



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

Estudio de un tipo de extrapolación no lineal  
y sus aplicaciones.

Fernando Manzano García

2011



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

ESTUDIO DE UN TIPO DE EXTRAPOLACIÓN NO LINEAL  
Y SUS APLICACIONES.

Memoria presentada por  
Fernando Manzano García  
para optar al grado de  
Doctor

Cartagena, 2011



## **Agradecimientos**

En primer lugar quiero agradecer a mis tutores de Tesis Sonia y Sergio todo lo que me han enseñado, gracias a sus ideas y a todo el tiempo dedicado para ayudarme. Sin su apoyo, confianza e infinita paciencia que han tenido conmigo jamás habría terminado este trabajo. Por otro lado, el trato personal que he recibido ha sido sencillamente inmejorable. Espero algún día poder devolverles aunque sea solo una parte de lo recibido, hasta entonces me sentiré en deuda con ellos.

Creo que es el momento de pedir perdón a toda mi familia por el tiempo que les haya podido robar y agradecerles que nunca me lo reprocharan, siempre me han apoyado pues sabían lo importante que este trabajo era para mí. Gracias a mis padrinos, a mis cuñados y cuñadas, a mis suegros y muy especialmente a mi hermana Sara y a mis abuelos, a los que sin duda debo mi infancia, mi formación y lo bueno que pueda haber en mí. Siguen siendo ambos un modelo a seguir y sus enseñanzas no las podré olvidar nunca.

También debo agradecer todo el interés mostrado por todos mis amigos y compañeros de trabajo, cuyos nombres no enumeraré pues sería una lista francamente grande y por temor a dejarme a alguno en el tintero. No quiero tampoco olvidar a los ausentes que son parte de mi circunstancia y cuyas palabras, que se alojan por siempre en mi recuerdo, también me ayudaron a seguir.

Si de alguien no podría olvidarme es de Laura, que en el comienzo de esta tesis era mi novia y ha acabado convirtiéndose en mi mujer y madre de nuestro hijo. La persona que me animó en los peores momentos que tuve en el transcurso de este trabajo y me exigió en los mejores. Creo que nunca olvidará los duros meses de mayo y junio de 2011 con jornadas interminables de 18 o 20 horas pues todo se juntaba. Si esta tesis resurgió de sus cenizas fue sin duda gracias a ella y a la buena voluntad de mis tutores que siempre mantuvieron sus puertas abiertas.

Mi último agradecimiento es para mi hijo Gabriel, porque ahora regresar a casa es todavía más bonito y porque su sola presencia intensifica por mil mi amor a la vida.

Gracias a todos.



# Índice general

<b>1. Extrapolación polinómica recíproca</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción y motivación . . . . .	3
1.2. Prefacio . . . . .	5
1.3. Introducción a las extrapolaciones . . . . .	7
1.4. Extrapolación de Richardson . . . . .	8
1.5. Extrapolación racional . . . . .	13
1.6. Extrapolación polinómica recíproca . . . . .	17
1.7. Estabilidad y experimentos numéricos. . . . .	23
1.8. Interpretación geométrica. Traslaciones . . . . .	31
<b>2. Aplicación a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.</b>	<b>37</b>
2.1. Introducción . . . . .	37
2.2. Estabilidad y rigidez . . . . .	39
2.3. Resultados numéricos. . . . .	50
2.3.1. Sistema lineal y no lineal asociado . . . . .	50
2.3.2. Reacción química: Oregonator . . . . .	54
2.3.3. Circuito eléctrico: Ecuación de Van der Pol . . . . .	60
2.3.4. Problema stiff altamente oscilatorio no lineal . . . . .	66
2.3.5. Problema lineal stiff altamente oscilatorio . . . . .	68
2.4. Coeficiente de rigidez . . . . .	68
2.4.1. Sistema lineal y no lineal asociado . . . . .	69
2.4.2. Reacción química: Oregonator . . . . .	70
2.4.3. Circuito eléctrico: Ecuación de Van der Pol . . . . .	72
2.4.4. Problema oscilatorio . . . . .	73
<b>3. Problemas de valores frontera y la extrapolación polinómica recíproca</b>	<b>75</b>
3.1. Introducción . . . . .	75

3.1.1.	Un primer ejemplo: problema 1 . . . . .	81
3.2.	Técnicas de aceleración. . . . .	82
3.3.	Primeros resultados numéricos . . . . .	85
3.3.1.	Problema 2 . . . . .	86
3.3.2.	Problema 3. . . . .	87
3.4.	Perturbaciones Singulares. . . . .	89
3.4.1.	Problema 4: Viscous Shock . . . . .	92
3.4.2.	Problema 5: Turning Point . . . . .	94
3.4.3.	Problemas de Bawa-Kumar . . . . .	98
3.5.	Discretizaciones no uniformes . . . . .	102
3.6.	Conclusiones . . . . .	105
<b>4.</b>	<b>Integración y diferenciación numérica.</b>	<b>107</b>
4.1.	Introducción . . . . .	107
4.2.	Nuevas fórmulas de cuadratura . . . . .	114
4.3.	Experimentos numéricos . . . . .	118
4.4.	Diferenciación numérica. . . . .	121
<b>5.</b>	<b>Primera generalización de la extrapolación polinómica recíproca.</b>	<b>127</b>
5.1.	Introducción. . . . .	127
5.2.	Primera generalización de Richardson. . . . .	128
5.3.	Primera generalización de la extrapolación recíproca. . . . .	131
5.3.1.	Propiedades algebraicas. . . . .	134
5.4.	Algoritmo Recursivo para $A_j^n$ . Algoritmo FS. . . . .	138
5.5.	Ejemplos numéricos, estabilidad y conclusiones . . . . .	145
<b>6.</b>	<b>Una adaptación wavelet del Método de Newton 2 pasos</b>	<b>153</b>
6.1.	Introducción . . . . .	153
6.2.	Aproximación no lineal wavelet . . . . .	155
6.3.	Adaptación inexacta del esquema iterativo . . . . .	158
6.3.1.	Análisis del esquema . . . . .	162
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>169</b>



# Capítulo 1

## Extrapolación polinómica recíproca

### 1.1. Introducción y motivación

Dado un problema numérico, además de aproximarnos con precisión a una cantidad determinada, (una integral, una EDO,...), perseguimos otros objetivos como la velocidad de convergencia, el menor número de operaciones o la estabilidad. Para lograr estos objetivos se usan muchas estrategias, aumentando en muchos casos el coste computacional. En ocasiones, para obtener buenas aproximaciones se suele necesitar discretizaciones muy finas, que, además de generar errores de redondeo, hace que los métodos sean demasiado lentos.

Una de las estrategias más conocidas para aumentar el orden de un método es la extrapolación, la más conocida es la de Richardson (lineal).

La extrapolación es una técnica que presenta múltiples ventajas. En los métodos explícitos, que tienen menos operaciones que los implícitos, cuando aplicamos extrapolación aumentamos el orden de convergencia, de esta forma nos podemos permitir discretizaciones más groseras y aumentar la región de estabilidad.

Por otro lado, en los métodos implícitos, que tienen mejores propiedades de estabilidad pero bastante gasto computacional, la extrapolación abarata el número de operaciones y por supuesto mejora el orden.

También podemos considerar extrapolaciones no lineales. La extrapolación introducida en [2], extrapolación polinómica recíproca, será el punto de partida de los siguientes estudios que se presentan. En ese trabajo se presenta un estudio comparativo de la extrapolación polinómica, racional y recíproca, donde se demuestra el buen comportamiento para una ecuación escalar rígida.

Revisaremos este trabajo donde mostraremos la gran ventaja obtenida con esta extrapolación no lineal, así como también otras muchas aplicaciones estudiando su convergencia, implementación y compararemos la eficiencia frente a la extrapolación clásica.

## 1.2. Prefacio

En la presente tesis doctoral hemos llevado a cabo los siguientes trabajos:

1. Como punto de partida, hemos revisado el comportamiento de la extrapolación de Richardson para resolver un problema de valores iniciales. Se ha presentado la extrapolación polinómica recíproca y se ha revisado el estudio comparativo de la extrapolación de Richardson, racional y recíproca, donde hemos visto el buen comportamiento para una ecuación escalar rígida. Hemos presentado un estudio pormenorizado de la interpretación geométrica y las traslaciones que motivan esta extrapolación no lineal.
2. Se ha analizado el comportamiento de la extrapolación polinómica recíproca para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales realizando un estudio comparativo con la extrapolación de Richardson. Hemos analizado multitud de problemas stiff y stiff oscilatorios tanto lineales como no lineales.
3. Hemos presentado como resolver problemas de valores frontera aplicando el método de las diferencias finitas. Hemos visto primero, la ventaja computacional que tiene realizar las extrapolaciones a las dife-

rencias finitas para acelerar la convergencia. En segundo lugar, hemos comprobado en varios problemas perturbados el mejor comportamiento de nuestra extrapolación polinómica recíproca ante problemas rígidos cuando la discretización escogida no es lo suficientemente fina y comienzan a aparecer problemas de inestabilidad.

4. Se han revisado los métodos de integración y diferenciación numérica usando extrapolación, obtenido nuevas fórmulas de cuadratura para el cálculo de integrales. Se ha realizado un estudio numérico comparando las distintas fórmulas de cuadratura, así como también hemos realizado un estudio comparativo para la diferenciación numérica.
5. Se presenta un estudio de una adaptación wavelet del método de Newton de dos pasos. Se aplica la aproximación no lineal wavelet para diseñar una versión adaptada del método de Newton del esquema iterativo de dos pasos. Se presentan también dos teoremas de convergencia local y semilocal.
6. Por último, hemos introducido una primera generalización polinómica recíproca que hemos comparado con la primera generalización de Richardson presentada por Sidi [31]. Para esta primera generalización

se ha estudiado un algoritmo de cálculo y hemos considerado dos modificaciones del método de Euler para comparar ambas generalizaciones.

### 1.3. Introducción a las extrapolaciones

Dado un problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y),$$

$$y(x_0) = y_0,$$

si denotamos por  $a_0$  la solución del problema en cierto instante  $T$  que aproximamos mediante un método numérico, entonces el error de los métodos suele admitir un desarrollo de Taylor del tipo

$$F(h) = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \dots$$

Los métodos clásicos de extrapolación eliminan distintos términos  $a_i h^{p_i}$  mediante distintas combinaciones lineales de  $F(h)$  para distintos  $h$ . Obtendremos entonces una extrapolación  $F(h, \tilde{h})$  donde el error será

$$F(h, \tilde{h}) = a_0 + \tilde{a}_1 h^{p_j} + \dots$$

con  $p_j > p_1$ .

También podemos considerar extrapolaciones no lineales. De hecho, vamos a ver además de la extrapolación de Richardson, la extrapolación polinómica recíproca y otra extrapolación no lineal. Una de las ventajas que poseen las extrapolaciones no lineales es que en los problemas rígidos, donde hay problemas de estabilidad, tienen una mayor región de convergencia.

## 1.4. Extrapolación de Richardson

Supongamos que tenemos un método de orden  $p_1$

$$F(h) = a_0 + \sum_{i=1}^r a_i h^{p_i} + O(h^{r+1}) \quad p_i < p_{i+1} \quad (1.2.1)$$

donde  $F(0) = a_0$  es el valor exacto de la cantidad a aproximar.

Consideramos la nueva discretización  $qh$  ( $q > 1$ ) en el método y obtenemos

$$F(qh) = a_0 + \sum_{i=1}^r a_i q^{p_i} h^{p_i} + O(h^{r+1})$$

Haciendo  $q^{p_1} F(h) - F(qh)$  se tiene

$$q^{p_1} F(h) - F(qh) = (q^{p_1} - 1)a_0 + \sum_{i=2}^r a_i (q^{p_1} - q^{p_i}) h^{p_i} + O(h^{r+1})$$

dividiendo por  $q^{p_1} - 1$  obtenemos

$$\frac{q^{p_1} F(h) - F(qh)}{(q^{p_1} - 1)} = a_0 + \sum_{i=2}^r \frac{a_i(q^{p_1} - q^{p_i})}{(q^p - 1)} h^{p_i} + O(h^{r+1})$$

llamando  $b_i = \frac{a_i(q^{p_1} - q^{p_i})}{(q^p - 1)}$  tenemos

$$\frac{q^{p_1} F(h) - F(qh)}{(q^{p_1} - 1)} = a_0 + \sum_{i=2}^r b_i h^{p_i} + O(h^{r+1})$$

Es decir

$$F(h, qh) = \frac{q^{p_1} F(h) - F(qh)}{(q^{p_1} - 1)} = F(h) + \frac{F(h) - F(qh)}{(q^{p_1} - 1)}$$

es una aproximación de  $a_0$  que tiene error de orden  $p_2$  en vez del error de orden  $p_1$  con el que partía el método.

Este proceso conocido como extrapolación Richardson se puede repetir varias veces.

El siguiente resultado, que se puede demostrar por inducción, nos facilita información del error de truncamiento en sucesivas extrapolaciones.

**Teorema 1** *Supongamos que  $F(h) = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + a_3 h^{p_3} + \dots$  con*

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots$$

*Entonces la siguiente sucesión:*

$$F_1(h) = F(h)$$

$$F_{k+1}(h) = F_k(h) + \frac{F_k(h) - F_k(qh)}{q^{p_k} - 1}$$

$$\text{verifica } F_n(h) = a_0 + a_n^{(n)} h^{p_n} + a_{n+1}^{(n)} h^{p_{n+1}} + \dots$$

Obsérvese que para evaluar  $F_{k+1}(h)$  se necesitan  $k + 1$  valores  $F_1(h), F_1(qh), \dots, F_1(q^k h)$ . Además el error de truncamiento de  $F_n(h)$  decrece según aumenta  $n$  pues  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$

A continuación describimos el algoritmo de cálculo para la extrapolación de Richardson.

***Algoritmo de Richardson***

1.      Para  $m = 0, 1, 2, \dots$  sea  $A_{m,0} = F(q^{-m}h)$
2.      Para  $k = 1, 2, \dots, m$  sea  $A_{m,k} = A_{m,k-1} + \frac{A_{m,k-1} - A_{m-1,k-1}}{q^{pk} - 1}$

El valor  $A_{m,m}$  es aceptado como estimación de  $a_0$  cuando  $|A_{m,m} - A_{m-1,m-1}|$  sea menor que una cantidad prefijada de antemano.

Veamos un caso más simplificado, sea  $q = 2$  así

$$F_1 = F(h) = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \dots$$

$$F_2 = F(2h) = a_0 + a_1 2^{p_1} h^{p_1} + a_2 2^{p_2} h^{p_2} + \dots$$

Consideramos el polinomio  $P(x) = a + bx^{p_1}$  que interpola a ambos



$$F_1 = a + bh^{p_1}$$

$$F_2 = a + b2^{p_1}h^{p_1}$$

y así

$$\begin{aligned} 2^{p_1}F_1 - F_2 &= a(2^{p_1} - 1) \\ a &= \frac{2^{p_1}F_1 - F_2}{2^{p_1} - 1} = F_1 + \frac{F_1 - F_2}{2^{p_1} - 1} \end{aligned}$$

y también

$$b = \frac{F_1 - a}{h^{p_1}} = \frac{F_1 - \frac{2^{p_1}F_1 - F_2}{2^{p_1} - 1}}{h^{p_1}} = \frac{F_1(2^{p_1} - 1) - 2^{p_1}F_1 + F_2}{h^{p_1}(2^{p_1} - 1)} = \frac{F_2 - F_1}{h^{p_1}(2^{p_1} - 1)}$$

Es decir una vez dados  $(h, F_1)$  y  $(2h, F_2)$  tenemos

$$P(x) = a + bx^{p_1} = \frac{2^{p_1}F_1 - F_2}{2^{p_1} - 1} + \frac{F_2 - F_1}{h^{p_1}(2^{p_1} - 1)}x^{p_1}$$

Una vez obtenido  $a + bx^{p_1}$ ,  $a = F_1 + \frac{F_1 - F_2}{2^{p_1} - 1}$  (Extrapolación de Richardson) será la aproximación de  $a_0$ .

Pasemos ahora a realizar una estimación del error.

**Proposición 1** *El primer término del error de la extrapolación de Richardson es*

$$\left(1 + \frac{1 - 2^{p_2}}{2^{p_1} - 1}\right)a_2h^{p_2} \quad (1.2.2)$$

**Demostración 1** Sabemos que en cada extrapolación eliminamos la primera potencia del error del método al que se le está aplicando. Calculemos los primeros términos del error.

$$a + bh^{p_1} = a_0 + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2} + \dots$$

$$a - a_0 = (a_1 - b)h^{p_1} + a_2h^{p_2} + \dots$$

Como  $h \rightarrow 0$  consideramos sólo los primeros términos del error:

$$(a_1 - b)h^{p_1} + a_2h^{p_2}$$

así

$$\begin{aligned} (a_1 - b)h^{p_1} + a_2h^{p_2} &= \left( a_1 - \frac{F_2 - F_1}{h^{p_1}(2^{p_1} - 1)} \right) h^{p_1} + a_2h^{p_2} = \\ &= \left( \frac{F_1 - F_2}{h^{p_1}(2^{p_1} - 1)} + a_1 \right) h^{p_1} + a_2h^{p_2} = \\ &= \left( \frac{(1 - 2^{p_1})h^{p_1}a_1 + (1 - 2^{p_1})h^{p_2}a_2 + \dots + a_1}{h^{p_1}(2^{p_1} - 1)} \right) h^{p_1} + a_2h^{p_2} \simeq \\ &\simeq \left( -a_1 + \frac{(1 - 2^{p_1})h^{p_2}a_2}{h^{p_1}(2^{p_1} - 1)} + a_1 \right) h^{p_1} + a_2h^{p_2} = \\ &= \frac{(1 - 2^{p_1})h^{p_2}a_2}{(2^{p_1} - 1)} + a_2h^{p_2} = \left( 1 + \frac{1 - 2^{p_1}}{2^{p_1} - 1} \right) a_2h^{p_2} \end{aligned}$$

Es decir

$$\left( 1 + \frac{1 - 2^{p_2}}{2^{p_1} - 1} \right) a_2h^{p_2}$$

es el primer término del error de la extrapolación polinómica.

◇

Observar el peligro de realizar muchas extrapolaciones puesto que el coeficiente de la primera potencia del error crece en módulo en cada extrapolación,  $|1 + \frac{1-2^{p_2}}{2^{p_1-1}}| \geq 1$ , puesto que  $p_2 \geq p_1 + 1$ .

## 1.5. Extrapolación racional

Vamos a extrapolar con funciones racionales de la forma  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ . Partimos de tres nodos

$$F_0 = F\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{h}{2}\right)^{p_1} + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^{2p_1} + \dots$$

$$F_1 = F(h) = a_0 + a_1h^{p_1} + a_2h^{2p_1} + \dots$$

$$F_2 = F(2h) = a_0 + a_1(2h)^{p_1} + a_2(2h)^{2p_1} + \dots$$

En la extrapolación racional los desarrollos del error deben estar en este tipo particular de serie de potencias. Esto ya es una desventaja de partida con respecto a la extrapolación recíproca que no supone ningún desarrollo en concreto, como veremos en la siguiente sección.

Como tenemos tres nodos la función será de la forma  $\frac{x^{p_1} + c}{dx^{p_1} + e}$

Exigimos que interpole en los nodos:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{p_1} + c}{d\left(\frac{h}{2}\right)^{p_1} + e} &= F_0 \\ \frac{h^{p_1} + c}{dh^{p_1} + e} &= F_1 \end{aligned}$$

$$\frac{(2h)^{p_1} + c}{d(2h)^{p_1} + e} = F_2$$

Se sigue

$$\left(\frac{h}{2}\right)^{p_1} + c = F_0 d \left(\frac{h}{2}\right)^{p_1} + F_0 e$$

$$h^{p_1} + c = F_1 d h^{p_1} + F_1 e$$

$$(2h)^{p_1} + c = F_2 d (2h)^{p_1} + F_2 e$$

Restando las dos primeras y las dos últimas

$$\left(\frac{h}{2}\right)^{p_1} - h^{p_1} = dh^{p_1} \left(\frac{F_0}{2^{p_1}} - F_1\right) + (F_0 - F_1)e$$

$$h^{p_1} - (2h)^{p_1} = dh^{p_1} (F_1 - 2^{p_1} F_2) + (F_1 - F_2)e$$

Multiplicando por  $\frac{F_1 - F_2}{F_0 - F_1}$

$$\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{p_1} - h^{p_1}\right] \left(\frac{F_1 - F_2}{F_0 - F_1}\right) = dh^{p_1} \left(\frac{F_1 - F_2}{F_0 - F_1}\right) \left(\frac{F_0}{2^{p_1}} - F_1\right) + (F_1 - F_2)e$$

$$h^{p_1} - (2h)^{p_1} = dh^{p_1} (F_1 - 2^{p_1} F_2) + (F_1 - F_2)e$$

Restando

$$h^{p_1} \left[ (2^{p_1} - 1) + \left(\frac{1}{2^{p_1}} - 1\right) \left(\frac{F_1 - F_2}{F_0 - F_1}\right) \right] =$$

$$dh^{p_1} \left[ \left(\frac{F_1 - F_2}{F_0 - F_1}\right) \left(\frac{F_0}{2^{p_1}} - F_1\right) - (F_1 - 2^{p_1} F_2) \right]$$

Y así

$$d = \frac{(2^{p_1} - 1) + \left(\frac{1}{2^{p_1}} - 1\right) \left(\frac{F_1 - F_2}{F_0 - F_1}\right)}{\left(\frac{F_1 - F_2}{F_0 - F_1}\right) \left(\frac{F_0}{2^{p_1}} - F_1\right) - F_1 + 2^{p_1} F_2}$$

despejamos

$$e = \frac{h^{p_1} \left[ (2^{p_1} - 1) + \frac{(2^{p_1} - 1) + \left(\frac{1}{2^{p_1}} - 1\right) \left(\frac{F_1 - F_2}{F_0 - F_1}\right)}{\left(\frac{F_1 - F_2}{F_0 - F_1}\right) \left(\frac{F_0}{2^{p_1}} - F_1\right) - F_1 + 2^{p_1} F_2} (F_1 - 2^{p_1} F_2) \right]}{F_2 - F_1}$$

Y por último

$$c = -h^{p_1} + F_1 d h^{p_1} + F_1 e$$

Una vez dados  $\left(\frac{h}{2}, F_0\right)$ ,  $(h, F_1)$  y  $(2h, F_2)$  tenemos

$$R(x) = \frac{x^{p_1} + c}{dx^{p_1} + e} = \frac{x^{p_1} + c}{\frac{(2^{p_1} - 1) + \left(\frac{1}{2^{p_1}} - 1\right) \left(\frac{F_1 - F_2}{F_0 - F_1}\right)}{\left(\frac{F_1 - F_2}{F_0 - F_1}\right) \left(\frac{F_0}{2^{p_1}} - F_1\right) - F_1 + 2^{p_1} F_2} x^{p_1} + e}$$

Con  $c$  y  $e$  en las anteriores expresiones que no escribimos porque resultaría muy farragoso. A continuación describimos el algoritmo de cálculo para la extrapolación racional

***Algoritmo de la extrapolación racional***

Dados los datos iniciales  $(h_i, T(h_i))$

1. Consideramos  $T_{i,0} := T(h_i)$  y  $T_{i,-1} := 0$
2. Y los siguientes

$$T_{i,k} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\left(\frac{h_{i-k}}{h_i}\right)^{p_i} A - 1}$$

$$A = 1 - \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-2}}$$

Nota: En A es donde se pierde la linealidad, el resto es idéntico a Richardson.

Podríamos realizar una estimación del error, tal y como hemos hecho en la extrapolación de Richardson.

Recordemos que una vez obtenida  $\frac{x^{p_1} + c}{dx^{p_1} + e}$ ,  $\frac{c}{e}$  será la aproximación de  $a_0$ .

Obviando todos los desarrollos tenemos que el primer término del error de la extrapolación racional es.

$$\left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1}\right) h^{3p_1}$$

Vemos que los términos principales de los errores de las distintas extrapolaciones dependen de  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Por lo tanto la aproximación depende no sólo de la extrapolación sino del propio método original.

## 1.6. Extrapolación polinómica recíproca

Construyamos la extrapolación polinómica recíproca. Consideramos dos nodos

$$F_1 = F(h) = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \dots$$

$$F_2 = F(2h) = a_0 + a_1 2^{p_1} h^{p_1} + a_2 2^{p_2} h^{p_2} + \dots$$

Consideremos la función polinómica  $R(x) = \frac{1}{dx^{p_1} + c}$  que interpole a ambos

$$\frac{1}{dh^{p_1} + c} = F_1$$

$$\frac{1}{d2^{p_1} h^{p_1} + c} = F_2$$

y así

$$\frac{1}{F_1} = dh^{p_1} + c$$

$$\frac{1}{F_2} = d2^{p_1} h^{p_1} + c$$

de modo análogo a la extrapolación polinómica

$$c = \frac{\frac{1}{F_1} 2^{p_1} - \frac{1}{F_2}}{2^{p_1} - 1} = \frac{2^{p_1} F_2 - F_1}{F_1 F_2 (2^{p_1} - 1)} = \frac{F_1 - 2^{p_1} F_2}{F_1 F_2 (1 - 2^{p_1})}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{1}{h^{p_1}} \left( \frac{1}{F_1} - c \right) = \frac{1}{h^{p_1}} \left( \frac{1}{F_1} - \frac{F_1 - 2^{p_1} F_2}{F_1 F_2 (1 - 2^{p_1})} \right) = \\
 &= \frac{1}{h^{p_1}} \left( \frac{F_2 (1 - 2^{p_1}) - (F_1 - 2^{p_1} F_2)}{F_1 F_2 (1 - 2^{p_1})} \right) = \\
 &= \frac{1}{h^{p_1}} \left( \frac{F_2 - 2^{p_1} F_2 - F_1 + 2^{p_1} F_2}{F_1 F_2 (1 - 2^{p_1})} \right) = \frac{1}{h^{p_1}} \left( \frac{F_2 - F_1}{F_1 F_2 (1 - 2^{p_1})} \right) = \\
 &= \frac{\frac{F_2}{F_1} - 1}{h^{p_1} F_2 (1 - 2^{p_1})}
 \end{aligned}$$

Una vez dados  $(h, F_1)$  y  $(2h, F_2)$  tenemos

$$R(x) = \frac{1}{dx^{p_1} + c} = \frac{1}{\frac{\frac{F_2}{F_1} - 1}{h^{p_1} F_2 (1 - 2^{p_1})} x^{p_1} + \frac{F_1 - 2^{p_1} F_2}{F_1 F_2 (1 - 2^{p_1})}}$$

No olvidar que una vez obtenida  $\frac{1}{dx^{p_1} + c}$ ,  $\frac{1}{c} = \frac{1}{\frac{F_1 - 2^{p_1} F_2}{F_1 F_2 (1 - 2^{p_1})}}$  (extrapolación recíproca) será la aproximación de  $a_0$

$$\frac{1}{c} = \frac{F_1 F_2 (1 - 2^{p_1})}{F_1 - 2^{p_1} F_2} = \frac{1 - 2^{p_1}}{\frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_1}} = \frac{2^{p_1} - 1}{\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2}}$$

Vamos a contruir un algoritmo directo para la extrapolación polinómica recíproca. Consideremos ahora tres discretizaciones:

$$F_1 = F(h) = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \dots$$

$$F_2 = F(2h) = a_0 + a_1 2^{p_1} h^{p_1} + a_2 2^{p_2} h^{p_2} + \dots$$

$$F(4h) = a_0 + a_1 4^{p_1} h^{p_1} + a_2 4^{p_2} h^{p_2} + \dots$$



Con las dos primeras hemos construido:

$$\frac{1}{c_1} = \frac{2^{p_1} - 1}{\frac{2^{p_1}}{F(h)} - \frac{1}{F(2h)}}$$

Con las dos últimas, se construiría

$$\frac{1}{c_2} = \frac{2^{p_1} - 1}{\frac{2^{p_1}}{F(2h)} - \frac{1}{F(4h)}}$$

Y extrapolaríamos con

$$\frac{1}{c} = \frac{2^{p_2} - 1}{\frac{2^{p_2}}{\frac{1}{c_1}} - \frac{1}{\frac{1}{c_2}}}$$

De forma inductiva obtenemos el siguiente algoritmo:

***Algoritmo de la extrapolación polinómica recíproca.***

1. Para  $l = 1, 2, \dots, n$

$$c_{(0,l)} = F(2^{l-1}h)$$

2. Para  $j = 1, \dots, n - 1$  y para  $l = 1, \dots, n - j$

$$c_{(j,l)} = \frac{2^p - 1}{\frac{2^p}{c_{(j-1,l)}} - \frac{1}{c_{(j-1,l+1)}}$$

Nota:  $p$  es la primera potencia del error en cada paso.

Pasemos ahora a realizar una estimación del error, tal y como hemos hecho en la extrapolación de Richardson.

**Proposición 2** *El primer término del error de la extrapolación polinómica recíproca es*

$$\frac{a_1^2(1 - 2^{2p_1})h^{2p_1} + (2^{p_2} - 2^{p_1})a_0a_2h^{p_2}}{a_0(1 - 2^{p_1})} \quad (1.4.1)$$

**Demostración 2** *Sabemos que en cada extrapolación eliminamos la primera potencia del error del método al que se le está aplicando. Calculemos los primeros términos del error.*

Recordemos que una vez obtenida  $\frac{1}{dx^{p_1} + c}$ ,  $\frac{1}{c}$  será la aproximación de  $a_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{dh^{p_1} + c} &= a_0 + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2} + \dots \\ \frac{\frac{1}{c}}{\frac{d}{c}h^{p_1} + 1} &= a_0 + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2} + \dots \quad (\text{suponiendo que } c \neq 0) \\ \frac{1}{c} - a_0 &= \frac{d}{c}h^{p_1}a_0 + a_1h^{p_1} + \frac{d}{c}a_1h^{2p_1} + a_2h^{p_2} + \dots \end{aligned}$$

Como tomamos  $h \rightarrow 0$  sólo tendremos en cuenta los primeros términos del error:

$$\frac{d}{c}h^{p_1}a_0 + a_1h^{p_1} + \frac{d}{c}a_1h^{2p_1} + a_2h^{p_2}$$

así

$$\begin{aligned} \frac{d}{c}h^{p_1}a_0 + a_1h^{p_1} + \frac{d}{c}a_1h^{2p_1} + a_2h^{p_2} &= h^{p_1} \left( \frac{d}{c}(a_0 + a_1h^{p_1}) \right) + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2} = \\ &= h^{p_1} \left( \frac{\frac{F_2 - F_1}{h^{p_1}F_1F_2(1 - 2^{p_1})}}{\frac{F_1 - 2^{p_1}F_2}{F_1F_2(1 - 2^{p_1})}}(a_0 + a_1h^{p_1}) \right) + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2} = \\ &= h^{p_1} \left( \frac{F_2 - F_1}{h^{p_1}(F_1 - 2^{p_1}F_2)}(a_0 + a_1h^{p_1}) \right) + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2} = \\ &= \frac{F_2 - F_1}{F_1 - 2^{p_1}F_2}(a_0 + a_1h^{p_1}) + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2} = \\ &= \frac{F_2(a_0 + a_1h^{p_1}) - F_1(a_0 + a_1h^{p_1}) + F_1a_1h^{p_1} - 2^{p_1}F_2a_1h^{p_1}}{F_1 - 2^{p_1}F_2} + a_2h^{p_2} = \\ &= \frac{F_2(a_0 + a_1h^{p_1} - 2^{p_1}a_1h^{p_1}) - F_1a_0 - F_1a_1h^{p_1} + F_1a_1h^{p_1}}{F_1 - 2^{p_1}F_2} + a_2h^{p_2} = \\ &= \\ &= \frac{F_2(a_0 + (1 - 2^{p_1})a_1h^{p_1}) - F_1a_0}{F_1 - 2^{p_1}F_2} + a_2h^{p_2} \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Considerando

$$F_1 \simeq a_0 + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2}$$

$$F_2 \simeq a_0 + a_12^{p_1}h^{p_1} + a_22^{p_2}h^{p_2}$$

desarrollamos el numerador del cociente (1.4.2) y tenemos

$$\begin{aligned}
& F_2 (a_0 + (1 - 2^{p_1}) a_1 h^{p_1}) - F_1 a_0 = \\
& = [a_0 + a_1 2^{p_1} h^{p_1} + a_2 2^{p_2} h^{p_2}] (a_0 + (1 - 2^{p_1}) a_1 h^{p_1}) - [a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2}] a_0 = \\
& = a_0^2 + a_1 a_0 (1 - 2^{p_1}) h^{p_1} + a_0 a_1 2^{p_1} h^{p_1} + a_1^2 2^{p_1} (1 - 2^{p_1}) h^{2p_1} + a_0 a_2 2^{p_2} h^{p_2} + \\
& \quad a_1 a_2 2^{p_2} (1 - 2^{p_1}) h^{p_1+p_2} - a_0^2 - a_0 a_1 h^{p_1} - a_0 a_2 h^{p_2} = \\
& = a_0 a_1 h^{p_1} - a_0 a_1 2^{p_1} h^{p_1} + a_0 a_1 2^{p_1} h^{p_1} + a_1^2 2^{p_1} h^{2p_1} - a_1^2 2^{2p_1} h^{2p_1} + a_0 a_2 2^{p_2} h^{p_2} + \\
& \quad a_1 a_2 2^{p_2} (1 - 2^{p_1}) h^{p_1+p_2} - a_0 a_1 h^{p_1} - a_0 a_2 h^{p_2} = \\
& = a_1^2 2^{p_1} h^{2p_1} - a_1^2 2^{2p_1} h^{2p_1} + a_0 a_2 2^{p_2} h^{p_2} + a_1 a_2 2^{p_2} (1 - 2^{p_1}) h^{p_1+p_2} - a_0 a_2 h^{p_2} = \\
& = a_1^2 (2^{p_1} - 2^{2p_1}) h^{2p_1} + a_0 a_2 2^{p_2} h^{p_2} + a_1 a_2 2^{p_2} (1 - 2^{p_1}) h^{p_1+p_2} - a_0 a_2 h^{p_2} \simeq \\
& \quad \simeq a_1^2 (2^{p_1} - 2^{2p_1}) h^{2p_1} + a_0 a_2 (2^{p_2} - 1) h^{p_2}
\end{aligned}$$

Por último, desarrollando ahora el denominador

$$\begin{aligned}
F_1 - 2^{p_1} F_2 &= a_0 + a_1 h^{p_1} - 2^{p_1} (a_0 + a_1 2^{p_1} h^{p_1}) = \\
&= a_0 + a_1 h^{p_1} - a_0 2^{p_1} - a_1 2^{2p_1} h^{p_1} = \\
&= a_0 (1 - 2^{p_1}) + a_1 (1 - 2^{2p_1}) h^{p_1} \simeq \\
&\quad \simeq a_0 (1 - 2^{p_1})
\end{aligned}$$

Y simplificando obtenemos el término del error (1.4.1)

$$\frac{F_2 (a_0 + (1 - 2^{p_1}) a_1 h^{p_1}) - F_1 a_0}{F_1 - 2^{p_1} F_2} + a_2 h^{p_2} \simeq$$

$$\frac{a_1^2(1 - 2^{2p_1})h^{2p_1} + a_0a_2(2^{p_2} - 1)h^{p_2}}{a_0(1 - 2^{p_1}) + a_1(1 - 2^{2p_1})h^{p_1}} + a_2h^{p_2} \simeq \frac{a_1^2(1 - 2^{2p_1})h^{2p_1} + (2^{p_2} - 2^{p_1})a_0a_2h^{p_2}}{a_0(1 - 2^{p_1})}$$

◇

En los métodos más usuales  $2p_1 \geq p_2$ , más aún,  $2p_1 > p_2$ . En estos casos observamos que el primer término de la extrapolación recíproca es  $\frac{(2^{p_2} - 2^{p_1})a_0a_2h^{p_2}}{a_0(1 - 2^{p_1})} = \frac{2^{p_2} - 2^{p_1}}{1 - 2^{p_1}}a_2h^{p_2}$  que coincide con el primer término del error de la extrapolación polinómica.

## 1.7. Estabilidad y experimentos numéricos.

Vamos a estudiar la ecuación lineal test,

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Escogemos el método de Euler como método explícito

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

y el método de Gauss 2

$$y_{n+1} = y_n + hK$$

$$K = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K\right)$$

como método implícito. Tomaremos distintos valores de lambda y distintas discretizaciones con tres nodos. Realizaremos las extrapolaciones en el extremo del intervalo  $t=1$  (extrapolación pasiva) y tomando las discretizaciones de tamaño  $h, 2h, 4h$ .

Veamos algunos resultados para el método de Euler.

**Tabla 1** *Error en el método de Euler.*

<b>Datos de entrada</b>	<b>Ext. Rich</b>	<b>Ext. Rac.</b>	<b>Ext. Pol. Rec.</b>
$\lambda = -1, h = 0,1$	$2,56e - 2$	$2,63e - 3$	$2,62e - 3$
$\lambda = -1, h = 0,01$	$3,18e - 7$	$5,27e - 8$	$5,21e - 7$
$\lambda = -6, h = 0,01$	$6,86e - 7$	$1,24e - 5$	$5,57e - 7$
$\lambda = -10, h = 0,01$	$2,16e - 6$	$8,73e - 6$	$2,16e - 6$
$\lambda = -12, h = 0,01$	$8,28e - 7$	$1,08e - 5$	$8,28e - 7$
$\lambda = -15, h = 0,01$	$1,08e - 7$	$3,98e - 7$	$1,08e - 7$

En la tabla 1 se observa como los tres métodos tienen el mismo orden y similar comportamiento para moderados valores de  $\lambda$ .

**Tabla 2** *Error en el método de Euler en un problema rígido  $\lambda = -40$*

<b>Datos de entrada</b>	<b>Ext. Rich</b>	<b>Ext. Rac.</b>	<b>Ext. Pol. Rec.</b>
$\lambda = -40, h = 0,06$	$5,07e + 4$	$1,27e + 3$	$4,89e + 1$
$\lambda = -40, h = 0,05$	$1,23e + 5$	$4,70e + 3$	$3,75e - 1$
$\lambda = -40, h = 0,04$	$1,04e + 4$	$1,73e + 4$	$6,25e - 1$
$\lambda = -40, h = 0,03$	$8,43e + 3$	$6,58e + 1$	$4,24e - 18$
$\lambda = -40, h = 0,02$	$2,57e + 3$	$1,42e - 6$	$4,24e - 18$
$\lambda = -40, h = 0,01$	$9,47e - 7$	$4,24e - 18$	$4,24e - 18$
$\lambda = -40, h = 0,009$	$9,44e - 12$	$4,24e - 18$	$4,24e - 18$
$\lambda = -40, h = 0,008$	$5,89e - 18$	$4,24e - 18$	$4,24e - 18$

En la segunda tabla de resultados observamos como las extrapolaciones recíproca y racional tiene un mejor comportamiento que la extrapolación

clásica cuando hay problemas de estabilidad. Y entre estas dos, la extrapolación polinómica recíproca se comporta mejor que la racional.

Veamos algunos resultados del método implícito escogido, el método de Gauss 2.

**Tabla 3** *Error en el método de Gauss-2.*

<b>Datos de entrada</b>	<b>Ext. Rich</b>	<b>Ext. Rac.</b>	<b>Ext. Pol. Rec.</b>
$\lambda = -1, h = 0,1$	$3,40e - 5$	$2,03e - 5$	$3,39e - 5$
$\lambda = -1, h = 0,2$	$2,72e - 4$	$2,47e - 4$	$2,77e - 4$
$\lambda = -10, h = 0,02$	$8,85e - 8$	$2,49e - 8$	$8,85e - 8$
$\lambda = -10, h = 0,08$	$3,97e - 4$	$1,36e - 5$	$4,00e - 4$
$\lambda = -20, h = 0,01$	$9,80e - 12$	$3,66e - 12$	$9,80e - 12$
$\lambda = -20, h = 0,04$	$3,08e - 6$	$1,27e - 9$	$3,08e - 6$
$\lambda = -30, h = 0,1$	$5,70e - 3$	$9,22e - 3$	$2,12e - 3$

**Tabla 4** *Error en el método de Gauss-2 en un problema rígido  $\lambda = -40$ .*

<b>Datos de entrada</b>	<b>Ext. Rich</b>	<b>Ext. Rac.</b>	<b>Ext. Pol. Rec.</b>
$\lambda = -40, h = 0,1$	$2,71e - 2$	$2,65e - 2$	$2,15e - 2$
$\lambda = -40, h = 0,09$	$2,99e - 2$	$4,53e - 3$	$4,06e - 2$
$\lambda = -40, h = 0,08$	$3,36e - 3$	$5,38e - 4$	$3,44e - 3$
$\lambda = -40, h = 0,07$	$9,75e - 3$	$5,64e - 4$	$8,55e - 3$
$\lambda = -40, h = 0,06$	$9,22e - 4$	$2,30e - 5$	$2,66e - 18$
$\lambda = -40, h = 0,04$	$1,09e - 4$	$6,33e - 10$	$4,24e - 18$
$\lambda = -40, h = 0,03$	$4,37e - 6$	$4,84e - 18$	$4,24e - 18$
$\lambda = -40, h = 0,02$	$1,20e - 10$	$3,74e - 18$	$4,24e - 18$

En primer lugar, atendiendo a los resultados numéricos de la tabla 3, donde el problema no es lo suficientemente rígido observamos que los resultados de las tres extrapolaciones son similares. Por otro lado, los resultados de la tabla 4 (donde hemos aumentado la rigidez del problema) muestran como en este método implícito las extrapolaciones no lineales tienen un mejor

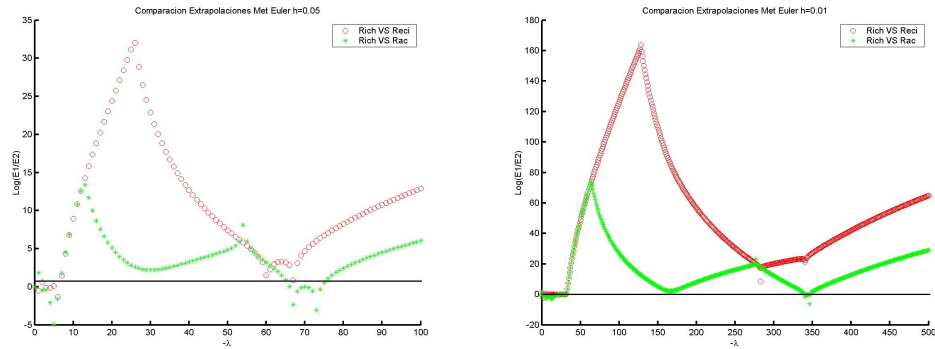


Figura 1.1: Comparación de las extrapolaciones aplicando el método de Euler para  $h=0.05$  y  $h=0.01$

comportamiento que la extrapolación polinómica clásica. Además la extrapolación polinómica recíproca es aún mejor que la extrapolación racional.

Vamos a introducir algunas gráficas para ver mejor el comportamiento de estas extrapolaciones. Fijaremos un  $h$  y moveremos  $\lambda$  (aumentando la rigidez del problema) para ver el comportamiento numérico de las extrapolaciones. Para ello consideraremos el cociente  $\text{Log}(E1/E2)$ , siendo  $E2$  el error de la extrapolación recíproca o racional, según el caso, y  $E1$  el error cometido con la extrapolación polinómica.

En las figuras 1 y 2 representamos el cociente del error entre las distintas extrapolaciones consideradas. En ambos métodos (tanto el implícito como el explícito) las extrapolaciones no lineales tienen un mejor comportamiento que



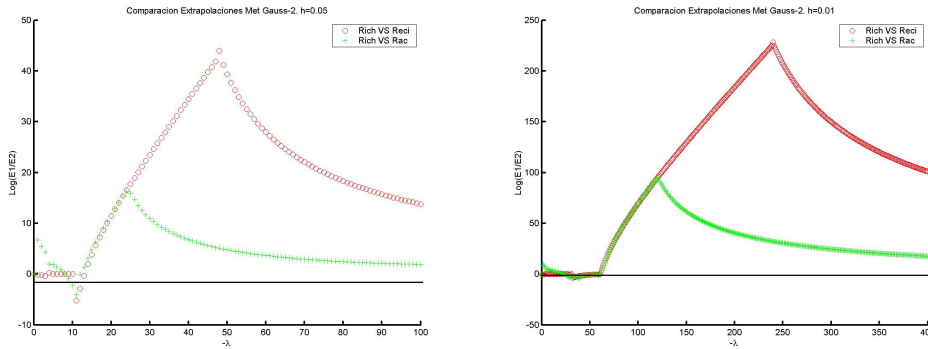


Figura 1.2: Comparación de las extrapolaciones aplicando el método implícito de Gauss-2 para  $h=0.05$  y  $h=0.01$

la extrapolación de Richardson (basta observar que el cociente representado queda siempre por encima de la recta representada  $y=0$ ).

Por otro lado, si comparamos los cocientes de ambas extrapolaciones no lineales, la extrapolación polinómica recíproca tiene un mejor comportamiento que la extrapolación racional tanto en el método explícito como en el implícito (basta volver a observar las figuras 1 y 2) a medida que aumentamos en valor absoluto el valor de  $\lambda$  y con ello la rigidez del problema.

Para analizar la estabilidad de un problema numérico se estudia la ecuación test

$$y' = \lambda y$$

Cuando usamos cualquier método Runge-Kutta, obtenemos la siguiente expresión

$$y_n = R(h\lambda)y_0 = R(z)y_0$$

donde  $R(z)$  nos dará la región de estabilidad,

$$\{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}$$

Elegiremos de nuevo el método de Euler como método explícito y el método de Gauss-2 como método implícito. Realizaremos las extrapolaciones en el extremo del intervalo  $t=1$  (extrapolación pasiva), tomando las discretizaciones de tamaño  $h, 2h, 4h$  y distintos valores de  $\lambda$ .

En las figuras 3 y 4 representamos las regiones de estabilidad para el método de Euler y Gauss-2 respectivamente. En la figura 3 observamos que las regiones de estabilidad de las distintas extrapolaciones son conjuntos acotados. Y entre esos conjuntos, el que tiene un región de estabilidad mayor es el correspondiente a la extrapolación polinómica recíproca.

Por otro lado, los experimentos numéricos nos muestran como en el método implícito escogido (figura 4), donde la región de estabilidad es un conjunto no acotado, la extrapolación polinómica recíproca tiene, de nuevo, una ma-

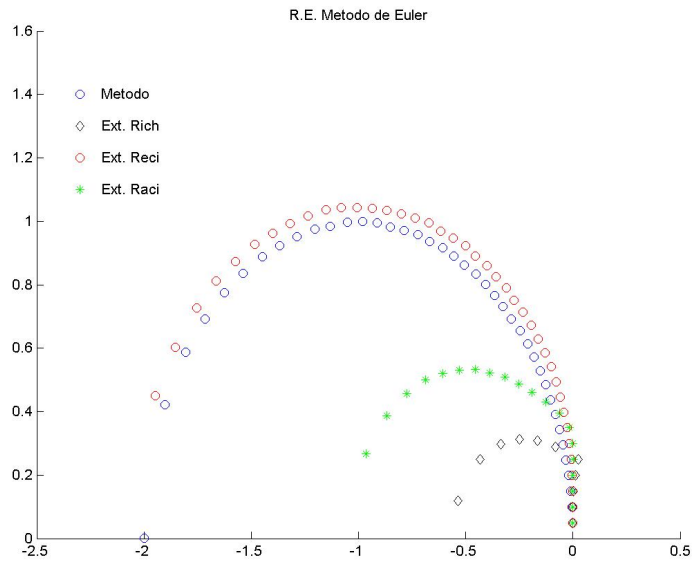


Figura 1.3: Región de estabilidad para el método de Euler. Conjunto acotado  
por región de estabilidad que si aplicamos extrapolación de Richardson y por  
supuesto mayor que la del propio método.

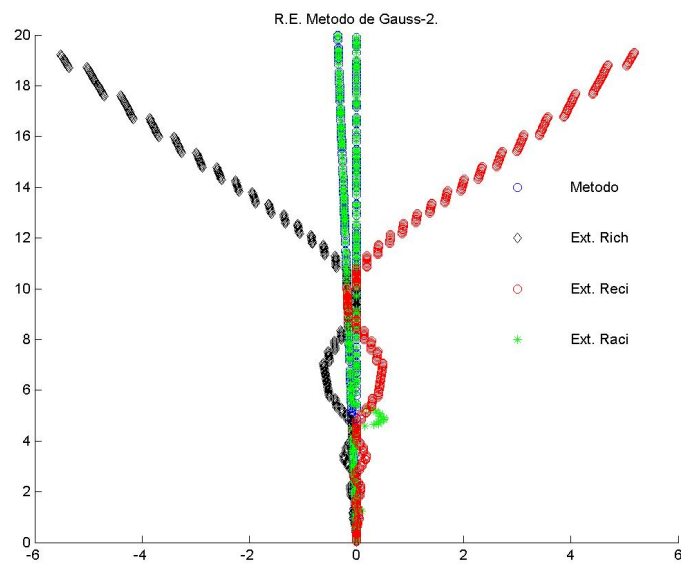


Figura 1.4: Región de estabilidad para el método implícito de Gauss-2. Conjunto no acotado

## 1.8. Interpretación geométrica. Traslaciones

Sabemos que la extrapolación de Richardson es equivalente a extrapolar dos a dos funciones del tipo  $ax^{p_1} + b$ , siendo  $p_1$  el orden del método en cada paso. En nuestra extrapolación es equivalente a considerar una función interpoladora  $R(x) = \frac{1}{p(x)}$  y extrapolar en el cero, que considerar extrapolaciones dos a dos de funciones del tipo  $\frac{1}{dx^{p_1} + c}$ . Vamos a verlo:

Si consideramos

$$F(h_1), F(h_2), \dots, F(h_k)$$

distintos de cero y  $h_1 > h_2 > \dots > h_k > 0$

Encontrar una función interpoladora de la forma  $\frac{1}{p(x)}$  es equivalente a encontrar un polinomio  $p(x)$  que interpole a

$$\frac{1}{F(h_1)}, \frac{1}{F(h_2)}, \dots, \frac{1}{F(h_k)}$$

y es conocido que esto es equivalente a extrapolar dos a dos con funciones del tipo  $ax^{p_1} + b$ . Por construcción es equivalente a considerar

$$\frac{1}{F(h_1)}, \frac{1}{F(h_2)}, \dots, \frac{1}{F(h_k)}$$

es decir  $F(h_1), F(h_2), \dots, F(h_k)$  y extrapolar dos a dos con funciones del tipo

$$\frac{1}{ax^{p_1} + b}$$

De lo anterior se deduce que hacer extrapolación polinómica recíproca es equivalente a tomar los datos inversos, hacer extrapolación polinómica con dichos inversos e invertir el resultado.

Nótese en primer lugar que para la construcción de  $R(x)$ , se debe suponer que tanto  $F_1$  como  $F_2$  sean distintas de cero, ya que estas funciones racionales, no interpolan en cero. Si tenemos que  $F_1 F_2 \leq 0$ , entonces, para encontrar la función racional, primero haríamos una traslación (vertical) de los ejes para que esto ya no se diese, construiríamos entonces  $R(x)$  y por último haríamos la traslación inversa (cabe destacar que en este caso el numerador sería un polinomio de grado mayor que cero).

Por otro lado, para que  $R(x)$  este definida en todo el intervalo,  $p(x)$  deberá mantener su signo constante, ya que, así sólo podría presentar problemas el valor de la extrapolación, problemas que también se podrían subsanar con traslaciones.

Nótese que esto no introduce, en la práctica, más restricciones que las que había en la extrapolación polinómica. Al extrapolar valores de un mismo signo, lo deseable es que la interpolación lo mantenga, pues lo contrario, aún siendo matemáticamente posible, no resultaría, en un gran número de casos, natural.

La interpretación geométrica de la extrapolación polinómica recíproca nos da una idea de cual puede ser su virtud frente a la polinómica. Esto es debido a que cuando dos datos no están lo suficientemente cerca y son mayores que uno, al tomar los inversos de los datos, éstos estarán más cerca y es de suponer que la extrapolación será mejor. Teniendo esto en cuenta, antes de aplicar la extrapolación polinómica recíproca someteremos a los datos a la siguiente casuística:

1. Si  $F_1$  y  $F_2$  son de distinto signo realizamos traslación vertical de los ejes con  $G_i = F_i + M + 1$  para  $i = 1, 2$ , con  $M = \max\{|F_1|, |F_2|\}$
2. Si  $F_1 = 0$  o  $F_2 = 0$ , realizamos la traslación  $G_i = F_i + 1$  para  $i = 1, 2$ .
3. Si  $|F_i| \geq 1$ , no realizamos traslación alguna.
4. Si  $10^{-16} < F_i < 1$  para algún  $i$ , realizamos la traslación  $G_i = F_i + 1$  para  $i = 1, 2$ .
5. Si  $|F_i| \leq 10^{-16}$ , realizamos el cambio  $G_i = F_i * 10^{-m}$  para  $i = 1, 2$ , donde  $m = \max\{n \in \mathbb{Z} : 10^n < |F_i|, i = 1, 2\}$
6. Si  $-1 < F_i < -10^{-16}$  para algún  $i$ , realizamos la traslación  $G_i = F_i - 1$  para  $i = 1, 2$ .

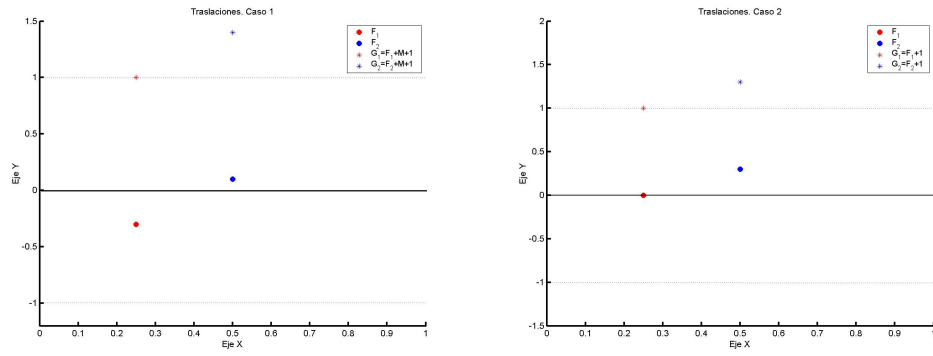


Figura 1.5: Casos 1 y 2

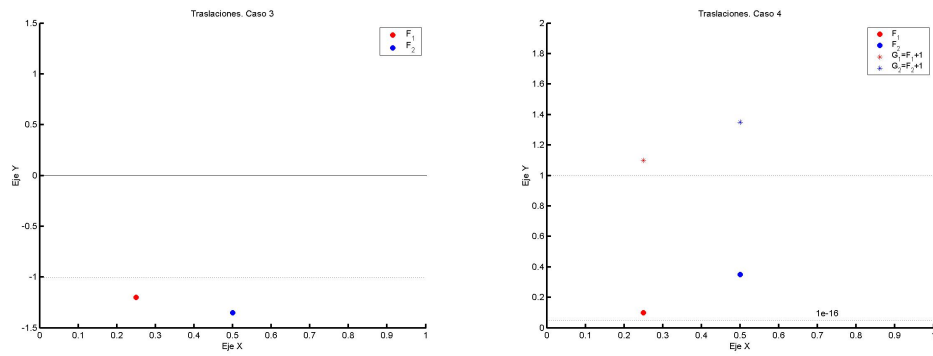


Figura 1.6: Casos 3 y 4



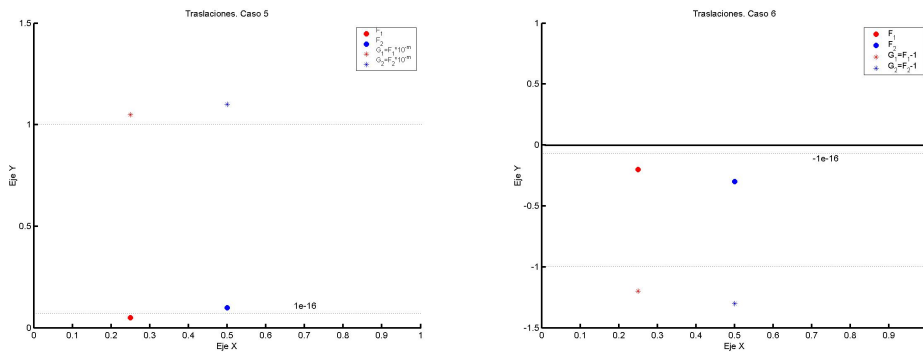


Figura 1.7: Casos 5 y 6

En una primera aproximación uno pensaría que el caso 5 podríamos incluirlo en el 4. Sin embargo, si consideramos  $G_i = F_i + 1$  para un determinado  $0 < F_i < 10^{-16}$ , tendríamos en la máquina  $G_i = F_i + 1 = 1$  perdiendo así todas las cifras significativas.

Otro algoritmo de cálculo para la extrapolación polinómica recíproca que también podemos utilizar aunque no se ajusta exactamente a la casuística presentada es el que sigue,

**Algoritmo de la extrapolación polinómica recíproca****Para**  $l = 1, 2, 3, \dots, n$ 

$$b_{(0,l)} = S(2^{l-1}h) + T$$

donde

$$T = \text{signo}(S(2^{l^*-1}h))(1 + T_m),$$

$$|S(2^{l^*-1}h)| = \max_{l=1,2,3,\dots,n} |S(2^{l-1}h)|,$$

$$T_m = \min_{l=1,2,3,\dots,n} |S(2^{l-1}h)|.$$

**Para**  $j = 1$  hasta  $r = n - 1$  y **para**  $l = 1$  hasta  $k = r - j + 1$ 

$$b_{(j,l)} = \frac{2^p - 1}{\frac{2^p}{b_{(j-1,l)}} - \frac{1}{b_{(j-1,l+1)}}} - T = \frac{(2^p - 1)b_{(j-1,l)}b_{(j-1,l+1)}}{2^p b_{(j-1,l+1)} - b_{(j-1,l)}} - T$$

siendo  $p$  la primera potencia del error en cada paso.

# Capítulo 2

## Aplicación a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

### 2.1. Introducción

En el primer capítulo hemos estudiado el comportamiento de las extrapolaciones lineales y no lineales en problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

donde  $y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  y  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

En este capítulo vamos a estudiar el comportamiento de las extrapolaciones y en particular de la extrapolación polinómica recíproca en sistemas de ecuaciones diferenciales. De modo que nuestros problemas de valores iniciales serán del tipo

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_m) & , \quad y_1(x_0) = y_{10} \\ \vdots \\ y'_m = f_m(x, y_1, \dots, y_m) & , \quad y_m(x_0) = y_{m0} \end{cases}$$

que también representaremos de la forma

$$Y' = F(x, Y) \quad Y(x_0) = Y_0 \quad (2.1.1)$$

donde  $Y : [a, b] \longrightarrow R^m$  ,  $F : [a, b] \times R^m \longrightarrow R^m$  ,  $Y(x) = (y_1(x), \dots, y_m(x))^T$  ,  $Y_0 = (y_{10}, \dots, y_{m0})^T$  y

$$F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, Y) \\ f_2(x, Y) \\ \vdots \\ f_m(x, Y) \end{pmatrix}$$

Demostrado el buen comportamiento de la extrapolación polinómica recíproca en la ecuación escalar rígida, vamos a estudiar determinados sistemas de ecuaciones diferenciales de cuya rigidez esperamos un mejor comportamiento de nuestra extrapolación no lineal.

La existencia y unicidad de solución para (2.1.1) puede ser garantizada bajo ciertas condiciones. Presentamos el siguiente teorema que garantiza dicha existencia única y cuya demostración podemos encontrar en libros especializados [21].

**Teorema 2** *Sea  $F(x, Y)$  continua y  $|F| \leq M$ . Consideramos además que se cumple la condición de Lipschitz*

$$\|F(x, Y) - F(x, Z)\| \leq L \|Y - Z\|$$

para todo  $(x, Y), (x, Z) \in S = \{(x, Y) : x_0 \leq x \leq b, Y \in \mathbb{R}^m\}$  Entonces el problema (2.1.1) tiene solución única para  $x_0 \leq x \leq \epsilon$ .

Observar que la condición de Lipschitz ha de cumplirse para todo  $Y$  y  $Z$ .

Si aplicamos el teorema del valor medio

$$f_i(x, Y) - f_i(x, Z) = \sum_{j=1}^m \frac{\delta f_i}{\delta y_j}(x, W)(y_j - z_j),$$

$$1 \leq i \leq m,$$

donde  $W = (w_1, \dots, w_m)^T$  cumpliendo que  $y_j \leq w_j \leq z_j$  para  $1 \leq i \leq m$ .

Por lo tanto, una condición suficiente para que  $F(x, Y)$  sea de Lipschitz y continua (lo que garantiza la existencia y unicidad de la solución) es que la matriz Jacobiana  $D_Y F(x, Y) = [\frac{\delta f_i}{\delta y_j}]$  sea continua en  $S$  y acotada.

Además, el estudio de esta matriz nos servirá para ver la estabilidad y rigidez de nuestros problemas, tal y como veremos en la última sección del capítulo.

## 2.2. Estabilidad y rigidez

Vamos a considerar el siguiente sistema lineal (2.2.1)

$$y_1' = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} y_1 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} y_2$$

$$y_2' = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} y_1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} y_2$$

con  $\lambda_i < 0$ . cuya solución general es

$$y_1(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

$$y_2(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} - C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Tomamos  $y_1(0) = 2$ ,  $y_2(0) = 0$  de modo que  $C_1 = C_2 = 1$ .

Para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales vamos a utilizar el método de Euler explícito y el método implícito de Gauss-2.

Cuando resolvamos el sistema con el método implícito de Gauss-2

$$Y_{n+1} = Y_n + h M,$$

$$M = F\left(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2} M\right),$$

resolveremos el sistema no lineal mediante el método de Newton en 2 variables.

Vamos a aplicar el método a la ecuación considerando distintos valores de  $\lambda$  y distintos  $h$ , de forma que podamos aumentar la rigidez del sistema. Aplicamos extrapolación de Richardson y extrapolación polinómica recíproca con dos y tres nodos para compararlas.

En las pruebas numéricas realizaremos la extrapolación pasiva en  $Y(1)$  y consideramos siempre  $\lambda_1 = -1$

**Tabla 5** Error en el método explícito de Euler, con tres nodos  $4h$ ,  $2h$  y  $h$ .

<b>Datos de entrada</b>	<b>Ext. Rich</b>	<b>Ext. Pol. Rec.</b>	<b>Método</b>
$\lambda_2 = -2, h = 0,01$	$4,54e - 7$	$6,18e - 6$	$4,64e - 3$
$\lambda_2 = -40, h = 0,01$	$1,41e - 6$	$1,54e - 6$	$2,61e - 3$
$\lambda_2 = -100, h = 0,009$	$1,35e + 11$	$9,74e - 1$	$2,34e - 3$
$\lambda_2 = -400, h = 0,002$	$2,99e + 42$	$9,68e - 1$	$5,20e - 4$
$\lambda_2 = -400, h = 0,001$	$4,35e - 10$	$7,07e - 10$	$2,60e - 4$
$\lambda_2 = -100, h = 0,004$	$5,56e - 6$	$5,57e - 6$	$1,04e - 3$

**Tabla 6** Error en el método implícito de Gauss-2, con tres nodos  $4h$ ,  $2h$  y  $h$ .

<b>Datos de entrada</b>	<b>Ext. Rich.</b>	<b>Ext. Pol. Rec.</b>	<b>Método</b>
$\lambda_2 = -200, h = 0,1$	$7,24e - 1$	$8,92e - 1$	$1,90e - 1$
$\lambda_2 = -200, h = 0,06$	$9,25e - 2$	$9,25e - 2$	$3,89e - 3$
$\lambda_2 = -400, h = 0,1$	$1,36e + 0$	$2,09e + 0$	$5,19e - 1$
$\lambda_2 = -400, h = 0,03$	$1,65e - 2$	$1,61e - 2$	$1,55e - 2$
$\lambda_2 = -1000, h = 0,07$	$1,27e + 0$	$1,70e - 1$	$5,19e - 1$
$\lambda_2 = -100, h = 0,03$	$1,51e - 3$	$1,51e - 3$	$3,86e - 5$

Atendiendo a los resultados de las tablas 5 y 6, observamos que cuando disminuyen los valores de  $\lambda_2$  la extrapolación polinómica recíproca tiene un mejor comportamiento.

En las figuras 1,2,3,4 y 5 fijamos un  $h$  y  $\lambda_1 = -1$ , y movemos  $\lambda_2$  para ver el comportamiento numérico de las extrapolaciones. Para ello consideraremos el cociente  $\text{Log}(E1/E2)$ , siendo  $E1$  el error cometido con la extrapolación polinómica, y  $E2$  el error de la extrapolación polinómica recíproca.

Podemos observar como el comportamiento del error es mejor en la extrapolación polinómica recíproca en el método explícito a medida que disminu-

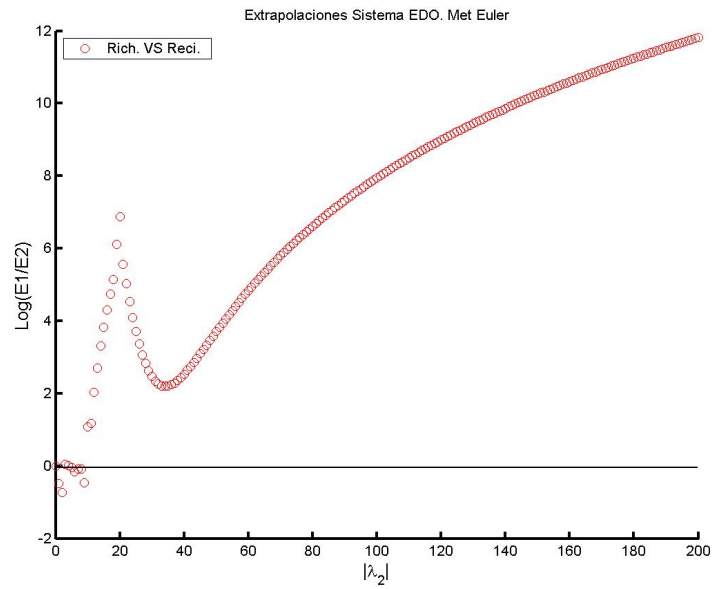


Figura 2.1: Cociente de los errores en la extrapolación de Richadson y extrapolación recíproca aplicando el método de Euler al sistema,  $h=0,1$  .

uyen los valores de  $\lambda_2$ , es decir, conforme aumenta la rigidez del sistema (ver figuras 1 y 2). Por otro lado, en el método implícito ambas extrapolaciones son comparables (ver figuras 3, 4 y 5).



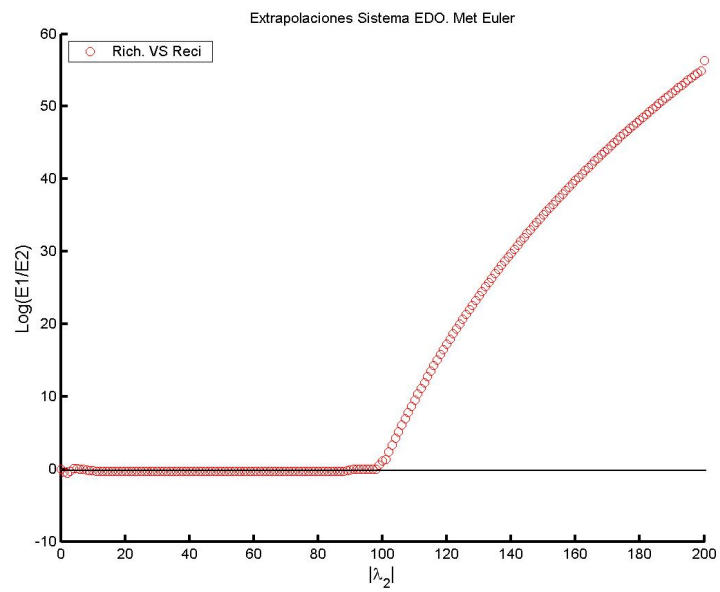


Figura 2.2: Cociente de los errores en la extrapolación de Richardson y extrapolación recíproca aplicando el método de Euler al sistema,  $h=0,01$ .

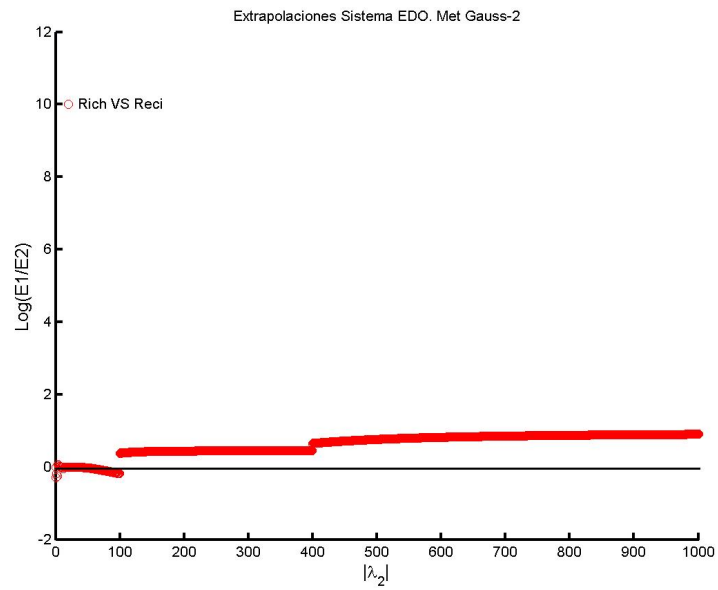


Figura 2.3: Cociente de los errores en la extrapolación de Richadson y extrapolación recíproca aplicando el método de Gauss al sistema,  $h=0,1$  .

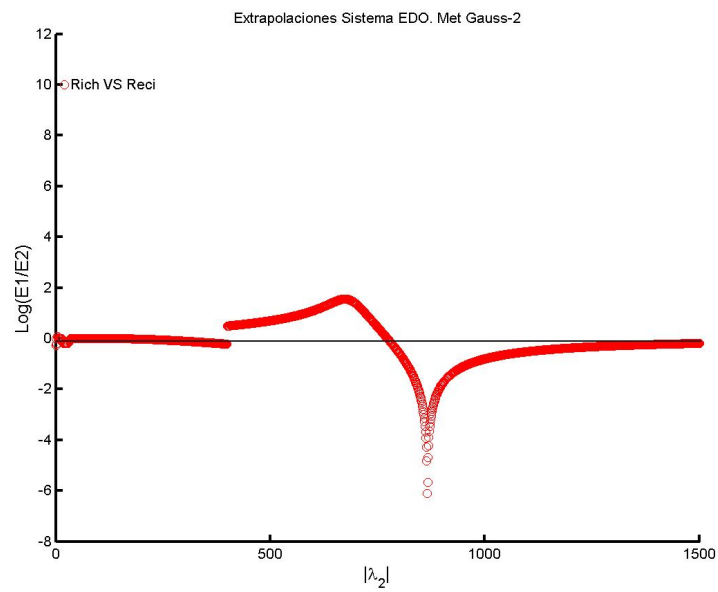


Figura 2.4: Cociente de los errores en la extrapolación de Richardson y extrapolación recíproca aplicando el método de Gauss al sistema,  $h=0,05$ .

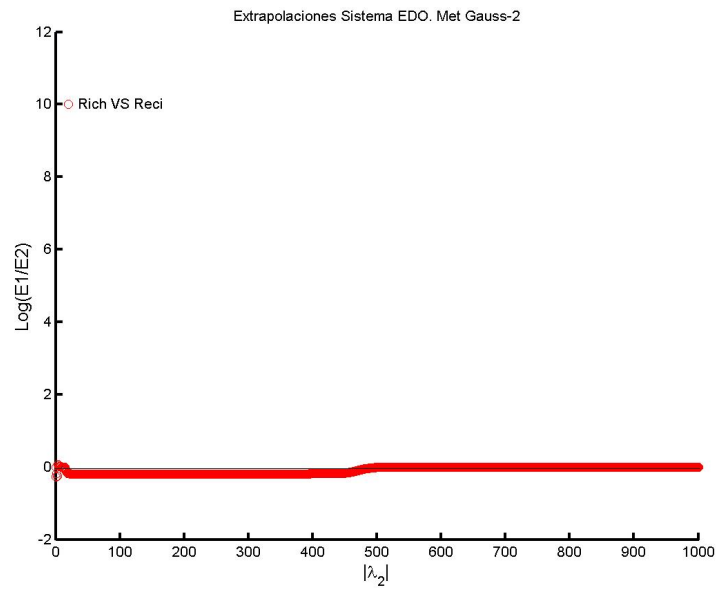


Figura 2.5: Cociente de los errores en la extrapolación de Richadson y extrapolación recíproca aplicando el método de Gauss al sistema,  $h=0,01$  .

Analicemos el comportamiento del método de Euler en este sistema. La solución numérica de dicho método es

$$y_{1n} = (1 + h\lambda_1)^n + (1 + h\lambda_2)^n,$$

$$y_{2n} = (1 + h\lambda_1)^n - (1 + h\lambda_2)^n,$$

esta aproximación numérica convergerá a la solución si

$$|1 + h\lambda_1| < 1 \quad \text{y} \quad |1 + h\lambda_2| < 1.$$

Sin embargo si tomamos  $|\lambda_2|$  muy grande en comparación con  $|\lambda_1|$  tendríamos que tomar como longitud de paso

$$h < \frac{2}{|\lambda_2|}$$

De modo que si  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -1000$ , entonces debemos tomar  $h < 0,0002$ .

El coeficiente  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  exige una disminución significativa de paso para evitar inestabilidad. En general, esperamos que un sistema de ecuaciones diferenciales  $y' = f(x, y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  sea rígido si la matriz  $f_y(x, y)$  tiene autovalores propios  $\lambda$  con  $Re\lambda \ll 0$ .

De hecho, es frecuente designar al cociente de los módulos de los autovalores de mayor y menor módulo como *coeficiente de rigidez del sistema*.

$$\left| \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \right|.$$

No todos los métodos numéricos presentan tanta sensibilidad a la estabilidad. En el capítulo 1 ya notamos el buen comportamiento de los métodos implícitos como alternativa a los explícitos en problemas rígidos.

Si aplicamos al sistema (2.2.1) el método de Euler implícito

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_n, y_n)$$

tendríamos por solución numérica

$$\begin{aligned} y_{1n} &= \left(\frac{1}{1-h\lambda_1}\right)^n + \left(\frac{1}{1-h\lambda_2}\right)^n, \\ y_{2n} &= \left(\frac{1}{1-h\lambda_1}\right)^n - \left(\frac{1}{1-h\lambda_2}\right)^n, \end{aligned}$$

que convergerá a la solución si

$$\left|\frac{1}{1-h\lambda_1}\right| < 1 \quad \text{y} \quad \left|\frac{1}{1-h\lambda_2}\right| < 1,$$

que se cumple para cualquier valor de  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ .

En definitiva, el método implícito de Euler no requiere ninguna restricción de paso para evitar la inestabilidad. Esto no quiere decir, por supuesto, que cualquier  $h$  valga. Será necesario escoger  $h > 0$  suficientemente pequeño como para que el error local sea razonablemente pequeño y aproximemos adecuadamente a la solución.

Para los sistemas de ecuaciones, consideramos el Jacobiano  $J = \frac{\delta f(x, y)}{\delta y}$  como una primera aproximación a  $y' = f(x, y)$ .

$$y' = Jy.$$

Si aplicamos el método de Euler, obtenemos

$$y_{n+1} = R(hJ)y_n \quad \text{con} \quad R(z) = 1 + z.$$

En general, para los métodos Runge-Kutta tenemos que la función de estabilidad del método es

$$R(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}e \quad z \in \mathbb{C},$$

siendo  $e = (1, \dots, 1)^T$ ,  $b^T = (b_1, \dots, b_s)$  y  $A = (a_{ij})$  los coeficientes de los métodos Runge-Kutta. De hecho para los Runge-Kutta explícitos ( $p = s$ ) tenemos que

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^s}{s!}.$$

**Definición 1** *Se define como dominio de estabilidad de un método al conjunto*

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}.$$

Que en el método explícito de Euler es el círculo de radio 1 y centro -1, debido a que  $R(z) = 1 + z$ . Sin embargo en el método implícito de Euler como  $R(z) = \frac{1}{1+z}$  el dominio de estabilidad es el exterior del círculo de radio 1 y centro 1. Por lo tanto es un método muy estable.

**Definición 2** *Un método es A-estable si  $S \supset \mathbb{C}^- = \{z : \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ .*

Así, si un método es A-estable podremos elegir la longitud de paso  $h$  sólo por motivos de precisión, sin restricciones debidas a la estabilidad. Además estos métodos serán, en general, buenos a la hora de resolver problemas rígidos.

**Corolario 1** *Ningún método Runge-Kutta explícito puede ser A-estable.*

Para un análisis detallado de lo anterior se puede consultar los capítulos IV.2 y IV.3 de [22]

## 2.3. Resultados numéricos.

### 2.3.1. Sistema lineal y no lineal asociado

Vinculado al sistema lineal ya estudiado en la sección anterior

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} y_1 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} y_2, \\ y_2' &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} y_1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} y_2, \end{aligned}$$

consideramos el siguiente sistema no lineal asociado

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} y_1 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} y_2 + \lambda_3 y_1 y_2, \\ y_2' &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} y_1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} y_2 + \lambda_3 y_1 y_2. \end{aligned}$$



El cual vamos a resolverlo por el método implícito de Euler debido a la elevada rigidez a la que vamos a someter el sistema.

**Tabla 7** Error en el método implícito de Euler,  $2h$  y  $h$ . Sistema no lineal con  $y_0 = [1, 1]$

<i>Datos de entrada</i>	<i>Ext. Rich</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$h = 0,01$ , $\lambda_1 = -10^2$ , $\lambda_2 = -10^{-2}$ , $\lambda_3 = 10^3$	$4,05e + 0$	$4,24e - 1$
$h = 0,01$ , $\lambda_1 = -10^2$ , $\lambda_2 = -10^{-2}$ , $\lambda_3 = 10^4$	$4,51e - 1$	$2,44e - 1$

**Tabla 8** Error en el método implícito de Euler,  $2h$  y  $h$ . Sistema no lineal con  $y_0 = [2, 0]$

<i>Datos de entrada</i>	<i>Ext. Rich</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$h = 0,05$ , $\lambda_1 = -1$ , $\lambda_2 = -100$ , $\lambda_3 = 200$	$1,28e + 1$	$5,24e - 1$
$h = 0,05$ , $\lambda_1 = -1$ , $\lambda_2 = -100$ , $\lambda_3 = 300$	$1,25e + 0$	$5,33e - 1$

En este caso para forzar una alta rigidez del sistema vamos a considerar distintos valores de  $\lambda$  de forma que el cociente  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$  sea grande pero  $|\lambda_3| > |\lambda_2|$ . Como podemos ver en las figuras 6 y 7 el comportamiento de la extrapolación polinómica recíproca es mejor que la de Richardson, mostrando acordes resultados de las tablas 7 y 8. Hacemos notar que las tablas 7 y 8 corresponden a raíces distintas ( $[1, 1]$  y  $[2, 0]$ ) del mismo problema no lineal asociado, así como las figuras 6 y 7.

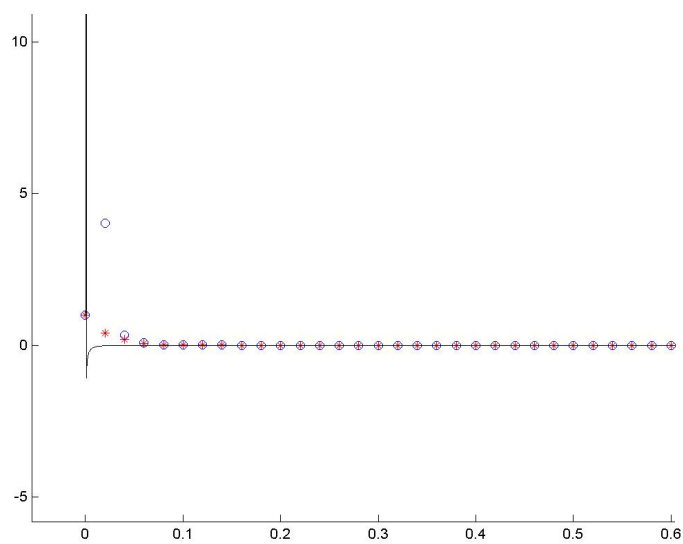


Figura 2.6: Sistema no lineal. Aproximación con extrapolación Richardson (o) y recíproca (\*) a  $y_1$  con el método de Euler implícito,  $\lambda_1 = -10^2$ ,  $\lambda_2 = -10^{-2}$ ,  $\lambda_3 = 10^3$ ,  $y_0 = [1, 1]$ .

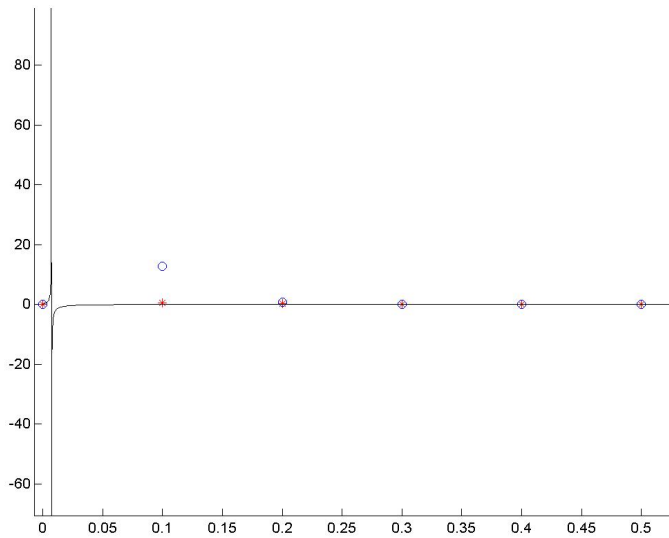


Figura 2.7: Sistema no lineal. Aproximación con extrapolación Richardson (o) y recíproca (\*) a  $y_1$  con el método de Euler implícito,  $\lambda_1 = -1\lambda_2 = -100\lambda_3 = 200$ ,  $y_0 = [2, 0]$ .

### 2.3.2. Reacción química: Oregonator

El Oregonator es un modelo teórico para un tipo de reacción autocatalítica. De hecho, es el modelo realista más simple de la dinámica química de la reacción oscilatoria de Belousov-Zhabotinsky. El modelo fué creado por Richard M. Noyes en la Universidad de Oregon, a la que debe su nombre. Esta reacción presenta notables propiedades químicas como cambios oscilatorios en el color y la estructura, presentando gran velocidad en los cambios de concentración. Esta velocidad en los cambios de concentración origina la alta rigidez del sistema.

Consideremos entonces el siguiente sistema que describe esta conocida reacción química entre  $HBrO_2$ ,  $Br^-$  y  $Ce(IV)$ .

$$y_1' = 77,27[y_2 + y_1(1 - 8,375 \cdot 10^{-6}y_1 - y_2)],$$

$$y_2' = \frac{1}{77,27}[y_3 - (1 + y_1)y_2],$$

$$y_3' = 0,161(y_1 - y_3),$$

$$\text{con } y_1(0) = 1, y_2(0) = 2, y_3(0) = 3.$$

Este es un ejemplo de ecuación diferencial rígida. Dada la experiencia con las ecuaciones escalares rígidas, podemos esperar que la extrapolación polinómica recíproca tenga un mejor comportamiento que la lineal.

Aplicaremos el método de Euler como método explícito y el método de

Euler implícito para  $2h$  y  $h$ . En dichos métodos aplicaremos tanto la extrapolación lineal y como la no lineal para comparar los resultados.

**Tabla 9** Error en el método explícito de Euler,  $2h$  y  $h$ . Oregonator

<b>Datos de entrada</b>	<b>Ext. Rich</b>	<b>Ext. Pol. Rec.</b>
$h = 0,02$ , $b = 2$	$1,207e + 1$	$9,167e - 1$
$h = 0,01$ , $b = 2$	$4,158e - 2$	$2,065e - 2$
$h = 0,025$ , $b = 5$	<i>NaN</i>	$6,964e - 1$

**Tabla 10** Error en el método implícito de Euler,  $2h$  y  $h$ . Oregonator

<b>Datos de entrada</b>	<b>Ext. Rich</b>	<b>Ext. Pol. Rec.</b>
$h = 0,1$ , $b = 2$	$3,45e - 2$	$4,46e - 2$
$h = 0,05$ , $b = 2$	$3,07e - 2$	$3,29e - 2$
$h = 0,05$ , $b = 5$	$3,07e - 2$	$3,29e - 2$

En las figuras 8 y 9 hemos representado la variable  $y_1$  para el problema del Oregonator. Observamos que la extrapolación polinómica recíproca se aproxima antes a la solución que la extrapolación lineal cuando aplicamos extrapolación al método explícito (figura 8).

Por otro lado cuando aplicamos la extrapolación al método implícito ambas son comparables, además podemos observar el mejor comportamiento del método implícito ya que no requiere una discretización tan fina ( $h = 0,05$ ) como el explícito ( $h = 0,02$  o  $h = 0,01$ ). Las gráficas representadas están acordes con los resultados numéricos de las tablas 9 y 10.

**Nota 1** Para representar las aproximaciones de las extrapolaciones hemos realizado la extrapolación en cada paso  $h$  (extrapolación activa).

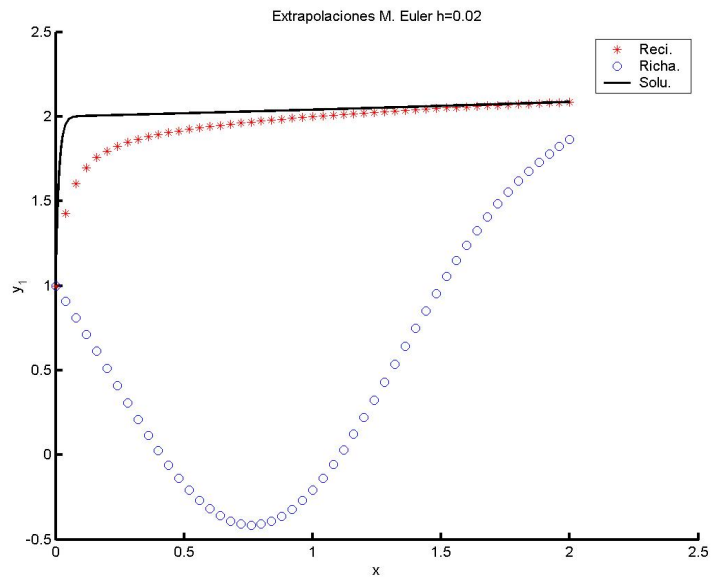


Figura 2.8: Oregonator. Aproximación con extrapolación Richardson y recíproca a  $y_1$  con el método de Euler.

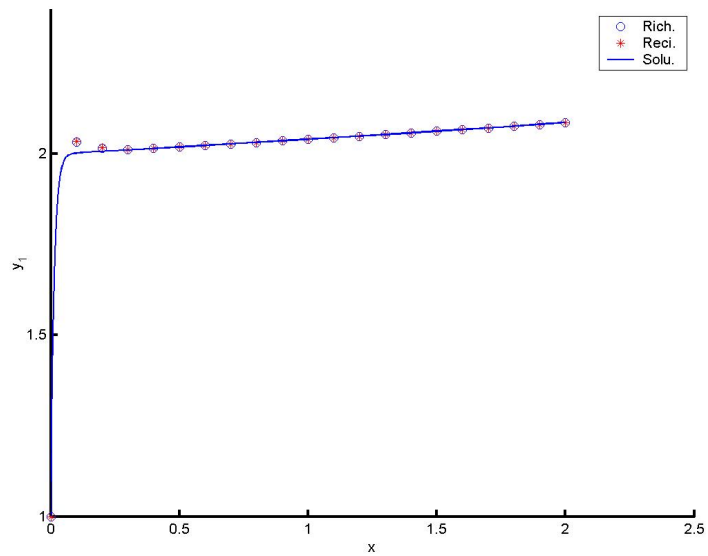


Figura 2.9: Oregonator. Aproximación con extrapolación Richardson y recíproca a  $y_1$  con el método implícito de Euler.

Hemos observado que en el caso implícito el comportamiento de ambas extrapolaciones son comparables. Vamos entonces a considerar de nuevo el problema del Oregonator dificultando el arranque, para ello hemos considerado distintas raíces y presentamos algunas en las que la extrapolación polinómica recíproca tiene un mejor comportamiento que la polinómica, al menos de forma cualitativa.

$$y_1' = 77,27[y_2 + y_1(1 - 8,375 \cdot 10^{-6}y_1 - y_2)],$$

$$y_2' = \frac{1}{77,27}[y_3 - (1 + y_1)y_2],$$

$$y_3' = 0,161(y_1 - y_3),$$

$$\text{con } y_0 = [10 \ 1 \ 0,1].$$

**Tabla 11** *Error en el método implícito de Euler, 2h y h. Oregonator*

<b><i>Datos de entrada</i></b>	<b><i>Ext. Rich</i></b>	<b><i>Ext. Pol. Rec.</i></b>
$h = 0,005$ , $y_0 = [10 \ 1 \ 0,1]$	$3,67e + 4$	$2,74e + 4$
$h = 0,005$ , $y_0 = [1 \ 1,1 \ 1]$	$1,64e + 4$	$9,73e + 2$

A pesar de que en vista de los resultados de la tabla 11 ninguna de las dos extrapolaciones obtiene buenas aproximaciones, observamos en la figura 10 un mejor comportamiento cualitativo de la extrapolación polinómica recíproca.



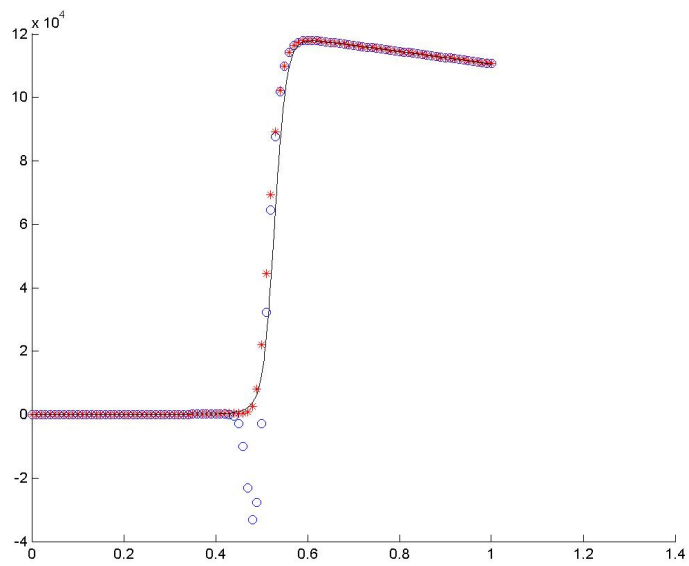


Figura 2.10: Oregonator. Aproximación con extrapolación Richardson y recíproca a  $y_1$  con el método de Euler implícito para  $h = 0,005$  y  $y_0 = [10 \ 1 \ 0,1]$

### 2.3.3. Circuito eléctrico: Ecuación de Van der Pol

El oscilador de Van der Pol modela un circuito electrónico implementado en las radios de los años 20 propuesto por Balthasar Van der Pol cuando trabaja como ingeniero para Philips. Es un oscilador no lineal con amortiguación regido por la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0$$

en la que pequeñas oscilaciones se amplifican y las grandes oscilaciones se amortiguan. Consideremos el siguiente sistema no lineal asociado al oscilador de Van der Pol

$$y_1' = y_2,$$

$$y_2' = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1,$$

$$\text{con } y_1(0) = 2, y_2(0) = 0.$$

Vamos a integrar el sistema para diferentes valores de  $\mu$  y distintos valores de  $h$ . Este problema es fácilmente integrable para valores de  $\mu$  moderados. Aumentaremos los valores de  $\mu$  y variaremos la discretización de  $h$  para modificar la estabilidad y rigidez del problema.

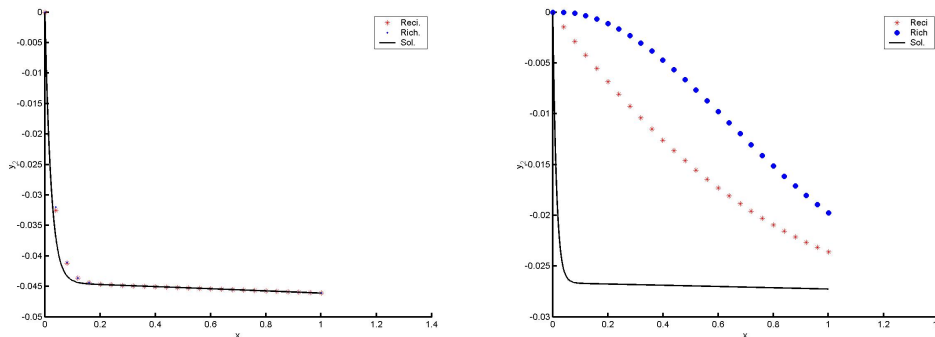


Figura 2.11: Aproximaciones de las extrapolaciones de Richardson y recíproca para la ecuación de van der Pol,  $h = 0,02$   $\mu = 15$ ,  $\mu = 25$  (Izq y Dech. resp.).

**Tabla 12** Error en el método explícito de Euler,  $2h$  y  $h$ . Ecuación de Van der Pol

<i>Datos de entrada</i>	<i>Ext. Rich</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$h = 0,02$ , $\mu = 2$	$1,313e - 2$	$1,315e - 2$
$h = 0,02$ , $\mu = 5$	$7,267e - 3$	$7,346e - 3$
$h = 0,02$ , $\mu = 15$	$5,645e - 3$	$5,085e - 3$
$h = 0,02$ , $\mu = 20$	$1,761e - 2$	$1,634e - 2$
$h = 0,02$ , $\mu = 25$	$9,747e - 2$	$7,014e - 2$

En las figuras 11,12,13 y 14 hemos representado la variable  $y_2$  para la ecuación de Van der Pol . Cuando fijamos el valor de  $h$  (fig. 11 y 14) ambas extrapolaciones tienen un buen comportamiento para moderados valores de  $\mu$ . Sin embargo, si aumentamos los valores de  $\mu$ ,  $\mu = 25$  para el método explícito ó  $\mu = 600$  para el método implícito, la extrapolación polinómica recíproca tiene un mejor comportamiento que la extrapolación de Richardson.

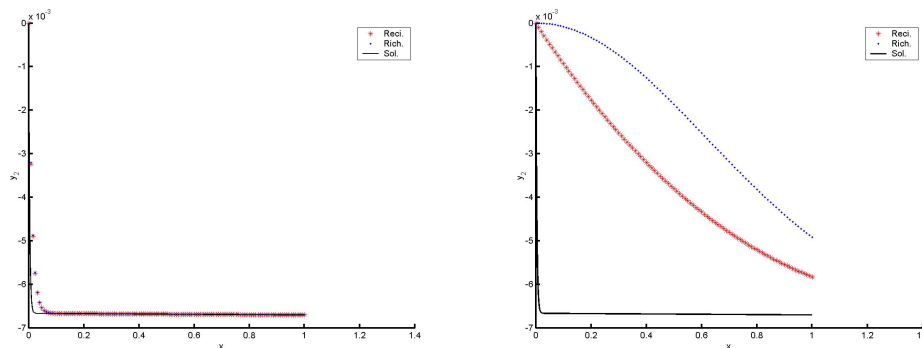


Figura 2.12: Aproximaciones de las Ext. de Richarson y recíproca aplicando el M. Euler para la ecuación van der Pol,  $\mu = 100$  y  $h = 0,004$ ,  $h = 0,005$  (Izq. y dech.)

**Tabla 13** Error en el método explícito de Euler,  $2h$  y  $h$ . Ecuación de Van der Pol

<i>Datos de entrada</i>	<i>Ext. Rich</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$h = 0,001$ , $\mu = 100$	$4,193e - 4$	$4,195e - 4$
$h = 0,002$ , $\mu = 100$	$1,863e - 4$	$1,890e - 4$
$h = 0,004$ , $\mu = 100$	$3,531e - 3$	$3,475e - 3$
$h = 0,005$ , $\mu = 100$	$4,862e - 2$	$3,554e - 2$

Por otro lado, cuando fijamos el valor de  $\mu$  (fig. 12 y 13) ambas extrapolaciones tienen un buen comportamiento para discretizaciones lo suficientemente finas,  $h = 0,02$  para Gauss y  $h = 0,004$  para Euler. Sin embargo, si aumentamos los valores de  $h$ , la extrapolación polinómica recíproca tiene un mejor comportamiento que la extrapolación de Richardson tanto en el método explícito (fig.12) como en implícito (fig.13).

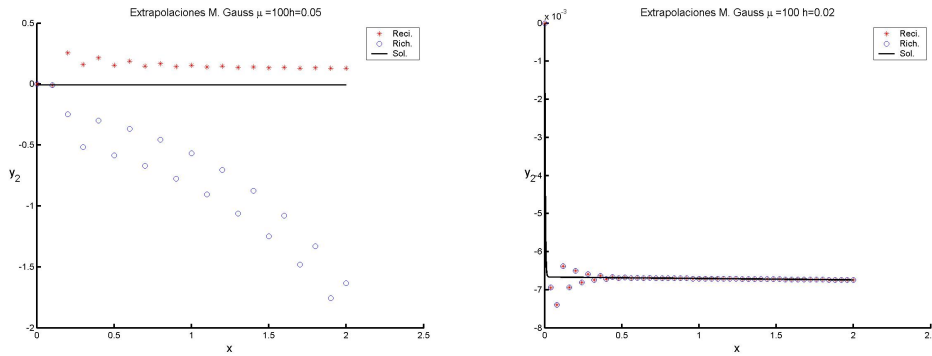


Figura 2.13: Aproximaciones de las Ext. de Richarson y recíproca aplicando el M. Gauss-2 para la ecuación van der Pol.  $\mu = 100$  y  $h = 0,05$ ,  $h = 0,02$  (Izq. y dech.)

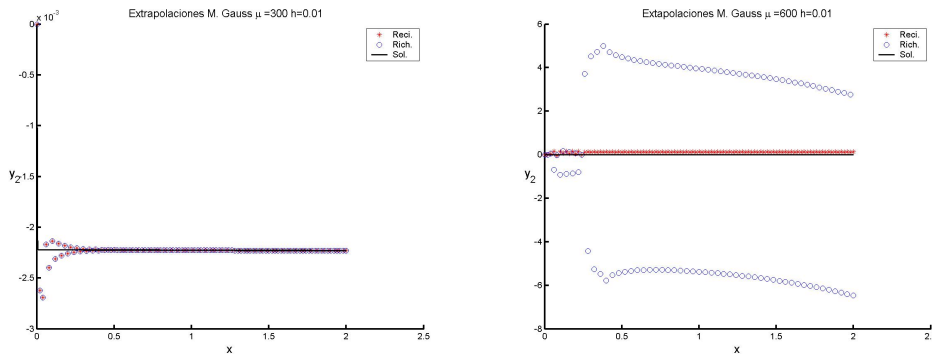


Figura 2.14: Aproximaciones de las Ext. de Richarson y recíproca aplicando el M. Gauss-2 para la ecuación van der Pol.  $h = 0,01$ ,  $\mu = 300$  y  $\mu = 600$ , (Izq. y dech.)

**Tabla 14** Error en el M. imp. de Gauss,  $2h$  y  $h$ . Ecuación de Van der Pol, fijando  $\mu$ 

<b>Datos de entrada</b>	<b>Ext. Rich</b>	<b>Ext. Pol. Rec.</b>
$h = 0,05$ , $\mu = 100$	$5,320e + 0$	$9,589e - 1$
$h = 0,02$ , $\mu = 100$	$1,096e - 3$	$1,096e - 3$
$h = 0,01$ , $\mu = 100$	$7,680e - 4$	$7,680e - 4$
$h = 0,005$ , $\mu = 100$	$5,489e - 4$	$5,488e - 4$

En los resultados numéricos de este ejemplo de sistema rígido observamos la gran ventaja que presentan en general los métodos implícitos para problemas rígidos. Sirva de ejemplo para el caso  $\mu = 100$  la cantidad de evaluaciones que nos ahorramos para obtener una aproximación aceptable. Ver figuras 12, 13 y tablas 13 y 14.

**Tabla 15** Error en el M. imp. de Gauss,  $2h$  y  $h$ . Ecuación de Van der Pol, fijando  $h$ 

<b>Datos de entrada</b>	<b>Ext. Rich</b>	<b>Ext. Pol. Rec.</b>
$h = 0,01$ , $\mu = 150$	$5,112e - 4$	$5,112e - 4$
$h = 0,01$ , $\mu = 300$	$6,648e - 4$	$6,652e - 4$
$h = 0,01$ , $\mu = 500$	$8,214e - 4$	$8,216e - 4$
$h = 0,01$ , $\mu = 600$	$4,529e + 1$	$1,906e + 0$

Hemos observado (tablas 14 y 15) que en el caso implícito el comportamiento de ambas extrapolaciones son comparables. Vamos entonces a considerar de nuevo el problema de Van der Pol dificultando el arranque tomando como dato inicial del método  $y_0 = [2 \ -100]$ .

$$y_1' = y_2,$$

$$y_2' = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1,$$

$$\text{con } y_1(0) = 2, y_2(0) = -100.$$

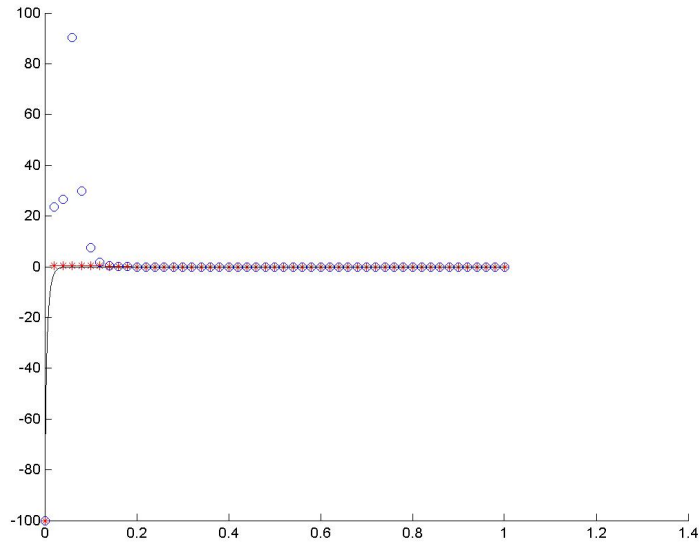


Figura 2.15: Van der Pol Forzado. Aproximación con extrapolación Richardson y recíproca a  $y_2$  con el método de Euler Implícito.  $h=0.01$   $y_0 = [2 \ -100]$  y  $\mu = 100$

**Tabla 16** Error en el M. implícito de Euler,  $2h$  y  $h$ . Ecuación de Van der Pol forzado

<b><i>Datos de entrada</i></b>	<b><i>Ext. Rich</i></b>	<b><i>Ext. Pol. Rec.</i></b>
$h = 0,01$ , $\mu = 100$	$5,22e + 2$	$5,46e + 0$
$h = 0,05$ , $\mu = 200$	$1,89e + 0$	$3,27e - 1$
$h = 0,01$ , $\mu = 200$	$3,51e + 0$	$8,37e - 1$
$h = 0,01$ , $\mu = 500$	$2,60e + 0$	$2,69e - 1$

Observamos (figura 15 y tabla 16) que al menos de forma cualitativa nuestra extrapolación polinómica recíproca tiene un mejor comportamiento que la polinómica.

### 2.3.4. Problema stiff altamente oscilatorio no lineal

Sea el siguiente sistema oscilatorio stiff no lineal

$$y_1' = y_2,$$

$$y_2' = -500y_1 + 10^{-3}y_1^3,$$

$$\text{con } y_1(0) = 3, y_2(0) = 0.$$

**Tabla 17** Error en el M. implícito de Euler,  $2h$  y  $h$ . Sistema Stiff oscilatorio no lineal

<i>Datos de entrada</i>	<i>Ext. Rich</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$h = 0,002$	$9,81e0$	$1,67e1$
$h = 0,001$	$3,44e0$	$6,96e - 1$

Debido a la oscilación y alta rigidez del sistema para obtener un resultado satisfactorio hemos tomado un  $h = 0,001$ . Como podemos ver en la tabla 17 para un  $h$  mayor no obtenemos buenos resultados. Para  $h = 0,001$  observamos en las figuras 16 y 17 que nuestra extrapolación polinómica recíproca tiene un mejor comportamiento en los puntos críticos de la solución que la extrapolación de Richardson.



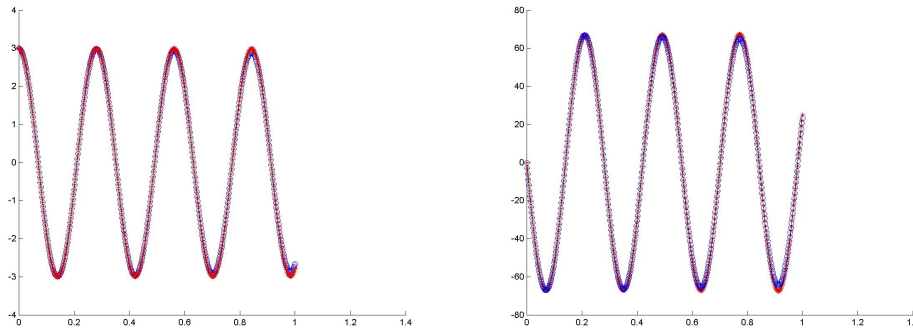


Figura 2.16: Aproximaciones de las extrapolaciones de Richardson y recíproca para el sistema stiff oscilatorio no lineal,  $h = 0,001$ . Representamos ambas variables

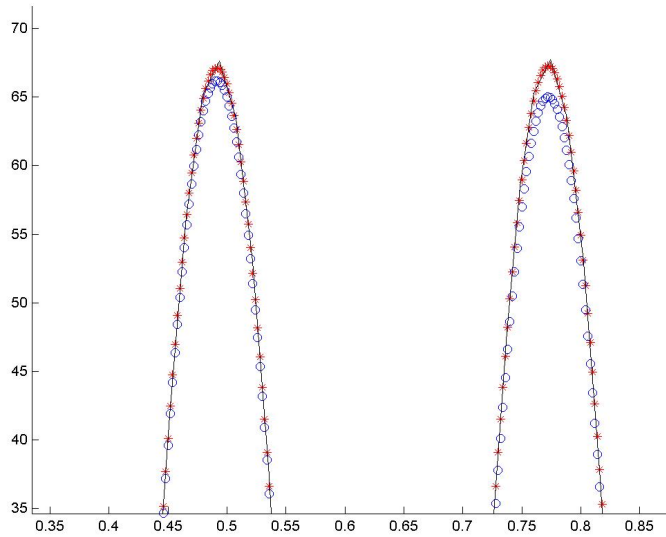


Figura 2.17: Detalle del sistema stiff oscilatorio no lineal

### 2.3.5. Problema lineal stiff altamente oscilatorio

Para finalizar con los ejemplos numéricos vamos a presentar un sistema muy stiff pero lineal. Sea el siguiente sistema oscilatorio lineal

$$y_1' = -2y_1 + y_2 + 2\sin(x),$$

$$y_2' = -(\beta + 2)y_1 + (\beta + 1)(y_2 - \cos(x) + \sin(x)),$$

$$\text{con } y_1(0) = 2, y_2(0) = 3,$$

cuya solución es

$$y_1(x) = 2e^{-x} + \sin(x), y_2(x) = 2e^{-x} + \cos(x),$$

independiente del parámetro  $\beta$ . No así los valores del jacobiano del sistema que son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = \beta$ . Por lo que podemos escoger  $\beta$  como queramos para aumentar la rigidez del sistema oscilatorio.

Sin embargo, para este problema oscilatorio para cualesquier valor de  $\beta$  que se tome ambas extrapolaciones tienen un buen comportamiento. Véase por ejemplo la figura 18 en la que se ha tomado por valores propios  $-1$  y  $-10^{100}$ .

## 2.4. Coeficiente de rigidez

Para finalizar el capítulo, vamos a analizar la rigidez de los ejemplos numéricos vistos atendiendo al coeficiente de rigidez del sistema.

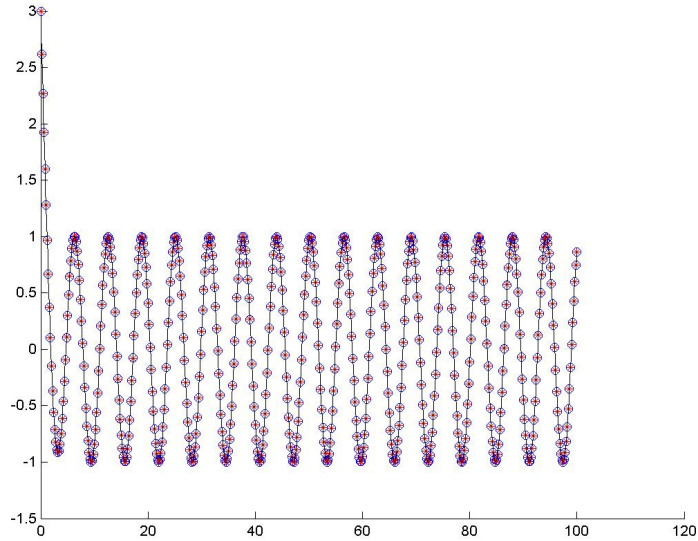


Figura 2.18: Sistema lineal stiff con valores propios  $-1$  y  $-10^{100}$

### 2.4.1. Sistema lineal y no lineal asociado

En el sistema lineal, el jacobiano y la matriz coinciden

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \end{pmatrix},$$

con autovalores

$$\lambda_1, \lambda_2,$$

y con coeficiente de rigidez

$$\left| \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \right| = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|,$$

que hemos aumentado para testear las extrapolaciones lineales y no lineales tanto para métodos explícitos como implícitos, fijando  $\lambda_1 = -1$  y aumentando los valores de  $|\lambda_2|$ .

Por otro lado, el jacobiano del sistema no lineal asociado es

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \lambda_3 y_2 & \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} + \lambda_3 y_1 \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} + \lambda_3 y_2 & \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \lambda_3 y_1 \end{pmatrix},$$

que evaluado en  $y_1(0) = 1$ ,  $y_2(0) = 1$  tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \lambda_3 & \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} + \lambda_3 \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} + \lambda_3 & \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \lambda_3 \end{pmatrix},$$

con autovalores

$$\lambda_1 + 2\lambda_3, \lambda_2$$

como hemos tomado  $\lambda_3$  y  $\lambda_2$  los valores mayor y menor respectivamente en valor absoluto en el caso  $y_0 = [1 \ 1]$ , tenemos por coeficiente de rigidez

$$\left| \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \right| = \left| \frac{\lambda_1 + 2\lambda_3}{\lambda_2} \right|,$$

que nos permite considerar el sistema no lineal con rigidez muy alta.

### 2.4.2. Reacción química: Oregonator

El Jacobiano de la reacción química Oregonator es

$$\begin{pmatrix} 77,27(1 - 2 \cdot 8,375 \cdot 10^{-6}y_1 - y_2) & 77,27(1 - y_1) & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{77,27}{77,27}y_2 & \frac{77,27}{77,27}(1 + y_1) & \frac{1}{77,27} \\ 0,161 & 0 & -0,161 \end{pmatrix}$$

en  $y_1(0) = 1$ ,  $y_2(0) = 2$ ,  $y_3(0) = 3$  tenemos

$$\begin{pmatrix} 77,27(-1 - 2 \cdot 8,375 \cdot 10^{-6}) & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ \frac{77,27}{77,27} & \frac{77,27}{77,27} & \frac{1}{77,27} \\ 0,161 & 0 & -0,161 \end{pmatrix}$$

con autovalores

$$\lambda_1 = \frac{-2}{77,27}, \lambda_2 = -0,161, \lambda_3 = -77,27(1 + 2 \cdot 8,375 \cdot 10^{-6}).$$

Atendiendo al coeficiente de rigidez del sistema  $\left| \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \right| \approx 2985$  notamos la gran rigidez del mismo.

Para el caso del Oregonator forzado vamos a observar una rigidez aún mayor. En  $y_1(0) = 10$ ,  $y_2(0) = 1$ ,  $y_3(0) = 0,1$  tenemos

$$\begin{pmatrix} 77,27(-20 \cdot 8,375 \cdot 10^{-6}) & -977,27 & 0 \\ -1 & -11 & 1 \\ \frac{77,27}{77,27} & \frac{77,27}{77,27} & \frac{1}{77,27} \\ 0,161 & 0 & -0,161 \end{pmatrix},$$

con autovalores

$$\lambda_1 \approx -3,157, \lambda_2 = 2,841, \lambda_3 = 3,30 \cdot 10^{-5}.$$

Por lo tanto la gran rigidez es mayor debido a que el coeficiente de rigidez es

$$\left| \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \right| \approx 95522$$

### 2.4.3. Circuito eléctrico: Ecuación de Van der Pol

El Jacobiano de la ecuación de Van der Pol es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu y_1 y_2 - 1 & \mu(1 - y_1^2) \end{pmatrix}$$

en  $y_1(0) = 2$ ,  $y_2(0) = 0$  tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3\mu \end{pmatrix},$$

con autovalores

$$\lambda_1 = \frac{-3\mu + \sqrt{9\mu^2 - 4}}{2}, \lambda_2 = \frac{-3\mu - \sqrt{9\mu^2 - 4}}{2},$$

con coeficiente de rigidez

$$\left| \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \right| = \left| \frac{-3\mu - \sqrt{9\mu^2 - 4}}{-3\mu + \sqrt{9\mu^2 - 4}} \right|,$$

que no es muy grande para valores de  $\mu$  pequeños, pero si para valores grandes.

$\mu$	$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$
1	6,88
3	78,98
10	897,99
100	89997,99

De hecho, es fácil comprobar que si  $\mu \rightarrow \infty$  entonces

$$\left| \frac{-3\mu - \sqrt{9\mu^2 - 4}}{-3\mu + \sqrt{9\mu^2 - 4}} \right| \rightarrow \infty$$

Para la ecuación de Van der Pol forzada  $y_1(0) = 2$ ,  $y_2(0) = -100$  el jacobiano se queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 400\mu - 1 & -3\mu \end{pmatrix}$$

con autovalores

$$\lambda_1 = \frac{-3\mu + \sqrt{9\mu^2 + 1600\mu - 4}}{2}, \lambda_2 = \frac{-3\mu - \sqrt{9\mu^2 + 1600\mu - 4}}{2}$$

con coeficiente de rigidez creciente conforme tomamos mayores valores de  $\mu$ .

#### 2.4.4. Problema oscilatorio

El problema oscilatorio lineal tiene por jacobiano

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -(\beta + 2) & \beta + 1 \end{pmatrix},$$

con autovalores propios

$$\lambda_1 = \beta, \lambda_2 = -1,$$

por lo tanto el coeficiente de rigidez es

$$\left| \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \right| = |\beta|.$$

Pudiendo escogerlo tan grande como queramos. Recordamos que en la sección anterior se ha escogido  $\beta = -10^{100}$  obteniendo de este modo una rigidez al sistema altísima (ver figura 18).





# Capítulo 3

## Problemas de valores frontera y la extrapolación polinómica recíproca

### 3.1. Introducción

En los primeros capítulos hemos visto las ventajas numéricas que tienen las extrapolaciones, y en particular la extrapolación polinómica recíproca, a la hora de resolver problemas de valores iniciales.

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Con  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Del mismo modo estos métodos se pueden aplicar a problemas del tipo

$$y'' = f(t, y, y''),$$

$$y(a) = y_0,$$

$$y'(a) = y_1,$$

a los que, realizando el cambio de variable

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix},$$

$$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ f(t, Y) \end{pmatrix},$$

y así llamando  $F(t, Y) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ f(t, Y) \end{pmatrix}$  obtenemos el problema de valor inicial

$$Y' = F(t, Y),$$

$$Y(a) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Los problemas que veremos en este capítulo son del tipo

$$y'' = f(t, y, y') \tag{3.1.1}$$

$$y(a) = \alpha$$

$$y(b) = \beta$$

que son los denominados problemas de valores frontera (en adelante PVF) o problemas de contorno.

Problemas análogos aparecen con las condiciones de contorno

$$y(a) = \alpha \quad y'(a) = \alpha$$

$$y'(b) = \beta \quad y(b) = \beta$$

o en general con condiciones

$$c_1y(a) + c_2y'(a) = \alpha$$

$$c_3y(b) + c_4y'(b) = \beta$$

Desafortunadamente la solución a estos problemas no siempre existe, se deben dar unas determinadas condiciones para que ésta exista. Algunos resultados de existencia y estimación de errores los podemos encontrar en los libros de [32], [16] y sobre todo en el libro de [23]. Sirva de ejemplo el siguiente resultado que podemos encontrar en el último libro referenciado.

**Teorema 3** *El problema de valores frontera*

$$y'' = f(t, y)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 0$$

tiene solución única si  $\frac{\delta f}{\delta y}$  es continua, no negativa y acotada en la franja infinita  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-\infty \leq y \leq \infty$

Diversos son los métodos de resolución planteados a estos problemas; los métodos del tiro, métodos de colocación o métodos de las diferencias finitas. En este capítulo nos centraremos en éstos últimos debido a la posibilidad que

nos ofrece para aplicar extrapolaciones tanto lineales como no lineales con el objeto final de compararlas.

La idea básica de todos los métodos de diferencias es, mediante la ayuda del desarrollo de Taylor de una función, reemplazar las diferentes derivadas en la ecuación diferencial por apropiados cocientes diferenciales, discretizar un intervalo dado y por último resolver el sistema de ecuaciones obtenido.

Consideremos el problema de valores frontera de segundo orden para la función  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como el descrito en (3.1.1).

Para discretizar el problema, subdividimos el intervalo  $[a, b]$  en  $n + 1$  subintervalos equiespaciados

$$a = x_0 < x_1 \dots x_n < x_{n+1} = b,$$

$$x_j = a + jh,$$

$$h := \frac{b - a}{n + 1} = x_{i+1} - x_i.$$

Para un determinado  $x_i$  queremos aproximar  $y'(x_i)$  e  $y''(x_i)$

Una primera idea para aproximar  $y'(x_i)$  basándose en la definición de límite sería

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Podemos ver con desarrollos de Taylor, suponiendo  $y \in C^2[a, b]$ , que existe  $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$  tal que

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2, \\ \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} &= y'(x_i) + \frac{y''(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i), \\ \left| y'(x_i) - \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right| &= O(h). \end{aligned}$$

Obteniendo para  $y'(x_i)$  una primera aproximación de orden uno.

Análogamente aproximando por la izquierda obtendríamos

$$\left| y'(x_i) - \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right| = O(h).$$

Pasemos a aproximar  $y''(x_i)$  desarrollando con Taylor suponiendo  $y \in C^4[a, b]$ ,  $\xi_1, \xi_2 \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}h^3 + \frac{y^{iv}(\xi_1)}{4!}h^4 \\ y(x_{i-1}) &= y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(-h) + \frac{y''(x_i)}{2!}(-h)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}(-h)^3 + \frac{y^{iv}(\xi_2)}{4!}(-h)^4 \end{aligned}$$

De forma que al sumar las expresiones, debido a la simetría, desaparecen las primeras y terceras derivadas, así

$$y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}) = y''(x_i)h^2 + \sum_{k=2}^{+\infty} C_k h^{2k}. \quad (3.1.2)$$

Pudiendo tomar como aproximación de  $y''(x_i)$  de orden 2

$$\left| \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} - y''(x_i) \right| = O(h^2).$$

Partiendo de esta idea, podemos aproximar  $y'(x_i)$  desarrollando por Taylor de modo análogo

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{y'''(\xi_1)}{3!}h^3, \\ y(x_{i-1}) &= y(x_i) - \frac{y'(x_i)}{1!}h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{y'''(\xi_2)}{3!}(-h)^3, \end{aligned}$$

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = 2y'(x_i)h + O(h^3). \quad (3.1.3)$$

Consiguiendo como aproximación de  $y'(x_i)$

$$\left| \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - y'(x_i) \right| = O(h^2).$$

En principio puede resultar paradójico que  $x_{i-1}$  obtenga mejor aproximación sobre  $y'(x_i)$ , de orden dos, que  $x_i$ , de orden uno. Pero esto es debido que al tomar los puntos  $x_{i-1}$  e  $x_{i+1}$  al estar centrado el punto que queremos aproximar,  $x_i$ , es mejor.

Usando estas aproximaciones obtenemos el sistema de ecuaciones, en principio no lineal

$$\begin{aligned}y_0 &= y(a) = \alpha, \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} &= f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}), \\ y_{n+1} &= y(b) = \beta,\end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 3.1.1. Un primer ejemplo: problema 1

Consideramos el siguiente problema de valores frontera

$$\begin{aligned}y'' - 4y &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ y(1) &= 5,\end{aligned}$$

que tiene por solución real  $y(x) = \frac{5}{\operatorname{senh}(2)} \operatorname{senh}(x)$ .

Tenemos las siguientes ecuaciones para cada  $y_i = y(x_i)$

$$\begin{aligned}y_0 &= 0, \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - 4y_i &= 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n, \\ y_{n+1} &= 5.\end{aligned}$$

Para  $i = 1, 2, \dots, n$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - 4h^2y_i = 0,$$

$$y_{i-1} + [-2 - 4h^2]y_i + y_{i+1} = 0,$$

Llamando

$$\bar{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$A := \begin{pmatrix} -2 - 4h^2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 - 4h^2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 - 4h^2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 - 4h^2 \end{pmatrix}$$

En general, las matrices que aparecen para resolver los sistemas de ecuaciones tienen geometrías sencillas. De este modo podemos resolver  $A \bar{y} = b$  para obtener una aproximación  $\bar{y}$  de orden  $O(h^2)$  para el problema planteado.

### 3.2. Técnicas de aceleración.

Una desventaja del esquema introducido en la sección anterior es que sólo obtenemos segundo orden de convergencia. Este orden, en muchos problemas, no es eficiente y nos obliga a elegir discretizaciones demasiado finas que, en la práctica se traduce a resolver sistemas de ecuaciones demasiado grandes, lo cual provoca un altísimo coste computacional.



Existen dos posibles alternativas para aumentar el orden. La primera es definir esquemas con métodos de orden mayor, como los esquemas implícitos de Runge-Kutta introducidos en el libro [7] que tienen mayor orden pero son más caros computacionalmente. Otra opción alternativa para obtener métodos de mayor orden es tomar el esquema expuesto en la sección anterior y acelerar su convergencia aplicando extrapolación o corrección diferida (método de aceleración que usa una sola discretización y una mejor aproximación del error local de truncamiento), repitiendo los procesos si fuera necesario.

Vamos a escoger la segunda alternativa, de hecho aplicaremos tanto extrapolación polinómica como la extrapolación polinómica recíproca. Veamos el orden obtenido al aplicar extrapolación al esquema anterior.

Sea el PVF con  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como el definido en (3.1.1).

Consideramos dos discretizaciones del intervalo  $[a, b]$  dividiendo en subintervalos equiespaciados de paso  $h$  y  $2h$ . El coste computacional se reduce más de lo esperado debido a que al aplicar extrapolación obtenemos nuevas aproximaciones de  $y'(x_i)$  e  $y''(x_i)$  que son de orden 4, veámoslo. Debido a la desaparición de las derivadas segundas y cuartas en (3.1.3) sabemos que

$$\tilde{y}'_i(h) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} = y'(x_i) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + O(h^6),$$

con  $a_1$  y  $a_2$  independientes de  $h$ , por lo que considerando

$$\tilde{y}'_i(2h) = y'(x_i) + a_1 2^2 h^2 + a_2 2^4 h^4 + O(h^6),$$

realizando bien extrapolación polinómica o la recíproca obtenemos orden 4.

$$F(\tilde{y}'_i(2h), \tilde{y}'_i(h)) = \frac{2^2 \tilde{y}'_i(h) - \tilde{y}'_i(2h)}{2^2 - 1} = y'(x_i) + (2^2 a_2 - 2^4 a_2) h^4 + O(h^6) = O(h^4).$$

Por otro lado debido a la desaparición de las derivadas primera y tercera en (3.1.2) sabemos que

$$\tilde{y}''_i(h) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} = y''(x_i) + b_1 h^2 + b_2 h^4 + O(h^6),$$

por lo que considerando

$$\tilde{y}''_i(2h) = y''(x_i) + b_1 2^2 h^2 + b_2 2^4 h^4 + O(h^6),$$

realizando bien extrapolación polinómica o la recíproca obtenemos orden 4.

$$F(\tilde{y}''_i(2h), \tilde{y}''_i(h)) = \frac{2^2 \tilde{y}''_i(h) - \tilde{y}''_i(2h)}{2^2 - 1} = y''(x_i) + (2^2 b_2 - 2^4 b_2) h^4 + O(h^6) = O(h^4)$$

En definitiva, el esquema que seguiremos será el siguiente:

1. Consideraremos 2 discretizaciones  $\pi_1, \pi_2$  equiespaciadas de pasos  $h, 2h$  del intervalo  $[a, b]$ . Para las que obtenemos matrices  $A_{\pi_1}$  y  $B_{\pi_1}$  de

tamaños  $N - 1$  y  $M - 1$  respectivamente, donde  $N = \frac{b - a}{h}$  y  $M = \frac{b - a}{2h}$ .

2. Resolvemos los sistemas de ecuaciones triangulares definidos por  $A_{\pi_1}(h)$  y  $B_{\pi_2}(2h)$  de forma que obtenemos las aproximaciones  $\tilde{y}_i(h)$ ,  $\tilde{y}_i(2h)$  de  $y(x_i)$  de orden 2.
3. Por último, para los  $x_i$  determinados realizaremos bien extrapolación de Richardson o extrapolación polinómica recíproca obteniendo orden  $O(h^4)$ .

### 3.3. Primeros resultados numéricos

En la siguiente tabla, correspondiente al primer ejemplo presentado, podemos observar cómo los experimentos numéricos concuerdan con lo expuesto en la sección anterior, las extrapolaciones aceleran la convergencia del método.

**Tabla 18** Errores PVF problema 1.

<i>Datos de entrada</i>	<i>M. Dif. Finitas</i>	<i>Ext. Rich</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$h = 0,1$	$2,193e - 3$	$3,769e - 5$	$4,658e - 5$
$h = 0,05$	$5,515e - 4$	$2,406e - 6$	$2,982e - 6$
$h = 0,01$	$2,212e - 5$	$3,922e - 9$	$4,809e - 9$

### 3.3.1. Problema 2

Consideramos el PVF

$$y'' - \lambda^2 y = 0,$$

$$y(0) = 1,$$

$$y(1) = e^\lambda,$$

que tiene por solución real  $y(x) = e^{\lambda x}$ .

En la figura 1 hemos representado sobre la función solución el cociente  $\text{Log}\left(\frac{E_1(x_i)}{E_2(x_i)}\right)$  donde  $E_1(x_i)$  representa el error cometido por la extrapolación de Richardson en el punto  $x_i$ , y  $E_2(x_i)$  el error cometido por la extrapolación polinómica recíproca en el punto  $x_i$ . De este modo cuando dicho cociente es mayor que cero, el error cometido por Richardson será mayor que el cometido por nuestra extrapolación.

Para valores moderados de  $\lambda$  la proporción de cocientes  $\text{Log}\left(\frac{E_1(x_i)}{E_2(x_i)}\right) > 0$  es similar a la de  $\text{Log}\left(\frac{E_1(x_i)}{E_2(x_i)}\right) < 0$  y además muy próximos a cero, lo que significa que ambos errores son comparables. Sin embargo, a medida que tomamos  $\lambda \ll 0$  observamos como casi todos los puntos de la discretización tienen un mejor comportamiento del error con la extrapolación polinómica recíproca. Podríamos preguntarnos si este problema de valores frontera es rígido, la siguiente sección contestará a esta pregunta.

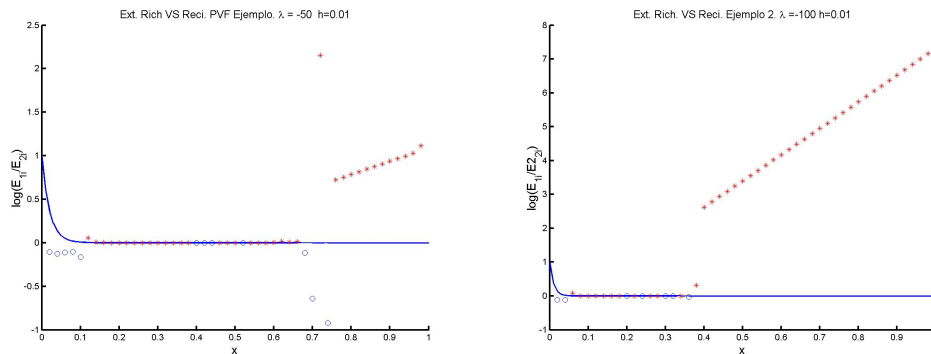


Figura 3.1: Comparación de los errores de la extrapolaciones de Richardson y recíproca. PVF problema 2.

**Tabla 19** Errores PVF problema 2.

<i>Datos de entrada</i>	<i>M. Dif. Finitas</i>	<i>Ext. Rich</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$h = 0,1, \lambda = -2$	$4,865e - 4$	$8,336e - 6$	$8,966e - 6$
$h = 0,01, \lambda = -2$	$4,887e - 6$	$8,589e - 10$	$9,248e - 10$
$h = 0,01, \lambda = -10$	$1,531e - 5$	$5,702e - 7$	$6,315e - 7$
$h = 0,01, \lambda = -100$	$1,408e - 2$	$2,004e - 3$	$2,252e - 3$
$h = 0,01, \lambda = -400$	$3,741e - 2$	$1,246e - 3$	$1,182e - 3$

### 3.3.2. Problema 3.

Sea el siguiente PVF que aparece en [32]

$$y'' + 400y = -400\cos^2(\pi x) - 2\pi^2\cos(2\pi x),$$

$$y(0) = y(1) = 0,$$

y tiene por solución real  $y(x) = \frac{e^{-20}}{1 + e^{-20}}e^{20x} + \frac{1}{1 + e^{-20}}e^{-20x} - \cos^2(\pi x)$ .

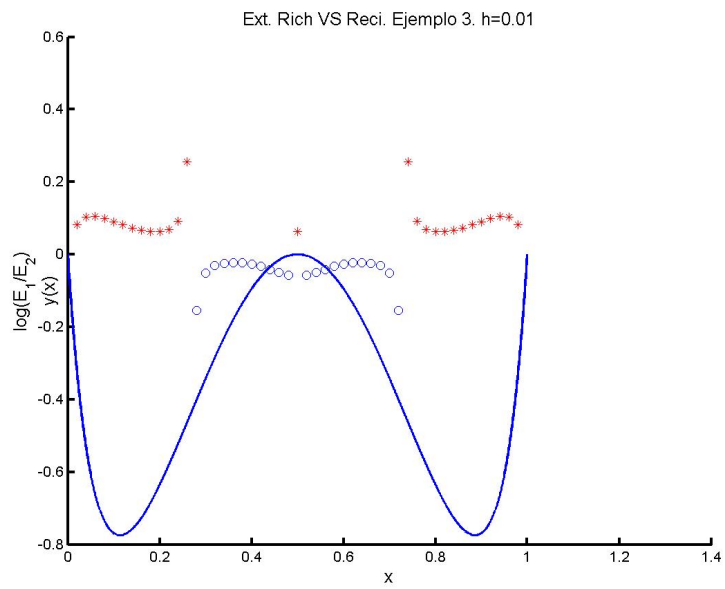


Figura 3.2: Comparación de los errores de las extrapolaciones de Richardson y recíproca PVF problema 3.

**Tabla 20** Errores PVF problema 3.

<i>Datos de entrada</i>	<i>M. Dif. Finitas</i>	<i>Ext. Rich</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$h = 0,1$	$6,530e - 2$	$2,289e - 3$	$2,110e - 3$
$h = 0,05$	$1,387e - 2$	$1,989e - 3$	$1,828e - 3$
$h = 0,01$	$6,022e - 4$	$8,902e - 6$	$8,023e - 6$
$h = 0,005$	$1,509e - 4$	$5,678e - 7$	$5,113e - 7$
$h = 0,001$	$6,044e - 6$	$9,146e - 10$	$8,234e - 10$

Podemos observar como las técnicas de extrapolación aceleran la convergencia del método también en el tercer problema. Los errores cometidos por ambos métodos son comparables (quizás algo mejores para la extrapolación polinómica recíproca) como se puede ver en la tabla 20. Además la proporción de puntos intermedios donde la extrapolación polinómica recíproca tiene mejor comportamiento es similar a la polinómica (ver figura 2).

### 3.4. Perturbaciones Singulares.

En esta sección vamos considerar problemas de valores frontera en la que la derivada mayor aparece multiplicada por un pequeño parámetro  $\epsilon$ , son conocidos por el nombre de perturbaciones singulares. Veremos problemas del tipo

$$\epsilon y'' = f(t, y, y'),$$

$$y(a) = \alpha,$$

$$y(b) = \beta.$$

En la medida que  $\epsilon \rightarrow 0$  el orden del método se reduce y se espera que la solución muestre regiones de alta variación conectadas con regiones de variación suave. Este comportamiento de la solución nos recuerda al comportamiento que teníamos con los problemas rígidos de los problemas de valores iniciales, y más concretamente en los sistemas de ecuaciones diferenciales vistos en el capítulo anterior.

Para problemas de valores frontera lineales

$$y' = A(x)y + q(x),$$

$$y(a) = \alpha,$$

$$y(b) = \beta,$$

se definen los problemas rígidos (PVF stiff) cuando los valores propios de la matriz  $A(x)$  son mucho mayores que el inverso de la longitud del intervalo,  $\frac{1}{b-a}$ . Por razones de eficiencia intentaremos que  $h$  no sea más pequeño que  $\epsilon$ , o incluso que  $\epsilon \ll h \ll 1$ .

El concepto de rigidez en análisis numérico está relacionado con las perturbaciones singulares para problemas de contorno. Los problemas de esta sección además de ser problemas de perturbaciones singulares son además PVF rígidos. De los cuales esperamos un mejor comportamiento de nuestra



extrapolación no lineal.

Antes de presentar los problemas propios de perturbaciones singulares volvamos al problema 2 para responder la pregunta formulada en la sección anterior, ¿es un problema rígido?

Veamos, resolver el PVF

$$y'' - \lambda y = 0,$$

$$y(0) = 1,$$

$$y(1) = e^\lambda,$$

es equivalente a resolver el PVF

$$\frac{1}{\lambda^2} y'' - y = 0,$$

$$y(0) = 1,$$

$$y(1) = e^\lambda,$$

de modo que la constante  $\frac{1}{\lambda^2}$  influye en la ecuación del mismo modo que  $\epsilon$  para valores grandes de  $\lambda$ . Por lo tanto el problema 2 es un problema rígido cuando  $\lambda \ll 0$ .

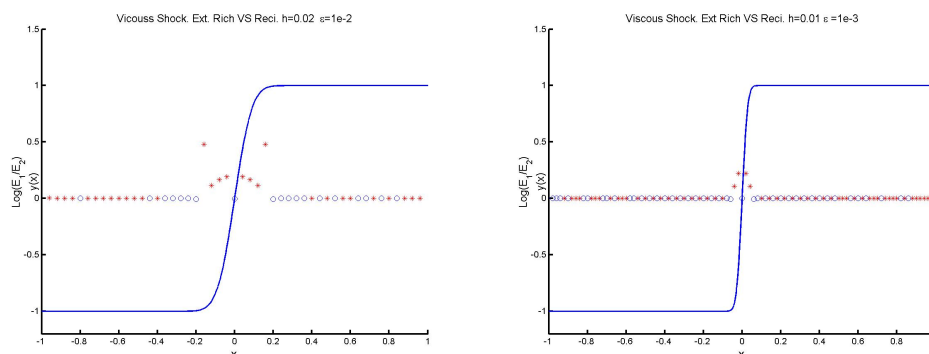


Figura 3.3: Comparación de los errores Richardson y recíproca. PVF Viscous Shock.  $h = 0,02$   $\epsilon = 10^{-2}$  y  $h = 0,01$  (Izq.)  $\epsilon = 10^{-3}$ (dcha.)

### 3.4.1. Problema 4: Viscous Shock

El siguiente problema que vamos a estudiar tiene la propiedad de tener un fuerte salto en el origen que aumenta conforme disminuimos el valor de  $\epsilon$  (ver figura 3). Este problema, que aparece en [24], recibe el nombre de *Viscous Shock*

$$\epsilon y'' + 2xy' = 0,$$

$$y(-1) = -1,$$

$$y(1) = 1,$$

y tiene por solución real

$$y(x) = \operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right) = \operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}} e^{-t^2} dt.$$

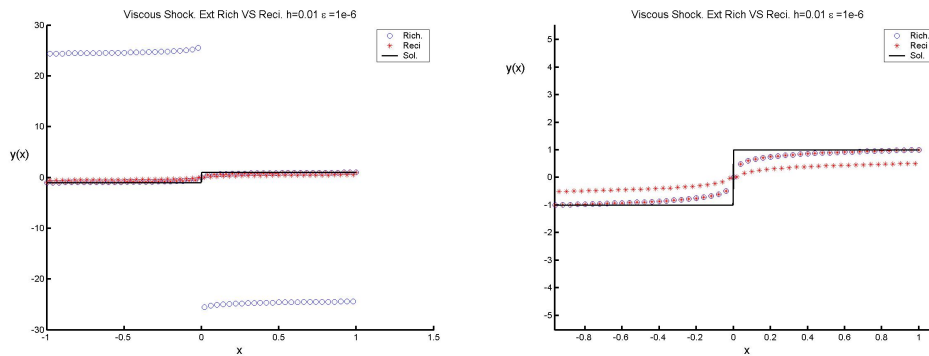


Figura 3.4: Extrapolaciones Richardson y recíproca. PVF Viscous Shock. Aplicamos Zoom en la imagen derecha.

En las gráficas de la figura 3, observamos como los errores de ambas extrapolaciones son comparables, sin embargo en la región del intervalo donde se produce el salto la extrapolación polinómica recíproca tiene un mejor comportamiento.

En las gráficas de la figura 4 donde  $\epsilon = 10^{-6}$  se puede observar que ninguna de las dos extrapolaciones obtiene buenos resultados para la discretización elegida. Sin embargo, observamos como nuestra extrapolación polinómica recíproca conserva la aproximación a la solución dentro de una franja deseable.

Para el problema Viscous Shock, observamos en la tabla 21 que numéricamente la aceleración de la convergencia mediante la extrapolación obtiene buenos resultados. Además, nuestra extrapolación polinómica recíproca tiene

un mejor comportamiento que la polinómica para este problema rígido.

**Tabla 21** Errores PVF problema 4. *Viscous Shock*.

<i>Datos de entrada</i>	<i>M. Dif. Finitas</i>	<i>Ext. Rich</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$h = 0,02\epsilon = 1e - 2$	$5,029e - 3$	$1,937e - 4$	$1,320e - 4$
$h = 0,01\epsilon = 1e - 2$	$1,249e - 3$	$1,216e - 5$	$8,918e - 6$
$h = 0,01\epsilon = 1e - 3$	$1,264e - 2$	$1,148e - 3$	$8,942e - 4$
$h = 0,01\epsilon = 1e - 4$	$1,572e - 1$	$2,145e - 1$	$1,477e - 1$
$h = 0,01\epsilon = 1e - 4$	$3,229e - 2$	$9,367e - 3$	$5,966e - 3$

### 3.4.2. Problema 5: Turning Point

El siguiente problema presenta una importante dificultad computacional debido a que la ubicación de un punto de inflexión ahora depende de la solución y por lo tanto no se conoce de antemano. De hecho, como podemos observar en las figuras 5 y 6, la solución tiene regiones lisas y oscilaciones en la frontera y en el interior, que además aumentan de densidad conforme disminuimos el valor de  $\epsilon$ . Este problema, que aparece en [24], recibe el nombre de *Turning Point*.

$$\epsilon y'' - xy = 0,$$

$$y(-1) = 1,$$

$$y(1) = 1,$$

y tiene por solución real la combinación lineal de las funciones de Airy<sup>1</sup>

$$y(x) = c_1 A_i\left(\frac{x}{\sqrt[3]{\epsilon}}\right) + c_2 B_i\left(\frac{x}{\sqrt[3]{\epsilon}}\right).$$

**Tabla 22** Errores PVF ejemplo 5. *Tourning Point*.

<i>Datos de entrada</i>	<i>M. Dif. Finitas</i>	<i>Ext. Rich</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$h = 0,02\epsilon = 1e - 2$	$7,355e - 3$	$1,049e - 4$	$1,114e - 4$
$h = 0,01\epsilon = 1e - 2$	$1,843e - 3$	$6,644e - 6$	$6,751e - 6$
$h = 0,01\epsilon = 1e - 3$	$9,380e + 0$	$2,300e + 1$	$6,591e - 1$
$h = 0,005\epsilon = 1e - 3$	$1,513e + 0$	$1,109e + 0$	$3,804e - 2$
$h = 0,002\epsilon = 1e - 4$	$6,474e - 2$	$1,860e - 2$	$2,320e - 2$

De nuevo notamos en la tabla 22 la aceleración de la convergencia a través de las extrapolaciones y además el mejor compartamiento de la extrapolación polinómica recíproca a la hora de aproximar a las soluciones de estos problemas perturbados (ver tabla 22 junto con figuras 5 y 6).

---

<sup>1</sup>Las funciones de Airy son las dos soluciones de la ecuación diferencial de Stokes  $y'' - xy = 0$  que, además están relacionadas con las funciones de Bessel

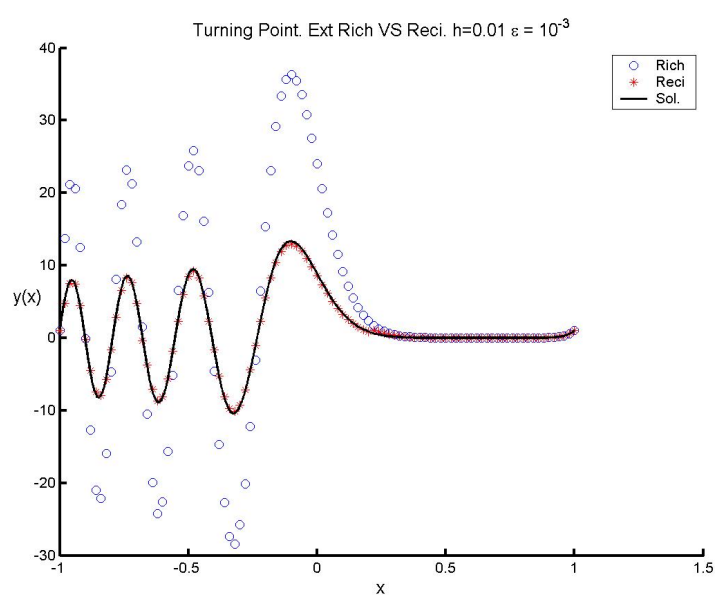


Figura 3.5: Aproximaciones de las Ext. Richardson y recíproca. PVF Turning Point,  $h = 0,01$  y  $\epsilon = 10^{-3}$

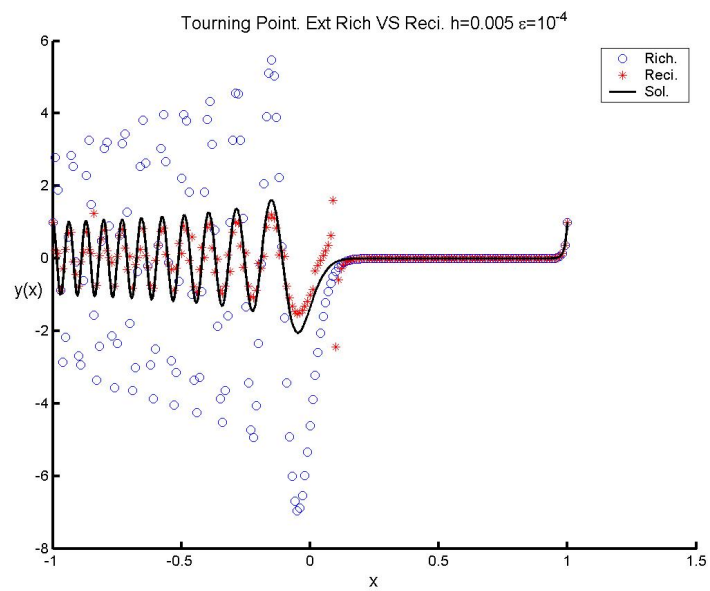


Figura 3.6: Aproximaciones de las Ext. Richardson y recíproca. PVF Turning Point,  $h = 0,005$  y  $\epsilon = 10^{-4}$

### 3.4.3. Problemas de Bawa-Kumar

En esta sección vamos a estudiar dos problemas singulares perturbados utilizados por los autores R.K. Bawa y V. Kumar en la presentación de una técnica de cálculo propuesta en [10]. En primer lugar, consideramos el problema perturbado homogéneo

$$\epsilon y''(x) + y'(x) = 0,$$

$$y(0) = 0,$$

$$y(1) = 1,$$

con solución exacta

$$y_\epsilon(x) = \frac{1 - e^{-\frac{x}{\epsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\epsilon}}}.$$

Tal y como podemos observar en la tabla 23, las aproximaciones realizadas con la extrapolación polinómica recíproca son mejores que las realizadas con la extrapolación de Richardson. Además, si observamos la figura 8 para una perturbación del orden  $\epsilon = 10^{-9}$  nuestra extrapolación polinómica recíproca tiene un mejor comportamiento cualitativo que la extrapolación clásica, a pesar de no ser lo suficientemente buena como podemos testear en la tabla 23.



**Tabla 23** Errores del ejemplo Bawa-Kumar homogéneo.

<i>Datos</i>	<i>M. Dif. Finitas</i>	<i>Rich. Ext.</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$h = 0,01, \epsilon = 1e - 1$	$3,06e - 4$	$1,41e - 6$	$1,23e - 6$
$h = 0,05, \epsilon = 1e - 1$	$7,87e - 3$	$1,01e - 3$	$8,74e - 4$
$h = 0,02, \epsilon = 1e - 2$	$1,35e - 1$	$9,27e - 2$	$7,84e - 2$
$h = 0,005, \epsilon = 1e - 2$	$7,87e - 2$	$1,00e - 3$	$8,72e - 4$
$h = 0,01, \epsilon = 1e - 3$	$6,66e - 1$	$8,65e - 1$	$6,78e - 1$
$h = 0,01, \epsilon = 1e - 9$	$5,00e + 4$	$6,66e + 4$	$1,24e + 0$

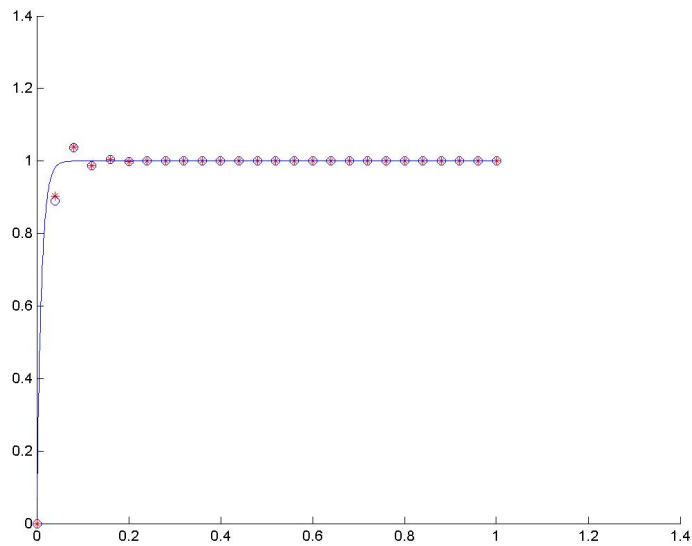


Figura 3.7: Aproximación con las extrapolaciones de Richardson y recíproca. PVF Bawa-Kumar homogéneo,  $h=0,02 \epsilon = 10^{-2}$

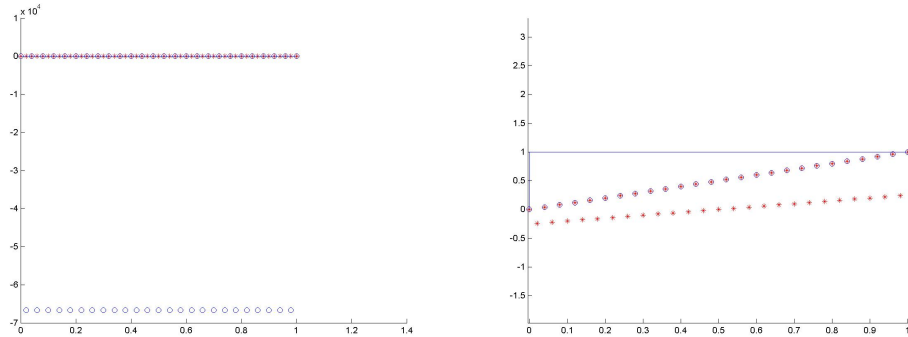


Figura 3.8: Aproximación con las extrapolaciones de Richardson y recíproca con  $h=0,01$   $\epsilon = 10^{-9}$  en BawaKumar homogéneo. Aplicamos zoom en la figura de la derecha

Consideramos ahora el problema perturbado no homogéneo dado en [10]

$$\epsilon y''(x) + y'(x) = 1 + 2x,$$

$$y(0) = 0,$$

$$y(1) = 1,$$

con solución exacta

$$y_\epsilon(x) = x(x + 1 - 2\epsilon) + (2\epsilon - 1) \frac{1 - e^{-\frac{x}{\epsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\epsilon}}}.$$

**Tabla 24** Errores del problema Bawa-Kumar no homogéneo

<b>Datos</b>	<b>M. Dif. Finitas</b>	<b>Ext. Rich.</b>	<b>Ext. Pol. Rec.</b>
$h = 0,01, \epsilon = 1e - 1$	$2,45e - 4$	$1,12e - 6$	$9,94e - 7$
$h = 0,1, \epsilon = 1e - 1$	$2,76e - 2$	$1,02e - 2$	$8,62e - 3$
$h = 0,01, \epsilon = 1e - 2$	$3,38e - 2$	$1,25e - 2$	$1,07e - 2$
$h = 0,005, \epsilon = 1e - 2$	$7,72e - 3$	$9,98e - 4$	$8,55e - 4$
$h = 0,01, \epsilon = 1e - 3$	$6,65e - 1$	$8,63e - 1$	$6,75e - 1$
$h = 0,002, \epsilon = 1e - 3$	$1,36e - 1$	$9,26e - 2$	$7,82e - 2$
$h = 0,01, \epsilon = 1e - 8$	$5,00e + 3$	$6,66e + 3$	$1,23e + 0$

Atendiendo a los resultados numéricos de la tabla 24 podemos decir que los errores en ambas extrapolaciones son comparables, quizás sensiblemente mejores en nuestra extrapolación polinómica recíproca.

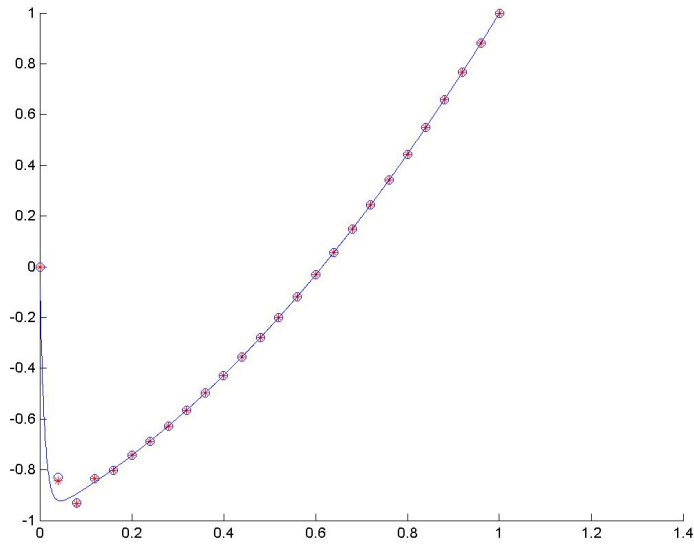


Figura 3.9: Aproximación con las extrapolaciones de Richardson y recíproca del problema BawaKuma no homogéneo,  $h=0,01 \cdot \epsilon = 10^{-2}$

### 3.5. Discretizaciones no uniformes

En todos los experimentos numéricos presentados hasta el momento hemos considerado una discretización de paso  $h$  fijo. En [34] se aplica la extrapolación de Richardson para problemas con perturbaciones singulares. En concreto, se aplica en un esquema de las diferencias finitas para una discretización no uniforme dada. En esta sección vamos a presentar dicha discretización no uniforme a la que le vamos a aplicar la extrapolación polinómica recíproca en dos problemas.

La discretización no uniforme mencionada viene dada para el intervalo genérico  $I = [0, 1]$  de la siguiente forma

$$x_i = \lambda(t_i), t_i = ih, i = 0, \dots, n, h = 1/n, n \in N$$

donde

$$\lambda(t) = \begin{cases} \theta \epsilon \frac{t}{(1/2 + \sqrt[p]{\theta \epsilon} - t)^p} & t \in [0, 1/2] \\ 1 - \lambda(1 - t) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

En esta discretización  $\theta, p > 0$  son independientes de  $\epsilon$ . Los puntos se distribuyen de forma simétrica en el intervalo. La densidad es mayor en los extremos del intervalo y además, esta densidad aumenta cuando  $\theta$  decrece.

Comencemos con el problema analizado por Vulanovic

$$-\epsilon^2 y''(x) + y(x) = -\cos^2(\pi x) - 2(\epsilon\pi)^2 \cos(2\pi x),$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

que tiene por solución exacta

$$y(x) = \frac{\exp(\frac{-x}{\epsilon}) + \exp(\frac{-(1-x)}{\epsilon})}{(1 + \exp(\frac{-1}{\epsilon})) - \cos^2(\pi x)}$$

**Tabla 25** Errores del problema Vulanovic  $n = 40$ ,  $\theta = 1$  y  $p = 3$

<i>Datos</i>	<i>Met. Dif. Finitas</i>	<i>Ext. Rich.</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$\epsilon = 1e - 2$	$2,65e - 3$	$7,45e - 5$	$7,46e - 5$
$\epsilon = 1e - 3$	$3,75e - 3$	$1,38e - 4$	$1,40e - 4$
$\epsilon = 1e - 6$	$5,09e - 3$	$2,46e - 4$	$2,48e - 4$
$\epsilon = 1e - 9$	$5,34e - 3$	$2,25e - 4$	$2,26e - 4$
$\epsilon = 1e - 12$	$5,36e - 3$	$2,23e - 4$	$2,23e - 4$
$\epsilon = 1e - 15$	$5,37e - 3$	$3,40e - 4$	$2,97e - 4$

**Tabla 26** Errores del problema Vulanovic  $n = 40$ ,  $\theta = 0,1$  y  $p = 3$

<i>Datos</i>	<i>Met. Dif. Finitas</i>	<i>Ext. Rich.</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$\epsilon = 1e - 3$	$6,92e - 3$	$2,96e - 4$	$2,97e - 4$
$\epsilon = 1e - 6$	$7,71e - 3$	$7,63e - 4$	$7,70e - 4$
$\epsilon = 1e - 9$	$7,76e - 3$	$7,11e - 4$	$7,15e - 4$
$\epsilon = 1e - 12$	$7,77e - 3$	$7,04e - 4$	$7,08e - 4$

En las tablas 25 y 26 observamos que ambas extrapolaciones consiguen buenos resultados mejorando el método de las diferencias finitas.

Para finalizar volvemos a considerar el problema Turning Point. En la tabla 27 y las figuras 10 y 11 observamos las mejoras obtenidas con la extrapolación polinómica recíproca. Recordemos que en este problema debíamos aumentar la densidad de la discretización para aproximar bien las oscilaciones.

Sin embargo, al igual que el caso uniforme, la extrapolación de Richardson presenta graves problemas de estabilidad cuando la discretización no es lo suficientemente fina (en comparación con la rigidez del problema).

**Tabla 27** Errores Turninf Point con distintos  $n$ ,  $\theta$ ,  $p = 3$  y  $\epsilon$

<i>Datos</i>	<i>M. D. Finitas</i>	<i>Ext. Rich.</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$n = 500, \theta = 1, p = 3, \epsilon = 1e - 2$	$2,94e - 3$	$2,56e - 5$	$3,62e - 5$
$n = 500, \theta = 0,1, p = 3, \epsilon = 1e - 2$	$1,14e - 2$	$4,69e - 4$	$5,05e - 4$
$n = 500, \theta = 75, p = 1, \epsilon = 1e - 3$	$4,72e + 0$	$8,32e + 1$	$4,97e + 0$
$n = 1000, \theta = 100, p = 1, \epsilon = 1e - 3$	$6,12e - 1$	$1,27e - 1$	$5,85e - 2$

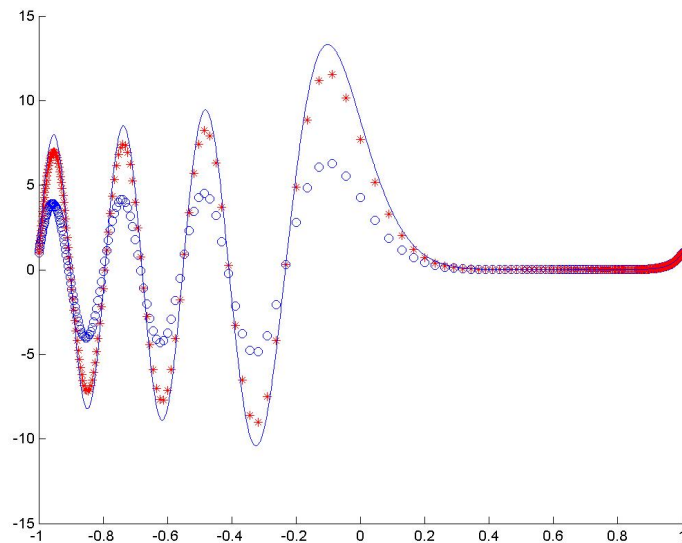


Figura 3.10: Aproximaciones de la extrapolación de Richardson 'o' y extrapolación polinómica recíproca '\*' para el problema Turning Point. Datos:  $\theta = 100, p = 1, n = 500$  y  $\epsilon = 10^{-3}$

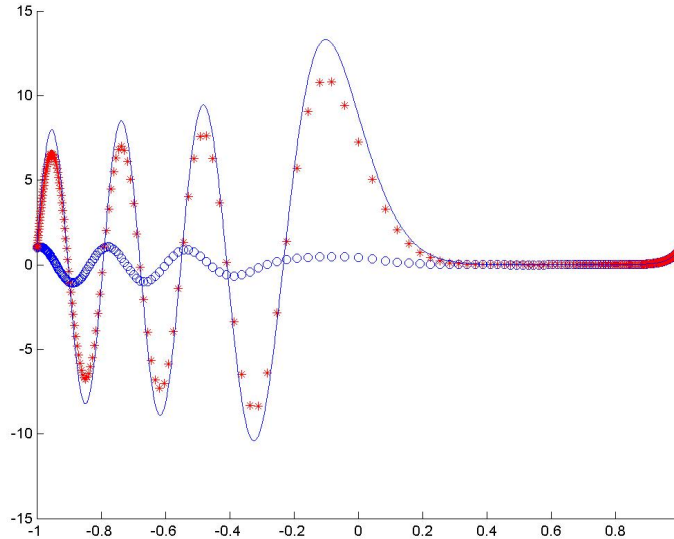


Figura 3.11: Aproximaciones de la extrapolación de Richardson 'o' y extrapolación polinómica recíproca '\*' para el problema Turning Point. Datos:  $\theta = 50$ ,  $p = 2$ ,  $n = 500$  y  $\epsilon = 10^{-3}$

### 3.6. Conclusiones

En este capítulo hemos presentado como resolver problemas de valores frontera aplicando el método de las diferencias finitas. Hemos visto primero, la ventaja computacional que tiene realizar las extrapolaciones a las diferencias finitas para acelerar la convergencia. En segundo lugar, hemos comprobado en varios problemas perturbados el mejor comportamiento de nuestra extrapolación polinómica recíproca ante problemas rígidos cuando la discretización escogida no es lo suficientemente fina y comienzan a aparecer

problemas de inestabilidad. Para finalizar hemos considerado un tipo de discretización no uniforme en la que nuestra extrapolación polinómica recíproca se comporta mucho mejor que la polinómica forzando determinados parámetros. Las investigaciones realizadas en este capítulo han originado el trabajo [5] del que esperamos recibir pronto el visto bueno.



# Capítulo 4

## Integración y diferenciación numérica.

### 4.1. Introducción

En este capítulo revisaremos como la extrapolación polinómica nos permite mejorar los métodos de cuadratura. En particular, aplicando extrapolación de Richardson a métodos sencillos como Trapecios o Simpson obtenemos los métodos de Simpson o Milne respectivamente.

Partiendo de esta idea, obtendremos nuevas fórmulas de cuadratura realizando extrapolación polinómica recíproca a métodos ya conocidos. Compararemos el resultado que ambas técnicas de extrapolación obtienen a la hora de abordar el cálculo numérico de una integral.

Para finalizar el capítulo dedicaremos una sección a la diferenciación numérica a través de las diferencias finitas donde aplicaremos extrapolaciones

y estudiaremos su inestabilidad numérica.

El cálculo de una integral definida de una función real  $f(x)$ ,

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

es un problema clásico en cálculo numérico.

Para muchas funciones  $f(x)$ , podemos obtener la integral indefinida,

$$\int f(x)dx = F(x),$$

$$F'(x) = f(x),$$

y así, aplicando la regla de Barrow, obtenemos el valor exacto de la integral definida,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Sin embargo, esto no ocurre en un buen número de ocasiones. Una buena estrategia para el calcular el valor numérico de  $I$ , consiste en discretizar el intervalo  $[a, b]$  y reemplazar la función  $f$  por otra función  $g$  que aproxime a  $f$  de manera adecuada y fácil de integrar.

Para escoger esta función  $g$  podemos pensar en los polinomios de interpolación, que usándolos de manera adecuada obtenemos las **Fórmulas de Newton-Cotes**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i), \quad (4.1.1)$$

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx,$$

donde  $l_i(x) = \prod_{j=0, i \neq j}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$  son los *polinomios fundamentales de interpolación*. El siguiente resultado nos determina los términos del error para todas las fórmulas de Newton-Cotes.

**Teorema 4** *Para la fórmula de Newton Cotes (4.1.1), existe un  $\zeta \in (a, b)$  de modo que*

1. *Si  $n$  es par y  $f \in C^{n+2}[a, b]$  entonces*

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{n+2}(\zeta)}{(n+2)!} \int_0^n t^2 \prod_{j=1}^n (t - j) dt.$$

2. *Si  $n$  es impar y  $f \in C^{n+1}[a, b]$  entonces*

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{n+1}(\zeta)}{(n+1)!} \int_0^n t \prod_{j=1}^n (t - j) dt.$$

En el caso más sencillo  $n = 1$  y nodos  $x_0 = a$  y  $x_1 = b$  los polinomios fundamentales son

$$l_0(x) = \frac{b-x}{b-a}, l_1(x) = \frac{x-a}{b-a},$$

$$A_0 = \int_a^b l_0(x)dx = \frac{b-a}{2} = \int_a^b l_1(x)dx = A_1.$$

Y por lo tanto

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)],$$

que es la ya mencionada **regla del trapecio**, que proporciona un resultado exacto para todas las  $f \in \Pi_1$ , donde  $\Pi_1$  es el conjunto de todos los polinomios de grado  $\leq 1$ .

Si en el intervalo  $[a,b]$  consideramos una partición podemos aplicar la regla del trapecio en cada uno de los subintervalos. Es lo que se considera la **regla del trapecio compuesta**,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})[f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Si, además, la partición es equiespaciada la regla del trapecio compuesta adopta la forma

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2 \sum_{i=1}^n f(a + ih) + f(b)].$$

Teniendo en cuenta que en cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , aplicando el teorema anterior, el error es

$$I_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\zeta_i) \quad \zeta_i \in (x_i, x_{i+1}),$$

es fácil deducir que el término del error para la regla del trapecio compuesta es de orden 2.

$$\frac{b-a}{12}h^2f^{(2)}(\zeta) \quad \zeta \in (a, b)$$

Veamos que ocurre al aplicar extrapolación al método del trapecio, consideremos  $n = 2$ ,  $\frac{b-a}{2} = h$ .

De este modo, obtenemos un paso

$$T(2h) = \frac{f(a) + f(b)}{2}2h = [f(a) + f(b)]h \approx I.$$

Y si aplicamos dos trapecios obtenemos

$$T(h) = \frac{f(a) + f(\frac{a+b}{2})}{2}h + \frac{f(\frac{a+b}{2}) + f(b)}{2}h \approx I.$$

Tenemos dos aproximaciones y estamos ahora en condiciones de aplicar la extrapolación de Richardson con  $p = 2$  para obtener una nueva aproximación

$$T(h, 2h) = T(h) + \frac{T(h) - T(2h)}{2^2 - 1} = \frac{1}{3}[4T(h) - T(2h)] = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)],$$

que coincide con la **Regla de Simpson**, que proporciona un resultado exacto para todas las  $f \in \Pi_3$ .

Del mismo modo que sucedía con la regla del trapecio, si consideramos una partición equiespaciada con un número par de intervalos y aplicamos la regla de Simpson en cada subintervalo, obtenemos la **regla de Simpson compuesta**,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 2 \sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n)].$$

Teniendo en cuenta que en cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , aplicando teorema 1, el error es

$$I_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_i) \quad \zeta_i \in (x_i, x_{i+1}),$$

entonces es fácil deducir que el término del error para la regla del Simpson compuesta es de orden 4.

$$\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\zeta) \quad \zeta \in (a, b).$$

Hacemos notar cómo al aplicar la extrapolación polinómica pasamos de tener un error de orden  $O(h^2)$  a uno de orden  $O(h^4)$ .

Vamos a considerar cuatro aproximaciones iniciales de la integral realizadas por el método de los trapecios para distintos valores de  $h$  y realizaremos la extrapolación de Richardson.

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow h_0 = b - a \Rightarrow T_{0,0} = \frac{1}{2}(b-a)(f_0 + f_n), \\ n = 2 &\Rightarrow h_1 = \frac{(b-a)}{2} \Rightarrow T_{1,0} = \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{2} (f_0 + 2f_1 + f_n), \\ n = 4 &\Rightarrow h_2 = \frac{(b-a)}{4} \Rightarrow T_{2,0} = \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{4} (f_0 + 2 \sum f_j + f_n), \\ n = 8 &\Rightarrow h_3 = \frac{(b-a)}{8} \Rightarrow T_{3,0} = \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{8} (f_0 + 2 \sum f_j + f_n). \end{aligned}$$

siendo  $f_i = f(x_i)$

Realizando una primera extrapolación de Richardson obtenemos,

$$T_{1,1} = \frac{4T_{1,0} - T_{0,0}}{3}, \quad T_{2,1} = \frac{4T_{2,0} - T_{1,0}}{3}, \quad T_{3,1} = \frac{4T_{3,0} - T_{2,0}}{3},$$

y tras una segunda extrapolación con los resultados de la primera obtenemos

lo siguiente:

$$T_{2,2} = \frac{16T_{2,1} - T_{1,1}}{15}, \quad T_{3,2} = \frac{16T_{3,1} - T_{2,1}}{15}.$$

Vamos a expresar las nuevas aproximaciones en términos de la función,

$$\begin{aligned} T_{1,1} &= \frac{4T_{1,0} - T_{0,0}}{3} = \frac{1}{6} (b - a) (f_0 + 4f_1 + f_2), \\ T_{2,1} &= \frac{4T_{2,0} - T_{1,0}}{3} = \frac{1}{12} (b - a) (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4), \\ T_{3,1} &= \frac{4T_{3,0} - T_{2,0}}{3} \\ &= \frac{1}{24} (b - a) (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + f_8). \end{aligned}$$

Los coeficientes de los resultados vemos que coinciden con los coeficientes del Método de Simpson para distintos valores de  $h$ . Podemos entonces concluir que

TRAPECIOS + RICHARDSON  $\Rightarrow$  SIMPSON

Si seguimos calculando los valores de las extrapolaciones,

$$\begin{aligned} T_{2,2} &= \frac{16T_{2,1} - T_{1,1}}{15} = \frac{1}{90} (b - a) (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) \\ T_{3,2} &= \frac{16T_{3,1} - T_{2,1}}{15} \\ &= \frac{1}{180} (b - a) (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 12f_4 + 32f_5 + 12f_6 + 32f_7 + 7f_8). \end{aligned}$$

En este caso los coeficientes de los resultados vemos que coinciden con los coeficientes del Método de Milne para distintos valores de  $h$ . Así podemos concluir que

$$\text{SIMPSON} + \text{RICHARDSON} \Rightarrow \text{MILNE}$$

El proceso de las extrapolaciones presentadas se conoce como el *método de integración Romberg*, basado en la regla recursiva del trapecio y aplicando extrapolación a la serie  $h_i = \frac{b-a}{2^i}$ . Es frecuente verlo representado en el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccccccc} T(h_0) & = & T_{00} & & & & \\ T(h_1) & = & T_{10} & T_{11} & & & \\ T(h_2) & = & T_{20} & T_{21} & T_{22} & & \\ T(h_3) & = & T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

La primera columna corresponden a los métodos del trapecio para diferentes valores de  $h$ ,  $T_{11}$  y  $T_{22}$  son el método de Simpson y de Milne respectivamente. Sin embargo,  $T_{33}$  no corresponde a ninguna fórmula de Newton-Cotes.

## 4.2. Nuevas fórmulas de cuadratura

Vamos a realizar el mismo proceso con la extrapolación polinómica recíproca para obtener nuevas fórmulas de cuadratura.



Consideramos de nuevo

$$T(2h) = \frac{f(a) + f(b)}{2} 2h = [f(a) + f(b)] h \approx I$$

Y si aplicamos dos trapecios obtenemos

$$T(h) = \frac{f(a) + f(c)}{2} h + \frac{f(c) + f(b)}{2} h \approx I$$

$$c = \frac{a + b}{2}$$

Tenemos dos aproximaciones y estamos ahora en condiciones de aplicar la extrapolación polinómica recíproca con  $p = 2$  para obtener una nueva aproximación

$$R(h, 2h) = \frac{3T(h)T(2h)}{4T(2h) - T(h)} =$$

$$\frac{\frac{3h^2}{2} [f(a)^2 + 2f(a)f(b) + 2f(a)f(c) + 2f(c)f(b) + f(b)^2]}{\frac{h}{2} [7f(a) + 7f(b) - 2f(c)]} =$$

$$3h \frac{f(a)^2 + 2f(a)f(b) + 2f(a)f(c) + 2f(c)f(b) + f(b)^2}{7f(a) + 7f(b) - 2f(c)}$$

Ésta sería una nueva fórmula de cuadratura análoga a la regla de Simpson y cuyo término del error es también del orden  $O(h^4)$ .

Vamos a considerar cuatro aproximaciones iniciales de la integral realizadas por el método de los trapecios y realizaremos la extrapolación polinómica recíproca.

$$n = 1 \Rightarrow h_0 = b - a \Rightarrow T_{0,0} = \frac{1}{2}(b - a)(f_0 + f_1) = \frac{1}{2}(b - a)A,$$

$$n = 2 \Rightarrow h_1 = \frac{(b-a)}{2} \Rightarrow T_{1,0} = \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{2} (f_0 + 2f_1 + f_2) = \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{2} B,$$

$$n = 4 \Rightarrow h_2 = \frac{(b-a)}{4} \Rightarrow T_{2,0} = \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{4} (f_0 + 2 \sum f_j + f_4) = \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{4} C,$$

$$n = 8 \Rightarrow h_3 = \frac{(b-a)}{8} \Rightarrow T_{3,0} = \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{8} (f_0 + 2 \sum f_j + f_8) = \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{8} D.$$

Realizando una primera extrapolación polinómica recíproca obtenemos,

$$T_{1,1} = \frac{3T_{1,0} \cdot T_{0,0}}{4T_{0,0} - T_{1,0}}, \quad T_{2,1} = \frac{3T_{2,0} \cdot T_{1,0}}{4T_{1,0} - T_{2,0}}, \quad T_{3,1} = \frac{3T_{3,0} \cdot T_{2,0}}{4T_{2,0} - T_{3,0}},$$

y tras una segunda extrapolación con los resultados de la primera obtenemos

lo siguiente,

$$T_{2,2} = \frac{15T_{2,1} \cdot T_{1,1}}{16T_{1,1} - T_{2,1}}, \quad T_{3,2} = \frac{15T_{3,1} \cdot T_{2,1}}{16T_{2,1} - T_{3,1}}.$$

Si expresamos las nuevas aproximaciones en términos de la función nos

queda,

$$T_{1,1} = \frac{3T_{1,0} \cdot T_{0,0}}{4T_{0,0} - T_{1,0}} = \frac{3 \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{2} B \cdot \frac{1}{2} (b-a) A}{2(b-a)A - \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{2} B} = \frac{3}{2} (b-a) \frac{AB}{8A - B},$$

$$T_{2,1} = \frac{3T_{2,0} \cdot T_{1,0}}{4T_{1,0} - T_{2,0}} = \frac{3}{4} (b-a) \frac{CB}{8B - C},$$

$$T_{3,1} = \frac{3T_{3,0} \cdot T_{2,0}}{4T_{2,0} - T_{3,0}} = \frac{3}{8} \cdot (b-a) \frac{CD}{8C - D}.$$

Si ahora expresamos las aproximaciones correspondientes a la segunda extrapolación tenemos,

$$\begin{aligned}
T_{2,2} &= \frac{15T_{2,1} \cdot T_{1,1}}{16T_{1,1} - T_{2,1}} = \frac{15 \frac{3}{4} (b-a) \frac{CB}{8B-C} \cdot \frac{3}{2} (b-a) \frac{AB}{8A-B}}{16 \frac{3}{2} (b-a) \frac{AB}{8A-B} - \frac{3}{4} (b-a) \frac{CB}{8B-C}} = \\
&= \frac{45 (b-a) \frac{CB}{8B-C} \cdot \frac{AB}{8A-B}}{2 \frac{AB}{8A-B} - \frac{CB}{8B-C}} = \frac{45 (b-a) AB^2 C}{32 (16AB^2 + CB^2 - 10ABC)} = \\
&\frac{45}{32} \frac{(b-a)(f_0+f_1)(f_0+2f_1+f_2)^2(f_0+2\sum f_j+f_4)}{16(f_0+f_1)(f_0+2f_1+f_2)^2+(f_0+2\sum f_j+f_4)(f_0+2f_1+f_2)^2-10(f_0+f_1)(f_0+2f_1+f_2)(f_0+2\sum f_j+f_4)}, \\
T_{3,2} &= \frac{15T_{3,1} \cdot T_{2,1}}{16T_{2,1} - T_{3,1}} = \frac{15 \frac{3}{8} \cdot (b-a) \frac{CD}{8C-D} \cdot \frac{3}{4} (b-a) \frac{CB}{8B-C}}{16 \frac{3}{4} (b-a) \frac{CB}{8B-C} - \frac{3}{8} \cdot (b-a) \frac{CD}{8C-D}} = \\
&= \frac{45 (b-a) \frac{CD}{8C-D} \cdot \frac{CB}{8B-C}}{64 \frac{CB}{8B-C} - \frac{CD}{8C-D}} = \frac{45 (b-a) BC^2 D}{64 (16C^2 B + C^2 D - 10CBD)} = \\
&\frac{45}{64} \frac{(b-a)(f_0+2f_1+f_2)(f_0+2\sum f_j+f_4)^2(f_0+2\sum f_j+f_8)}{16(f_0+2\sum f_j+f_4)^2(f_0+2f_1+f_2)+(f_0+2\sum f_j+f_4)^2(f_0+2\sum f_j+f_8)-10(f_0+2\sum f_j+f_4)(f_0+2f_1+f_2)(f_0+2\sum f_j+f_8)}.
\end{aligned}$$

En este caso, obtenemos nuevas fórmulas de cuadratura análogas a las de Milne, que consisten en funciones racionales. Podemos entonces concluir que hemos obtenido las nuevas fórmulas de cuadratura siguiendo el esquema

TRAPECIOS + EXT. POLINÓMICA RECÍPROCA  $\Rightarrow$  RECISIMPSON

SIMPSON + EXT. POLINÓMICA RECÍPROCA  $\Rightarrow$  RECIMILNE

Cómo hemos visto en anteriores capítulos las aproximaciones racionales pueden ser una buena alternativa a las polinómicas.

### 4.3. Experimentos numéricos

Vamos realizar varios experimentos numéricos para testear lo expuesto anteriormente. Para ello vamos a programar en Matlab el método de trapecios al que le aplicaremos la extrapolación de Richardson y polinómica recíproca para mejorar los resultados debido que al realizar estas extrapolaciones eliminamos el primer término del error.

Realizaremos estos experimentos para diferentes funciones y para distintos valores de  $h$ .

**Ejemplo 1:**

$$f(x) = x^3, \text{ para } x \in [0, 1]$$

Calculamos el valor de la integral de la función para distintos valores de  $h$ , y según las distintas discretizaciones, obtenemos los siguientes errores:

Datos de entrada	Trapecios	Ext. Rich. Simpson	ReciSimpson
$h = 0,25$	$6,25e - 2$	0	$1,00e - 2$
$h = 0,1$	$2,49e - 3$	$8,32e - 17$	$1,98e - 5$
$h = 0,05$	$6,25e - 4$	$2,22e - 16$	$1,24e - 6$
$h = 0,01$	$2,50e - 5$	$4,99e - 16$	$1,99e - 9$

Datos de entrada	Simpson	Ext. Rich. Milne	ReciMilne
$h = 0,25$	0	0	0
$h = 0,05$	0	0	0

Lo más destacable de este ejemplo es la comprobación numérica de que los métodos de Simpson y de Milne dan aproximaciones exactas para polinomios de grado  $\leq 3$

**Ejemplo 2:**

$$f(x) = \text{sen}(2\pi x), \text{ para } x \in [0, \frac{1}{2}].$$

Calculamos el valor de la integral de la función para distintos valores de  $h$ , y según las distintas discretizaciones, obtenemos los siguientes errores:

Datos de entrada	Trapeacios	Ext. Rich. Simpson	ReciSimpson
$h = 0,1$	$1,05e - 2$	$9,05e - 3$	$1,03e - 2$
$h = 0,05$	$2,62e - 3$	$1,74e - 5$	$3,87e - 5$
$h = 0,01$	$1,04e - 4$	$2,75e - 8$	$6,08e - 8$
$h = 0,001$	$1,04e - 6$	$2,75e - 12$	$6,08e - 12$
$h = 0,0001$	$1,04e - 8$	$3,36e - 14$	$3,40e - 14$

Datos de entrada	Simpson	Ext. Rich. Milne	ReciMilne
$h = 0,25$	$1,50e - 2$	$3,72e - 2$	$3,18e - 1$
$h = 0,05$	$1,74e - 5$	$3,33e - 3$	$3,47e - 3$
$h = 0,005$	$1,72e - 9$	$6,48e - 13$	$6,47e - 13$
$h = 0,001$	$2,75e - 12$	$2,22e - 16$	$5,55e - 17$

Podemos observar cómo las nuevas fórmulas de cuadratura aceleran la convergencia respecto a Trapecios y Simpson y tienen un comportamiento comparable a sus respectivas extrapolaciones clásicas.

**Ejemplo 3:**

$$f(x) = Tg((\pi - 10^{-4})x), \text{ para } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}].$$

Calculamos el valor de la integral de la función para distintos valores de  $h$ , y según las distintas discretizaciones, obtenemos los siguientes errores:

Datos de entrada	Trapeacios	Ext. Rich	Ext. Pol. Rec.
$h = 0,001$	$8,85e + 0$	$5,59e + 0$	$7,30e + 0$
$h = 0,00001$	$1,51e - 1$	$1,18e - 1$	$1,16e - 1$
$h = 0,000005$	$8,54e - 2$	$6,35e - 2$	$6,28e - 2$
$h = 0,000002$	$4,18e - 4$	$2,55e - 6$	$2,78e - 6$
$h = 0,000001$	$1,04e - 4$	$1,62e - 8$	$1,85e - 9$

En este ejemplo es interesante observar la cantidad de precisión que se necesita para obtener buenas aproximaciones de la integral, esto es debido a que el valor de la función  $tg$  es muy grande conforme nos aproximamos a  $\pi/2$ . Por otro lado podemos también observar cómo la extrapolación polinómica recíproca obtiene resultados similares a la extrapolación polinómica.

Datos de entrada	Simpson	Ext. Rich. Milne	ReciMilne
$h = 0,0125$	$8,14e + 1$	$7,59e + 1$	$7,87e + 1$
$h = 0,00005$	$6,92e - 2$	$5,70e - 2$	$5,77e - 2$
$h = 0,000002$	$2,55e - 6$	$2,40 - 7$	$2,40e - 7$
$h = 0,000001$	$1,63e - 7$	$4,58e - 9$	$4,58e - 9$

En general, podemos concluir que la extrapolación recíproca nos proporciona nuevas fórmulas de cuadratura más potentes que los métodos extrapo-

lados y con un buen comportamiento numérico, comparable además a las extrapolaciones clásicas.

## 4.4. Diferenciación numérica.

Para finalizar este capítulo dedicamos una sección a la diferenciación numérica. Las fórmulas de diferenciación numérica, además de tener interés en sí mismo, tienen su aplicación más importante en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales. De hecho, en el capítulo anterior las usamos para resolver PVF.

El problema de la diferenciación numérica es, en muchos casos, más difícil que el de la integración numérica. Esto es debido a que cuando evaluamos valores muy próximos de las funciones, el error de esta diferencia nos puede llevar a la inestabilidad de la diferenciación numérica. Esto no ocurre con la integración numérica.

Sea  $f(x) \in C^1[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ , para  $\epsilon > 0$  de la que estamos interesados en calcular su derivada en el punto  $x_0$ . Una primera opción es partir de la definición de derivada y tomar como primera aproximación de la derivada

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (4.4.1)$$

Los métodos más usuales para abordar la diferenciación numérica son la diferenciación via interpolación polinomial, que consiste en derivar un polinomio de interpolación construido. La segunda opción es calcular directamente la derivada utilizando la aproximaciones de la función mediante Taylor. Las fórmulas obtenidas reciben el nombre de *fórmulas de diferencias finitas*.

Considerando el desarrollo de Taylor para la función  $f(x) \in C^2[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ ,  $h = x - x_0$ , con  $0 < h \leq \epsilon$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + O(h^3),$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{1}{2}f''(x_0)h + O(h^2),$$

de este modo podemos considerar (4.4.1) la *primera diferencia dividida* como aproximación a la derivada de orden 1 y error de truncamiento  $\frac{-hf''(\zeta)}{2}$ , para algún  $\zeta \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ .

Uno podría imaginar que realizando  $h \rightarrow 0$  obtendríamos la precisión que quisieramos de  $f'(x_0)$ . Desafortunadamente esto no es así, debido a que conforme disminuimos el valor de  $h$  estamos restando cantidades muy próximas en el numerador de (4.4.1), de modo que el error de truncamiento y el de error de redondeo juegan papeles igualmente importantes.



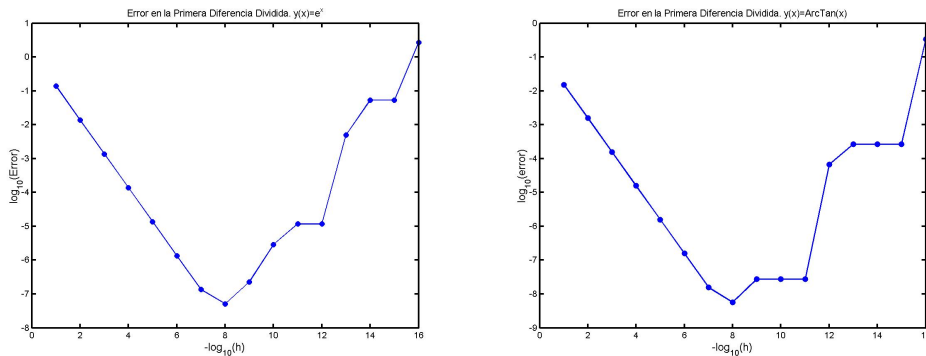


Figura 4.1: Errores de aproximación a las derivadas  $\frac{de^x}{dx} \Big|_{x=1}$  y  $\frac{dArcTg(x)}{dx} \Big|_{x=\sqrt{2}}$

Como podemos ver gráficamente (ver figura1) tomándo  $h \rightarrow 0$  sólo podemos disminuir el error de truncamiento hasta cierta cantidad<sup>1</sup> antes de que el error de redondeo sea dominante. La diferencia provocará una pérdida de dígitos significativos, este deterioro de la solución se conoce como *cancelación por sustracción*.

En la figura 1, hemos representado en el eje x el paso  $h$  en escala logarítmica y en el eje y el error numérico resultante de aproximar  $f'(x_0)$  por la primera diferencia dividida, también en escala logarítmica. Hemos escogido dos funciones y observamos como para ambas el  $h$  óptimo es  $10^{-8}$  y los errores del orden de  $10^{-8}$  no pudiendo mejorarlos debido a la presencia de errores de redondeo.

<sup>1</sup>Podremos obtener un  $h_{optimo} \approx \sqrt{\epsilon_m}$ , con  $\epsilon_m$  = precisión de la máquina. En nuestro caso  $h_{optimo} \approx \sqrt{10^{16}} = 10^{-8}$  como podemos observar en la figura 1.

Para resolver este problema, como no podemos hacer nada frente al error de redondeo, nos centramos en mejorar el error de truncamiento.

Una primera opción es considerar la *fórmula de las diferencias centradas*

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}, \quad (4.4.2)$$

que desarrollando Taylor podemos ver como obtenemos el error  $O(h^2)$

$$\frac{-f^{(3)}(\zeta)h^2}{6}.$$

Otra alternativa para contrarrestar estos errores y obtener mejores resultados es realizar extrapolación bien sea polinómica o bien nuestra extrapolación polinómica recíproca.

En la figura 2 hemos representado, además de la primera diferencia dividida y la diferencia centrada, las extrapolaciones de Richardson y la extrapolación polinómica recíproca. En primer lugar observamos cómo el  $h_{optimo} \approx 10^{-4}$ , mucho mejor computacionalmente que el conseguido con las primeras diferencias finitas ( $\approx 10^{-8}$ ). Además, como podemos observar tanto en la tabla 25 como en la figura 2, la precisión que alcanzamos con las extrapolaciones es mucho mayor (del orden  $10^{-13}$ ) que con las diferencias finitas.

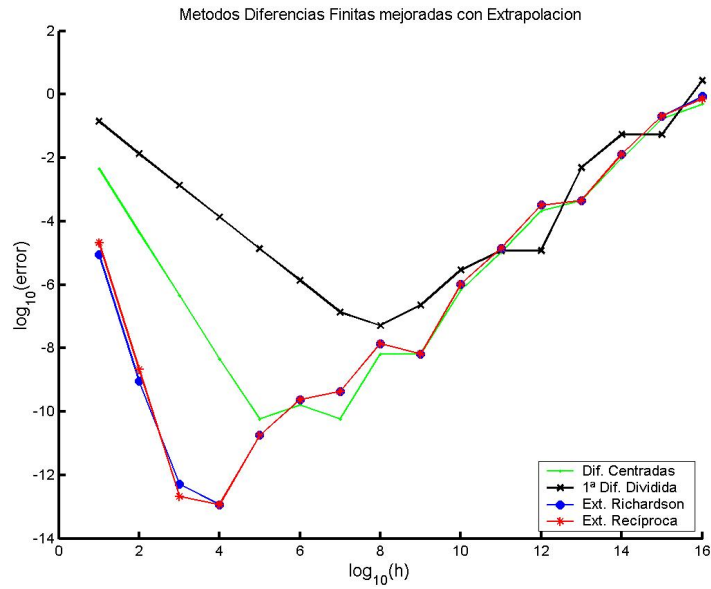


Figura 4.2: Errores de aproximación a la derivada  $\frac{de^x}{dx}_{x=1}$

**Tabla 28** Errores de los métodos de diferencias finitas y métodos de extrapolación.

<i>Precisión</i>	<i>1ª Dif. Dividiva</i>	<i>Dif. Centradas</i>	<i>Ext. Rich.</i>	<i>Ext. Pol. Rec.</i>
$h = 10^{-1}$	$1,40e - 1$	$4,53e - 3$	$9,07e - 6$	$2,10e - 5$
$h = 10^{-4}$	$1,35e - 4$	$4,53e - 9$	$1,15e - 13$	$1,15e - 13$
$h = 10^{-5}$	$1,35e - 5$	$5,85e - 11$	$1,78e - 11$	$1,78e - 11$
$h = 10^{-8}$	$5,10e - 8$	$6,60e - 9$	$1,40e - 8$	$1,40e - 8$
$h = 10^{-14}$	$5,37e - 2$	$4,55e - 4$	$4,55e - 4$	$4,55e - 4$



# Capítulo 5

## Primera generalización de la extrapolación polinómica recíproca.

### 5.1. Introducción.

Consideremos un problema clásico de valores iniciales

$$y' = f(x, y),$$

$$y(x_0) = y_0 .$$

Aproximaremos un valor  $a_0$  mediante un método numérico, y obtendremos una aproximación que dependerá de la escala utilizada  $F(h)$ , donde

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = a_0.$$

El error de los métodos clásicos puede expresarse como un desarrollo de Taylor

$$F(h) = a_0 + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2} + \dots$$

Los métodos de extrapolación eliminan términos  $a_i h^{p_i}$  mediante combinaciones lineales de  $F(h)$  para distintos  $h$ . Obtendremos entonces una nueva extrapolación  $F(h, \tilde{h})$  donde el error será

$$F(h, \tilde{h}) = a_0 + \tilde{a}_1 h^{p_j} + \dots$$

con  $p_j > p_1$ .

El problema aparece cuando el error en algunos métodos no puede expresarse como un desarrollo de Taylor. Esto origina la primera generalización de Richardson.

## 5.2. Primera generalización de Richardson.

Recordemos que en el proceso de extrapolación de Richardson partíamos de un método  $F(h)$  que satisfacía

$$F(h) = A + \sum_{i=1}^s a_i h^{p_i} + O(h^{s+1}),$$

con  $p_i < p_{i+1}$ , siendo  $A$  la cantidad a aproximar.

Considerábamos nuevas discretizaciones  $A_m = F(h_m)$  con  $h_m = q^{-m}h$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  que mediante ciertas manipulaciones algebraicas aumentaban el orden del método original.

La primera generalización de la extrapolación de Richardson consiste en que podemos generalizar las potencias de  $h$  tomadas. Dicho de forma más precisa, en la primera generalización de Richardson podemos considerar métodos que no tienen porqué expresarse como potencias de  $h$ , sino como funciones decrecientes de  $h$ .

Consideremos  $F(h)$  con una expansión de la forma:

$$F(h) = A + \sum_{k=1}^s \alpha_k \phi_k(h) + O(\phi_{s+1}(h)), \quad (5.2.1)$$

con  $A$  y  $\alpha_i$  escalares independientes de  $h$ . y  $\phi_{k+1}(h) = o(\phi_k(h))$  cuando  $h \rightarrow 0$ , para  $k = 1, 2, \dots$

Evidentemente si consideramos el caso particular en el que  $\phi_i(h) = h^{p_i}$  con  $p_i < p_{i+1}$  tendríamos el proceso de extrapolación de Richardson habitual.

Consideramos en la expresión (5.2.1). Para el caso particular  $s = 1$  tenemos

$$F(h) = A + \alpha_1 \phi_1(h) + O(\phi_2(h)),$$

con  $\phi_2(h) = o(\phi_1(h))$

Dados dos nodos  $(h_1, F(h_1))$ ,  $(h_2, F(h_2))$  con  $h_1 > h_2$ . La fórmula de extrapolación para la primera generalización sería

$$F(h_1, h_2) = \frac{\phi_1(h_1)F(h_2) - \phi_1(h_2)F(h_1)}{\phi_1(h_1) - \phi_1(h_2)}.$$

**Ejemplo 1.** Regla del Trapecio para integrales con una singularidad en el extremo.

Consideramos la integral  $I(G) = \int_0^1 G(x)dx$ , donde  $G(x) = x^s \log(x)g(x)$ , con  $Real(s) > -1$ ,  $g \in C^\infty[0, 1]$ . Sea ahora  $h = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Aproximaremos la integral  $I(G)$  por la regla modificada del trapecio

$$T(h) = h \left[ \sum_{j=1}^{n-1} G(jh) + \frac{1}{2}G(1) \right].$$

Podemos considerar la expansión de Euler-Maclaurin<sup>1</sup> siguiente

$$T(h) \sim I(G) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i h^{2i} + \sum_{i=0}^{\infty} b_i h^{s+i+1} \rho_i(h) \quad \text{con } h \rightarrow 0,$$

donde

$$a_i = \frac{B_{2i}}{(2i)!} G^{(2i-1)}(1), \quad i = 1, 2, \dots$$

$$b_i = \frac{g^{(i)}(0)}{i!} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\rho_i(h) = \zeta(-s-i) \log h - \zeta'(-s-i) \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

**Nota:**  $B_k$  son los números de Bernoulli,  $\zeta(z)$  es la función Zeta de Riemann y  $\zeta'(z) = \frac{d}{dz} \zeta(z)$ .

Es evidente que los  $a_i$  y los  $b_i$  son independientes de  $h$  y dependen sólo de  $g(x)$ , así como  $\rho_i(h)$  dependen de  $h$  pero son independientes de  $g(x)$ . Entonces

<sup>1</sup>Debido a un resultado de Navot, que aparece en el libro [31], apéndice D.



el desarrollo de  $T(h)$  es como el de la primera generalización del proceso de

Richardson. Además cuando  $-1 < \text{Real}(s) < 0$  tenemos que

$$\phi_k(h) = \left\{ \begin{array}{ll} h^{s+i+1} \rho_i(h) & i = \lfloor 2k/3 \rfloor \quad k = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \dots \\ h^{2k/3} & k = 3, 6, 9, \dots \end{array} \right\}.$$

### 5.3. Primera generalización de la extrapolación recíproca.

Si consideramos en la expresión (5.2.1) para el caso particular  $s = 1$  tenemos

$$F(h) = A + \alpha_1 \phi_1(h) + O(\phi_2(h)), \quad (5.3.1)$$

con  $\phi_2(h) = o(\phi_1(h))$ .

Dividimos la expresión (5.3.1) por la cantidad  $A$

$$\frac{F(h)}{A} = 1 + \frac{\alpha_1 \phi_1(h) + O(\phi_2(h))}{A}, \quad (5.3.2)$$

y operando obtenemos

$$\frac{A}{F(h)} = 1 - \frac{\alpha_1}{A} \phi_1(h) + \frac{\left(\frac{\alpha_1}{A}\right)^2 \phi_1^2(h) + \frac{\alpha_1}{A} \phi_1(h) O(\phi_2(h)) - O(\phi_2(h))}{1 + \frac{\alpha_1}{A} \phi_1(h) + O(\phi_2(h))}. \quad (5.3.3)$$

Veamos que  $f(h) = \frac{\left(\frac{\alpha_1}{A}\right)^2 \phi_1^2(h) + \frac{\alpha_1}{A} \phi_1(h) O(\phi_2(h)) - O(\phi_2(h))}{1 + \frac{\alpha_1}{A} \phi_1(h) + O(\phi_2(h))}$  es una  $O(\phi_2(h))$ .

Tenemos que

$$\frac{f(h)}{\phi_2(h)} = \frac{\left(\frac{\alpha_1}{A}\right)^2 \phi_1^2(h) + \frac{\alpha_1}{A} \phi_1(h) O(\phi_2(h)) - O(\phi_2(h))}{\phi_2(h) + \frac{\alpha_1}{A} \phi_1(h) \phi_2(h) + O(\phi_2(h)) \phi_2(h)}. \quad (5.3.4)$$

Dividimos por la menor potencia de  $h$  ( $\phi_2(h)$ ) y tenemos

$$\frac{f(h)}{\phi_2(h)} = \frac{\left(\frac{\alpha_1}{A}\right)^2 \frac{\phi_1^2(h)}{\phi_2(h)} + \frac{\alpha_1}{A} \frac{\phi_1(h) O(\phi_2(h))}{\phi_2(h)} - \frac{O(\phi_2(h))}{\phi_2(h)}}{1 + \frac{\alpha_1}{A} \phi_1(h) + O(\phi_2(h))}$$

Como

$$1 + \frac{\alpha_1}{A} \phi_1(h) + O(\phi_2(h)) \rightarrow 1$$

Y los sumandos del numerador

$$\begin{aligned} \frac{\phi_1(h) O(\phi_2(h))}{\phi_2(h)} &= \phi_1(h) \frac{O(\phi_2(h))}{\phi_2(h)} \rightarrow \phi_1(h) cte \\ \frac{O(\phi_2(h))}{\phi_2(h)} &\rightarrow cte \end{aligned}$$

El problema lo presenta  $\frac{\phi_1^2(h)}{\phi_2(h)}$  que para que  $f(h)$  sea una  $O(\phi_2(h))$ , entonces debe converger a cero o a una constante. O lo que es lo mismo  $\phi_1^2(h) = O(\phi_2(h))$ . Esto nos aparece como una nueva condición para desarrollar la primera generalización recíproca. Notar que esa condición no es descabellada ya que se da en la mayoría de los métodos numéricos. También podemos considerar que se dé en los métodos que consideremos.

Supongamos que se cumple esa condición extra y  $f(h) = O(\phi_2(h))$ . Entonces tenemos que

$$\frac{A}{F(h)} = 1 - \frac{\alpha_1}{A} \phi_1(h) + O(\phi_2(h))$$

y así

$$\frac{1}{F(h)} = \frac{1}{A} - \frac{\alpha_1}{A^2} \phi_1(h) + O(\phi_2(h)). \quad (5.3.5)$$

De este modo consideramos en la expresión (5.2.1)  $\tilde{\alpha}_i = -\frac{\alpha_i}{A^2}$  para extrapolar  $\frac{1}{A}$  por  $\frac{1}{F(h)}$ .

La primera generalización de la extrapolación polinómica recíproca consiste en tomar los datos inversos, aplicarles la primera generalización de Richardson y, finalmente, invertir el dato extrapolado. Por lo tanto necesitamos que  $\frac{1}{F(h)}$  tenga un desarrollo análogo a  $F(h)$ .

$$\frac{1}{F(h)} = \frac{1}{A} + \sum_{k=1}^s \tilde{\alpha}_k \phi_k(h) + O(\phi_{s+1}(h)) \quad (5.3.6)$$

donde  $y \rightarrow 0$ ,  $\phi_{k+1}(h) = o(\phi_k(h))$  y  $\phi_k^2(h) = O(\phi_{k+1}(h))$ . Con  $A$  y  $\tilde{\alpha}_k$  escalares independientes de  $h$ .

**Definición 3** Sea  $\frac{1}{A(h)}$  como el descrito en (5.3.6). Sea  $\{h_n\}_n \subset (0, b]$  una sucesión decreciente con  $b > 0$ . Se define la aproximación  $A_n^j$  a  $\frac{1}{A(h)}$  a través del sistema lineal

$$\frac{1}{A(h_l)} = A_n^j + \sum_{k=1}^n \tilde{\beta}_k \phi_k(h_l), \quad j \leq l \leq j+n \quad (5.3.7)$$

donde  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n$  son desconocidos. Llamaremos a este proceso que genera  $A_n^j$  la **primera generalización de la extrapolación polinómica recíproca**.

Notar que tenemos  $n + 1$  ecuaciones con  $n + 1$  incógnitas ( $\tilde{\beta}_1 \dots \tilde{\beta}_n A_n^j$ )

### 5.3.1. Propiedades algebraicas.

La solución del sistema lineal (5.3.7) la podemos expresar como el cociente de dos determinantes con la ayuda de la regla de Cramer de la forma

$$A_n^j = \frac{\begin{vmatrix} g_1(j) & g_2(j) & \dots & g_n(j) & a(j) \\ g_1(j+1) & g_2(j+1) & \dots & g_n(j+1) & a(j+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ g_1(j+n) & g_2(j+n) & \dots & g_n(j+n) & a(j+n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(j) & g_2(j) & \dots & g_n(j) & 1 \\ g_1(j+1) & g_2(j+1) & \dots & g_n(j+1) & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ g_1(j+n) & g_2(j+n) & \dots & g_n(j+n) & 1 \end{vmatrix}} \quad (5.3.8)$$

donde  $g_k(m) = \phi_k(h_m)$  y  $a(m) = \frac{1}{A(h_m)}$ .

En la práctica para el caso  $s = 1$  tendremos

$$A^j = \frac{\begin{vmatrix} g_1(j) & a(j) \\ g_1(j+1) & a(j+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(j) & 1 \\ g_1(j+1) & 1 \end{vmatrix}}$$

como solución del sistema (5.3.7) para el caso  $s = 1$ .

De hecho obviando la notación y dados dos nodos  $(h_1, F(h_1)), (h_2, F(h_2))$  con  $h_1 > h_2$ , la fórmula de extrapolación para la primera generalización recíproca sería

$$F(h_1, h_2) = \frac{F(h_1)F(h_2)[\phi_1(h_1) - \phi_1(h_2)]}{\phi_1(h_1)F(h_2) - \phi_1(h_2)F(h_1)}.$$

**Teorema 5**  $A_n^j$  puede ser expresado de la forma:

$$A_n^j = \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j \frac{1}{A(h_{j+i})}, \quad (5.3.9)$$

donde  $\gamma_{ni}^j$  son escalares determinandos mediante el sistema lineal

$$\sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j = 1, \quad (5.3.10)$$

$$\sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j \phi_k(h_{j+i}) = 0 \quad , k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3.11)$$

**Demostración:**

Denotando al cofactor del numerador del determinante (5.3.8) por  $N_i$  y desarrollando por la última columna tenemos

$$A_n^j = \frac{\sum_{i=0}^n N_i a(j+i)}{\sum_{i=0}^n N_i}$$

llamando  $\gamma_{ni}^j = \frac{N_i}{\sum_{r=0}^n N_r}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , se satisface (5.3.9) de forma inmediata.

Se cumple (5.3.10) pues 
$$\sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j = \sum_{i=0}^n \frac{N_i}{\sum_{r=0}^n N_r} = \frac{\sum_{i=0}^n N_i}{\sum_{r=0}^n N_r} = 1.$$

También cumple (5.3.11), basta observar que  $\sum_{i=0}^n N_i g_k(j+i) = 0$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n$  ya que  $[g_k(j) \ g_k(j+1) \dots \ g_k(j+n)]^T$  es una de las  $n$ -primeras columnas del numerador en el determinante de (5.3.8). Y los  $N_i$  son los cofactores de su última columna.  $\diamond$

Los escalares  $\gamma_{ni}^j$  también pueden ser asociados a un polinomio, éste es el objeto del siguiente teorema.

**Teorema 6** *Los escalares  $\gamma_{ni}^j$  satisfacen*

$$\sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j z^i = \frac{H_n^j(z)}{H_n^j(1)},$$

donde  $H_n^j(z)$  es un polinomio de grado  $n$  a lo sumo, definido

$$H_n^j(z) = \begin{vmatrix} g_1(j) & g_2(j) & \dots & g_n(j) & 1 \\ g_1(j+1) & g_2(j+1) & \dots & g_n(j+1) & z \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ g_1(j+n) & g_2(j+n) & \dots & g_n(j+n) & z^n \end{vmatrix}$$

**Demostración:**

Como  $\gamma_{ni}^j = \frac{N_i}{\sum_{r=0}^n N_r}$   $i = 0, \dots, n$  se tiene

$$\sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j z^i = \sum_{i=0}^n \frac{N_i}{\sum_{r=0}^n N_r} z^i = \frac{\sum_{i=0}^n N_i z^i}{\sum_{r=0}^n N_r} = \frac{H_n^j(z)}{H_n^j(1)} \quad (\text{por definición de } H_n^j(z) )$$

$\diamond$

El siguiente teorema justifica la aproximación de  $A_n^j$  a  $\frac{1}{A}$ .

**Teorema 7** *Definimos*

$$R_s(h) = \frac{1}{A(h)} - \frac{1}{A} - \sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_k \phi_k(h) \quad (5.3.11)$$

entonces para todo  $n$  tenemos

$$A_n^j - \frac{1}{A} = \sum_{k=n+1}^s \tilde{\alpha}_k \left( \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j \phi_k(h_{j+i}) \right) + \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j R_s(h_{j+i}) \quad (5.3.12)$$

donde la suma  $\sum_{k=n+1}^s$  es 0 para  $n \geq s$ . En consecuencia, cuando  $\frac{1}{A(y)} = \frac{1}{A} + \sum_{k=1}^s \tilde{\alpha}_k \phi_k(y)$ ,  $\forall y \Rightarrow A_n^j = \frac{1}{A}$ ,  $\forall j \geq 0 \quad \forall n \geq s$ .

**Demostración:**

Como

$$A_n^j = \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j \frac{1}{A(h_{j+i})}$$

tenemos

$$\begin{aligned} & A_n^j - \frac{1}{A} \stackrel{5,3,9}{=} \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j \frac{1}{A(h_{j+i})} - \frac{1}{A} = \\ & = \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j \left[ \frac{1}{A(h_{j+i})} - \frac{1}{A} - \sum_{k=1}^s \tilde{\alpha}_k \phi_k(h_{j+i}) \right] + \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j \frac{1}{A} + \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j \left( \sum_{k=1}^s \tilde{\alpha}_k \phi_k(h_{j+i}) \right) - \\ & \frac{1}{A} = \\ & = \sum_{k=1}^s \tilde{\alpha}_k \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j \phi_k(h_{j+i}) + \frac{1}{A} \left( \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j - 1 \right) + \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j R_s(h_{j+i}) \stackrel{5,3,11}{=} \\ & \quad \quad \quad = 0 \text{ por } 5.3.10 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=n+1}^s \tilde{\alpha}_k \left( \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j \phi_k(h_{j+i}) \right) + \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j R_s(h_{j+i})$$

es decir

$$A_n^j - \frac{1}{A} = \sum_{k=n+1}^s \tilde{\alpha}_k \left( \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j \phi_k(h_{j+i}) \right) + \sum_{i=0}^n \gamma_{ni}^j R_s(h_{j+i}).$$

◇

#### 5.4. Algoritmo Recursivo para $A_j^n$ . Algoritmo FS.

El método más simple y directo de computar  $A_j^n$  es resolver el sistema lineal (5.3.7). También es posible desarrollar algoritmos recursivos para el computo de todos los  $A_j^n$ . De hecho, dos son los algoritmos en la literatura; el primero fue presentado por Schneider [30] y es conocido como el *Algoritmo E*. El segundo fue presentado por Ford y Sidi [20], *Algoritmo FS*, con la propiedad de tener un menor coste computacional.

**Notación y definiciones:** Sea  $a$  una sucesión  $\{a(l)\}_{l=0}^{\infty}$ . Para todo  $k$ ,  $g_k$  sucesiones  $\{g_k(l)\}_{l=0}^{\infty}$ , denotamos a la sucesión  $1, 1, 1, 1, 1, \dots$  por  $I$ . Dada una sucesión arbitraria  $u_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  y unos enteros  $j \geq 0$ ,  $p \geq 0$  se define

$$|u_1(j)u_2(j)\dots u_p(j)| = \begin{vmatrix} u_1(j) & u_2(j) & \dots & u_p(j) \\ u_1(j+1) & u_2(j+1) & \dots & u_p(j+1) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_1(j+p-1) & \cdot & \dots & u_p(j+p-1) \end{vmatrix} \quad (5.4.1)$$



Sea ahora

$$f_p^j(b) = |g_1(j)g_2(j)\dots g_p(j)b(j)|.$$

Con esta notación reescribimos (5.3.8) de la siguiente forma

$$A_n^j = \frac{f_p^j(a)}{f_p^j(I)}.$$

Definimos

$$G_p^j = |g_1(j)g_2(j)\dots g_p(j)|, \quad p \geq 1, \quad (5.4.2)$$

$$G_0^j = 1,$$

y para un sucesión arbitraria  $b$  sea

$$\psi_p^j(b) = \frac{f_p^j(b)}{G_{p+1}^j}.$$

Ahora puedo reescribir (5.3.8) como

$$A_n^j = \frac{\psi_n^j(a)}{\psi_n^j(I)}. \quad (5.4.3)$$

El algoritmo FS computará  $A_p^j$  indirectamente a través de  $\psi_p^j$  por medio de varias sucesiones  $b$ .

**Teorema 8** Sea  $A$  una matriz cuadrada. Denotamos por  $A_{rs}$  a la matriz obtenida de suprimir la fila  $r$  y la columna  $s$  de  $A$ . Del mismo modo se denota  $A_{\tilde{r}\tilde{s}}$  a la matriz obtenida de suprimir las filas  $r, \tilde{r}$  y las columnas  $s, \tilde{s}$  de  $A$ . Dados  $r < \tilde{r}$  y  $s < \tilde{s}$  se tiene

$$\det(A) \det(A_{\tilde{r}\tilde{s}}) = \det(A_{rs}) \det(A_{\tilde{r}\tilde{s}}) - \det(A_{r\tilde{s}}) \det(A_{\tilde{r}s}) \quad (5.4.4)$$

Si  $A \in M_2(K) \Rightarrow (5.4.4)$  se cumple con  $A_{\tilde{r}\tilde{s}} = 1$ .

Aplicando el teorema a los determinantes  $f_p^j(b)$ , (tamaño  $(p+1)$ ) con  $r = 1, s = p, \tilde{r} = \tilde{s} = p+1$  tenemos

$$f_p^j(b) G_{p-1}^{j+1} = f_{p-1}^{j+1}(b) G_p^j - G_p^{j+1} f_{p-1}^j(b) \quad (5.4.5)$$

Así podemos obtener  $A_p^j$  indirectamente a través de  $\psi_p^j$  del siguiente modo recurrente

$$\begin{aligned} \psi_p^j(b) &\stackrel{5.4.3}{=} \frac{f_p^j(b)}{G_{p+1}^j} \stackrel{5.4.5}{=} \frac{\frac{f_{p-1}^{j+1}(b) G_p^j - G_p^{j+1} f_{p-1}^j(b)}{G_{p-1}^{j+1}}}{G_{p+1}^j} = \frac{f_{p-1}^{j+1}(b) G_p^j - G_p^{j+1} f_{p-1}^j(b)}{\frac{G_{p+1}^j G_{p-1}^{j+1}}{G_p^j G_p^{j+1}}} = \\ &= \frac{\frac{f_{p-1}^{j+1}(b)}{G_p^{j+1}} - \frac{f_{p-1}^j(b)}{G_p^j}}{D_p^j} = \frac{\psi_{p-1}^{j+1}(b) - \psi_{p-1}^j(b)}{D_p^j} \end{aligned}$$

Hemos denotado  $D_p^j = \frac{G_{p+1}^j G_{p-1}^{j+1}}{G_p^j G_p^{j+1}}$  así

$$\psi_p^j(b) = \frac{\psi_{p-1}^{j+1}(b) - \psi_{p-1}^j(b)}{D_p^j} \quad (5.4.6)$$

Desde (5.4.3) hasta (5.4.6) observamos que una vez conocido  $D_p^j \rightarrow \psi_p^j(I), \psi_p^j(a) \Rightarrow A_n^j$  puede ser computado recurrentemente. Se trata entonces de desarrollar un algoritmo eficiente para determinar  $D_p^j$ .

En ausencia de detalles del conocimiento de  $g_k(l) = \phi_k(h_l)$ , tal y como estamos asumiendo en el capítulo, podemos proceder de la siguiente forma:

Como  $G_{p+1}^j = f_p^j(g_{p+1})$  con  $b = g_{p+1} \Rightarrow \psi_p^j(g_{p+1}) = 1$ . En consecuencia (5.4.6) pasa a ser

$$D_p^j = \psi_{p-1}^{j+1}(b) - \psi_{p-1}^j(b) \quad (5.4.7)$$

Lo que nos permite una evaluación recursiva de  $D_p^j$  a través de  $\psi_p^j(g_k)$ ,  $k \geq p + 1$ .

**Nota**  $\psi_p^j(g_k) = \frac{f_p^j(g_k)}{G_{p+1}^j} = \frac{|g_1(j)g_2(j)\dots g_p(j)g_k|}{G_{p+1}^j} = 0$  para  $k = 1, 2, \dots, p$ .

Así (5.4.6) y (5.4.7) nos proporciona un procedimiento recursivo (algoritmo FS) para resolver el problema de extrapolación general de este capítulo.

**Algoritmo FS**

1. Para  $j = 0, 1, 2, \dots$  sea

$$\psi_0^j(a) = \frac{a(j)}{g_1(j)}, \quad \psi_0^j(I) = \frac{1}{g_1(j)}, \quad \psi_0^j(g_k) = \frac{g_k(j)}{g_1(j)} \quad \text{para } k = 2, 3, \dots$$

2. Para  $j = 0, 1, 2, \dots$  y para  $p = 1, 2, \dots$

$$D_p^j = \psi_{p-1}^{j+1}(g_{p+1}) - \psi_{p-1}^j(g_{p+1})$$

y se computa  $\psi_p^j(b)$  con  $b = a, I, g_k$   $k = p + 2, p + 3, \dots$

$$\text{mediante } \psi_p^j(b) = \frac{\psi_{p-1}^{j+1}(b) - \psi_{p-1}^j(b)}{D_p^j}$$

$$\text{Por último sea } A_p^j = \frac{\psi_p^j(a)}{\psi_p^j(I)}$$

### *Caso práctico*

Vamos a ver este algoritmo para el caso sencillo en el que  $s = 1$ .

$$\frac{1}{A(h)} = \frac{1}{A} - \frac{\alpha_1}{A^2} \phi_1(h) + O(\phi_2(h))$$

$$h \longrightarrow 0$$

$$h_m, m = 0, 1.$$

$$h_0, h_1,$$

Dado  $\frac{1}{A(h)}$  como el descrito en (5.3.7) para  $s=1$ . Sea  $\{h_n\}_n \subset (0, b]$  una

sucesión decreciente con  $b > 0$ .

Se define la aproximación  $A^0$  a  $\frac{1}{A(h)}$  a través del sistema lineal

$$\frac{1}{A(h_0)} = A^0 + \tilde{\beta}_1 \phi_1(h_0)$$

$$\frac{1}{A(h_1)} = A^0 + \tilde{\beta}_1 \phi_1(h_1)$$

$$\text{entonces } A^0 = \frac{\begin{vmatrix} \phi_1(h_0) & \frac{1}{A(h_0)} \\ \phi_1(h_1) & \frac{1}{A(h_1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_1(h_0) & 1 \\ \phi_1(h_1) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\phi_1(h_0)}{A(h_1)} - \frac{\phi_1(h_1)}{A(h_0)}}{\phi_1(h_0) - \phi_1(h_1)}$$

Si aplicamos el algoritmo FS

1. Para  $j = 0, 1$

$$\bullet \psi_0^j(a) = \frac{a(j)}{g_1(j)}$$

$$\psi_0^0(a) = \frac{a(0)}{g_1(0)} = \frac{\frac{1}{A(h_0)}}{\phi_1(h_0)}$$

$$\psi_0^1(a) = \frac{a(1)}{g_1(1)} = \frac{\frac{1}{A(h_1)}}{\phi_1(h_1)}$$

$$\bullet \psi_0^j(I) = \frac{1}{g_1(j)}$$

$$\psi_0^0(I) = \frac{1}{g_1(0)} = \frac{1}{\phi_1(h_0)}$$

$$\psi_0^1(I) = \frac{1}{g_1(j)} = \frac{1}{\phi_1(h_1)}$$

$$\bullet \psi_0^j(g_k) = \frac{g_k(j)}{g_1(j)} \text{ para } k = 2, 3, \dots$$

$$\psi_0^0(g_2) = \frac{g_2(0)}{g_1(0)} = \frac{\phi_2(h_0)}{\phi_1(h_0)}$$

$$\psi_0^1(g_2) = \frac{g_2(1)}{g_1(1)} = \frac{\phi_2(h_1)}{\phi_1(h_1)}$$

$$\psi_0^2(g_2) = \frac{g_2(2)}{g_1(2)} = \frac{\phi_2(h_2)}{\phi_1(h_2)}$$

2. Para  $j = 0, 1, 2, \dots, p = 1, 2, \dots$

$$D_p^j = \psi_{p-1}^{j+1}(g_{p+1}) - \psi_{p-1}^j(g_{p+1})$$

y se computa  $\psi_p^j(b)$  con  $b = a, I, g_k \quad k = p+2, p+3, \dots$

$$\text{mediante } \psi_p^j(b) = \frac{\psi_{p-1}^{j+1}(b) - \psi_{p-1}^j(b)}{D_p^j}$$

$$\text{Por último sea } A_p^j = \frac{\psi_p^j(a)}{\psi_p^j(I)}$$

Así por ejemplo

$$A_1^0 = \frac{\psi_1^0(a)}{\psi_1^0(I)}$$

$$\psi_1^0(a) = \frac{\psi_0^1(a) - \psi_0^0(a)}{D_1^0}$$

$$\text{donde } D_1^0 = \psi_0^1(g_2) - \psi_0^0(g_2) = \frac{\phi_2(h_1)}{\phi_1(h_1)} - \frac{\phi_2(h_0)}{\phi_1(h_0)}$$

así

$$\psi_1^0(a) = \frac{\psi_0^1(a) - \psi_0^0(a)}{D_1^0} = \frac{\frac{1}{A(h_1)} - \frac{1}{A(h_0)}}{\frac{\phi_1(h_1)}{\phi_2(h_1)} - \frac{\phi_1(h_0)}{\phi_2(h_0)}} = \frac{\frac{1}{A(h_1)} - \frac{1}{A(h_0)}}{\frac{\phi_1(h_1)}{1} - \frac{\phi_1(h_0)}{1}}$$

$$\psi_1^0(I) = \frac{\psi_0^1(I) - \psi_0^0(I)}{D_1^0} = \frac{\frac{1}{A(h_1)} - \frac{1}{A(h_0)}}{\frac{\phi_1(h_1)}{\phi_2(h_1)} - \frac{\phi_1(h_0)}{\phi_2(h_0)}} = \frac{\frac{1}{A(h_1)} - \frac{1}{A(h_0)}}{\frac{\phi_1(h_1)}{1} - \frac{\phi_1(h_0)}{1}}$$

y con ello

$$A_1^0 = \frac{\psi_1^0(a)}{\psi_1^0(I)} = \frac{\frac{\frac{1}{A(h_1)} - \frac{1}{A(h_0)}}{\frac{\phi_1(h_1)}{\phi_2(h_1)} - \frac{\phi_1(h_0)}{\phi_2(h_0)}}}{\frac{\frac{1}{A(h_1)} - \frac{1}{A(h_0)}}{\frac{\phi_1(h_1)}{1} - \frac{\phi_1(h_0)}{1}}} = \frac{\frac{1}{A(h_1)} - \frac{1}{A(h_0)}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{1}} = \frac{\frac{1}{A(h_1)}\phi_1(h_0) - \frac{1}{A(h_0)}\phi_1(h_1)}{\frac{\phi_1(h_1)\phi_1(h_0)}{\phi_1(h_0) - \phi_1(h_1)}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{A(h_1)}\phi_1(h_0) - \frac{1}{A(h_0)}\phi_1(h_1)}{\phi_1(h_0) - \phi_1(h_1)}$$

Que coincide con la solución del determinante.

Hemos querido desarrollar el algoritmo FS en este caso particular para hacer notar que el algoritmo FS no es más que algoritmo de cálculo recursivo para el cálculo del cociente de determinantes (5.3.8).

## 5.5. Ejemplos numéricos, estabilidad y conclusiones

Vamos a resolver el problema Test

$$y' = \lambda y,$$

$$y(0) = 1,$$

cuya solución es conocida. Por sencillez, analogía y comparación a los métodos numéricos clásicos vamos a considerar la siguiente modificación del método de Euler.

Como la solución al problema Test es  $A = y(x) = \exp(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!}$

planteamos la aproximación

$$F(h) = 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2}{2} h \operatorname{sen}(h) + \frac{\lambda^2 h^2}{2!}. \quad (5.5.1)$$

Calculamos el error local

$$F(h) - A = \frac{\lambda^2}{2} h \operatorname{sen}(h) - \frac{\lambda^3 h^3}{3!} - \dots$$

Así

$$F(h) = A + [F(h) - A] = A + \frac{\lambda^2}{2} h \operatorname{sen}(h) + O(h^3),$$

que satisface (5.2.1) con  $s = 1$ . Tenemos entonces

$$F(h) = A + \alpha_1 \phi_1(h) + O(\phi_2(h)),$$

donde  $\phi_1(h) = h \operatorname{sen}(h)$  y  $O(\phi_2(h)) = O(h^3)$ .

que cumple  $\phi_2(h) = o(\phi_1(h))$

$$\frac{h^3}{\frac{\lambda^2}{2} h \operatorname{sen}(h)} = \frac{2h^3}{\lambda^2 h \operatorname{sen}(h)} = \frac{2h^2}{\lambda^2 \operatorname{sen}(h)} \stackrel{L'H}{=} \frac{4h}{\lambda^2 \cos(h)} \rightarrow 0 \text{ si } h \rightarrow 0,$$

además de la condición adicional exigida  $\phi_1^2(h) = O(\phi_2(h))$  a la extrapolación polinómica recíproca ya que

$$\frac{h^2 \operatorname{sen}^2(h)}{h^3} = \frac{\operatorname{sen}^2(h)}{h} \stackrel{L'H}{=} \frac{2 \operatorname{sen}(h) \cos(h)}{1} \rightarrow 0$$

De modo que también podemos considerar

$$\frac{1}{F(h)} = \frac{1}{A} + \tilde{\alpha}_1 \phi_1(h) + O(\phi_2(h))$$

y resolver el sistema para diferentes valores de  $h$ .

Usaremos distintos valores de  $\lambda$  y distintas discretizaciones. Realizaremos las extrapolaciones tomando las discretizaciones de tamaño  $h, 2h$ . Mostraremos los errores con el método de Euler, con el nuevo método y realizaremos las extrapolaciones de la primera generalización de Richardson y de la primera generalización recíproca. Ambas extrapolaciones aplicadas al nuevo método de Euler presentado.



5.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS, ESTABILIDAD Y CONCLUSIONES 147

Datos de entrada	Met. Euler	Met. Modi	1ª GenRich	1ª GenReci
$\lambda = -1, h = 0,02$	$3,70e - 3$	$3,79e - 3$	$2,43e - 4$	$2,20e - 4$
$\lambda = -1, h = 0,01$	$1,84e - 3$	$1,86e - 3$	$5,95e - 5$	$5,41e - 5$
$\lambda = -10, h = 0,1$	$4,53e - 5$	$9,91e - 1$	$2,38e + 2$	$5,02e - 3$
$\lambda = -10, h = 0,01$	$1,88e - 5$	$3,47e - 5$	$4,86e - 5$	$4,86e - 5$
$\lambda = -40, h = 0,01$	$4,24e - 18$	$1,20e - 12$	$1,63e - 4$	$1,63e - 4$
$\lambda = -80, h = 0,01$	$1,80e - 35$	$2,67e - 8$	$4,09e + 14$	$5,00e - 1$
$\lambda = -100, h = 0,01$	$3,72e - 44$	$9,99e - 1$	$7,16e + 23$	$4,66e - 4$
$\lambda = -100, h = 0,001$	$3,70e - 44$	$1,09e - 41$	$1,37e - 38$	$3,72e - 44$

En la tabla observamos que ambas generalizaciones cuando convergen son del mismo orden pero la generalización recíproca tiene una mayor región de estabilidad cuando el problema empieza a ser rígido.

Hemos fijado un  $h$  y movemos  $\lambda$  para aumentar la rigidez del problema ver el comportamiento numérico de las extrapolaciones. Para ello consideraremos el cociente  $\text{Log}(E1/E2)$ , siendo  $E2$  el error de la generalización recíproca y  $E1$  el error cometido con la generalización polinómica.

En la figura 1 hemos representado el cociente de los errores de las generalizaciones de Richardson y recíproca para el método de Euler modificado (5.5.1). Observamos como el comportamiento de la generalización recíproca es mejor conforme aumentan los valores de  $|\lambda|$ .

Por otro lado, en la figura 2 hemos representado el cociente de los errores de las generalizaciones de Richardson y recíproca para un método de Euler implícito modificado construido de manera análoga a (5.5.1). También

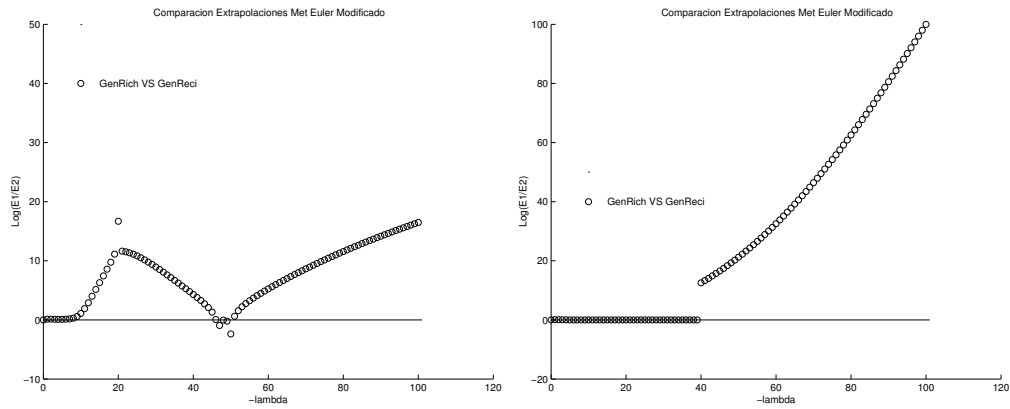


Figura 5.1: Error de la 1ª Gen. Richardson y la 1ª Gen. recíproca en el Método de Euler modificado. Izquierda:  $h=0.1$  .Derecha:  $h=0.01$

podemos ver la mejora significativa cuando nos encontramos problemas de rigidez.

La conclusión es que cuando el problema comienza a ser rígido, la primera generalización de la extrapolación polinómica recíproca tiene un mejor comportamiento.

5.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS, ESTABILIDAD Y CONCLUSIONES 149

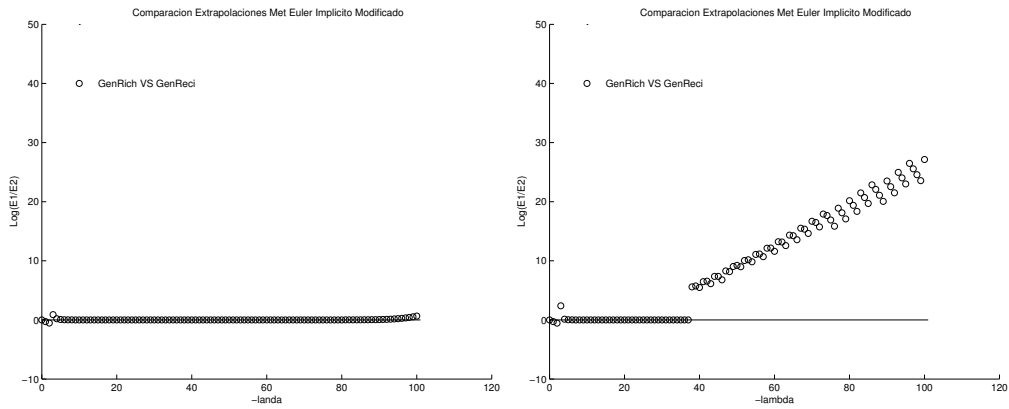


Figura 5.2: Error de la 1ª Gen. Richardson y la 1ª Gen. recíproca en el Método de Euler implícito modificado. Izquierda  $h=0.1$ . Derecha  $h=0.01$

Por último, para estudiar la estabilidad, consideramos la ecuación lineal

$$y' = \lambda y$$

Cuando usamos cualquier método Runge-Kutta, obtenemos la siguiente expresión

$$y_n = R(h\lambda)y_0 = R(z)y_0$$

donde  $R(z)$  nos dará la región de estabilidad.

$$\{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}.$$

Como podemos observar en la figura 3 la región de estabilidad es mayor cuando aplicamos la extrapolación recíproca generalizada y que la del propio

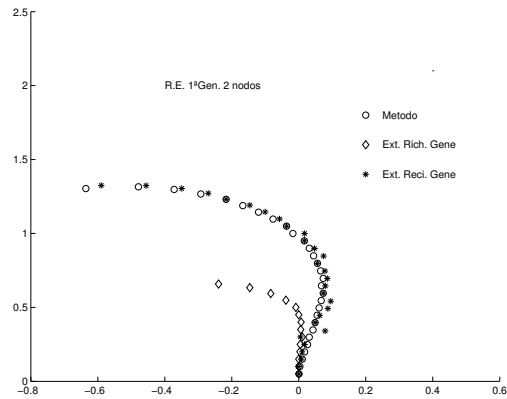


Figura 5.3: Regiones de estabilidad del método de Euler explícito modificado. Conjuntos acotados.

método, tal y como ocurría en las extrapolaciones no generalizadas revisadas en el capítulo 1. Si observamos las regiones de estabilidad del método de Euler implícito modificado (figura 5) y sus respectivas extrapolaciones generalizadas (figura 4) observamos cómo la extrapolación recíproca tiene también una región de estabilidad mayor que las del propio método y mayor que las resultantes de la primera generalización de la extrapolación de Richardson.

En definitiva, podemos concluir que la primera generalización recíproca sigue teniendo unas buenas propiedades numéricas frente a la primera generalización de Richardson cuando nos encontramos problemas de rigidez. Por lo tanto será nuestra primera elección pues además aumentan sensiblemente las regiones de estabilidad.

5.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS, ESTABILIDAD Y CONCLUSIONES 151

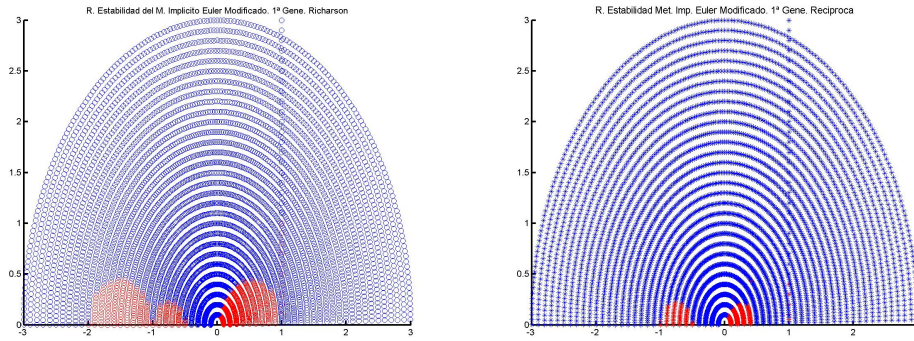


Figura 5.4: Regiones de estabilidad del método de Euler implícito modificado. Conjuntos no acotados. Izquierda: 1º Gen. Richardson. Derecha: 1ª Gen. recíproca

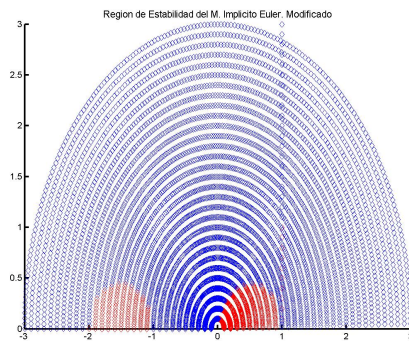


Figura 5.5: Región de estabilidad del Método de Euler implícito modificado



# Capítulo 6

## Una adaptación wavelet del Método de Newton 2 pasos

### 6.1. Introducción

El estudio de los ceros de la ecuación no lineal  $F(x) = 0$  es un problema clásico en matemáticas. Estas raíces, en general, no pueden ser expresadas con los esquemas iterativos que se suelen considerar. Partiendo de una raíz inicial  $x_0$ , las aproximaciones sucesivas (hasta que se cumpla algún criterio de convergencia)  $x_n$  se van computando,  $n = 1, 2, \dots$ , con la ayuda de una determinada función iterativa  $\Phi : X \rightarrow X$ ,

$$x_{n+1} := \Phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

En el presente capítulo, estamos interesados en el siguiente procedimiento

$$\begin{aligned}x_{n+\frac{1}{2}} &= x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n) \\x_{n+1} &= x_{n+\frac{1}{2}} - F'(x_n)^{-1}F(x_{n+\frac{1}{2}}).\end{aligned}\tag{6.2}$$

El método es atractivo porque converge más rápido que el esquema de Newton clásico con sólo una evaluación más de la función por paso y el operador lineal  $F'(x_n)$  (derivada de Fréchet) es el mismo en ambos pasos (sólo requiere una descomposición LU en cada iteración).

Por otro lado, las nuevas investigaciones en wavelets y aproximaciones no lineales [19] han proporcionado nuevas herramientas para construir eficientes esquemas adaptados para la aproximación numérica de varios problemas [11]-[12]-[13]-[15]-[17]-[33]. La idea básica es refinar, en cada paso, la discretización sólo en los lugares donde el comportamiento de la solución requiera una alta resolución, de modo que el error se compensa en todo el dominio en el que el problema está definido.

Dada una base de wavelet  $L^2(\Omega)$ ,  $\{\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ , definimos el espacio no lineal

$$\Sigma_N = \left\{ u = \sum_{\lambda} u_{\lambda} \psi_{\lambda} : \bar{u} = \{u_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda} \in \sigma_N \right\}$$

con  $\sigma_N = \{ \bar{u} \in l^2(\Lambda) : \#\{\lambda \in \Lambda : u_{\lambda} \neq 0\} \leq N \}$ . Esto es, el espacio de



todas las combinaciones de  $N$ .

El operador proyección no lineal asociado  $\mathbb{P}_N : H^s(\Omega) \rightarrow \Sigma_N$  minimiza el error  $\|u - \mathbb{P}_N u\|_{H^s}$  en la norma equivalente  $H^s(\Omega)$ . La velocidad de convergencia está relacionado a la regularidad de Besov. Este tipo de resultados dan un significado matemático a las propiedades de adaptación espacial de estas aproximaciones no lineales.

El objetivo de este capítulo es aplicar la aproximación no lineal wavelet para diseñar una versión adaptada del método de Newton del esquema iterativo de dos pasos (6.2). Estas ideas del método clásico de Newton fueron estudiadas en [33]. Presentamos también dos teoremas de convergencia local y semilocal usando ideas provenientes de [18] y [29].

## 6.2. Aproximación no lineal wavelet

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio de Lipschitz. Denotaremos  $I_\delta^\alpha(v)$  ( $I_\delta^\alpha(\underline{v})$ ) el círculo de centro  $v \in H^\alpha(\Omega)$  ( $\underline{v} \in l^\alpha$ ) y radio  $\delta$  en la topología  $H^\alpha(\Omega)$  ( $l^\alpha$ ). Con la siguiente notación  $A \lesssim B$  indicaremos que la cantidad  $A$  está superiormente acotada por una constante positiva  $B$ , y también usaremos  $A \simeq B$  cuando ambas desigualdades  $A \lesssim B$  y  $B \lesssim A$  se cumplan.

Supongamos que tenemos una base de Riesz  $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $\Lambda = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Lambda_j$ , de

$L^2(\Omega)$ , tal que para algún  $\rho > 1$ , la siguiente equivalencia es válida para todo  $s, p, q$ ,  $0 \leq s \leq S$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $q > 0$ :

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda \psi_\lambda \right\|_{B_{p,q}^s(\Omega)}^q \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{q(s+n/2-n/p)j} \left( \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |u_\lambda|^p \right)^{q/p}. \quad (6.3)$$

( $\lambda \in \Lambda_j \leftrightarrow (\text{supp} \psi_\lambda \sim 2^{-j})$ ), ver [12], [17].

De la equivalencia (6.3) deducimos que, para todo  $s$ ,  $0 \leq s \leq S$ ,

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} u_\lambda (2^{-js} \psi_\lambda) \right\|_{H^s(\Omega)} \simeq \|\underline{u}\|_{l^2(\Lambda)} \quad (6.4)$$

donde  $\underline{u} = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ .

Recordemos ahora que el espacio no lineal  $\Sigma_N \subset L^2(\Omega)$ ,

$$\Sigma_N = \left\{ v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda \psi_\lambda : \underline{v} = \{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \sigma_N \right\}, \quad (6.5)$$

contiene todas las funciones de  $L^2(\Omega)$ , cuyos coeficientes de wavelet pertenecen al conjunto

$$\sigma_N = \{ \underline{v} \in l^2(\Lambda) : \#\{\lambda \in \Lambda : v_\lambda \neq 0\} \leq N \}$$

de secuencias con un máximo de  $N$  elementos distintos de cero. El conjunto  $\Sigma_N$  contiene las funciones de  $L^2(\Omega)$ , que pueden ser expresadas como una combinación lineal de como máximo  $N$  wavelets.

Un proyector no lineal

$$\mathbb{P}_N : H^s(\Omega) \rightarrow \Sigma_N$$

puede construirse como sigue: dado  $u = \sum_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda \psi_\lambda$ , ordenamos la secuencia  $\{|u_\lambda|_{\lambda \in \Lambda}\}$  en orden decreciente. Denotamos  $\{|u_{\lambda(k)}|\}_{k \in \mathbb{N}}$  el coeficiente de rango  $k$ ,

$$|u_{\lambda(k)}| \geq |u_{\lambda(k+1)}|$$

con  $k \geq 1$ .

Por lo tanto, la imagen  $\mathbb{P}_N(u)$  se define

$$\mathbb{P}_N(u) = \sum_{k=1}^N u_{\lambda(k)} \psi_{\lambda(k)}.$$

También indicaremos por  $\mathbb{P}_N : l^2(\Lambda) \rightarrow \sigma$  el operador de las secuencias.

La precisión está relacionada con  $l^\tau(\Lambda)$  regularidad de la secuencia [19].

**Teorema 9** Si  $\underline{u} = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in l^\tau(\Lambda)$ , con  $0 < \tau < 2$ , entonces

$$\inf_{\underline{w} \in \sigma_N} \|\underline{u} - \underline{w}\|_{l^2(\Lambda)} \lesssim \|\underline{u} - \mathbb{P}_N(\underline{u})\| \lesssim N^{-(1/\tau-1/2)} \|\underline{u}\|_{l^\tau(\Lambda)},$$

donde la constante implícita en los límites depende sólo de  $\tau$ .

La  $N$ -aproximación no lineal está relacionada con la regularidad de Besov como la aproximación lineal a la regularidad de Sobolev.

### 6.3. Adaptación inexacta del esquema iterativo

Sea  $U$  un subconjunto abierto de un espacio de Sobolev  $H^s(\Omega)$ ,  $s < S$ .

Consideramos

$$F : U \subset H^s(\Omega) \rightarrow F(U) \subset H^t(\Omega), \quad t < S. \quad (6.6)$$

Nos gustaría aproximar una solución  $u^*$  de la ecuación  $F(u) = 0$ . Para esto, usaremos la versión adaptada wavelet del método de dos pasos (6.2).

Supongamos que  $F$  satisface lo siguiente:

- 1)  $F$  restringido a espacios más regulares, preserva cierta regularidad. Para algún  $r > 0$ , se cumple que

$$F_{U \cap B_{\tau,\tau}^{s+r}(\Omega)} : U \cap B_{\tau,\tau}^{s+r}(\Omega) \rightarrow B_{\tau,\tau}^{t+r}(\Omega), \quad s, t < S,$$

donde  $0 < \tau < 2$  es tal que  $1/\tau = r/d + 1/2$ .

- 2) Por último, supondremos que la solución  $u^*$  pertenece a  $U \cap B_{\tau,\tau}^{s+r}(\Omega)$ .

Del Teorema 9, usando las equivalencias (6.3)-(6.4), y la suposición  $u^*$  pertenece a  $U \cap B_{\tau,\tau}^{s+r}(\Omega)$ , se sigue que

$$\|u^* - \mathbb{P}_N(u^*)\|_{H^s(\Omega)} \lesssim N^{-(1/\tau-1/2)} \|u^*\|_{B_{\tau,\tau}^{s+r}(\Omega)}. \quad (6.7)$$

Fijado un número  $M$  de grados de libertad, deseamos obtener una aproximación

$$u_M^* \in \Sigma_N.$$

Para lograr este objetivo, primero trasladamos la ecuación original en términos de los coeficientes de wavelet, descompondremos la función  $u$  y  $F(u)$  como

$$u \in H^s(\Omega), \quad u = \sum_{\lambda} u_{\lambda} \tilde{\psi}_{\lambda}, \quad \text{con } \tilde{\psi}_{\lambda} = 2^{-js} \psi_{\lambda}, \quad (6.8)$$

$$F(u) \in H^t(\Omega), \quad u = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \hat{\psi}_{\lambda}, \quad \text{con } \hat{\psi}_{\lambda} = 2^{-jt} \psi_{\lambda}, \quad (6.9)$$

y consideramos una versión discreta  $\mathcal{F}$  de  $F$ , como sigue:

$$\mathcal{F} : \underline{u} = \{u_{\lambda}\} \rightarrow \mathcal{F}(\underline{u}) := \underline{f} = \{f_{\lambda}\}. \quad (6.10)$$

De la equivalencia (6.4), la región  $\mathcal{F}$  resulta ser una correspondencia entre  $l^2(\Lambda)$  espacios,

$$\mathcal{F} : D \subset l^2(\Lambda) \rightarrow l^2(\Lambda), \quad (6.11)$$

y usando la equivalencia (6.3), la asunción 1) implica que  $\mathcal{F}$  restringida a un espacio más regular, preserva esa regularidad,

$$\mathcal{F}_{D \cap l^{\tau}(\Lambda)} : D \cap l^{\tau}(\Lambda) \rightarrow l^{\tau}(\Lambda),$$

con  $0 < \tau < 2$  ya que  $1/\tau = r/d + 1/2$ .

Entonces resolver  $\mathcal{F}(\underline{u}) = \underline{0}$  es equivalente a resolver  $F(u) = 0$ .

Como  $u^*$  es desconocido en nuestro problema, no tenemos acceso a  $\mathbb{P}_N(u^*)$  exacto. Usando el método de dos pasos nos gustaría construir una aproximación  $\underline{u}_M^* \in \sigma_N$  a  $u^*$ , tal que  $\underline{u}_M^*$  se comporte casi tan bien como  $\mathbb{P}_N(u^*)$ .

**Comienzo**  
**entrada:**  $M, \underline{u}_0, n = 0$   
**repetir los siguientes pasos**  
**elejir**  $N_{n+\frac{1}{2}}$   
**computar**  $\bar{\mathcal{A}}_n$  **aproximación de**  $\mathcal{F}'(\underline{u}_n)$   
**computar**  $\bar{\mathcal{F}}_n$  **aproximación de**  $\mathcal{F}(\underline{u}_n)$   
**fijar**  $\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{P}_{N_{n+\frac{1}{2}}}(\underline{u}_n - \bar{\mathcal{A}}_n^{-1} \bar{\mathcal{F}}_n)$   
**elejir**  $N_{n+1}$   
**computar**  $\bar{\mathcal{F}}_{n+\frac{1}{2}}$  **aproximación de**  $\mathcal{F}(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}})$   
**fijar**  $\underline{u}_{n+1} = \mathbb{P}_{N_{n+1}}(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathcal{A}}_n^{-1} \bar{\mathcal{F}}_{n+\frac{1}{2}})$   
**actualizar**  $n + 1 \rightarrow n$   
**hasta**  $N_n = M$   
**salida:**  $\tilde{\underline{u}} = \underline{u}_n$   
**Fin**

Figura 6.1: Esquema iterativo de dos pasos adaptado

En nuestra aproximación, cada iteración  $n$ , forzamos que la aproximación pertenezca al espacio no lineal  $\sigma_{N_{n+1}}$ , donde  $N_{n+1}$  está relacionado con la precisión de la aproximación del paso anterior. Introducimos en el algoritmo dos fuentes de inexactitudes:  $\bar{\mathcal{A}}_n$  denotará la aproximación a  $\mathcal{F}'_n := \mathcal{F}'(\underline{u}_n)$  y  $\bar{\mathcal{F}}_n$  y  $\bar{\mathcal{F}}_{n+\frac{1}{2}}$  aproximaciones a  $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}(\underline{u}_n)$  y  $\mathcal{F}_{n+\frac{1}{2}} := \mathcal{F}(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}})$ , respectivamente. El método se da en la figura 6.1.

La idea anterior de los mejores  $N$ -términos aproximaciones no supone restricciones sobre la distribución de los coeficientes significativos. Las singularidades en la solución provocan que los coeficientes significativos de wavelet estén dispuestos como unas estructuras de árbol. La ventaja de considerar una estructura de árbol está en los cálculos (determinar el mejor árbol es mucho más difícil) y el almacenamiento (no es necesario mantener la ubicación de todos los  $N$ -términos). Por otro lado, las restricciones de la aproximación árbol tiene bajo coste en términos de velocidad de aproximación.

Con el fin de obtener métodos no lineales adaptados, una posibilidad es buscar esquemas iterativos de aproximación en los que, por definición, las iteradas pertenezcan al espacio  $\Sigma_N^{tree}$ .

Cuando una estructura de árbol se impone a indexación de intervalos emparejados, los coeficientes se utilizan para la aproximación, la información sobre la dirección de los coeficientes, es decir, sobre a que intervalos pertenecen del árbol, es un número de bits proporcional a la cardinalidad del árbol. Por otro lado, estamos imponiendo más limitaciones en aproximaciones aceptables, por lo que tendremos que pagar un precio en forma de aumento de error de la aproximación, en comparación con aproximaciones más generales usando el mismo número de coeficientes. Como alternativa, podemos comen-

zar con una aproximación no lineal general y añadir todos los coeficientes necesarios para garantizar que el total de la colección de índices de intervalos emparejados constituyan un árbol. En cualquier caso, los coeficientes wavelet tienen por definición una estructura similar a un árbol.

Ver [14] para más detalles.

### 6.3.1. Análisis del esquema

En primer lugar, ponemos el esquema, ver figura 6.2, como un esquema iterativo inexacto de dos pasos. Para lo que definimos

$$\underline{r}_n = \mathcal{F}_n - \mathcal{F}'_n(\underline{u}_n - \mathbb{P}_{N_{n+\frac{1}{2}}}(\underline{u}_n - \bar{\mathcal{A}}_n^{-1}\bar{\mathcal{F}}_n))$$

y

$$\underline{r}_{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{F}_{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}'_n(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{P}_{N_{n+1}}(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathcal{A}}_n^{-1}\bar{\mathcal{F}}_{n+\frac{1}{2}})).$$

En términos generales, cuando  $\underline{u}_n$  está lejos de la solución de  $\mathcal{F}(\underline{u}) = \underline{0}$ , podemos realizar el paso del esquema usando términos perturbados de alto orden( $r_n, r_{n+1/2}$ ), utilizando en su lugar una perturbación menor cuando  $\underline{u}_n$  está cerca.

La ventaja de la reformulación del método inexacto de dos pasos, es que podemos adaptar los teoremas conocidos para los métodos de Newton inexactos para probar la convergencia [18], [29]. Por otro lado, nos gustaría men-



<p><b>Comienzo</b>  <b>entrada:</b> <math>M, \underline{u}_0, n = 0</math>  <b>repetir los siguientes pasos</b>  <b>elegir</b> <math>\underline{r}_n</math>  <b>encontrar</b> <math>\underline{s}_n</math> tal que  <math display="block">\mathcal{F}'_n \underline{s}_n = -\mathcal{F}_n + \underline{r}_n</math>  <b>fijar</b> <math>\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} = \underline{u}_n + \underline{s}_n</math>  <b>elejir</b> <math>\underline{r}_{n+\frac{1}{2}}</math>  <b>encontrar</b> <math>\underline{s}_{n+\frac{1}{2}}</math> tal que  <math display="block">\mathcal{F}'_n \underline{s}_{n+\frac{1}{2}} = -\mathcal{F}_{n+\frac{1}{2}} + \underline{r}_{n+\frac{1}{2}}</math>  <b>fijar</b> <math>\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_{n+\frac{1}{2}} + \underline{s}_{n+\frac{1}{2}}</math>  <b>actualizar</b> <math>n + 1 \rightarrow n</math>  <b>hasta</b> <math>N_n = M</math>  <b>Fin</b></p>
--

Figura 6.2: Esquema iterativo de dos pasos como un método de dos pasos inexacto

cionar que no hemos encontrado ningún artículo en la literatura que analice la convergencia del método de Newton inexacto como nuestro esquema.

Recordemos que la convergencia en  $l^\tau(\Lambda)$ ,  $0 < \tau < 2$ , implica la convergencia en  $l^2(\Lambda)$ . Sin embargo, en general podemos esperar que la convergencia  $l^2(\Lambda)$  sea más rápida que en  $l^\tau(\Lambda)$ .

Primero imponemos las *principales hipótesis* sobre  $\mathcal{F}$ :

- La ecuación  $\mathcal{F}(\underline{u}) = \underline{0}$  tiene una solución  $\underline{u}^*$ .
- $\mathcal{F}$  es continuamente diferenciable en un entorno de  $\underline{u}^*$ .

- $\mathcal{F}'(\underline{u}^*)$  es no singular.

Con estas hipótesis no es difícil probar los siguientes lemas (ver [28] para más detalles).

**Lema 1** *Para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\mathcal{F}'(\underline{u})$  es no singular y*

$$\|\mathcal{F}'(\underline{u})^{-1}\mathcal{F}'(\underline{u}^*)\| < \epsilon,$$

para  $\|\underline{u} - \underline{u}^*\| < \delta$ .

**Lema 2** *Para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\|\mathcal{F}(\underline{u}) - \mathcal{F}(\underline{u}^*) - \mathcal{F}'(\underline{u}^*)(\underline{u} - \underline{u}^*)\| \leq \epsilon\|\underline{u} - \underline{u}^*\|,$$

para  $\|\underline{u} - \underline{u}^*\| < \delta$ .

Vamos a considerar  $\eta_n, \eta_{n+\frac{1}{2}}$  tal que  $\frac{\|r_n\|}{\|\mathcal{F}_n\|} \leq \eta_n$  y  $\frac{\|r_{n+\frac{1}{2}}\|}{\|\mathcal{F}_{n+\frac{1}{2}}\|} \leq \eta_{n+\frac{1}{2}}$ , respectivamente.

**Teorema 10** *(Convergencia local) Asumimos que  $\eta_n, \eta_{n+\frac{1}{2}} \leq \eta_{\text{máx}} < \nu < 1$  y que las principales hipótesis anteriores  $\mathcal{F}$  se cumplen, entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que si  $\underline{u}_0 \in I_\epsilon^2(\underline{u}^*)$  entonces  $\{\underline{u}_n\}_n$  converge a  $\underline{u}^*$ . Además*

$$\|\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*\|_* \leq \nu\|\underline{u}_n - \underline{u}^*\|_*, \quad (6.12)$$

$$\|\underline{u}_{n+1} - \underline{u}^*\|_* \leq \nu\|\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*\|_*, \quad (6.13)$$

donde  $\|z\|_* := \|\mathcal{F}'(\underline{u}^*)z\|$ .

**Demostración:**

Como  $\mathcal{F}'(\underline{u}^*)$  es no singular

$$\frac{1}{\mu} \|\underline{u}\| \leq \|\underline{u}\|_* \leq \mu \|\underline{u}\|, \quad (6.14)$$

donde  $\mu := \max\{\|\mathcal{F}'(\underline{u}^*)\|, \|\mathcal{F}'(\underline{u}^*)^{-1}\|\}$ .

Como  $\eta_{\max} < \nu$ , existe  $\gamma > 0$  suficientemente pequeño tal que

$$(1 + \gamma\mu)(\eta_{\max}(1 + \gamma\mu) + 2\mu\gamma) \leq \nu.$$

Ahora, elegimos  $\epsilon$  suficientemente pequeño tal que

$$\|\mathcal{F}'(\underline{u}) - \mathcal{F}'(\underline{u}^*)\| \leq \gamma, \quad (6.15)$$

$$\|\mathcal{F}'(\underline{u})^{-1} - \mathcal{F}'(\underline{u}^*)^{-1}\| \leq \gamma, \quad (6.16)$$

$$\|\mathcal{F}(\underline{u}) - \mathcal{F}(\underline{u}^*) - \mathcal{F}'(\underline{u}^*)(\underline{u} - \underline{u}^*)\| \leq \gamma \|\underline{u} - \underline{u}^*\|, \quad (6.17)$$

si  $\|\underline{u} - \underline{u}^*\| \leq \mu^2 \epsilon$ . Tal epsilon existe en virtud de la continuidad de  $\mathcal{F}'$  en  $u^*$

y los dos lemas previos.

Supongamos que  $\|\underline{u}_0 - \underline{u}^*\| \leq \epsilon$ . Probamos (6.12)-(6.13) por inducción.

Observar que, por (6.14), la hipótesis de inducción y otra vez (6.14), tenemos

$$\begin{aligned}
 \|\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*\| &\leq \mu \|\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*\|_* \\
 &\leq \mu \nu^{2n+1} \|\underline{u}_0 - \underline{u}^*\|_* \\
 &\leq \mu^2 \|\underline{u}_0 - \underline{u}^*\| \\
 &\leq \mu^2 \epsilon,
 \end{aligned}$$

análogamente

$$\begin{aligned}
 \|\underline{u}_{n+1} - \underline{u}^*\| &\leq \mu \|\underline{u}_{n+1} - \underline{u}^*\|_* \\
 &\leq \mu \nu^{2n+2} \|\underline{u}_0 - \underline{u}^*\|_* \\
 &\leq \mu^2 \|\underline{u}_0 - \underline{u}^*\| \\
 &\leq \mu^2 \epsilon,
 \end{aligned}$$

de modo que (6.15)-(6.17) se cumple con  $\underline{u} = \underline{u}_{n+\frac{1}{2}}$  y  $\underline{u} = \underline{u}_{n+1}$ .

Además, el método inexacto de Newton de dos pasos está definido

$$\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} = \underline{u}_n + \underline{s}_n,$$

donde  $\mathcal{F}'_n \underline{s}_n = -\mathcal{F}_n + \underline{r}_n$ , y

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_{n+\frac{1}{2}} + \underline{s}_{n+\frac{1}{2}},$$

donde  $\mathcal{F}'_n \underline{s}_{n+\frac{1}{2}} = -\mathcal{F}_{n+\frac{1}{2}} + \underline{r}_{n+\frac{1}{2}}$ .

Analicemos  $\|\underline{u}_{n+1} - \underline{u}^*\|_*$  (el análisis de  $\|\underline{u}_{n+1} - \underline{u}^*\|_*$  es similar).

Usando la definición de  $\mu$  y  $\underline{r}_{n+\frac{1}{2}}$ , (6.15), (6.16) y (6.17)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(\underline{u}^*)(\underline{u}_{n+1} - \underline{u}^*) &= (I + \mathcal{F}'(\underline{u}^*)(\mathcal{F}'(\underline{u}_n)^{-1} - \mathcal{F}'(\underline{u}^*)^{-1})) \\ &\quad (\underline{r}_{n+\frac{1}{2}} + (\mathcal{F}'(\underline{u}_n) - \mathcal{F}'(\underline{u}^*))(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*)) \\ &\quad - (\mathcal{F}(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(\underline{u}^*) - \mathcal{F}'(\underline{u}^*)(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*)). \end{aligned}$$

De este modo

$$\begin{aligned} \|\underline{u}_{n+1} - \underline{u}^*\|_* &\leq (1 + \|\mathcal{F}'(\underline{u}^*)\| \|\mathcal{F}'(\underline{u}_n)^{-1} - \mathcal{F}'(\underline{u}^*)^{-1}\|) \\ &\quad \|\underline{r}_{n+\frac{1}{2}}\| + \|\mathcal{F}'(\underline{u}_n) - \mathcal{F}'(\underline{u}^*)\| \|\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*\| \\ &\quad + \|\mathcal{F}(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(\underline{u}^*) - \mathcal{F}'(\underline{u}^*)(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*)\|. \end{aligned}$$

Partiendo de

$$\mathcal{F}(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}}) = \mathcal{F}'(\underline{u}^*)(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*) + (\mathcal{F}(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(\underline{u}^*) - \mathcal{F}'(\underline{u}^*)(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*)),$$

tomando normas,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}})\| &\leq \|\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*\|_* + \|\mathcal{F}(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(\underline{u}^*) - \mathcal{F}'(\underline{u}^*)(\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*)\| \\ &\leq \|\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*\|_* + \gamma \|\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*\|, \end{aligned}$$

usando (6.17).

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\underline{u}_{n+1} - \underline{u}^*\|_* &\leq (1 + \mu\gamma)(\eta_{n+\frac{1}{2}}(\|\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*\|_* + \gamma\|\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*\|) + 2\gamma\|\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*\|) \\ &\quad (1 + \mu\gamma)(\eta_{\text{máx}}(1 + \mu\gamma) + 2\mu\gamma)\|\underline{u}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^*\|, \end{aligned}$$

usando (6.14).

Y el siguiente teorema usa la definición de  $\gamma$ .

□

Ver [18] para más detalles.

### *Convergencia Semilocal*

De modo análogo, es posible adaptar los teoremas de carácter semilocal, esto es, con hipótesis sobre la estimación inicial. En este caso, las principales hipótesis deberían ser

- $\mathcal{F}$  es continuamente diferenciable en un entorno de la estimación inicial  $\underline{u}_0$ .
- $\mathcal{F}(\underline{u}_0)$  es suficientemente pequeña.
- $\mathcal{F}'(\underline{u}_0)$  es no singular.
- $\|\mathcal{F}'(\underline{u}_0)^{-1}(\mathcal{F}'(\underline{w}) - \mathcal{F}'(\underline{u}))\| \leq \gamma\|\underline{w} - \underline{u}\|$  en un entorno de  $\underline{u}_0$ .

Ver [29] para más detalles.

# Capítulo 7

## Conclusiones

Tras revisar un estudio comparativo de la extrapolación polinómica, racional y la extrapolación polinómica recíproca, donde hemos visto el buen comportamiento para una ecuación escalar rígida, hemos presentado un nuevo algoritmo para la extrapolación polinómica recíproca en virtud de las traslaciones motivadas por su interpretación geométrica.

Se ha analizado el comportamiento de la extrapolación polinómica recíproca para resolver numerosos tipos de sistemas de ecuaciones diferenciales. En general, podemos concluir que nuestra extrapolación no lineal tiene un mejor comportamiento a medida que aumentamos la rigidez del problema, para medir esta rigidez hemos calculado los coeficientes de rigidez de los sistemas estudiados.

Se ha estudiado el comportamiento de la extrapolación polinómica recípro-

ca para resolver problemas de valores frontera, comprobando el mejor comportamiento ante problemas rígidos. En concreto en la resolución de problemas perturbados rígidos (problemas singulares) tanto con discretizaciones uniformes como no uniformes nuestra extrapolación no lineal vuelve a tener un mejor comportamiento que la polinómica [5].

Se han obtenido nuevas fórmulas de cuadratura para el cálculo de integrales aplicando la extrapolación polinómica recíproca. Así como también hemos presentado un estudio comparativo de la diferenciación numérica aplicando técnicas de extrapolación.

Se ha presentado un estudio de una adaptación wavelet del método de Newton de dos pasos. Se aplica la aproximación no lineal wavelet para diseñar una versión adaptada del método de Newton del esquema iterativo de dos pasos. Se presentan también dos teoremas de convergencia local y semilocal.

Por último, hemos introducido una primera generalización polinómica recíproca partiendo de la primera generalización de Richardson presentada por [31]. Hemos analizado los resultados numéricos aplicados a dos métodos modificados de Euler (uno explícito y otro implícito) obteniendo también mejores resultados numéricos y regiones de estabilidad mayores en nuestra generalización recíproca. Actualmente estamos trabajando el estudio de algún



método real con estas características, así como considerar nuevas generalizaciones para la extrapolación polinómica recíproca análogas a las presentadas por Sidi.



# Bibliografía

- [1] V. Alarcón, S. Amat, S. Busquier and F. Manzano. *High order iterative schemes for quadratic equations. Numer. Algorithms* 48, n° 4, 373-381, (2008).
- [2] S. Amat, S. Busquier and V. Candela. *Reciprocal Polynomial Extrapolation. Journal Computational Mathematics*, 22(1), 1-10, 2004.
- [3] S. Amat, S. Busquier, A. Escudero and F. Manzano. *A wavelet adaptive two-step Newton type method. J. Franklin Inst.* 348, n° 5, 823-831, (2011).
- [4] S. Amat, S. Busquier, M. Gómez and F. Manzano. *High-order TVB discretizations in time using Richardson's extrapolation. Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng.* 26, n° 12, 1625-1634, (2010).
- [5] S. Amat, S. Busquier, M.J. Legaz, F. Manzano and J. Ruiz. *Reciprocal Polynomial Extrapolation vs Richardson Extrapolation for Singular*

*Perturbed Boundary Problems. Enviado en julio de 2011.*

- [6] I.K. Argyros. *Advances in the Efficiency of Computational Methods and Applications. World Scientific, (2000).*
- [7] U.M. Ascher, R.M.M. Mattheij and R.D. Russell. *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations. SIAM Classics in Applied Mathematics, (1995).*
- [8] U.M. Ascher and L.R. Petzold. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. SIAM Classics in Applied Mathematics, (1998).*
- [9] J.C. Butcher. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. John Wiley and Sons Ltd (2008).*
- [10] R.K. Bawa and V. Kumar. *An  $\epsilon$  - Uniforme Initial Value Technique For Convection-Diffusion Singularly Perturbed Problems. IMECS Vol II, Hong Kong, (2008).*
- [11] S. Bertoluzza and M. Verani. *Convergence of a nonlinear wavelet algorithm for the solution of PDEs. Appl. Math. Lett. 16 (1), 113-118, (2003).*

- [12] C. Canuto and A. Tabacco. *Multilevel decompositions of functional spaces. J. Fourier Anal. Appl.* 3 (6), 715-742, (1997).
- [13] A. Cohen. *Wavelet Methods in Numerical Analysis, Handbook of Numerical Analysis, vol. II, P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds., Elsevier, 1999.*
- [14] A. Cohen. *W. Dahmen, I. Daubechies and R. DeVore, Tree approximation and optimal encoding, Appl. Comput. Harmon. Anal.* 11, 192-226 (2001).
- [15] A. Cohen, W. Dahmen and R. DeVore. *Adaptive wavelet methods for elliptic operator equations: Convergence rates, Math. Comp.* 70 (233), 27-75, (2001).
- [16] Ward Cheney and David Kincaid. *Numerical Mathematics and Computing. Brooks/Cole-Thomson Learning (2004).*
- [17] W. Dahmen. *Stability of multiscale transformations, J. Fourier Anal. Appl.* 2 (4), 341-361, (1996).
- [18] R.S. Dembo, S.C. Eisenstat and T. Steihaug, *Inexact Newton methods, SIAM J. Numer. Anal.* 19 (2), 400-408, (1982).

- [19] R.A. DeVore. *Nonlinear approximation, Acta Numerica*, 51-150, (1998).
- [20] W.F. Ford and A. Sidi. *An algorithm for a generalization of the Richardson extrapolation process. SIAM J. Numer. Anal.*,24:1212-1232, (1987).
- [21] E. Hairer, S.P. Norsett and G. Warner. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg* (1991).
- [22] E. Hairer and G. Warner. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg* (2002).
- [23] Herbert B. Keller. *Numerical Solution of Two-Point Boundary Value Problems. California Institute of Technology* (1990).
- [24] J.Y. Lee and L. Greengard. *A fast adaptative numerical method for stiff two-point boundary value problems. SIAM J. Sci. Comput. Vol 18, No 2, 403-429,(1997).*

- [25] S.Natesan, J.Vigo-Aguiar and N.Ramanujam. *A Numerical Algorithm for Singular Perturbation Problems Exhibiting Weak Boundary Layers. Computers and Mathematics with Applications* 45, 469-479, (2003).
- [26] J.Vigo-Aguiar and S.Natesan. *A Parallel Boundary Value Technique for Singularly Perturbed Two-Point Boundary Value Problems. Journal of Supercomputing* 27,195-206 (2004)
- [27] J.Vigo-Aguiar and S.Natesan. *An Efficient Numerical Method for Singular Perturbation Problems. Journal of Computational and Applied Mathematics*, (2005)
- [28] J.M. Ortega and W.C. Rheinboldt. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York, (1970).
- [29] W. Shen and C. Li. *Kantorovich-type convergence criterion for inexact Newton methods. Appl. Num. Math.* 59, 1599-1611, (2009).
- [30] C. Schneider. *Vereinfachte Rekursionen zur Richardson-Extrapolation in Spezialfällen. Numer. Math.*, 24:177-184, (1975).

- [31] A. Sidi. *Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications*. No. 10 in *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, (2003).
- [32] J. Stoer and R. Burlirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag (1993).
- [33] M. Verani. *A Wavelet Adaptive Newton Method for the Solution of Nonlinear Equations*. *Appl. Math. Lett.* 16 (8), 1301-1306, (2003).
- [34] R. Vulcanovic, D. Herceg and N. Petrovic. *On the extrapolation for a singularly perturbed boundary value problem*, *Computing* 36, 69-79 (1986).



