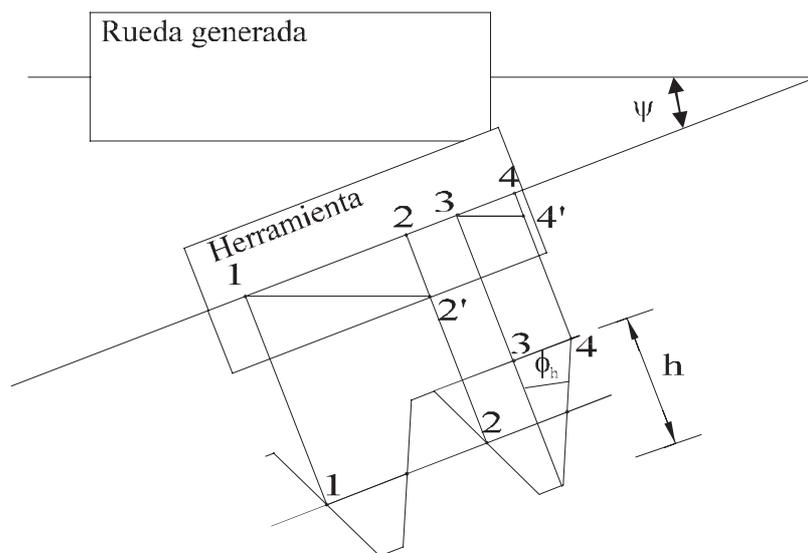
en donde el radio  $r$  y el ángulo  $\beta$  vienen dados en función del parámetro  $\varphi$  y  $r_o$  que proviene de la siguiente expresión:

$$r_o = r_p - m b - m (r_f - r_f \operatorname{sen}\phi_h) + x m \quad (8)$$

y el espesor cartesiano en esta zona será:

$$e = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma_b + 2\beta}{2}\right) \quad (9)$$

el radio de entronque en el que enlaza el perfil de evolvente y la trocoide se determina sustituyendo en la ecuación del radio de la trocoide  $\varphi$  por  $\phi_h$ .



**Figura 3** Tallado de engranajes helicoidales

### Espesor de un diente helicoidal

Las expresiones del espesor de diente helicoidal tanto en la zona de perfil de evolvente como en la zona de la trocoide son muy similares a las dadas para el caso de engranaje recto, pero teniendo en cuenta el efecto del ángulo de hélice de tallado  $\psi$ , tal como se

muestra en Figura 3. La sección frontal corresponde a un engranaje recto que se hubiese tallado con un ángulo de presión  $\phi_f$  y un módulo  $m_f$

$$\operatorname{tg} \phi_f = \frac{\operatorname{tg} \phi_h}{\cos \psi} \quad (10)$$

$$m_f = \frac{m}{\cos \psi} \quad (11)$$

Con lo que quedan las siguientes expresiones del espesor angular y cartesiano del diente en el perfil de evolvente:

$$\gamma = \frac{\pi}{z} + \frac{4x}{z} \operatorname{tg} \phi_h + 2(\operatorname{tg} \phi_f - \phi_f) - 2 \left( \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1} \right) \quad (12)$$

$$e = 2r \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \quad (13)$$

y las siguientes expresiones de la geometría de la trocoide, desde el radio de entronque hasta la circunferencia de pie:

$$r = \sqrt{[r_o - r_f(\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \phi_h)]^2 + \frac{\cos^2 \psi}{\operatorname{tg}^2 \varphi} [r_p - r_o + r_f(\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \phi_h)]^2} \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\cos \psi (r_p - r_o - r_f \operatorname{sen} \phi_h)}{r_p \operatorname{tg} \varphi} + \frac{r_f}{r_p \cos \psi} \cos \phi_h + \beta + \phi_h - \frac{r_o \operatorname{tg} \phi_h}{r_p} \right) = \frac{r_p - r_o + r_f(\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \phi_h)}{\operatorname{tg} \varphi [r_o - r_f(\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \phi_h)]} \quad (15)$$

determinándose el espesor cartesiano en esta zona del mismo modo que en el engranaje recto.

La sección del diente con un cilindro concéntrico al eje de la rueda forma una hélice. El ángulo de la hélice sólo coincidirá con el ángulo de tallado a un radio igual en el radio primitivo de tallado. A cualquier otro radio el ángulo de hélice vendrá dado por:

$$\operatorname{tg}\psi_r = \frac{r}{r_p} \operatorname{tg}\psi \quad (16)$$

en el radio de base el ángulo de hélice será:

$$\operatorname{tg}\psi_r = \cos\phi_f \operatorname{tg}\psi \quad (17)$$

Este ángulo es importante pues es el que forma la línea de acción con la sección frontal en el engrane entre dos dientes helicoidales.

## Holgura

La determinación de la holgura es importante para tener una buena lubricación, y para que el engrane no tenga un ajuste demasiado prieto.

Se distinguen dos tipos de holgura,

- la que se produce entre la cabeza del diente y el fondo de la huella, es la holgura radial  $h_r$ .

$$h_r = b - a \quad (18)$$

- La que existe entre un diente y el conjugado, es la holgura circunferencial o de paso  $h_p$ .

$$h_p = 2C(\operatorname{tg}\phi - \phi) - (\operatorname{tg}\phi_f - \phi_f) - \frac{4C}{Z_T} x_T \operatorname{tg}\phi_h \quad (19)$$

## Engrane de ruedas con dentadura de perfil de evolvente

El engrane entre dos dientes de perfil de evolvente del mismo módulo tiene las siguientes

características:

- El contacto se produce siempre en la tangente cruzada común a las dos circunferencias de base.
- La relación de transmisión se mantiene constante en todo momento, y es igual a la relación entre los números de dientes de una y otra.

En el punto de contacto entre los dos perfiles de dientes hay un movimiento relativo de rodadura y otro de deslizamiento. Se llaman circunferencias de rodadura a las circunferencias de ambas ruedas en cuyo punto de tangencia las superficies se mantienen en rodadura sin deslizamiento. A la distancia nominal entre centros, el radio de rodadura coincide con el radio primitivo, pero a otra distancia, ambos radios se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$r_r = \frac{Z}{Z_T} C \quad (20)$$

por esta razón a las circunferencias de rodadura se las designa también como circunferencias primitivas de funcionamiento.

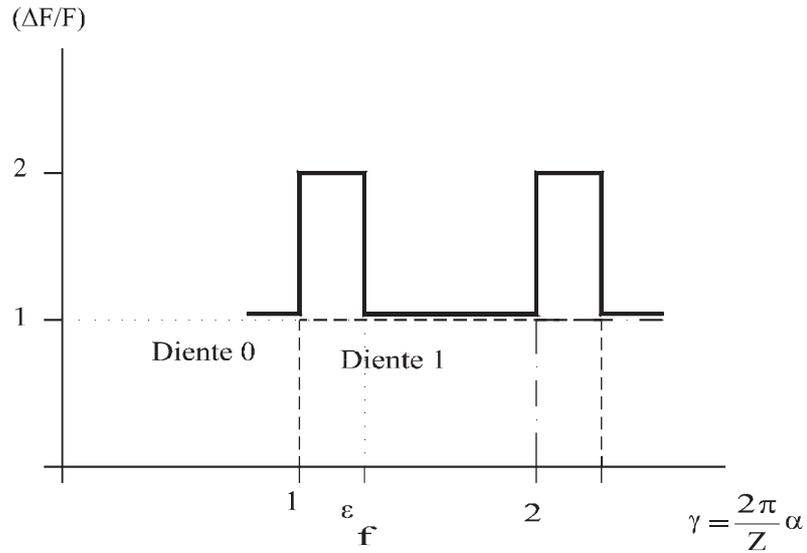
### Radios de inicio y finalización de engrane.

El radio de finalización de engrane del piñón es el menor radio del piñón que entra en contacto con la rueda, mientras que el radio de inicio de engrane coincide con el radio de cabeza y engrana con el radio de finalización de engrane de la rueda.

$$r_{fm}^2 = r_{a2}^2 + C^2 - 2C(r_{b2} \cos\phi + \text{sen}\phi \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}) \quad (21)$$

### Radios de contacto único superior e inferior

Los puntos de contacto único determinan el intervalo en que un único diente de un engranaje recto está soportando toda la carga, lo que suele determinar la condición más



**Figura 4** Longitud de contacto en un engranaje recto

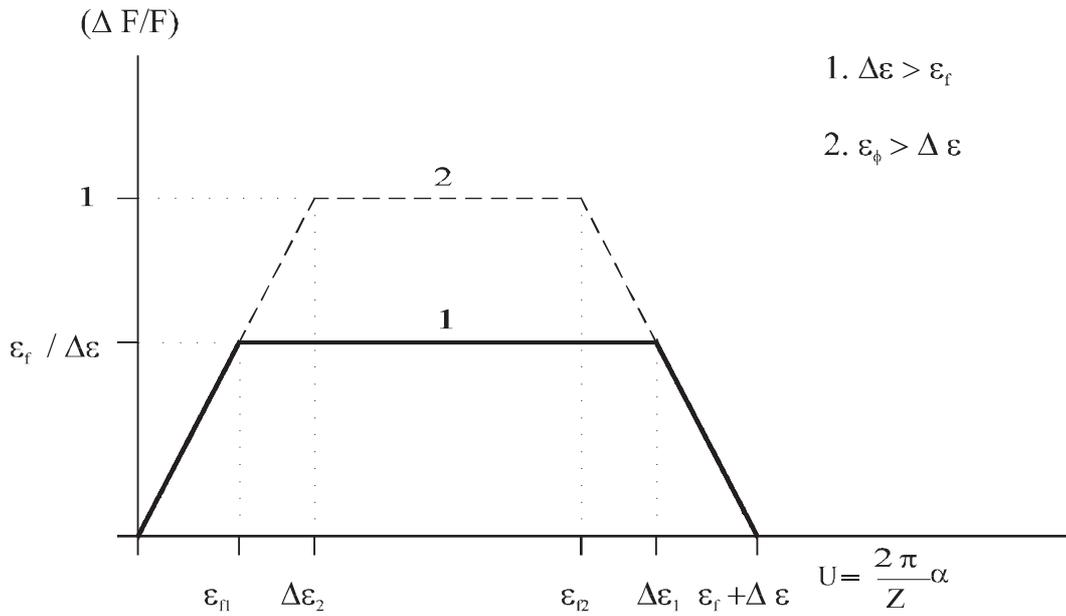
restrictiva de resistencia. Si se observa la representación gráfica de la longitud de contacto con el ángulo de giro en la Figura 4, en un engranaje recto, los puntos donde la longitud de contacto cambia bruscamente de 1 a 2 y viceversa son los radios de contacto único superior e inferior respectivamente.

$$r_{us} = r_b \sqrt{\left[ \frac{2\pi}{Z} + \sqrt{\left( \frac{r_{fn}}{r_b} \right)^2 - 1} \right]^2 + 1} \quad (22)$$

$$r_{ui} = r_b \sqrt{\left[ -\frac{2\pi}{Z} + \sqrt{\left( \frac{r_a}{r_b} \right)^2 - 1} \right]^2 + 1} \quad (23)$$

### Grado de recubrimiento

El grado de recubrimiento de un par de engranajes es el número medio de dientes en



**Figura 5** Longitud de contacto de un diente helicoidal

contacto. El grado de recubrimiento frontal  $\epsilon_f$  será:

$$\epsilon_f = \frac{1}{2\pi} \left( Z_1 \sqrt{\left(\frac{r_{a1}}{r_{b1}}\right)^2 - 1} + Z_2 \sqrt{\left(\frac{r_{a2}}{r_{b2}}\right)^2 - 1} - Z_T \operatorname{tg}\phi \right) \quad (24)$$

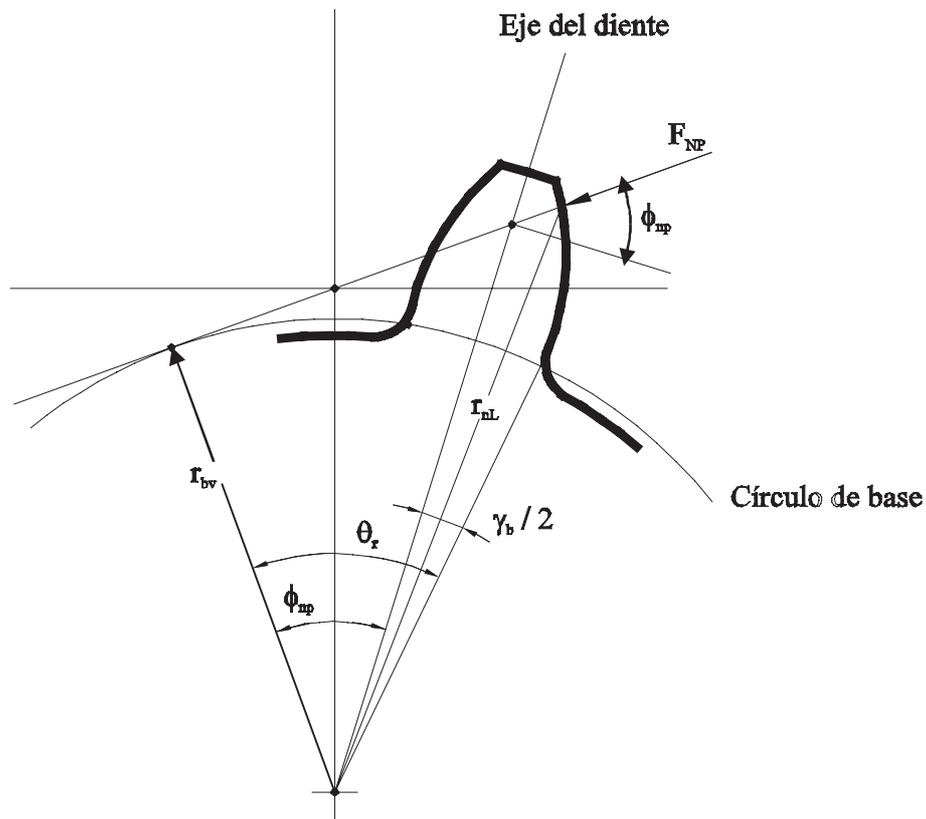
En un engranaje recto, el grado de recubrimiento coincide con el grado de recubrimiento frontal, pero no ocurre lo mismo en uno helicoidal, en el cual se tiene además el recubrimiento en el salto que es el número medio de dientes en contacto a lo largo de una línea perpendicular a la sección frontal.

$$\Delta\epsilon = \frac{b \operatorname{sen}\psi}{\pi m} \quad (25)$$

El grado de recubrimiento total será la suma de ambos

$$\epsilon = \epsilon_f + \Delta\epsilon \quad (26)$$

El grado de recubrimiento en el salto vendría dado gráficamente en la Figura 5 a través del estudio de la línea de contacto de un diente helicoidal.



**Figura 6** Aplicación de la carga sobre la sección frontal del diente

### Aplicación de la carga en la transmisión

Para calcular la deformación de un diente al aplicar la carga, se modeliza el diente simétrico, se prolonga la línea de acción de la carga hasta la línea media del diente, esta línea de acción es tangente a la circunferencia de base del perfil de evolvente. La fuerza  $F_N$  aplicada a un radio  $r$  del centro de la rueda forma con la perpendicular a la línea que une los centros de las ruedas un ángulo  $\Phi_{np}$  que se puede calcular a partir de las propiedades del perfil de evolvente como:

$$\Phi_{np} = \arctg \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1} - \frac{\gamma}{2} \quad (27)$$

de donde al formar el radio de base, la línea media y la línea de acción un triángulo rectángulo, se puede deducir que la coordenada vertical del punto de aplicación de la fuerza

será:

$$Y_P = \frac{r_b}{\cos\phi_{nP}} \quad (28)$$

### Condiciones de validez

Las condiciones de validez que cumplen todos los ejemplos mostrados a lo largo de la tesis son los siguientes:

- No apuntamiento de la herramienta

$$r_f \leq \frac{\frac{m \pi}{4} - b \operatorname{tg}\phi_h}{1 - \operatorname{sen}\phi_h} \cos\phi_h \quad (29)$$

- Radio de acuerdo de la herramienta positivo.

$$\frac{m \pi}{4 \operatorname{tg}\phi_h} \geq b \quad (30)$$

- No penetración en el tallado

$$r_o \geq r_p \cos^2\phi_f \quad (31)$$

- No apuntamiento de la rueda

$$\gamma(r=r_a) \geq \frac{0.3 m}{r_a} \quad (32)$$

- No interferencia de las ruedas

$$r_{a2}^2 + C^2 - 2C( r_{b2} \cos\phi + \operatorname{sen}\phi \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} ) \geq r_o^2 + \frac{(r_p - r_o)^2}{\operatorname{tg}^2\phi_f} \quad (33)$$

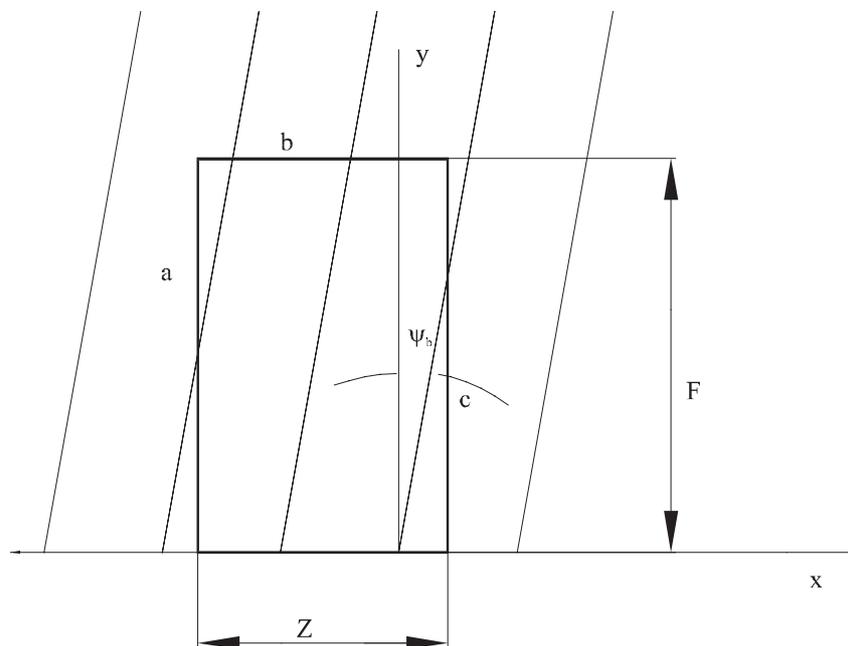
- Grado de recubrimiento mayor que la unidad

$$\epsilon_T \geq 1 \quad (34)$$

- Holgura radial  $h_r$  mayor que  $0.1 m$
- Holgura de paso  $h_p$  positiva.

### Líneas de contacto entre engranajes helicoidales: deducción de expresiones y dibujo

A la hora de hacer análisis del contacto entre dientes de engranajes helicoidales es interesante saber la longitud total de contacto para cualquier ángulo de rotación del piñón. También es importante tener una situación exacta de los puntos en contacto y en qué radio contactan para poder establecer más adelante el estado energético del conjunto a cada ángulo de giro. Por todas estas razones se va a desarrollar un método para obtener la geometría de las líneas de contacto en función de los parámetros de diseño de la transmisión, y el ángulo de giro.



**Figura 7** Plano de acción.

Los engranajes helicoidales de perfil de evolvente tienen la propiedad de que el contacto

se produce a lo largo de la línea recta tangente a las dos circunferencias de base Figura 10 llamada línea de acción. Esto se traduce en que las líneas de contacto entre los dos dientes están situados siempre en un rectángulo plano cuya altura es el ancho de los engranajes cilíndricos, y la anchura es la distancia entre el radio de inicio y el radio de finalización de engrane medido sobre la línea de acción. El ángulo que forman las líneas de contacto con la línea directriz de los cilindros es igual al ángulo de hélice en la base  $\psi_b$ . En la Figura 7 se pueden apreciar todas estas características y la nomenclatura que se usará en las expresiones.

Para la obtención de las expresiones de las líneas de contacto en función del ángulo de giro, se ha representado un rectángulo de medidas iguales a la zona de contacto que se desliza sobre un mapa en el que están dibujadas una familia de curvas que forman un ángulo  $\psi_b$  con el eje de ordenadas (Figura 7). La ecuación de la familia de rectas será:

$$y = \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_b} (x - (X - k P_b))$$

siendo  $k$  un parámetro,  $P_b$  el valor de paso en la circunferencia de base, y  $X$  será la coordenada abscisa de la recta dentro de rectángulo más cercana al origen. La distancia mínima ocurrirá cuando  $X$  sea igual a 0 pues entonces el número de dientes en contacto sea el menor y por lo tanto la longitud de contacto mínima.

Los puntos límites de las líneas de contacto vendrán dados por la intersección de esta familia de rectas con las líneas del rectángulo.

Se denomina  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  a los lados del rectángulo,  $d$  será el lado que reposa sobre el eje de abscisas. Las líneas tienen en común que parten de  $a$  o  $c$  y llegan a  $b$  o  $d$  pudiendo haber combinaciones de todas clases. De forma que una línea de contacto vendrá determinada por un punto que cortará en  $a$  ó  $d$  y el segundo punto que se localizará en  $b$  ó  $c$ .

Las coordenadas del primer punto vendrán dadas por:

Si  $X - Z < k P_b$

$$x_1 = X - Z \quad ; \quad y_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_b} (X - Z - k P_b) \quad (35)$$

Si  $X-Z > k P_b$

$$x_1 = k P_b \quad ; \quad y_1 = 0 \quad (36)$$

Las coordenadas del segundo punto vendrá dado por:

Si  $1/\text{tg}(\psi_b)(X - k P_b) < W$

$$x_2 = X \quad ; \quad y_2 = \frac{1}{\text{tg}\psi_b}(X - k P_b) \quad (37)$$

Si  $1/\text{tg}(\psi_b)(X - k P_b) > W$

$$x_2 = W \text{tg}\psi_b + k P_b \quad ; \quad y_2 = W \quad (38)$$

Para determinar si para una  $k$  la recta interseca con el rectángulo basta con que cumpla estas dos condiciones:

$$y_1 < W \quad ; \quad y_2 > 0 \quad (39)$$

Para cada  $k$  podemos determinar los dos puntos límites de la línea de contacto, y la longitud de la línea en base a la siguiente fórmula:

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (40)$$

### Longitud mínima de contacto

En engranajes rectos la longitud de contacto es un múltiplo entero del ancho del piñón. En engranajes helicoidales esto no es así, debido a que no todas las líneas de contacto mostradas en la Figura 7 tienen la misma longitud a lo largo del período de engrane.

La norma AGMA supone que el fallo en engranajes helicoidales se produce siempre cuando la longitud de contacto es mínima. La expresión de esta longitud viene dada por las

siguientes expresiones dependiendo de los casos:

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right) = \epsilon_{\alpha} - \frac{n_a n_r}{\epsilon_{\beta}} \quad ; \quad n_r + n_a \leq 1 \quad (41)$$

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right) = \epsilon_{\alpha} - \frac{(1-n_a)(1-n_r)}{\epsilon_{\beta}} \quad ; \quad n_r + n_a > 1 \quad (42)$$

en donde  $n_r$  y  $n_a$  son las partes decimales de los grados de recubrimiento frontal y en el salto respectivamente.

De aquí se obtiene  $m_N$  y la longitud mínima de contacto  $l_{\min}$ :

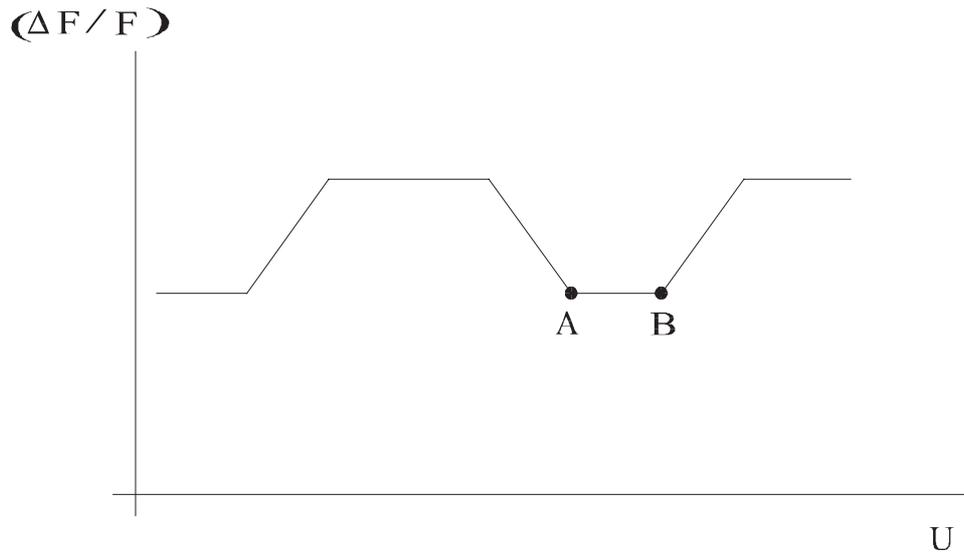
$$m_N = \frac{\cos \psi_b}{\left(\frac{\Delta F}{F}\right)} \quad (43)$$

$$l_{\min} = \frac{F}{m_N} \quad (44)$$

Estas longitudes mínimas de contacto coinciden con el tramo AB dado en la Figura 9 en la que se representa la longitud de contacto total de un engranaje cilíndrico helicoidal conforme evoluciona el ángulo de giro.

## II.2 Estudio cinemático. Velocidad elastohidrodinámica y velocidad de deslizamiento

En este apartado se va a realizar un estudio de la cinemática en el contacto entre dos dientes de engranajes rectos, en el cual se puede distinguir una velocidad angular de rodadura y una velocidad de deslizamiento de una superficie sobre la otra. Estos valores son importantes en la estimación de las condiciones de lubricación, y la velocidad de deslizamiento en particular para la determinación del riesgo de fallo por desgaste.



**Figura 9** Variación del ancho de contacto con el ángulo de giro

En la Figura 10 se muestran las circunferencias de base con la línea de acción en la que siempre está el punto de contacto entre los dos dientes. Esta línea de acción es tangente a las dos circunferencias de base en los puntos  $I_1$  y  $I_2$ . La nomenclatura usada para el estudio de la cinemática en el punto de contacto  $O$  entre dos dientes de engranajes rectos, viene mostrada en la Figura 10. El punto  $P$  es el punto de rodadura o también llamado punto primitivo de funcionamiento definido por la intersección de la línea de acción y la línea de centros. Se van a suponer las velocidades angulares de las ruedas  $\omega_1$  y  $\omega_2$  constantes.

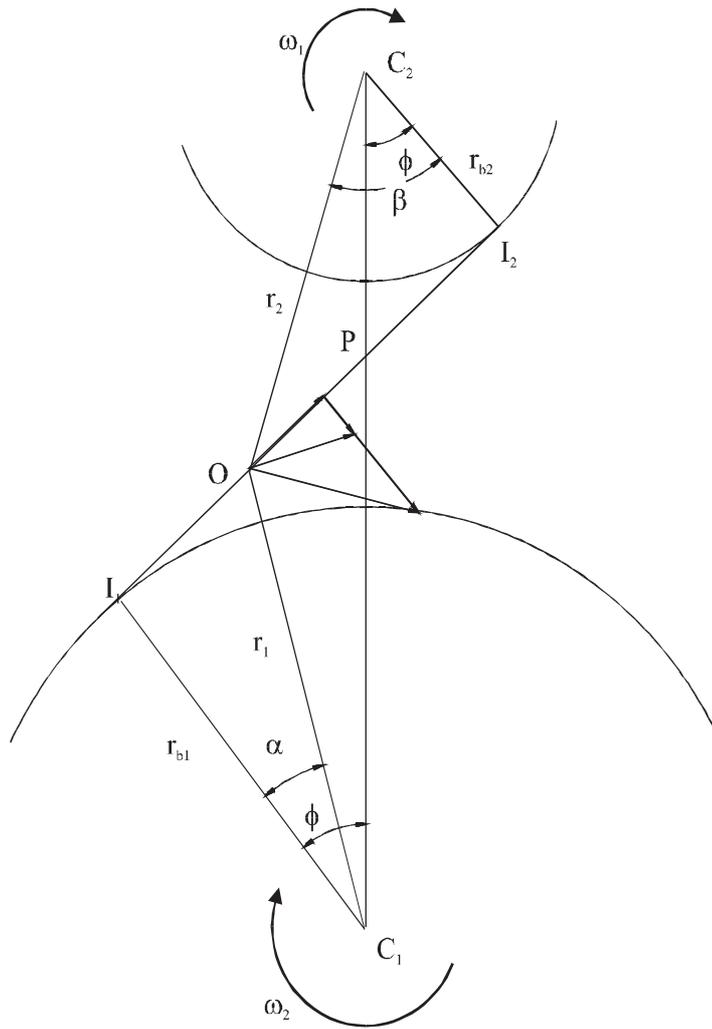
En la Figura 11 se representa una ampliación del diagrama de velocidades en el punto  $O$  donde se produce el contacto entre dos dientes. Los dos puntos en contacto en  $O$  son el punto  $1$  perteneciente a la rueda y del punto  $2$  perteneciente al piñón, los cuales tienen una velocidad distinta al pertenecer a dos cuerpos distintos, aunque están ligadas por las condiciones de impenetrabilidad y de continuidad en el contacto. De ahí que los dos puntos tengan la misma velocidad en la dirección de la línea de acción, pero distinta en su normal debido a que pertenecen a dos sólidos rígidos distintos, por lo que los dos puntos estarán en contacto sólo durante un instante.

Los valores absolutos de estas velocidades en los puntos  $1$  y  $2$  vienen dados por las velocidades angulares de las ruedas y las distancia de los puntos a sus respectivos centros:

$$V_1 = \omega_1 r_1 \tag{45}$$

$$V_2 = \omega_2 r_2$$

Al tener los dos puntos la misma velocidad en la dirección de la línea de acción, razón por



**Figura 10** Línea y punto de contacto de engrane.

la cual los dos perfiles de evolvente continúan en contacto, ésta se puede obtener por relaciones angulares deducidas de la Figura 11.

$$V_0 = |V_1| \cos \alpha = |V_2| \cos \beta \quad (46)$$

Y por las condiciones cinemáticas de engrane y características geométricas del perfil de evolvente se sabe que para que la relación de transmisión sea constante las velocidades angulares de la rueda y el piñón están relacionadas por la ecuación (47) que depende únicamente de la geometría. La ecuación (48) se obtiene a partir de las expresiones de (45).

$$\omega_2 r_{b2} = \omega_1 r_{b1} \quad (47)$$

Con el fin de facilitar los desarrollos posteriores se facilitan las siguientes expresiones que

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega_2 r_2}{\omega_1 r_1} \quad (48)$$

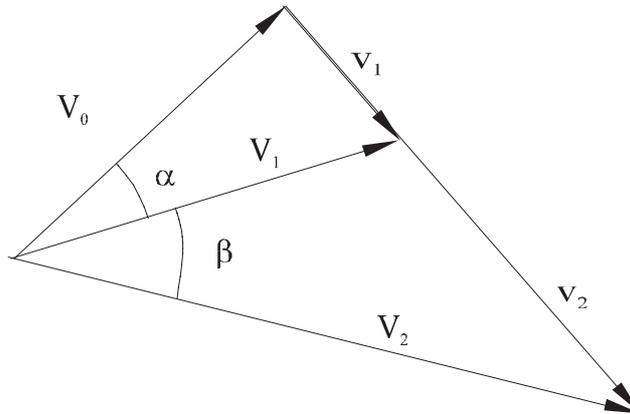
se deducen de la Figura 10 y de la Figura 11.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{r_{b1}}{r_1} ; & \cos \beta &= \frac{r_{b2}}{r_2} \\ \cos \alpha &= \frac{OI_1}{r_1} ; & \cos \beta &= \frac{OI_2}{r_2} \end{aligned} \quad (49)$$

Las velocidades de deslizamiento de los puntos 1 y 2 que serán iguales y con valor  $V_0$  vendrán dadas por:

$$v_1 = V_1 \sin \alpha = \omega_1 r_1 \sin \alpha = \omega_1 r_1 \frac{OI_1}{r_1} = \omega_1 OI_1 \quad (50)$$

$$v_2 = -\omega_2 OI_2$$



**Figura 11** Diagrama de velocidades

Este resultado es muy útil para realizar los estudios de lubricación elastohidrodinámica pues en las correlaciones para hallar el espesor de película vienen dadas en función de la variable:

$$U = v_1 + v_2 \quad (51)$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son las velocidades de los puntos 1 y 2 en la dirección perpendicular a la línea de acción.

La velocidad angular de rodadura vendrá dada por:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad (52)$$

dadas las expresiones de la Ecuación (50) instantáneamente se podría asemejar el conjunto a dos cilindros rodando en  $O$  y con centros respectivos en  $I_1$  y  $I_2$ .

La velocidad de deslizamiento en el punto  $O$  entre las dos superficies vendrá dada por la diferencia de velocidades angulares del piñón y la rueda.

$$\begin{aligned} \Delta v = v_2 - v_1 &= V_2 \text{sen} \beta - V_1 \text{sen} \alpha = -\omega_2 OI_2 + \omega_1 OI_1 \\ &= -\omega_2 (OP - PI_2) + \omega_1 (OP - PI_1) = OP(\omega_1 - \omega_2) \end{aligned} \quad (53)$$

y que,

$$\begin{aligned} \omega_1 PI_1 - \omega_2 PI_2 &= \omega_1 \frac{r_{bl}}{\text{sen} \phi} - \omega_2 \frac{r_{b2}}{\text{sen} \phi} \\ &= \frac{1}{\text{sen} \phi} (\omega_1 r_{bl} - \omega_2 r_{b2}) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

En conclusión se obtiene la expresión:

$$\Delta v = OP(\omega_1 - \omega_2) \quad (55)$$

por lo que queda demostrado que la velocidad de deslizamiento entre las dos superficies es igual a la diferencia de velocidades angulares por la distancia del punto de contacto  $O$  al punto de rodadura  $P$ .

### Expresión para la velocidad elastohidrodinámica.

La velocidad en la dirección perpendicular a la línea de acción de uno de los puntos de contacto será:

$$v_1 = \omega_1 OI_1 \sqrt{r^2 - r_{bl}^2} \quad (56)$$

con lo que la velocidad utilizada en las correlaciones elastohidrodinámicas tendrá la forma:

$$U = \omega_1 \sqrt{r_1^2 - r_{b1}^2} + \frac{\omega_1}{r_t} \sqrt{r_2^2 - r_{b2}^2} \quad (57)$$

### Expresión para la velocidad de deslizamiento

La velocidad de deslizamiento se puede obtener a partir de las expresiones arriba indicadas, pero restando en lugar de sumando las componentes de las velocidades en dirección perpendicular a la línea de acción.

$$\Delta v = \left| \omega_1 \sqrt{r_1^2 - r_{b1}^2} - \frac{\omega_1}{r_t} \sqrt{r_2^2 - r_{b2}^2} \right| \quad (58)$$

Otra formulación podría partir de las relaciones angulares. Se puede obtener una expresión de la distancia  $OP$  a partir de las variables de diseño. Para ello se considera el triángulo formado por  $C_2OP$ , en el cual se aplica el teorema del seno

$$\frac{r}{\text{sen} \left( \frac{\pi}{2} + \phi \right)} = \frac{\frac{r_{b2}}{\cos \phi}}{\text{sen} \beta} \quad (59)$$

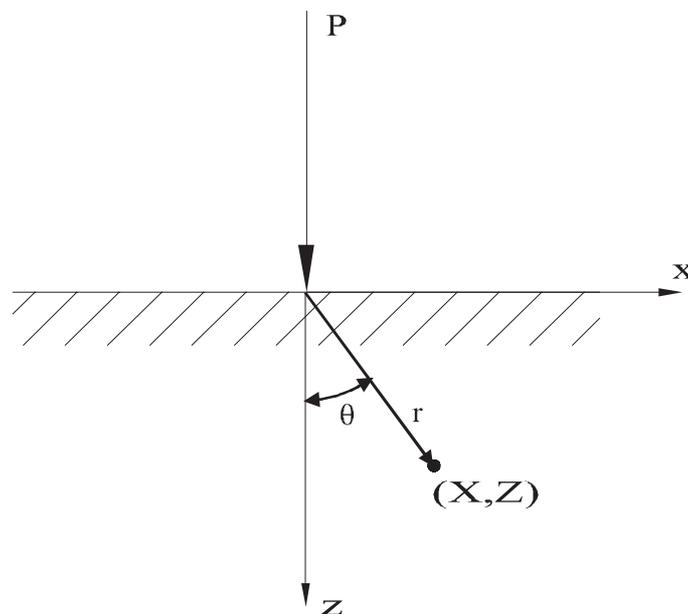
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - (\beta + \phi) \quad (60)$$

de donde aplicando ahora el teorema del coseno se obtiene la distancia  $OP$  y por lo tanto la velocidad de deslizamiento entre puntos en contacto

$$OP^2 = \left( \frac{r_{b2}}{\cos \phi} \right)^2 + r_2^2 + 2r_2 \frac{r_{b2}}{\cos \phi} \cos \alpha \quad (61)$$

## II.3 Mecánica del contacto. Contacto hertziano y contacto elastohidrodinámico

La mecánica del contacto es una ciencia que tiene mucha influencia en la durabilidad de los componentes mecánicos y en especial en los engranajes en donde grandes esfuerzos se transmiten a través de superficies de contacto muy pequeñas. Para el estudio de la mecánica de contacto se van a estudiar la teoría del contacto en general, derivando de ella tanto la teoría de Hertz, el contacto elastohidrodinámico de Greenwood, así como los métodos numéricos utilizados para la determinación del mapa tensional en la subsuperficie. Todos los desarrollos se han realizado en el caso plano bidimensional.



**Figura 12** Carga puntual sobre una superficie semiindefinida.

### Fuerza concentrada sobre una superficie semiindefinida

El campo de tensiones creado por una carga puntual P según el dibujo de la Figura 12 es:

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \quad (62)$$
$$\sigma_\theta = 0$$

El campo de deformaciones en función de las tensiones será:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\theta \right) = -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{2P \cos\theta}{\pi r} \quad (63)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_\theta - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r \right) = -\nu \frac{1+\nu}{E} \frac{2P \cos\theta}{\pi r} \quad (64)$$

$$\gamma_{r\theta} = 0 \quad (65)$$

Sabiendo que las deformaciones en coordenadas polares tienen las siguientes expresiones:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (66)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}$$

de aquí se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$u_r = -\frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{2P}{\pi} \cos\theta \log r + f(\theta) \quad (67)$$

que al integrar queda un término independiente función únicamente de  $\theta$ :

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{2P}{EI} \left( (1-\nu^2) \cos\theta \log r + f(\theta) \frac{EI}{2P} + \nu(1+\nu) \cos\theta \right) \quad (68)$$

Aplicando el resultado anterior a la ecuación de  $\epsilon_\theta$  queda:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{2P}{EI} \cos\theta (\nu(1+\nu) + (1-\nu^2) \log r) - f(\theta) \quad (69)$$

cuya integración da lugar a un término independiente función únicamente de  $r$ :

$$u_r = \frac{2P}{EI} \operatorname{sen}\theta (v(1+v) + (1-v^2)\log r) - \int f(\theta) d\theta + F(r) \quad (70)$$

La ecuación de la deformada cortante da lugar a:

$$0 = \frac{1}{r}(1-v^2) \frac{2P}{EI} \operatorname{sen}\theta \log r + \frac{f'(\theta)}{r} + \frac{2P}{EI}(1-v^2) \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} + F'(r) - \frac{2P}{EI} \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} (v(1+v) + (1-v^2)\log r) + \frac{1}{r} \int f(\theta) d\theta - \frac{F(r)}{r} \quad (71)$$

cuya función se puede separar en dos grupos que son función únicamente de  $r$  y de  $\theta$  respectivamente, cada uno de estos grupos de ecuaciones deben ser iguales a una constante, por lo que se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de una sola variable.

$$F(r) - rF'(r) = k \quad (72)$$

$$\frac{2P}{EI} (1+v) \cos\theta + f''(\theta) + f(\theta) = 0$$

La solución de estas ecuaciones pasa por resolver la ecuación diferencial homogénea y sumarle una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Después de hallar las funciones  $f(\theta)$  y  $F(r)$  las constantes de integración resultantes de la resolución de las ecuaciones diferenciales se anulan todas menos una debido a la simetría de  $u_r$  y a la antisimetría de  $u_\theta$ . La solución final a los desplazamientos en el punto es la que se muestra a continuación:

$$u_r = -\frac{P}{\pi E} ((1-v^2)2\cos\theta \log r + (1+v)(1-2v)\theta \operatorname{sen}\theta) + A \cos\theta \quad (73)$$

$$u_\theta = -\frac{P}{\pi E} (2\operatorname{sen}\theta (v(1+v) + (1-v^2)\log r) - (1+v)(1-2v)(\theta \cos\theta - \operatorname{sen}\theta)) - A \operatorname{sen}\theta$$

Los datos sobre desplazamientos que interesan son los de la superficie libre, ya que son los desplazamientos de los puntos sobre los que se van a aplicar las presiones, y se obtienen

sin más que sustituir  $\theta$  por  $\pm\pi/2$ .

$$\begin{aligned}\bar{u}_r(\theta=\pm\frac{\pi}{2}) &= -\frac{P}{2E}(1+\nu)(1-2\nu) \\ \bar{u}_\theta(\theta=\pm\frac{\pi}{2}) &= \pm\frac{2P}{\pi E}(1-\nu^2)\log r + C\end{aligned}\tag{74}$$

Tanto la función  $u_r$  como  $u_\theta$  son simétricas respecto al eje vertical de contacto, dada la simetría física del contacto, por lo que  $u_\theta$  es una función antisimétrica respecto a  $\theta$  teniendo el desplazamiento del punto de la superficie sentido hacia dentro del material (penetrando), por lo que el signo dependerá del lado en el que esté el punto de la superficie libre respecto al punto de aplicación de la fuerza.

Se puede observar que existe una constante de integración la cual depende de la condición de contorno que se le va a exigir a los desplazamientos. También es obvia la singularidad que existe en el origen: existe una asíntota en  $u_\theta$  y una discontinuidad de salto en  $u_r$ .

El caso de la carga puntual en sentido paralelo a la superficie tiene un desarrollo similar, pero debido al caso particular para el que se va a aplicar la mecánica de contacto sólo se considerarán fuerzas normales.

### Desplazamiento para una distribución de carga dada

Traduciendo la solución del apartado anterior a cartesianas es obvio que  $u_r$  es  $u_x$  y que  $u_\theta$  es  $u_y$  en la superficie libre de contacto. Para calcular el desplazamiento en un punto de la superficie debido a una distribución de carga  $p(x)$  que se aplica entre las abscisas  $-a$  y  $+a$  se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$\bar{u}_z(x) = -\frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_{-a}^{+a} p(s) \ln |x-s| \, ds\tag{75}$$

aunque suele resultar más útil la expresión de su derivada parcial:

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} = -2 \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_{-a}^{+a} \frac{p(s)}{x-s} ds \quad (76)$$

esta derivada tiene el significado físico de que es igual a la pendiente de la superficie deformada en ese punto.

A partir de aquí se va a plantear la resolución de la ecuación (76) teniendo como dato la derivada del desplazamiento, y por lo tanto, la incógnita que se va a intentar averiguar es la distribución de presiones. Los dos problemas de contacto que se van a acometer en este apartado son el del contacto hertziano entre dos superficies curvas y el del contacto elastohidrodinámico.

El problema matemático a resolver consiste en calcular la función  $F(s)$  conocida una recta  $g(x)$  tal que:

$$\int_{-a}^{+a} \frac{F(s)}{x-s} ds = g(x) \quad (77)$$

su solución general es conocida [55] y tiene la forma:

$$F(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - s^2} g(s)}{x-s} ds + \frac{C}{\pi^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (78)$$

para una función de  $g(s)$  que sea una recta:

$$g(s) = A s + B \quad (79)$$

se conoce la solución analítica de la integral con lo que al final se obtiene:

$$F(x) = \frac{\frac{Ax^2}{a} + Bx + \frac{Aa}{2}}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{C}{\pi^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (80)$$

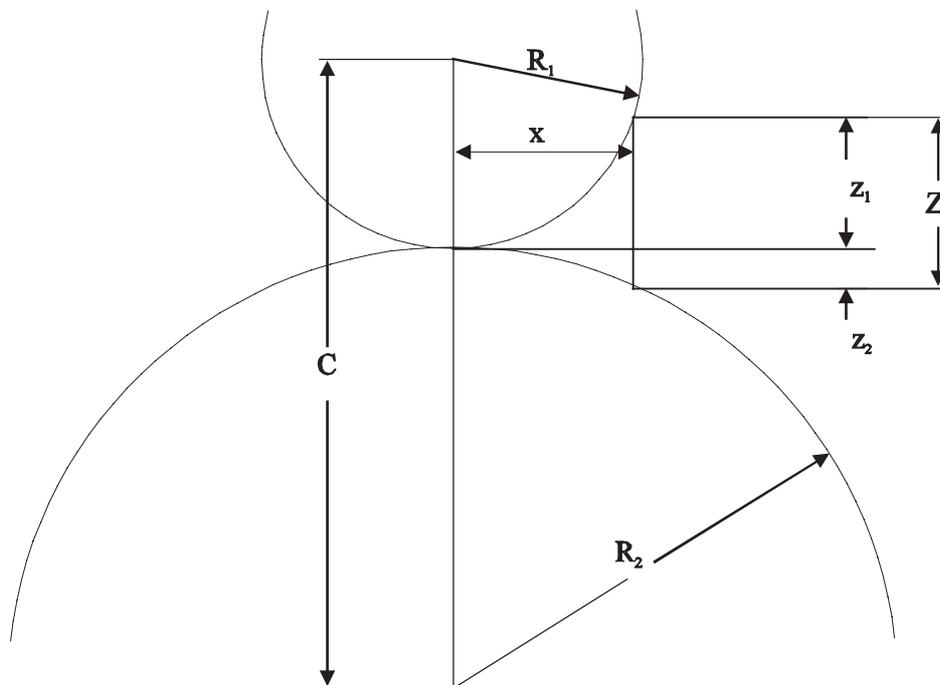
## Geometría del contacto entre dos cuerpos. Condición de impenetrabilidad.

Para la obtención del desplazamiento de las superficies libres de los cuerpos en contacto, se va a replantear el modelo de Hertz de obtención de las tensiones de contacto, estableciendo la validez de las simplificaciones realizadas en el modelo, y su comparación con modelos más exactos.

El modelo escogido por Hertz para el contacto entre dos cilindros se basa en una simplificación de una geometría con el fin de ser tratada matemáticamente con mayor sencillez. En el siguiente apartado se establecerá el rango de validez de estas simplificaciones.

### **Modelo geométrico de Hertz**

En la Figura 13 y en la Figura 14 se observan las magnitudes utilizadas en las ecuaciones. Para una distancia total  $C$  entre centros, se va a aplicar una fuerza entre los dos cilindros de forma que los puntos situados a una distancia  $x$  de la recta que une los dos centros pasan a estar en contacto después de la aplicación de la fuerza entre los dos centros.



**Figura 13** Magnitudes geométricas del contacto entre dos cilindros sin presión

El acercamiento total  $\alpha_{\infty}$  es igual a la suma de deformaciones  $W_1$  y  $W_2$  de los dos puntos

que van a estar en contacto al inicio antes de aplicar ninguna fuerza, como se puede observar en la Figura 14. En los puntos de alrededor será igual a la deformación más la distancia que han tenido que recorrer antes de entrar en contacto, es decir,  $Z$ .

$$Z = z_1 + z_2 \quad (81)$$

$$\alpha_\infty = z_1 + z_2 + W_1 + W_2 \quad (82)$$

$z_1$  se puede poner en función del radio del cilindro 1 y de la coordenada  $x$ , al igual que  $z_2$ , con solo aplicar el teorema de Pitágoras.

$$z_1 = R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2} \quad (83)$$

$$z_2 = R_2 - \sqrt{R_2^2 - x^2}$$

Estas expresiones son exactas aunque difíciles de tratar matemáticamente, por lo que se desarrollan en serie de Taylor en torno a  $x=0$ .

$$z_1(x) = z_1(0) + z_1'(0)x + \frac{z_1''(0)}{2}x^2 + \dots \quad (84)$$

Esta expresión se puede simplificar sabiendo que  $z(x)$  es una función nula y de pendiente también nula al ser horizontal en el origen, a la vez que despreciando todo el resto de sumandos por encima del tercer grado, se obtiene la siguiente parábola aproximativa de la función real:

$$z_1(x) \approx \frac{x^2}{2R_1} \quad (85)$$

Con lo que recomponiendo la expresión del acercamiento total entre cilindros se obtiene la expresión.



Este contacto entre dos cilindros se podría asemejar, a efectos de cálculo de tensiones, al contacto entre una superficie plana ( $R=\infty$ ) y un cuerpo cuya superficie tiene la forma de una parábola de coordenada  $Z$  dada por la expresión:

$$Z = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x^2 \quad (87)$$

### **Concepto de cilindro equivalente.**

Como se ha visto en la condición de impenetrabilidad, la geometría del contacto entre dos superficies curvas, se puede asemejar a la geometría del contacto entre una superficie plana de radio de curvatura  $R_1=\infty$  y además rígida, y un cilindro cuyo radio de curvatura es la suma de los radios de los cilindros en paralelo, y cuyo módulo de Young es la media también en paralelo de los módulos elásticos planos.

Esta equivalencia entre problemas se va a utilizar tanto en el estudio del contacto hertziano, como en el contacto elastohidrodinámico, de forma que las magnitudes de radio  $R$  y de rigidez  $E$  están referidas siempre al cilindro equivalente.

### Contacto hertziano

En el contacto hertziano, como se ha visto en el apartado anterior, se conoce la suma de los desplazamientos  $u_z$  de las superficies en contacto. Esta deformada es asemejada a suponer que la superficie de contacto es una superficie recta. Se aproxima a una parábola la separación entre las superficies con lo que se obtiene que

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - \frac{1}{2R} x^2 \quad (88)$$

donde  $\delta$  es el acercamiento total de los cuerpos, y el término parabólico es una aproximación de la separación inicial de las superficies, referido al cilindro equivalente y la superficie rígida cuando están en contacto en un solo punto en el origen de coordenadas.

Traduciendo la ecuación (88) en términos de  $g(x)$  de la expresión (79) queda que

$$A = \frac{\pi E}{2R} \quad ; \quad B = 0 \quad (89)$$

con lo que sustituyendo en (80) se tiene una función de distribución de fuerza en función de la constante  $C$

$$p(x) = \frac{C - \frac{\pi E}{2R} \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)}{\pi(a^2 - x^2)} \quad (90)$$

para que la presión no se haga infinito cuando  $x = \pm a$ , el numerador de (90) tiene que ser igual a 0 en esos puntos, con lo que se obtiene la relación.

$$C = \frac{\pi E}{4R} a^2 \quad (91)$$

Por otra parte hay que tener en cuenta que la presión es siempre positiva y que la fuerza total que actúa entre las superficies es un dato conocido y que es igual a  $P$  con lo que al integrar  $p(x)$  entre  $-a$  y  $+a$  se obtiene curiosamente que

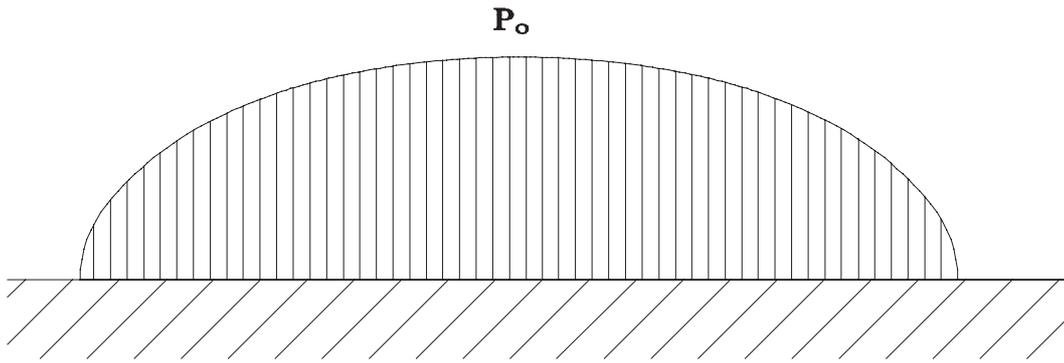
$$P = \int_{-a}^{+a} p(x) dx = \frac{\pi E}{4R} a^2 \quad (92)$$

con lo que  $C = P$ , y sustituyendo en (90) se obtiene la distribución de fuerzas en el contacto hertziano de la ecuación

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (93)$$

que es la elipse típica mostrada en la Figura 15 cuyo máximo  $P_0$  se toma como criterio de fallo en las normas de seguridad de fallo por fatiga superficial en engranajes y cojinetes. Esta presión máxima está localizada en  $x=0$  como es fácil de observar.

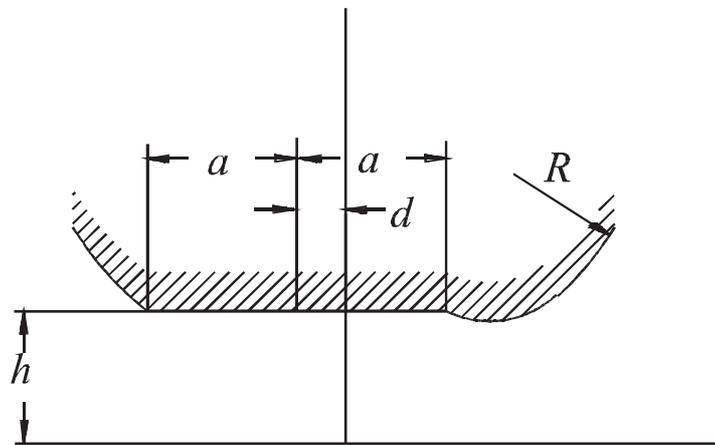
Esta solución es idéntica a la obtenida por Hertz [48] y Poritsky [76].



**Figura 15** Distribución de presiones en el contacto hertziano.

### Contacto elastohidrodinámico

La teoría de Grubin de contacto elastohidrodinámico establece que para soportar altas cargas se necesita que el espesor de película de lubricante sea constante, de este modo estableció que el cilindro equivalente se deforma de igual modo a como si el contacto fuera seco, quedando la superficie del cilindro en el contacto paralela a la superficie rígida. Asimismo determinó en este caso el espesor de película dentro y fuera de la zona de contacto [43] a partir de la ecuación de Reynolds.



**Figura 16** Deformación elastohidrodinámica del cilindro equivalente

Esta teoría tiene puntos comunes con la solución numérica [26], ya que da un espesor de película muy parecido, pero la distribución de presiones proporcionada por la solución numérica indica que el cilindro equivalente no se deforma según una superficie plana como en el contacto hertziano, sino que en ciertas condiciones aparece un pico a la salida, que se acentúa cuando aumenta la velocidad y la carga.

Un planteamiento desarrollado por Greenwood [41] es mantener la hipótesis de la teoría de Grubin de que para soportar altas cargas se necesitan superficies planas, pero en lugar de abarcar la superficie plana toda la superficie, sólo abarca una porción de la misma tal como se observa en la Figura 16.

Para aplicar lo desarrollado con anterioridad al contacto elastohidrodinámico, Greenwood [41] traslada el eje de referencia una distancia  $d$ , con el objetivo de poder aplicar las ecuaciones anteriormente desarrolladas en donde el origen de coordenadas se encuentra en el centro de la zona de contacto, así la nueva expresión de  $u_z$  tendrá la forma:

$$u_z = -\frac{(x-d)^2}{2R} \quad (94)$$

derivando esta expresión y aplicando la condición geométrica de contacto (88) en la expresión (77) queda:

$$\int_{-a}^{+a} \frac{p(s)}{x-s} ds = \pi E \frac{x-d}{R} \quad (95)$$

cuya solución aplicando (80) da lugar a la siguiente distribución de presiones:

$$p(x) = \frac{E}{2R} \left( \frac{C + a + d + x - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) \quad (96)$$

El valor de la constante  $C$  debe ser tal que dé lugar a presiones positivas en todo el intervalo de contacto desde  $-a$  hasta  $+a$ . El valor que cumple esta condición es  $C = d + a$  con lo que queda:

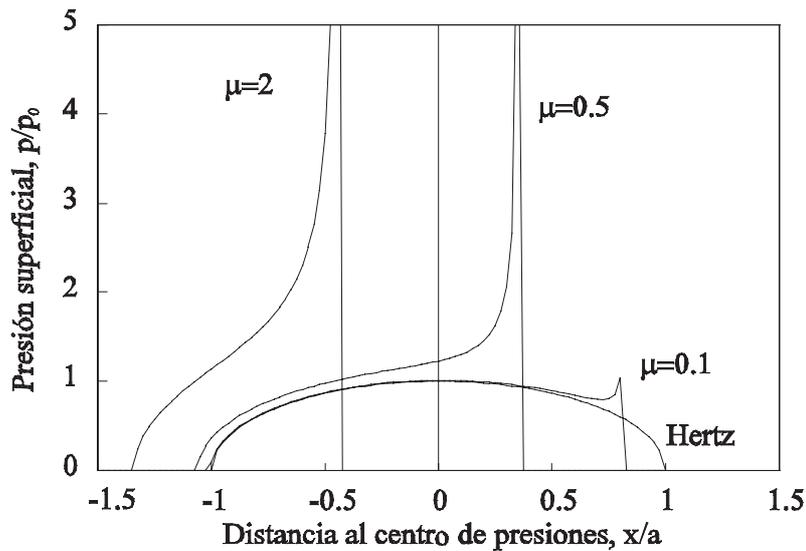
$$p(x) = \frac{E}{2R} \left( \frac{d + a + a^2 + d + x - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) \quad (97)$$

$$p(x) = \frac{E}{2R} \left( \frac{d(a+x) + (a^2 + x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) \quad (98)$$

$$p(x) = \frac{E}{2R} \left( d \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{a^2 - x^2} \right) \quad (99)$$

esta expresión última se puede poner en forma adimensional en función de  $\xi=x/a$ , y  $\mu=d/a$ , tal como viene en la expresión (100). La representación de la presión a lo largo de la zona de contacto es muy parecida a la solución numérica de Dowson y Higginson [26], pero con la facilidad que implica la disposición de una expresión analítica de la presión.

$$p(\xi) = \frac{aE}{2R} \left( \sqrt{1-\xi^2} + \mu \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \right) \quad (100)$$



**Figura 17** Distribución de presiones en diferentes regímenes de lubricación.

La integral de la presión expresada en función de  $\xi$  entre -1 y +1 da lugar a la fuerza total que actúa entre las dos superficies, que se diferencia de la fuerza total del contacto hertziano en un factor función únicamente de  $\mu$

$$P = \frac{\pi a^2 E}{4R} (1 + 2\mu) \quad (101)$$

Tanto el parámetro  $\mu$  como el ancho de contacto depende de las condiciones de lubricación, y en concreto de las condiciones a la salida del lubricante. El procedimiento de cálculo se detallará más adelante. Dependiendo del parámetro  $\mu$  se obtienen diferentes curvas en la distribución de presiones de la fuerza, según se muestra en la Figura 17.

La solución de Dowson y la de Greenwood parten de la solución del problema elástico en combinación con la ecuación de Reynolds, pero lo que es cierto matemáticamente, presenta una imposibilidad física por el principio de Boussinesq, el cual establece que el gradiente de presiones en los bordes del contacto debe ser finito. La solución de Greenwood presenta

siempre un pico de valor infinito, aunque la porción de área sea muy pequeña, mientras que la numérica de Dowson no lo presenta pero debido a las limitaciones del propio método. Experimentalmente se ha comprobado que realmente existe el pico de presiones, si bien, de valor mucho más pequeño que el obtenido por las soluciones numéricas.

## **II.4 Lubricación elastohidrodinámica en el contacto.**

### **Perfil de presiones**

Una vez obtenida la fuerza por el método señalado en el capítulo anterior, que actúa en cada punto de los dientes durante el engrane, junto con el diagrama de velocidades, se tienen los datos para afrontar el problema de la lubricación. La lubricación es un factor importante que influye de manera determinante en el comportamiento del diente ante el fallo superficial. Por una parte el espesor de película tiene que ser lo suficientemente grande para evitar el contacto directo metal-metal de las asperezas, y por otra tampoco debe ser muy grande pues iría en detrimento del rendimiento de la transmisión.

La lubricación puede seguir varios regímenes. Cuando la fuerza que soporta la película es muy baja, los dientes en contacto tienen una deformación despreciable y el régimen se denomina hidrodinámico o newtoniano. Si las cargas llegan a tomar un valor considerable, las superficies se deforman elásticamente y se dice que el régimen es viscoelástico, y cuando la carga es tan alta que deforma plásticamente las superficies en contacto se dice que se ha entrado en régimen viscoplástico, este régimen no es deseable para el comportamiento del engranaje. Una clase de régimen viscoelástico es el llamado elastohidrodinámico que se produce cuando la viscosidad del lubricante crece exponencialmente con la presión a una temperatura constante. Esta regla es una aproximación de un ajuste más perfecto pero más difícil de tratar matemáticamente como la relación de Roelands [36].

Para la obtención de la solución del problema elastohidrodinámico se tienen que resolver las ecuaciones del flujo de fluido y las de la elasticidad de los sólidos. Dowson y Higginson [26] proporcionaron una solución numérica a las ecuaciones, y aunque se hayan aportado posteriores mejoras al método como las de Paolo [68], sus correlaciones del espesor de película se continúan utilizando en la actualidad. Grubin resolvió analíticamente las ecuaciones bajo la hipótesis de que las cargas altas las soportan superficies planas, y obtuvo que el campo de presiones que se ejercía sobre las superficies coincidía con el dado en el contacto seco, es decir, con el de Hertz [55]. Greenwood [41] haciendo un cambio de referencia en la resolución de las ecuaciones extendió la hipótesis de Grubin, pero en

lugar de suponer que la superficie plana afecta a todo el semiancho de Hertz, mediante una traslación de coordenadas obtuvo una solución analítica más perfecta cuyo campo de presiones ya tenía todas las características observadas en la solución numérica, como el pico en la presión ejercida sobre la superficie. Pan y Hamrock [67] proporcionan unas correlaciones ampliando las de Dowson para el pico de presiones y su localización. Ishii et al. [52] desarrollaron un sistema experto para el control de la lubricación con estas expresiones. De la existencia de este pico no se duda, el mecanismo de formación se comprende si dadas las altas velocidades de las superficies lubricadas, la zona de entrada y la de salida son independientes, la zona de entrada determina el espesor de la película que se mantiene constante hasta que el equilibrio de fuerzas exige que se deje de ejercer presión alguna entre las superficies, es entonces cuando se produce el pico de presión y la constricción en el película tan característicos del régimen elastohidrodinámico a la salida del contacto.

Las soluciones elastohidrodinámicas para el caso plano se pueden aplicar al caso tridimensional incluso cuando la profundidad de contacto es menor que el semiancho de contacto, como señalaron Evans y Snidle [33]. También sirven para condiciones no estacionarias, pues la formación del régimen es casi inmediata, como lo muestra el trabajo de Hooke [50]. Sólo en la estimación de la fuerza de rozamiento por el perfil del diente se ha detectado un pequeño y despreciable lazo al cambiar rápidamente el sentido del deslizamiento [49].

Para estudiar la influencia de la rugosidad superficial en el régimen de lubricación, el parámetro más aceptado para estimarla es el espesor específico de película  $\Lambda$  que indica la relación entre el espesor de película y la desviación típica de la rugosidad de las superficies.

Según Evans y Johnson [31], cuando  $\Lambda$  es mayor que 6, la influencia de ésta es despreciable. Cuando  $\Lambda$  está entre 0,6 y 6, el régimen es semielastohidrodinámico, es decir, el régimen elastohidrodinámico ocurre a pequeña escala entre cada una de las asperezas, con lo que cambian los parámetros. Cuando  $\Lambda$  es menor de 0,6 el factor predominante ya no es el lubricante sino el contacto directo entre asperezas.

Los cálculos de fricción y desgaste son desarrollados por las normas ISO y AGMA bajo la hipótesis de régimen semielastohidrodinámico, con correlaciones semiempíricas. Policarpou et al. [75] han desarrollado correlaciones con un buen ajuste añadiendo el parámetro de resistividad eléctrica entre superficies en lubricación entre los factores a tener en cuenta.

En este apartado se ha desarrollado un modelo físico-matemático de las variables elastohidrodinámicas de dos cilindros lubricados. El objetivo de todo lo desarrollado es la

obtención del mapa tensional en la subsuperficie y el coeficiente de rozamiento de los engranajes cilíndricos en cuya línea de contacto se simula el modelo desarrollado.

## Propiedades de los lubricantes

La característica principal de los lubricantes en los engranajes es la viscosidad la cual varía con la temperatura y la presión. Los lubricantes más usuales en los engranajes y que permiten un amplio rango de viscosidades, son los aceites minerales, a los que generalmente se añaden aditivos para mejorar su comportamiento en servicio. En este apartado se verán los modelos escogidos entre los muchos que existen en la bibliografía, para la mejor representación del comportamiento de los lubricantes en servicio. Los valores de las constantes que aparecen en las correlaciones son fácilmente obtenibles en las bases de datos de aceites de las marcas comerciales, de forma que siempre se trabaja con un aceite determinado cuyas características se incluyen en la base de datos, y no con uno genérico usando las denominaciones normalizadas.

### **Densidad**

La densidad de los lubricantes viene usualmente indicada por el índice API que está relacionada con la densidad a 60 F (15.6 °C) por la siguiente relación:

$$API = \frac{141.5}{\rho} - 131.5 \quad (102)$$

Este índice facilita el manejo de la cifra de la densidad del aceite pues la diferencia entre densidades de los distintos aceites está en el orden de las centésimas y su influencia puede ser importante en el valor de la viscosidad dinámica.

### **Variación de la viscosidad con la temperatura**

La correlación usada para la determinación de la variación de la viscosidad con la temperatura viene descrita por la norma ASTM D341/90.

$$\log_{10} \left( \log_{10} \left( \frac{\mu}{\rho} + 0,7 \right) \right) = A - B \log_{10} T \quad (103)$$

Esta correlación es debida a Walther y es la usada en [2] para obtener las rectas de sus

gráficas. La viscosidad cinemática  $\mu/\rho$  tiene unidades de centistokes, la temperatura  $T$  es la absoluta en  $^{\circ}\text{K}$  y la constante  $B$  es la denominada "pendiente ASTM" del lubricante. Para obtener las constantes, la norma indica que se debe medir la viscosidad a  $100^{\circ}\text{F}$  y a  $210^{\circ}\text{F}$  determinándose las constantes  $B$  y  $A$  a partir de estos dos valores. Esta correlación se considera válida cuando la viscosidad dinámica se encuentra entre  $2$  y  $2 \cdot 10^7$  cSt.

Existe una denominación muy utilizada en el estudio de lubricantes que indica su comportamiento a diferentes temperaturas, es la denominación SAE la cual tiene dos cifras; una está relacionada con la viscosidad a  $0^{\circ}\text{F}$  y la otra tiene que ver con la viscosidad a  $210^{\circ}\text{F}$ .

### Variación de la viscosidad con la presión

La variación de la viscosidad con la presión es de capital importancia para la determinación del régimen de lubricación, y en su caso para la determinación de los parámetros del régimen elastohidrodinámico como se verá en un apartado posterior. La regla más aceptada para modelizar la variación de la viscosidad con la presión es la debida a Roelands:

$$\log \eta_{t,P} + 1200 = (\log \eta_{t,0} + 1200) \left( 1 + \frac{P}{C} \right)^Z \quad (104)$$

Esta correlación está recomendada para presiones mayores de  $10$  MPa, y el coeficiente de Roelands  $Z$  aparece en las bases de datos disponibles de los lubricantes para uso a grandes presiones como es el caso de los lubricantes de engranajes.

En el régimen elastohidrodinámico de lubricación en el que la variación de la viscosidad con la presión es influyente, el valor  $Z$  de Roelands es difícil de manejar por lo que normalmente se usa el coeficiente piezoviscoso o también llamado coeficiente de viscosidad elastohidrodinámica  $\alpha$  que proviene de la relación de Barus [55]:

$$\eta_P = \eta_0 e^{\alpha P} \quad (105)$$

Una forma de obtener  $\alpha$  es despejarla de la regla de Barus para los rangos de presiones  $P$  de funcionamiento. Para el rango de funcionamiento normal del aceite en un sistema concreto, este coeficiente varía muy poco por lo que la regla de Barus se considera una

buena aproximación a la regla de Roelands.

$$\alpha = \frac{1}{P} \ln \left( \frac{\eta_{t,P}}{\eta_{t,0}} \right) \quad (106)$$

Cuando con el aceite se proporciona el valor de un  $\alpha$  genérico, éste se ha obtenido integrando a lo largo de todo el rango de presiones de 0 a  $\infty$ .

$$\alpha = \int_0^{\infty} \left( \frac{\eta_{t,0}}{\eta_{t,P}} \right) dP \quad (107)$$

Cameron [19] proporciona una aproximación al estimar que el valor de  $\alpha$  está relacionado con la viscosidad dinámica, es la denominada expresión de Wooster:

$$\alpha = (0.6 + 0.965 \log_{10} cP) \times 10^{-8} P \alpha^{-1} \quad (108)$$

donde cP es la viscosidad atmosférica del aceite en centiPoises.

### **Aditivos de los lubricantes**

Los aceites tienen aditivos para conseguir mejorar su comportamiento en servicio. Es bueno conocer los aditivos que llevan los aceites con el fin conocer las cualidades y los riesgos que se asumen cuando llevan un tipo determinado de aditivo. Así se ha visto su influencia en la aceleración del crecimiento de la grieta cuando son del tipo sulfuroso [88], también la falta de aditivos puede producir un tipo de fallo en la transmisión por engranajes no prevista en un principio como puede ser el encaramiento del aceite por bajar la temperatura del aceite hasta un valor típico (pour point), o la oxidación de las superficies, la mayor sensibilidad al desgaste severo por aumento de la temperatura, etc.

En el modelo de lubricación desarrollado en la tesis se supone que los lubricantes llevan los tipos de aditivos necesarios para evitar todo tipo de fallo indeseado.

### **Presupuestos**

Respecto al régimen de lubricación estudiado se presupone que la velocidad de los engranajes es lo suficientemente alta y la rugosidad de su superficie lo bastante pequeña para que siempre se puede suponer régimen de lubricación elastohidrodinámica, de forma que se pueda despreciar la influencia de la rugosidad superficial en todas las expresiones.

En el caso de que se tuviera que tener en cuenta la rugosidad superficial porque el espesor de película calculado así lo aconseje, se tendría que hacer uso de la teoría microelastohidrodinámica, pues el fallo no se produciría en la subsuperficie del engranaje sino en la aspereza, en ese caso el tipo de fallo que se producirá será el desgaste por adhesión o por delaminación.

La temperatura de trabajo será estacionaria y se tienen las características viscosas del aceite. Esta suposición se debe a que la teoría elastohidrodinámica se ha desarrollado suponiendo que el régimen es isotérmico. Esto no quiere decir que no aumente la temperatura por la fricción y sino que los contactos son intermitentes, el incremento de temperatura en cada contacto es muy pequeño, de forma que se alcanza una temperatura tal que el calor producido en un contacto se disipa antes de volver a contactar de nuevo. Además hay que tener en cuenta que el contacto entre dientes de engranajes no es de rodadura pura salvo en un punto por lo que al existir deslizamiento se produce el efecto cortante que se traduce en un mayor calentamiento de la película.

### Determinación del perfil de presiones sobre la superficie de dos cilindros lubricados y del espesor de la película

La determinación de la distribución de presiones se basa en la solución de la ecuación de Reynolds y la ecuación de continuidad. Existen soluciones numéricas (Dowson y Higginson) y también se han hallado soluciones analíticas, a partir de la simplificación de las ecuaciones de partida. Estas soluciones analíticas concuerdan muy bien con las soluciones numéricas.

#### **Solución Dowson-Higginson**

La solución numérica más aceptada es la obtenida por Dowson y Higginson [26], los cuales determinaron numéricamente la solución al sistema de ecuaciones formado por la ecuación de Reynolds, y la distancia entre los perfiles en función de las variables elásticas de los cilindros que se han supuesto isótropos y perfectamente elásticos:

$$h(x) = h_0 + \left( \frac{x^2}{2R} \right) - \frac{2}{\pi E^*} \int_{-\infty}^{+\infty} p(s) \ln \left| \frac{x-s}{s} \right| ds \quad (109)$$

$$\frac{dp}{dx} = 12\eta_0 e^{\alpha p} U \left( \frac{h-h^*}{h^3} \right) \quad (110)$$

en donde las incógnitas son  $h(x)$  y  $p(x)$ .

La solución a este sistema se ha puesto en función de unos parámetros adimensionales que se describen a continuación:

$$J = \left[ \frac{P^2}{2\eta RU \pi E^*} \right]^{1/2} \quad (111)$$

$$H = \frac{Ph^*}{2\eta RU} \quad (112)$$

$$K = \left[ \frac{\alpha^2 P^3}{2\eta_0 R^2 U} \right]^{1/2} \quad (113)$$

donde P es la carga total que es soportada por el película.

En función de estos tres parámetros adimensionales se distinguen tres regímenes de lubricación:

a)  $J < 0.3$  y  $K < 0.7$

En este caso se puede despreciar la deformación y la variación de la viscosidad con la presión. Régimen isovisco-rígido.

b)  $(K^2/J^3)^{1/4} < 0.4$

Los cambios de la viscosidad son despreciables comparados con la elasticidad. Régimen isovisco-elástico.

c)  $(K^2/J^3)^{1/4} < 1.5$

En este caso el régimen es claramente elastohidrodinámico en el que intervienen tanto la variación de viscosidad como la deformación de los cilindros. Se pueden aplicar las correlaciones proporcionadas por Dowson y Higginson en la solución numérica. Régimen visco-elástico o elastohidrodinámico.

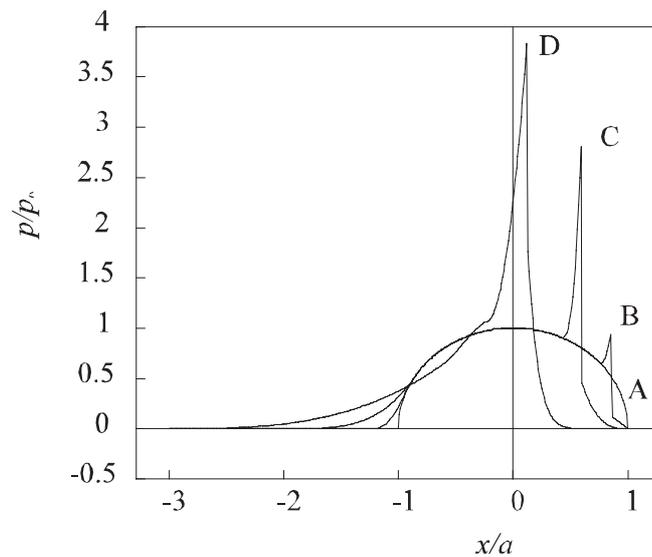
Existe también el régimen visco-rígido, pero no se considerará en lo que sigue. Siempre se trabajará en las condiciones del caso c) en lo que a este modelo se refiere, ya que son

las condiciones más habituales.

La correlación proporcionada por Dowson y Higginson para el caso c) es:

$$H = 1.4 K^{0.56} J^{0.06} \quad (114)$$

De esta forma se determina el espesor de la película con bastante aproximación. El perfil de presiones dado numéricamente tiene la forma que se da en la gráfica con un pico característico y un acortamiento en el semiancho de aplicación de presiones.



**Figura 18** Perfil de presiones obtenidas en la solución numérica.

La existencia de estas características del perfil de presiones ha sido comprobada mediante procedimientos experimentales pero no se ha podido establecer su valor con precisión.

### **Correlaciones de Hamrock [45]**

Hamrock utiliza la solución numérica de Dowson y Higginson y aplica correlaciones, al espesor mínimo de película, al pico y al valor de su altura, pero no determina el valor exacto del perfil de presiones.

### **Solución de la teoría generalizada de engranajes de Costopoulos [23]**

Basado en la teoría generalizada de engranajes de Costopoulos y suponiendo un comportamiento determinado del lubricante se ha determinado numéricamente con un

método similar al utilizado por Dowson y Higginson el espesor de película a lo largo de la línea de engrane. Este modelo no da opción para la determinación del coeficiente de rozamiento, aunque es interesante la determinación de la viscosidad de la película que puede ser más aproximada a la real en ciertos casos.

### Solución de Grubin [43]

La primera solución analítica se debe a Grubin. Se descubre que para altas presiones con  $\alpha p_0 > 5$  la ecuación de Reynolds exige que la película deba ser casi paralela con  $h \approx h^*$ , con lo que la deformación de los rodillos es la misma que si se estuviera en el contacto seco. La solución del problema pasa por solucionar el problema de Hertz. El largo del semiancho de banda coincide con el dado por la fórmula de Hertz.

Grubin proporciona una expresión para la forma de la película a la entrada del contacto (115), que coincide con la deformación de dos cilindros elásticos en contacto seco más  $h^*$  que será el espesor de la película en principio desconocido,  $a$  sería el semiancho de contacto proporcionado por Hertz.

$$h(x) = h^* + \frac{a}{2R} \left[ \frac{x}{a} \left( \left( \frac{x}{a} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} - \ln \left( \frac{x}{a} + \left( \left( \frac{x}{a} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} \right) \right] \quad (115)$$

Junto con la regla de variación exponencial de la viscosidad con la presión (regla de Barus) y sustituyendo en la ecuación de Reynolds se obtiene la correlación:

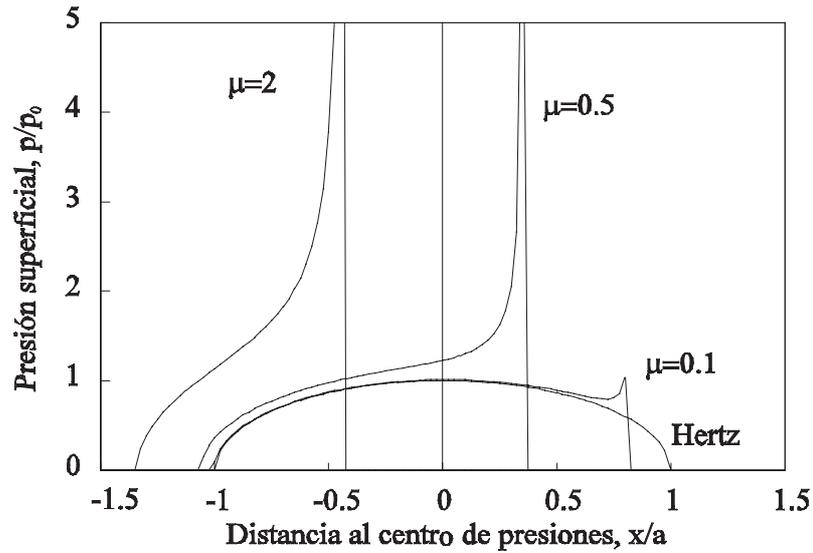
$$H = 0.89 K^{0.75} J^{-0.25} \quad (116)$$

siempre que

$$h^* > 1.417 (\alpha \eta_0 U)^{3/4} R^{1/2} a^{-1/4} \quad (117)$$

A partir de las condiciones a la entrada, Grubin ha obtenido un espesor de película muy parecido al obtenido por solución numérica, de lo que se deduce que el espesor viene dado por las condiciones a la entrada. El inconveniente de esta teoría es que no proporciona el perfil de la distribución de presiones salvo en la entrada, no dando explicación del pico en la salida ni del ancho de la zona de presión proporcionada por la solución numérica, con lo que supone un estado tensional hertziano en la subsuperficie.

### Solución de Greenwood



**Figura 19** Perfil de presiones de Greenwood.

En un artículo titulado "An extension of the Grubin Theory" Greenwood [41] haciendo una traslación del centro de presiones una distancia  $d$  en el contacto entre dos cilindros de modo que forme una zona plana (necesaria para que el película soporte cargas altas, que es la misma suposición de Grubin), junto con la ecuación de Reynolds, y la regla de Barus, obtuvo una distribución de presiones que ya tiene las características de la solución numérica a la salida del contacto, es decir, el pico y el estrechamiento del perfil de presiones.

Las ecuaciones correspondientes (118) dan unos perfiles de presiones entre  $\xi=-1$  y  $\xi=1$  muy parecidos a la soluciones numéricas asimismo, proporciona el espesor de la película fuera de esta zona.

Basándose en a las condiciones a cumplir en la entrada y en la salida, Greenwood obtiene numéricamente los valores de  $\mu$  y con ello el espesor de la película  $h^*$  y todas las características del flujo.

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{(1+2\mu)^{1/2}} \left[ (1-\xi)^{1/2} + \mu \left( \frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{1/2} \right]$$

$$\mu = \frac{d}{b} \quad ; \quad \xi = \frac{x}{b} \tag{118}$$

$$b_H^2 = b^2(1+\mu) = \frac{4PR}{\pi E^*}; \quad p_0 = \frac{b_H E^*}{2R}$$

Una deducción de estas expresiones se puede encontrar en el apartado II.3 donde se estudia

la mecánica del contacto.

La expresión para el espesor de la película viene dado por la correlación biparamétrica siguiente:

$$\tilde{h} = 2(\alpha q_f)^{0.6}(\alpha p_0)^{0.1} \quad (119)$$

en donde

$$\tilde{h} = \frac{Ph^*}{\eta_0 UR} \quad ; \quad q_f = \frac{P^{3/2}}{(\eta_0 U)^{1/2} R} \quad ; \quad p_0 = \frac{P^{1/2} E^{*1/2}}{\pi^{1/2} R^{1/2}} \quad (120)$$

## II.5 Determinación del coeficiente de fricción

La determinación del coeficiente de fricción entre dos cilindros lubricados tiene especial importancia a la hora de diseñar piezas mecánicas que trabajan sometiendo sus superficies a grandes fuerzas de contacto con movimiento relativo entre ellas. El coeficiente de rozamiento influye en el rendimiento y en el análisis resistente del contacto.

Dada su importancia, se ha trabajado mucho este tema y está siendo estudiado por muchos equipos de investigación. Los comités de las normas tecnológicas AGMA e ISO también proporcionan estimaciones del coeficiente de fricción en función de la aplicación concreta.

Los modelos para la determinación del coeficiente de fricción se pueden dividir en modelos experimentales y modelos generales. Los modelos experimentales se han obtenido a base de correlacionar los valores de fricción con las variables que influyen para un elemento concreto (ej. AGMA proporciona fórmulas para la determinación del coeficiente de fricción para engranajes en la que entran multitud de factores).

Los modelos generales, tienen una base más fundamentada en la teoría y se fijan sólo en el fenómeno de lubricación plena, es decir, cuando el espesor específico de película  $\Lambda$  es mayor de 6. Estos últimos modelos dan resultados extrapolables a una amplia gama de problemas.

Con el modelo utilizado por esta Tesis Doctoral, a partir de los datos que han servido para hallar las características hidrodinámicas, se podrá determinar la fuerza de arrastre. Según

los presupuestos con los que se está trabajando, el espesor de la película es mucho mayor que la rugosidad superficial por lo que se despreciará la intervención de ésta en el problema.

## Modelos experimentales

### **Modelo Polycarpou**

Polycarpou y Soon [75] determinan experimentalmente la fuerza de fricción y la correlacionan con el espesor de la película (a partir de una correlación triparamétrica de Dowson y Higginson), las características rugosas de las superficies, la resistencia óhmica del contacto, las velocidades reducidas y las características viscosas del lubricante. Siempre trabajando con la hipótesis de lubricación elastohidrodinámica parcial en donde el espesor de la película  $h$  es menor del doble de la desviación típica de la rugosidad superficial.

### **Modelo de la norma AGMA**

El apartado A7.3 de la norma AGMA [2] se basa en el trabajo de Kelley (1963) en el que se trata de determinar el coeficiente de fricción en el contacto entre dos dientes.

Lo primero que hace es proporcionar un coeficiente medio de fricción que depende únicamente de la rugosidad superficial de las superficies, el que sólo dependa de este factor hace suponer que trabaja en régimen seco despreciando las características del lubricante, aparte de despreciar otros factores de los que también depende el rozamiento seco, y que son mucho más influyentes.

La expresión que proporciona la norma se muestra a continuación, es una expresión debida al mismo autor que proporciona un coeficiente de rozamiento para cada instante, que tiene en cuenta otros factores como la viscosidad del aceite, las velocidades entre las superficies y la carga total que actúa en ese instante, pero apenas quedan reflejadas las características del flujo y de la geometría de contacto.

$$\mu_m = 0,0127 \frac{50}{50-S} \log_{10} \left( \frac{3,17 \cdot 10^8 X_T w_{NF}}{\eta_{oil} v_s v_e^2} \right) \quad (121)$$

La nomenclatura de los signos coincide con la proporcionada por la AGMA. Las unidades vienen en el sistema internacional.  $S$  es la desviación típica en  $\mu\text{m}$ ,  $X_T$  es la fracción de carga total,  $w_{NF}$  es la fuerza normal entre dientes en N,  $v_s$  es la velocidad de deslizamiento

en el punto de contacto en m/s,  $v_e$  es la velocidad elastohidrodinámica en m/s, y  $\eta_{oil}$  es la viscosidad dinámica en cP.

Los modelos proporcionado por las normas AGMA e ISO en sus apéndices no constituyen criterio para determinar la resistencia superficial de cálculo, por lo tanto no tiene en cuenta la lubricación a la hora de determinar la tensión nominal de fallo por fatiga superficial. En la presente tesis se considera crucial la lubricación para la determinación del fallo pues puede provocar que el contacto no sea hertziano.

### **Modelo de la ISO [25]**

El comité ISO TC-60 proporciona una fórmula para la determinación del coeficiente medio de fricción que es más hidrodinámica, tiene en cuenta todos los factores del flujo, pero se fija sólo en un punto de todo el recorrido: el punto primitivo; y su valor experimental es limitado pues no tiene en cuenta la variación de carga y viscosidad a lo largo de todo el intervalo de contacto. Este coeficiente medio de fricción viene dado por

$$\mu_m = 0,12 \left( \frac{W_t}{\eta_{oil} v_e} \right)^{0,25} \left( \frac{R_a}{\rho_{rc}} \right)^{0,25} \quad (122)$$

donde  $\rho_{rc}$  es el radio de cilindro equivalente,  $w_t$  es la fuerza tangencial transmitida, y  $R_a$  es la rugosidad media.

### **Fórmula de Buckingham [17]**

Es una expresión muy utilizada, citada en un trabajo reciente [98], el cual pone el coeficiente medio de fricción en función únicamente de la velocidad de deslizamiento. Aunque sea experimental y usada con frecuencia no tiene en cuenta toda la cantidad de factores que suelen influir en el valor de fricción media. Su expresión es

$$\mu_m = 0,05 e^{-0,125 v_s} + 0,002 \sqrt{v_s} \quad (123)$$

### Modelo elastohidrodinámico de fricción

Crook [41] mostró que la fuerza de fricción debida al lubricante se corresponde con (124). Según la teoría de elastohidrodinámica  $h$  es constante en la zona de contacto con lo que la fuerza de fricción se debe a las fuerzas cortantes producidas en el lubricante en las zonas de entrada y salida de la zona de carga. De este modo Greenwood obtuvo expresiones integrales que se resuelven numéricamente.

$$F_{roz} = \int h \, dp \quad (124)$$

Tanto la solución numérica de Greenwood como las medidas experimentales de Crook muestran que la fuerza de fricción es proporcional a  $h^*/\alpha$ . La discrepancia entre Greenwood y Crook está en la constante de proporcionalidad. En Greenwood varía desde 2.7 a 3.7 cuando  $H$  (dado en función de  $J$  y  $K$ ) varía de 100 a 0.001. Los valores experimentales salen mucho menores debido al retraso en la formación del pico de presión.

Como valor de la fuerza de fricción en este modelo se tomará una constante de proporcionalidad de 3.5 que representa el valor más común, siendo ligeramente conservador en la mayoría de los casos.

# **III      MODELO DE CÁLCULO DE LAS NORMAS AGMA E ISO**

En este capítulo se van a revisar en detalle las normas tecnológicas más usuales en el cálculo de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente a fallo superficial. En este análisis exhaustivo se verán los puntos en los cuales va enmarcado el estudio realizado en la presente tesis. Ya que se pretende disponer de un modelo de comportamiento que complemente los cálculos propuestos por las normas. En ningún caso se ha pretendido sustituirlas pues la experiencia y saber hacer de los profesionales que intervinieron en su elaboración está fuera de toda duda.

## **III.1      Modelo AGMA**

El modelo AGMA de cálculo de resistencia a picadura viene descrito por la normas [2] y [5]. En este apartado se hará un extracto, adaptando la nomenclatura a la usada a lo largo de la tesis para hacer más fácil la comparación entre los diversos modelos que se van a estudiar.

Las tensiones máximas admisibles han sido calculadas en base a las fórmulas desarrolladas por Hertz [48] para la presión de contacto entre dos superficies curvas, modificado por el reparto de carga entre dientes adyacentes.

La fórmula fundamental tiene la siguiente expresión [2] para la tensión nominal superficial

$$\sigma_c = C_P \sqrt{\frac{F_{Nt} C_a C_s C_m C_f}{C_v d F I}} \quad (125)$$

Esta fórmula se deduce de la teoría de contacto de Hertz, y representa la presión máxima de contacto, la cual debe ser menor que la admisible corregida con unos factores

$$\sigma_c \leq \sigma_{ac} \frac{C_L C_H}{C_T C_R} \quad (126)$$

en donde  $C_P$  es la constante elástica de contacto

$$C_P = \frac{1}{\sqrt{\pi \left[ \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} \right) + \left( \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right) \right]}} = \sqrt{\frac{E}{\pi}} \quad (127)$$

$$F_{Nt} = \frac{1,91 \cdot 10^7 H}{w_1 d} \quad (128)$$

donde  $H$  es la potencia transmitida en kW,  $n_1$  es la velocidad angular del piñón en rpm, y  $d$  es el diámetro de funcionamiento primitivo del piñón en mm.

Los coeficientes correctores de  $\sigma_c$  tienen en cuenta factores como las sobrecargas  $C_a$ , las cargas dinámicas  $C_v$ , el tamaño  $C_s$ , la distribución de carga por desalineamiento  $C_m$ , la condición de la superficie  $C_f$ . mientras que los coeficientes referentes a  $\sigma_{ac}$  tienen que ver con las características del material de trabajo: el factor de vida  $C_L$ , el factor de fiabilidad  $C_R$ , la relación de durezas  $C_H$ , y el factor de temperatura de trabajo  $C_T$ .

El factor  $I$  de (125) es el factor geométrico a picadura, y se obtiene de la norma [2]

$$I = \frac{\cos \phi_r C_\psi^2}{\frac{1}{R} m_N} \quad (129)$$

este factor  $I$  es el que determina qué punto del piñón es el más desfavorable, así como el valor de la tensión que debe ser menor que la admisible (126) que está directamente

relacionada con la obtenida a partir de la fórmula de Hertz [48].

Resumiendo todas las deducciones realizadas por la norma de estas fórmulas se puede simplificar su planteamiento, a partir de un modelo de comportamiento que, si bien, necesita emplear más pasos para obtener la misma solución final, es mucho más intuitivo, y no tiene el carácter de caja negra que presentan las fórmulas proporcionadas por la norma.

Para la determinación del factor  $I$  en (125) la norma distingue entre los engranajes rectos y los helicoidales, y dentro de los engranajes helicoidales se encuentran los que tienen grado de recubrimiento en el salto  $\epsilon_\beta$  menor que 1 y los que lo tienen mayor de 1. Supone el grado de recubrimiento frontal  $\epsilon_\alpha$  entre 1 y 2.

### Engranajes rectos

En el caso de engranajes rectos el punto crítico que toma la norma AGMA es el radio de contacto único superior, es decir, el menor radio del tramo de carga no compartida del piñón. La fuerza a aplicar  $F$  es la correspondiente a la potencia transmitida dividida por la velocidad angular y por el coseno que forma la línea de acción con la perpendicular a la línea que une los dos centros. Esta fuerza es la fuerza normal que actúa entre las dos superficies.

$$F = \frac{H}{\omega_1 \cos \phi_{NP}} \quad (130)$$

El punto que la norma toma como crítico, el radio de contacto único superior, es el punto donde el radio de curvatura equivalente de contacto  $R$  es el menor en todo el tramo de carga no compartida. Como se vio en el capítulo de fundamentos teóricos el radio de curvatura de este punto es igual a

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\sqrt{r_{u1}^2 - r_{b1}^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_{u2}^2 - r_{b2}^2}} \quad (131)$$

y como longitud efectiva de contacto la norma toma el ancho del diente  $F$ , pues supone que la carga se distribuye sobre esta longitud de modo uniforme, como es de suponer por la simetría del problema. En el caso de que hubiera desalineamientos la norma aplica un factor corrector  $C_m$  en (125). También evita que el número mínimo de dientes en contacto

simultáneamente sea mayor que la unidad, pues ésta es una condición impuesta en las hipótesis de trabajo de la norma.

De esta norma ya se tienen todos los términos a incluir en la fórmula de Hertz, que se aplicará sucesivamente:

$$\sigma = \sqrt{\frac{F E}{\pi l_{ef} R}} \quad (132)$$

### Engranajes helicoidales con $\epsilon_\beta > 1$

En el caso de engranajes helicoidales con  $\epsilon_\beta > 1$  en el que el número de dientes en contacto es mayor de 2 en todo momento, la norma introduce un nuevo concepto para el cálculo de engranajes que es el "radio medio del piñón"  $r_{m1}$ , que no es más que el punto medio del perfil que trabaja. Tomando la línea de acción, hay un segmento  $Z$  en el que un par de dientes está transmitiendo potencia, el punto medio de este segmento es donde engrana el radio medio del piñón. Su expresión matemática viene dada por

$$(133) \quad r_{m1} = \frac{1}{2}(r_{a1} + C - r_{a2})$$

en donde  $r_a$  es el radio de cabeza y  $C$  es la distancia entre centros de funcionamiento.

La norma señala como crítico este punto en su modelo de cálculo de la tensión superficial. Para la determinación del radio de cilindro equivalente, se tiene en cuenta que la directriz del contacto no se produce en el plano frontal sino en el plano perpendicular a las líneas de contacto, de forma que el radio de curvatura de Hertz siguiendo considerándolo plano, por el teorema de Euler es la proyección del radio de curvatura frontal sobre el plano normal.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \cos \psi_b \left( \frac{1}{\sqrt{r_{m1}^2 - r_{b1}^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_{m2}^2 - r_{b2}^2}} \right) \quad (134)$$

En esta ecuación la magnitud  $r_{m2}$  se corresponde con el radio de la rueda que engrana con el radio medio del piñón.

Para la determinación de la longitud efectiva de contacto  $l_{ef}$ , la norma ha elegido la longitud mínima de contacto cuya expresión viene demostrada en el capítulo de fundamentos teóricos, en la cual se distinguen dos casos, según la suma de las partes decimales de  $\epsilon_\alpha$  y  $\epsilon_\beta$ .

Una vez se tiene el radio de cilindro equivalente y la longitud efectiva de contacto se aplica la fórmula de Hertz (132) con lo que se obtiene el valor de la tensión nominal de contacto.

### Engranajes helicoidales con $\epsilon_\beta < 1$

Para engranajes helicoidales con  $\epsilon_\beta < 1$  el punto crítico que escoge la norma es el radio de contacto único inferior al igual que en el caso de engranajes rectos. La particularidad se encuentra tanto en la determinación del radio de cilindro equivalente, como en la determinación de la longitud mínima de contacto.

Para la determinación del radio del cilindro equivalente, al igual que en el caso anterior, el radio de curvatura de Hertz es, por el teorema de Euler, la proyección del radio de curvatura frontal sobre el plano normal. De este modo queda

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \cos \psi_b \left( \frac{1}{\sqrt{r_{ui1}^2 - r_{b1}^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_{us2}^2 - r_{b2}^2}} \right) \quad (135)$$

Para la determinación de la longitud efectiva de contacto  $l_{ef}$ , la norma no toma la longitud mínima sino que aplica un coeficiente  $C_\psi^2$  al ancho del diente. En este coeficiente entran a formar parte unas entidades matemáticas como son el radio medio del piñón y de la rueda definidos de igual modo a como se han definido para el caso de  $\epsilon_\beta > 1$ .

$$C_\psi^2 = 1 - \epsilon_\beta \left( 1 - \frac{R_{m1} R_{m2} Z}{R_1 R_2 P_N} \right) \quad (136)$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son los radios de curvatura de los perfiles en el radio de contacto único inferior, y  $R_{m1}$  y  $R_{m2}$  son los radios de curvatura en el radio medio,  $Z$  es la longitud de la línea de acción, y  $P_N$  es la longitud de paso sobre la sección normal

$$P_N = \pi \cos \phi_h m \quad (137)$$

la longitud efectiva de contacto será en este caso

$$l_{ef} = F C_{\psi}^2 \quad (138)$$

con lo que aplicando la ecuación (132) se obtiene la tensión nominal de diseño que se tomará como criterio de fallo.

## III.2 Modelo ISO

El modelo de cálculo a presión superficial recomendado por el comité ISO TC-60 aplica al igual que la norma AGMA la teoría del contacto de Hertz. El criterio de cálculo que aplica es el siguiente

$$\sigma_H = \sigma_{H0} \sqrt{K_A K_V K_{H\beta} K_{H\alpha}} \leq \sigma_{HP} \quad (139)$$

en donde  $\sigma_{H0}$  el valor de cálculo de la tensión que depende únicamente de los valores nominales de los parámetros de diseño. Los factores correctores incluidos dentro de la raíz cuadrada tienen en cuenta las cargas de choque ( $K_A$ ), las vibraciones debidas al error de transmisión ( $K_V$ ), la distribución de carga longitudinal ( $K_{H\beta}$ ), y la distribución de carga transversal ( $K_{H\alpha}$ ). El factor de distribución de carga longitudinal  $K_{H\beta}$  está influenciado únicamente por los desajustes del montaje [57].

La tensión nominal de diseño se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_{H0} = Z_H Z_E Z_{\epsilon} Z_{\beta} \sqrt{\frac{F_t}{F} \frac{u+1}{d u}} \quad (140)$$

en la que los factores  $Z$  son los que tienen en cuenta los parámetros geométricos de diseño. Al igual que se ha hecho con el factor  $I$  de la norma AGMA, en este apartado se van a desglosar los factores  $Z$  de forma que se presentará el modelo a partir de la teoría de contacto de Hertz, y la teoría generalizada de engranajes de igual modo a como se ha realizado con la norma AGMA.

El valor de resistencia del material  $\sigma_{HP}$  tiene que ir ponderado por otros tantos factores

$$\sigma_{HP} = \sigma_{Hlim} Z_N Z_L Z_R Z_V Z_W Z_X \quad (141)$$

en donde se pondera el valor resistente del material teniendo en cuenta la duración por fatiga ( $Z_N$ ), la viscosidad del aceite ( $Z_L$ ), la velocidad ( $Z_V$ ) pues influye en la formación del film, la rugosidad superficial ( $Z_R$ ), la relación de durezas entre las dos superficies en contacto ( $Z_W$ ), y el factor de tamaño ( $Z_X$ ). El factor  $Z_R$  lo expone como relacionado con la fricción, mientras que no intuye que está formado por la distorsión que se produce sobre la distribución de presiones elíptica de Hertz.

La norma ISO distingue para su cálculo entre engranajes rectos y engranajes helicoidales, que se expondrán por separado.

### Engranajes rectos

El Comité ISO considera el punto de rodadura como el punto más desfavorable para la determinación de la presión superficial. El valor del radio de cilindro equivalente en este punto se obtendría a partir del ángulo de presión de funcionamiento  $\phi$ .

$$R_1 = r_{P1} \frac{\cos\phi_h}{\cos\phi} \quad (142)$$

$$R_2 = r_{P2} \frac{\cos\phi_h}{\cos\phi} \quad (143)$$

El radio de cilindro equivalente se obtiene de forma similar a como se obtuvo en la ecuación (131), pues el radio de curvatura en el punto de rodadura de uno de los perfiles es igual a la distancia de dicho punto hasta el punto de tangencia de la línea de acción con la circunferencia de base.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\sqrt{r_{r1}^2 - r_{b1}^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_{r2}^2 - r_{b2}^2}} \quad (144)$$

La longitud efectiva de contacto es proporcional al valor del ancho de cara  $F$  dependiendo del grado de recubrimiento frontal  $\epsilon_\alpha$ . En cualquier caso es mayor que  $F$ , lo que se traduce

en unas tensiones críticas de contacto menores que las reales.

$$l_{ef} = F \frac{3}{4 - \epsilon_{\alpha}} \quad (145)$$

Para el cálculo de la tensión nominal  $\sigma_{H0}$  se vuelve a recurrir a la fórmula de Hertz (132).

### Engranajes helicoidales

En el caso del estudio de engranajes helicoidales, el punto crítico tomado por la norma ISO es el punto de rodadura al igual que en el cálculo de dientes rectos. Los radios de curvatura son calculados en este punto pero en la sección normal. El cambio de sección se hará conforme a como lo hace la norma AGMA en la ecuación (135), con lo que el radio de cilindro equivalente quedará:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \cos \psi_b \left( \frac{1}{\sqrt{r_{r1}^2 - r_{b1}^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_{r2}^2 - r_{b2}^2}} \right) \quad (146)$$

Para determinar la longitud efectiva de contacto tal como lo hace la norma ISO, se tiene en cuenta que el contacto entre dos engranajes cilíndricos helicoidales se realiza en un plano, y sus líneas de contacto se describieron en el capítulo de fundamentos teóricos. La longitud de contacto no es la mínima salvo cuando el recubrimiento en el salto es un número entero y el engranaje es de baja relación de aspecto ( $\epsilon_{\alpha} < 2$ ).

$$l_e = F \frac{\epsilon_{\alpha}}{\cos \psi_b} \quad (147)$$

Una vez se dispone del radio de curvatura y de la longitud efectiva de contacto ya se puede aplicar la fórmula de Hertz para determinar la tensión crítica de contacto a comparar con la de referencia del material.

## **III.3 Consideraciones a las normas ISO y AGMA**

Los modelos de cálculo recogidos en estas normas internacionales, incorporan hipótesis y métodos de cálculo que, si bien permiten obtener resultados razonablemente válidos en la

mayoría de los casos de un modo relativamente sencillo, ni son del todo precisos (especialmente en el caso de ruedas con dentadura desplazada o distancia entre centros no nominal), ni aprovechan las posibilidades que ofrecen tanto la potencia de las modernas computadoras personales, como la precisión de los nuevos modelos elásticos y de cálculo.

Los modelos de las normas no incorporan el desplazamiento de la herramienta en el tallado en sus fórmulas, suponiendo que el perfil generado por la cremallera es el resultado de su tallado a una distancia nominal, es decir, cuando el espesor del diente en el radio primitivo es igual al espesor del hueco en el mismo radio. Esto supone una limitación grande en el diseño, al despreciar un aspecto que en su fabricación tiene un costo nulo y sin embargo de su buen uso en el diseño se pueden extraer grandes prestaciones.

Otra objeción que se puede poner a ambas normas es que la tensión nominal de contacto tomada es la presión máxima de Hertz, ya que suponen un perfil elíptico de tensiones en el contacto de dos superficies curvas. Se sabe que la tensión crítica en el caso de que la distribución elíptica de presiones ocurre a una distancia de 0.7 el semiancho de contacto y que el valor de su tensión cortante máxima es de 0.3 veces el valor de la presión máxima de Hertz, es decir, la tensión de rotura equivalente en el ensayo de tracción es de 0.6 veces el valor de la presión máxima de Hertz. De aquí se deduce que la tensión nominal no es más que un valor orientativo.

Por otra parte, la admisión de la teoría de Hertz del contacto, es una generalización bastante discutible en muchos casos. En el contacto seco las fuerzas de fricción son lo suficientemente altas para no poder despreciar la componente tangencial a la hora de calcular las tensiones de contacto. En el caso de superficies lubricadas, el coeficiente de rozamiento baja lo suficiente como para poder despreciar la influencia de la componente tangencial en las tensiones de contacto, pero el perfil de presiones puede dejar de ser elíptico en ciertas condiciones de lubricación, como muestran las soluciones numéricas de Dowson y Higginson [26], y corroboran ciertas medidas experimentales.

Otro capítulo a discutir sería la suposición que hacen las normas al distribuir la carga por igual a lo largo de la línea de contacto, de forma que la longitud efectiva de contacto es casi siempre la mínima, aunque en algunos casos no es así, más por simplificación del cálculo que por razón de concepto. El hecho de que el diente deforme cuando se le aplica una carga, y que la flecha dependa en gran medida del punto de aplicación de la carga, hace que en un sistema hiperestático, como el formado por dos cuerpos cargados a diferentes alturas las cargas no se distribuyan uniformemente sino que adoptan un valor que depende del estado energético de los puntos de aplicación de la carga. Este es un problema complejo al ser la geometría del diente compleja, lo que exige un tratamiento numérico cuyas soluciones son difíciles de encuadrar en fórmulas sencillas, que tengan en cuenta la múltiple variedad de casos.

La localización del punto crítico a lo largo de la línea de engrane, muchas veces más parece fuente de la experiencia que del modelo de cálculo adoptado por las normas. Esta falta de coherencia, que se tratará al discutir cada una de las normas por separado, hace necesario un modelo de cálculo a presión superficial, amplio, profundo, y bien fundamentado que corrobore los resultados experimentales, y sean una buena base para el cálculo de engranajes. No se trata de anular las normas sino de complementarlas, pues no se puede prescindir del valor que le han dado los años y el prestigio. De este nuevo modelo trata la presente Tesis Doctoral.

A continuación se va a particularizar la crítica hacia cada uno de los modelos en los puntos que se han observado como más interesantes:

La norma AGMA:

- El valor de radio medio es a primera vista arbitrario, pues el punto crítico desde el punto de vista del modelo es el radio de contacto único inferior, pues es en ese punto donde el radio de cilindro equivalente es menor y por lo tanto la presión máxima de Hertz es mayor. El hecho de que la norma haya localizado en el radio medio el punto de fallo, es seguramente fruto de la experiencia. Sin embargo, la experiencia obedece a alguna ley física que se debe tratar de conocer. Esta ley puede venir tanto de la mecánica de contacto, como de la teoría elastohidrodinámica de lubricación como del cálculo de la distribución de la fuerza a lo largo de la línea de contacto.
- La longitud mínima de contacto en engranajes helicoidales cuando  $\epsilon_p < 1$  es imprecisa dando valores mayores de los reales. En el resto de casos coinciden los valores dados con los reales.

La norma ISO:

- El factor de lubricación y el de velocidad se incluyen entre los factores de resistencia del material, cuando dependen en gran parte de los parámetros de diseño. Con los desarrollos que ha sufrido la teoría elastohidrodinámica, se puede afrontar el problema tanto del cálculo del perfil de presiones sobre las superficies de contacto, como el cálculo de los coeficientes de rozamiento.
- El punto crítico en el cálculo a presión superficial de engranajes rectos no es el del punto de rodadura, sino el del contacto único superior, que es el que tiene menor radio de cilindro equivalente. Este modelo tiene en cuenta las observaciones experimentales [12] [35], en las cuales se observa que el daño se produce en la zona comprendida entre el punto de contacto único superior y el punto de rodadura.

El razonamiento es el mismo que el realizado para el caso del radio medio de la norma AGMA. El hecho de que los dos radios estén muy próximos en la mayoría de los casos indica que existe cierta coherencia entre las dos normas para el caso de engranajes helicoidales con  $\epsilon_\beta > 1$ .

- El valor de la longitud mínima de contacto para  $\epsilon_\beta > 1$  no es la real sino que es un valor mayor que proviene de la relación entre el ancho de cara real y el ancho de cara efectivo, este último valor la norma lo toma un valor aproximado, como señaló Trimtchev [90], este valor lo toma de suponer un caso particular y extrapolar a todos los casos. El caso particular de que el grado de recubrimiento de paso es un número entero, y se trata al igual que en la norma AGMA de un engranaje de baja relación de contacto, es decir,  $\epsilon_\alpha < 2$ .

### **III.4      Recapitulación**

Dadas la incoherencias encontradas de una parte, en el cálculo de las tensiones críticas y su localización a lo largo de la línea de engrane, y de otra parte, en los modelos físicos en los que se basan; los instrumentos de los que se disponen actualmente facilitan que el problema se estudie más a fondo y se haga una revisión en profundidad del modelo, modificándolo y buscando otro más coherente. Los aspectos que no tienen en cuenta las normas, y que podrían justificar estas incoherencias son:

- a) La distribución de carga no uniforme a lo largo de la línea de contacto.
- b) La teoría elastohidrodinámica de lubricación.
- c) La mecánica de contacto.
- d) La rugosidad superficial.

## **IV MODELO DE REPARTO DE CARGA ENTRE DIENTES DE ENGRANAJES**

Uno de los problemas que se plantean en el diseño de engranajes es la distribución de la carga a lo largo de la línea de contacto. Este problema sólo se está acometiendo últimamente gracias a la aparición de los ordenadores.

En el caso de engranajes rectos, en el que la línea de contacto es paralela a los ejes de las ruedas, y su longitud es un múltiplo entero del ancho de cara, se puede admitir, por simetría, que la carga que soporta un diente se distribuya uniformemente a lo largo de su anchura, pero permanece planteada la incógnita de cómo se reparte la carga entre las distintas parejas de dientes simultáneamente en contacto.

En el caso de los engranajes helicoidales se suma la dificultad de que no hay simetría en la línea de contacto entre una pareja de dientes, lo que cabe suponer es que al ser distinto el estado de energético entre los distintos puntos de la línea, la carga no es uniforme a lo largo de ella. La carga por el principio de mínima energía se distribuiría de forma que hiciera mínima la energía potencial elástica.

A pesar de ello, no es excesiva la atención que prestan a este aspecto las normas internacionales de diseño. Tanto las recomendaciones AGMA como las del comité ISO/TC-60 establecen modelos de cálculo a flexión y a presión superficial partiendo de la hipótesis de que la carga se distribuye uniformemente a lo largo de la línea de contacto, si bien la longitud de dicha línea, y por consiguiente, la carga por unidad de longitud, es diferente en ambos modelos [73].

En este capítulo se desarrolla un modelo para la determinación de las fuerzas que actúan

en cada punto de la línea de contacto.

Siendo diferente el caso del engranaje recto y el del engranaje helicoidal se han desarrollado los dos modelos por separado.

En el caso de engranaje recto debido a la simetría se estudiará el reparto de carga cuando actúan dos parejas de dientes en contacto y se desarrollará un modelo sencillo, haciendo uso de la técnica de los multiplicadores de Lagrange. El problema es bidimensional y los datos a obtener sería la fracción de carga que correspondería a cada par de dientes.

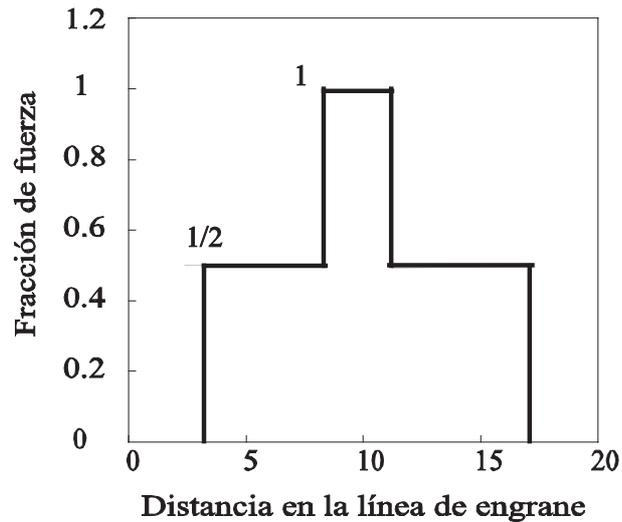
Para el estudio de engranajes helicoidales se partirá de principios más generales de modo que las soluciones afecten tanto al reparto de carga entre pares de dientes como al cálculo de la distribución de carga a lo largo de la línea de contacto en un mismo par de dientes conjugados. Para ello se necesita afrontar el problema en el espacio tridimensional. Los desplazamientos serían hallados por el MEF, y con los resultados se aplicará un método de minimización de energía.

En un sistema multicuerpo como el que se está tratando, el primer paso es tomar el modelo de comportamiento elástico del diente, que es necesario para la determinación de los trabajos de deformación. Se parte del modelo geométrico dado en el capítulo uno. Una vez obtenida la energía elástica de deformación, se tratará de hallar la distribución de fuerza que haga mínima la energía de deformación.

## **IV.1 Reparto de carga entre dos pares de dientes rectos**

Es interesante estudiar el reparto de carga entre los dos pares de dientes de carga compartida para comprender mejor los dos tipos de fallo más frecuentes, que son el de rotura a flexión y el de fallo superficial. Para el cálculo a flexión de dentaduras rectas, las condiciones más desfavorables se tienen en el llamado punto de contacto único superior - límite superior del intervalo de carga no compartida-, en el que, efectivamente, el modo en que la carga se reparta es irrelevante, ya que en el punto considerado no está repartida. Sin embargo, este razonamiento no es aplicable ni a la flexión de engranajes helicoidales, ni menos aún al cálculo a presión superficial.

Las dos normas AGMA e ISO citadas parten, para el cálculo a presión superficial, del modelo de Hertz de contacto entre sólidos [48], aunque de nuevo difieren en la localización



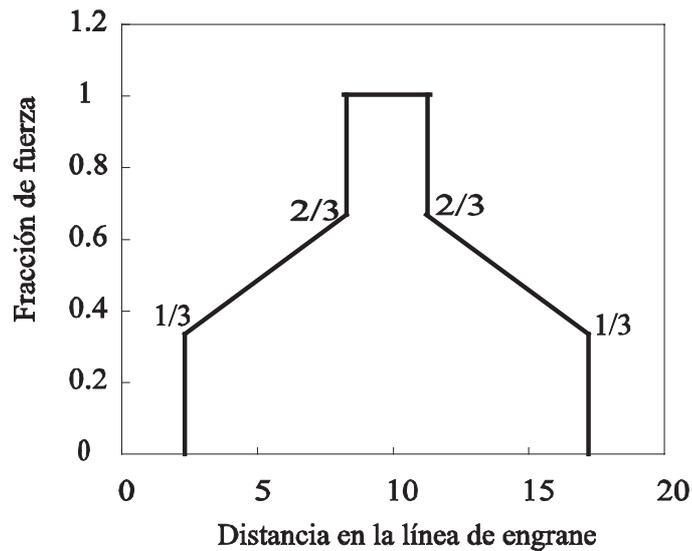
**Figura 20** Distribución de fuerza según la norma ISO

del punto crítico, de máxima presión de contacto. Mientras ISO/TC-60 [25] recomienda calcular la presión en el punto de rodadura, AGMA [2] considera el punto de contacto único inferior del piñón para engranajes rectos, y el punto medio para engranajes helicoidales con recubrimiento en el salto mayor que 1, mientras que para ruedas de baja relación de contacto axial (con recubrimiento en el salto entre 0 y 1) considera un punto intermedio entre los dos anteriores, tanto más próximo a uno u otro cuanto más se acerca el recubrimiento en el salto a 0 ó a 1.

Sin embargo, si las ecuaciones de Hertz se aplican a las condiciones de engrane bajo la hipótesis de reparto uniforme de la carga, se obtiene que el punto teórico de máxima presión superficial no se localiza, por lo general, donde predicen las normas, sino en la cabeza del piñón o la rueda, si se trata de engranajes helicoidales, o también en uno de los límites del intervalo de contacto único, para ruedas rectas, según los casos [70] [72].

Lo anterior pone de manifiesto la precariedad de la hipótesis de reparto uniforme de la carga, pero posiblemente no invalida los métodos de cálculo, a flexión y a presión superficial, que la incorporan. Sin embargo, resulta del todo inadmisibles para el establecimiento del modelo de lubricación. Así, el apéndice A de AGMA [2] presenta un factor de distribución de carga entre dientes de engranajes rectos, variable a lo largo de la línea de engrane, que utiliza para la determinación del espesor mínimo de película, la temperatura de "flash" y el coeficiente de rozamiento.

Este factor de distribución de carga, para el caso de dentaduras no modificadas, parte del valor 1/3 al inicio del engrane, aumenta linealmente con la posición del punto de contacto en la línea de engrane, hasta el valor 2/3 en el punto de contacto único, aquí salta bruscamente al valor 1, que se mantiene hasta el otro extremo del intervalo de contacto



**Figura 21** Fuerza que actúa sobre un diente a lo largo de la línea de engrane(AGMA)

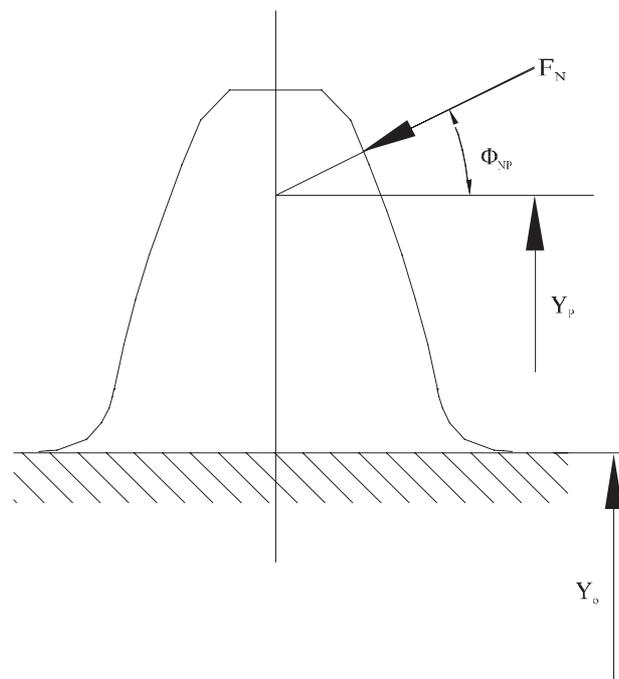
único, en donde salta hasta  $2/3$ , para descender linealmente hasta  $1/3$  en el punto de finalización del engrane, tal como se muestra en la Figura 21. Sin embargo, la norma no presenta justificación alguna acerca del origen de estos valores, ni, curiosamente, los toma en consideración en el cálculo a presión superficial de los dientes.

En este apartado se presenta un modelo de distribución de carga entre dientes, basado en la aplicación de métodos variacionales para la determinación del reparto de cargas que hace mínimo el potencial elástico de las dentaduras en contacto. El coeficiente de reparto así obtenido se ha comparado con el que se presenta en [2], y se ha utilizado en la determinación de la presión superficial.

### Planteamiento del modelo bidimensional

Supuesto el diente del engranaje como una viga en voladizo de sección rectangular de espesor constante —el ancho de cara del diente— y anchura variable —el espesor del diente en cada punto del perfil—, la rigidez en cada punto, entendida como el desplazamiento del punto en la dirección de una carga unidad que actúa sobre el mismo punto, será también variable. Del producto de la rigidez por el módulo de la fuerza, o lo que es lo mismo, del producto escalar de la fuerza por el desplazamiento, se obtendrá el doble de la energía de deformación, o potencial interno, del diente, admitida la hipótesis de aplicación progresiva de la carga.

Si se considera la pareja de dientes en contacto, se puede definir la rigidez del par como la rigidez de uno cuando la carga actúa en uno de sus puntos más la del otro cuando la carga actúa en el punto que engrana con el anterior. Puesto que en el proceso de engrane, la acción de un diente sobre su conjugado es igual y de sentido contrario a la de éste sobre el primero, el potencial interno del par de dientes, suma de los potenciales de cada diente, será igual a la mitad del producto de la carga por la rigidez del par. Naturalmente, la rigidez de un par de dientes varía con el punto de contacto, y por tanto, a lo largo de la línea de engrane.



**Figura 22** Modelo elástico del diente

Finalmente, en el intervalo de carga compartida, se tendrán dos parejas de dientes en contacto, y la carga total repartida entre ambas. Puesto que los puntos de contacto simultáneo en ambas parejas están relacionados entre sí —en concreto, están separados una distancia igual al paso de base, medida sobre la línea de engrane—, la rigidez de una y otra parejas también estarán relacionadas, y el potencial interno total será la suma del potencial interno de cada pareja, que será diferente en cada punto de la línea de engrane, al ser variables tanto las rigideces como la fracción de la carga total que actúa sobre cada pareja.

El modelo que se propone consiste sencillamente en suponer que el reparto de carga se realiza de forma tal que este potencial interno total se hace mínimo, sujeto a la restricción de que la carga total es constante (supuestas constantes la potencia que transmiten los engranajes, así como sus velocidades de giro). Para obtener este mínimo se aplicará el

método variacional de los multiplicadores de Lagrange, para lo cual se habrá de determinar previamente la rigidez de cada pareja de dientes en cada punto de engrane.

### Determinación del potencial interno

Para la determinación de las rigideces de los dientes, se partirá del modelo que se representa en la Figura 22, que se basa en las siguientes hipótesis:

- El diente se supondrá empotrado en su base, y la carga aplicada en su eje, que coincide con la línea neutra.
- La sección del empotramiento es la definida por los puntos de tangencia del perfil del diente con la circunferencia de pie, a ambos lados del diente.
- La teoría de la viga elemental es aplicable pese a las pequeñas dimensiones del diente.

A partir de estas hipótesis, los desplazamientos de la sección  $Y_p$  sobre la que actúa la fuerza  $F_N$ , debidos a la flexión,  $f_x$ , a la cortadura,  $f_s$ , y a la compresión,  $f_n$ , que produce la misma fuerza  $F_N$ , serán

$$\begin{aligned}
 f_x &= \int_{Y_0}^{Y_p} \frac{F_N \cos \phi_{NP} (Y_p - Y)}{EI} dY \\
 f_s &= 1.2 \int_{Y_0}^{Y_p} \frac{F_N \cos \phi_{NP}}{GA} dY \\
 f_n &= \int_{Y_0}^{Y_p} \frac{F_N \operatorname{sen} \phi_{NP}}{EA} dY
 \end{aligned} \tag{148}$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $G$  el módulo de elasticidad transversal,  $A$  el área de la sección e  $I$  el momento de inercia geométrico de la misma, parámetros, estos últimos, que vienen dados por las expresiones

$$\begin{aligned}
 A &= F h \\
 I &= \frac{1}{12} F h^3
 \end{aligned} \tag{149}$$

siendo  $F$  el ancho de cara de las ruedas y  $h$  el espesor del diente en la sección caracterizada por  $Y$ . El principal inconveniente para evaluar las integrales anteriores estriba en la complejidad para expresar  $h$  en función de  $Y$ , especialmente en la zona del pie del diente, donde el perfil responde a la ecuación de una trocoide. Una expresión de la relación entre  $h$  e  $Y$ , obtenida a partir de la geometría de la herramienta de tallado y de las condiciones de corte, puede encontrarse en el capítulo uno y en [38]. A partir de esta relación es posible evaluar  $f_x$ ,  $f_s$  y  $f_n$  mediante procedimientos convencionales de cálculo numérico. Naturalmente, estos valores dependerán de  $Y_p$ , que a su vez depende del punto de aplicación de la carga, y por tanto del punto de la línea de engrane en que se produce el contacto. En otras palabras, los desplazamientos, o lo que es lo mismo, las deformaciones, variarán a lo largo de la línea de engrane.

Por consiguiente, en cada punto de la línea de engrane, y teniendo en cuenta la dirección de los desplazamientos  $f_x$ ,  $f_s$  y  $f_n$ , se tendrá un desplazamiento total:

$$(150) \quad f = \left[ f_n^2 + (f_x + f_s)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

que formará con el eje horizontal un ángulo

$$\alpha = \arctg\left(\frac{f_n}{f_x + f_s}\right) \quad (151)$$

En consecuencia, el potencial interno del diente vendrá dado por

$$U_1 = \frac{1}{2} F_N f \cos(\phi_{NP} - \alpha) \quad (152)$$

Las mismas ecuaciones pueden utilizarse para determinar el potencial interno de la rueda con la que engrana el engranaje considerado, si bien se habrá de tener en cuenta que, en este caso,  $Y_p$  es el correspondiente al punto que engrana con el punto considerado de la rueda anterior,  $\phi_{NP}$  el ángulo correspondiente a la normal por el mismo punto, y, por supuesto,  $h(Y)$  la relación correspondiente a la nueva rueda. El punto del diente conjugado que engrana con el punto considerado de la primera rueda puede determinarse partiendo de la condición de que la suma de los radios de curvatura de los perfiles en puntos que contactan en algún momento del engrane, es igual a la proyección del segmento que une

los centros de las dos ruedas sobre la línea de engrane [69], y por tanto se tiene:

$$\left(r_1^2 - r_{b1}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(r_2^2 - r_{b2}^2\right)^{\frac{1}{2}} = C \operatorname{sen} \phi \quad (153)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son los radios de ambos puntos,  $r_{b1}$  y  $r_{b2}$  los radios de base,  $C$  la distancia entre centros y  $\phi$  el ángulo de presión de funcionamiento.

A partir de las consideraciones anteriores, y siguiendo el proceso descrito, se podrá determinar el potencial interno de la segunda rueda  $U_2$ , a partir del cual se puede afirmar que el potencial interno de la pareja de dientes es:

$$U = U_1 + U_2 \quad (154)$$

que, al igual que  $U_1$  y  $U_2$ , varía a lo largo de la línea de engrane.

### Desarrollo de método de cálculo de distribución de carga

En el desarrollo del programa para el cálculo de la distribución de fuerzas, se ha modelizado el diente en el caso plano.

Consta de las siguientes partes:

- Definición del perfil del diente, y condiciones de engrane.
- Comprobación de no-penetración, apuntamiento, interferencia, holgura radial, holgura de paso.
- Cálculo de desplazamientos del punto de aplicación de la carga, de cada uno de los dientes.
- Determinación de la energía de deformación en cada estado de carga.
- Obtención de la función de energía de deformación, a lo largo de la línea de engrane, obtenida por interpolación de los puntos discretos calculados.
- Cálculo del mínimo de la energía de deformación.

La geometría del diente, las condiciones de engrane, y las comprobaciones de funcionamiento, han sido obtenidas del capítulo de fundamentos teóricos. Para el cálculo del desplazamiento del punto de aplicación de la carga se ha supuesto que el diente deforma como una viga en voladizo de sección variable, de tal modo que la energía de

deformación será el producto escalar de la fuerza aplicada por el vector desplazamiento de la fibra media del diente.

El vector desplazamiento se obtiene resolviendo numéricamente las integrales de deformación por flexión, cortadura y compresión. La función de la energía de deformación ha sido obtenida por interpolación polinómica de Lagrange, de forma que para un mismo engrane se dispone de una función analítica continua a lo largo de la línea de engrane. Esta función resultará muy útil para el cálculo de la distribución de fuerzas entre varios pares de dientes rectos en contacto, y el cálculo de la distribución de fuerzas a lo largo de la línea de contacto entre dientes helicoidales.

### Función de energía

El mecanismo para obtener una función continua a partir de unos valores dados en puntos discretos, se ha basado en la función polinómica de interpolación unidimensional obtenida a partir de la resolución de ecuaciones lineales que se originan de establecer que la función deba pasar por todos los puntos obtenidos.

La función genérica de interpolación normal sería  $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \{1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^n\} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} \quad (155)$$

los coeficiente  $\alpha_i$  se calculan para hacerlos pasar por el vector  $\{\phi_i\}$  de forma que se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{Bmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \dots \\ \Phi_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} \quad (156)$$

de donde se pueden obtener los  $\alpha_i$  correspondientes a la función de energía. En la resolución de problemas se han obtenido los  $\alpha_i$  que relacionan el doble de la energía de

deformación con el radio donde se produce el contacto.

### Determinación del mínimo de la función de energía.

El cálculo del mínimo de la función de energía de deformación tiene interés a la hora de calcular la localización del máximo de la distribución de fuerzas en engranajes helicoidales, como ya se verá más adelante. De momento no se calculará el máximo de este valor sino solamente su localización.

Una vez se ha obtenido el vector  $\{\alpha\}$ , la obtención de la derivada analítica de  $\Phi(x)$  es inmediata, y se puede elaborar fácilmente un procedimiento para la obtención de un cero de esa función por el método de Newton-Raphson. Como puede tener varios ceros reales, es bueno darle un valor inicial que se encuentre en el intervalo de contacto.

En los ejemplos realizados, el mínimo en este intervalo es único y se encuentra cerca del radio de rodadura, y más cerca aún del radio medio definido por la norma AGMA para el cálculo de engranajes cilíndricos helicoidales.

En el capítulo siguiente, en el que se tratará de la distribución de carga entre dientes helicoidales se mostrarán tablas y gráficas respecto a la variación de este mínimo de la función de energía, el radio de rodadura de la norma ISO y el radio medio de la norma AGMA.

### Introducción del gradiente en un intervalo

Para la discretización de las integrales a lo largo de la trocoide se ha tenido que implementar un gradiente para determinar qué puntos del eje de abscisas van a ser usados para la discretización. Las ecuaciones de la huella del diente se expresan en forma paramétrica, en donde el radio y el espesor vienen expresados de forma paramétrica en función del ángulo  $\phi$  que es el ángulo en el que la huella de la herramienta talla la rueda.

Al dividir en intervalos iguales el ángulo  $\phi$  hace que las abscisas de la integración salgan muy concentradas en la base del diente. Para conseguir una mayor homogeneidad y por lo tanto una mayor precisión en la integración con un mínimo esfuerzo de cálculo, se tendrá que aplicar un contragradiente sobre  $\phi$  de forma que las ordenadas sean mucho más

homogéneas. Si se quisiera conseguir que los intervalos sean iguales y por lo tanto poder aplicar el método de Simpson en la integración, se tendría que aplicar el método de Newton-Raphson, lo que agrandaría el problema innecesariamente.

La solución del problema ha pasado por aplicar un contragradiante a  $\phi$  cuyo procedimiento ha sido el siguiente:

- División del intervalo de  $\phi$  en puntos equidistantes. Este intervalo recorre desde  $\pi/2$  hasta el ángulo de presión de la herramienta, y cada uno de estos valores se multiplica por un factor  $f(i)$  en función de su alejamiento del punto de entronque.

$$h(i) = \phi + \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) * f(i) \quad (157)$$

$$f(i) = \frac{1}{N^4} (i - NN)^4 \quad (158)$$

siendo  $i$  una sucesión de números enteros desde 0 hasta  $N$ .

Otra opción viene dada al determinar un gradiente lineal y obligar a que el intervalo del final sea un  $k$  veces el primer intervalo. Este método se ha comprobado que es menos eficiente que la primera solución planteada.

### Modelo de distribución de carga del potencial mínimo

En todo el intervalo de contacto único, la carga se soporta en una única pareja de dientes, cuyo potencial interno se podría calcular por el procedimiento anterior, a partir de un valor para  $F_N$

$$F_N = \frac{H}{\omega r_b} \quad (159)$$

donde  $H$  es la potencia transmitida y  $\omega$  la velocidad angular de la rueda. Por el contrario, en el intervalo de carga compartida, esta misma  $F_N$  se reparte entre las dos parejas simultáneamente en contacto. El potencial interno de cada pareja también se puede calcular por el mismo procedimiento, sin más que tener en cuenta que los puntos de dos dientes

consecutivos de la misma rueda simultáneamente en contacto, verifican que los radios de curvatura por ellos a los correspondientes perfiles, se diferencian en el paso de base [38], es decir

$$\left(r_{1p}^2 - r_{bl}^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(r_{1q}^2 - r_{bl}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \pi m \cos \phi_h \quad (160)$$

siendo  $m$  el módulo y  $\phi_h$  el ángulo de presión de la herramienta de tallado. A partir de estas consideraciones se pueden determinar los potenciales internos de ambas parejas de dientes,  $U_p$  y  $U_q$ , a expensas de determinar qué fracción de la carga soporta cada una de las parejas. El modelo que se presenta supone que dicho reparto se realiza de forma tal, que el potencial interno total  $U_p+U_q$  es mínimo.

Para determinar este potencial mínimo, sea  $u_p$  el potencial interno de la primera pareja cuando transmite una carga unidad, y  $u_q$  el de la segunda, engranando en el punto correspondiente, también cuando la carga que soporta es unitaria. Cuando, en condiciones de operación, la carga total transmitida sea  $F_N$ , se cumplirá

$$\begin{aligned} F_N &= F_{Np} + F_{Nq} \\ U &= u_p F_{Np}^2 + u_q F_{Nq}^2 \end{aligned} \quad (161)$$

Para imponer la condición de potencial mínimo se aplica el método de los multiplicadores de Lagrange, para lo que se define la función

$$K = u_p F_{Np}^2 + u_q F_{Nq}^2 + \lambda (F_N - F_{Np} - F_{Nq}) \quad (162)$$

a la que se aplican las condiciones de estacionariedad, resultando

$$\frac{\partial K}{\partial F_{Np}} = 2 u_p F_{Np} - \lambda = 0 \quad (163)$$

$$\frac{\partial K}{\partial F_{Nq}} = 2 u_q F_{Nq} - \lambda = 0 \quad (164)$$

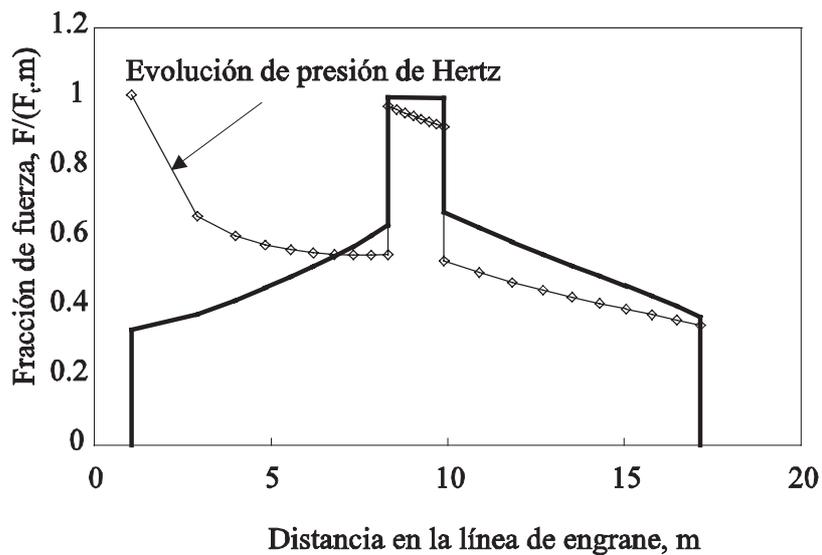
$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = F_N - F_{Np} - F_{Nq} = 0 \quad (165)$$

sistema que, una vez resuelto, arroja el resultado

$$F_{Np} = \frac{u_q}{u_p + u_q} F_N \quad (166)$$

$$F_{Nq} = \frac{u_p}{u_p + u_q} F_N$$

Se aprecia que, puesto que  $u_p$  y  $u_q$  varían a lo largo de la línea de engrane, también el reparto de carga varía con el punto de contacto.



**Figura 23** Evolución de la distribución de carga y de la presión de contacto a lo largo de la línea de engrane.

## Resultados

La Figura 23 muestra la evolución de la fracción de la carga total que soporta una pareja de dientes, a lo largo de la línea de engrane, para un ejemplo de transmisión definido por

los siguientes datos:

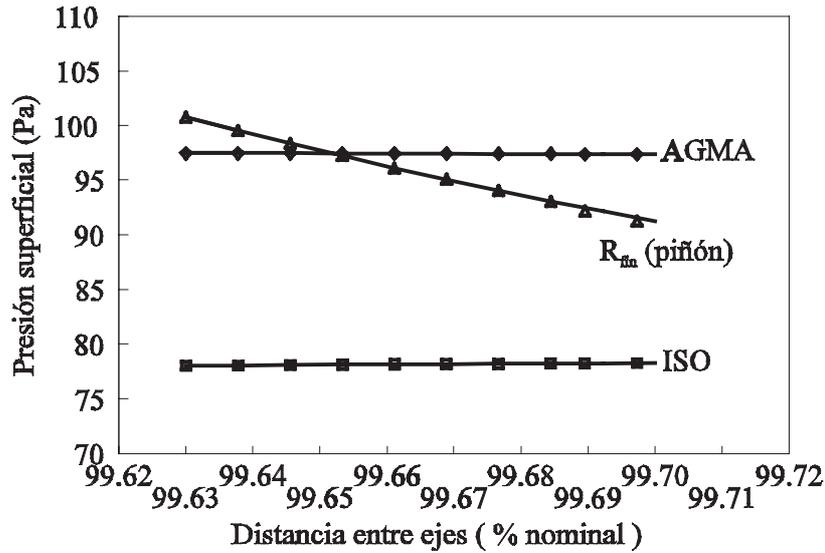
- Parámetros de tallado: ángulo de presión  $20^\circ$ , factor de altura de cabeza 1, factor de altura de pie 1.25, radio de acuerdo en la cabeza de la herramienta 0.3
- Piñón: 20 dientes, desplazamiento 0
- Rueda: 60 dientes, desplazamiento 0
- Distancia entre centros 0.9963 veces la nominal, radios de cabeza calculados para factor de holgura radial de 0.25

En el eje de abscisas se muestra la distancia del punto de contacto al punto de tangencia de la línea de engrane con la circunferencia de base del piñón, y en el de ordenadas la fracción de la carga soportada por la pareja de dientes considerada. Es de destacar la similitud de esta gráfica con la que se presenta en el apéndice de la norma AGMA [2].

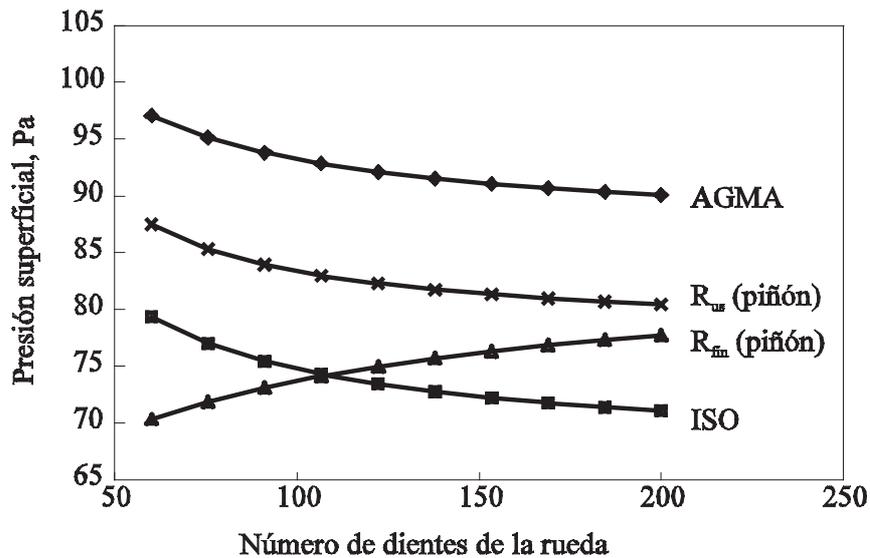
En dicha referencia, el valor de la fracción de carga que transmite el diente en el instante en que comienza o termina su engrane es de  $1/3$ , mientras que al principio y al final del intervalo de contacto único, dicho valor asciende hasta  $2/3$ . Estos valores son notablemente similares a los que se obtienen mediante el modelo desarrollado para el caso que se representa en la Figura 23. Para otros casos se obtienen valores ligeramente diferentes, que oscilan entre 0.25 y 0.4 para el comienzo y finalización del contacto, y entre 0.6 y 0.75 en los extremos del intervalo de contacto único.

La Figura 23 muestra también la distribución de la presión superficial a lo largo de la línea de engrane, obtenida por aplicación del modelo de Hertz con la distribución de carga obtenida. Se observa que, en el caso estudiado, la presión de contacto crítica se produce fuera del intervalo de contacto único, concretamente en el límite inferior del intervalo de engrane del piñón, discrepando, por tanto, del criterio adoptado por las normas, que localizan el punto crítico en punto de contacto único inferior del piñón [2] o en el punto de rodadura [25]. Sin embargo, se puede apreciar también que esta presión de contacto crítica es sólo ligerísimamente superior a la que se produce en el punto de contacto único inferior, como considera, sin justificar las razones, la norma AGMA. Esta diferencia es mucho mayor si se aplica directamente el modelo de Hertz con la hipótesis de reparto uniforme de la carga [72].

Evaluando la presión de contacto por este procedimiento de utilizar el modelo de Hertz con el reparto de carga que aquí se propone, se ha estudiado la evolución de la presión crítica frente a variaciones de los parámetros de los que depende, y se han comparado los resultados con las previsiones de las normas AGMA e ISO. Por razones de extensión, no procede presentar exhaustivamente los resultados de este análisis; se incluye tan sólo un comentario de algunos de los más relevantes.

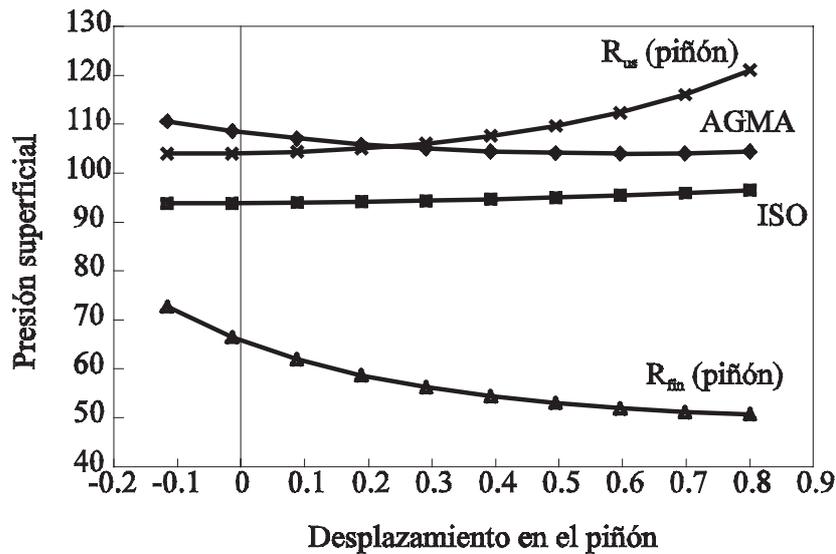


**Figura 24** Efecto de la variación en la distancia entre centros



**Figura 25** Efecto de la variación del número de dientes en la rueda

La Figura 24 muestra la evolución de la presión de contacto frente a variaciones de la distancia entre centros, manteniendo constantes los radios de cabeza, como es el caso de dos ruedas ya fabricadas. Se aprecia que las tensiones ISO y AGMA presentan una tendencia muy similar, de muy ligero crecimiento. Sin embargo, la presión en el punto de finalización de engrane del piñón crece inversamente, cuando la distancia entre centros disminuye, pudiendo llegar a ser crítica, como sucedía en el ejemplo de la Figura 23. Análogamente, la Figura 25 muestra la influencia de la relación de transmisión, que se estudia por medio de la variación del número de dientes de la rueda. Se observa de nuevo una tendencia contraria en el punto de finalización de engrane del piñón a los restantes,



**Figura 26** Efecto de la variación del factor de desplazamiento

incluido el punto de contacto único superior.

Por último, en la Figura 26 se presenta la influencia del desplazamiento en el piñón. Destaca que, en este caso, la tendencia de la presión de contacto en el punto de finalización de engrane no difiere en exceso de la que presentan las tensiones ISO y AGMA, al contrario que en el punto de contacto único superior, que crece rápidamente, llegando a convertirse en el punto crítico relativamente pronto, en el ejemplo, para factores de desplazamiento superiores a 0.25.

## Conclusiones

En este trabajo se presenta un método para evaluar el reparto de carga entre dientes en cualquier punto del intervalo de carga compartida de un engranaje recto. El método está basado en el criterio de mínimo potencial de deformación, cuya obtención se lleva a cabo mediante la aplicación del método de los multiplicadores de Lagrange a la función potencial, calculada, en cada punto, a partir de la geometría de los dientes. La distribución de carga así obtenida, en cada punto de la línea de engrane, resulta ser sensiblemente parecida a la que la norma AGMA adopta, sin presentar justificación alguna, para el estudio de la lubricación de perfiles no modificados.

Dicha distribución de carga se ha aplicado al modelo de Hertz para evaluar la presión de contacto en todo el intervalo de engrane, resultando que la predicción de la presión crítica por este procedimiento es mucho más parecida a la que hacen las normas internacionales —especialmente AGMA— que la que se obtendría de aplicar directamente el modelo de la

propia norma, pero a todo el intervalo, no sólo al punto que ésta sugiere.

Finalmente, se ha realizado un análisis de variación de la presión de contacto con diferentes variables de diseño, encontrándose que, pese a que la predicción de las normas y la que se deriva del modelo desarrollado son coincidentes en la mayor parte de los casos, sigue siendo posible encontrar situaciones en que la presión crítica se presente en puntos diferentes de los sugeridos por las normas, como es el punto de finalización de engrane del piñón, cuando la distancia entre centros se acorta, o el punto de contacto único superior, cuando el desplazamiento aumenta.

## **IV.2 Reparto de carga a lo largo de la línea de contacto de engranajes helicoidales**

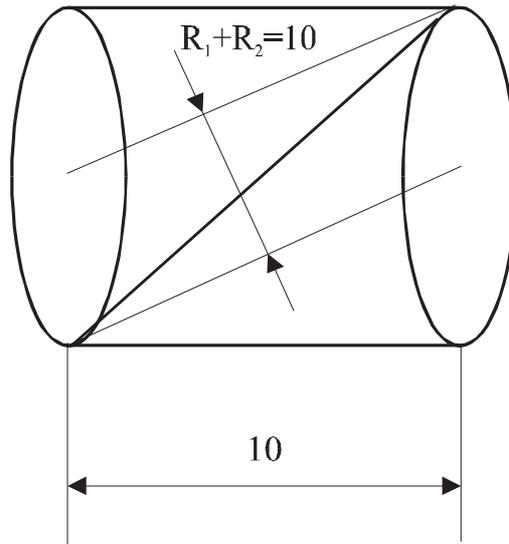
El reparto de carga entre dientes y a lo largo de la línea de contacto es de capital importancia para poder determinar las condiciones superficiales a las que está sometido el perfil del diente de engranaje. En el caso de engranajes rectos con suficiente ancho de cara se puede intuir fácilmente que la carga se distribuye uniformemente a lo largo de todo su ancho, pero el caso del engranaje helicoidal es más complejo al ser la línea de contacto paralela a la directriz de la transmisión, esto hace que el contacto se produzca en distintos puntos del perfil en los cuales las condiciones de contacto son muy distintas. Entre estas condiciones de contacto se va a estudiar la variación de los radios de curvatura a lo largo de la línea de contacto, y después la variación del estado energético a lo largo de la línea de contacto.

En el primer caso se va a poner como hipótesis el acercamiento constante entre los centros de curvatura de la línea de contacto, suponiendo que los dientes son muy rígidos y la deformación estructural de éstos es despreciable frente a la deformación local por contacto.

En el segundo caso se estudiará el comportamiento estructural del diente obteniendo conclusiones que son muy interesantes a la hora de explicar resultados experimentales.

### **Hipótesis de acercamiento constante entre centros de curvatura.**

De acuerdo con los tres modelos de contacto estudiados en el apartado de condiciones de impenetrabilidad del capítulo I.2, se va a estudiar cómo varía la distribución de fuerzas en



**Figura 27** Contacto entre dos conos de directrices paralelas.

la línea de contacto de un engranaje helicoidal en el cual, la suma de radios de curvatura permanece constante y variando el valor de estos radios linealmente a lo largo de línea de contacto. La hipótesis básica de este capítulo es que el acercamiento entre los centros de curvatura de ambos cilindros, es decir la distancia  $I_1I_2$  de la Figura 28 permanece constante a lo largo de todo el contacto.

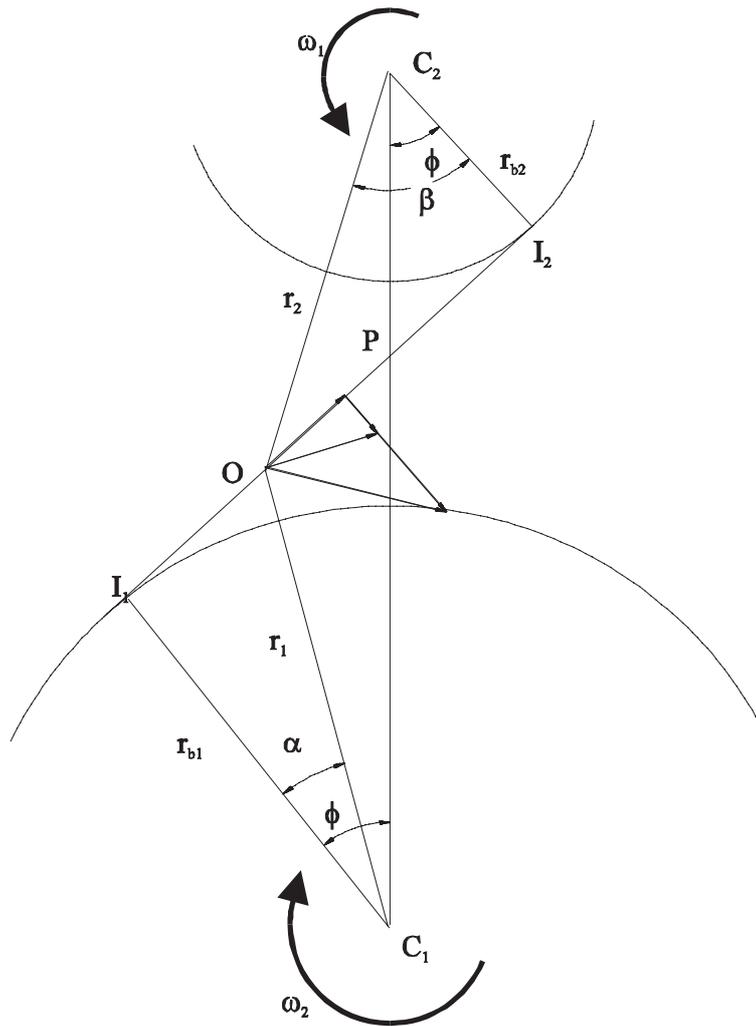
### Geometría de Hertz

Se va a estudiar el acercamiento constante  $\alpha$  entre los centros de curvatura de los puntos de contacto en cada una de las superficies, de modo que el semiancho de contacto  $a$  sea por Hertz constante a lo largo de la línea de contacto. Suponiendo válida la aproximación de Hertz de la distancia  $Z$  en el contacto, la distancia  $x$  del punto más alejado en contacto será igual al semiancho de contacto  $a$

$$\alpha = \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (167)$$

de donde:

$$a = \sqrt{\frac{2\alpha}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}} \quad (168)$$



**Figura 28** Línea y punto de contacto con los centros de curvatura en las líneas de contacto  $I_1$  e  $I_2$ .

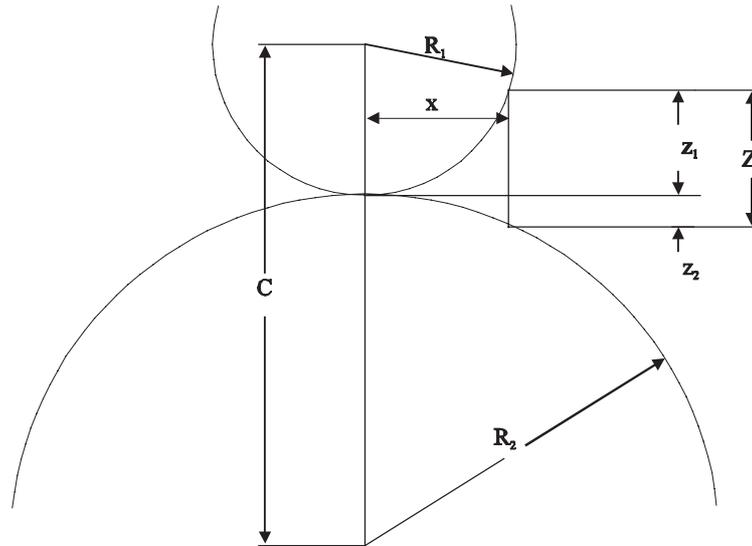
Por Hertz se sabe que:

$$F = \frac{\pi a^2}{8C_p} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (169)$$

Combinando las dos ecuaciones obtenemos:

$$F = \frac{\pi \alpha}{4C_p} = cte. \quad (170)$$

Por lo tanto la fuerza de contacto se mantiene constante a lo largo de la línea de contacto.



**Figura 29** Magnitudes geométricas de la distancia a la misma coordenada  $x$  en el contacto entre dos cilindros sin presión

### Geometría de misma coordenada $x$

Si se supone ahora no la geometría de Hertz sino el valor exacto de la distancia  $Z$  despreciando la deformación del cilindro fuera de la zona de contacto, el acercamiento  $\alpha$  coincide con el valor de  $Z$ .

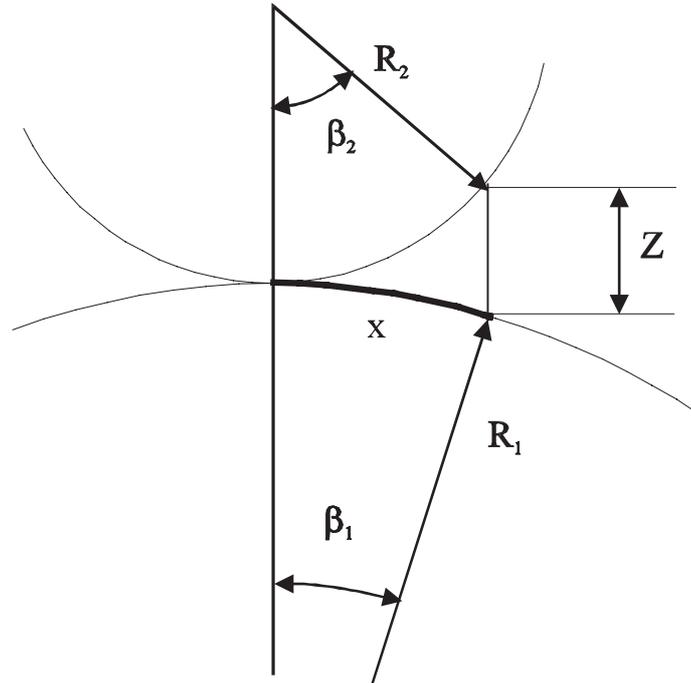
$$\alpha = z_1 + z_2 = Z = R_1 - \sqrt{R_1^2 - a^2} + R_2 - \sqrt{R_2^2 - a^2} \quad (171)$$

Despejando  $a$  se obtiene la expresión

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{-\alpha^2 + 2\alpha(R_1 - R_2) + (R_1 - R_2)^2 - \left( \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1 + R_2 - \alpha} \right)^2} \quad (172)$$

### Geometría del mismo arco

La expresión de acercamiento con el modelo de "igual arco" según lo visto viene dado por



**Figura 30** Contacto entre cilindros con suponiendo igual arco de contacto en las dos superficies.

la expresión:

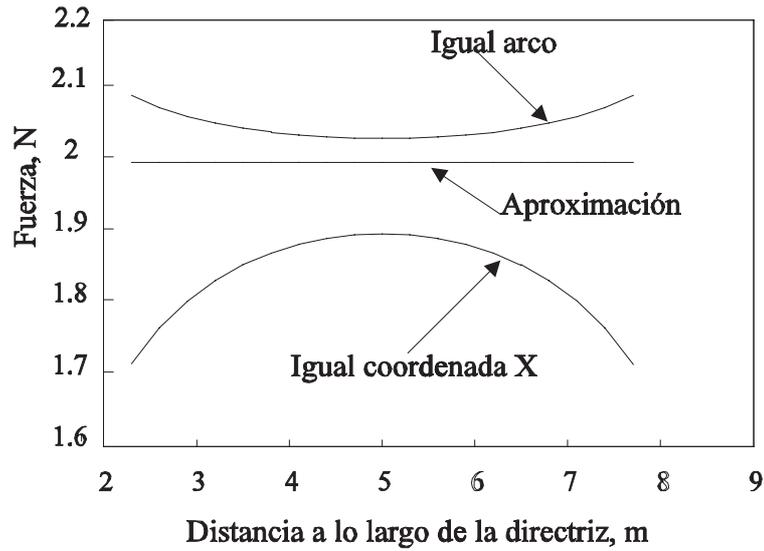
$$\alpha = Z = R_1 \left(1 - \cos \frac{\alpha}{R_1}\right) + R_2 \left(1 - \cos \frac{\alpha}{R_2}\right) \quad (173)$$

En esta expresión el ancho no se puede poner en forma explícita por lo que el semiancho se calculará por el método de Newton-Raphson.

### Comparación de los 3 modelos

Se han desarrollado gráficas en las cuales se observa cómo evoluciona la fuerza que actúa entre los dos conos cuando se suponen que sus directrices permanecen equidistantes y se acercan una a la otra sin perder su paralelismo. Los tres modelos presentados son los correspondientes a la geometría de Hertz denominado en los títulos de las gráficas como "Aproximación", el obtenido a partir de la geometría real aunque suponiendo que no hay deformación fuera de la zona de contacto, a este modelo se le ha denominado "Igual coordenada X", y el último modelo representado es el que parte de suponer igual arco en el contacto.

Aplicando a la expresión (169) de fuerza de Hertz el ancho obtenido en los 3 modelos. Se

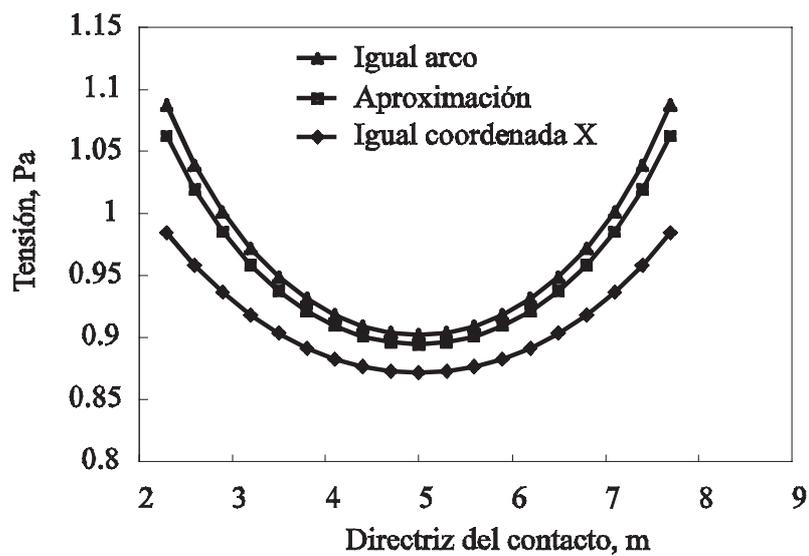


**Figura 31** Comparación de evolución de la fuerza.

han obtenido la fuerza en veinte puntos de la línea de contacto. Dando valor unidad a la aproximación constante  $\alpha$  y a  $R$  el valor 10. Como lo que interesa es la evolución y no el valor exacto de las fuerza y tensiones se parte de que

$$\frac{\pi}{4C_p} = 1 \tag{174}$$

En la Figura 31 se representan la evolución de la fuerza la lo largo de la línea de contacto. En la Figura 32 lo representado es la presión máxima de Hertz a que da lugar esta fuerza teniendo en cuenta la evolución de los radios de curvatura.



**Figura 32** Evolución de la presión máxima de en la línea de contacto.

## Conclusiones

Como se ha podido observar en las gráficas, el tomar un modelo u otro influye en la distribución de fuerzas a lo largo de la línea de contacto, aunque el máximo de la presión de Hertz sigue situándose en los extremos de la línea de contacto donde los radios de curvatura son más diferentes. Tomando el modelo de "igual coordenada X" la diferencia de tensiones a lo largo de la línea de engrane se suaviza, mientras que usando el modelo de "igual arco" la diferencia es resaltada, aunque muy ligeramente.

Las normas de diseño de engranajes ISO y AGMA sitúan sin embargo como punto crítico la tensión en el punto de rodadura o en el radio medio, que están muy próximos a donde los radios de curvatura se parecen más. Este punto es el que tiene el radio de cilindro equivalente mínimo. Las normas son más conservadoras al establecer tensión crítica de fallo la presión máxima de Hertz, mientras que la máxima tensión equivalente dada por el mapa tensional es 0.3 veces ese valor. Se tendrá que recurrir a otros criterios para modelizar el contacto con los que compensar estos efectos y por lo tanto estimar la tensión de fallo a lo largo de toda la línea de contacto.

## Distribución de fuerzas a lo largo de la línea de contacto en engranajes helicoidales. Condiciones de Kuhn-Tucker y Multiplicadores de Lagrange

En este apartado se va a estudiar el sistema multicuerpo que forman los dos engranajes de dientes helicoidales en contacto. En el capítulo anterior se ha estudiado el caso sencillo de la resolución en dos dimensiones del contacto entre dos pares de dientes rectos. El comportamiento del contacto entre dos dientes helicoidales no es simétrico como en el caso de dientes rectos. El problema se tiene que resolver en el espacio tridimensional, y deja de ser un sistema discreto para pasar a ser continuo, al producirse el contacto en una línea con infinitos puntos cada uno distinto de otro desde el punto de vista energético. El problema requiere que los conceptos se estudien a fondo desde el principio, por lo que se ha desarrollado la teoría desde su base dándole un enfoque distinto al que se le ha dado en el capítulo anterior al tratar el reparto de carga en engranajes rectos.

El modelo de cuerpo elástico escogido para explicar los conceptos es el de la viga en voladizo. Su asemejación al comportamiento del diente recto se ha utilizado en otros trabajos [100] y se puede suponer válida para desplazamientos pequeños. También se puede suponer que el comportamiento elástico es lineal, es decir, las magnitudes de los desplazamientos y las tensiones en cada punto son proporcionales a la carga aplicada. Esta

nueva suposición implica que el material es elástico y que las deformaciones son pequeñas.

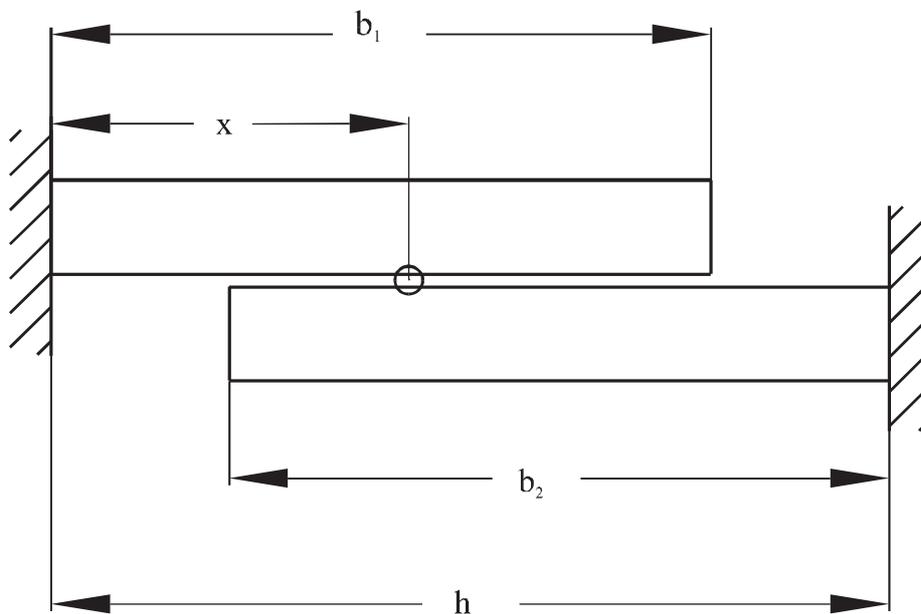
### Rigidez de una viga empotrada en un extremo

Se define por rigidez  $K_1$  de la viga 1 en un punto  $P$  al desplazamiento vertical del punto  $P$  donde se aplica la carga cuando el valor de ésta es uno. Si se representa gráficamente la rigidez respecto de la distancia de  $P$  al empotramiento, obtiene una curva creciente  $K$  como la mostrada en la Figura 34. Al ser un material elástico y los desplazamientos pequeños, el desplazamiento en un punto será proporcional a la carga aplicada, pues se trabaja dentro del ámbito lineal.

$$\delta = F_i k(x) \quad (175)$$

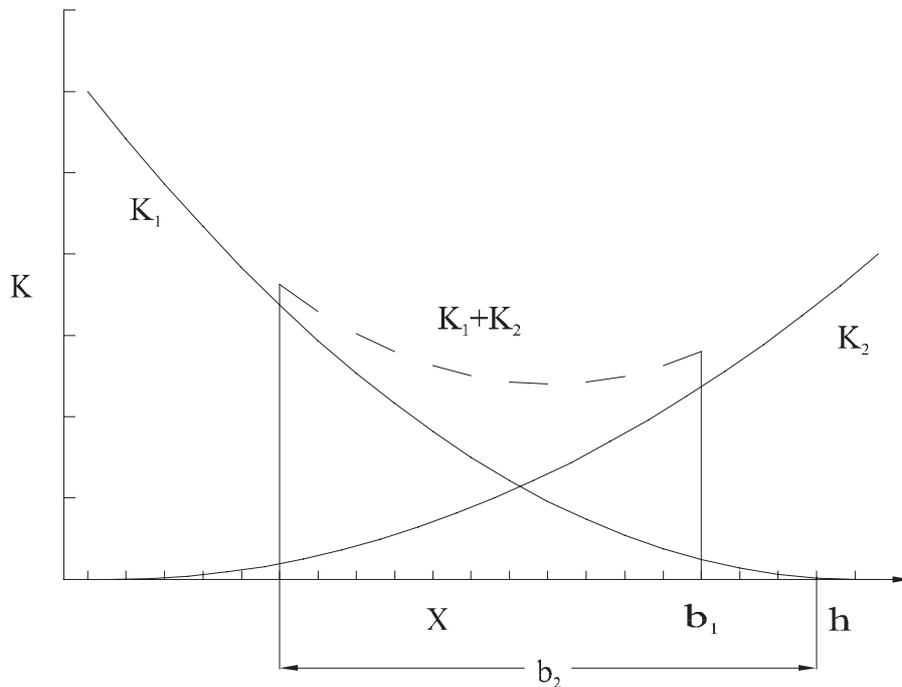
La energía de deformación de la viga será igual al producto de la fuerza por el desplazamiento en el punto de aplicación de la carga, con lo que al sustituir la Ecuación (175) resulta que la energía de deformación es función cuadrática de la fuerza aplicada.

$$U = \frac{1}{2} F_i \delta = \frac{1}{2} F_i F_i k(x) \quad (176)$$



**Figura 33** Sistema de dos cuerpos elásticos con un punto de contacto

Si dos vigas contactan en un punto y en ese punto actúan la una contra la otra con una fuerza unidad, los desplazamientos en ambas vigas vendrán dados por la rigidez de cada una. La suma de ambos desplazamientos dará como resultado la rigidez del par de vigas. Al venir las rigideces en función de la distancia desde el punto de carga hasta el empotramiento, en una de las vigas habrá que hacer el cambio de coordenadas de forma que la nomenclatura usada en las expresiones coincida con las entidades de acotación de la Figura 33.



**Figura 34** Evolución de la rigidez conjunta en función de la localización del punto de contacto.

La Figura 34 muestra cómo para una carga unidad evoluciona la energía de deformación total cuya forma coincide con la suma de las rigideces de ambos cuerpos cuando están en contacto por un sólo punto. La energía total de deformación será por lo tanto igual a la suma de las energías de deformación de los dos cuerpos, y es denominada normalmente como rigidez de contacto.

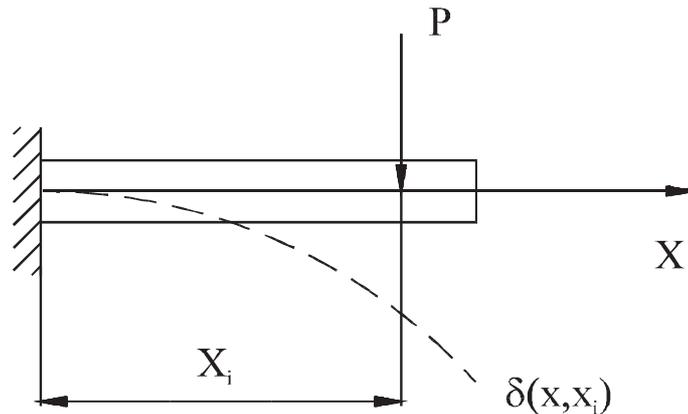
$$U = \frac{1}{2}(F_i \delta_1 + F_i \delta_2) = \frac{1}{2} F_i^2 (k_1(x) + k_2(h-x)) \quad (177)$$

La forma de la curva de rigidez de contacto de la Figura 34 es importante para comprender el sentido dado por la norma AGMA al establecer el radio medio como el punto crítico de fallo superficial en engranajes helicoidales con grado de recubrimiento frontal mayor que uno. La norma ISO considera como punto crítico el radio primitivo de funcionamiento,

mientras que la norma AGMA lo sitúa en el radio medio, que normalmente está cerca del radio primitivo. Estos radios se han establecido en base a que la experiencia la cual muestra que es en esa zona en donde comienzan a aparecer las picaduras, la deducción dinámica de este fenómeno debe deducirse del cálculo de la distribución de fuerza a lo largo de la línea de contacto que alcanza su máximo en el mínimo de la rigidez conjunta.

### Energía de deformación en el contacto entre dos cuerpos elásticos.

Cuando el contacto entre los cuerpos se produce en dos puntos, la energía ya no depende de las rigideces únicamente, pues el desplazamientos del punto donde actúa una fuerza también depende del valor de la otra fuerza. Sea  $\delta(x, x_i)$  la flecha de la viga en el punto  $x_i$  cuando actúa una fuerza unidad en el punto  $i$ , según muestra la Figura 35. La curva discontinua cuya distancia con la línea media original representa la función  $\delta(x, x_i)$ , se denomina usualmente como elástica de la viga deformada.



**Figura 35** Elástica de una viga en voladizo.

Cuando actúan dos fuerzas sobre una viga,  $F_1$  en  $x_1$  y  $F_2$  en  $x_2$ , el desplazamiento total en  $x_1$  y en  $x_2$  será

$$\delta_{TI} = F_1\delta(x_1, x_1) + F_2\delta(x_1, x_2) \quad (178)$$

Si el contacto se produce en dos puntos, a partir del valor de las fuerzas aplicadas, se podrá obtener la expresión de la energía total de deformación de la viga

$$2U = F_1(F_1\delta_1(x_1, x_1) + F_2\delta_1(x_1, x_2)) + F_2(F_1\delta_1(x_2, x_1) + F_2\delta_1(x_2, x_2)) \quad (179)$$

que se puede expresar en forma más sencilla usando la notación matricial

$$2U_1 = [F_1 \ F_2] \begin{bmatrix} \delta_1(x_1, x_1) & \delta_1(x_1, x_2) \\ \delta_1(x_2, x_1) & \delta_1(x_2, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (180)$$

Cuando los dos cuerpos están en contacto en dos puntos, la energía total es igual a la energía de una viga más la de la otra. Teniendo en cuenta que:

- $F_1$  y  $F_2$  son iguales para los dos cuerpos por el principio de Newton de acción-reacción.
- Si la ecuación de la elástica de la segunda viga  $\delta_2'$  ( $\zeta$ ,  $\zeta_i$ ) viene expresada en coordenadas locales  $\zeta$ , se realizará un cambio de coordenadas para expresarla en las mismas coordenadas que  $\delta_1$ , que se tomarán como coordenadas globales, con lo que ya se podrá operar con las dos elásticas en el mismo sistema de referencia, refiriéndose a cada punto con  $x$  que es la coordenada global tomada.

La energía total de deformación será:

$$2U_1 + 2U_2 = [F_1 \ F_2] \begin{bmatrix} \delta_1(x_1, x_1) + \delta_2(x_1, x_1) & \delta_1(x_1, x_2) + \delta_2(x_1, x_2) \\ \delta_1(x_2, x_1) + \delta_2(x_2, x_1) & \delta_1(x_2, x_2) + \delta_2(x_2, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (181)$$

lo que se suele expresar de forma más simplificada

$$U = \frac{1}{2} [F_1 \ F_2] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (182)$$

y generalizando para muchos puntos en contacto

$$U = \frac{1}{2} [F]^T [C] [F] \quad (183)$$

en donde

$$c_{ij} = \delta_1(x_i, x_j) + \delta_2(x_i, x_j) \quad (184)$$

Observaciones:

- Por el teorema de reciprocidad de Raleigh-Betti se puede deducir que  $c_{ij}=c_{ji}$  de lo que se deduce que la matriz de coeficientes es simétrica.
- Cuando se admite que el desplazamiento de cada punto se produce únicamente por la fuerza que actúa en dicho punto, la matriz [C] es diagonal, por lo que no hace falta el conocimiento de la elástica para la elaboración de [C], sino únicamente de su rigidez.

A la matriz [C] se la va a denominar de ahora en adelante matriz de los desplazamientos.

### Principio de mínima energía.

Por principios termodinámicos, la configuración final de un sistema será tal que su energía interna alcance un valor mínimo estacionario. Traducido a términos elásticos, un sistema hiperestático adquiere la configuración final de fuerzas y deformaciones que haga mínima la energía de deformación elástica.

En el caso del contacto entre dos cuerpos elásticos en varios puntos, el vector de fuerzas se halla minimizando la función de energía U, sujeta a las restricciones de fuerza total igual a un valor concreto dado, y la no existencia de adhesión entre las superficies, es decir, todas las fuerzas deben ser positivas.

La forma matemática del problema tendría el siguiente enunciado.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_i \sum_j f_i c_{ij} f_j \\ & \sum f_i = F \quad (1) \\ & f_i \geq 0 \quad (2) \\ & i=1..n \end{aligned} \tag{185}$$

La restricción (1) de la ecuación (185) se deduce de que la fuerza total con que actúa un cuerpo contra otro es un dato del problema. El problema como se verá más adelante es lineal, por lo que se podría resolver dando en un principio el valor unidad a F y después multiplicar los resultados de fuerza  $f_i$  y desplazamientos por su propio valor.

La restricción (2) de la ecuación (185) se basa en que en el contacto no hay fuerzas de adhesión o tracción, ya que antes de que hubiera tracción dejaría de haber contacto.

### Métodos de resolución.

Para la resolución matemática del problema planteado en la Ecuación (185), existen varios métodos. La función objetivo es cuadrática, lo que hace que no se puedan aplicar las técnicas de programación lineal que son las más extendidas para resolver problemas de optimización. Las rutinas típicas de programación cuadrática tienen el inconveniente de ser iterativas y laboriosas, en las que pueden surgir problemas de convergencia. También existe la posibilidad de linearizar el problema como hizo Vijayarangan et al. [92] para solucionar el contacto entre cuerpos. El método adoptado ha sido el de asemejar el problema al problema tipificado de Kuhn-Tucker mucho más general y que viene recogido en muchos libros de optimización en ingeniería y economía como el Recklaitis [78].

### Condiciones de Kuhn-Tucker

El problema señalado anteriormente es un tipo concreto del problema más general de Kuhn-Tucker, cuya solución consiste en sustituir el enunciado por otro equivalente más fácil de solucionar, estableciendo las condiciones de necesidad y suficiencia para la equivalencia del problema. El enunciado del problema de Kuhn-Tucker viene dado en la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && f(x) \\
 &\text{sujeto a} && \mathbf{g}_j(x) \geq 0 && j=1..J \\
 &&& h_k(x) = 0 && k=1..k
 \end{aligned}
 \tag{186}$$

$$x = \{ x_1, x_2, \dots, x_N \}$$

Este problema se reduce a encontrar los vectores  $\{x\}_{N \times 1}$ ,  $\{u\}_{1 \times J}$ , y  $\{v\}_{1 \times K}$  que cumplen las condiciones de las ecuaciones (187) en donde además de las restricciones del problema se añaden las señaladas en esas condiciones. La equivalencia entre estos dos problemas no se demuestra en este lugar al estar ya muy tipificada como muestra Reklaitis [78], pero dada su gran importancia para los ambiciosos objetivos que se van a tratar de cubrir con esta técnica, se propondrá la demostración de las condiciones de necesidad y suficiencia en el

apartado siguiente.

$$\begin{aligned} \nabla f(x) - \sum_{j=1}^J u_j \nabla g_j(x) - \sum_{k=1}^K v_k \nabla h_k(x) &= 0 \\ u_j g_j(x) &= 0 \\ u_j &\geq 0 \end{aligned} \tag{187}$$

La equivalencia de los dos enunciados se puede aclarar al hacer en el problema de Kuhn-Tucker las siguientes sustituciones

$$\begin{aligned} f(x) &= U \{ f \} \\ x_i &= f_i \\ g_i(x) &= f_i \quad J=N \\ h_k(x) &= \sum_{j=1}^N f_j - F \quad K=1 \end{aligned} \tag{188}$$

con lo que haciendo las sustituciones en el problema equivalente y operando da como resultado que las  $u_i$  son nulas quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2f_i c_{ii} + \sum_{j \neq i} c_{ij} f_j - v &= 0 \\ \sum f_i - F &= 0 \end{aligned} \tag{189}$$

detalles sobre las operaciones hasta llegar a este resultado, así como la verificación de las condiciones de necesidad y suficiencia, pueden verse en el apartado siguiente. Al hacer la equivalencia de Kuhn-Tucker han aparecido las variables  $c_{ij}$  y  $v$  aumentando el número de ecuaciones pero también igualando su número al número de incógnitas. Con lo que queda un problema lineal que se puede resolver de forma matricial, una de cuyas formas de

formularla es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 2c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1(N-1)} & c_{1N} & -1 \\ c_{21} & 2c_{22} & \dots & \dots & c_{2N} & -1 \\ \dots & & & & & \\ c_{NI} & \dots & \dots & \dots & 2c_{NN} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (190)$$

Lo usual en la solución de la mayoría de los problemas de Kuhn-Tucker es que la equivalencia no salga tan cuadrada, siendo los ejemplos dados por Recklaitis solucionados por tanteo. Las condiciones de necesidad y suficiencia las cumple este caso como se verá en el apartado siguiente, lo que significa que la solución única que resuelve el problema es la auténtica, es decir, que las  $f_i$  de la solución indican la verdadera distribución de fuerzas que solucionan el problema entre dos cuerpos en contacto a lo largo de una línea. En la modelización se ha sustituido la fuerza a lo largo de toda la línea por fuerzas puntuales situadas en esa línea.

El tipo de fuerza puntual es singular al dar tensiones infinitas en el punto de aplicación de la carga, pero lo que interesan son las deformaciones estructurales y no las locales, por lo que el modelo se puede considerar válido.

Otra suposición que se ha hecho, ha sido el despreciar el efecto de borde. Pues en una semejanza completa de la fuerza en el borde debiera corresponder a la mitad de longitud del resto de fuerzas. Esta distorsión disminuye a medida que aumenta el número de puntos considerados.

En el apartado siguiente viene otra versión del problema planteado con la técnica de los Multiplicadores de Lagrange. El resultado final es el mismo. El proceso es más sencillo pero menos fundamentado y menos riguroso que el problema general.

La forma matricial cuando hay independencia de los desplazamientos de las diferentes líneas de contacto, pero no entre la fuerza total, hacen que la matriz [C] tenga muchos ceros pues una fuerza en un punto no produce desplazamiento en el otro. Las ecuaciones

matriciales podrían tener una forma como la que sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ [C]_1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & [C]_2 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & [C]_N & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{f\}_1 \\ \{f\}_2 \\ \dots \\ \{f\}_N \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (191)$$

El vector solución de las ecuaciones (190) y (191) es la primera columna de la inversa de la matriz de coeficientes multiplicado por F.

El método presentado es simple y económico pues:

- La restricción sólo aumenta la matriz final en uno, y
- Sólo se necesita el cálculo de una columna de la matriz inversa. Esto evita una gran cantidad de operaciones al ordenador.

En el método de diagonalización de Gauss-Jordan que es el algoritmo que usan muchos de los programas comerciales, el aumento de la matriz complementaria sería sólo en una columna con el valor F en la primera fila y cero en el resto, en lugar de añadir tantas como filas hay en la matriz original. Con lo que se ha estudiado que el número de operaciones a ahorrar es de  $n^2(n-1)$  siendo n el número de filas y columnas de la matriz original [6].

En el caso de que [C] sea diagonal, de las condiciones (1) y (2) de Kuhn Tucker (185) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$v = \frac{2F}{\sum C_{ii}} \quad (192)$$

$$f_i = \frac{F}{c_{ii} \sum_j c_{jj}} \quad (193)$$

Como corolario se podría decir que en la línea de contacto entre dos cuerpos cuya evolución de la rigidez es convexa (como la línea discontinua de la Figura 34. La distribución de la fuerza será cóncava, apareciendo la máxima fuerza donde estaba el mínimo de rigidez conjunta.

### Condiciones de necesidad y suficiencia.

La solución del sistema de ecuaciones cumple las condiciones de necesidad y suficiencia de Kuhn-Tucker, para la resolución del problema (185). La condición de necesidad tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f, g, h &\in \mathbb{C}^1 \\ \nabla g_i, \nabla h &\text{ independientes} \\ \exists \{x\} &\text{ solución} \end{aligned} \quad (194)$$

entonces existe

$$\Rightarrow \exists \{v\} \text{ y } \{u\} ; [\{x\}, \{v\}, \{u\}] \equiv \text{solución} \quad (195)$$

En el problema que nos ocupa, se trata un problema del continuo real por lo que al hacer las equivalencias se observa que las funciones son continuas, como se puede observar en las equivalencias descritas en (188); los gradientes independientes, dado que son constantes e iguales a la unidad en todos sus componentes; y la incógnita existe pues el problema es real.

La condición de suficiencia se expresa del siguiente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ convexa} \\ g_i(x) \text{ cóncava} \\ h_k(x) \text{ lineal} \\ \{x\} \text{ solución} \end{array} \right\} \Rightarrow \{x\} \text{ mínimo de } f(x) \quad (196)$$

todas estas condiciones las cumple el problema de modo evidente al hacer las transformadas (188) por lo que la solución del problema (185) dado por el sistema de ecuaciones matricial (190) es la óptima.

### Método de los multiplicadores de Lagrange

En el cálculo de la distribución de carga por el método de los multiplicadores de Lagrange, el sistema de ecuaciones finales es idéntico al que resulta de la formulación por las condiciones de Kuhn-Tucker. Pero con el inconveniente de que sus resultados no son tan

matemáticamente rigurosos, aunque intuitivamente se puedan comprender los resultados como ya se explicará más adelante.

Partiendo del problema mostrado en la Ecuación (185) se puede reescribir la restricción (2) introduciendo valores  $a_i$  como incógnitas de la forma

$$f_i - a_i^2 = 0 \quad (197)$$

con lo que se han introducido  $n$  variables y  $n$  restricciones eliminando las inecuaciones. La función a minimizar tendrá la forma siguiendo el método de los Multiplicadores de Lagrange

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i c_{ij} f_j - \lambda \left( \sum_{i=1}^n f_i - F \right) - \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - a_i^2) \quad (198)$$

Seguendo el método se hace estacionaria la función  $U$

$$\frac{\partial U}{\partial f_i} = 0 = 2f_i c_{ii} + \sum_{j \neq i} c_{ij} f_j - \lambda - \lambda_i \quad (199)$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = 0 = -2\lambda_i a_i \quad (200)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = 0 = f_i - a_i^2 \quad (201)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0 = \sum f_i - F \quad (202)$$

de (200) se deduce que todos los  $\lambda_i$  son nulos, con lo que de (199) y (202) se obtienen  $n+1$  ecuaciones con  $n+1$  incógnitas. Este sistema de ecuaciones proporciona los valores de  $f_i$  y de  $\lambda$ . Este sistema de ecuaciones coincide con el proporcionado por las condiciones de Kuhn-Tucker, obtenidas anteriormente, de igual modo se puede representar en forma matricial pues las ecuaciones son lineales con lo que queda el sistema (188) con sólo sustituir  $v$  por  $\lambda$ .

Se puede intuir que las  $f_i$  solución del método de los multiplicadores de Lagrange son todas positivas, pues antes de que una fuerza  $f_i$  fuera negativa dejaría de haber contacto, matemáticamente podría ocurrir al suceder que  $a_i$  fuera un número complejo. Una

demostración intuitiva vendría de que para que la energía fuera mínima y la fuerza total tiene que ser constante, una fuerza negativa supondría que las fuerzas positivas tendrían que aumentar, con lo que la energía aumentaría.

Al estar demostrado matemáticamente que las condiciones de Kuhn-Tucker se cumplen, se puede extender esta conclusión al método de los multiplicadores de Lagrange, pues los resultados son los mismos.

### Aplicación del Método de los Elementos Finitos (FEM)

Al calcular la deformación del engranaje cuando se aplica una carga tal como se ha estado haciendo hasta ahora se cometen una serie de imprecisiones derivadas de la simplificación del problema al estimar que el diente de engranaje se comporta como una viga en voladizo. Esta hipótesis es aceptable en el caso plano cuando la carga se reparte uniformemente, pero en el caso tridimensional es más discutible.

El modelo de la viga en voladizo tiene inconvenientes, al ser el diente de engranaje de proporciones pequeñas, pues el tamaño de su longitud es comparable al de su espesor, por otra parte su deformación principal no es por flexión sino por cortante, y ante un esfuerzo cortante, la superficie sufre un alabeo que se compensa al aplicar el concepto de superficie reducida, que en el caso de secciones rectangulares la superficie reducida es la superficie real multiplicada por 1.2 . Estos inconvenientes que se pueden presentar en el caso plano son subsanables ya que las tendencias se mantienen casi idénticas entre este modelo matemático y el modelo real. Hay que tener en cuenta que no se está trabajando con valores absolutos de rigidez, sino con valores relativos en las que las hipótesis realizadas son la base para hallar la distribución de fuerzas.

El caso se complica al tratar el problema tridimensional del engranaje helicoidal, en el cual no hay simetría ni en la geometría ni en la carga. La carga se produce en una línea que no es perpendicular al plano frontal, como se ha visto en un apartado anterior. La geometría tampoco es simple para poder utilizar un método analítico, por lo que se tendrá que recurrir a los métodos numéricos.

De entre todos los métodos descritos en el estado del arte para el cálculo dinámico de los dientes de engranajes, el método más usado es el método de elementos finitos, el cual posee una gran robustez y flexibilidad. Es el método con el que se va a comprobar el modelo de deformación del diente helicoidal.

El diente de engranaje se va a modelizar como una cremallera simple. Esta simplificación

es muy usada en los modelados por el Método de los Elementos Finitos en el espacio tridimensional para usos afines a los que se van a plantear, así lo utilizaron Stegemiller [83], Umezawa [91] y el programa para estación de trabajo CAEG de Gleason, que han sido referenciados en el estado del arte. La simplificación también incluye la supresión de la huella del diente con el fin de hallar mayor precisión en el cálculo que se perdería al representar la curva de la huella con la gran cantidad de elementos que ésta requeriría, la limitación de memoria obligaría a un mallado más basto, lo que haría que se perdiera precisión de cálculo.

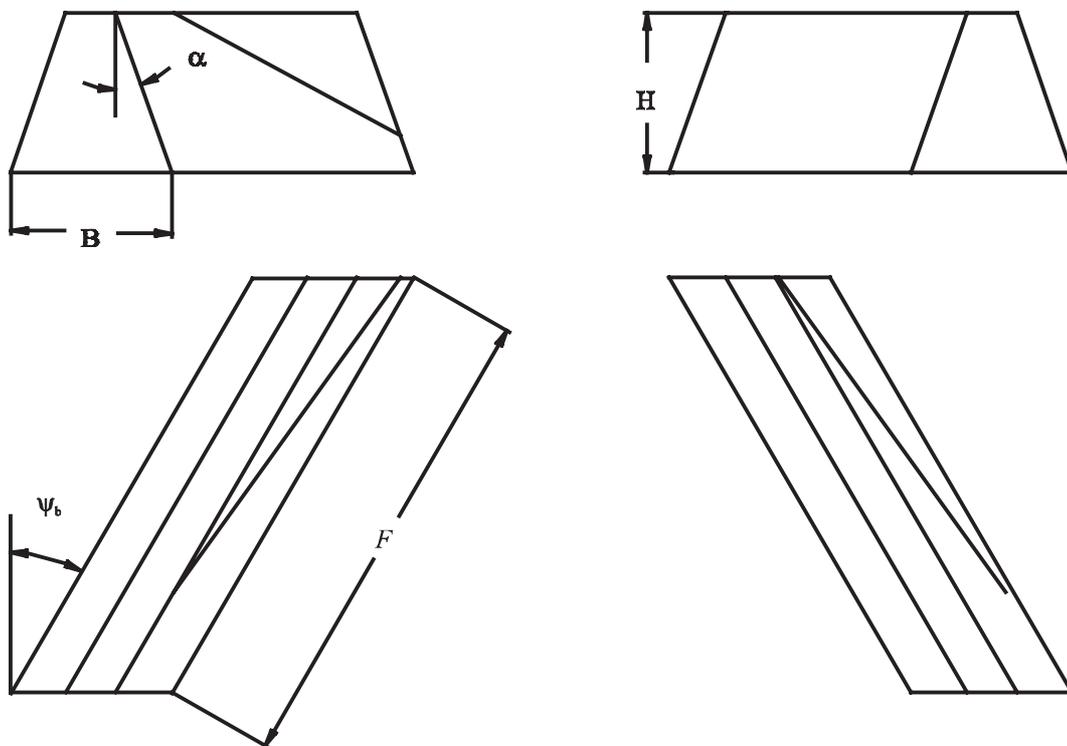
Un gran inconveniente en el Método de los Elementos Finitos es que trata mal las cargas puntuales. Estas cargas puntuales son en realidad una singularidad que el Método de los Elementos Finitos la incluye dentro de su interpolación polinómica. En realidad la carga no se produce en un punto sino que se aplica sobre un área de contacto finita, aunque pequeña, con lo que los dos efectos vienen compensados: el efecto de la suavización de la singularidad al incorporarla al polinomio, y el que la singularidad no lo sea tanto al aplicarse la fuerza no en un punto sino en una superficie. Otras opciones son usar variantes del Método de los Elementos Finitos como son el Global Local Finite Element Method (GLFEM) [65], o bien, usar elementos jerárquicos que permitan afinar la resolución del problema aumentando el grado del polinomio de interpolación. Un método que ha dado buenos resultados en el contacto es el Métodos de los Elementos de Contorno (BEM). El problema de estos últimos métodos es que no están disponibles sino para los muy habilidosos en la programación, aparte de carecer de la robustez del Método de los Elementos Finitos.

El desplazamiento producido por una carga puntual en el modelo Método de los Elementos Finitos se puede descomponer entre el desplazamiento estructural que depende de la rigidez de la estructura, y el de la flexibilidad del contacto que viene dado principalmente por las características de los materiales. En todos los casos se va a suponer que el desplazamiento estructural es el predominante dado que la carga está aplicada en puntos distantes a los empotramientos. Por otra parte los desplazamientos por el contacto son muy similares entre todos los puntos donde se van a aplicar las cargas con lo que, al tratar el problema mediante magnitudes relativas como es el cálculo de la distribución de fuerzas, sólo influirán las magnitudes estructurales.

Los resultados obtenidos por el Método de los Elementos Finitos de los desplazamientos tienen una precisión distinta según se obtengan de la solución nodal, o de la solución en los elementos. El Método de los Elementos Finitos calcula los resultados discretizando un dominio, y la solución la obtiene integrando la matriz de rigidez en cada uno de los elementos, obteniendo la precisión mayor en los puntos que se han usado para la resolución de la integral por cuadratura. La ventaja de la solución en los elementos es la mayor precisión en los puntos de cuadratura, pero tienen el inconveniente de que la dificultad que

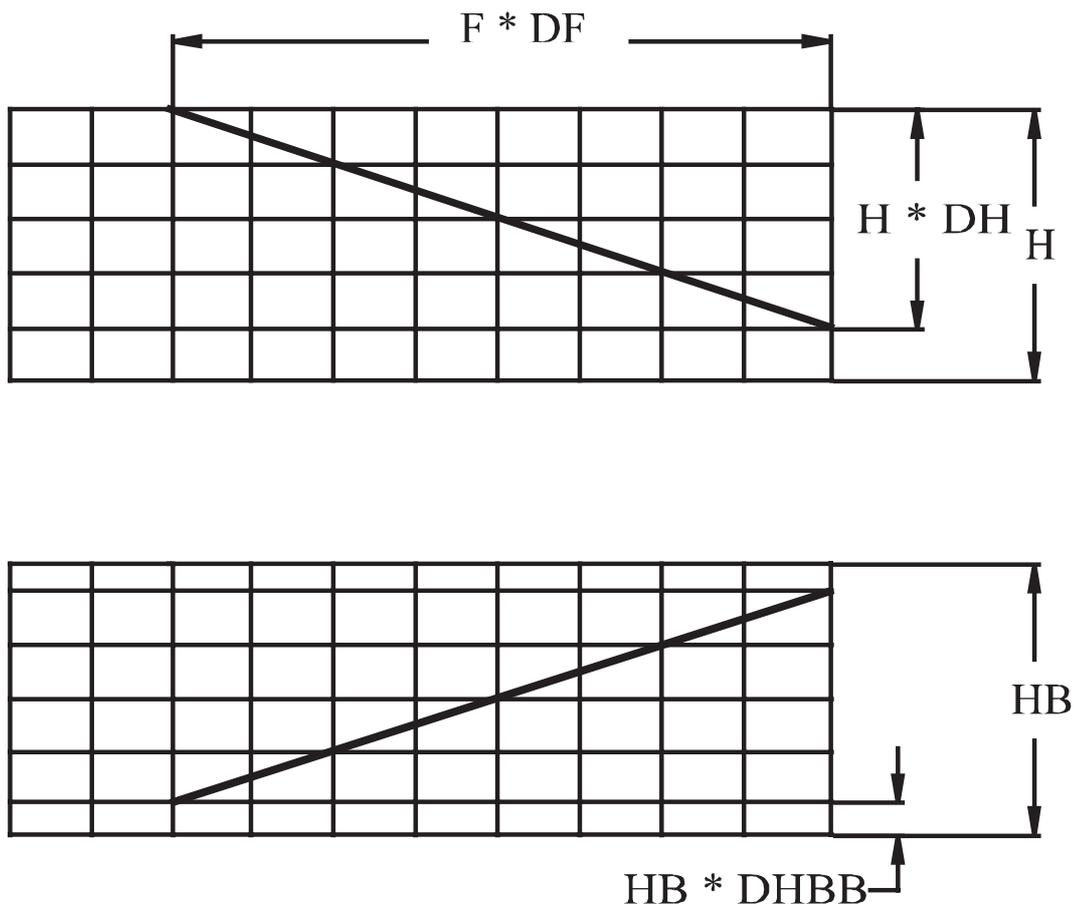
implica el colocar estos puntos donde interesa según problema que se está tratando, es decir, en la línea de contacto. Los puntos de cuadratura nunca están en la superficie del elemento. Aunque se consiguiera colocar estos puntos cerca de la superficie y por lo tanto cerca de la línea de contacto de forma que sus valores fueran asimilables, surgiría la dificultad de encontrarse con que estos puntos no están uniformemente distribuidos, lo que hace que la distribución de fuerza fuera irregular.

La solución nodal no es tan precisa, ya que es una derivación de la solución dada en los elementos. El desplazamiento en los nodos se calcula hallando la media del desplazamiento correspondiente a cada elemento al que corresponde dicho nodo. Aunque no sean de precisión óptima, son bastante aceptables, y permiten mucha flexibilidad en colocación de los nodos dentro del elemento con lo que facilita mucho la obtención de los datos que interesan y de la forma en que interesan, además de conseguir una continuidad entre elementos contiguos.



**Figura 36** Dibujo en proyección diédrica del diente de engranaje y su conjugado, incluida sus líneas de contacto.

Un problema que pudiera surgir en este trabajo es la elección del elemento apropiado para la resolución del problema. En concreto se han usado elementos cúbicos de 8 nodos y de 24 grados de libertad. Las ventajas e inconvenientes del uso de cada uno de estos elementos se comentará cuando se discutan los resultados.



**Figura 37** Mallado de las caras de los dientes en contacto, con sus dimensiones características.

### Obtención de la matriz de desplazamientos por el Método de los Elementos Finitos

Con el método de los elementos finitos se ha podido obtener la matriz de desplazamientos a lo largo de la línea de contacto entre dos engranajes helicoidales. La cremallera en la que se ha comprobado el modelo ha consistido en un diente cuya planta y alzado se muestran en la Figura 36. El diente conjugado debe tener igual ángulo de presión  $\phi$ , y mismo ángulo de hélice  $\psi$  pero de signo contrario.

Al usar un método aproximado en el cálculo, como es el método de los elementos finitos, la matriz  $[C]$  de deformaciones no será completamente simétrica pues el modo de calcular  $c_{ij}$  se realizará por una ruta diferente a la usada para obtener  $c_{ji}$ . Un buen estimador de la precisión del método será la diferencia entre los dos valores más extremos expresados en porcentaje respecto al valor de uno de ellos.

El teorema de reciprocidad de Raleigh-Betti [79] no indica de por sí una cuantificación del error absoluto, lo único que indica es que un modelo es más perfecto que otro pero sin

referencia a la solución verdadera.

La línea de contacto está situada en la cara que forma un ángulo obtuso con la sección frontal en el diente cuando  $\psi_b$  es positivo, y en el conjugado en la cara que forma un ángulo agudo con la sección frontal. Las líneas de contacto, el mallado de la cara, y las cotas representativas, vienen mostrados en la Figura 36.

Para aplicar la técnica de las condiciones de Kuhn-Tucker, se ha planteado resolver el problema de calcular NN cargas puntuales a largo de la línea de contacto cuando dos dientes actúan uno sobre otro en la dirección normal a la superficie de ambos. De aquí se obtendrá la matriz de desplazamientos de cada uno de los dientes que sumados dará lugar a la matriz de desplazamientos del par [C].

Para ello se ha realizado el mallado cuya cara viene representado Figura 37. El procedimiento seguido por el programa de Método de los Elementos Finitos, ha consistido en resolver NN estados de carga, tantos como nodos se encuentran en la línea de contacto por cada uno de los modelos, el del diente y el de su conjugado. Se calculará el desplazamiento de los puntos de aplicación de la carga en la línea de contacto, al aplicar una carga unidad en uno de los nodos.

En el Apéndice se muestra el listado del código introducido en ANSYS, pero en este apartado sólo se realizará una descripción por encima de los pasos a seguir hasta obtener los datos que nos interesan en un fichero en formato ASCII, que sea tratable con un programa de ordenador. El código comienza por definir la geometría de la cremallera, junto con las propiedades del material, y el tipo de elemento que se va a utilizar. Para la definición de los elementos se han mallado las líneas y concatenado convenientemente para que en el mallado final todos los elementos sean del tipo y del tamaño deseado.

En la misma etapa de preproceso, se ha definido una componente que selecciona los nodos colocados sobre la línea de acción. La definición del componente se realiza, definiendo un sistema de coordenadas local cartesiano, cuyo eje OX coincide con la línea de acción, y el eje OZ es perpendicular a la cara de contacto. De esta forma se pueden seleccionar los nodos por localización, quedando todos uniformemente distribuidos, y se define un vector con la numeración de estos nodos. Esta es una forma fácil de incluir todos los estados de carga en un bucle una vez están dispuestos ordenadamente los nodos sobre los que se va a aplicar la carga.

La orientación del eje OZ del sistema de coordenadas local como perpendicular a la cara de la línea de contacto, tiene gran utilidad pues en ese sentido irán aplicadas las cargas, y en ese sentido se calcularán los desplazamientos de los puntos que interesan, pues las componentes de desplazamiento perpendiculares a la dirección de la carga no colaboran en

el aumento la energía del sistema.

En el estado de carga correspondiente a la aplicación de una carga unidad en el nodo  $i$ , se calcula el desplazamiento de todos los nodos en dirección  $OZ$ , obteniendo un vector que se corresponde con la columna  $i$  de la matriz de desplazamientos. Para obtener toda la matriz de desplazamientos se requieren  $NN$  estados de carga, y por lo tanto  $NN$  soluciones del sistema de ecuaciones formado, aunque la matriz de rigidez sólo se ha calculado una vez.

Idéntica metodología se realizará con el diente conjugado obteniendo su matriz de desplazamientos que se combinará con la del diente para obtener la distribución de fuerza a lo largo de la línea de contacto siguiendo la metodología antes señalada.

### **Ejemplos.**

Para apreciar la potencia de este método se van a presentar algunos ejemplos basados en el contacto entre dos dientes helicoidales, que se ha asemejado al contacto entre dos cremalleras oblicuas, según la Figura 36.

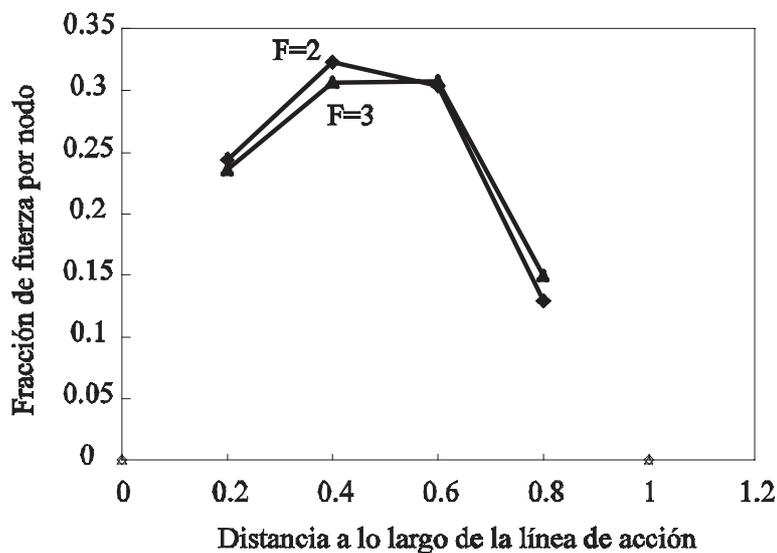
El modelo de carga se ha implementado sustituyendo la carga distribuida por una sucesión de cargas puntuales aplicadas solamente sobre los nodos que se encuentran en la línea de contacto. La geometría de ambas cremalleras se ha implementado dando a los parámetros de la Figura 36 los siguientes valores: anchura  $F=2$ , espesor en la base  $B=1$ , altura  $H=1$ , ángulo frontal de la cremallera  $\alpha=20^\circ$  y ángulo de hélice  $\beta=30^\circ$  que será de signo negativo en el diente conjugado. Los dientes y sus líneas de contacto se pueden observar en la Figura 36.

Se han resuelto 4 problemas de contacto entre pares de dientes con distintos parámetros, en todos ellos la línea de contacto, tiene la forma señalada en la Figura 37 con los valores de  $DF=0.7$ ,  $DH=0.7$ ,  $DHBB=.2$ ,  $H=HB=1$ . La particularidad que se le ha dado a cada modelo se muestra en la tabla I.

La modelización de los 3 primeros modelos se ha realizado sobre la base del elemento SOLID20 de 20 nodos, el cual tiene un nodo en los vértices y en el medio de cada una de las aristas. Esto permite un mallado de las caras como se observa en la Figura 37 en el que la línea de contacto pasa por los vértices y por el medio de las aristas de los elementos. Esta modelización lleva consigo el problema de que en las soluciones nodales el número de elementos a los que pertenece un nodo influye en sus resultados obtenidos de ellos. Así, la gráfica de distribución de carga a lo largo de la línea de contacto tiene una forma zigzag pues los distintos nodos están puestos de forma alterna. Esto ha obligado a escoger o bien

los nodos que pertenecen a 2 elementos o bien los que pertenecen a 4 elementos. En la Figura 38 y en la Figura 39 vienen representadas los resultados después de discriminar las cargas aplicadas en los vértices de los elementos. Con lo que sólo se han podido calcular 4 puntos a lo largo de la línea de engrane.

En gráficas que se observan en la Figura 38 y en la Figura 39 se ha comparado los resultados obtenidos por el modelo original y otro en el que se ha variado el ancho de cara en uno, y el ángulo de hélice en el otro. Se puede deducir a la vista de los resultados que la distribución de carga a lo largo del diente no es uniforme, como suponen las normas ISO y AGMA, y que el valor de la diferencia entre la fuerza máxima y la fuerza media, que es la que toman las normas, no es despreciable.

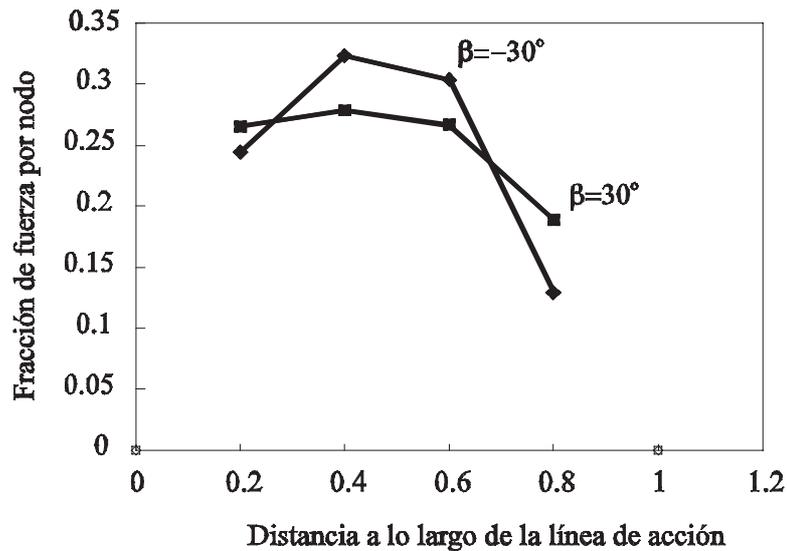


**Figura 38** Influencia del ancho del diente en la distribución de fuerza

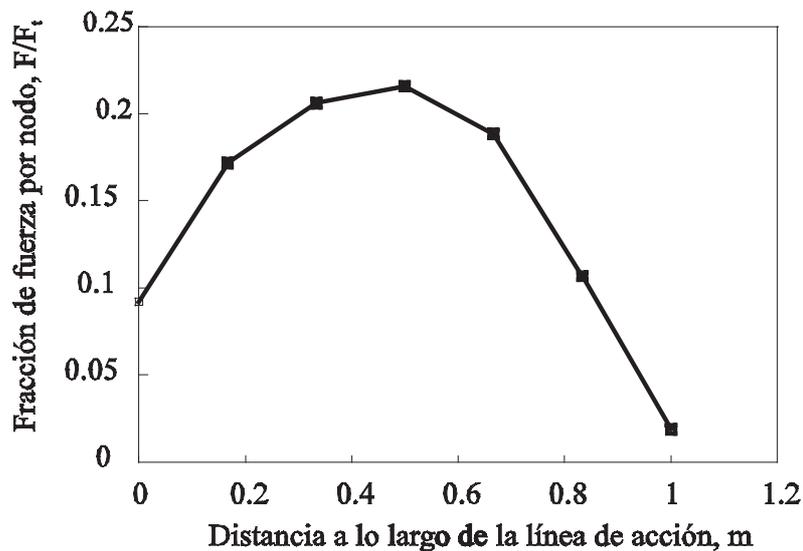
Respecto a la variación de factores podemos observar que influyen tanto el valor del ancho de cara como el ángulo de hélice: a menor ancho de cara, más distorsionado será el perfil. Y cuando el ángulo de hélice forma un ángulo agudo entre la línea de contacto y la sección frontal, la fuerza se concentra más en el centro.

Otra modelización por elementos finitos ha sido realizada cambiando el tipo de elemento, sustituyendo el cubo de 20 nodos del elemento SOLID20 por el de 8 nodos SOLID8 lo que permite elevar el número de elementos para representar el mismo modelo en la implantación del programa, y por lo tanto el número de discretizaciones de la carga. De este modo se han conseguido hasta 7 puntos de discretización lo que ha dado lugar a una gráfica como la mostrada en la Figura 40.

Como se puede observar en la Figura 40 en la que vienen representados los 7 puntos y la



**Figura 39** Influencia del ángulo de hélice en la distribución de fuerza



**Figura 40** Distribución de la carga tomando mayor número de elementos.

fuerza a que dio lugar el conjunto, la altura de la línea gráfica será la distribución de fuerzas y su área es la fuerza total que se le ha dado el valor de 1. Esta representación gráfica de la fuerza se puede observar que la fuerza máxima está alrededor del punto medio, y que su valor supera en un 50% el valor de la fuerza media. Resultados similares fueron obtenidos por Litvin [60] y Zhang [99], siguiendo un método numérico más complejo y laborioso.

### Conclusiones.

En secciones donde los desplazamientos deberían ser muy dependientes dado el poco ancho

de cara escogido  $F=2$ , la diferencia en la distribución de fuerza es grande, casi como si actuaran en realidad como secciones independientes.

El efecto que se produce en el borde en el que la fuerza no tiene la misma longitud que las demás fuerzas sino la mitad, se puede despreciar a medida que el número de puntos tomados en consideración aumenta, de modo que no afectan a las conclusiones alcanzadas en este trabajo.

### Hipótesis de secciones independientes

En lo que sigue se va a suponer que el diente helicoidal como una sucesión de secciones frontales cada una de las cuales sigue una ley de deformación plana según la viga en voladizo de sección variable. Es decir, el diente helicoidal es una sucesión de dientes rectos cuyo modelo de comportamiento vino descrito en el capítulo 3. Y se van a hacer las mismas hipótesis de entonces, es decir:

- El diente se supondrá empotrado en su base, y la carga aplicada en su eje, que coincide con la línea neutra.
- La sección del empotramiento es la definida por los puntos de tangencia del perfil del diente con la circunferencia de pie, a ambos lados del diente.
- La teoría de la viga elemental es aplicable pese a las pequeñas dimensiones del diente.

Se van a desarrollar dos métodos de cálculo que son equivalentes. El primero consiste en discretizar la línea de contacto total entre todos los dientes en secciones o rebanadas cuyo comportamiento elástico es de deformación plana. Para ello se van a aprovechar las rutinas de integración que se utilizaron entonces, y con los resultados se calculará la distribución de la carga mediante la aplicación de las condiciones de Kuhn-Tucker.

Para el segundo método se va a partir de la expresión de la deformada por flexión del diente recto proveniente de la sección frontal. Calculando la energía potencial y discretizando la integral se llegará a una expresión equivalente a la que se ha llegado por el primer método.

Finalmente, escogiendo el primer método se determinará la posición del punto crítico, el valor de la fuerza máxima, así como unas recomendaciones para el diseño de engranajes helicoidales a presión superficial.

Se parte de la hipótesis de que el desplazamiento de una sección es independiente de la contigua, es decir, no hay rigidez a torsión. Esta hipótesis permite realizar los cálculos de deformación del diente según la elasticidad plana, en secciones paralelas a la frontal del diente.

La primera forma de cálculo consistirá en calcular la matriz de deformaciones que será diagonal, al no depender unas secciones de otras. El proceso de obtención de la distribución de carga será similar al utilizado cuando se ha obtenido por el método de los elementos finitos. se formulará otra expresión totalmente analítica, si bien sólo válida para el contacto entre un par de dientes.

### **Método de cálculo por ordenador**

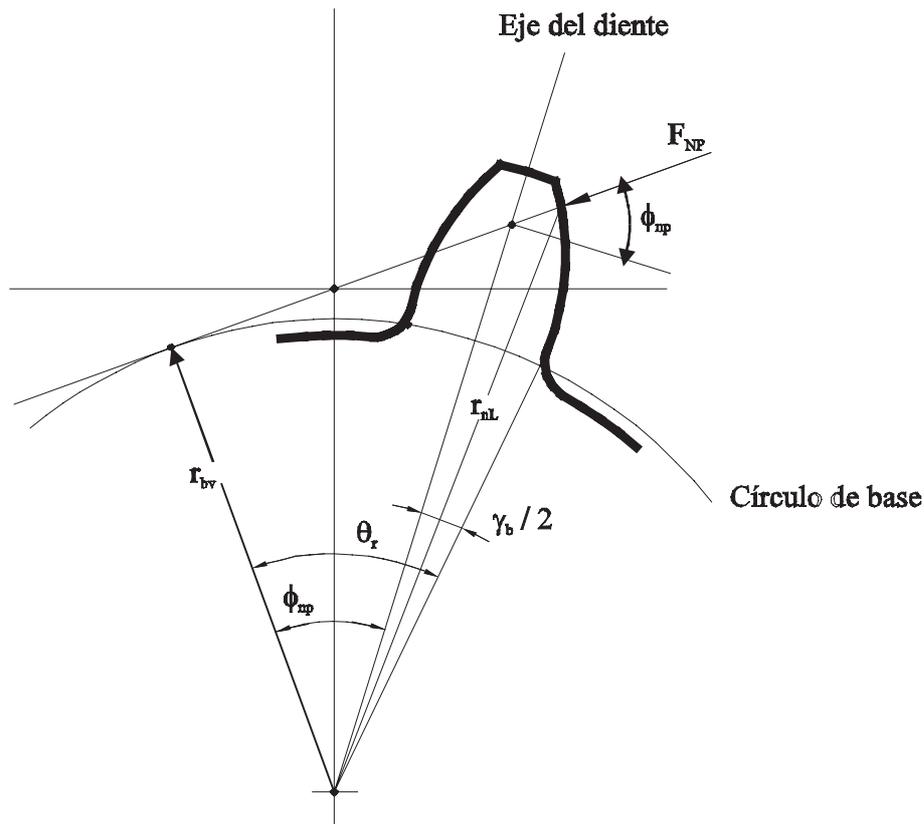
Aprovechando el programa utilizado para el cálculo de reparto de cargas en dientes helicoidales, se ha implementado un programa para resolución de la distribución de carga a lo largo de la línea de contacto entre engranajes helicoidales, suponiendo éstos como una continua sucesión de secciones frontales.

La sección frontal de un engranaje helicoidal se asemeja a un engranaje recto del cual se puede obtener la función polinómica de energía en función del radio al cual engrana. Utilizando esta función de energía se podrá obtener la distribución de fuerza entre los múltiples pares de dientes en contacto, generalizando el caso realizado para dos dientes rectos en contacto, desarrollado en un capítulo anterior.

### **Expresión analítica**

En el siguiente trabajo se va a suponer que los desplazamientos del diente se deben únicamente a la flexión, despreciando de esta manera las debidas al cortante y a la compresión. La nomenclatura usada viene descrita en la Figura 41. De este modo la energía de deformación será:

$$\tau = \int_{b_1}^{b_2} \frac{M^2}{2EI} dx \quad (203)$$



**Figura 41** Aplicación de la fuerza sobre sección frontal del engranaje

de la Figura 41 se deduce que:

$$F_x = F_n \cos \phi_L = \frac{r_b}{r_L} F_n \quad (204)$$

en donde  $F_x$  es la proyección de la fuerza  $F_N$  sobre la perpendicular al eje del diente.

El momento de flexión del diente será:

$$M(r) = F_x (r_l - r) = \frac{r_b}{r_L} (r_l - r) F_n \quad (205)$$

Y el momento de inercia de la sección rectangular en la base del diente será:

$$I = \frac{1}{12} b (r \gamma_r)^3 \quad (206)$$

de donde se puede obtener lo necesario para desarrollar la función potencial.

Expresiones para expresar los términos de la integral de forma más usual se pueden obtener de la Figura 41.

El radio de base se puede relacionar con los ángulos de la siguiente manera:

$$r_b = r_L \cos\left(\frac{\gamma_L}{2} + \phi_L\right) \quad (207)$$

El ángulo de presión de la fuerza viene dado por:

$$\phi_L = \arccos\left(\frac{r_b}{r_L}\right) - \frac{\gamma_L}{2} = \sqrt{\frac{r_L^2}{r_b^2} - 1} - \frac{\gamma_b}{2} \quad (208)$$

El espesor del diente a un radio  $r$  cualquiera:

$$\gamma_b = \frac{\pi}{Z} + \frac{4x}{Z} \operatorname{tg} \phi_h + 2(\operatorname{tg} \phi_f - \phi_f) \quad (209)$$

por lo que para un  $r_L$  determinado se obtendrá un espesor:

$$\gamma_r = \gamma_b - 2\left(\sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1}\right) \quad (210)$$

El radio de aplicación de la carga en el eje del diente será:

$$\gamma_L = \gamma_b - 2\left(\sqrt{\frac{r_L^2}{r_b^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_L^2}{r_b^2} - 1}\right) \quad (211)$$

Y la distancia de la intersección de la línea de acción con el eje del diente al centro de la rueda será:

$$r_l = \frac{r_b}{\cos \phi_L} \quad (212)$$

sustituyendo todas estas expresiones se puede obtener una expresión integral de la energía

de deformación del diente.

$$\tau = \int \frac{\frac{r_b^2}{r_L^2} (r_l - r)^2 F_n^2}{b_1 2E \frac{1}{12} b (r \gamma_r)^3} dr \quad (213)$$

Si se sacan fuera de la integral los términos independientes quede:

$$\tau = 6 \frac{r_b^2 F_n^2}{r_L^2 E b} \int_{r_d}^{r_l} \frac{(r_l - r)}{r^3 \gamma_r^3} dr \quad (214)$$

si  $f(b)$  es la función continua de distribución de carga a lo largo de la línea de contacto entre los engranajes helicoidales en función de la distancia a la sección frontal obtenemos que:

$$dF_n = f(b) db \quad (215)$$

con lo que la función potencial entre dos dientes  $\tau$  queda:

$$\tau = \frac{6 r_b^2 b_2}{E b_1} \int f^2(b) \left[ \frac{1}{r_L^2(b)} \int_{r_d}^{r_l(b)} \frac{(r_l(b) - r)^2}{r^3 \gamma_r^3} dr \right] db \quad (216)$$

la expresión queda más simplificada si se realiza la siguiente sustitución:

$$\phi(b) = \frac{1}{r_L^2(b)} \int_{r_d}^{r_l(b)} \frac{(r_l(b) - r)^2}{r^3 \gamma_r^3} dr \quad (217)$$

de donde:

$$\tau = \frac{6 r_b^2 b_2}{6 b_1} \int f^2(b) \phi(b) db \quad (218)$$

esto daría la energía potencial de deformación de un diente, la energía potencial del contacto será igual a la suma de los dos dientes siendo  $f(b)$  la misma para ambos, con lo

que quedaría:

$$\tau_T = \frac{6}{E} \int_{b_1}^{b_2} f^2(b) [r_{b1}^2 \phi_1(b) + r_{b2}^2 \phi_2(b)] db \quad (219)$$

El problema consistiría en hacer esta expresión mínima sujetándola a las condiciones:

$$f(b) > 0 \quad ; \quad \int_{b_1}^{b_2} f(b) db = F \quad (220)$$

### Resolución analítica

Para la resolución del problema se acude al método de los multiplicadores de Lagrange para lo cual se define la función:

$$\xi = \int_{b_1}^{b_2} f^2(b) \phi_T(b) db + \lambda \int_{b_1}^{b_2} f(b) db - \lambda F \quad (221)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial f} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = 0 \quad (222)$$

de la primera derivada se obtiene:

$$f(b) = \frac{-\lambda}{2 \phi_T(b)} \quad (223)$$

y sustituyendo en la segunda restricción del problema se obtiene:

$$\lambda = \frac{-2F}{\int_{b_1}^{b_2} \frac{db}{\phi_T(b)}} \quad (224)$$

con lo que ya se puede calcular  $f(b)$ .

$r_L$  se puede obtener en función de  $b$  por la relación:

$$\sqrt{r_{L2}^2 - r_b^2} - \sqrt{r_{L1}^2 - r_b^2} = \Delta b \operatorname{tg} \psi_b \quad (225)$$

Aplicando estas expresiones para el cálculo en engranajes rectos de la distribución de la fuerza, la fuerza que actúa sobre el diente ya no es función del radio, pues la línea de contacto está toda a la misma distancia del eje del piñón por lo que si se operara, el hacer la energía mínima equivale a hacer mínima la expresión:

$$\int_{b_1}^{b_2} f(b) db \quad (226)$$

que junto con la misma restricción de fuerza total constante, resulta que  $f(b)$  será constante, pues la integral a minimizar no es mas que la varianza de una función.

### Resolución discretizada

Otra posibilidad para resolver el problema es mediante haciendo uso de las condiciones de Kuhn-Tucker aplicado en el capítulo anterior.

La Ecuación (218) se puede reescribir de forma discretizada haciendo:

$$\tau = 6 \int_{b_1}^{b_2} f(b)^2 P(b) db \approx 6 \sum_i f_i^2 P_i \Delta b \quad (227)$$

Expresión que es resoluble de manera similar al caso resuelto anteriormente, sólo que al ser las secciones independientes entre sí la matriz de coeficientes de desplazamientos es diagonal por lo que su formación es mucho más sencilla.

### Programa para la determinación de fuerzas en secciones independientes

En las siguientes páginas se describirá un programa de ordenador que implementa las hipótesis que se han visto al aplicar las condiciones de Kuhn-Tucker suponiendo secciones independientes.

Se han aprovechado las rutinas utilizadas para el cálculo del reparto de carga entre dientes

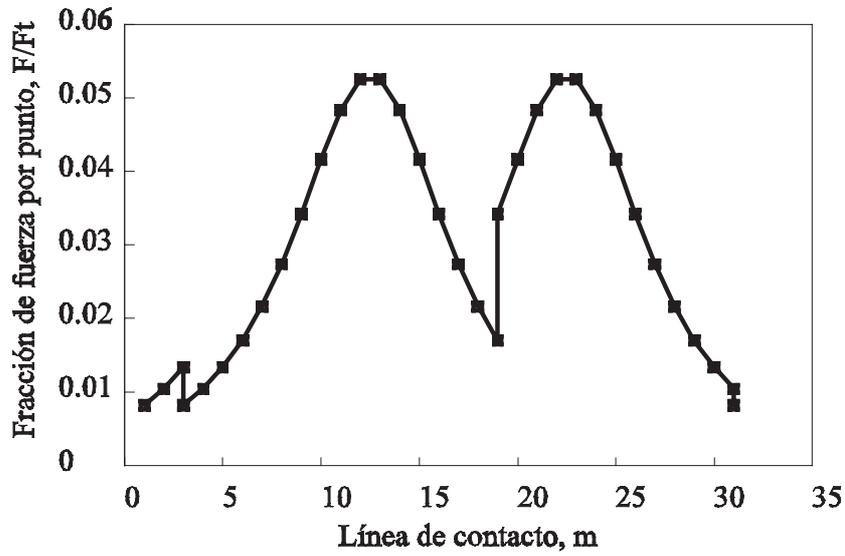
rectos, para calcular las rigideces de las secciones frontales de los dientes helicoidales. Los resultados mostrados en este trabajo provienen de los siguientes pasos realizados por el programa:

1. Una vez definido el problema con unos parámetros de diseño dados, se dibujan las líneas de contacto determinando los puntos inicial y final de cada una. El rectángulo de contacto se podrá trasladar, de forma que se pueda tomar como parámetro de análisis el ángulo de giro no teniendo que coincidir éste con el de longitud mínima que es el tomado por las normas AGMA e ISO.
2. Aprovechando las rutinas utilizadas en el cálculo de la energía de deformación de los dientes rectos, se calcula la energía de deformación de las secciones frontales en función de la coordenada  $x$  frontal del plano de contacto.
3. Se discretiza la línea de acción frontal en 20 intervalos iguales, y se construye una tabla con los pares: coordenada  $x_i$  y la energía de deformación en cada uno de los puntos de discretización.
4. Se construye una matriz en la cual las columnas son cada uno de los pares de dientes en contacto. Las filas son las alturas en  $x_i$  resultantes de la discretización. El valor del elemento de la matriz será la rigidez de deformación a una altura  $x_i$  si está dentro del plano de contacto.
5. Una vez construida la matriz se tienen los elementos para la matriz de inversión Kuhn-Tucker. Se colocará el doble del valor de la energía de deformación de forma correlativa en la diagonal completando el resto de elementos con 0, 1 y -1 donde corresponda.
6. Para la obtención de resultados se representa en abscisas la longitud de contacto. Las ordenadas se dividen en tramos en las discontinuidades correspondientes a los distintos pares de dientes en contacto. El área debajo de la línea será igual a 1 que es la fuerza total aplicada en los casos estudiados.

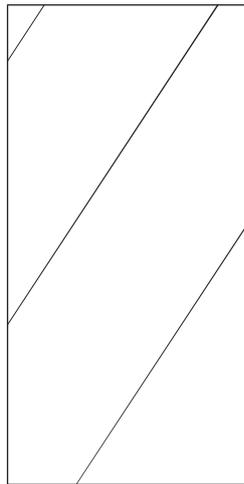
#### Ejemplos:

Se representan a continuación las gráficas de las líneas de contacto y distribución de fuerzas para el caso del engrane entre dos engranajes cilíndricos helicoidales. El primer caso es de longitud mínima de contacto la cual ocurre desde justo antes de que un par de dientes entren en contacto hasta que el par de dientes más alejado deja de estar en contacto. A este caso corresponden la Figura 42 y la Figura 43. En el segundo caso muestra cuando ya lleva avanzado a la entrada una fracción de paso de  $x_f=0.25$  en el cual empieza a no

estar en la longitud mínima de contacto. El reparto de carga en este caso viene representado gráficamente por la Figura 44.



**Figura 42** Distribución de fuerza a lo largo de la línea de contacto cuando  $x=0$

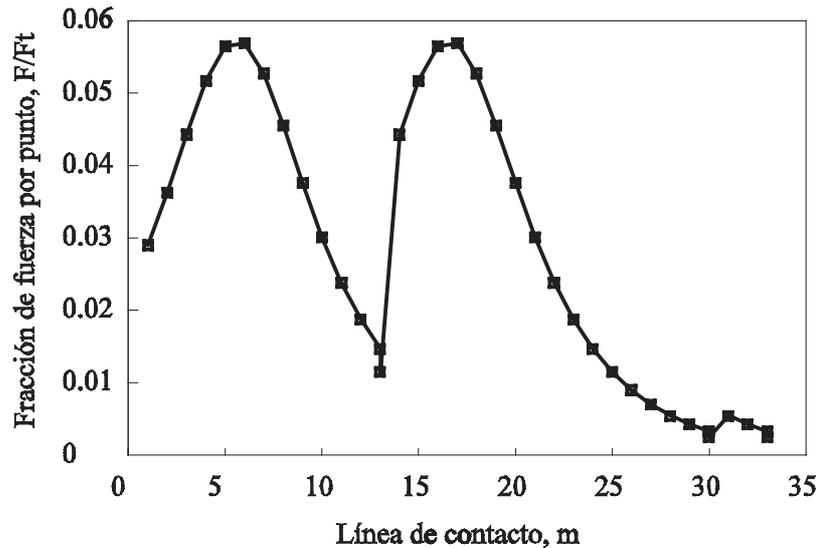


**Figura 43** Líneas de contacto para el caso estudiado cuando  $x=0$

Se observa que la fuerza máxima entre los dientes es mayor en este caso que en el de longitud mínima de contacto, debido a que el estado energético de los dientes lo favorece.

### **Evolución de la carga con el avance**

Se ha realizado un estudio en el que se ha tratado de averiguar cómo evoluciona el máximo



**Figura 44** Distribución de fuerzas para  $x=0.25$

de la fuerza con el avance, con el objetivo de establecer un criterio de diseño a la hora de determinar la fuerza máxima superficial a la que puede estar sometida la zona de contacto entre dos dientes. Para ello se han realizado los cálculos para la determinación de la relación entre la fuerza máxima obtenida y la fuerza de diseño de la norma AGMA, se han realizado para distintos avances de fracciones de paso, entre 0 y 1. Cuando el avance es el paso entero, la situación se vuelve a repetir por lo que el estudio de este intervalo marca la evolución completa de la fuerza máxima a lo largo de todo el engrane.

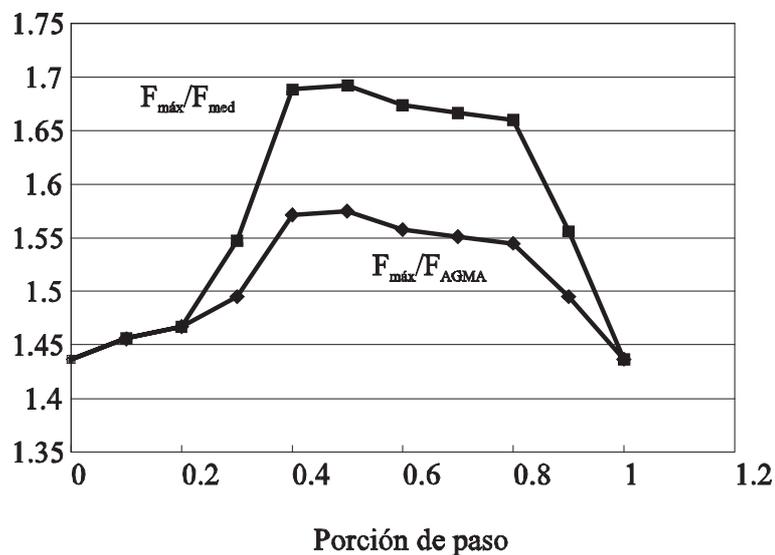
Para el caso de engrane entre dientes con los parámetros que se muestran en la Tabla I, se ha realizado un estudio de la evolución de la longitud de contacto, la fuerza máxima de contacto sabiendo que la fuerza total a repartir es de  $F=1$ , y su relación con la fuerza media, y la fuerza que la norma AGMA proporciona para este caso.

Como se puede observar en la Figura 45 se puede ver que las relaciones de la fuerza máxima con la fuerza media y con la fuerza de la norma AGMA coinciden en el primer tramo de la gráfica. Esto es debido a que la fuerza proporcionada por el método de la norma AGMA es la fuerza media cuando actúa a lo largo del tramo de longitud mínima de contacto. Después se distancian las dos gráficas ya que la fuerza media disminuye al disponer de mayor longitud de contacto.

El valor máximo de la fuerza se ha obtenido en el caso de un avance de 0.5 veces el paso, se puede observar la causa de esta situación en la forma de la representación de la distribución de fuerza en la Figura 46. A la vista de la gráfica es fácil deducir que el valor alto de la fuerza máxima se produce al ser soportada la mayor parte de la carga por un sólo diente, mientras que en el caso anterior había dos dientes que soportaban la carga.

**Tabla I** Parámetros de diseño de la transmisión en el análisis de tensiones independientes.

RUEDA A		RUEDA B		TALLADO	
$z_1$	40	$z_2$	40	paso	10,995
$F_1$	40	$F_2$	40	módulo	3,5
$x_1$	0	$x_2$	0	$\phi_h$ (rad)	0,3490
$r_{a1}$	84,32	$r_{a2}$	84,32	adendo	1
				dedendo	1,25
				$r_f$	0,3
				$\psi$ (rad)	0,5235

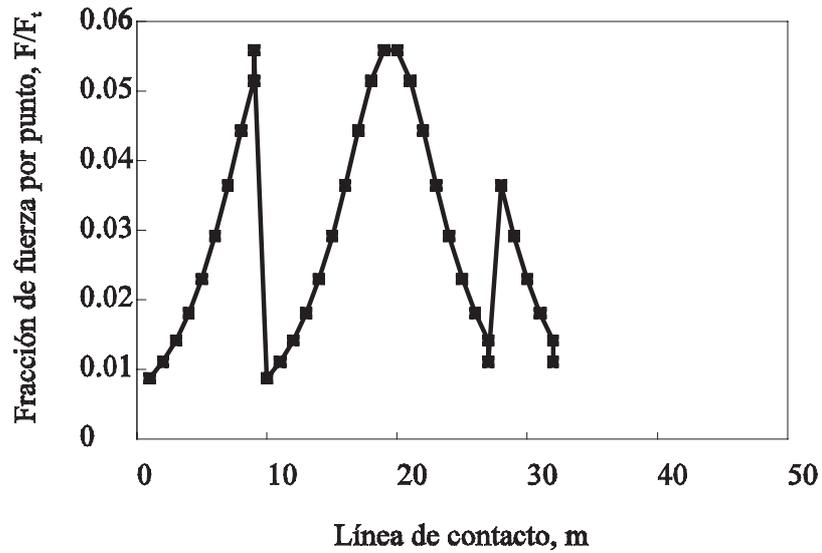


**Figura 45** Evolución de la relación entre la fuerza máxima que actúa sobre la superficie de contacto y la fuerza media y de la norma AGMA.

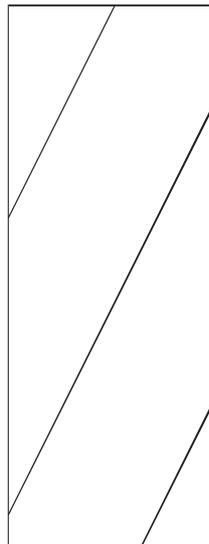
En la se puede observar que mientras en el diente central la línea de contacto recorre desde el radio de contacto único inferior hasta el radio de cabeza, en los otros dos dientes el contacto se produce en zonas de baja energía.

### Conclusiones

De acuerdo con los resultados vistos se puede deducir que la fuerza máxima superficial se localiza en alrededor del radio medio de contacto de la norma AGMA y que no tiene porqué ocurrir durante el tramo de longitud mínima de contacto, sino más bien en el tramo



**Figura 46** Distribución de fuerza cuando  $x_f=0.5$



**Figura 47** Líneas de contacto en la zona de mayor fuerza superficial.

donde mayor número de dientes trabajan efectivamente.

En los casos estudiados se puede establecer un valor de diseño a fallo superficial de alrededor de 1.5 veces el valor dado por la AGMA.

**Localización del radio donde actúa la fuerza máxima.**

Ya se ha determinado en el apartado anterior el método para la determinación de la fuerza máxima que actúa sobre dos dientes en contacto, y se ha observado que ésta no se produce en los extremos sino más bien en un punto cercano al radio primitivo.

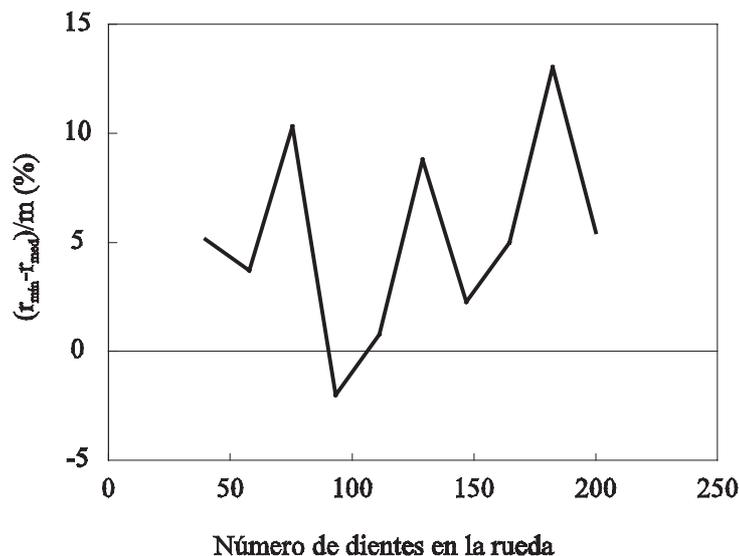
En el estudio del reparto de carga entre dientes rectos se señaló un método para calcular la energía potencial unitaria en el contacto entre dos pares de dientes. Esta energía se expresó mediante una función polinómica a partir de unos valores discretos tomados a lo largo de toda la línea de engrane.

Cuando se suponen secciones independientes en el reparto de carga, tal como se ha hecho en esta investigación, es fácil deducir que el máximo de la fuerza aplicada se produce en el punto donde la energía de contacto es máxima, de donde se pueda intuir el concepto de radio medio que es el que toma la norma AGMA cuando el grado de recubrimiento total entre engranajes es mayor de dos.

La función de energía se obtiene fácilmente arreglando lo realizado para engranajes rectos sólo que tomando la sección frontal de los engranajes helicoidales, la cual se obtiene a partir del ángulo de hélice de tallado.

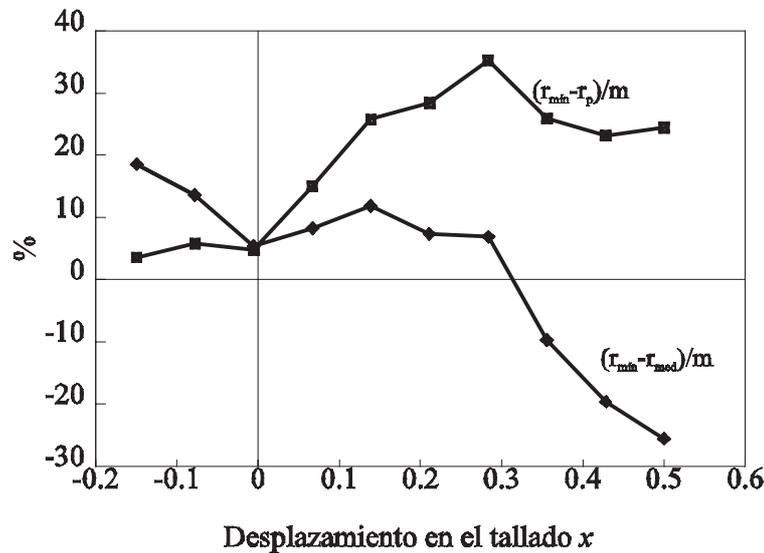
Se ha calculado el valor del radio de máxima fuerza haciendo nula la derivada de la función de energía por el método de Newton-Raphson. Se ha estudiado su valor conforme evoluciona el número de dientes, el desplazamiento, la distancia entre centros y el ángulo de hélice, y se ha comparado con el valor del radio medio de la norma AGMA y el radio de rodadura de la norma ISO, estableciendo de este modo el grado de exactitud de las normas.

Los valores de diseño de partida vienen dados en la Tabla I, y los resultados de los análisis vienen dados por las gráficas de las figuras mostradas en las siguientes páginas.



**Figura 48** Variación de la diferencia entre el radio de mínima energía y el radio primitivo relativa al módulo, cuando varía el número de dientes de la rueda.

En la Figura 48 se puede observar que la diferencia entre el radio de mínima energía y el radio primitivo que coincide con el radio medio y el radio de rodadura, es muy pequeña. Prácticamente despreciable, de aquí se deduce que los picos son expresión de la aleatoriedad de los cálculos cuando el número de dientes aumenta, manteniéndose, sin embargo, dentro de los límites en los que se puede despreciar la diferencia.



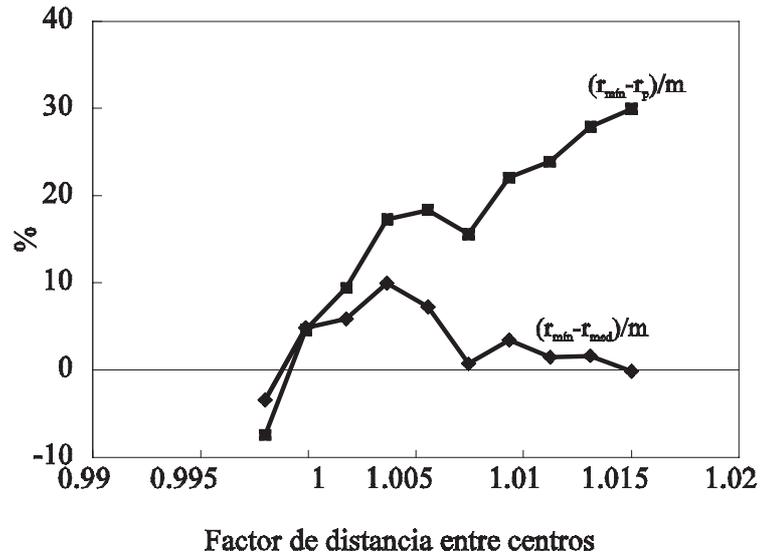
**Figura 49** Variación del radio de mínima energía con el coeficiente de desplazamiento en el tallado.

En la Figura 49 se muestra la diferencia entre el radio de energía mínima y los radios de rodadura (que coincide con el radio primitivo), y los radios medios. Se puede observar que el valor del radio medio se aproxima al radio de energía mínima, para desplazamientos moderados y positivos, mientras que para desplazamientos negativos o muy altos pueden ser incluso desaconsejable, en estos casos el radio de energía mínima se encontraría entre el radio medio y el radio de rodadura.

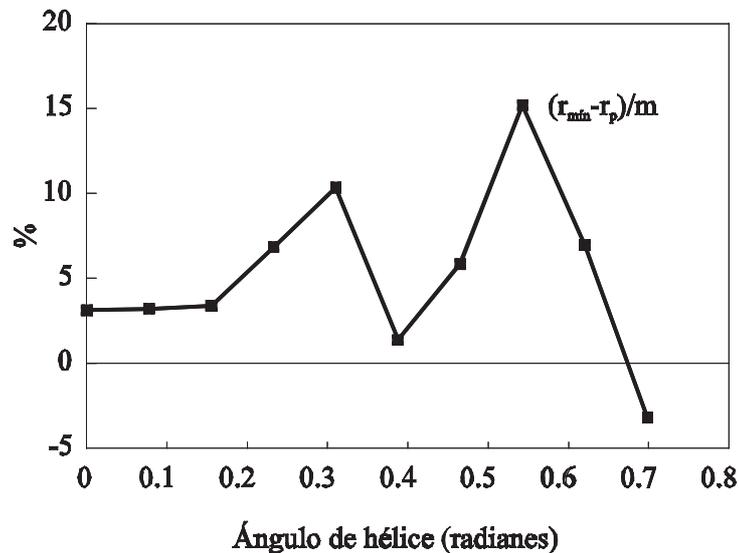
En el estudio de la variación de la localización del radio de mínima energía con la variación entre centros se observa que el radio medio y el radio de rodadura coinciden, y su valor se aproxima al valor del radio de mínima energía, como se puede observar en la Figura 50. De aquí se puede deducir que el concepto de radio medio ha sido obtenido del cálculo del radio de rodadura cuando varía la distancia entre centros.

En cuanto a la influencia del ángulo de hélice, es fácil intuir que al suponer secciones independientes, éste solo afectará a la geometría del perfil de forma que se puede asimilar a la de un diente recto que se hubiera tallado con una cremallera con distinto ángulo de presión. Los resultados de este análisis se pueden observar en la Figura 51.

En este caso vuelven a coincidir los valores del radio primitivo, el radio de rodadura y el



**Figura 50** Variación del radio de mínima energía con la distancia entre centros



**Figura 51** Variación del radio de mínima energía con el ángulo de hélice en el tallado.

radio medio. Como se ha visto en el caso de la variación del número de dientes de la rueda, la diferencia es muy pequeña para ángulos de hélice nulos, haciéndose más grandes con picos para ángulos de hasta 45°. La aleatoriedad a partir de un ángulo de hélice no está bien explicada pero se supone que es debido al método numérico utilizado.

### Tensiones de Hertz a lo largo de la línea de contacto

Se ha estudiado en el apartado anterior el punto crítico de fallo sobre la base de la distribución de fuerza, toca ahora comprobar que la tensión máxima subsuperficial corresponde con el máximo de la fuerza. Para ello se representará sobre un ejemplo sencillo

la diferencia entre tomar un punto en el que la fuerza aplicada es máxima y el punto donde la tensión tangencial subsuperficial es también máxima. Si los puntos son muy parecidos se tomarán como válidas las suposiciones anteriores.

Hay que tener en cuenta que la diferencia entre las dos magnitudes anteriores viene dada únicamente por el radio de curvatura equivalente el cual determina junto con la fuerza por unidad de longitud y las constantes elástica del material, el semiancho de contacto, el mapa tensional subsuperficial y la tensión máxima subsuperficial.

En el capítulo V.2 se evalúa la influencia de los radios de curvatura en la distribución de fuerza final bajo diferentes hipótesis. Como se verá en la Figura 65, la influencia de los radios equivalentes de curvatura es muy pequeña respecto a la variación de distribución de fuerza aplicada, mientras en la zona central (zona de estudio) la variación de la tensión por el radio de cilindro equivalente no llega al 10% mientras que el máximo de la fuerza aplicada llega sobrepasa el 50% de la fuerza media.

El procedimiento que se va a seguir se va a realizar en torno a la función de interpolación de energía el cual determina la diferencia porcentual entre las fuerzas soportadas por dos puntos de la línea de contacto.

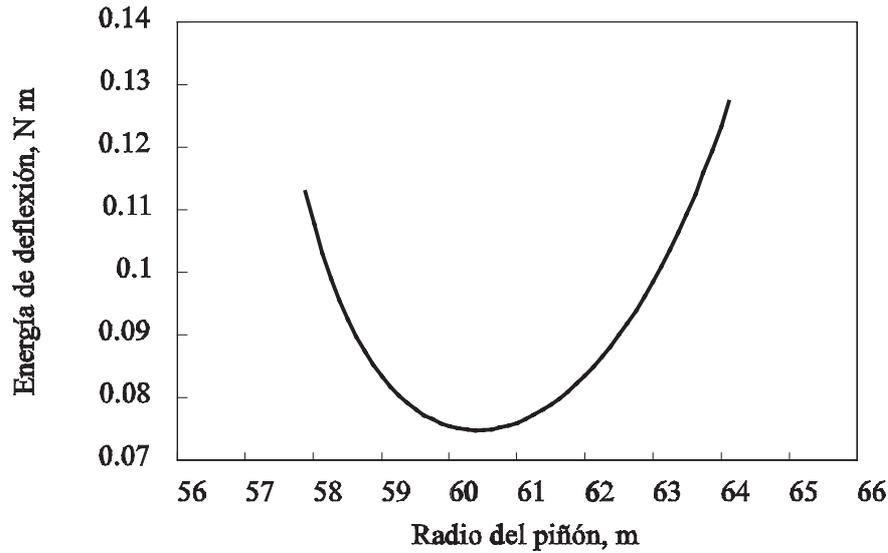
### **Función de interpolación de energía**

Suponemos una transmisión de piñón a rueda de módulo 3.5, n° de dientes 40 tanto para el piñón como para la rueda.

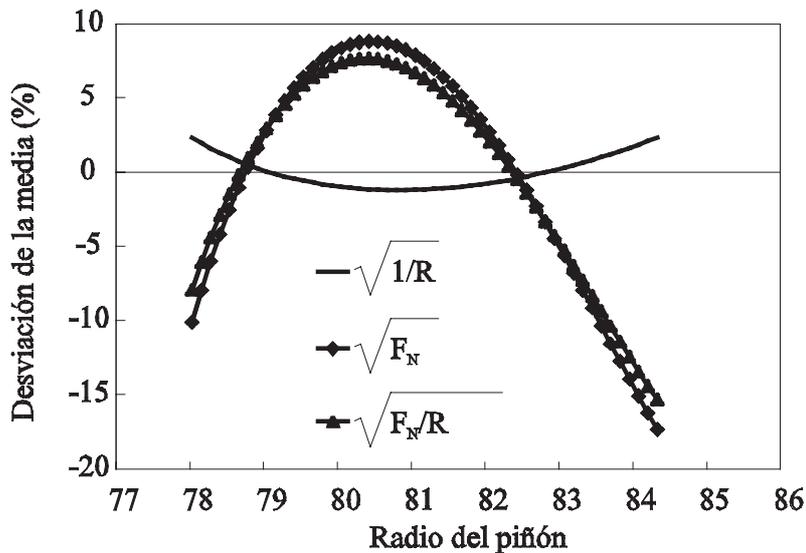
La función de energía de deformación viene dado por la gráfica de la Figura 52 en la que se ha calculado el mínimo que es el radio de energía mínima de deformación.

Se ha calculado igualmente la variación porcentual del valor de la distribución de fuerza a lo largo de una línea de contacto y del valor de la raíz cuadrada de la inversa del radio de curvatura equivalente que es de lo que depende a máxima tensión subsuperficial en cuanto al radio. Se puede ver que la desviación típica de los valores de la fuerza es de 7.77% mientras que la desviación de los valores de la tensión máxima subsuperficial es apenas 1.09%.

En la Figura 53 se puede observar que el radio de curvatura influye muy poco en la distribución de fuerza a lo largo de la línea de contacto. Disminuyendo el pico de tensión tangencial en apenas un 12%. Sin embargo, lo que no ha cambiado prácticamente es la localización del punto crítico.



**Figura 52** Variación de la energía de deformación con el radio de piñón



**Figura 53** Influencia del radio de curvatura en la distribución de fuerza

Para la presentación gráfica se han representado 50 puntos de la línea de contacto y el máximo de la tensión tangencial coincide con el máximo de la distribución de fuerza.

El máximo radio de curvatura equivalente para el cual ocurre el mínimo de esfuerzo tangencial, ocurre en la mitad de la línea de acción en donde los radios de curvatura de ambos perfiles son iguales. Y como se ha visto anteriormente el punto de máxima fuerza aplicada se encuentra en un punto cercano al radio medio del piñón.

Como ambos puntos están cercanos uno del otro, se puede establecer sin miedo a cometer un error grave, que el punto crítico a fallo superficial se encuentra en el punto de mayor fuerza entre los puntos.

A la hora de valorar el criterio de fallo, el despreciar el efecto que el radio de curvatura tiene sobre la tensión tangencial máxima, es ponerse del lado de la seguridad además de simplificar los cálculos considerablemente.

## **Conclusiones**

Se pueden establecer unas curiosas conclusiones respecto a este último estudio, entre las que cabe destacar las siguientes:

- El radio medio de la norma AGMA coincide con el radio de rodadura en los diseños normales, y cuando varía la distancia entre centros, con lo que en estos caso las normas ISO y AGMA coinciden en cuanto a la localización del punto crítico de diseño, aunque no así respecto a su valor ya que difieren en el cálculo de la longitud mínima de contacto.
- El radio medio de contacto es un buen estimador del punto crítico para condiciones normales, variación de la distancia entre centros, y para desplazamientos positivos moderados.
- Se ha presentado un método para la determinación del radio de mínima energía de contacto. En este punto se produce la máxima fuerza de contacto entre dientes helicoidales suponiendo que las discretizaciones a lo largo del ancho se comportan de modo independiente, tal como se dedujo en el capítulos de análisis por el Método de los Elementos Finitos. Se ha comparado con los valores dados por las normas ISO y AGMA.
- Se ha valorado la influencia de la variación del radio de curvatura equivalente sobre la tensión tangencial máxima, observando que influye muy poco respecto a la distribución de fuerza. Valorándose de modo válido el tomar la distribución de fuerza para localizar el punto crítico.

## **IV.3 Recapitulación**

En el primer apartado se presenta un método para evaluar el reparto de carga entre dientes en cualquier punto del intervalo de carga compartida de un engranaje recto. El método está basado en el criterio de mínimo potencial de deformación, cuya obtención se lleva a cabo mediante la aplicación del método de los multiplicadores de Lagrange a la función

potencial, calculada, en cada punto, a partir de la geometría de los dientes. La distribución de carga así obtenida, en cada punto de la línea de engrane, resulta ser sensiblemente parecida a la que la norma AGMA adopta, sin presentar justificación alguna, para el estudio de la lubricación de perfiles no modificados.

Dicha distribución de carga se ha aplicado al modelo de Hertz para evaluar la presión de contacto en todo el intervalo de engrane, resultando que la predicción de la presión crítica por este procedimiento es mucho más parecida a la que hacen las normas internacionales —especialmente AGMA— que la que se obtendría de aplicar directamente el modelo de la propia norma, pero a todo el intervalo, no sólo al punto que ésta sugiere.

Finalmente, se ha realizado un análisis de variación de la presión de contacto con diferentes variables de diseño, encontrándose que, pese a que la predicción de las normas y la que se deriva del modelo desarrollado son coincidentes en la mayor parte de los casos, sigue siendo posible encontrar situaciones en que la presión crítica se presente en puntos diferentes de los sugeridos por las normas, como es el punto de finalización de engrane del piñón, cuando la distancia entre centros se acorta, o el punto de contacto único superior, cuando el desplazamiento aumenta.

En el segundo apartado se ha estudiado el reparto de carga entre dientes helicoidales. Se ha comenzado por analizar el contacto entre los dientes, pues variando la geometría varían las condiciones de contacto, estableciendo una primera aproximación de acercamiento constante entre los puntos alejados de la zona de contacto. A continuación se ha realizado el análisis desde el punto de vista estructural, desarrollando un método para el cálculo de la distribución de fuerzas, basado en las condiciones de Kuhn Tucker y en los multiplicadores de Lagrange. Este método necesita las rigideces específicas de los puntos de contacto, para lo cual se ha utilizado el método de los elementos finitos (FEM). Y por último se ha simplificado la metodología haciendo la hipótesis (fundada en los resultados del FEM) de secciones independientes de contacto.

Respecto al análisis del contacto se han desarrollado tres modelos de distribución de carga, basados en distintas hipótesis de contacto. Como se ha podido observar en las gráficas, el tomar un modelo u otro influye en la distribución de fuerzas a lo largo de la línea de contacto, aunque el máximo de la presión de Hertz sigue situándose en los extremos de la línea de contacto donde los radios de curvatura son más diferentes. Tomando el modelo de "igual coordenada X" la diferencia de tensiones a lo largo de la línea de engrane se suaviza, mientras que usando el modelo de "igual arco" la diferencia es resaltada, aunque muy ligeramente.

Las normas de diseño de engranajes ISO y AGMA toman, sin embargo, como punto crítico la tensión en el punto de rodadura o en el radio medio, que están muy próximos a donde

los radios de curvatura más se parecen. Este punto es el que tiene el radio de cilindro equivalente mínimo. Las normas son más conservadoras al establecer tensión crítica de fallo la presión máxima de Hertz, mientras que la máxima tensión equivalente dada por el mapa tensional es 0.3 veces ese valor. Se tendrá que recurrir a otros criterios para modelizar el contacto con los que compensar estos efectos y por lo tanto estimar la tensión de fallo a lo largo de toda la línea de contacto.

Para encontrar la solución a estas incongruencias desde el punto de vista del contacto, se ha desarrollado un método para calcular la distribución de fuerza a lo largo de la línea de contacto entre dos engranajes helicoidales. Este cálculo se ha realizado minimizando la energía elástica mediante las condiciones de Kuhn-Tucker y los multiplicadores de Lagrange. Para el cálculo de la energía de deformación se necesita las matrices de deformación, las cuales se han obtenido mediante la técnica de los elementos finitos.

En las soluciones obtenidas por FEM se ha observado que la forma de la distribución de fuerzas es prácticamente igual a si se supusiera el diente como una serie de rebanadas unas independientes de otras. Este hecho permite establecer la hipótesis de secciones independientes, lo cual facilita mucho el cálculo de desplazamientos al tratar un problema bidimensional y existir métodos alternativos al FEM para este fin. También se ha podido establecer que los efectos de borde se pueden despreciar a partir de un número relativamente pequeño de puntos de discretización.

Como método alternativo al FEM se ha desarrollado un método cuyo desarrollo analítico despreciando en este caso la deformación por cortante. Este método es inválido ya que son muchos los casos donde la deformación por esfuerzo cortante no es despreciable, por lo que al final se ha calculado de forma numérica la deformación de cada una de las secciones independientes.

De acuerdo con los resultados vistos bajo la suposición de secciones independientes, se puede deducir que la fuerza máxima superficial se localiza alrededor del radio medio de contacto de la norma AGMA y que no tiene porqué ocurrir durante el tramo de longitud mínima de contacto, sino más bien en el tramo donde mayor número de dientes trabajan efectivamente.

En los casos estudiados se puede establecer un valor de diseño a fallo superficial de alrededor de 1.5 veces el valor dado por la AGMA.

Por último se ha realizado un estudio sobre la localización del máximo de fuerza, de donde se pueden establecer unas curiosas conclusiones entre las que cabe destacar las siguientes:

- El radio medio de la norma AGMA coincide con el radio de rodadura en los

diseños normales, y cuando varía la distancia entre centros, con lo que en estos caso las normas ISO y AGMA coinciden en cuanto a la localización del punto crítico de diseño, aunque no así respecto a su valor ya que difieren en el cálculo de la longitud mínima de contacto.

- El radio medio de contacto es un buen estimador del punto crítico para condiciones normales, variación de la distancia entre centros, y para desplazamientos positivos moderados.
- Se ha presentado un método para la determinación del radio de mínima energía de contacto. En este punto se produce la máxima fuerza de contacto entre dientes helicoidales suponiendo que las discretizaciones a lo largo del ancho se comportan de modo independiente, tal como se dedujo en el capítulo IV.2 de análisis por el Método de los Elementos Finitos. Se ha comparado con los valores dados por las normas ISO y AGMA.
- Se ha valorado la influencia de la variación del radio de curvatura equivalente sobre la tensión tangencial máxima, observando que influye muy poco respecto a la distribución de fuerza. Valorándose de modo válido el tomar la distribución de fuerza para localizar el punto crítico.

# V LUBRICACIÓN Y MECÁNICA DEL CONTACTO

Después del estudio del reparto de carga, se va a desarrollar en este capítulo el modelo de contacto. Para el estudio de un punto en particular del engrane se necesita de los datos obtenidos en los capítulos anteriores de geometría (radios de curvatura de perfiles), cinemática (velocidades de deslizamiento y elastohidrodinámica), y dinámica (fuerza que actúa entre las dos superficies).

Primeramente se va a modelizar el fenómeno de la lubricación, del cual se obtendrá el perfil de presiones que actúa sobre las superficies de los dientes. Y a continuación se desarrollará el método para el cálculo de las tensiones subsuperficiales que son las que realmente producen el fallo.

## V.1 Lubricación elastohidrodinámica en el contacto entre dientes de engranajes. Desplazamiento específico del perfil de presiones

En este capítulo se va a comentar todo lo desarrollado para estudiar el problema de la lubricación. Como se ha visto en el capítulo de fundamentos teóricos el perfil de presiones que actúa sobre la superficie de contacto puede diferenciarse mucho del elíptico hertziano

que es el modelo que toman las normas AGMA e ISO. Un análisis con detalle del fenómeno del fallo superficial requiere un estudio sobre el régimen de lubricación y cómo influye en el fallo por fatiga. En este capítulo se ha escogido el modelo de lubricación de Greenwood [41] entre los mencionados en el capítulo de fundamentos teóricos, mejorándolo en el procedimiento de cálculo, de forma que se ha clarificado el método para la obtención del perfil de presiones y el coeficiente de rozamiento.

Para los desarrollos de este capítulo se necesitan los datos que has sido objeto de capítulos anteriores: geometría, cinemática, y el cálculo estructural del reparto de cargas. Partiendo de estos datos se obtendrá el perfil de presiones que será la única entrada en el cálculo del mapa tensional en la zona de contacto.

### Modelo tomado para el estudio de la lubricación de engranajes

El modelo de Greenwood se ha escogido como modelo elastohidrodinámico en todos los desarrollos posteriores por las siguientes razones:

- a) Greenwood obtiene valores de espesor de película muy parecidos a los dados por la solución numérica de Dowson, más parecidos que los proporcionados por Grubin; y su correlación es mucho más precisa cuando se trabaja a bajas cargas, en el régimen visco-rígido [41].
- b) La pequeña discrepancia se produce por el lado de la seguridad, es decir, proporciona los valores ligeramente más pequeños de espesor de película y los perfiles de presión son más distorsionados, lo cual se vuelve más crítico al aumentar el valor de la máxima tensión cortante y acercar su localización a la superficie.
- c) Es un modelo que viene expresado en fórmulas matemáticas mucho más computacionables. La discretización del perfil de presión es usada fácilmente para la determinación del mapa tensional en la subsuperficie.

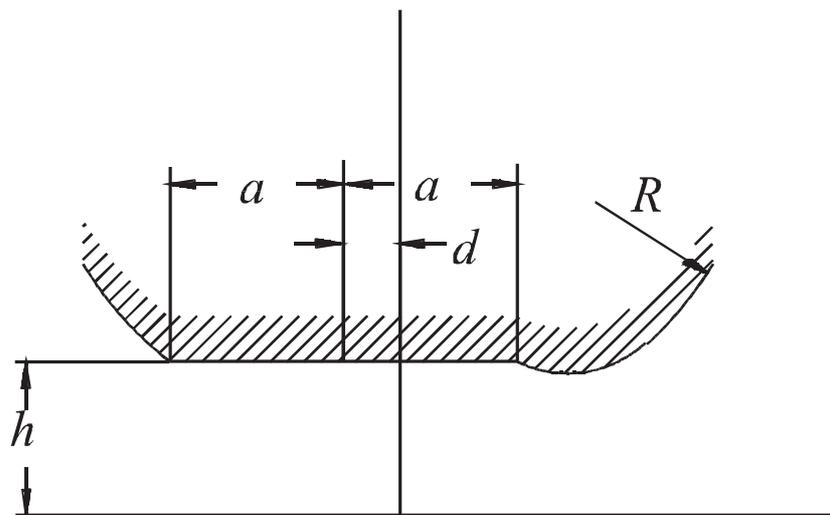
En el capítulo siguiente se desarrollará una variación de este modelo adaptado a las necesidades requeridas para el desarrollo de un modelo global de fallo superficial en engranajes.

El modelo es demostrable en teoría como ya se hizo en el capítulo de fundamentos teóricos con sus hipótesis de partida. En realidad intervienen factores por los que los picos no pueden ser tan altos con los que da la solución teórica.

Seguidamente se desarrollará un procedimiento para la obtención del desplazamiento reducido del perfil elastohidrodinámico  $\mu$  basándose en las condiciones de salida de la zona de contacto.

### Cálculo numérico del factor de desplazamiento reducido $\mu$ del perfil de presiones elastohidrodinámico

Se va a presentar un método numérico para la obtención del desplazamiento reducido del centro de presiones del perfil elastohidrodinámico  $\mu$  a partir de la teoría de Grubin. Los resultados obtenidos indican que este desplazamiento reducido disminuye cuando aumenta la fuerza soportada por la película de lubricante. Al aumentar  $\mu$  los picos de presiones teóricos son muy altos, lo cual no es observado por los procedimientos experimentales, por lo que se puede dudar de la validez de estas soluciones en estos regímenes. Estas situaciones se producen en la transición hacia el régimen hidrodinámico sin deformación elástica de los cuerpos en contacto.



**Figura 54** Desplazamiento del centro de presiones  $d$ .

El método desarrollado es una modificación del expuesto por Greenwood con el objetivo de evitar tanteos que son poco prácticos en el diseño mecánico, y menos aún cuando lo que se pretende es transcribir el procedimiento a un programa de ordenador.

### **Procedimiento**

En el apartado II.3 se ha expuesto el modelo de contacto entre un cilindro y una superficie

semiindefinida cuando la deformación está descentrada una cantidad  $d$  de su centro geométrico. El perfil de presiones resultante es muy semejante al proporcionado por la solución numérica de la ecuación de Reynolds junto con la deformación de los sólidos en contacto. Esto se explica considerando las zonas de entrada y de salida de la película como independientes: la zona de entrada determinaría el espesor de la película  $h^*$ , y la zona de salida la distorsión del perfil de presiones, es decir, al formarse la película de lubricante en la entrada, el espesor de ésta se mantiene constante como requisito para aguantar la carga, al cabo de una distancia, toda la carga que tiene que soportar, la ha soportado por lo que se produce la constricción en el espesor de lubricante. Cuanto menor es la carga, más estrecha será la zona que soporta la carga, y más distorsionado resultará el perfil. Aunque el fenómeno no sea tan sencillo en la realidad, este modelo representa bastante bien todas las características del perfil elastohidrodinámico de presiones. La discontinuidad en la forma del perfil representado en la Figura 54 es artificial ya que en realidad es mucho más suave, aunque las soluciones de Dowson y Higginson [26] también muestran picos muy altos.

#### Consecuencias de la ecuación de Reynolds.

$$\frac{dp}{dx} = 12\eta_0 e^{\alpha p} U \left( \frac{h-h^*}{h^3} \right) \quad (228)$$

A partir de la ecuación de Reynolds se puede deducir que debe haber una constricción de la película de lubricante para que la presión vuelva a tener valores bajos después de haberlos tenido muy altos en la zona de presiones de Hertz, es decir, para que haya un gradiente negativo, en algún momento  $h$  tiene que ser menor que  $h^*$ .

La aparición del pico de presión en la salida puede hacer que el máximo de la presión sea mucho mayor que el proporcionado por la fórmula de Hertz.

Grubin utilizó con esta intuición el concepto de presión reducida  $q$  definida en la expresión (229) para simplificar la ecuación de Reynolds (228) que junto con la regla de Barus reduce la fórmula de Reynolds a la Ecuación (230).

$$\alpha q = 1 - e^{-\alpha p} \quad (229)$$

$$\frac{dq}{dx} = 12\eta_0 U \left( \frac{h-h^*}{h^3} \right) \quad (230)$$

de donde se deduce que si  $\alpha p$  es muy alto la presión reducida es constante con lo que  $h=h^*$ , y además, el valor de  $q$  será próximo a  $1/\alpha$ , de donde

$$\int_{-\infty}^x \frac{dq}{dx} dx = \frac{1}{\alpha} = 12\eta_0 U \int_{h=-\infty}^{h=h^*} \frac{h-h^*}{h^3} dx \quad (231)$$

la expresión de  $h$  se puede obtener a partir de la deformada del cilindro una vez se le haya aplicado la distribución de presiones mostrada en el capítulo del contacto.

Dado que el espesor de película proporcionado por Dowson y Higginson es un valor muy admitido, en adelante se prestará especial atención a la zona de salida que es la que va a determinar el valor de  $\mu$  que es el que determina la forma del perfil de presiones, de momento se ha establecido un procedimiento por el cual se obtiene un valor razonable.

En la salida del contacto se cumple que  $\alpha p=0$  cuando la película recobra su forma después de la constricción, esto indica que  $q=0$ . La forma de esta constricción viene dada por la teoría de la elasticidad mostrada en el capítulo de fundamentos teóricos por lo que se puede obtener el valor del término  $h-h^*$  de la ecuación de Reynolds.

$$0 = 12\eta_0 U \int_{\xi=1}^{\xi=\xi^*} \frac{h-h^*}{h^3} d\xi \quad (232)$$

en donde  $\xi$  es el semiancho reducido de contacto que viene representado en la expresión de distribución de presiones. Mediante manipulaciones matemáticas la ecuación (232) se queda reducida a la siguiente expresión que se halla en [41]

$$\frac{a^3}{8\alpha\eta_0 U R^2} = 24 \int_0^{\theta^*} \frac{B(\theta) \sinh(\theta)}{(H_0 - B(\theta))^3} d\theta \quad (233)$$

en donde

$$\xi = -\cosh\theta$$

$$H_0 = \frac{4Rh^*}{a^2} \quad (234)$$

$$B(\theta) = 4\mu(\sinh\theta + \theta) - (\sinh 2\theta - 2\theta)$$

$\theta^*$  es el valor de  $\theta$  que hace  $B(\theta) = 0$ , es decir, cuando el espesor de película retorna al espesor inicial.

Esta es una ecuación con una única incógnita pues suponemos que el espesor de película viene bien correlacionado por la expresión de Dowson y Higginson. Para la resolución de la ecuación (233) se han requerido los siguientes pasos:

- Primera estimación de  $\mu$ .
- Aplicación de Newton-Raphson para la obtención de  $\theta^*$
- Resolución numérica de la integral mediante cuadratura de Lagrange.
- Nueva estimación de  $\mu$  mediante la aplicación del método de la secante.
- Comprobación de la convergencia.

Para la obtención de una primera estimación de  $\mu$  se ha partido de la hipótesis de que el espesor mínimo de película es 0,8 veces el espesor de película en la zona de contacto, y éste ocurre en un máximo de  $B(\theta)$  cuyo valor aproximado es de  $7,5*\mu^{3/2}$ , sabiendo además que

$$H_0 - B(\theta_{\max}) = 0,8H_0 \quad \Rightarrow \quad B(\theta_{\max}) = 0,2H_0 \quad (235)$$

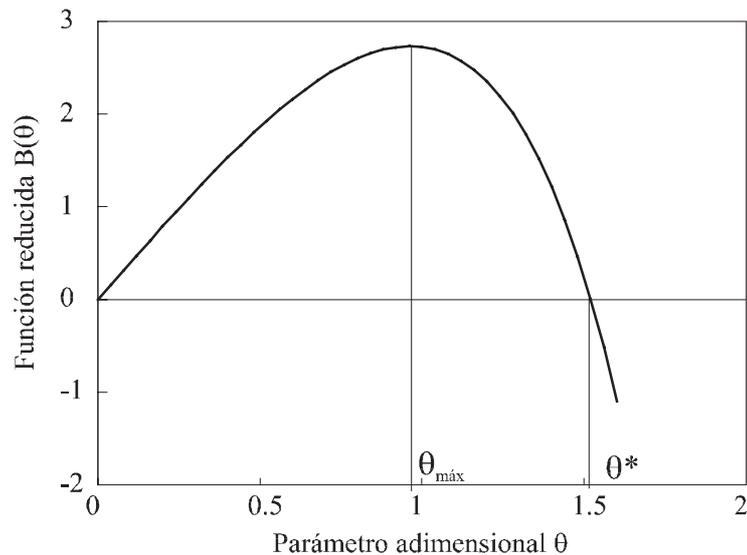
como  $H_0 = (1 + 2\mu)H$  se obtiene que la ecuación a resolver para obtener el valor inicial de  $\mu$  es

$$7,5\mu^{3/2} - (0,2 + 0,4\mu)H = 0 \quad (236)$$

La primera estimación de  $\mu$  se obtiene por el método de Newton-Raphson resolviendo la Ecuación (236). Como primer valor se toma un valor excesivo para la mayoría de los casos como puede ser 5. El método numérico no ha dado problemas hasta 40 iteraciones en esta resolución de Newton Raphson, para los valores que se han usado en las pruebas.

Una vez obtenido  $\mu$  se ha usado para la obtención de  $\theta^*$  con cuyo valor ya se puede discretizar la integral para su resolución numérica. El método seguido para la obtención de

$\theta^*$  ha pasado por calcular el valor de  $\theta_{\max}$ , dado que la forma de la curva de  $B(\theta)$  sugiere que el valor de  $\theta_{\max}$  es una porción de  $\theta^*$  como se muestra en la Figura 55, este procedimiento también es conveniente para evitar que el valor inicial de  $\theta^*$  en la iteración de Newton Raphson sea muy pequeño o muy grande ya que de ser muy pequeño, el método convergería en el origen, y de ser muy grande tendría una convergencia laboriosa, o bien no convergería. El procedimiento usado se ha resuelto para que siempre haya convergencia.



**Figura 55** Evolución de  $B(\theta)$ .

El valor inicial de  $\theta_{\max}$  se ha tomado del  $\cosh^{-1}(1 + \mu)$  el cual tiene facilidad de converger. Una vez obtenido el valor de  $\theta_{\max}$  se toma el valor inicial de  $\theta^*$  como  $2/3$  del valor de  $\theta_{\max}$  lo cual facilita también en mucho la convergencia.

Respecto al método de la secante usado, se ha partido de dos valores de la función, se haya la intersección de la recta secante con el eje de abscisas, se calcula la función en este nuevo punto, sustituye a uno de los puntos originales: el que tiene la ordenada más alejada de la ordenada del nuevo punto. No se han encontrado problemas de convergencia con este método. La precaución que se ha de tomar es la de no prolongar demasiado las iteraciones para que las ordenadas de los dos puntos no coincidan en valores próximos a 0, pues la secante sería paralela al eje de abscisas y no habría intersección.

### **Sustitución del método numérico por una correlación.**

Con valores dados a partir del método descrito anteriormente se han correlacionado valores de  $\mu$  en un rango lo suficientemente amplio para que sea válido en los casos prácticos que se tratan.

**Tabla II** Errores en la correlación  $H$ - $\mu$ 

$H$	$\mu$	$\mu^*$	% error
0,09575	0,02216	0,020667	6,73
0,1869	0,03502	0,034331	1,97
0,4433	0,06391	0,066116	3,45
0,8327	0,10048	0,106674	6,16
1,521	0,15747	0,168496	7,00
3,1898	0,28375	0,295561	4,16
5,3126	0,44115	0,435265	1,33
8,4495	0,6835	0,635881	9,96
14,605	1,2117	1,235551	1,96
21,193	1,8593	1,941428	4,41
29,969	2,8368	2,956472	4,21
46,211	4,91	5,001004	1,85
63,527	7,3707	7,359026	0,15
87,135	10,976	10,7993	1,6
132,6	18,354	17,97767	2,05
182,79	26,854	26,54288	1,15

El valor de  $\mu$  se ha correlacionado únicamente con el parámetro adimensional  $H$ , pues se ha visto que varía muy poco respecto al resto de variables. Esta fuerte dependencia es fácil de intuir sabiendo que el espesor mínimo de película sea  $0.8 h^*$ , lo que ha servido para dar una primera estimación de  $\mu$  cuyo valor es ya cercano al valor definitivo. Después de calcular  $\mu$  para 16 casos diferentes que barren todos los rangos, se ha observado que en la representación logarítmica mostrada en la Figura 56, se pueden distinguir claramente dos zonas en las que las pendientes de las curvas permanecen prácticamente constantes. La

correlación obtenida tiene las siguientes expresiones,

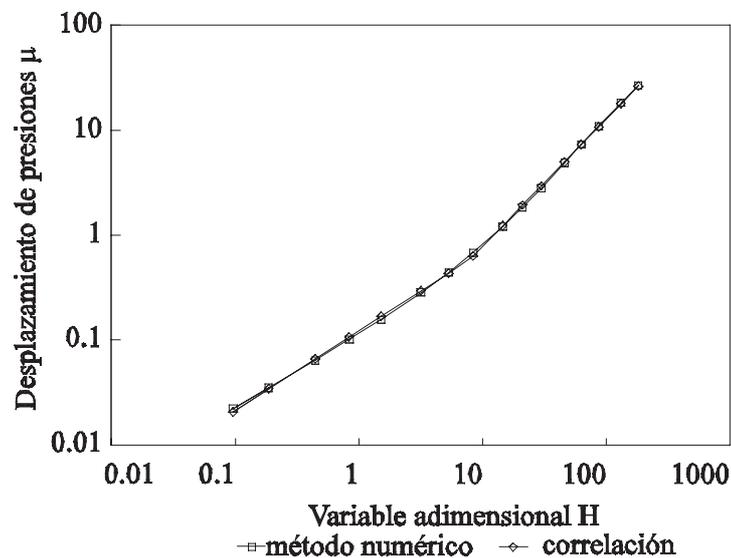
$$\mu = 0.1257H^{0.7588} \quad \text{si } H < 8.5 \quad (237)$$

$$\mu = 0.0477H^{1.2138} \quad \text{si } H \geq 8.5 \quad (238)$$

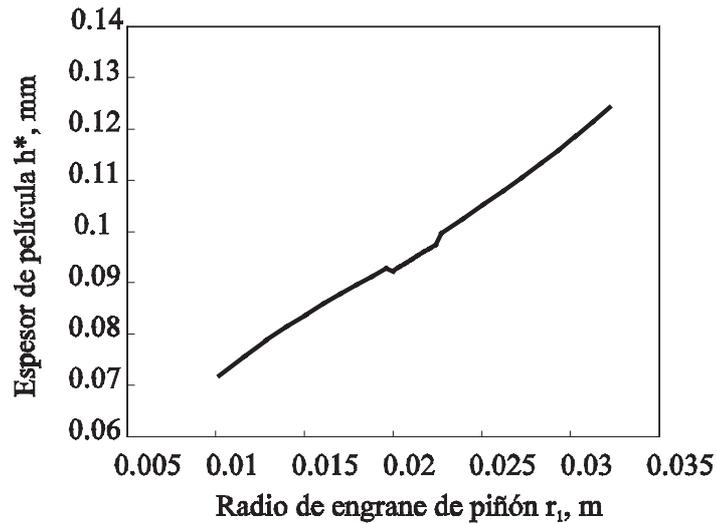
$$H = \frac{4Rh^*}{b_H^2} \quad (239)$$

Los valores de partida, así como los valores dados por la correlación y los valores de los porcentajes de error son proporcionados en la Tabla II. Se puede observar que los errores en el valor de  $\mu$  son prácticamente despreciables, teniendo en cuenta que en lo único en que influyen es en la forma del perfil de presiones, y ésta se necesita para calcular el mapa tensional subsuperficial, con lo que la influencia de la precisión del método de cálculo en el mapa tensional es despreciable.

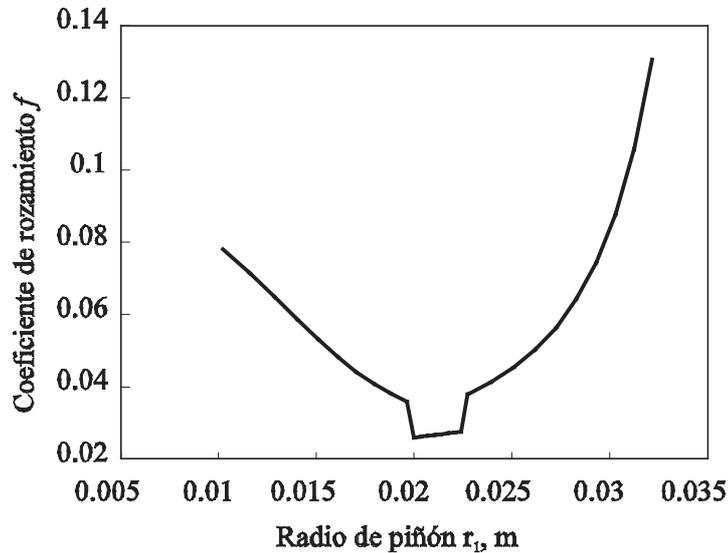
Se puede observar en la gráfica que los valores han sido escogidos a una distancia normal y que se pueden detectar resultados fiables a partir de la correlación.



**Figura 56** Evolución del desplazamiento reducido del centro de presiones  $\mu$  respecto de  $H$  y su correlación.



**Figura 57** Evolución del espesor de película  $h^*$  a lo largo de la línea de acción.

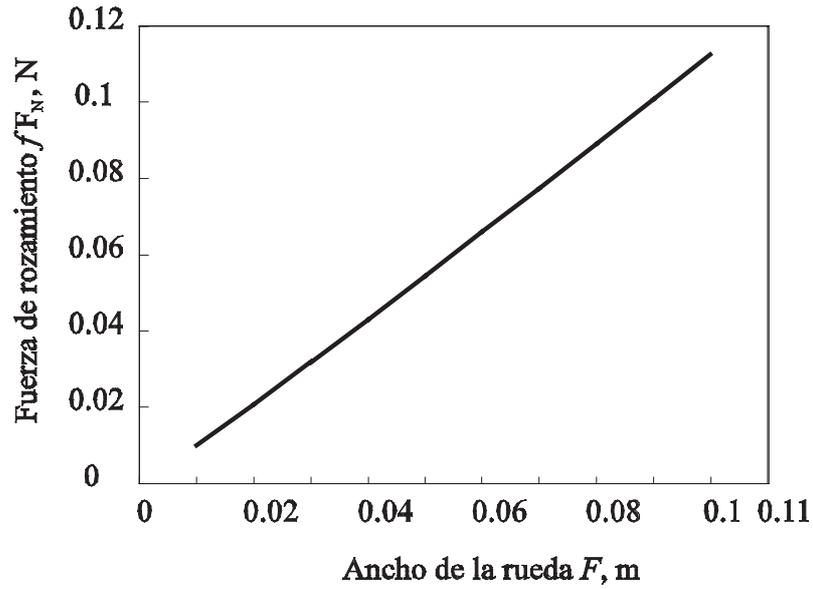


**Figura 58** Evolución del coeficiente de rozamiento a lo largo de la línea de acción.

### Estudio de variables a lo largo de la línea de engrane

En la línea de engrane las condiciones de carga, velocidad, y geometría varían constantemente. Estos valores, como se ha visto en capítulos anteriores, se han obtenido por la teoría generalizada de engranajes, el reparto de carga entre dientes en los instantes en que hay dos a la vez, se ha obtenido por el método de los multiplicadores de Lagrange, según el apartado IV.1 referido al cálculo de factor de distribución de la carga en engranajes rectos.

Se produce una discontinuidad teórica en la evolución de la carga aplicada a lo largo de intervalo estudiado, localizada en los radios de contacto único superior e inferior en la



**Figura 59** Variación de la fuerza de rozamiento medio con el ancho de cara.

carga aplicada.

**Tabla III** Variables iniciales en el análisis paramétrico

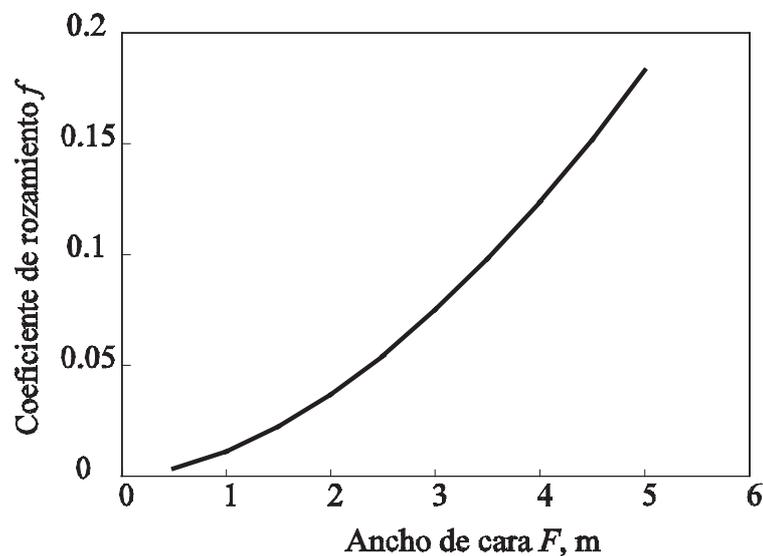
PIÑÓN		RUEDA	
$z_1$	30	$z_2$	100
$F_1$ (m)	0,05	$F_2$ (m)	0,05
$x_1$	0	$x_2$	0
$r_{c1}$ (m)	0,068	$r_{c2}$ (m)	0,21675
HERRAMIENTA		FUNCIONAMIENTO	
$p$ (m)	0,01335	$r_{tr}$	3,33333
$m$ (m)	0,00425	$C$	0,27625
$\phi$ (rad)	0,34906	$\phi_f$	0,34906
adendo	1,00	$\epsilon_\alpha$	1,75301
dedendo	1,25		
$r_f$	0,30		

Las variables por defecto son las señaladas por la Tabla III de donde se han obtenido la Figura 57 y la Figura 58.

Se puede observar en la Figura 57 que el espesor de película de lubricante entre dientes de engranajes viene dado principalmente por las condiciones cinemáticas, por lo que apenas cambia con el salto de fuerza que se produce en los radios de contacto único superior e inferior.

### Estudio paramétrico del coeficiente del rozamiento

El coeficiente de rozamiento medio en la línea de engrane se ha obtenido integrando la gráfica mostrada y dividiendo por la longitud de la abscisa. Se han hecho variar algunos parámetros, de donde se han obtenido las siguientes gráficas. Se discutirán las gráficas obtenidas con la variación de algún parámetro de diseño. En concreto, el ancho de cara, la velocidad angular, y el desplazamiento de la herramienta en el tallado.

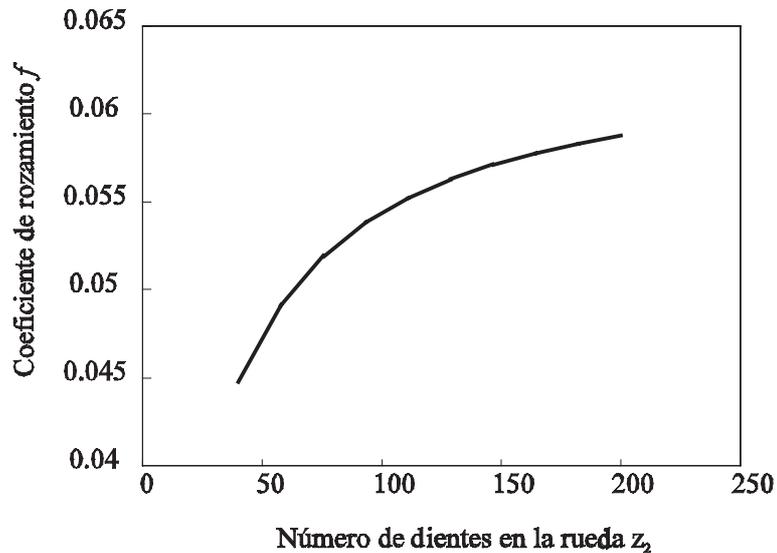


**Figura 60** Variación del coeficiente de fricción medio con el ancho de cara.

#### Variación con el ancho de cara

Al aumentar el ancho de cara, para la misma potencia y misma velocidad angular se ejerce una menor fuerza por unidad de longitud en los flancos del diente con lo que el espesor de película crece y por lo tanto el coeficiente de rozamiento aumenta por la ley de Crook (Figura 59). De aquí se puede concluir con el criterio de diseño de disminuir el ancho de cara, no sólo por reducir peso, coste de fabricación, etc. sino también porque aumenta el rendimiento mecánico reduciendo el ancho. Lógicamente se está suponiendo lubricación plena entre perfiles en todo instante. Muchas veces ocurre que al aumentar la carga entran en contacto las asperezas de las superficies en contacto, y por lo tanto aumenta la fuerza

de rozamiento.



**Figura 61** Variación del coeficiente de fricción con el nº de dientes de la rueda.

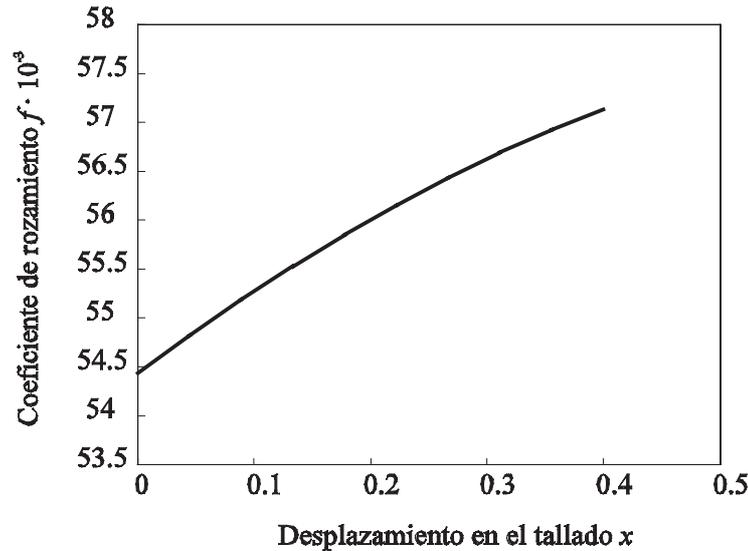
#### Variación con la velocidad angular

Al aumentar la velocidad angular, para la misma potencia, disminuye la fuerza ejercida sobre los flancos de los dientes, pues el producto  $F.V$  (la potencia) es constante. Por otra parte el espesor de película también aumenta al aumentar la velocidad por condiciones del régimen de lubricación. La curva no es lineal debido a la adición de los dos factores anteriores, pero sobre todo por la no-linearidad entre  $h^*$  y  $\alpha$ . Por estas dos razones se puede pensar que el coeficiente de rozamiento crecerá. (Figura 60)

#### Variación con la relación de transmisión

Al aumentar el número de dientes de la rueda se puede deducir que aumenta el radio equivalente del cilindro siendo de especial importancia en este caso la geometría. A partir de una relación de transmisión dada, el rozamiento no crece tanto, pues la aportación de la rueda al valor del radio de cilindro equivalente tiene cada vez menos importancia en el cálculo de la tensión superficial (Figura 61). Por esta razón la curva se estabiliza para un número de dientes mayor de 200.

#### Variación con el desplazamiento



**Figura 62** Variación del coeficiente de fricción medio con el desplazamiento en tallado

Se ha variado el desplazamiento en el tallado del piñón y la rueda de forma que se mantuviera la distancia nominal. Se observa que apenas influye en el rendimiento final. En la Figura 62 el efecto está amplificado, pero el coeficiente de rozamiento medio se dispersa apenas de  $3 \mu\text{m}$ .

## Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo de contacto elastohidrodinámico, mediante el cual, partiendo del espesor de película dado por Dowson y Higginson, se calcula la expresión analítica del perfil de presiones sobre las superficies de contacto.

La diferencia de forma del perfil de presiones con respecto al dado por la teoría de Hertz se puede cuantificar en función de un único parámetro  $\mu$  cuyo cálculo se ha desarrollado en este capítulo.

La validez de esta teoría viene limitada por valores de  $\mu$  superiores a 0.5 en los cuales los perfiles de presiones dan picos excesivamente altos que no se pueden presentar en la realidad debido a limitaciones en el comportamiento del material. Para valores de  $\mu$  inferiores a 0.1 el contacto se puede asemejar al hertziano.

El espesor de película de lubricante entre dientes de engranajes viene dado principalmente por las condiciones cinemáticas, por lo que apenas cambia con el salto de fuerza que se produce en los radios de contacto único superior e inferior.

El coeficiente de fricción es proporcional al espesor de la película según la teoría de Crook,

con lo que se ha podido establecer una teoría del rendimiento en transmisiones de engranajes rectos.

Todas las variaciones de diseño que lleven a disminuir el espesor de película de lubricante son buenas para la mejora del rendimiento mecánico, aunque no se debe disminuir tanto como para que entren en contacto las asperezas de las superficies.

## V.2 Mecánica del contacto en engranajes.

En este apartado se va a desarrollar el modelo mecánico del contacto, como paso previo al establecimiento de un criterio de fallo a presión superficial. Todo lo desarrollado anteriormente ha tenido el objeto de ver a qué condiciones están sometidas las superficies de contacto. Se trata ahora de analizar el fenómeno del contacto, para lo cual se ha comenzado por hacer consideraciones a las simplificaciones de la geometría de Hertz y analizar las posibles alternativas, después se ha realizado un estudio sobre las peculiaridades del contacto entre dientes de perfil de evolvente y su diferencia respecto al contacto entre cilindros, para acabar con el análisis numérico para la determinación del mapa tensional en la subsuperficie. A partir del perfil de presiones obtenido con el modelo de lubricación, se determina el estado tensional de la subsuperficie, de forma que se pueda establecer la localización del punto crítico donde existe mayor probabilidad de aparición de grieta.

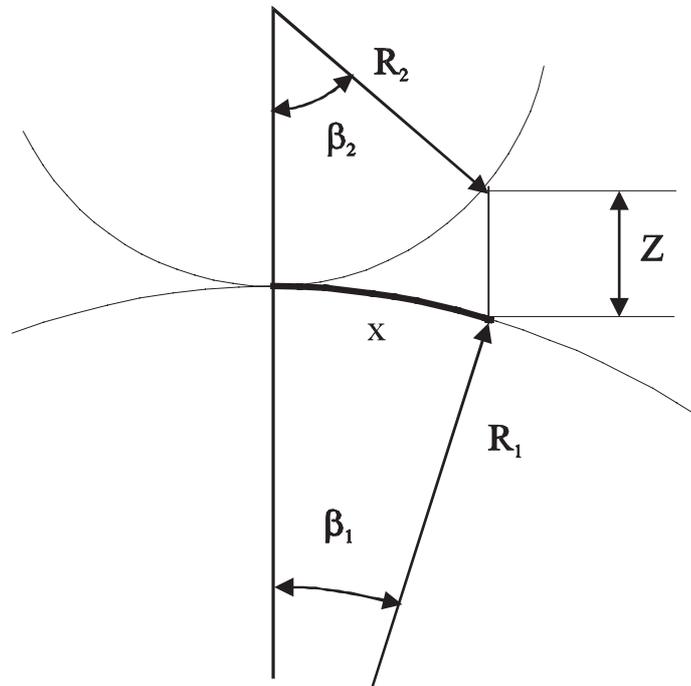
### Consideraciones a la geometría de Hertz.

Otra forma de tratar el contacto aparte de las vistas en el apartado II.3 de fundamentos, es tomando arcos iguales en lugar de tomar la igualdad de coordenada  $x$  como criterio de puntos en contacto. Es el modelo mostrado en la Figura 63 de donde se deducen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}x &= \beta_1 R_1 = \beta_2 R_2 \\Z &= R_1(1 - \cos \beta_1) + R_2(1 - \cos \beta_2) \\Z &= R_1(1 - \cos \frac{x}{R_1}) + R_2(1 - \cos \frac{x}{R_2})\end{aligned}\tag{240}$$

En donde  $Z$  es la distancia inicial entre 2 puntos que van a estar en contacto.

Si se desarrolla en serie de Taylor respecto al origen la expresión anterior de  $Z$ , y eliminando los términos del desarrollo a partir del segundo grado, el resultado sería la misma parábola que la que resultó tomando el primer criterio. Esto es lo mismo que decir que los dos modelos son equivalentes al hacer el mismo tipo de simplificación.



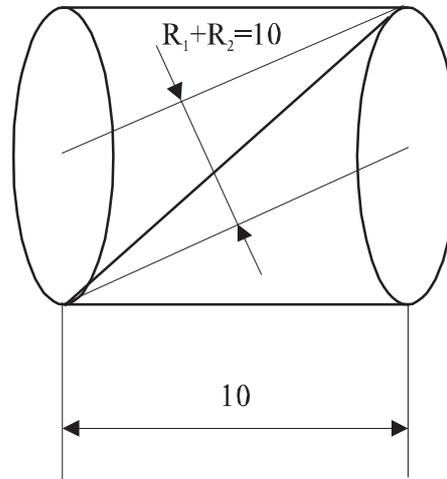
**Figura 63** Contacto entre arcos de circunferencia.

### Análisis comparativo

Para simular el contacto entre dos dientes helicoidales, a efectos de contacto, se ha asemejado a dos conos iguales invertidos en contacto en su directriz, tal como se muestra en la Figura 64. Las directrices de los conos son paralelas a una distancia igual a la distancia entre los puntos de tangencia de la línea de acción con las circunferencias de base. El ángulo de apertura de los conos será igual al ángulo de hélice en la base. Una característica del contacto en la línea de engrane es que la suma de los radios de curvatura es constante a lo largo de la línea de contacto, e igual a la longitud entre los puntos de tangencia de la línea de engrane con las circunferencias de base (241). En el ejemplo del que se han realizado los cálculos, la distancia entre los ejes es igual a 10 m, y el radio de los conos en la base es de 10 m.

Se ha tratado de estudiar cómo para un mismo  $Z$  fijo, varía el semiancho de contacto y por lo tanto la presión máxima a partir de la fórmula de Hertz. Se han estudiado tres modos

de determinar este semiancho: Suponiendo que las superficies no se deforman y tienen el mismo arco de contacto; según la parábola de Hertz; y suponiendo que entran en contacto puntos con igual coordenada cartesiana  $x$ .



**Figura 64** Conos en contacto simulando dientes helicoidales

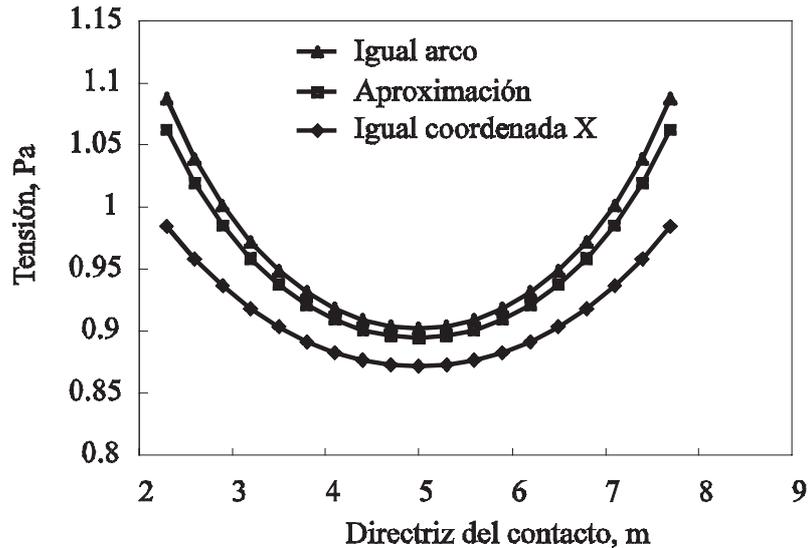
En la Figura 65 se muestra la comparación entre los tres modelos: el aproximado por parábola, el modelo de igual arco en contacto, y el de igual coordenada  $x$  en el contacto.

$$R_{tot} = R_1 + R_2 \quad (241)$$

Para la elaboración de la gráfica de la Figura 65 se ha tomado  $h=2$ , y una fuerza lineal constante apretando los dos conos de 1 N/m. Se ha podido comprobar que, a lo largo de la línea de contacto, el modelo que más se aproxima a la solución real es el de suponer igual arco en el contacto. Cuando el semiancho de contacto es más pequeño, y cuando los radios de los cilindros son más parecidos, la aproximación de Hertz es perfectamente válida.

En todos los casos la presión crítica se produce en los extremos de la línea de contacto. Este resultado contradice a las normas ISO y AGMA que establecen como punto crítico el punto medio donde los radios de curvatura son más parecidos. En la determinación del punto crítico juega un papel mucho más preponderante la distribución de la carga por efectos estructurales, que la variación de la geometría a lo largo de la línea de contacto.

Los modelos reales y de igual arco de contacto son menos conservadores a la hora de hallar el estado tensional. Ya que al ser las deformaciones menores el estado tensional será menos crítico.



**Figura 65** Comparación entre modelos y aproximación

### **Análisis del contacto entre dos perfiles de evolvente**

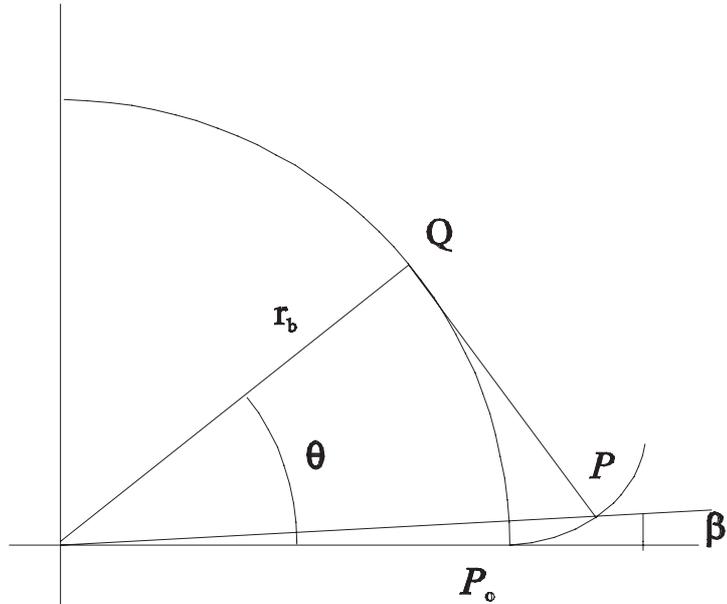
En este subapartado se va a analizar el contacto entre dos perfiles de evolvente, a partir de sus ecuaciones analíticas. Se ha obtenido la función de separación, y se ha realizado una aproximación al contacto entre dos cilindros mediante la descomposición en polinomios de Legendre o de mínimos cuadrados. Las diferencias encontradas con la aproximación al contacto entre dos cilindros con radios iguales a los de curvatura en el punto, y por lo tanto en las tensiones de Hertz, hacen pensar en la conveniencia de otro modelo del contacto entre engranajes de perfil de evolvente.

Se ha comparado este modelo con la aproximación tomada por las normas tecnológicas de aproximar los perfiles a dos cilindros con radios iguales a los radios de curvatura en dichos puntos aplicando entonces el modelo de Hertz, despreciando las características propias del perfil de evolvente que pueden ser importantes en ciertos casos en los que debería tenerse en cuenta esta característica.

Establecer los rangos de validez de las aproximaciones empleadas por las normas es el objeto de este apartado así como el ayudar a comprender el fenómeno del contacto entre dos perfiles.

### **Características del perfil de evolvente**

La longitud de arco en el perfil de evolvente viene dada por la siguiente expresión deducida



**Figura 66** Perfil de evolvente

en apartado II.1:

$$l = \frac{r_b}{2} (\theta_2^2 - \theta_1^2) = \frac{r_b}{2} (\theta_2 - \theta_1) (\theta_2 + \theta_1) \quad (242)$$

llamando  $\alpha$  a la diferencia entre los ángulos generatrices del perfil:

$$(\theta_2 - \theta_1) = \alpha \quad (243)$$

queda que:

$$(\theta_2 + \theta_1) = 2 \frac{R}{r_b} + \alpha \quad (244)$$

con lo que la longitud tiene la nueva expresión en función del radio de base:

$$l = \frac{r_b}{2} \alpha \left( 2 \frac{R}{r_b} + \alpha \right) \quad (245)$$

poniendo esta longitud en función del arco  $dx$  queda la expresión:

$$dx = r_b \alpha$$

$$l = \frac{1}{2r_b} (2R dx + dx^2) \quad (246)$$

En esta última ecuación se puede despejar  $dx$  ya que es una ecuación de segundo grado, de forma que queda:

$$dx = -R + \sqrt{R^2 + 2l r_b} \quad (247)$$

### Contacto entre dos dientes de engranajes

Las características del perfil de evolvente junto con la expresión (247) son de especial importancia para comprender la diferencia entre el contacto entre cilindros y el de dos perfiles de evolvente.

Para ilustrar el proceso de contacto se han representado en la Figura 67 un par de engranajes rectos por sus circunferencias de base, la línea de acción y los dos perfiles de los dientes en contacto.

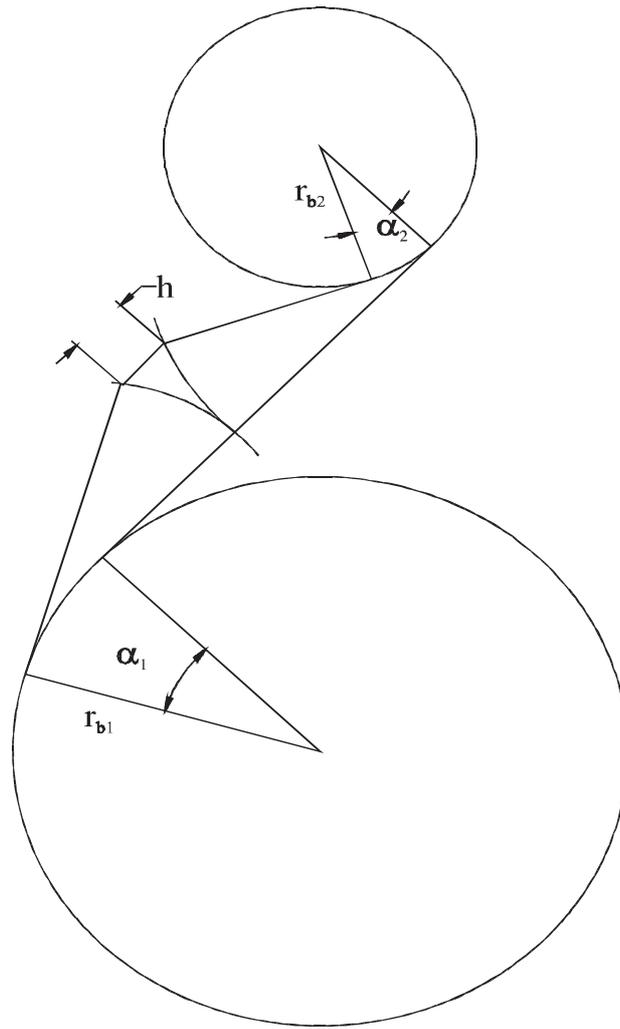
Como se puede apreciar en las Figura 67 y Figura 68 cuando dos dientes entran en contacto se obtiene una función de separación  $h(l)$  que es distinta de la aproximación de Hertz entre dos cilindros, ésta es la expresión que va a ser objeto de este trabajo.

Lógicamente cuando  $l < 0$  el término correspondiente a la segunda rueda pasa a ser negativo pues  $l$  es positivo para uno y negativo para el otro.

La longitud  $A$  de la Figura 68 se puede expresar de dos formas, según se tome el camino directo, a través de los radios de curvatura, o bien a través de las proyecciones de los puntos.

La primera expresión sería:

$$A = -R_1 + \sqrt{R_1^2 + 2l r_{b1}} - R_2 + \sqrt{R_2^2 - 2l r_{b2}} + R_1 + R_2 \quad (248)$$



**Figura 67** Contacto entre dos dientes engranando.

que queda reducida a:

$$A = \sqrt{R_1^2 + 2l r_{b1}} + \sqrt{R_2^2 - 2l r_{b2}} \quad (249)$$

mientras por el otro camino se obtiene:

$$A = (R_1 + r_{b1} \alpha_1) \cos \alpha_1 + (R_2 - r_{b2} \alpha_2) \cos \alpha_2 + h \quad (250)$$

Se pueden obtener los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  a través de las expresiones:

$$\alpha_1 = -\frac{R_1}{r_{b1}} + \sqrt{\left(\frac{R_1}{r_{b1}}\right)^2 + 2\frac{l}{r_{b1}}} \quad (251)$$

$$\alpha_2 = -\frac{R_2}{r_{b2}} + \sqrt{\left(\frac{R_2}{r_{b2}}\right)^2 + 2\frac{l}{r_{b2}}}$$

Tomando sólo el término cuadrático del desarrollo de Taylor del coseno de estos ángulos queda:

$$\cos\alpha_1 \approx 1 - \frac{1}{2R_1^2}l^2 \quad (252)$$

$$\cos\alpha_2 \approx 1 - \frac{1}{2R_2^2}l^2$$

La nueva expresión de la longitud  $A$  será:

$$(253) \quad A = -h + \sqrt{R_1^2 + 2lr_{b1}} \left(1 - \frac{1}{2R_1^2}l^2\right) + \sqrt{R_2^2 + 2lr_{b2}} \left(1 - \frac{1}{2R_2^2}l^2\right)$$

que combinada con la otra expresión de esta longitud queda despejando  $h$ :

$$h = \frac{1}{2} \left( \sqrt{R_1^2 + 2lr_{b1}} \frac{1}{2R_1^2} + \sqrt{R_2^2 + 2lr_{b2}} \frac{1}{2R_2^2} \right) l^2 \quad (254)$$

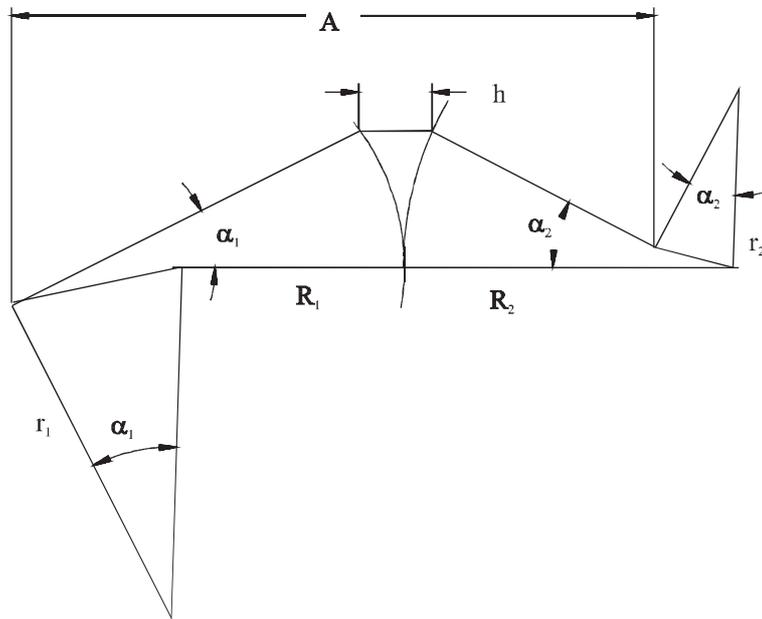
Expresión que sólo coincide con la de los cilindros con radios iguales a los radios de curvatura de los perfiles en el punto de contacto si se cumple la condición dada.

$$Si \quad 2r_b l \ll R^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (255)$$

Esta última expresión es la que toma la teoría de Hertz para la función de separación.

### Aproximación a cilindros

La expresión (254) tiene entre sus factores no sólo el radio de curvatura sino también los radios de base de ambas ruedas que diferencian ésta geometría de contacto de la originada con dos cilindros.



**Figura 68** Ampliación de la geometría del contacto.

Esto tiene el inconveniente de que no es tratable matemáticamente para calcular el campo de tensiones que origina y sus deformaciones que son los datos que interesan calcular.

Una forma de obtener de manera aproximada el campo de tensiones aprovechando los resultados conocidos de Hertz, consiste en aproximar a una parábola la función de separación entre las dos superficies, de forma que se calcula su radio de cilindro equivalente. La parábola que mejor aproximación proporciona es la proveniente de la descomposición en polinomios de Legendre por la fórmula de Rodrigues [81] la cual da lugar al polinomio de segundo grado más aproximado por mínimos cuadrados, en la zona comprendida entre  $x=-a$  y  $x=+a$ .

La expresión obtenida al integrar la fórmula de Rodrigues para obtener el término de segundo grado del polinomio de Legendre, es la suma de las cuatro siguientes expresiones, quitándole la constante que es igual a la componente de grado cero:

$$\frac{\sqrt{2ar_{bl}+R_1^2}}{2310a^3r_{bl}^5R_1^2} \left( 150a^5r_{bl}^5 + a^4r_{bl}^4R_1^2 + a^3r_{bl}^3R_1^4 - 5a^2r_{bl}^2R_1^6 - 4ar_{bl}R_1^8 + 4R_1^{10} \right) \quad (256)$$

De este modo se obtiene una función analítica de la parábola que más se aproxima a la

$$\frac{\sqrt{-2ar_{b1}+R_1^2}}{2310a^3r_{b1}^5R_1^2}(-150a^5r_{b1}^5+a^4r_{b1}^4R_1^2-a^3r_{b1}^3R_1^4-5a^2r_{b1}^2R_1^6+4ar_{b1}R_1^8+4R_1^{10}) \quad (257)$$

$$\frac{\sqrt{-2ar_{b2}+R_2^2}}{2310a^3r_{b2}^5R_2^2}(150a^5r_{b2}^5-a^4r_{b2}^4R_2^2+a^3r_{b2}^3R_2^4+5a^2r_{b2}^2R_2^6-4ar_{b2}R_2^8-4R_2^{10}) \quad (258)$$

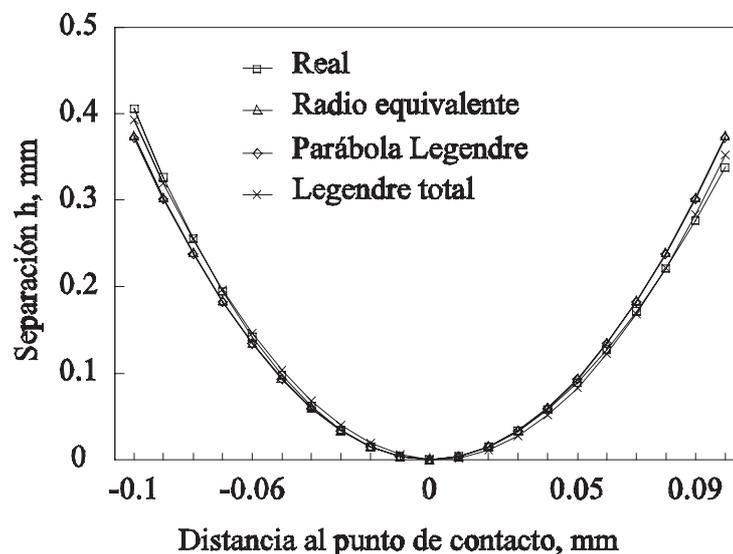
$$-\frac{\sqrt{2ar_{b2}+R_2^2}}{2310a^3r_{b2}^5R_2^2}(-150a^5r_{b2}^5-a^4r_{b2}^4R_2^2-a^3r_{b2}^3R_2^4+5a^2r_{b2}^2R_2^6+4ar_{b2}R_2^8-4R_2^{10}) \quad (259)$$

función de segundo grado.

Llamando  $B$  a la suma de los anteriores términos se obtiene:

$$h = \frac{3}{2} B l^2 \quad (260)$$

Que será la parábola aproximada que servirá de base cuando los radios de base influyan en la modificación del radio de base.



**Figura 69** Comparación entre el perfil real, la aproximación de normas y la de Legendre.

La componente impar se puede despreciar pues no se poseen datos tensionales de esta función. Esta componente puede dar una orientación respecto al momento de rodadura que origina aunque prácticamente es despreciable.

## **Comparación con el modelo usado en las normas**

Como se puede observar en la figura existen casos en los que conviene tomar otro radio de cilindro equivalente para simular el contacto entre dos perfiles de evolvente. El caso está tomado cuando los radios de base son muy grandes y parecidos respecto a los radios de curvatura tomados. Esto ocurre cuando el número de dientes es grande, en cuyo caso las líneas de engrane tienden a acortarse respecto de los radios de base.

También hay que tener en cuenta que a mayores relaciones de transmisión la función es más impar y la función de separación se diferencia de la parábola de aproximación, pero la asimetría se ve compensada también con una mayor aproximación de la parábola de Legendre a la parábola de Hertz.

El valor del radio de cilindro equivalente de Hertz es más conservador que el dado por Legendre en cualquier caso a la hora de hallar la tensión equivalente, lo que indica que las normas proporcionan valores por el lado de la seguridad.

La tendencia de la evolución del radio equivalente a lo largo de la línea de contacto es la misma en ambos modelos cuando la suma de radios de curvatura es constante.

El modelo de Hertz es válido en la mayoría de los casos siendo el más conservador que los que tienen en cuenta las peculiaridades del perfil de evolvente. De todas formas la nueva expresión muestra en qué casos se actúa con mayor seguridad.

## **Métodos numéricos para la determinación del mapa tensional en la zona de contacto entre dos cuerpos**

En los apartados anteriores se han desarrollado las expresiones de la distribución de presiones sobre las superficies en contacto de dos cuerpos para dos casos concretos: el contacto hertziano, y el contacto elastohidrodinámico. En este apartado se va a estudiar cómo afecta esta distribución de presiones al fallo superficial.

El fallo superficial, como se ha visto en el estado del arte, está muy relacionado con el estado tensional al que está sometida la subsuperficie, sobretodo en el fallo por picadura o fatiga superficial. Los otros tipos de fallo como el desgaste y el gripado dependen principalmente del acabado superficial y pueden controlarse tomando las precauciones debidas que se basan en un conocimiento que proviene principalmente de la experiencia. El fallo por picadura es, sin embargo, fruto de un fenómeno físico que consta de dos etapas, inicio de grieta y propagación de la misma. El tiempo de inicio de grieta, viene

determinado por la densidad de dislocaciones en la zona donde se va a producir el fallo, que está localizada normalmente en la subsuperficie. Este tiempo se puede reducir procurando que el punto de máxima tensión tangencial en la subsuperficie sea inferior a un determinado valor que depende del material, sus impurezas, su historia metalúrgica, etc. En el análisis del funcionamiento, el estudio del valor de las tensiones en la subsuperficie se puede determinar numéricamente como se verá en este apartado, y por lo tanto el punto crítico y el valor de su tensión tangencial máxima también es calculable. Por lo tanto, el inicio de grieta es factor que principalmente se puede controlar en la fase de diseño.

El estudio del contacto entre dos cilindros, en el caso de tensión plana, que es el que nos ocupa, y más en concreto el del contacto entre dos dientes de engranajes lubricados ha sido estudiado por Poritsky [76] y otros investigadores. Sin embargo, la consideración de una distribución distinta de la hertziana no ha sido analizada en toda su profundidad, sobre todo a partir del desarrollo de la teoría elastohidrodinámica desarrollada principalmente por Dowson y Higginson [26], y más tarde por Greenwood [41].

Los regímenes de lubricación pueden hacer que la distribución de presiones sobre la zona de contacto se desvíe bastante de la prevista por Hertz para el contacto simple entre dos cilindros. Estas nuevas distribuciones pueden tener consecuencias prácticas en el diseño del tratamiento a recibir por las superficies en contacto, o en la aplicación de las condiciones de lubricación. Para considerar estos efectos se ha desarrollado un método numérico que determina, de una forma rápida y eficaz, del mapa tensional de la zona de contacto a partir de una distribución de presiones normales sobre una superficie semiindefinida, de esta forma se puede disponer de una valiosa herramienta de análisis y diseño.

En este apartado, se determinará el método numérico a desarrollar, y se aplicará al estudio de la influencia de las condiciones de lubricación al contacto entre dos cilindros. En concreto se estudiarán las condiciones creadas por tres regímenes de lubricación, se compararán con las producidas por el contacto simple, y se destacarán las consecuencias que se dirimen de cara al diseño.

### **Modelo desarrollado.**

Cuando se tiene una distribución de presiones sobre una superficie semiindefinida, donde no se conocen las tensiones en la subsuperficie, la primera solución más intuitiva es su discretización en cargas puntuales de las que se conoce el campo de tensiones producido por cada una de ellas mediante las expresiones (62). Transformadas estas expresiones a coordenadas cartesianas se obtienen las ecuaciones (261)-(263), y la tensión total en un punto de la subsuperficie será la suma de las tensiones producidas por cada una de las

cargas puntuales (principio de superposición).

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2} \quad (261)$$

$$\sigma_z = -\frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2} \quad (262)$$

$$\tau_{zx} = -\frac{2P}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2} \quad (263)$$

La integración de estas expresiones a lo largo de la línea de contacto tiene ciertas dificultades. Las integrales que determinan el mapa tensional en la zona de contacto son como se vio en el apartado II.3:

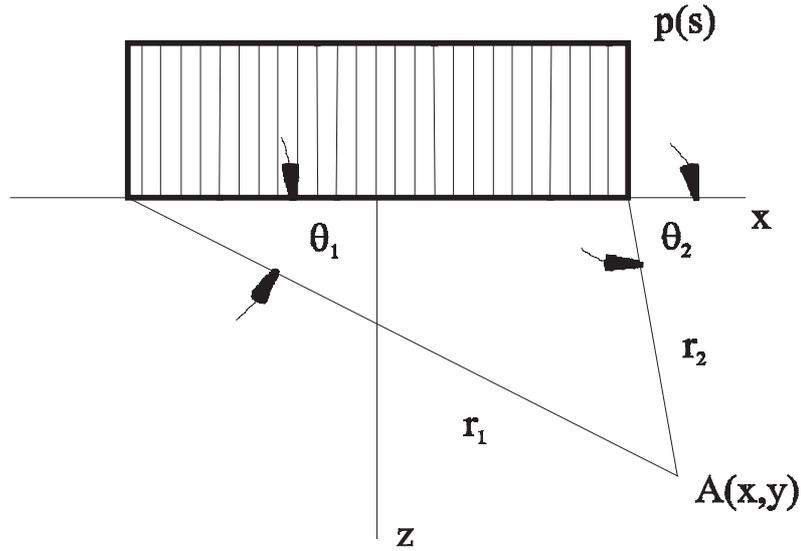
$$\sigma_x = -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s)^2}{((x-s)^2 + z^2)^2} ds \quad (264)$$

$$\sigma_z = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{((x-s)^2 + z^2)^2} ds \quad (265)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s)}{((x-s)^2 + z^2)^2} ds \quad (266)$$

El problema que tiene la discretización con cargas puntuales es que el campo de presiones es discontinuo, al proporcionar unas tensiones y deformaciones altísimas en la proximidad de los puntos de aplicación de la carga, lo cual distorsiona notablemente el mapa tensional, no pudiéndose determinar el campo de presiones en la proximidad de la superficie.

Una solución a este inconveniente es discretizar la función de presiones en distribuciones de presiones rectangulares en lugar de utilizar cargas puntuales. La solución de las integrales (264)-(266) para el caso de distribución de presiones constante ( $p(s)=cte$ ) se



**Figura 70** Distribución de presiones rectangular sobre una superficie semiindefinida.

conoce y sus expresiones analíticas son:

$$\sigma_x = -\frac{P}{2\pi} (2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)) \quad (267)$$

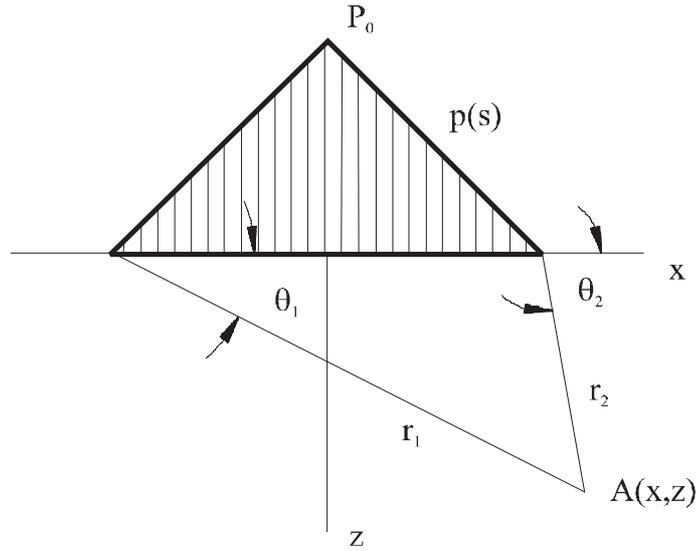
$$\sigma_z = -\frac{P}{2\pi} (2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)) \quad (268)$$

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \quad (269)$$

En donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  están relacionados con las coordenadas cartesianas por las expresiones (270), según la Figura 70

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{z}{x-a} \quad ; \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{z}{x+a} \quad (270)$$

La solución para este tipo de cargas da lugar a puntos singulares de tensiones y deformaciones en los bordes de aplicación de la carga, en estos puntos las tensiones son altamente discontinuas, de forma que en una zona muy pequeña existe un altísimo gradiente de tensiones, por tanto el problema de la distorsión sigue existiendo.



**Figura 71** Representación de distribución triangular

Este problema se soluciona buscando una discretización basada en elementos que se anulen en los bordes y cuya suma sea equivalente a la distribución de presiones de partida, además de que tengan solución analítica para las integrales correspondientes. La condición de que en los bordes el valor de la distribución sea nulo es necesaria ya que en caso contrario se presentaría el mismo problema que en el de las cargas rectangulares. Esta condición recibe el nombre de condición de Boussinesq [55], el cual lo enunció de la siguiente manera: "La distribución de presión entre dos cuerpos elásticos cuyos perfiles son continuos a lo largo del límite de la zona de contacto, cae continuamente a cero en el borde".

Estos problemas quedan resueltos con una distribución de tipo triangular, como el mostrado en la Figura 71 cuyas soluciones, para las integrales anteriores son:

$$\sigma_x = \frac{P_0}{\pi a} ((x-a)\theta_1 + (x+a)\theta_2 - 2x\theta + 2z \ln \frac{r_1 r_2}{r^2}) \quad (271)$$

$$\sigma_z = \frac{P_0}{\pi a} ((x-a)\theta_1 + (x+a)\theta_2 - 2x\theta) \quad (272)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{P_0 z}{\pi a} (\theta_1 + \theta_2 - 2\theta) \quad (273)$$

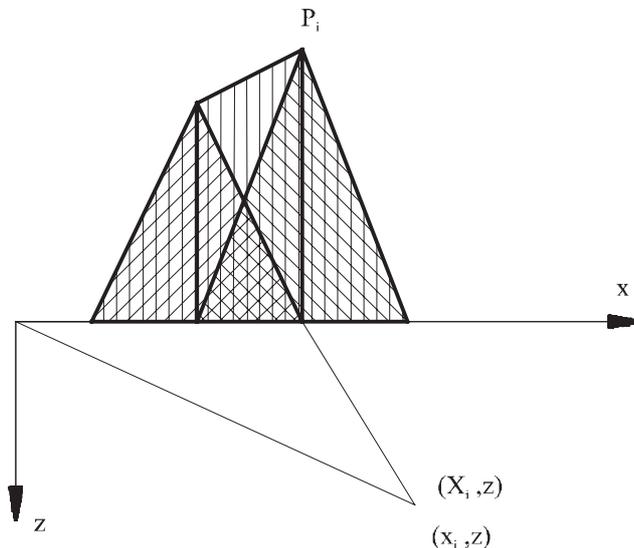
La relación entre los parámetros en los que vienen expresadas las tensiones y las

coordenadas cartesianas son los indicados en las siguientes expresiones:

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + z^2} \quad ; \quad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + z^2} \quad ; \quad r^2 = x^2 + z^2 \quad (274)$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{z}{x-a} \quad ; \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{z}{x+a} \quad ; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{z}{x} \quad (275)$$

Partiendo de estas ecuaciones se puede discretizar una distribución de presiones, como superposición de distribuciones triangulares, del tipo de las indicadas en la Figura 72. Esta discretización coincide con una discretización trapecial si se integraran numéricamente las integrales (264). Observando la Figura 72 esto es fácil de ver sabiendo que la suma de las funciones de las dos líneas superpuestas es otra línea que une un pico con el otro. Esto también tiene una fácil demostración analítica.



**Figura 72** Sistema de referencia relativo y superposición de distribuciones triangulares.

El algoritmo desarrollado para el cálculo del mapa tensional consiste en hallar, para un punto dado, la superposición de todas las distribuciones triangulares.

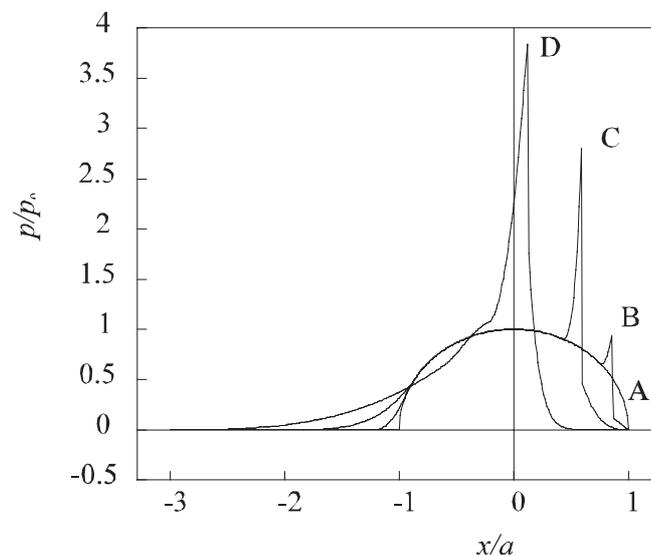
Los pasos seguidos son los siguientes:

- Se discretiza a intervalos constantes la zona de carga.
- Se traduce la distribución de presiones a valores discretos, creando un vector  $P_i$  que corresponde al valor exacto de la presión en ese punto.

- Se discretiza la zona en la que se va a hallar el mapa tensional, en puntos cuyas coordenadas en  $x$  corresponden a los valores de discretización de presiones.
- Para cada punto  $(x,z)$  se determina un vector de coordenadas relativas respecto a cada  $P_i$ , obteniendo  $(X_i, Z_i)$ .
- Para cada valor  $(X_i, Z_i)$  se obtiene la contribución de  $P_i$  al estado tensional de  $(x,z)$ , y por lo tanto se calcula la tensión cortante máxima tomando el criterio de Tresca de fallo.

De este modo se obtiene una matriz de puntos que es el dato de partida para que mediante una interpolación se pueda obtener la representación gráfica del mapa tensional así como de los valores máximos de la tensión tangencial y su localización. La representación gráfica de los mapas tensionales se ha realizado mediante el programa de ordenador Mathematica 2.2, a partir de una matriz de puntos.

Este método numérico para la determinación de las tensiones de contacto se ha aplicado al caso del contacto de dos cilindros lubricados.



**Figura 73** Distribución de presiones sobre la superficie

### **Modelo de lubricación de Dowson y Higginson.**

La superposición del efecto de la lubricación sobre la distribución de tensiones producido en el contacto seco ha sido ampliamente estudiado, en este caso ciñéndose a unas

distribuciones calculadas por Dowson *et al.*, para el caso de contacto elastohidrodinámico. Estas soluciones vienen representadas en la Figura 73.

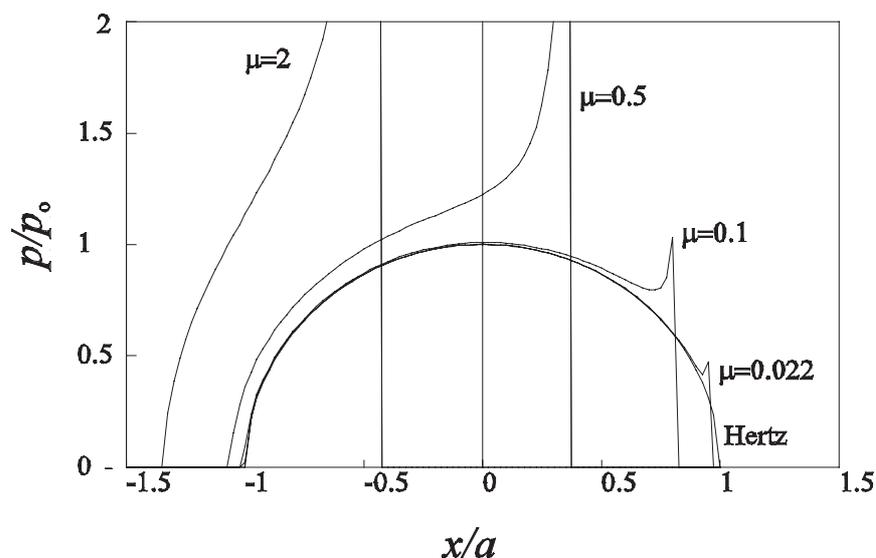
Estos modelos han sido muy discutidos pues para bajas presiones, el lubricante se desvía de la teoría elastohidrodinámica del comportamiento exponencial de la viscosidad respecto a la presión, con lo que la magnitud del pico que aparece en las soluciones del caso ideal se trunca en la realidad. El pico se ha observado experimentalmente [55], aunque con alturas mucho menores que las indicadas teóricamente.

Los datos numéricos que aparecerán en los siguientes apartados son números adimensionales. Las dimensiones y coordenadas son múltiplos del semiancho de contacto calculado por la fórmula de Hertz, y las presiones son múltiplos de la presión máxima de contacto según el mismo modelo de Hertz.

### Modelo de lubricación de Greenwood.

La distribución de presiones presentada por Greenwood tiene la ventaja de disponer de una expresión analítica. De todas formas, para la obtención del mapa tensional se ha recurrido al método numérico de superposición de distribuciones triangulares, como se ha hecho en el caso de la distribución de Dowson. Se han analizado casos según el desplazamiento específico del centro del perfil de presiones  $\mu$ , que se ha comentado en el capítulo anterior.

Los perfiles de presiones utilizados en el análisis vienen dados en la Figura 74.



**Figura 74** Distribuciones de presiones de Greenwood según el factor de distorsión de presiones  $\mu$ .

## Análisis y resultados

Se van a presentar en primer lugar los mapas tensionales obtenidos a partir de 3 soluciones numéricas de Dowson y Higginson, cuyos perfiles se parecen poco unos de otros. A continuación se realizará un análisis similar para el caso de la distribución de Greenwood, para terminar proponiendo alguna modificación a las soluciones anteriores, que sean más reales y concuerden más con las observaciones experimentales.

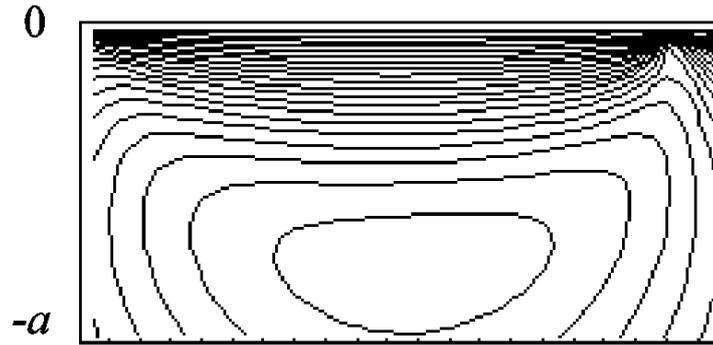
La localización y el valor del cortante máximo de cada modelo vienen representados en la Tabla IV, en la que la tensión cortante máxima y su localización en la subsuperficie vienen en coordenadas adimensionales  $\tau_{\max}$ ,  $x_c/a$  y  $z_c/a$ .

**Tabla IV** Valores críticos de cada régimen de lubricación según modelo de Dowson y Higginson.

Modelo	$x_c/a$	$z_c/a$	$\tau_{\max}/p_o$
A (Hertz)	0,00	0,78	0,30
B	0,03	0,78	0,30
C	0,59	0,015	0,65
D	0,11	0,065	0,85

El algoritmo del anterior apartado se ha traducido en un programa del cual se han sacado los siguientes mapas tensionales.

La validez del programa ha sido comprobada al aplicar la distribución de Hertz, y resultar un mapa tensional exacto concordando con el modelo teórico.



**Figura 75** Mapa tensional de la distribución correspondiente al modelo B.

En la Figura 75 se ve el mapa tensional resultante de superponer a la distribución de Hertz la presión de entrada y el pico de salida debido a la lubricación.

La distorsión no ha sido la suficiente para variar el valor de la tensión cortante crítica, pero cabe destacar la aproximación a la superficie de una tensión cortante alta (0.24). Esta va a ser una característica constante en los siguientes modelos. Lo cual marca la influencia del material (su tamaño de grano, el recubrimiento superficial, etc.), en el modo de fallo de la superficie, que puede ser por picadura o por desconchado.



**Figura 76** Mapa tensional correspondiente al modelo C.

En el modelo C de lubricación se observa que el punto crítico ya no está regido por la distribución de Hertz sino por la zona distorsionada por el pico. Esta provoca un acercamiento a la superficie de la tensión cortante máxima, y un aumento del valor de ésta. La influencia de la distorsión es predominante pues la carga está concentrada en gran parte. Si se redujera el ancho de Hertz a un valor de la anchura del pico y a su altura, se vería justificado el valor del cortante equivalente y su localización.

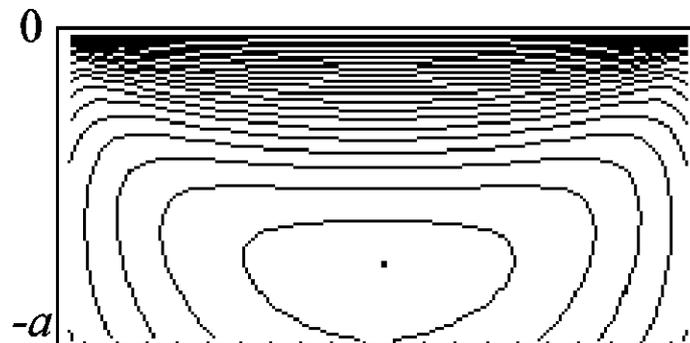
En la Figura 76 se observa el resultado de una lubricación de tipo D en el que la carga está concentrada en una zona del pico y el perfil de presiones tiene una forma muy distinta de la elíptica del contacto seco y estático.



**Figura 77** Mapa tensional correspondiente al modelo D

Se puede destacar que el cortante máximo ya se aproxima a la unidad con lo que la precaución que aplican algunas normas internacionales (AGMA e ISO para engranajes) de tomar la presión máxima de la distribución de Hertz como tensión crítica con la que comparar la tensión resistente del material, tenga alguna justificación por este lado.

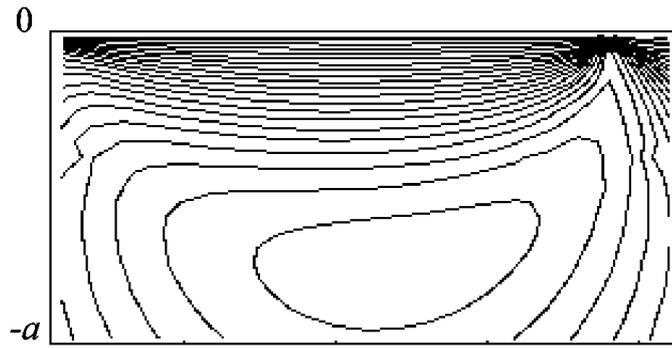
También es de destacar que bajo ciertos regímenes de lubricación el ancho en donde se concentran la mayor parte de los esfuerzos disminuye, esto explica que la fatiga superficial comience muchas veces por generar una mancha gris en la zona de fallo debido a micro-desconchados a los que investigadores japoneses han dado el nombre de "grey staining" [35].



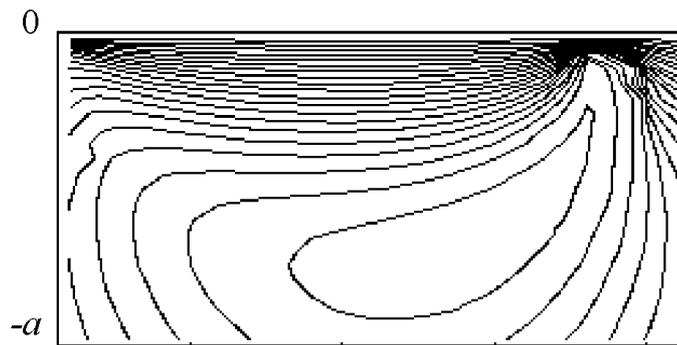
**Figura 78** Mapa tensional para  $\mu=0.022$

En cuanto a los resultados obtenidos con la distribución de presiones dada por Greenwood mostrados en las siguientes figuras, no se ha obtenido mucha diferencia en cuanto a la forma del mapa tensional, a la vez que los valores máximos y la distancia de estos a la superficie son muy similares por lo que se tiene que en cuanto al criterio de fallo el parámetro más influyente es el desplazamiento reducido del centro de presiones  $\mu$ , cuya obtención se ha visto al comienzo de este apartado.

Para un valor de  $\mu=0.15$  se observa que tiene dos máximos, uno en la superficie y otro en un punto cercano al dado por la distribución de Hertz. Ambos valores son muy parecidos

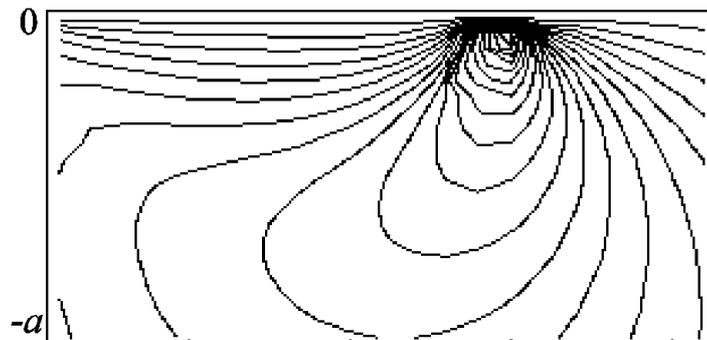


**Figura 79** Mapa tensional para  $\mu = 0.1$



**Figura 80** Mapa tensional para  $\mu = 0.15$

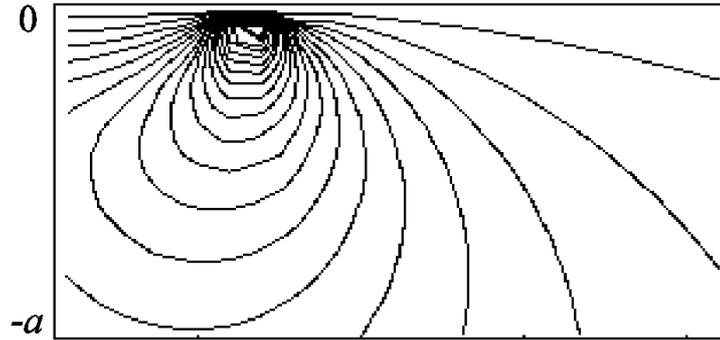
por lo que habrá dos modos de fallo en este régimen: el que tenga el origen de grieta en la superficie, y el que lo tenga en la subsuperficie.



**Figura 81** Mapa tensional cuando  $\mu = 0.5$

Como se puede observar en la Tabla V se puede establecer como regla general que cuando  $\mu$  aumenta la tensión tangencial máxima también aumenta y se aproxima a la superficie, siendo más crítico porque la grieta se originará antes, y porque al comenzar más cerca de la superficie, el desconchado se producirá mucho antes. La vida del componente a fallo superficial se reduce por la adición de ambos efectos.

Respecto al valor de  $\mu$  conviene señalar que éste disminuye al aumentar la fuerza aplicada



**Figura 82** Mapa tensional para  $\mu = 2$

**Tabla V** Valores críticos de cada régimen de lubricación según el modelo de Greenwood.

$\mu$	$x_c/a$	$z_c/a$	$\tau_{\text{máx}}/p_0$
$\mu=0.02$	0.00	0.74	0.301
$\mu=0.1$	0.14	0.73	0.335
$\mu=0.15$	0.28	0.70	0.311
$\mu=0.2$	0.68	0.015	1.568
$\mu=0.3$	0.56	0.016	1.204
$\mu=0.4$	0.43	0.023	0.750
$\mu=0.5$	-0.38	0.070	0,956
$\mu=2$	-0.43	0.070	2.042

con lo que en ese grado también disminuye la presión máxima  $p_0$  y por lo tanto también la tensión tangencial máxima.

Por otra parte, al aumentar  $\mu$  el régimen es más hidrodinámico con lo que dejan de tener efecto las hipótesis impuestas en el cálculo elastohidrodinámico. En concreto la independencia entre la zona de entrada y la de salida del lubricante en la zona de contacto tiene cada vez menos sentido, con lo que hay un límite para este valor.

Conforme aumenta la presión local en el pico se puede llegar a una situación en donde la máxima presión superficial se encuentre en la zona donde no hay materia al ser la rugosidad superficial no despreciable, de forma que la distribución de presiones a la salida tenga un pico más bajo y el gradiente de caída sea menor.

Otra causa que limita el pico de salida es la resistencia del material. Puede ocurrir que el

valor tangencial máximo sobrepase el límite elástico del material, pero dada la estrechez de la zona el efecto de plasticidad puede ser nulo en la superficie pues el material necesita un tiempo para reaccionar, dependiendo de la velocidad de propagación del sonido en el material. Este aspecto conlleva efectos dinámicos que complican innecesariamente el trabajo.

Conviene evitar que la existencia del pico distorsione los cálculos de vida a presión superficial, dada la complejidad del fenómeno. Pero cuando el pico es pequeño se puede estimar la tensión tangencial máxima subsuperficial, por lo que se puede hacer una recomendación dadas las pruebas realizadas y sus resultados.

Los métodos de cálculo de las normas AGMA e ISO modifican una tensión nominal teórica  $\sigma_H$  (dada por la teoría del contacto de Hertz) con factores que tienen en cuenta los defectos en la manufactura, y otros fenómenos que no tienen en cuenta la teoría de Hertz. Entre esos coeficientes no se encuentran los debidos a la distorsión del perfil de presiones que como se ha mostrado anteriormente puede tener un efecto decisivo en la resistencia del diente a presión superficial.

Se puede tener en cuenta la distorsión del perfil de presiones, viendo la tabla anterior añadiendo a todos los recomendados por las normas un factor  $K_\xi$  cuyo valor depende del desplazamiento del centro de presiones de Greenwood  $\mu$  el cual se calcula a partir de las variables elastohidrodinámicas del sistema. La Tabla VI se ofrecen unos valores recomendados de  $K_\xi$  que pueden ser orientativos.

**Tabla VI** Valores recomendados de  $K_\xi$

$\mu$	$K_\xi$	Comentario
$\mu < 0.1$	1	Teoría de Hertz válida
$0.1 < \mu < 0.15$	1	Posibilidad de inicio de grieta en la superficie
$0.15 < \mu < 0.5$	3	Inicio de grieta en la superficie
$\mu > 0.5$	>3	Comprobar régimen e hipótesis de partida. Realizar mapa tensional Comprobar rugosidad superficial

## Conclusiones.

En los mapas tensionales representados en este capítulo se puede observar la divergencia que existe entre los modelos desarrollados por la teoría de Hertz y la influencia que puede tener la lubricación en el mapa tensional y por lo tanto en el comportamiento del material.

La existencia del pico que puede no ser exacta pero que siempre existe, puede ser determinante. Con un pequeño pico se observa cómo un valor alto de tensión cortante se acerca a la superficie.

También es destacable el crecimiento del valor de cortante máximo. En el modelo D se ve que se aproxima a la unidad, esto es interesante porque explica como algunas normas señalan esa tensión como crítica para el estudio de la picadura.

Con este algoritmo se dispone de una nueva herramienta muy adecuada para realizar análisis sobre el comportamiento mecánico de las superficies de los materiales. Este estudio es fácilmente extrapolable a otros de importante significado como laminadores, rodamientos, cojinetes, etc, en los que la distribución de presiones se puede llegar a conocer mediante otros procedimientos que establece la mecánica del contacto.

Por último se ha aplicado el método a una distribución de presiones que siguiera las hipótesis elastohidrodinámicas de Greenwood que tiene la ventaja de que proporciona una expresión analítica de dicha distribución, y su forma depende de un único parámetro  $\mu$  en función de la cual se pueden dibujar los mapas tensionales correspondientes y a la vista de los resultados se ha recomendado un método que tiene en cuenta la distorsión del perfil de presiones para la modificación de las tensiones teóricas de las normas AGMA e ISO.

## **VI INFLUENCIA DEL PROCESO DE FABRICACIÓN EN LA RESISTENCIA A PRESIÓN SUPERFICIAL**

El objetivo de este capítulo consiste en introducir los principales factores de fabricación que intervienen en la durabilidad de los engranajes, para lo cual se van a revisar los principales procedimientos de fabricación, y se fijarán unos parámetros que sirvan de base para definir la calidad del engranaje como producto final.

Se comenzará comentando los distintos procesos convencionales que suelen utilizarse en la fabricación de engranajes, así como la caracterización del estado superficial y su influencia en la vida del diente.

Concibiendo el proceso de fabricación morfológicamente según el modelo de L. Alting [3], la forma geométrica de las ruedas dentadas se puede imprimir mediante procesos de flujo directo (fundición, pulvimetalurgia, deformación plástica), o bien mediante procesos básicos de flujo divergente (mecanizado).

Los procesos de conformado por fusión se usan para la fabricación de engranajes grandes, más de 2 m de diámetro (el factor tamaño juega un papel primordial en la rentabilidad del proceso), los cuales son usados en transmisiones de muy alta potencia.

Otra tecnología de fundición mediante la cual se obtienen buenos resultados es la fundición a alta presión. Esta tecnología se usa preferentemente en engranajes de aleaciones ligeras, presentando una alta productividad y precisión dimensional. Su principal limitación radica en los costes de producción para series pequeñas y en la limitación del tamaño.

Los procesos de pulvimetalurgia están adquiriendo cada vez mayor importancia presentando las mismas dificultades que la fundición a alta presión. En los procedimientos pulvimetalúrgicos los materiales tienen propiedades distintas a los metales, y el estado superficial de estos componentes dependen fuertemente de la calidad del molde lo que su estudio se aleja de los planteamientos del presente trabajo.

Los procesos de conformado por deformación plástica son utilizados para la fabricación de engranajes de dimensiones muy pequeñas. En estos casos, las distintas tecnologías de conformado usadas llegan a ser competitivas frente a otros procesos alternativos.

La gran mayoría de los engranajes se obtienen por mecanizado, estos procesos son predominantes desde reductores pequeños hasta la fabricación de reductores de grandes motores de 20.000 kw.

## **VI.1 Mecanizado de engranajes por generación**

El método más usado para la fabricación de engranajes es el de "generación", que se distingue del "tallado diente por diente" en que una misma herramienta obtiene una gran variedad de geometrías de dientes con gran precisión, y para grandes series de fabricación. En la generación, la información geométrica del diente se imprime en la rueda a partir de la geometría de la herramienta y del patrón de movimientos que consta como mínimo de dos movimientos relativos herramienta-pieza.

El procedimiento de generación consiste en hacer engranar la preforma con la herramienta que tiene la forma del diente, de tal modo que la herramienta arranca la viruta del diente hasta que la preforma adquiere la forma del diente conjugado. En el tallado, la herramienta se puede quedar a una distancia distinta de la nominal de engrane, en tal caso se dice que la rueda ha sido tallada con desplazamiento.

Para que dos dientes sean conjugados, basta que ambos sean tallados por la misma herramienta, y que los puntos de contacto entre ellos coincidan con los tallados por el mismo punto de la herramienta [28]. En el caso de la presente tesis se ha estudiado el caso más sencillo en el que la herramienta consiste en una cremallera de flancos planos. En el caso de los engranajes de Novikov-Wildhaber la cremallera talladora tiene dientes circulares lo cual es beneficioso pues maximiza el espesor de película de lubricante. Estos son cada vez más utilizados pero su estudio iría más allá de los objetivos planteados en la presente tesis.

La herramienta que talla las ruedas puede ser una cremallera (rueda de número de dientes infinito) o un piñón tallador. En ambos casos la herramienta tiene un movimiento perpendicular a la línea de contacto mientras talla la rueda. Este movimiento de arranque de viruta hace que la textura superficial sea paralela a la línea de contacto lo cual beneficia la formación de la película de lubricante en el funcionamiento de lubricante como observaron Johnson y Spence [54].

La cremallera se puede sustituir por una fresa madre, este método facilita que el movimiento de la herramienta sea continuo, sin que sea necesaria su traslación. Este procedimiento simplifica la construcción de la máquina talladora. Aunque la geometría generada sea la misma, la textura de la rugosidad, ya no es paralela a la línea de contacto teórica, el corte es más ruidoso, al ser tallada un mismo perfil por dientes diferentes, con lo que se generan perfiles de peor calidad superficial y de menor precisión geométrica.

El piñón tallador se usa de modo similar a la cremallera talladora mecanizando ruedas con su movimiento paralelo a la velocidad angular de engrane. Se usa sobretodo para el tallado de engranajes interiores. Tiene el inconveniente de que son más caros que los de cremallera o fresa madre, y que debido al desgaste la geometría del perfil tiene una degradación no uniforme lo que provoca desajustes en los cálculos.

El desgaste de la herramienta da origen a que los errores de transmisión crezcan sobre todo en los puntos donde la velocidad de deslizamiento es mayor, es decir, al principio y al final del engrane. El error de transmisión tiene una importancia capital en las cargas dinámicas, ya que hacen que la relación de transmisión no sea uniforme a lo largo de la línea de acción, y puede provocar cargas de impacto grandes.

En resumen, los métodos de generación se pueden clasificar por la geometría de la herramienta, y por el patrón de movimientos.

Las herramientas de generación de engranajes cilíndricos se pueden clasificar en herramientas con un sólo diente, y herramientas con varios dientes. Por la geometría, los dientes generadores más usados son:

- Trapeciales o de cremallera. Las caras que generan el perfil son planas, y los perfiles generados son los de geometría evolvente.
- Circulares. Los dientes generadores son semicirculares y los perfiles generados son los llamados engranajes de Wildhaber-Novikov y tienen la propiedad de que el espesor de película de lubricante es máximo [28].
- Parabólicos. Son como los de cremallera pero con las caras que generan el perfil parabólica convexa. Fueron introducidos por Litvin [61] para equilibrar el error de transmisión.

Respecto al patrón de movimientos relativos entre la pieza y la herramienta, se puede intuir que dada la naturaleza cilíndrica del engranaje el movimiento de rotación estará siempre presente. Como en todas las operaciones de corte de principio básico de conformado bidimensional, siempre estarán presentes los movimientos primarios y de avance de la pieza [3]. De acuerdo con esto se ha elaborado la Tabla VII.

**Tabla VII** Clasificación de procesos según el patrón de movimientos.

Herramienta		Pieza		Denominación de proceso
Prim.	Avan.	Prim.	Avan.	
T	T	-	R	Tallado cremallera. Método Maag
R	T	-	R	Tallado con fresa madre
R	R	-	R	Tallado hipoidal. Método Gleason
T	T	-	-	Mortajadora
R	T	-	-	Fresa de módulos

## VI.2 Acabado superficial

El acabado superficial tiene una importancia capital en la durabilidad de la superficie. Frecuentemente no se le somete a la superficie un tratamiento posterior al del tallado con herramienta, aunque las compañías que poseen la tecnología adecuada, suelen aplicar diversos tratamientos de endurecimiento superficial.

El tallado se realiza en varias etapas: desbaste, mecanizado fino y rectificado. La etapa de rectificado puede dividirse en varias etapas en el caso de engranajes: lapeado (lapping), afeitado (shaving), y pulido. Todas estas etapas deben producir una textura superficial paralela a las líneas de contacto para la mejora del régimen de lubricación. La última etapa del proceso suele consistir en hacer engranar a la rueda con un engranaje hecho de material muy duro y de alta calidad superficial conocido por "honing".

Los tratamientos superficiales suelen ser: cementación o nitruración superficial, endurecimiento por deformación plástica (shot peening), y recubrimiento con carbón de

diamante o con metales de baja fricción (plata). A veces se pule la superficie hasta darle un acabado espejo, pero normalmente no es necesario, ya que las últimas pasadas de tallado son lo suficientemente finas para que la rugosidad superficial alcanzada sea del orden de  $\mu\text{m}$ , normalmente menor del espesor de película de lubricante, además de conseguir la textura adecuada para producir un efecto beneficioso en el caso de que se alcance un régimen microelastohidrodinámico.

## VI.3 Caracterización de las superficies

Tanto la norma AGMA como la ISO establecen unos niveles de calidad en la construcción de los engranajes. Para conseguir cada uno de esos niveles de calidad entre otras especificaciones se requiere un acabado superficial determinado.

La norma ISO establece 12 niveles de calidad en los que tiene establecidos las tolerancias para el paso circular, el error acumulado en su sector de pasos, tolerancias de redondez y del error total de perfil, también para el error de distorsión y el error compuesto radial. La norma AGMA establece 16 niveles que se basan prácticamente en los mismos parámetros de medición.

El parámetro más usado para estimar la calidad del acabado superficial es la desviación típica  $\sigma_s$  de la rugosidad superficial dada por el perfil de alturas del rugosímetro (en la literatura anglosajona "root mean square" rms). El parámetro normalizado para estimar la rugosidad superficial es la media de las alturas de los picos  $R_a$  pero como los rugosímetros actuales tienen salida digital, el cálculo de la desviación típica no entraña mucha dificultad, y es un parámetro mucho más repetitivo que el de la media  $R_a$ . La calidad de los engranajes suele venir expresado en función de los valores de la desviación típica. De este modo un engranaje de calidad AGMA 12 tiene una rms menor de  $1.6 \mu\text{m}$ , mientras que los de clase 14 la tienen menor de  $0.25 \mu\text{m}$ . En la mayoría de los casos son valores menores que el espesor de película de lubricante.

El perfil dado por el rugosímetro se toma perpendicular a las líneas de contacto, pues es la dirección en la que se va a analizar el contacto plano.

Para estimar la influencia de la rugosidad superficial en las tensiones superficiales cuando dos dientes entran en contacto, se va a tomar el modelo de Greenwood y Williamson de caracterización de superficies [42]. Este modelo supone que la distribución de alturas de la superficie es normal y toma los siguientes parámetros:

$\sigma_s$  desviación típica de la altura de la rugosidad

$\kappa_s$  curvatura de los picos

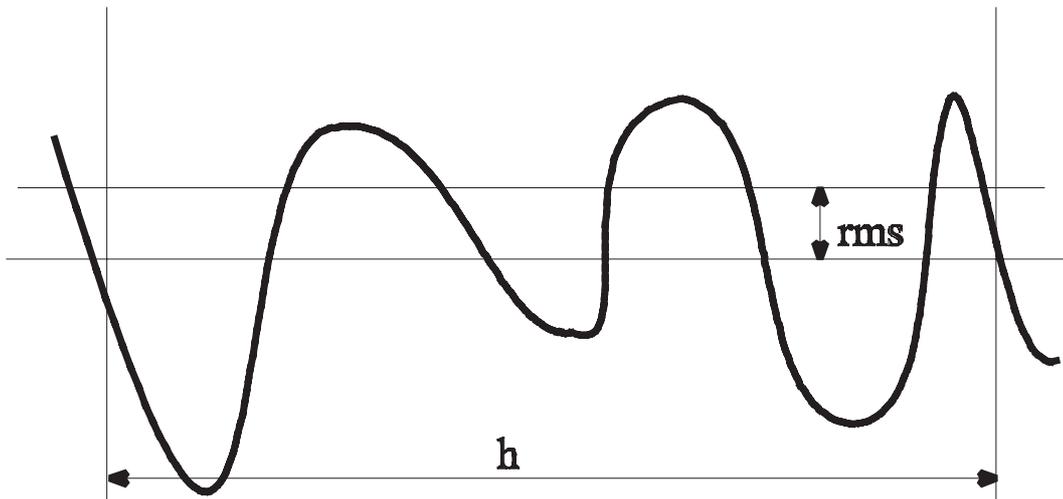
$\eta_s$  densidad de picos (nº de picos por unidad de área)

Para la obtención de estos parámetros en superficies reales se parte del perfil de la superficie dado por el rugosímetro. Este perfil es bidimensional, es una curva tomada en una longitud L que es la unión de los datos de las alturas  $z_i$  tomadas a intervalos de h. A partir de las alturas  $z_i$  del rugosímetro se pueden calcular los siguientes datos en cada punto registrado:

pendiente  $m_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{h}$

curvatura  $k_i = \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2}$

densidad de picos  $\eta_p$  dados en la curva del rugosímetro por unidad de longitud.



**Figura 83** Desviación típica de la rugosidad superficial

Las series de datos anteriores ( $z_i$ ,  $m_i$ ,  $k_i$ ) tienen sus respectivas desviaciones típicas  $\sigma$ ,  $\sigma_m$  y  $\sigma_k$ . Las dos últimos parámetros son muy sensibles al intervalo h cuando éste se toma del orden de la distancia que hay entre picos.

Las características de la topografía de la superficie rugosa se pueden estimar a partir de los datos del rugosímetro de la siguiente manera:

$$\sigma_s \approx \sigma$$

$$\kappa_s \approx \sigma_k$$

$$\eta_s \approx \eta_p$$

para esta última suposición se ha tenido en cuenta que las estrías de la rugosidad superficial tienen el sentido perpendicular al plano del rugosímetro por lo que el número de picos en ese sentido es despreciable frente a los aparecidos en la curva origen. En el caso en el que la densidad de picos fuera igual en ambos sentidos el valor de  $\eta_s$  sería estimado mejor por el de  $\eta_p^2$ . También se ha supuesto que la curva del rugosímetro detecte todos los picos al ser  $h$  lo suficientemente pequeño.

## VI.4 Contacto entre superficies curvas rugosas.

El contacto entre dos superficies rugosas, a efectos del estado de presiones y semiancho de contacto, se puede asemejar al sistema formado por una superficie plana rígida y una superficie con las siguientes características elásticas, geométricas y superficiales:

$$E = \frac{1}{\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}} \quad (278)$$

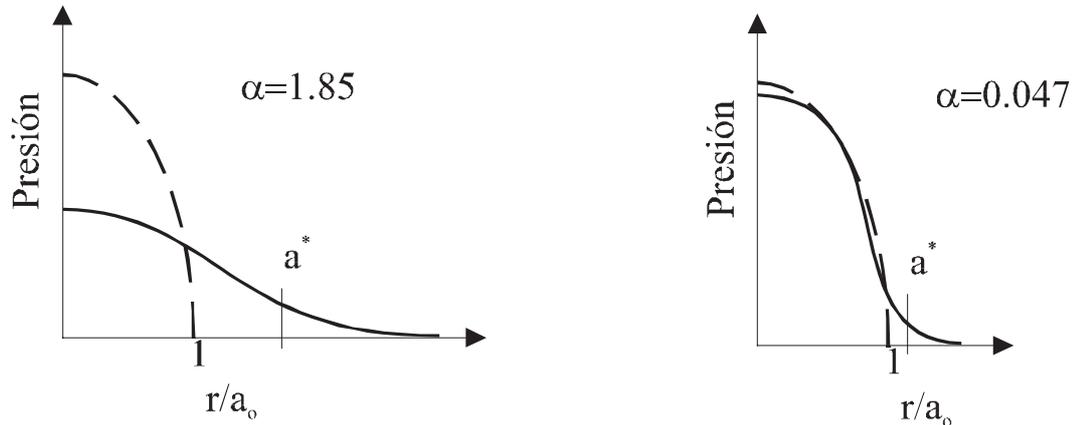
$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_{s1}^2 + \sigma_{s2}^2} \quad ; \quad \kappa_s = \frac{1}{\frac{1}{\kappa_{s1}} + \frac{1}{\kappa_{s2}}} \quad ; \quad \eta_s = \eta_{s1} + \eta_{s2} \quad (279)$$

En el análisis de las tensiones de contacto se va a suponer que las asperezas no se deforman plásticamente, y tienen una distribución gaussiana de alturas.

Se ha observado experimentalmente que la rugosidad superficial tiene dos efectos principales sobre la distribución de presiones de Hertz [55] como se puede apreciar también en la Figura 84

- Disminuye el pico de presiones
- Aumenta el ancho efectivo de contacto



**Figura 84** Influencia de la rugosidad superficial en la distribución de tensiones de Hertz.

La suma de estos dos efectos se traduce en que la tensión tangencial máxima subsuperficial disminuye y aumenta la profundidad a la que ocurre debido al aumento del ancho efectivo de contacto  $a^*$ . Ambos efectos son beneficiosos desde el punto de vista de resistencia a fatiga cuando la grieta tiene comienzo en la subsuperficie.

Dos parámetros adimensionales en función de los cuales se puede expresar tanto la variación de la presión máxima de contacto, como el semiancho efectivo de contacto, han sido definidos por K.L. Johnson [55]:

$$\alpha = \sigma_s \left( \frac{16RE}{9 P^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (280)$$

$$\mu = \frac{8}{3} \eta_s \sigma_s \left( \frac{2R}{\kappa_s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (281)$$

A partir de las representaciones gráficas de estos parámetros [55] se han obtenido las siguientes correlaciones lineales:

$$\frac{p(0)}{p_o} = 0.924251 - 0.57377\alpha + 0.004063\mu \quad (282)$$

$$\frac{a^*}{a} = 1.045843 + 0.490713\alpha - 0.00292\mu \quad (283)$$

Los errores obtenidos mediante estas correlaciones son menores del 5% para el caso de la relación de presiones, y del 1% para la relación de semianchos de contacto. Se pueden considerar válidas para un rango de valores de  $\alpha$  entre 0.05 y 1, y para un rango de valores de  $\mu$  entre 4 y 17.

Se puede observar en la correlación que el parámetro más influyente con diferencia es  $\sigma_s$ , mientras que las características topográficas de  $\kappa_s$  y  $\eta_s$  tienen una influencia mucho menor.

El valor de la tensión máxima subsuperficial y su profundidad se pueden obtener suponiendo una distribución de Hertz con la presión máxima y el ancho efectivo de contacto correspondiente.

De las expresiones anteriores se deduce que si  $\alpha < 0.05$  se puede despreciar la influencia de la rugosidad superficial en la distribución de presiones sobre las superficies.

Con lo descrito en este capítulo se puede establecer un factor  $K_r$  que sería la relación entre la presión en el centro de presiones y la presión nominal de Hertz y con el que habría que modificar el valor de la tensión nominal  $\sigma_H$  de forma que se tuviera en cuenta la rugosidad superficial. Este factor tendría valor 1 cuando  $\alpha < 0.05$ , y seguiría la correlación (282) si  $\alpha \geq 0.05$ . La profundidad a la que ocurre esta tensión tangencial máxima, influye en la dinámica de crecimiento de la grieta al estar el origen de grieta más cerca de la superficie.

$$K_r = \frac{p(0)}{p_o}$$

## **VI.5      Recapitulación**

Se ha proporcionado un criterio para estimar cuándo tiene influencia la rugosidad superficial sobre el estado tensional subsuperficial, estableciendo en su caso el factor  $K_r$  que hay que multiplicar a la tensión nominal para la obtención de la tensión tangencial máxima y su localización.

## **VII PROPUESTA DE CRITERIO DE FALLO POR FATIGA SUPERFICIAL EN ENGRANAJES**

Con todo lo anterior, se va a proceder a establecer el modelo cálculo a presión superficial, y el correspondiente criterio de fallo por fatiga superficial, que se propone en esta Tesis Doctoral, y que toma en consideración tanto la distribución de carga a lo largo de la línea de contacto obtenida bajo la hipótesis de mínimo potencial de deformación, como la distorsión producida en el perfil de presiones en la zona de contacto por la lubricación, caso de engranajes lubricados, o por la rugosidad, caso de engranajes sin lubricar. Como se ha indicado anteriormente, el modelo está basado en la determinación de la máxima tensión de cortadura en la subsuperficie del diente (que es la causante del inicio de la grieta cuya propagación da lugar a la picadura), a lo largo de toda la línea de contacto y de toda la línea de engrane.

A partir de este modelo, el criterio de fallo por fatiga en la superficie se establecería afirmando que existe riesgo de picadura cuando esta tensión de cortadura subsuperficial rebase el valor de la tensión de cortadura admisible del material para los ciclos de carga considerados. Sin embargo, puesto que las publicaciones técnicas presentan los valores no de las resistencias a la cortadura, sino los valores admisibles de la presión en el punto de contacto, parece más razonable formular el criterio de fallo en términos de la presión de contacto, para poder comparar con los valores de las resistencias publicados. Así pues, se tratará de encontrar el valor de la presión de Hertz equivalente que produce una tensión de cortadura en la subsuperficie igual a la obtenida por la aplicación del modelo que se propone. La relación entre esta presión equivalente y la presión de contacto que consideran los modelos AGMA e ISO será el factor por el que haya que multiplicar esta última presión

de contacto para tener en cuenta todas estas consideraciones.

Recordando lo expuesto en capítulos anteriores, la tensión de contacto, según el modelo de Hertz, que incorporan las dos normas internacionales citadas, viene dada por:

$$\sigma_0 = \left( \frac{\frac{F}{l_{ef}} \frac{1}{R}}{\frac{\pi}{E}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde  $F$  es la fuerza normal a las superficies en contacto,  $l$  la longitud efectiva de contacto,  $R$  el radio de curvatura relativo de los perfiles en el punto de contacto y  $E$  el módulo de elasticidad reducido de los materiales de rueda y piñón. Ambas normas parten de esta expresión, si bien difieren en la localización del punto crítico y, por tanto, en la estimación de los radios de curvatura, y en el cálculo de la longitud efectiva de contacto, para la que mientras AGMA toma el valor real de la longitud de contacto en el punto de la línea de engrane considerado, ISO adopta un valor aproximado, de expresión más sencilla. Aunque estas discrepancias pueden llegar a ser considerables, las posteriores correcciones, especialmente por los factores de distribución de carga longitudinal y transversal, tienden a equilibrarlos. En lo que sigue, se partirá de esta expresión y se intentará adaptar a ella las conclusiones obtenidas a lo largo del desarrollo del trabajo, mediante la inclusión de los correspondientes factores de corrección.

## **VII.1 Condiciones críticas de carga: factor de intensidad de carga, $K_F$**

Para el caso de engranajes rectos, se demostró en el capítulo IV.1 que el punto de contacto crítico podía ser el de comienzo del engrane, el de finalización, el límite superior del intervalo de carga no compartida y el límite inferior del mismo intervalo. Se tratará, por tanto de evaluar el radio de curvatura relativo en esos cuatro puntos, particularizar la expresión anterior para cada caso y seleccionar el valor máximo de las cuatro presiones de contacto obtenidas.

En los puntos de contacto único superior e inferior es evidente que toda la carga la soporta la única pareja de dientes en contacto, y que la longitud efectiva de contacto es igual al ancho de cara. Así pues, la relación  $F/l$  es en este caso igual a  $F/F$ , siendo  $F$  la fuerza total

en sentido normal a las superficies en contacto y  $F$  el ancho de cara. No obstante, en los puntos de inicio y finalización del engrane, la carga se reparte entre dos parejas de dientes, y lo hace del modo que se dedujo en el capítulo IV.1. Por consiguiente, si se admite la aproximación presentada en el citado capítulo IV.1, la relación  $F/l$  que aparece en la expresión anterior, debería ser:

$$\frac{\frac{1}{3} F}{2 F} = \frac{F}{6 F}$$

con lo cual, se puede afirmar que la presión de contacto crítica vendrá dada por

$$\sigma_0 = \left( \frac{\frac{F}{F} \frac{1}{R}}{\frac{\pi}{E}} \right)^{\frac{1}{2}} K_F$$

donde  $K_F$ , el factor de intensidad de carga, vale 1 si el radio de curvatura relativo se calcula en los puntos de contacto único superior o inferior, y  $(1/6)^{1/2}$ , aproximadamente, si se calcula en los puntos de comienzo y finalización del engrane. Si no se deseara emplear la aproximación citada,  $K_F$  se podría determinar en función de las rigideces de ambas parejas de dientes, como se recoge en el capítulo IV.1

$$K_F = \left( \frac{u_1}{2(u_1 + u_2)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

En el caso de engranajes helicoidales, según se demostró en el capítulo IV.2, la máxima presión superficial se localiza en un punto muy próximo al punto medio del piñón, lo que coincide con la recomendación de la norma AGMA, y en un punto de la línea de engrane en el que la longitud de contacto es mínima. También se demostró que en dicho punto actúa una fuerza por unidad de longitud  $F_{\text{máx}}/l_{\text{mín}}$  superior a la obtenida bajo la hipótesis de reparto uniforme  $F/l_{\text{mín}}$  en aproximadamente un 50%. En consecuencia, para engranajes

helicoidales, la presión de contacto se puede calcular mediante la expresión:

$$\sigma_0 = \left( \frac{\frac{F}{l_{\min}} \frac{1}{R}}{\frac{\pi}{E}} \right)^{\frac{1}{2}} K_F$$

con  $K_F = (F_{\max}/F)^{1/2} \approx (1.5)^{1/2}$ , y  $R$  calculado en el punto medio del piñón.

Generalizando lo anterior, y teniendo en cuenta que la longitud mínima de contacto en el caso de engranajes rectos es igual al ancho de cara, se puede afirmar que la presión de contacto crítica viene dada, en todos los casos, por la expresión:

$$\sigma_0 = \left( \frac{\frac{F}{l_{\min}} \frac{1}{R}}{\frac{\pi}{E}} \right)^{\frac{1}{2}} K_F$$

donde:

- Para engranajes rectos, en los puntos de contacto único superior o inferior

$$K_F = 1$$

- Para engranajes rectos, en los puntos de comienzo y finalización del engrane

$$K_F = \left( \frac{u_1}{2(u_1 + u_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{1}{6}}$$

- Para engranajes helicoidales, siempre en el punto medio del piñón

$$K_F = \sqrt{\frac{F_{\max}}{F}} \approx \sqrt{1.5}$$

## VII.2 Desplazamiento del perfil de presiones: factor de distorsión por lubricación, $K_\xi$

En los modelos descritos hasta ahora, la presión en el punto de contacto cuando sobre el mismo actúa una fuerza por unidad de longitud, venía determinada por la teoría de Hertz, y por tanto se admitía una distribución elíptica de presiones en la zona de contacto. Esta hipótesis es perfectamente aceptable en el caso del contacto entre superficies lisas, pero, como se explicó en el capítulo II.3, en determinadas condiciones, esta distribución puede verse notablemente distorsionada por efecto de la lubricación. Esto significa, por un lado, que la fuerza por unidad de longitud ( $F/l$ ) ya no producirá una presión en el punto de contacto igual a la obtenida mediante la ecuación de Hertz, y por otro lado, que la tensión de cortadura máxima en la subsuperficie ya no será igual 0.3 veces la presión de contacto, como en el caso de distribución de Hertz.

En el capítulo V.1 se presentó un procedimiento para el cálculo de la tensión de cortadura máxima en la subsuperficie, basado en el factor de distorsión  $\mu$  de Greenwood y el modelo de lubricación elastohidrodinámica de engranajes de Dowson. Si este valor de la tensión de cortadura máxima se relaciona con la presión superficial que, según el modelo de Hertz, produciría una fuerza por unidad de longitud en el punto de contacto igual a la considerada, aparece el parámetro  $\xi$

$$\xi = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{0,\text{Hertz}}}$$

y teniendo en cuenta que la presión de Hertz es igual a la tensión de cortadura máxima, según este modelo, dividido por 0.3, se tiene que la presión de Hertz equivalente sería:

$$\sigma_0 = \sigma_{0,\text{Hertz}} \frac{\xi}{0.3}$$

Por consiguiente, la presión en el punto de contacto deberá ser:

$$\sigma_0 = \left( \frac{\frac{F}{l_{\min}} \frac{1}{R}}{\frac{\pi}{E}} \right)^{\frac{1}{2}} K_F K_\xi$$

donde  $K_\xi$  es el factor de distorsión por lubricación, y viene dado por:

$$K_\xi = \frac{\xi}{0.3}$$

El parámetro  $\xi$  puede calcularse mediante el procedimiento descrito en el capítulo V.2. También se pueden tomar los valores de  $K_\xi$  directamente de la tabla VIII, lo que constituye una aproximación muy razonable.

**Tabla VIII** Valores recomendados de  $K_\xi$

$\mu$	$K_\xi$	Comentario
$\mu < 0.1$	1	Teoría de Hertz válida
$0.1 < \mu < 0.15$	1	Posibilidad de inicio de grieta en la superficie
$0.15 < \mu < 0.5$	3	Inicio de grieta en la superficie
$0.5 < \mu$	>3	Comprobar régimen e hipótesis de partida. Realizar mapa tensional Comprobar rugosidad superficial

Obviamente,  $K_\xi$  es igual a 1 para engranajes sin lubricar.

### **VII.3 Engranajes no lubricados: factor de contacto rugoso, $K_\alpha$**

Análogamente, en el caso de contacto rugoso sin lubricación, la distribución de presiones en la zona de contacto tampoco es elíptica. En el capítulo VI se presentó un método para el cálculo de la presión de contacto en estas condiciones, basado en el modelo de Johnson de contacto rugoso, y se obtuvo el valor de dicha presión de contacto. Si se define el factor de contacto rugoso  $K_\alpha$  como la relación entre la presión de contacto obtenida y la que se deriva del modelo de Hertz para una misma fuerza por unidad de longitud en el punto de

contacto, se tendrá:

$$\sigma_0 = \sigma_{0,\text{Hertz}} K_\alpha$$

El cálculo de  $K_\alpha$  se puede realizar por el procedimiento descrito en el capítulo VI, o bien, de modo aproximado, a partir de los siguientes parámetros adimensionales:

$$\alpha = \sigma_s \left( \frac{16RE}{9 P^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\mu = \frac{8}{3} \eta_s \sigma_s \left( \frac{2R}{\kappa_s} \right)^{\frac{1}{2}}$$

De cuya representación gráfica [55] se ha obtenido la siguiente correlación lineal:

$$K_\alpha = 0.924251 - 0.57377\alpha + 0.004063\mu$$

Para engranajes lubricados,  $K_\alpha$  es igual a 1.

## VII.4 Formulación del criterio de fallo por presión superficial

Con todo lo que se acaba de exponer, el modelo de cálculo a presión superficial se puede formular de la siguiente manera:

$$\sigma_0 = \left( \frac{\frac{F}{l_{\min}} \frac{1}{R}}{\frac{\pi}{E}} \right)^{\frac{1}{2}} K_F K_\xi K_\alpha$$

Esta expresión es del todo similar a la que consideran las normas AGMA e ISO, con la única salvedad de que el radio de curvatura relativo debe calcularse en los puntos

anteriormente citados (radio medio del piñón, para engranajes helicoidales, y el más desfavorable de los dos extremos del intervalo de engrane y del intervalo de contacto único, para engranajes rectos), y la inclusión de los tres factores  $K_F$ ,  $K_\xi$  y  $K_\alpha$ , cuyos valores se calculan como se acaba de exponer en los apartados anteriores.

De esta manera se ha determinado una presión de Hertz equivalente, que permite utilizar los valores publicados de las resistencias a presión superficial de los materiales para engranajes a la hora de evaluar la posibilidad de fallo. Por consiguiente, el criterio de fallo por fatiga superficial se puede enunciar diciendo que es previsible la aparición de picadura si la tensión de contacto obtenida mediante la fórmula anterior supera el valor de la resistencia a la presión superficial de los materiales de las ruedas, para el número de ciclos establecido.

Dicho de otra forma, el factor de seguridad a presión superficial vendrá dado, directamente, por:

$$n_c = \frac{S_c}{\sigma_0}$$

donde  $S_c$  es la resistencia a la presión superficial y  $\sigma_0$  se calcula por el procedimiento que se acaba de presentar.

## VIII CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

En el presente trabajo se ha revisado y perfeccionado el modelo de cálculo a presión superficial de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente. Con relación a los modelos que consideran las normas internacionales de diseño AGMA e ISO fundamentalmente, en el que aquí se propone tomar en consideración los siguientes aspectos:

- La distribución de carga a lo largo de las líneas de contacto no es uniforme, como tampoco lo es el reparto de la misma entre pares de dientes en contacto simultáneo.
- La presión de contacto máxima, o crítica, debe determinarse mediante un estudio exhaustivo de la distribución de presiones a lo largo de toda la línea de contacto, y considerando todas las líneas de contacto a lo largo de toda la línea de engrane. El hecho de que las dos normas citadas anteriormente establezcan las condiciones críticas de presión en puntos diferentes, da una idea de la precariedad de la hipótesis que aquí se rechaza.
- El perfil de presiones en los puntos de contacto se distorsiona en el caso de regímenes de lubricación mixta, no siendo admisible la hipótesis de distribución hertziana en la región próxima a la zona de transición de lubricación elastohidrodinámica a lubricación hidrodinámica. Este fenómeno ha de tenerse en cuenta no sólo para el cálculo de la lubricación, sino también para la distribución de la presión superficial.
- El perfil de presiones también se ve afectado, especialmente en el caso de engranajes no lubricados, por la rugosidad del material, pudiendo alejarse considerablemente de la distribución de Hertz para valores relativamente elevados de la misma.
- Ambas distorsiones del perfil de presiones producen no sólo variaciones cuantitativas en la presión de contacto, sino que también afecta a la distribución de

tensiones en la subsuperficie, de modo que se altera la relación de la tensión de cortadura máxima a la presión de contacto con respecto al valor de 0.3 que se obtienen por las distribuciones de Hertz.

Para la determinación de la distribución de carga a lo largo de las líneas de contacto se partió de la hipótesis de mínimo potencial de deformación, para cuya determinación se emplearon métodos variacionales. En el caso de engranajes rectos, y si se desprecia el pequeño efecto de borde de los extremos del diente, es admisible la hipótesis de reparto uniforme de carga a lo largo de la cara del diente, pero no es admisible el de reparto uniforme entre pares de dientes en el intervalo de carga compartida. El estudio realizado reveló un reparto de carga, dentro de dicho intervalo, que variaba a lo largo de la línea de engrane, y por tanto con el punto de contacto, y que esta variación se podía considerar, en una primera aproximación, lineal, variando entre un tercio y dos tercios de la carga total transmitida.

En el caso de engranajes helicoidales, el planteamiento del problema variacional es similar, aunque su resolución es bastante más compleja, teniendo que recurrir a técnicas de optimización como las condiciones de Kuhn-Tucker y los multiplicadores de Lagrange. Los resultados obtenidos, y presentados en capítulos anteriores, revelan que, en efecto, la distribución de carga no es en absoluto uniforme, y que dicha distribución se ve fuertemente influenciada por los parámetros geométricos de la transmisión.

Para ratificar estos resultados, se ha desarrollado un estudio paralelo mediante el empleo del método de los elementos finitos, de la que, aparte de la validación del modelo desarrollado, se derivan también la importante conclusión de que la dependencia entre secciones contiguas del diente no tiene influencia relevante en la distribución de fuerza, lo que permite considerar el contacto entre dientes helicoidales como una sucesión de contactos entre dientes rectos (definidos por las correspondientes secciones frontales) girados unos respecto de los otros, que se comportan de modo independiente.

Con las distribuciones de carga anteriores se han evaluado los valores de la presión superficial en todos los puntos de todas las líneas de contacto a lo largo del engrane. En el caso de dentaduras rectas se ha encontrado que, aunque existen discrepancias en la localización del punto de presión crítica, el valor de dicha presión crítica, calculada en el punto crítico con la distribución de carga obtenida, se asemeja notablemente a la presión crítica que determinan las normas, en el punto en que ellas consideran pero con la hipótesis de distribución de carga uniforme. Ello viene a justificar el valor de la presión adoptado por las normas, que sorprendentemente difiere mucho del valor máximo que se obtendría mediante la aplicación del modelo que ellas mismas proponen. A pesar de todo, se ha de señalar que todavía es posible encontrar discrepancias en la presión crítica respecto de la sugerida por las normas, para determinados casos, como es el acortamiento de la distancia

entre centros o el aumento del desplazamiento.

En el caso de engranajes helicoidales sucede al contrario. La presión superficial derivada de la aplicación de la distribución de carga obtenida, se localiza en un punto extremadamente cercano al sugerido por las normas, en especial AGMA. Sin embargo, la fuerza en ese punto es notablemente superior a la que se obtendría bajo la hipótesis de distribución uniforme, lo que viene a corroborar el resultado obtenido por Litvin [60], citado anteriormente.

La distorsión del perfil de presiones por lubricación es conocida por los trabajos de Dowson y sobre todo de Greenwood, aunque no se habían aplicado al cálculo de presión superficial, seguramente porque su influencia es muy pequeña en engranajes muy cargados. Sin embargo, la importancia de esta distorsión es alta, pues produce una distribución de tensiones en la subsuperficie diferente de la que produce la distribución hertziana. Se ha encontrado que la tensión de cortadura máxima en la subsuperficie, que es la que origina el inicio del fallo por picadura, no guarda con la presión de contacto la misma relación que ambos parámetros guardan en una distribución de Hertz. Puesto que el método de cálculo relaciona la seguridad con la presión de contacto, se ha introducido un factor de corrección de distorsión por lubricación, para tener en cuenta este efecto en el modelo.

Finalmente, se ha comprobado que para valores de la rugosidad superficial por encima de un determinado límite, se produce otro tipo de distorsión del perfil de presiones con respecto al de Hertz, con especial incidencia en engranajes no lubricados. Al igual que en el caso anterior, este fenómeno, que había sido estudiado por Johnson [55], se ha aplicado al contacto entre dientes, estudiando la divergencia, no ya de la presión de contacto, sino de la tensión de cortadura crítica obtenida a partir del perfil de presiones distorsionado. Como antes, el resultado ha sido la introducción de un factor de contacto rugoso, que tiene en cuenta este efecto, y para cuyo cálculo se ha presentado, además del desarrollo del método, una fórmula aproximada, obtenida por correlación, de muy fácil utilización.

Por último, y a modo de resumen de todas las contribuciones anteriores, se ha presentado un nuevo modelo de cálculo a presión superficial, en el que para tener en cuenta lo expuesto anteriormente, a la expresión utilizada por las normas para la tensión de cálculo, se han añadido tres factores: el factor de intensidad de carga, el factor de distorsión por lubricación y el factor de contacto rugoso. Para todos ellos se han desarrollado los métodos de cálculo correspondientes, aunque a efectos de diseño, será por lo general suficiente:

- Para engranajes rectos, en los puntos de contacto único superior o inferior

$$K_F = 1$$

- Para engranajes rectos, en los puntos de comienzo y finalización del engrane

$$K_F = \left( \frac{u_1}{2(u_1 + u_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{1}{6}}$$

- Para engranajes helicoidales, siempre en el punto medio del piñón

$$K_F = \sqrt{\frac{F_{\max}}{F}} \approx \sqrt{1.5}$$

- Tomar  $K_\xi$  de una tabla presentada en el capítulo IV en función del factor de distorsión de Greenwood para engranajes lubricados, y  $K_\xi=1$  para engranajes sin lubricar o altamente cargados.
- Tomar  $K_\alpha$  de una correlación, presentada en el capítulo V para engranajes sin lubricar, y  $K_\alpha=1$  para engranajes lubricados o con superficies de contacto muy lisas.

Como líneas de investigación que podrían tomar partida de esta tesis cabría destacar las siguientes:

- El estudio realizado ha acometido el problema relativamente sencillo de los engranajes cilíndricos. Se han establecidos las bases teóricas y metodológicas para su futura aplicación en el diseño de engranajes cónicos e hipoidales, que ofrecen otras posibilidades en el desarrollo de mecanismos.
- La metodología y los desarrollos realizados son fácilmente extensibles al estudio de otros elementos mecánicos, como pueden ser tornillos de potencia, ejes, cilindros de laminación, etc.
- Basándose en la distribución de fuerzas y la teoría elastohidrodinámica desarrollada se puede estimar el rendimiento mecánico en la transmisión de engranajes obteniendo un modelo avanzado que permitiría optimizar la transmisión desde el punto de vista del rendimiento.

- Estudios de la mecánica de la fractura basándose en los mapas tensionales de la subsuperficie, estableciendo la vida del componente de un modo mucho más preciso. El estudio de la vida del componente requiere un tratamiento probabilístico ya que la propagación de grieta suele seguir una distribución de Weibull.
- El tratamiento superficial es de vital importancia para alargar la vida del componente, aunque muchas veces no se aplica al requerir una tecnología que no se posee en pequeños talleres. La elaboración de modelos que incluyan una gradación de propiedades mecánicas con la distancia a la superficie puede ser una herramienta muy útil para el diseño de elementos mecánicos.
- Los desajustes en el montaje, las rigideces de los ejes y acoplamientos, y su efecto en la distribución de la carga tienen fácil solución mediante el modelo descrito en esta tesis. Se habría de tomar como condición de contorno el desplazamiento de cada una de las secciones helicoidales independientes.
- La inclusión del efecto de la rugosidad superficial en el modelo de lubricación será muy interesante al ampliar el campo de aplicación de la tesis a regímenes de lubricación microelastohidrodinámica, así como del rendimiento al que se están aplicando formulaciones demasiado experimentales con un muy estrecho campo de aplicación.

## IX BIBLIOGRAFÍA

- [1] Abersek, B.; Flasker, J. - "Numerical methods for evaluation of service life of gear"; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; Vol. 38, No. 15, pp 2531-2545; 1995
- [2] AGMA Standard 2001-C95 - "Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth"; *American Gear Manufacturers Association*; Alexandria, VA; 1995
- [3] Altung, L. - "Fundamentals of Materials Processing"; *Marcel Dekker*; Basel; 1994
- [4] Anifantis, N.; Dimarogonas, A. D. - "Flash and bulk temperatures of gear teeth due to friction."; *Mechanism & Machine Theory*; Vol. 28, No. 1, pp 159-164; 1993
- [5] ANSI/AGMA 908-B89 - "Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical and Herringbone Gear Teeth"; *American Gear Manufacturers Association*; Alexandria, VA; 1989
- [6] Arsham, H.; Oblak, M. - "Matrix inversion: a computational algebra approach"; *International Journal of Mathematical Education Science and Technology*; Vol. 27, No. 4, pp 599-605; 1996
- [7] Artes, M.; Pedrero, J.I. - "Computerized graphic method for the analysis of gear design"; *Mechanism & Machine Theory*; Vol. 29, No. 1, pp 59-71; 1994
- [8] Atanasiu, Virgil. - "Specific aspects of the deflection of meshing teeth for cylindrical gears with smaller number of pinion teeth"; *Proceedings. International Congress - Gear Transmissions*; Sofia (Bulgaria), Vol. 1, pp 610-614; 1995

- [9] Attia, A.Y. - "Fatigue failure of gears of Circular Arc Tooth-profile"; *Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 112, No. 3, pp 453-459; 1990
- [10] Baret, C.; Pidello, A.; Raffa, F.A.; Strona, P.P. - "Stress path along the facewidth in spur gears fillet by 3D p-FEM models"; *Proceedings of the 1989 International Power Transmissions and Gearing Conference*; Ontario; pp 173-179; 1989
- [11] Bibel, G.D.; Reddy, S.K.; Savage, M.; Handschuh, R.F. - "Effects of Rim Thickness on Spur Gear Bending Stress"; *Journal of Mechanical Design. Trans ASME*; Vol. 116, No. 4, pp 1025-1042; 1994
- [12] Blake, J.W.; Cheng, S. - "A Surface Pitting Life Model for Spur Gears: Part II- Failure Probability Prediction"; *Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 113, No. 3, pp 719-724; 1991
- [13] Blake, J.W.; Cheng, S. - "A Surface Pitting Life Model for Spur Gears: Part I- Life Prediction"; *Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 113, No. 3, pp 712-718; 1991
- [14] Blok, H. - "Theoretical Study of Temperature Rise at Surfaces of Actual Contact under Lubricating Conditions"; *General discussion on Lubrication and Lubricants (Inst. Mechanical Engrs.)*; Vol. 2, pp 222-235; 1937
- [15] Bos, J.; Moes, H. - "Frictional Heating of Tribological Contacts"; *Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 117, No. 1, pp 171-177; 1995
- [16] Brushan, B. - "Contact mechanics of rough surfaces in tribology:Single asperity contact"; *Applied Mechanics Review. Trans. ASME*; Vol. 49, No. 5, pp 275-298; 1996
- [17] Buckingham, E. - "Analytical Mechanical of Gears"; *McGraw-Hill*; New York; 1949
- [18] Cai, Y. - "Simulation on the Rotational Vibration of Helical Gears in Consideration of the Tooth Separation Phenomenon (A New Stiffness Function of Helical Involute Tooth Pair)"; *Journal of Mechanical Design. Trans. ASME*; Vol. 117, No. 3 pp 213-222; 1995
- [19] Cameron, A. - "A basic introduction to lubrication"; *Oxford University Press*; Oxford; 1993
- [20] Cardou, A.; Tordion, G.V. - "A Study of Spur Gear Geometry Factor Through

- Complex Potential Analysis"; *Journal of Mechanism, Transmissions and Automation in Design. Trans. ASME*; Vol. 111, No. 2, pp 433-438; 1989
- [21] Cheng,S.; Cheng,H.S.; Keer, L.M.; Ai,X. - "Surface Crack Initiation Under Contact Fatigue: Experimental Observation and Contact Analysis"; *Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 115, No. 3 pp 658-665; 1993
- [22] Conry, T.F; Seireg, A. - "A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact"; *Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME*; Vol. 2, No. 6 pp 387-392; 1971
- [23] Costopoulos, T. - "Generalized theory of gearing and tooth stress"; *Proceedings International Congress - Gear Transmissions*; Sofía (Bulgaria); pp 369-374; 1995
- [24] Deng, G.; Kato, M. - "Initial temperature evaluation for flash temperature index of gear tooth"; *Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 117, No. 3, pp 476-481; 1995
- [25] DIN Standar 3990 - "Calculation of Load Capacity of Spur , Helical and Bevel Gears: Bases and Calculation Formulae"; 1970
- [26] Dowson, D.; Higginson, G.R.; Whitaker, A.V. - "Elastohydrodynamic Lubrication: A survey of isothermal solutions"; *Journal of Mechanical Engineering Science*; Vol. 4, pp 121; 1962
- [27] Dudley, D.W. - "Manual de Engranajes. Diseño, Manufactura y Aplicación de Engranajes"; *C.E.C.S.A.*; Madrid; 1973
- [28] Dyson, A. - "A general theory of kinematics and geometry of gears in three dimensions"; *Clarendon Press*; Oxford; 1969
- [29] Errichello, R. - "Friction, Lubrication, and Wear of Gears"; *Handbook of Friction and Lubrication. ASM*; pp 534-545; 1994
- [30] Estrems, M.; Fuentes, A.; Pedrero, J.I. - "Estudio de la distribución de carga entre dientes de engranajes rectos de perfil de evolvente"; *Anales de Ingeniería Mecánica*; Vol. 12, No. 3, pp 153-160; 1997
- [31] Evans, C.R.; Johnson, K.L. - "The Rheological Properties of EHD Lubricants"; *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*; Part C Vol. 200, No. C5, pp 303-312; 1986

- [32] Evans, C.R.; Johnson, K.L. - "The Influence of Surface Roughness on EHL Traction"; *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*; Part C Vol. 201, No. C2, pp 145-150; 1987
- [33] Evans, H.P.; Snidle, R.W. - "Wildhaber-Novikov Circular Arc Gears: Elastohydrodynamics"; *Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 115, No. 3, pp 487-492; 1993
- [34] Fan, H.; Keer, L.M.; Cheng, W.; Cheng, H.S. - "Competition Between Fatigue Crack Propagation and Wear"; *Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 115, No. 1, pp 141-147; 1993
- [35] Faure, L. - "Micro Endommagements de surface des dents D'Engranges cémentes Trempe Rectifies"; *Proceedings International Congress. Contact Mechanics*; Burdeos (Francia); pp 96-97; 1994
- [36] Fein, R.S. - "Liquid Lubricants"; *Handbook of Friction and Lubrication. ASM*; pp 81-88; 1994
- [37] Filiz, I.H.; Eyercioglu, O. - "Evaluation of Gear Tooth Stresses by Finite Element Method"; *Journal of Engineering for Industry. Trans. ASME*; Vol. 117, No. 2, pp 232-239; 1995
- [38] Fuentes, A. - "Modelo de cálculo a flexión de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente"; Tesis Doctoral, E.T.S.Ingenieros Industriales, UNED, Madrid.; 1996
- [39] Fuentes, A.; Estrems, M.; Pedrero, J.I. - "Análisis de la tensión de flexión en engranajes cilíndricos de perfil de evolvente"; *Anales de Ingeniería Mecánica*; Bilbao; Año XII, Vol. 3, pp 169-176; 1997
- [40] Gleason Works - "Understanding Tooth Contact Analysis"; *Division of Gleason Works*; Rochester, NY; 1981
- [41] Greenwood, J.A. - "An extension of the Grubin theory of elastohydrodynamic lubrication"; *Journal of Physics; Series D: Applied Physics*; Vol. 5, pp 2195-2211; 1972
- [42] Greenwood, J.A.; Williamson, J.B.P. - "Contact of nominally flat surfaces"; *Proceedings Royal Society*; Vol. A295, pp 300-310; 1966
- [43] Grubin, A. - "Fundamentals of Hydrodynamic Theory of Lubrication of Heavily

- Loaded Cylindrical Surfaces"; K. Ketova, ed., *Translation of a Russian Book No. 30, Central Scientific Institute for Technology and Mechanical Engineering; Moscú (Rusia); 1949*
- [44] Hadgikov, L.; Valeva, V.; Dabnishky, P.; Ganchev, E. - "Analysis of Dynamic Stresses in Gears by 3D Boundary Elements"; *Proceedings of the 1989 International Power Transmissions and Gearing Conference; Ontario; pp 489-498; 1989*
- [45] Hamrock, B.J.; Brewe, D. - "Simplified Solution for Stresses and Deformations"; *Journal of Lubrication Technology. Trans. ASME; Vol. 105, No. 1, pp 171-177; 1983*
- [46] Harlow, D.G. - "Reability modelling based on fatigue crack growth"; *International Journal of Mathematical Education Science and Technology; Vol. 27, No. 3, pp 447-454; 1996*
- [47] Henriot, G. - "Traité Théorique et Practique des Engrenages"; *Dunod; Paris; 1979*
- [48] Hertz, H. - "Über die Berührung fester elastischer Körper"; *Journal reine und angewndte Mathematik; Vol. 92, pp 156-71; 1882*
- [49] Hess, D.P.; Soom, A. - "Friction at a Lubricated Line Contact Operating at Oscillating Sliding Velocities"; *Journal of Tribology. Trans. ASME; Vol. 115, No. 1, pp 147-152; 1990*
- [50] Hooke, C.J. - "The Minimum Film Thickness in Line Contacts During Reversal of Entrainment"; *Journal of Tribology. Trans. ASME; Vol. 115, No. 1, pp 191-199; 1993*
- [51] Horn, J.H.; Fin, J.; Yang, K. - "Scuffing as Evaluated From the Viewpoint of Surface Roughness and Friction Energy"; *Journal of Tribology. Trans. ASME; Vol. 118, No. 3, pp 669-675; 1996*
- [52] Ishii, K.; Klinger, J.M.; Hamrock, B.J. - "Compatibility-Based Design for Contact Stress"; *Journal of Mechanical Design. Trans. ASME; Vol. 115, No. 2, pp 359-366; 1993*
- [53] Jaramillo, T.J. - "Deflections and moments due to a concentrated load on a cantilever plate of infinite width"; *Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME; Vol. 72, No. 1, pp 67-72; 1950*

- [54] Johnson, K.L.; Spence, D.I. - "Determination of Gear Tooth Friction by Disc Machine"; *Tribology International*; Vol. 24, No. 5, pp 269-275; 1991
- [55] Johnson, K.L. - "Contact Mechanics"; *Cambridge University Press*; Cambridge; 1985
- [56] Kato, M.; Inoue, K.; Deng, G.; Jeong, B.S. - "Size Effect in Bending Strength of Carburized Gear Teeth"; *Journal of Mechanical Design. Trans. ASME*; Vol. 115, No. 4, pp 1013-1018; 1993
- [57] Lafont, P. - "Cálculo de Engranajes Paralelos"; *E.T.S.I.I. Universidad Politécnica de Madrid*; Madrid; 1991
- [58] Liang, X.; Kaiyuan, J.; Yongqing, J.; Darong, C. - "Variations in Contact Stress Distribution of Real Rough Surfaces During Running-In"; *Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 115, No. 3, pp 602-606; 1993
- [59] Lin, H.H.; Lee, C.; Oswald, F.B.; Townsend, D.P. - "Computer-Aided Design of High-Contact-Ratio Gears for Minimum Dynamic Load and Stress"; *Journal of Mechanical Design. Trans. ASME*; Vol. 115, No. 1, pp 171-178; 1993
- [60] Litvin, F.L.; Chen J.-S.; Lu, J.; Handschuh, R.F. - "Application of Finite Element Analysis for Determination of Load Share, Real Contact Ratio, Precision of Motion, and Stress Analysis"; *Journal of Mechanical Design. Trans. ASME*; Vol. 118, No. 3, pp 561-567; 1996
- [61] Litvin, F.L.; Zhang, Yi.; Kieffer, J.; Handschuh, R. F. - "Identification and minimization of deviations of real gear tooth surfaces."; *Journal of Mechanical Design. Trans. ASME*; Vol. 113, No. 1, pp 55-62; 1991
- [62] Litvin, F.L.; Hsiao, C.-L. - "Computerized simulation of meshing and contact of enveloping gear tooth surfaces"; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; Vol. 102, No. 3, pp 337-366; 1993
- [63] Lynwander, P. - "Gear Drive Systems"; *Marcel Dekker*; New York; 1983
- [64] Matveevsky, R.M. - "The Critical Local Temperature of Oils with Point and Line Contacts"; *Journal of Basic Engineering*; Vol. 83, No. 3, pp 754-760; 1965
- [65] Moriwaki, I.; Fukuda, T.; Watabe, Y.; Saito, K. - "Global Local Finite Element Method (GLFEM) in Gear Tooth Stress Analysis"; *Journal of Mechanical Design*.

*Trans. ASME*; Vol. 115, No. 4, pp 1008-1012; 1993

- [66] Oden, J.T.; Martins, J.A.C. - "Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena"; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; Vol. 52, pp 527-634; 1985
- [67] Pan, P.; Hamrock, B.J. - "Simple Formulas for Performance Parameters Used in Elastohydrodynamically Lubricated Line contacts."; *Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 111, No. 2, pp 246-252; 1989
- [68] Paolo, J.; Saita, F.A. - "Solución del problema elastohidrodinámico de contacto lineal"; *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*; Vol. 8, No. 4, pp 427-438; 1992
- [69] Pedrero, J.I. - "Análisis dinámico de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente"; *Apuntes Curso de doctorado*; E.T.S.I.I. Universidad de Murcia; Cartagena; 1995
- [70] Pedrero, J.I.; Artés, M. - "Approximate equation for the addendum modification factors for tooth gears with balanced specific sliding"; *Mechanism & Machine Theory*; Vol. 31, No. 7, pp 925-935; 1996
- [71] Pedrero, J.I.; Estrems, M.; Faura, F. - "Desarrollo e implementación de un algoritmo numérico para la determinación del mapa tensional en la zona de contacto entre dos cuerpos"; *III Congreso de Metodos Numéricos en Ingeniería, (Zaragoza)*; Vol 1, pp 279-285; 1996
- [72] Pedrero, J.I.; Fuentes, A.; García-Masiá, C. - "Modelo de Cálculo a Presión Superficial de Dentaduras Rectas de Perfil de Evolvente"; *Anales de Ingeniería Mecánica*; Vol. 10, No. 3, pp 49-56; 1994
- [73] Pedrero, J.I.; García-Masiá, C.; Fuentes, A. - "Theoretical approach to wear stress calculation for involute gear teeth"; *Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*; Milán (Italia); pp 419-423; 1995
- [74] Pires, E.B.; Providencia, P. - "Análise de uma classe de problemas de contacto com atrito entre dois corpos elasticos"; *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*; Vol. 8, No. 1, pp 45-59; 1992
- [75] Polycarpou, A.A.; Soom, A. - "Two Dimensional Models of Boundary and Mixed Friction at a Line Contact"; *Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 117, No. 1, pp 178-184; 1995

- [76] Poritsky, H. - "Stresses and Deflections of Cylindrical Bodies in Contact With Application to Contact of Gears and of Locomotive Whells"; *Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME*; Vol. 17, pp 191-201; 1950
- [77] Rao, Ch.M.; Muthuveerappan, G. - "Finite element modelling and stress analysis of helical gear teeth"; *Computers and Structures*; Vol. 49, No. 6, pp 1095-1106; 1993
- [78] Reklaitis, G.V.; Ravindran, A.; Ragsdell, K.M. - "Engineering Optimization. Methods and applications"; *John Willey & Sons*; New York; 1983
- [79] Richards, T.H. - "Energy methods in stress analysis"; *Ellis Horwood*; New York; 1977
- [80] Shifeng, W.; Cheng, H.S. - "Sliding wear calculations in spur gears"; *Trans. ASME Journal of Tribology*; Vol. 115, No. 2, pp 493-500; 1993
- [81] Simmons, G.F. - "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas"; *McGraw-Hill*; Acapulco, México; 1977
- [82] Sonnet, H. - "Calcul Infinitésimal"; *Libraire Hachette et Cie*; Paris; 1889
- [83] Stegemiller, M.E.; Houser, D.R. - "A Three-Dimensional Analysis of the Base Flexibility of Gear Teeth"; *Journal of Mechanical Design. Trans. ASME*; Vol. 115, No. 1, pp 213-222; 1993
- [84] Szalwinski, C.M. - "Flexibility of a Contact Area of an Isotropic Elastic Body"; *Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME*; Vol. 52, No. 1, pp 62-66; 1985
- [85] Tallian, T.E. - "Simplified Contact Fatigue Life Prediction Model- Part I: New Model"; *Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 114, No.2, pp 214-222; 1992
- [86] Tallian, T.E. - "Simplified Contact Fatigue Life Prediction Model- Part I: Review of Published Models"; *Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 114, No. 2, pp 207-213; 1992
- [87] Timoshenko, S.; Goodier, J.N. - "Theory of Elasticity"; *McGraw Hill*; New York; 1951
- [88] Timoshenko, S.; Krieger, S.W. - "Teoría de Placas"; *Ed. Urmo*; Bilbao; 1970
- [89] Townsend, D.P. - "Lubricant and Additive Effects on Spur Gear Fatigue Life";

*Journal of Tribology. Trans. ASME*; Vol. 108, No. 2, pp 468-477; 1986

- [90] Trimtchev, K. - "Minimal Length of Contact Lines and Contact Ratio Factor for Hertzian Stress."; *International Congress - Gear Transmissions*; Sofia (Bulgaria); Vol. 1, pp 204-207; 1995
- [91] Umezawa, K.; Ishikawa, J. - "Deflection Due to Contact between Gear Teeth with Finite Width"; *JSME Bulletin*; Vol. 16, No. 97, pp 1085-1093; 1973
- [92] Vijayarangan, S.; Ganesan, N. - "Stress analysis of composite spur gear using the finite element approach"; *Computers and Structures*; Vol. 46, No. 5, pp 869-875; 1993
- [93] Vijayarangan, S.; Ganesan, N. - "Static contact stress analysis of a spur gear tooth using the finite element method, including frictional effects"; *Computers and Structures*; Vol. 51, No. 6, pp 765-770; 1994
- [94] von Eiff, H.; Hischmann, K.h.; Lechner, G. - "Influence of Gear Tooth Geometry on Tooth Stress of External and Internal Gears"; *Proceedings of the 1989 International Power Transmissions and Gearing Conference*; pp 151-161; 1989
- [95] Wellauer, E.J.; Seireg, A. - "Bending Strength of Gear Teeth by Cantilever Plate Theory"; *Journal of Engineering for Industry. Trans. ASME*; Vol. 82, No. 1, pp 213-222; 1960
- [96] Wilcox, L.E. - "Finite-Element Analysis Pinpoints Gear-Tooth Stresses"; *Machine Design*; Vol. 23, pp 88-92; 1978
- [97] Yau, E.; Busby, H.R.; Houser, D.R. - "A Rayleigh-Ritz approach to modeling bending and shear deflections of gear teeth"; *Computers and Structures*; Vol. 50, No. 5, pp 705-713; 1994
- [98] Yoon, K.Y.; Rao, S.S. - "Dynamic Load Analysis of Spur Gears Using A New Tooth Profile"; *Journal of Mechanical Design. Trans. ASME*; Vol. 118, No. 1, pp 1-6; 1996
- [99] Zhang, Y.; Fang, Z. - "Analysis of Transmission Errors Under Load of Helical Gears With Modified Tooth Surfaces"; *Journal of Mechanical Design. Trans. ASME*; Vol. 119, No. 1, pp 120-126; 1997
- [100] Zhang, Y.; Litvin, F.L.; Maruyama, N.; Takeda, R.; Sugimoto, M. - "Computerized

Analysis of Meshing and Contact of Gear Real Tooth Surfaces"; *Journal of Mechanical Design. Trans. ASME*; Vol. 116, No. 3, pp 697-700; 1994

# APÉNDICES

## I Código usado en la modelización por elementos finitos del diente conjugado.

```
/PREP7
F=2.00          ! ancho del diente.Longitud de 9+19
HB=1.00        ! altura del diente. Longitud de 1+21+13
BB=1.50        ! longitud de la base
NF=10          ! nº de divisiones al mallar de F
DF=0.70        ! porción de F que ocupa la línea de contacto
DHB=0.900     ! altura a la que llega la línea de contacto
DHBB=0.20     ! altura de la que parte la línea de contacto
NN=9           ! nº de nodos en la línea de contacto
NHBB=2        ! nº de div. al mallar de H sin contacto
NHB=7         ! nº de divisiones al mallar de H
NB=7          ! nº de divisiones al mallar de B
FN=1/(NN-1)   ! fracción de longitud de contacto entre nodos
ALF=20        ! pendiente de la cara frontal del diente en x
BET=-30       ! ángulo de hélice del diente
*AFUN,DEG    ! ángulos en grados sexagesimales
!*
K,1,BB/2,0,0, ! definición de KP
K,2,BB/2-HB*SIN(alf),HB*COS(alf),0, !
K,3,-BB/2+HB*SIN(alf),HB*COS(alf),0, !
K,4,-BB/2,0,0, !
A,1,2,3,4     ! Definición de área
!*
AGEN,2,1, , ,F*SIN(BET),0,F*COS(BET), ,1 ! copia de área
ASKIN,4,8     ! unión de los lados de las áreas generando áreas
ASKIN,2,6     !
ASKIN,1,5     !
```

```

ASKIN,3,7 !
VA,1,2,3,4,5,6 ! definición del volumen
!* !
LDIV,1,DHB, ,0 ! se dividen las líneas
LDIV,5,DHB, ,0 !
LDIV,12,DF, ,0 !
LDIV,9,DF, ,0 !
!* !
LDIV,3,1-DHB, ,0 !
LDIV,7,1-DHB, ,0 !
LDIV,10,DF, ,0 !
LDIV,11,DF, ,0 !
!* !
LDIV,1,DHBB/DHB, ,0 !
LDIV,5,DHBB/DHB, ,0 !
LDIV,17,1-DHBB/DHB, ,0 !
LDIV,18,1-DHBB/DHB, ,0 !
!* !
LSEL,S, , ,1,13,12, ! se concatenan la líneas
LSEL,A, , ,21,21,0, !
LCCAT,ALL !
LSEL,ALL !
!* !
LSEL,S, , ,5,14,9, !
LSEL,A, , ,22,22,0, !
LCCAT,ALL !
LSEL,ALL !
!* !
LSEL,S, , ,3,17,14, !
LSEL,A, , ,23,23,0, !
LCCAT,ALL !
LSEL,ALL !
!* !
LSEL,S, , ,7,18,11, !
LSEL,A, , ,24,24,0, !
LCCAT,ALL !
LSEL,ALL !
!* !
LCCAT,9,16 !
LCCAT,12,15 !
LCCAT,11,20 !
LCCAT,10,19 !
!* !
LAREA,12,11,5 ! se define KP para la línea de contacto
LDIV,33,DHBB, ,0 !
!* !
LAREA,21,9,5 ! se define la línea de contacto
!* !
KEYW,PR_SET,1 ! Características del problema
KEYW,PR_STRUC,1 !
KEYW,PR_THERM,0 !
KEYW,PR_ELMAG,0 !
KEYW,PR_FLUID,0 !
KEYW,PR_MULTI,0 !
KEYW,PR_CFD,0 !
!* !
UIMP,1,EX, , ,2, ! definición del material
UIMP,1,DENS, , , , !

```

```

UIMP,1,ALPX, , , , !
UIMP,1,REFT, , , , !
UIMP,1,NUXY, , , 0.3, !
UIMP,1,GXY, , , , !
UIMP,1,MU, , , , !
UIMP,1,DAMP, , , , !
UIMP,1,KXX, , , , !
UIMP,1,C, , , , !
UIMP,1,ENTH, , , , !
UIMP,1,HF, , , , !
UIMP,1,EMIS, , , 1, !
UIMP,1,QRATE, , , , !
UIMP,1,MURX, , , , !
UIMP,1,MGXX, , , , !
UIMP,1,RSVX, , , , !
UIMP,1,PERX, , , , !
UIMP,1,VISC, , , , !
UIMP,1,SONC, , , , !
!* !
/PSF,DEFA, , 1 ! forma de representar símbolos
/PBF,DEFA, , 1 !
/PSYMB,CS,0 !
/PSYMB,NDIR,0 !
/PSYMB,ESYS,0 !
/PSYMB,LDIR,1 !
/PSYMB,LAYR,0 !
!* !
/PBC,ALL, , 1 !
!* !
/PNUM,KP,0 !
/PNUM,LINE,1 ! forma de numeración en las visualizaciones
/PNUM,AREA,0 !
/PNUM,VOLU,0 !
/PNUM,NODE,0 !
/PNUM,SVAL,0 !
/NUM,0 !
!* !
/VIEW,,1,1,1 ! vista en isométrico
!* !
ET,1,SOLID95 ! definición de elemento
!* !
LSEL,S, , , 3,7,4, ! mallado de las líneas
LSEL,A, , , 13,14,1, !
LESIZE,ALL, , , ,NHB-NHBB-(NN-1)/2,1,0 !
LSEL,ALL !
!* !
LSEL,S, , , 9,12,1, !
LESIZE,ALL, , , , (NN-1),1,0 !
LSEL,ALL !
!* !
LSEL,S, , , 15,16,1, !
LSEL,A, , , 19,20,1, !
LESIZE,ALL, , , ,NF-(NN-1),1,0 !
LSEL,ALL !
!* !
LSEL,S, , , 1,5,4, !
LSEL,A, , , 23,24,1, !
LESIZE,ALL, , , ,NHBB,1,0 !

```

```

LSEL,ALL !
!* !
LSEL,S,, ,2,8,2, !
LESIZE,ALL,, ,NB,1,0 !
LSEL,ALL !
!* !
LSEL,S,, ,21,22,1, !
LSEL,A,, ,17,18,1, !
LESIZE,ALL,, , (NN-1)/2,1,0 !
LSEL,ALL !
!* !
NUMMRG,ALL,, ! simplificación de la numeración
NUMCMP,ALL !
!* !
VMESH, 1 ! mallado del volumen
NUMMRG,ALL,, !
NUMCMP,ALL !
!* !
NSEL,S,LOC,Y,-0.001,0.001 ! restricción de desplazamientos en la base
D,ALL,,0,, , ,ALL !
NSEL,ALL !
!* !
CSKP,11,0,21,9,5,1,1, ! def. de coord. loc. eje x = línea de contacto
CSYS,11, !
NSEL,S,LOC,Z,-0.001,0.001 ! selección de los nodos de contacto
NSEL,S,LOC,Y,-0.001,0.001 !
CM,accion,NODE !
!* !
!* !
*DIM,AN,,NN ! definición del vector con los nodos de contacto
!* !
AN(1)=NODE(0.001,0.001,0.001) !
*DO,I,2,NN,1 !
AN(I)=NODE(LX(35,(I-1)*FN),0.001,0.001) !
*ENDDO !
!* !
/SOLU !
F,AN(1),FZ,1 ! aplica la fuerza
NSEL,ALL !
LSWRITE,1 ! escribe estado de carga 1
*DO,I,2,NN,1 ! bucle de definición de los distintos estados de carga
FDELE,AN(I-1),ALL !
F,AN(I),FZ,1 !
LSWRITE,I !
*ENDDO !
!* !
LSSOLVE,1,NN,1 ! resolver todos los estados de carga
!* !
/POST1 !
!* !
RSYS,11, ! para resultados en el sistema de coordenadas local
SET,FIRST ! usar los resultados del primer estado de carga
*DIM,CNX,,NN,NN ! define matriz de desplazamientos en X
*DIM,CNY,,NN,NN ! define matriz de desplazamientos en Y
*DIM,CNZ,,NN,NN ! define matriz de desplazamientos en Z
CMSEL,S,ACCION !
!* !
*DO,I,1,NN,1 !

```

```

*GET,CNX(I,1),NODE,AN(I),U,X,0      !
*GET,CNY(I,1),NODE,AN(I),U,Y,0      !
*GET,CNZ(I,1),NODE,AN(I),U,Z,0      !
*ENDDO                                !
!*                                    !
SET,NEXT                               ! restablece siguiente estado de cargas
!*                                    !
*DO,YY,2,NN,1                          !
!*                                    !
*DO,I,1,NN,1                            !
*GET,CNX(I,YY),NODE,AN(I),U,X,0        !
*GET,CNY(I,YY),NODE,AN(I),U,Y,0        !
*GET,CNZ(I,YY),NODE,AN(I),U,Z,0        !
*ENDDO                                !
SET,NEXT                               !
*ENDDO                                !
!*                                    !
PARSAV,ALL,CREMCA,PAR,                ! salva todos los parámetros definidos

```

## II Código usado en la modelización por elementos finitos del diente.

```

/PREP7
F=2.00
H=1.00
B=1.50
NF=10
DF=1
DH=0
NN=9
FN=1/(NN-1)
!*
NB=NINT(B/F*NF)
NH=(NN-1)/2+NINT(DH*H/F*NF)+1
ALF=20
BET=30
*AFUN,DEG
K,1,B/2,0,0,
K,2,B/2-H*SIN(alf),H*COS(alf),0,
K,3,-B/2+H*SIN(alf),H*COS(alf),0,
K,4,-B/2,0,0,
A,1,2,3,4
AGEN,2,1, , ,F*SIN(BET),0,F*COS(BET), ,1
ASKIN,4,8
ASKIN,2,6
ASKIN,1,5
ASKIN,3,7
VA,1,2,3,4,5,6
!*SE DIVIDEN LAS LINEAS
LDIV,1,DH, ,0
LDIV,5,DH, ,0
LDIV,12,DF, ,0

```

```

LDIV,9,DF, ,0
!*
LDIV,3,1-DH, ,0
LDIV,7,1-DH, ,0
LDIV,10,DF, ,0
LDIV,11,DF, ,0
!*
LCCAT, 1,13
LCCAT,5,14
LCCAT,12,15
LCCAT,9,16
LCCAT, 3,17
LCCAT,7,18
LCCAT,11,20
LCCAT,10,19
!*
LAREA,11,9,5
!* PREPARACION PARA EL MALLADO
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_MULT,0
KEYW,PR_CFD,0
!*
!*
UIMP,1,EX, , ,2,
UIMP,1,DENS, , , ,
UIMP,1,ALPX, , , ,
UIMP,1,REFT, , , ,
UIMP,1,NUXY, , ,0.3,
UIMP,1,GXY, , , ,
UIMP,1,MU, , , ,
UIMP,1,DAMP, , , ,
UIMP,1,KXX, , , ,
UIMP,1,C, , , ,
UIMP,1,ENTH, , , ,
UIMP,1,HF, , , ,
UIMP,1,EMIS, , ,1,
UIMP,1,QRATE, , , ,
UIMP,1,MURX, , , ,
UIMP,1,MGXX, , , ,
UIMP,1,RSVX, , , ,
UIMP,1,PERX, , , ,
UIMP,1,VISC, , , ,
UIMP,1,SONC, , , ,
!*
!* FORMA DE REPRESENTAR LOS SIMBOLOS Y NUM
/PSF,DEFA, ,1
/PBF,DEFA, ,1
/PSYMB,CS,0
/PSYMB,NDIR,0
/PSYMB,ESYS,0
/PSYMB,LDIR,1
/PSYMB,LAYR,0
!*
/PBC,ALL, ,1

```

```

!*
/PNUM,KP,0
/PNUM,LINE,1
/PNUM,AREA,0
/PNUM,VOLU,0
/PNUM,NODE,0
/PNUM,SVAL,0
/NUM,0
!*
/VIEW,,1,1,1
!*
ET,1,SOLID95
!*
LSEL,S,,3,7,4,
LSEL,A,,13,14,1,
LESIZE,ALL,,(NN-1)/2,1,0
LSEL,ALL
!*
LSEL,S,,9,12,1,
LESIZE,ALL,,(NN-1),1,0
LSEL,ALL
!*
LSEL,S,,15,16,1,
LSEL,A,,19,20,1,
LESIZE,ALL,,NF-(NN-1),1,0
LSEL,ALL
!*
LSEL,S,,1,5,4,
LSEL,A,,17,18,1,
LESIZE,ALL,,NH-(NN-1)/2,1,0
LSEL,ALL
!*
LSEL,S,,2,8,2,
LESIZE,ALL,,NB,1,0
LSEL,ALL
!*
NUMMRG,ALL,
NUMCMP,ALL
!*
VMESH,1
NUMMRG,ALL,
NUMCMP,ALL
!*
NSEL,S,LOC,Y,-0.001,0.001
D,ALL,,0,, , ,ALL
NSEL,ALL
!*
!*
CSKP,11,0,11,9,12,1,1,
CSYS,11,
NSEL,S,LOC,Z,-0.001,0.001
NSEL,S,LOC,Y,-0.001,0.001
CM,accion,NODE
!*
*DIM,AN,,NN
!*
AN(1)=NODE(0.001,0.001,0.001)
*DO,I,2,NN,1

```

```

AN(I)=NODE(LX(29,(I-1)*FN),0.001,0.001)
*ENDDO
!*
/SOLU
F,AN(1),FZ,1
NSEL,ALL
LSWRITE,1
*DO,I,2,NN,1
FDELE,AN(I-1),ALL
F,AN(I),FZ,1
LSWRITE,I
*ENDDO
!*
LSSOLVE,1,NN,1
!*
/POST1
!*
RSYS,11,
SET,FIRST
*DIM,CNX,,NN,NN
*DIM,CNY,,NN,NN
*DIM,CNZ,,NN,NN
CMSEL,S,ACCION
!*
*DO,I,1,NN,1
*GET,CNX(I,1),NODE,AN(I),U,X,0
*GET,CNY(I,1),NODE,AN(I),U,Y,0
*GET,CNZ(I,1),NODE,AN(I),U,Z,0
*ENDDO
!*
SET,NEXT
!*
*DO,YY,2,NN,1
!*
*DO,I,1,NN,1
*GET,CNX(I,YY),NODE,AN(I),U,X,0
*GET,CNY(I,YY),NODE,AN(I),U,Y,0
*GET,CNZ(I,YY),NODE,AN(I),U,Z,0
*ENDDO
SET,NEXT
*ENDDO
!*
PARSAV,ALL,CREMA,PAR,

```

### III Listado de parámetros en el fichero de uno de los resultados

```

/NOPR
*SET,ALF      , 20.000000000000
*DIM,AN       ,ARRAY,      9,      1,      1
*SET,AN       (      1,      1, 1), 269.000000000000
*SET,AN       (      2,      1, 1), 499.000000000000
*SET,AN       (      3,      1, 1), 485.000000000000
*SET,AN       (      4,      1, 1), 469.000000000000
*SET,AN       (      5,      1, 1), 453.000000000000
*SET,AN       (      6,      1, 1), 439.000000000000
*SET,AN       (      7,      1, 1), 421.000000000000
*SET,AN       (      8,      1, 1), 409.000000000000
*SET,AN       (      9,      1, 1), 2.00000000000000
*SET,B        , 1.00000000000000
*SET,BET      , 30.000000000000
*DIM,CNX      ,ARRAY,      9,      9,      1
*SET,CNX      (      1,      1, 1), -1.971312670514
*SET,CNX      (      2,      1, 1), -.6804026180854
*SET,CNX      (      3,      1, 1), -.1593919363228
*SET,CNX      (      4,      1, 1), .3538744966461E-01
*SET,CNX      (      5,      1, 1), .9355597653253E-01
*SET,CNX      (      6,      1, 1), .8878328948034E-01
*SET,CNX      (      7,      1, 1), .6596399297054E-01
*SET,CNX      (      8,      1, 1), .4432787985482E-01
*SET,CNX      (      9,      1, 1), .3084932299989E-01
*SET,CNX      (      1,      2, 1), -2.089657278788
*SET,CNX      (      2,      2, 1), -.9296534758938
*SET,CNX      (      3,      2, 1), -.2764371055980
*SET,CNX      (      4,      2, 1), -.2287227600054E-01
*SET,CNX      (      5,      2, 1), .7794413675835E-01
*SET,CNX      (      6,      2, 1), .9257559971151E-01
*SET,CNX      (      7,      2, 1), .7482133012745E-01
*SET,CNX      (      8,      2, 1), .5303118544338E-01
*SET,CNX      (      9,      2, 1), .3881990351861E-01
*SET,CNX      (      1,      3, 1), -1.228326795477
*SET,CNX      (      2,      3, 1), -1.480858432076
*SET,CNX      (      3,      3, 1), -.1227220703715
*SET,CNX      (      4,      3, 1), -.1381813881386
*SET,CNX      (      5,      3, 1), .3904876613092E-01
*SET,CNX      (      6,      3, 1), .9078791564982E-01
*SET,CNX      (      7,      3, 1), .8671948944785E-01
*SET,CNX      (      8,      3, 1), .6651770481074E-01
*SET,CNX      (      9,      3, 1), .5201911909324E-01
*SET,CNX      (      1,      4, 1), -.6404580665129
*SET,CNX      (      2,      4, 1), -.9166356627609
*SET,CNX      (      3,      4, 1), -1.055875602409
*SET,CNX      (      4,      4, 1), -.1756746470199
*SET,CNX      (      5,      4, 1), -.9417402275557E-02
*SET,CNX      (      6,      4, 1), .8300957403240E-01
*SET,CNX      (      7,      4, 1), .9733405726846E-01
*SET,CNX      (      8,      4, 1), .8510284295216E-01
*SET,CNX      (      9,      4, 1), .7316493526486E-01
*SET,CNX      (      1,      5, 1), -.2877632331515

```

```

*SET,CNX      (      2,      5,  1), -.4902314523375
*SET,CNX      (      3,      5,  1), -.6590891519846
*SET,CNX      (      4,      5,  1), -.7446247150380
*SET,CNX      (      5,      5,  1),  .3421773491569
*SET,CNX      (      6,      5,  1),  .5842689753426E-01
*SET,CNX      (      7,      5,  1),  .1055928636046
*SET,CNX      (      8,      5,  1),  .1074562341137
*SET,CNX      (      9,      5,  1),  .1079575825650
*SET,CNX      (      1,      6,  1), -.1016334909584
*SET,CNX      (      2,      6,  1), -.2227592868615
*SET,CNX      (      3,      6,  1), -.3655259938937
*SET,CNX      (      4,      6,  1), -.4631702463258
*SET,CNX      (      5,      6,  1), -.5397801834398
*SET,CNX      (      6,      6,  1),  .1341819041422
*SET,CNX      (      7,      6,  1),  .1224639590606
*SET,CNX      (      8,      6,  1),  .1471888459794
*SET,CNX      (      9,      6,  1),  .1631713470088
*SET,CNX      (      1,      7,  1), -.1706128966283E-01
*SET,CNX      (      2,      7,  1), -.7969778740827E-01
*SET,CNX      (      3,      7,  1), -.1696715872174
*SET,CNX      (      4,      7,  1), -.2659735147087
*SET,CNX      (      5,      7,  1), -.3215846024938
*SET,CNX      (      6,      7,  1), -.3907489510823
*SET,CNX      (      7,      7,  1),  .5472867048558
*SET,CNX      (      8,      7,  1),  .1948489144329
*SET,CNX      (      9,      7,  1),  .2652441735290
*SET,CNX      (      1,      8,  1),  .1379766341630E-01
*SET,CNX      (      2,      8,  1), -.1597284543657E-01
*SET,CNX      (      3,      8,  1), -.6674546182604E-01
*SET,CNX      (      4,      8,  1), -.1341762792435
*SET,CNX      (      5,      8,  1), -.1976986397280
*SET,CNX      (      6,      8,  1), -.2176797527598
*SET,CNX      (      7,      8,  1), -.2645697159014
*SET,CNX      (      8,      8,  1),  .3672562659956
*SET,CNX      (      9,      8,  1),  .5399430561947
*SET,CNX      (      1,      9,  1),  .2241396813449E-01
*SET,CNX      (      2,      9,  1),  .7774135653210E-02
*SET,CNX      (      3,      9,  1), -.2195813303154E-01
*SET,CNX      (      4,      9,  1), -.6705162385084E-01
*SET,CNX      (      5,      9,  1), -.1187411185942
*SET,CNX      (      6,      9,  1), -.1517599625776
*SET,CNX      (      7,      9,  1), -.1294180169730
*SET,CNX      (      8,      9,  1), -.9529728854772E-01
*SET,CNX      (      9,      9,  1),  3.194460025882
*DIM,CNY      ,ARRAY,      9,      9,      1
*SET,CNY      (      1,      1,  1),  2.743013883861
*SET,CNY      (      2,      1,  1),  .8903821738179
*SET,CNY      (      3,      1,  1),  .4006905781193
*SET,CNY      (      4,      1,  1),  .1922756126811
*SET,CNY      (      5,      1,  1),  .8654809304152E-01
*SET,CNY      (      6,      1,  1),  .3500492645451E-01
*SET,CNY      (      7,      1,  1),  .1515096134861E-01
*SET,CNY      (      8,      1,  1),  .1240473638195E-01
*SET,CNY      (      9,      1,  1),  .3437247122448E-01
*SET,CNY      (      1,      2,  1),  .6006323971290
*SET,CNY      (      2,      2,  1),  .9494644902425
*SET,CNY      (      3,      2,  1),  .4872713571216
*SET,CNY      (      4,      2,  1),  .2823247348368

```

```

*SET,CNY      (      5,   2,  1),  .1345094632720
*SET,CNY      (      6,   2,  1),  .5850739721722E-01
*SET,CNY      (      7,   2,  1),  .2543603819975E-01
*SET,CNY      (      8,   2,  1),  .1704165856705E-01
*SET,CNY      (      9,   2,  1),  .4126265122830E-01
*SET,CNY      (      1,   3,  1),  .3009377556160
*SET,CNY      (      2,   3,  1),  .5166734280922
*SET,CNY      (      3,   3,  1),  .7208380876232
*SET,CNY      (      4,   3,  1),  .4551949581089
*SET,CNY      (      5,   3,  1),  .2102435303150
*SET,CNY      (      6,   3,  1),  .9375278325097E-01
*SET,CNY      (      7,   3,  1),  .4106489550620E-01
*SET,CNY      (      8,   3,  1),  .2392367686340E-01
*SET,CNY      (      9,   3,  1),  .5127309690603E-01
*SET,CNY      (      1,   4,  1),  .1500538856245
*SET,CNY      (      2,   4,  1),  .3014623556786
*SET,CNY      (      3,   4,  1),  .3984065677613
*SET,CNY      (      4,   4,  1),  .4480837403887
*SET,CNY      (      5,   4,  1),  .3227987330772
*SET,CNY      (      6,   4,  1),  .1517929457294
*SET,CNY      (      7,   4,  1),  .6615338553003E-01
*SET,CNY      (      8,   4,  1),  .3380712007444E-01
*SET,CNY      (      9,   4,  1),  .6485955109675E-01
*SET,CNY      (      1,   5,  1),  .8069977017901E-01
*SET,CNY      (      2,   5,  1),  .1584006489499
*SET,CNY      (      3,   5,  1),  .2779839117323
*SET,CNY      (      4,   5,  1),  .3472436682914
*SET,CNY      (      5,   5,  1),  .4472108130179
*SET,CNY      (      6,   5,  1),  .2997229362984
*SET,CNY      (      7,   5,  1),  .1189647212819
*SET,CNY      (      8,   5,  1),  .5324946423024E-01
*SET,CNY      (      9,   5,  1),  .8486715504544E-01
*SET,CNY      (      1,   6,  1),  .4192208055951E-01
*SET,CNY      (      2,   6,  1),  .8688592453772E-01
*SET,CNY      (      3,   6,  1),  .1567455554416
*SET,CNY      (      4,   6,  1),  .2408805097214
*SET,CNY      (      5,   6,  1),  .2352086149947
*SET,CNY      (      6,   6,  1),  .2769081624723
*SET,CNY      (      7,   6,  1),  .2215516091105
*SET,CNY      (      8,   6,  1),  .9331489845577E-01
*SET,CNY      (      9,   6,  1),  .1204682453943
*SET,CNY      (      1,   7,  1),  .2110249901642E-01
*SET,CNY      (      2,   7,  1),  .4530703016539E-01
*SET,CNY      (      3,   7,  1),  .8746731560598E-01
*SET,CNY      (      4,   7,  1),  .1453387873262
*SET,CNY      (      5,   7,  1),  .2082875178402
*SET,CNY      (      6,   7,  1),  .2434115048288
*SET,CNY      (      7,   7,  1),  .3302442218813
*SET,CNY      (      8,   7,  1),  .2323038447863
*SET,CNY      (      9,   7,  1),  .1954443826788
*SET,CNY      (      1,   8,  1),  .1068595834014E-01
*SET,CNY      (      2,   8,  1),  .2326256659397E-01
*SET,CNY      (      3,   8,  1),  .4746038961051E-01
*SET,CNY      (      4,   8,  1),  .8751127080765E-01
*SET,CNY      (      5,   8,  1),  .1418301522339
*SET,CNY      (      6,   8,  1),  .1946537857517
*SET,CNY      (      7,   8,  1),  .1926739112708
*SET,CNY      (      8,   8,  1),  .2341019369967

```

```

*SET,CNY      (      9,      8,  1), .3826521629162
*SET,CNY      (      1,      9,  1), .6356643033664E-02
*SET,CNY      (      2,      9,  1), .1356518326331E-01
*SET,CNY      (      3,      9,  1), .2847858069627E-01
*SET,CNY      (      4,      9,  1), .5623922641318E-01
*SET,CNY      (      5,      9,  1), .1006406836817
*SET,CNY      (      6,      9,  1), .1564216602183
*SET,CNY      (      7,      9,  1), .2163030539606
*SET,CNY      (      8,      9,  1), .3251029822248
*SET,CNY      (      9,      9,  1), 1.072033133329
*DIM,CNZ      ,ARRAY,      9,      9,      1
*SET,CNZ      (      1,      1,  1), 13.45729017598
*SET,CNZ      (      2,      1,  1), 2.920724074455
*SET,CNZ      (      3,      1,  1), 1.331338979053
*SET,CNZ      (      4,      1,  1), .6986528511711
*SET,CNZ      (      5,      1,  1), .3922126457382
*SET,CNZ      (      6,      1,  1), .2277458567183
*SET,CNZ      (      7,      1,  1), .1391604279005
*SET,CNZ      (      8,      1,  1), .9152050325117E-01
*SET,CNZ      (      9,      1,  1), .6907799840807E-01
*SET,CNZ      (      1,      2,  1), 2.920724074455
*SET,CNZ      (      2,      2,  1), 6.615941893102
*SET,CNZ      (      3,      2,  1), 1.934439876511
*SET,CNZ      (      4,      2,  1), .9235518226479
*SET,CNZ      (      5,      2,  1), .5060146755605
*SET,CNZ      (      6,      2,  1), .2867980820671
*SET,CNZ      (      7,      2,  1), .1716074850766
*SET,CNZ      (      8,      2,  1), .1111147660962
*SET,CNZ      (      9,      2,  1), .8300255829953E-01
*SET,CNZ      (      1,      3,  1), 1.331338979053
*SET,CNZ      (      2,      3,  1), 1.934439876511
*SET,CNZ      (      3,      3,  1), 7.627977618290
*SET,CNZ      (      4,      3,  1), 1.510825099768
*SET,CNZ      (      5,      3,  1), .7250710552030
*SET,CNZ      (      6,      3,  1), .3904970995609
*SET,CNZ      (      7,      3,  1), .2251881869512
*SET,CNZ      (      8,      3,  1), .1414463360543
*SET,CNZ      (      9,      3,  1), .1037017959146
*SET,CNZ      (      1,      4,  1), .6986528511711
*SET,CNZ      (      2,      4,  1), .9235518226479
*SET,CNZ      (      3,      4,  1), 1.510825099768
*SET,CNZ      (      4,      4,  1), 4.888063715935
*SET,CNZ      (      5,      4,  1), 1.260929888628
*SET,CNZ      (      6,      4,  1), .5665452624103
*SET,CNZ      (      7,      4,  1), .3148372687519
*SET,CNZ      (      8,      4,  1), .1890815347929
*SET,CNZ      (      9,      4,  1), .1343070416877
*SET,CNZ      (      1,      5,  1), .3922126457382
*SET,CNZ      (      2,      5,  1), .5060146755605
*SET,CNZ      (      3,      5,  1), .7250710552030
*SET,CNZ      (      4,      5,  1), 1.260929888628
*SET,CNZ      (      5,      5,  1), 6.427370603133
*SET,CNZ      (      6,      5,  1), 1.038472478056
*SET,CNZ      (      7,      5,  1), .4804579555809
*SET,CNZ      (      8,      5,  1), .2721720607328
*SET,CNZ      (      9,      5,  1), .1847621556496
*SET,CNZ      (      1,      6,  1), .2277458567183
*SET,CNZ      (      2,      6,  1), .2867980820671

```

```

*SET,CNZ      (      3,      6,  1),  .3904970995609
*SET,CNZ      (      4,      6,  1),  .5665452624103
*SET,CNZ      (      5,      6,  1),  1.038472478056
*SET,CNZ      (      6,      6,  1),  4.198069227168
*SET,CNZ      (      7,      6,  1),  .9543988911845
*SET,CNZ      (      8,      6,  1),  .4186274985011
*SET,CNZ      (      9,      6,  1),  .2745468711623
*SET,CNZ      (      1,      7,  1),  .1391604279005
*SET,CNZ      (      2,      7,  1),  .1716074850766
*SET,CNZ      (      3,      7,  1),  .2251881869512
*SET,CNZ      (      4,      7,  1),  .3148372687519
*SET,CNZ      (      5,      7,  1),  .4804579555809
*SET,CNZ      (      6,      7,  1),  .9543988911845
*SET,CNZ      (      7,      7,  1),  5.783615181613
*SET,CNZ      (      8,      7,  1),  .8505962437963
*SET,CNZ      (      9,      7,  1),  .4620727339968
*SET,CNZ      (      1,      8,  1),  .9152050325117E-01
*SET,CNZ      (      2,      8,  1),  .1111147660962
*SET,CNZ      (      3,      8,  1),  .1414463360543
*SET,CNZ      (      4,      8,  1),  .1890815347929
*SET,CNZ      (      5,      8,  1),  .2721720607328
*SET,CNZ      (      6,      8,  1),  .4186274985011
*SET,CNZ      (      7,      8,  1),  .8505962437964
*SET,CNZ      (      8,      8,  1),  3.905415386570
*SET,CNZ      (      9,      8,  1),  1.112709575652
*SET,CNZ      (      1,      9,  1),  .6907799840807E-01
*SET,CNZ      (      2,      9,  1),  .8300255829953E-01
*SET,CNZ      (      3,      9,  1),  .1037017959146
*SET,CNZ      (      4,      9,  1),  .1343070416877
*SET,CNZ      (      5,      9,  1),  .1847621556496
*SET,CNZ      (      6,      9,  1),  .2745468711623
*SET,CNZ      (      7,      9,  1),  .4620727339968
*SET,CNZ      (      8,      9,  1),  1.112709575652
*SET,CNZ      (      9,      9,  1),  8.304611392929
*DIM,COSDZ    ,ARRAY,      3,      1,      1
*SET,COSDZ    (      1,      1,  1),  8.214813729657
*SET,COSDZ    (      2,      1,  1),  61.19600928933
*SET,COSDZ    (      3,      1,  1), -155.5078094986
*SET,DF       , .700000000000000
*SET,DH       , .300000000000000
*SET,F        , 3.000000000000000
*SET,FN       , .125000000000000
*SET,H        , 1.000000000000000
*SET,I        , 9.000000000000000
*SET,NB       , 3.000000000000000
*SET,NF       , 10.000000000000000
*SET,NH       , 6.000000000000000
*SET,NN       , 9.000000000000000
*SET,YY       , 9.000000000000000
*SET,_Z1      , 1.000000000000000
*SET,_Z2      ,')!      '
/GO

```

## IV Parámetros y resultados de los modelados por FEM

### Caso de $F=2$ y $\psi=-30^\circ$

FICHERO A EXTRAER			9
FICHEROS DE PARAMETROS			1
cremv.par		DATOS	
CREMcv.PAR		0.265176	
		0.27888	
PARAMETROS GEOMÉTRICOS			0.266977
SET,F	2	SET,F	2
		0.188967	
SET,H	1	SET,HB	1
SET,B	1	SET,BB	1
SET,NF	10	SET,NF	10
SET,DF	0.7	SET,DF	0.7
SET,DH	0.3	SET,DHB	0.9
SET,NN	9	SET,NN	9
SET,ALF	20	SET,ALF	20
SET,BET	30	SET,BET2	-30
INDICE DE SIMETRIA			coef 1.11552
23.64179 %		maxima	0.27888
		media	0.25

LONGITUD CONTACTO  
1.565248

### Caso de $F=2$ y $\psi=30^\circ$

FICHERO A EXTRAER			9
FICHEROS DE PARAMETROS			1
cremy.par		DATOS	
CREMcy.PAR		0.244106	
		0.323086	
PARAMETROS GEOMÉTRICOS			0.303822
SET,F	2	SET,F	2
		0.128987	
SET,H	1	SET,H2	
SET,B	1	SET,B2	
SET,NF	10	SET,NF	10
SET,DF	0.7	SET,DF	0.7
SET,DH	0.3	SET,DH2	
SET,NN	9	SET,NN	9
SET,ALF	20	SET,ALF	20
SET,BET	30	SET,BET2	-30
INDICE DE SIMETRIA			coef 1.292344
32.21688 %		maxima	0.323086
		media	0.25

LONGITUD CONTACTO  
1.565248

Caso de F=3 y  $\psi=30^\circ$

```
FICHERO A EXTRAER          9

FICHEROS DE PARAMETROS          1
cremy3.par                    DATOS
CREMcy3.PAR                    0.236115
                                0.306606
PARAMETROS GEOMÉTRICOS        0.307401
SET,F          3 SET,F          3    0.149878
SET,H          1 SET,H2
SET,B          1 SET,B2
SET,NF         10 SET,NF         10
SET,DF         0.7 SET,DF         0.7
SET,DH         0.3 SET,DH2
SET,NN         9 SET,NN         9
SET,ALF        20 SET,ALF        20
SET,BET        30 SET,BET2       -30

                                coef    1.229606
INDICE DE SIMETRIA            maxima  0.307401
21.62605 %                    media   0.25

LONGITUD CONTACTO
2.213594
```

Caso de F=2 y  $\psi=30^\circ$  con SOLID8

```
FICHERO A EXTRAER          9

FICHEROS DE PARAMETROS          1
cremy2.par                    DATOS
CREMcy2.PAR                    0.092083
                                0.171719
PARAMETROS GEOMÉTRICOS        0.206085
SET,F          2 SET,F          2    0.216007
SET,H          1 SET,HB         1    0.188467
SET,B          1 SET,BB         1    0.106846
SET,NF         10 SET,NF         10   0.018792
SET,DF         0.7 SET,DF         0.7
SET,DH         0.3 SET,DHB        0.9
SET,NN         7 SET,NN         9
SET,ALF        20 SET,ALF        20
SET,BET        30 SET,BET2       -30

                                coef    1.512051
INDICE DE SIMETRIA            maxima  0.216007
61.90323 %                    media   0.142857

LONGITUD CONTACTO
1.565248
```

## **BIOGRAFÍA DEL AUTOR**

Manuel Estrems Amestoy nace en Valencia en Julio de 1968. Cursa los estudios de Ingeniería Industrial en la E.T.S. de Ingenieros Industriales en la Universidad Politécnica de Valencia, concluyendo los mismos en Abril de 1993. Durante la realización de estos estudios colabora con el Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales como becario P.I.E. (Proyecto de Innovación Educativa) en el Área de Ingeniería de Materiales.

Su actividad investigadora se ha desarrollado, desde Enero de 1995 hasta Octubre de 1997, como Becario de Investigación del MEC dentro del Subprograma Sectorial de Formación de Profesorado y Personal Investigador. Asimismo ha participado como investigador en el proyecto titulado: "Estudio de la generación de perfiles conjugados para dentaduras de engranajes. Desarrollo de los modelos de comportamiento a rotura en la base y presión superficial" financiado por la DGICYT. Durante este período destacan las estancias en el Departement Materialkunde en Toegepaste Materialkunde de la Katholieke Universiteit Leuven (Bélgica).

En cuanto a su actividad docente, ha colaborado como profesor en el Área de Ingeniería de Procesos de Fabricación del Departamento de Ingeniería de Materiales y Fabricación durante el curso académico 1996-1997. En Octubre de 1997 obtuvo la plaza de Profesor Ayudante en dicha área desarrollando las funciones propias del nombramiento hasta la fecha.

Es autor y coautor de diversos artículos y comunicaciones relacionados con el modelado de engranajes y sobre la mecánica del contacto.