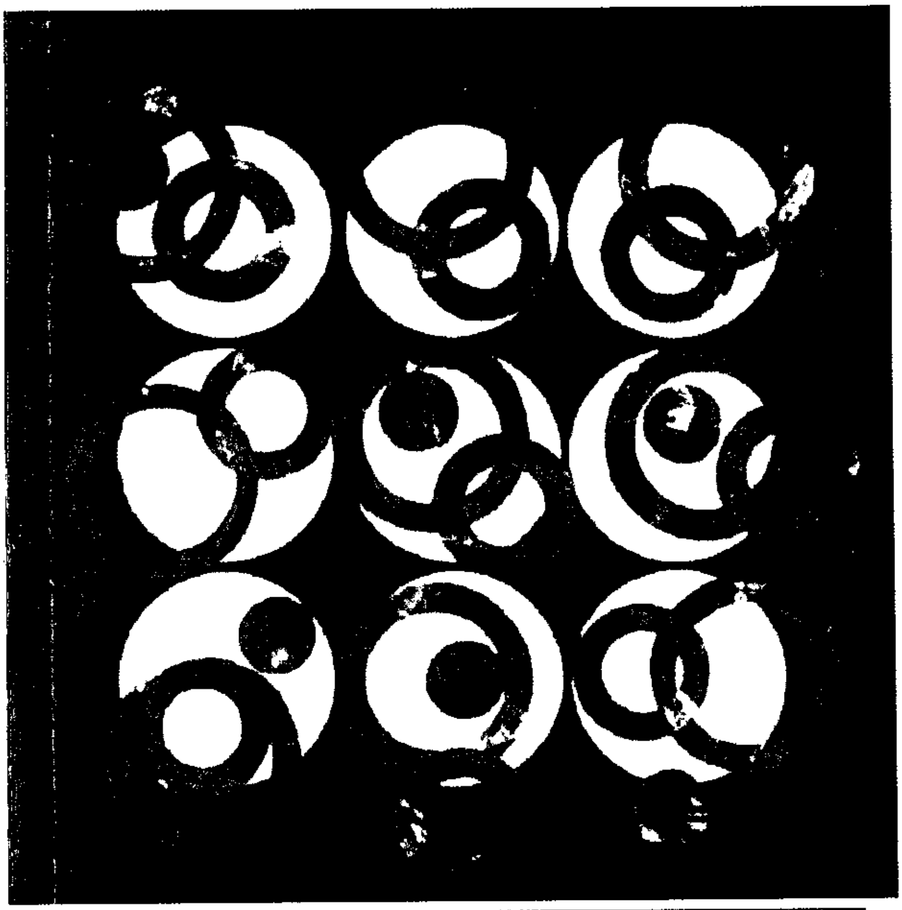
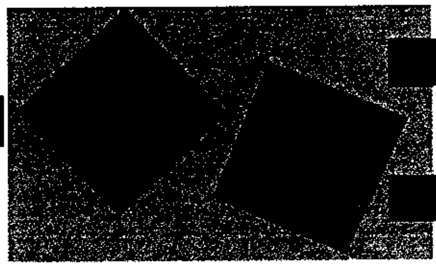
Las diez primeras Olimpiadas Matemáticas Nacionales





11

OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL

Catalunya,

del 23 al 29-6-2000

TARRAGONA - BARCELONA
GIRONA

Recopilación de las pruebas de

Las Diez Primeras Olimpiadas Nacionales

Las Olimpiadas Nacionales las convoca la FESPM que, cada año, encarga su organización a una de sus sociedades federadas. El presente año 2000 ha sido la FEEMCAT la encargada de organizarlas en su undécima convocatoria.

FESPM – Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
FEEMCAT – Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

Edita:
Comitè Organitzador de l'XI Olimpíada. FEEMCAT

Portada: Josep Perpiñá
Impresión: Imprenta Mateu – Banyoles (Girona)
Deposito legal: GI-620-2000
Girona - Mayo 2000

No ha sido fácil reunir el material de las diez primeras olimpiadas. Teníamos la intención de haber recogido logotipos, carteles y otras cosas que hubieran tenido un significado especial en cada una de ellas. No los hemos podido conseguir de todas. Como consecuencia hemos decidido incluir en el libro exclusivamente las pruebas planteadas en las mismas.

La tarea ha sido ardua. Algunos problemas no estaban resueltos y hemos confiado su resolución a diversos profesores. Las soluciones propuestas a veces son extensas, con muchas aclaraciones, mientras que en otras ocasiones son escuetas, con soluciones abiertas... No pretendíamos agotar todas las posibilidades, sino iniciar un camino de trabajo que desearíamos pudiera tener continuidad en las aulas. Confiamos que este material sea útil a los profesores y alumnos en el aprendizaje de las matemáticas.

Emili Creus
Jesús del Oso
Teresa Pagès
Elisabet Saguer

Índice:

Presentación ... 7
Una mirada hacia el pasado, un salto hacia el futuro ... 10
Ante la XIª olimpiada de la Federación ... 12
La Educación en matemáticas: Reflexiones sobre la gestión de la clase ... 16
Una reflexión sobre las competiciones matemáticas ... 20
Resolución de problemas y educación matemática ... 22
I Olimpiada ... 25
II Olimpiada ... 30
III Olimpiada ... 39
IV Olimpiada ... 43
V Olimpiada ... 48
VI Olimpiada ... 53
VII Olimpiada ... 60
VIII Olimpiada ... 72
IX Olimpiada ... 75
X Olimpiada ... 81
Memoria de las Olimpiadas ... 87
Agradecimientos ... 88

PRESENTACIÓN

Elisabet Saguer Canadell
Coordinadora de la XI Olimpiada
Matemática Nacional

Hace un año que recibí el encargo de llevar adelante la que seria la undécima olimpiada matemática. El cuatro de junio de 1999 nos reuníamos por primera vez la comisión que definitivamente debía llevar a cabo tal empresa. Desde el primer momento, tuve claro que una de las tareas obligadas seria rendir un homenaje a las diez olimpiadas precedentes. El deseo estaba claro. Pero no el cómo llevarlo a cabo, como obtener el dinero necesario, o como implicar y coordinar en tal tarea las personas imprescindibles.

El emblemático año 2000, declarado por la UNESCO año mundial de las matemáticas, es y ha sido un reto y a la vez un estímulo para dar contenido y aportar algo concreto al largo camino de la historia de las matemáticas en sus distintos ámbitos de incidencia como son su aprendizaje, su desarrollo, su presencia en la sociedad y su papel en la formación de nuestros y nuestras estudiantes, que serán los protagonistas de un futuro no muy lejano. Ahí están las diez olimpiadas como una realidad y un elemento a considerar en el balance de la situación actual de la realidad matemática.

La programación de un evento de estas características requiere grandes dosis de ilusión, pero al mismo tiempo exige disponer de medios económicos sin los cuales seria imposible su organización.

PRESENTACIÓ

Fa un any que s'em va fer l'encàrrec de tirar endavant el que seria l'onzena olimpíada matemàtica. El quatre de juny de 1999 ens reuníem per primera vegada la comissió que definitivament hauria de portar a terme tal empresa. Des d'el primer moment vaig tenir clar que una de les tasques obligades seria retre homenatge a les deu olimpíades precedents. El desig era clar. Però no el com portar-lo a terme, com obtenir els diners necessaris, o com implicar i coordinar en tal tasca les persones imprescindibles.

L'emblemàtic any 2000, declarat per la UNESCO any mundial de les matemàtiques, és i ha estat un repte i a la vegada un estímul per donar contingut i aportar quelcom de concret al llarg camí de la història de les matemàtiques en els seus distints àmbits de incidència com son el seu aprenentatge, el seu desenvolupament, la seva presència en la societat i el seu paper en la formació dels nostres estudiants, que seran els protagonistes d'un futur no molt llunyà. Aquí estan les deu olimpíades com una realitat i un element a considerar en el balanç de la situació actual de la matemàtica.

La programació d'un esdeveniment d'aquestes característiques requereix grans dosis de il.lusió, però al mateix temps exigeix disposar de medis econòmics sense els quals seria impossible la seva organit-

Pasar de los grandes principios a la realidad imponía obtener recursos y subvenciones tanto de instituciones públicas como de empresas privadas. Después de llamar a muchas puertas y de multitud de entrevistas se fueron concretando los recursos y aportaciones necesarias. Fue en ese momento cuando osé proponer la tarea de hacer esta recopilación que tenéis en vuestras manos.

No ha sido fácil implicar a todas las sociedades matemáticas. Por ello me dirigí al amigo Julián Pérez Iturmendi de Navarra al que conocí en el transcurso de la sexta olimpiada celebrada en Valencia. Su buena predisposición a colaborar y a brindarnos todo el material de que disponía de todas las olimpiadas fue el origen de esta publicación. Teresa Pagès mostró desde el primer momento disponibilidad e ilusión en que el proyecto fuera tomando cuerpo. Abusando de la amistad impliqué a Jesús del Oso y Emili Creus quienes a su vez implicaron a sus alumnos en diversas tareas. Ha sido una labor colectiva en la que muchas personas han participado. Unas aportando su trabajo en la resolución de algunos problemas como Pere Nogué, Francesc Borrell, Victòria Oliu. Otros aportando sus escritos que figuran como necesario pórtico de esta publicación.

En definitiva tenéis en vuestras manos el homenaje sincero y merecido que rendimos al trabajo y dedicación de muchos y muchas profesores y profesoras, participantes, organizadores y patrocinadores que han hecho posible el camino recorrido. No son personas o entidades anónimas sino seres con nombre propio que no podemos citar pero quiero que sientan suyo este reconocimiento a su inestimable labor, no siempre valorada por la sociedad en general. Su entrega desinteresada ha sido y es, en este ámbito de las matemáticas como en tantos otros,

zació. Passar dels grans principis a la realitat imposava obtenir recursos i subvencions tant d'institucions públiques com d'empreses privades. Després de trucar a moltes portes i de multitud d'entrevistes es van anar concretant els recursos i aportacions necessàries. En aquest moment em vaig atrevir a proposar la tasca de fer aquesta recopilació que teniu a les vostres mans.

No ha estat fàcil implicar totes les societats matemàtiques. Per això em vaig adreçar a l' amic Julián Pérez Iturmendi de Navarra a qui vaig conèixer en el transcurs de la sexta olimpíada celebrada a València. La seva bona predisposició a col·laborar i a brindar-nos tot el material de que disposava de totes les olimpíades va ser l'origen d'aquesta publicació. Teresa Pagès mostrà, des d'el primer moment, disponibilitat i il·lusió perquè el projecte s'anés concretant. Abusant de l'amistat vaig implicar a en Jesús del Oso i l'Emili Creus que també implicaren els seus alumnes en diverses tasques. Ha estat una labor col·lectiva en la que moltes persones han participat. Unes aportant el seu treball en la resolució d'alguns problemes com en Pere Nogué, Francesc Borrell, Victòria Oliu. Altres aportant els seus escrits que figuren com a necessari pòrtic d'aquesta publicació.

En definitiva teniu a les vostres mans l'homenatge sincer i merescut que rendim al treball i dedicació de molts i moltes professors/res, participants, organitzadors i patrocinadors que han fet possible el camí recorregut. No son persones o entitats anònimes sinó éssers amb nom propi que no podem citar però desitjo que sentin seu aquest reconeixement a la seva inestimable labor, no sempre valorada por la societat en general. La seva col.laboració desinteressada ha estat i és, en aquest àmbit de les matemàtiques com en tants la base del avance de la sociedad.

Con la undécima olimpiada hemos dado un paso más. La historia se escribe paso a paso sumando pequeñas realidades y humildes conquistas. Es otro peldaño. Mirando atrás vemos un esfuerzo que no ha sido en vano. Hacia delante vemos un futuro lleno de esperanza, ofreciendo desde ahora el testigo del cambio a nuestros compañeros de Cantabria.

Por otro lado creo que es un momento adecuado de hacer una reflexión serena del desarrollo y participación de las olimpiadas. En especial podemos preguntarnos: ¿Ha tenido influencia en las aulas? ¿Se han ido implicando más centros y alumnos en las respectivas autonomías? ¿Han sido un elemento dinamizante y renovador del aprendizaje de las matemáticas? Estos y otros interrogantes deben afrontarse desde la propia Federación y todas las sociedades que la componen, para no caer en rutinas anquilosantes y autocomplacientes.

No quiero terminar sin hacer un expreso reconocimiento a muchas de las personas que han hecho posible esta última olimpiada, y especialmente a: en Girona Pilar Xifra, Teresa Pagès, Francesc Borrell, Manel Cañigueral, Miquel Fuentes, Pere Nogué, Montse Masnou y Anna Pol; en Barcelona Marta Berini, Pilar Figueras y Jordi Deulofeu; en Tarragona Mª Lluïsa Girondo, Josep Borrut, Marià Cano y Joan Mª Castells. A todos mi agradecimiento. Tampoco quiero dejar de agradecer las aportaciones económicas que desinteresadamente han realizado diversas entidades y organismos públicos. Por último mi más sincero aplauso a los protagonistas. A los finalistas y a los alumnos que han participado en las diferentes fases de este proceso que culmina con esta fiesta matemática: la XI olimpiada.

altres, la base del progrés de la societat.

Amb la onzena olimpíada hem donat un pas més. La història s'escriu pas a pas sumant petites realitats i humils conquestes. Es un altre esglaó. Mirant endarrera veiem un esforç que no ha estat en va. Cap a davant veiem un futur ple d'esperança, oferint des d'ara el testimoni del canvi als nostres companys de Can-tàbria.

Per altra banda crec que és un moment adequat de fer una reflexió serena del desenvolupament i participació de les olimpíades. En especial podem preguntar-nos: ¿Ha tingut influència en les aules? ¿S'han anat implicant més centres i alumnes en les respectives autonomies? ¿Han estat un element dinamitzant i renovador de l'aprenentatge de les matemàtiques? Aquests i altres interrogants han d'afrontar-se des de la pròpia Federación i totes les societats que la composen, per no caure en rutines anquilosants i autocomplaent.

No vull finalitzar sense fer un exprés reconeixement a moltes de les persones que han fet possible aquesta última olimpíada, i especialment a: a Girona Pilar Xifra, Teresa Pagès, Francesc Borrell, Manel Cañigueral, Miquel Fuentes, Pere Nogué, Montse Masnou y Anna Pol; a Barcelona Marta Berini, Pilar Figueras y Jordi Deulofeu; a Tarragona Mª Lluïsa Girondo, Josep Borrut, Marià Cano y Joan Mª Castells. A tots el meu agraiment. Tampoc vull deixar d'agrair les aportacions econòmiques que desinteressadament han realitzat diverses entitats i organismes públics. Per últim el meu més sincer aplaudiment als protagonistes. Als finalistes i als alumnes que han participat en las diferents fases d'aquest procés que culmina amb aquesta festa matemàtica: la XI olimpíada.

UNA MIRADA HACIA EL PASADO, UN SALTO HACIA EL FUTURO

UNA MIRADA ENRERA, UN SALT ENDAVANT

Xavier Vilella i Miró
President de la FEEMCAT

A los compañeros y compañeras que lo vivieron les resultaría sin duda difícil de imaginar, en aquellos días de la primera Olimpiada en el Castillo de Olite y en la Ciudadela de Pamplona, que hoy verían la luz estas páginas de la mano de la FEEMCAT. En aquellos días aún no existía la FEEMCAT; la Olimpiada recibió tan solo participantes de seis comunidades de toda España, pero estaban sembrando la semilla de un acontecimiento anual en Educación Matemática. Actualmente, después de pasar por Canarias, Andalucía (dos veces, Huelva y Almería), Andorra, Burgos, País Valencià, Extremadura, Asturias y Albacete, llega la Olimpiada a Catalunya. La Comisión Organizadora ha trabajado intensamente para celebrar esta XI Edición, con un conjunto de actividades matemáticas y lúdicas que deseamos dejen un buen recuerdo en todos los participantes, y ha querido también preparar esta recopilación de las ediciones anteriores. Una recopilación en forma de libro, que permite la búsqueda de alguna cosa en concreto, o simplemente el paseo visual e intelectual por un rincón de la historia de la Educación Matemática de España en los últimos diez años.

Hemos de felicitarnos por la vitalidad que muestra el asociacionismo del profesorado de Matemáticas, y saludar el hecho de que existan muchas personas que, hoy como

Poc s'ho pensaven els companys i companyes que van realitzar la primera Olimpíada al Castell d'Olite i a la Ciutadella de Pamplona, que avui veurien la llum aquestes pàgines de la mà dels companys de la FEEMCAT. En aquells dies no exisitia encara la FEEMCAT, a l'Olimpíada només hi participaven 6 comunitats de tot Espanya, però estaven sembrant la llavor d'un esdeveniment anyal en Educació Matemàtica a casa nostra. Actualment, després de passar per Canàries, Andalusia (dues vegades, Huelva i Almeria), Andorra, Burgos, País Valencià, Extremadura, Astúries i Albacete, arriba l'Olimpíada a Catalunya. La Comissió Organitzadora ha treballat de valent per celebrar aquesta Onzena Edició, amb un seguit d'activitats matemàtiques i lúdiques que de ben segur deixaran un bon record en tots els participants, i ha volgut també preparar aquesta recopilació de les edicions anteriors. Un recull en forma de llibre, que permet la consulta cercant alguna cosa en concret, o simplement el passeig visual i intel·lectual per un racó de la història de l'Educació Matemàtica d'Espanya en els últims deu anys.

Cal felicitar-nos per la vitalitat que mostra l'associacionisme del professorat de Matemàtiques, i saludar el fet que hi ha moltes persones que, avui com ahir, estan disposades a emprar temps i energies en ayer, están dispuestas a utilizar su tiempo y sus energías en la organización de actividades altruistas, en facilitar la relación y la convivencia, en dejar escritas páginas que podrán ser visitadas durante los próximos decenios.

Espero que esta recopilación nos sea de utilidad y que, de aquí a diez ediciones más de la Olimpiada, pueda aparecer una nueva recopilación.

organitzar activitats per als altres, en facilitar la relació i la convivència, en deixar pàgines impreses per poder ser visitades durant els pròxims decenis.

Espero que aquest recull ens sigui d'utilitat i que, d'aquí a deu edicions més de l'Olimpíada, pugui aparèixer un nou recull..

ANTE LA XIª OLIMPIADA DE LA FEDERACION

Junio de 2000, Año Mundial de las Matemáticas

María Jesús Luelmo
Presidenta de la FESPM

La XI ª Olimpiada, en el Año Mundial de las Matemáticas

Celebramos la XIª Olimpiada de la Federación Española de Profesores de Matemáticas, organizada esta vez por la FEEMCAT, en un momento muy especial para toda la comunidad matemática.

El 6 de Mayo de 1992, durante una reunión celebrada en Río de Janeiro, la IMU (Unión Matemática Internacional), declaró el año 2000 *Año Mundial de las Matemáticas*. ¿Por qué el 2000? Justamente un siglo antes, en 1900, David Hilbert había enunciado una lista con los principales problemas matemáticos que la entonces recién comenzada centuria debería abordar. Cumplido este plazo, la IMU ha querido plantear un reto similar, pero en términos más amplios, pues atañe no sólo a la investigación en Matemáticas, sino también al papel que tienen como dinamizadoras del desarrollo de los pueblos, así como a la imagen que de ellas tiene la sociedad.

Posteriormente, la UNESCO se une a estos retos y añade otro más: reconocer la importancia que juega la educación matemática en la formación integral de nuestros estudiantes de Primaria y de Secundaria.

Felizmente, los objetivos del *Año Mundial de las Matemáticas* y los de nuestras Olimpiadas tienen una amplia intersección, pues ni éstas son una mera competición entre escolares ni aquél reduce el alcance de las Matemáticas al ámbito de la investigación especializada.

Señas de identidad de las Olimpiadas de la Federación

El camino recorrido por nuestras Olimpiadas ha sido posible gracias al esfuerzo entusiasta de miles de profesores y profesoras y a la participación no menos entusiasta de decenas de miles de estudiantes del nivel equivalente al 2º curso de Secundaria.

Tenemos ya 10 ediciones a nuestras espaldas, desde la primera celebrada en Navarra (1990) hasta la última que tuvo lugar en varios lugares de Castilla-La Mancha (1999). En paralelo al crecimiento de la Federación, el número de Sociedades participantes fue en aumento, y hoy nuestra Olimpiada acoge durante cinco días a representantes de la práctica totalidad del Estado Español más Andorra: medio centenar de estudiantes y una veintena de profesoras y profesores que les acompañan.

A lo largo de estos años hemos ido perfilando las señas que identifican nuestra Olimpiada y que la distinguen claramente de otras competiciones matemáticas. Destaquemos las más importantes:

- *Olimpiadas para una imagen completa y atractiva de las Matemáticas*

Una de las mayores potencialidades de las Matemáticas, particularmente en el campo educativo, estriba en su gran riqueza de significados, facetas y aplicaciones.
Las Matemáticas, desde sus orígenes históricos, responden a la necesidad de describir, modelizar y predecir la realidad; de ahí su gran interés como sustrato de muchas ciencias. La precisión del lenguaje la convierte en una herramienta comunicadora de primer orden. Resolver problemas es la actividad matemática por excelencia y nos proporciona retos intelectuales y prácticos apasionantes. La belleza y armonía matemática está presente en el arte en sus múltiples variedades; la economía y eficiencia de muchos algoritmos, métodos y resultados está también muy próxima a la belleza. Los juegos matemáticos nos desafían gratuitamente, por el mero placer de jugar en solitario o en compañía.
Nuestras Olimpiadas quieren recoger, en sus diferentes pruebas, toda esta riqueza y variedad de aspectos, especialmente los tratados con menor frecuencia en las aulas, como son los lúdicos o los estéticos. Queremos atraer al mayor número posible de estudiantes, dando oportunidades al desarrollo de talentos matemáticos en cualquiera de sus facetas.

- *Olimpiadas para mejorar la educación matemática de todos*

La resolución de problemas y las aplicaciones de las Matemáticas han de ser actividades cotidianas en nuestras aulas. Sin estos dos aspectos complementarios, no puede entenderse una educación matemática *para todos*, pues la futura ciudadanía necesitará interpretar las claves matemáticas de un entorno fuertemente tecnologizado y que cambia rápidamente, y para ello es preciso no sólo la adquisición de conocimientos sino también desarrollar la capacidad de afrontar situaciones nuevas.
En ese sentido entendemos la Olimpiada unida fuertemente a una práctica de aula atractiva, y no como una actividad selectiva para la que se prepara especialmente a una pequeñísima minoría del alumnado. Si, ciertamente, se selecciona a los y a las mejores, también es cierto que se dan oportunidades y beneficios a todos.

- *Olimpiadas para la formación permanente del profesorado*

Queremos que nuestras Olimpiadas sean un elemento dinamizador de la renovación didáctica del profesorado y de la mejora de nuestra enseñanza matemática. En este sentido, su verdadero éxito se irá viendo en la medida en que el profesorado participante incorpore a sus clases, de modo habitual, la resolución de problemas y las aplicaciones prácticas. Los materiales, problemas, juegos, investigaciones... que las Sociedades y la Federación están generando en torno a las Olimpiadas constituyen un recurso para el aula cada vez más importante.
En muchas Comunidades, las instituciones de Formación comparten nuestra filosofía y colaboran en la difusión de las Olimpiadas y en el apoyo didáctico a los equipos de profesorado que participan en ellas.

- *Olimpiadas para cooperar*

Una parte importante de la actividad matemática -la del matemático profesional, la realizada en otros campos profesionales o en la vida diaria- se desarrolla en cooperación y con la ayuda de la tecnología y de otros medios. La imagen del matemático solitario e incomunicado, que pocas veces ha reflejado la realidad, no tiene actualmente sentido alguno.

Por el contrario, la práctica matemática puede ayudar a desarrollar el valor de la cooperación, y nuestras Olimpiadas están comprometidas en ello. Procuramos que nuestras chicas y nuestros chicos vivan el placer del trabajo en equipo, aprendan con los demás, integren sus logros individuales en la consecución de metas colectivas más ambiciosas. Desde la primera edición de la Olimpiada, se realizaron ya pruebas por parejas además de las individuales, y en cada edición el número y variedad de actividades de equipo ha ido creciendo con trabajos prácticos, investigaciones, gymkanas, concursos etc.

- *Olimpiadas para popularizar y cambiar la imagen de las Matemáticas*

Nuestras Olimpiadas son, cada vez más, un acontecimiento cultural para las ciudades donde se celebran. Consecuentemente los medios de comunicación difunden la presencia de nuestros estudiantes y el alcance de sus actividades. En las últimas ediciones se vienen realizando, durante los días de la Olimpiada, diversas exposiciones matemáticas abiertas al público.
Por tanto, no es aventurado decir que nuestro objetivo de popularizar y dar una imagen positiva de las Matemáticas trasciende ya las barreras de los centros educativos para dirigirse a la población en general.

- *Olimpiadas para aprender, convivir y disfrutar*

Nuestras Olimpiadas son, en sí mismas, un premio para el alumnado participante. Queremos desterrar la imagen fría y alejada de la realidad que tienen las Matemáticas, por lo que procuramos dar la oportunidad de practicarlas en ambientes amistosos y en contextos reales. Ningún participante de la VIIª edición podrá olvidar la prueba por equipos en el anfiteatro romano de Mérida, en la que pudieron mirar con ojos matemáticos las viejas piedras para conocer mejor nuestro pasado. Y los de la IIIª, que se acercaron a los secretos urbanísticos de Huelva recorriendo sus calles con un plano, un metro y mucho ingenio. Y en la VIª, estudiando la producción de materia orgánica del limonero en plena huerta levantina.
Hoguera de San Xuan en la playa de Gijón, partida de ajedrez con un gran maestro en Carboneras, la aventura en el transpirenaico en Andorra, juego de pelota en un trinquete de Elizondo, aire libre y naturaleza en Alcalá del Júcar o en el Parque de Tinarfaya ... casi una semana de ambiente festivo en torno a unas Matemáticas que se despliegan en toda su riqueza, trabando amistades, conociendo otras Comunidades, pisando quizás por primera vez un Ayuntamiento donde se les recibe como a huéspedes distinguidos, compartiendo trabajo y ocio, nuestros chicos y chicas disfrutan de unas Olimpiadas en las que el mejor premio es participar.
Las Olimpiadas de las Sociedades, en un plano más modesto, mantienen esta filosofía. El día final es una fiesta donde nos reencontramos cada año, nos divertimos participando junto con los estudiantes en la gymkana o nos esmeramos en obtener una buena instantánea en el maratón de fotografía matemática. Recibimos al alumnado con actividades que les ayuden a conocerse y a eliminar tensiones; luego, a lo largo del día, se afanan en las diferentes pruebas, muchas de ellas al aire libre y comparten equipo de trabajo, bocadillo y refresco con compañeros de otros Centros.

Para finalizar
La historia de la Federación está unida estrechamente a la de la Olimpiada, se han ido construyendo en paralelo la una a la otra. Muchas Sociedades tienen su origen en grupos de profesoras y profesores que participaban de modo independiente en la Olimpiada, y a partir de ahí vieron la conveniencia de crear una estructura más estable, como es el caso de las Sociedades murciana y castellano-manchega.
Recíprocamente, con el paso del tiempo, la Olimpiada se ha ido constituyendo como la actividad más mimada de la Federación. Ha ido mejorando año tras año, no sólo en su organización, sino también en el cumplimiento de unos objetivos educativos cada vez más ambiciosos. Estoy convencida de que las aportaciones a este proceso por parte de la FEEMCAT, ricas después de la experiencia de muchos años de innovación didáctica en Cataluña, van a ser sustantivas y repercutirán en la mejora de ediciones posteriores.
Para terminar, quiero agradecer muy vivamente, en nombre de la Federación, el trabajo desarrollado por quienes han hecho posible esta Olimpiada: alumnado, profesorado, centros educativos, instituciones públicas y privadas. Y quiero desear a sus protagonistas más directos, chicos y chicas representantes de toda España y de Andorra, profesorado acompañante, compañeras y compañeros del Comité Organizador de la FEEMCAT, que disfruten de esta gran fiesta de las Matemáticas y de la convivencia.

LA EDUCACIÓN EN MATEMÁTICAS: REFLEXIONES SOBRE LA GESTIÓN DE LA CLASE[1]

Marta Berini
Sots-presidenta de la FEEMCAT

La ampliación de la etapa de escolarización obligatoria y el aumento de tasas de escolarización postobligatoria ha obligado a la Comunidad Educativa a replantearse los contenidos que se han de enseñar en las Escuelas y en los Centros de Educación Secundaria y, entre otras cuestiones, ha hecho reflexionar al profesorado sobre cuál puede ser la mejor forma de presentar en clase estos contenidos y cómo trabajarlos con los y las alumnas. Hay que tener en cuenta que quienes tenemos en nuestras clases son personas que se están formando, jóvenes con toda la carga de inmadurez que ello conlleva, pero también de potencialidad de aprendizaje, individuos con diferentes necesidades y diversas espectativas, que serán los futuros trabajadores y trabajadoras de la sociedad.

Aprovechando este año 2000, declarado año Mundial de las Matemáticas por la Unión Matemática Internacional (UMI), disponemos de una ocasión perfecta para que toda la sociedad, y en particular el profesorado de Matemáticas, reflexione sobre una de las directrices que ha dado la UNESCO en el momento de dar apoyo a este año y que es la siguiente: "*La Sociedad tiene la palabra en todos los ámbitos y puede decir qué es lo que cree que habrían de haber aprendido los ciudadanos y las ciudadanas adultos de hoy en día; en particular, tiene la palabra en el ámbito de la educación matemática*". Por lo tanto, es evidente que es necesaria una discusión a fondo sobre *Cuáles son las necesidades sociales a las que ha de responder la enseñanza de las Matemáticas* (matemáticas necesarias para poder desenvolverse en la vida cotidiana, en el trabajo, en los estudios posteriores,...) y *Cuáles han de ser las características del aprendizaje en estas edades.*

Ya en 1981, el Informe Cockcroft (informe sobre la enseñanza de las Matemáticas en Inglaterra y en el País de Gales, encargado a W.H. Cockcroft y que fue elaborado por el mismo y veinticuatro profesionales más relacionados con la educación y con las Matemáticas, después de tres años de trabajo) evidenciaba unas necesidades y daba unas directrices a tener en cuenta en el momento de enseñar Matemáticas, a partir de dos

[1] "Año 2000, Año mundial de las matemáticas". Conferencia pronunciada en el Paraninfo de la Universidad de Barcelona el 7 de marzo de 2000.

preguntas clave respecto a su enseñanza: *¿Qué Matemáticas han de aprender los alumnos y las alumnas? y ¿Cómo han de enseñarse estas Matemáticas?.*

Respecto a *Qué Matemáticas han de aprender* tenemos quizás las ideas más claras y no dudamos en el momento de hacer un listado y una secuenciación de los contenidos.

Creo que el problema aparece cuando el profesorado intenta responder a la segunda de estas preguntas: *¿Cómo han de enseñarse estas Matemáticas?.* Cuando intenta hacerlo, inmediatamente le aparece una preocupación: "*ha de tomar la decisión sobre qué tipo de material entregará al alumnado y cómo gestionará la clase, para poder conseguir los objetivos que se ha marcado*". Por lo tanto me centraré en ella e intentaré dar algunas indicaciones a las que he llegado después de muchas reflexiones, diversas experiencias y bastantes años de trabajo en el aula:

Respecto al material que entregamos en clase y a la manera de actuar del profesorado, tendría que:

- ser adecuado para la mayoría del alumnado y no sólo para aquellas personas más aventajadas
- tener en cuenta los conceptos previos del alumnado sobre el tema de trabajo
- permitir realizar una parte del trabajo de forma autónoma
- potenciar las discusiones en clase, con el profesorado actuando más como conductor que como participante
- potenciar el análisis crítico sobre las informaciones que recibe del mundo exterior a la escuela
- inducir a los alumnos y a las alumnas a reflexionar constantemente sobre su proceso de aprendizaje, tanto en el momento de la resolución de problemas, como en el de matematización
- no presentar las Matemáticas como una teoría ordenada y encorsetada, explicada por el profesorado (lo que provoca una actitud totalmente pasiva del alumnado), sino proponer situaciones problemáticas y pedir que intenten resolverlas con la finalidad de implicarlo en su propio proceso de aprendizaje
- hacer emerger la intuición, la improvisación, la elaboración y comprobación de hipótesis, hacerles realizar pequeñas investigaciones, recomendar las aproximaciones, el tanteo, las analogías, ...
- "obligar" al alumnado a verbalizar constantemente sus razonamientos
- dar al alumnado ejercicios que puedan tener diferentes itinerarios de resolución y posteriormente le permitan comentar las diferentes estrategias utilizadas
- ayudar a utilizar los conocimientos adquiridos en contextos similares
- garantizar una visión interdisciplinar y globalizadora de los contenidos
- presentar las Matemáticas como un conjunto de conocimientos que han estado y están en continua evolución
- hacer visibles las Matemáticas en todos los aspectos de la vida cotidiana en que aparecen
- presentar los contenidos matemáticos más como "instrumento de conocimiento" que como "objeto de estudio"

- pero no olvidar nunca el *mostrar la belleza intelectual de las Matemáticas, e ilusionar a una parte del alumnado a disfrutar de la abstracción que tienen en su interior*

Todo este listado de sugerencias no habría de angustiar a nadie. No es necesario que en cada momento tengamos que entregar al alumnado materiales de trabajo que contemplen todos estos aspectos. Lo que habríamos de poder conseguir es asegurar, que a lo largo de toda una unidad didáctica, un mes, un trimestre, un curso, ... nuestra gestión de la clase se realice de manera que hayamos presentado situaciones que permitan trabajarlos todos.

Respecto al apartado:
"potenciar el análisis crítico sobre las informaciones que recibe del mundo exterior a la escuela" quisiera comentar dos experiencias que realicé hace unos años en mis clases.
En primer lugar la que fue consecuencia de leer en el suplemento de Educación de un diario un artículo titulado *Los alumnos ponen la nota* y que se refería a que los alumnos ponían la nota a su profesorado de la Universidad.
Había un párrafo en donde aparecía escrito: la valoración iba del 1 al 7,.... ; la nota media que obtuvo el profesorado era un 5, y añadió el periodista: *es decir "un aprobado justito".*
Quise que en mis clases se criticara esta información y di fotocopia del escrito, pidiendo una crítica de aquel párrafo. Rápidamente el alumnado empezó a criticar al profesorado: Marta, ¡qué malos son! ¡sólo un 5! Tú nos dices que un 5 es muy poco.... Tuve que rectificar mi petición y decir que lo que yo quería era una crítica sobre la información matemática que aparecía, y fue entonces cuando alguien dijo: *"A mí me parece que un 5 no es un aprobado justito en una escala del 1 al 7, como mínimo ha de ser un bien"*. Lo que dio lugar a todo un cúmulo de reflexiones. Redactamos una carta entre todos y, después de comprobar que ningún profesor o profesora de la Universidad había hecho una réplica, la enviamos a la sección de Cartas al Director.
La segunda experiencia se refiere a la información que mostraba una página de publicidad sobre los índices de audiencia de las diferentes cadenas de televisión que se publicó en todos los diarios y que sólo mirarla dañaba la vista, ya que la antiproporcionalidad entre los porcentajes de audiencia y la longitud de las barras era aterradora.
Naturalmente entregué fotocopia a mis alumnos y alumnas y cuando la tuvieron delante todos empezaron a decir: *está mal hecha, no estoy de acuerdo,.. y yo* rápidamente, muy contenta, pedí que todo el mundo escribiera el porqué creían que no era correcta. Cuando empezaron a leer lo que habían escrito, las respuestas eran: "no es verdad que TV1 sea la más vista porque en casa todos vemos Farmacia de Guardia, mi vecina también, es verdad, es verdad, .." y otra vez tuve que pedir un crítica sobre la información matemática. Enseguida empezaron a surgir las reflexiones: no puede ser que a 7'9 % le corresponda sólo el doble del que le corresponde al 2'2 %, que a un 6 % le corresponda sólo el doble del que le corresponde a un 1'3 %.... La cosa no acabó aquí ya que redactamos la carta y la enviamos al periódico, y una semana después, mientras daba clase, me llamaron del diario y la persona con la que hablé me dijo: "*muchas gracias por su carta, mañana la publicaremos, pero creo que hay un error en su escrito porque usted dice que si a 26'9 % le corresponden 11'8 cm a 26 % le ha de corresponder 11'18 cm, y está claro que esto no puede ser ya que 11'18 es mayor que 11'8"*. Yo me quedé atónita y no sabía exactamente qué responder para no herir a la persona con la que estaba

hablando, y lo único que se me ocurrió decir fue: "*mire, es que en Matemáticas se acostumbra a no escribir los ceros que hay al final de un nº con comas, pero 11'8, lo podríamos escribir 11'80*"; "Ah, ya lo entiendo, me dijo enseguida, y 11'80 sí que es mayor que 11'18" ¿Le importa si en la carta escribimos 11'80?. ¿Qué había de decir sino que me parecía perfecto que lo escribiera de esta manera? Y así la publicaron.

A raíz de estas experiencias, y de otras que seguro que todos los aquí presentes están recordando en este momento, está claro que continúa siendo necesaria una reflexión sobre cuáles son las Matemáticas que es necesario enseñar y cómo hacerlo.
En este sentido, aprovecho esta ocasión y, como vice-presidenta de la Federació de Ensenyants de Matemàtiques de Catalunya, quiero presentarles el Congreso de Educación Matemática, cem-2000 que se celebrará los días 4, 5 y 6 de julio de 2000 en Mataró y que será congreso satélite del 3r Congreso Europeo de Matemáticas.

El Congreso tiene como objetivo discutir sobre una serie de cuestiones como:

- ¿Cuáles son las demandas que la Sociedad nos hace en relación con la Educación Matemática?
- ¿Qué puede ofrecer el profesorado de Matemáticas en respuesta a estas peticiones?
- ¿Existen unas Matemáticas invisibles fuera de la escuela que es necesario mostrar? todas ellas siempre centradas en el debate Matemáticas/Sociedad en la escolarización obligatoria.

Dentro del Congreso habrá mesas redondas (una de ellas con participación de personas ajenas al mundo de las Matemáticas, que darán su punto de vista sobre las cuestiones clave del congreso); conferencias plenarias, grupos de debate donde los participantes puedan discutir sobre las ideas que han aparecido; comunicaciones y talleres, y una segunda mesa redonda que contará con profesionales de la enseñanza de las Matemáticas que darán su opinión sobre todo aquello que ha ido surgiendo a lo largo de las actividades del Congreso.
Estáis invitados a participar.

Una reflexión sobre las competiciones matemáticas

Luis Balbuena Castellano
Catedrático de matemáticas del IES "Viera y Clavijo" (La Laguna, Tenerife)

No hace mucho acudí a la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna para escuchar una conferencia y en esos minutos de espera, antes de entrar en el Salón de Actos, se me acercó una joven, me saludó con mucho afecto y terminó identificándose cuando comprendió que no caía en la cuenta de quién podía ser. Pues bien, fue una olímpica a la que yo había acompañado cuando la final nacional se celebró en Andorra. Se podrá imaginar la alegría que supuso ese encuentro, no sólo por recordar los gratos momentos vividos, sino por comprobar que tal vez la semilla que se sembró en aquel momento había terminado por germinar en esta futura matemática, aunque no siempre la semilla tenga por qué dar frutos tan significativos como este. Creo que llevamos ya bastantes años con esta labor de promover el amor a las matemáticas entre los estudiantes y necesariamente tiene que dar sus resultados. En Canarias iniciamos este tipo de competiciones -que aquí llamamos Torneo- allá por el curso 79-80. Nuestra sociedad se acababa de fundar y queríamos que esta fuese una de las actividades "fijas". Se hizo de modo experimental y artesanal pero nos demostró que estábamos en buena dirección porque las valoraciones de los alumnos y los profesores que participaron fueron muy positivas. Nuestra valoración también fue muy positiva a pesar del "curre". Independientemente de los beneficios que haya podido reportar a los ganadores tanto por los premios, como por acudir después a la final en la Península, creo que para muchos de los participantes -ganadores o no– ha supuesto casi la única atención que recibieron a su diversidad durante sus estudios, en el sentido de ser alumnas y alumnos con especiales capacidades para las matemáticas a los que se atendía, en general, con la programación ordinaria. Se podría deducir, por tanto, que los torneos han supuesto un adelanto en las ideas que hoy se defienden con relación al tratamiento de la diversidad.
Muchos años después de aquel experimento, el Torneo sigue vivo y esto es algo que debemos celebrar. Sin embargo también conviene no dejarse llevar de las rutinas y pensar que todo marcha bien por el simple hecho de que se hace. Creo que es una estrategia peligrosa. Se impone una reflexión y una mirada hacia atrás para diseñar el después. Hay un dato que a mí me preocupa y no se si esta

preocupación mía es compartida por más colegas. En las últimas ediciones de nuestro Torneo, se ha producido una merma considerable de participación de estudiantes de los centros públicos. En cambio ha ocurrido todo lo contrario con los que no lo son. En las primeras ediciones apenas participaban estos segundos. Y hoy ocurre que, incluso en algunos de estos centros no públicos, se dispone de un profesor que dedica algunas horas a preparar a los potenciales participantes en el Torneo. No es que eso me parezca mal. Al contrario. Lo que sí me resulta preocupante es que no exista por parte de los centros públicos, no ya la preocupación de preparar a los chicos, sino incluso la iniciativa de estimularles para que al menos se presenten a las pruebas de la primera fase. ¿Qué se puede hacer? ¡Ojalá lo supiera!. Se me ocurre que si esta situación se reproduce en otras comunidades, tal vez la Federación debería propiciar un encuentro monográfico con personas con experiencia en estas lides, que afortunadamente tenemos, para que traten de ofrecer al profesorado argumentos que les motiven a promover esta actividad entre sus alumnos. Existen, además, otros modelos de competiciones por ahí de las que tal vez podrían tomarse prestadas algunas iniciativas.

Pese a todo creo que debemos seguir adelante con la actividad porque estamos ofreciendo a las comunidades educativas unas posibilidades y unos estímulos que difícilmente podrán ofrecer otras instituciones.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jordi Deulofeu Piquet
Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona

Los editores de este monográfico dedicado a los diez años de la Olimpiada Matemática en España (año de tantas efemérides relacionadas con las matemáticas, entre las que destacan el año mundial y el centenario del nacimiento de Puig Adam, probablemente el más insigne profesor de matemáticas de nuestro país) solicitaron mi colaboración con un breve artículo sobre la resolución de problemas, petición que acepté con sumo agrado. Para ello, he redactado las siguientes reflexiones, con el ánimo de colaborar en esta tarea común que tenemos todos los enseñantes de matemáticas, la de intentar mejorar los conocimientos y las capacidades de nuestros alumnos, de todas las edades, y de lograr que el mayor número posible de ellos sean capaces de hacer matemáticas y de dar sentido a esta actividad. Desde mi punto de vista, nada mejor que reflexionar sobre la resolución de problemas y sobre su papel en la enseñanza de las matemáticas, para tratar de aportar algunas ideas que puedan contribuir a alcanzar esta finalidad.

La resolución de problemas ha sido desde siempre el motor que ha impulsado el progreso de las matemáticas y, con un mínimo de perspectiva histórica, resulta imposible negar el papel clave que los problemas han tenido, tienen y tendrán en el desarrollo de esta ciencia. No obstante, cuando nos referimos a la enseñanza, es decir, a las matemáticas que se hacen en los distintos centros educativos, este papel clave de los problemas no se traduce, en general, en la actividad principal que sirve de eje para el desarrollo del curriculum. Las razones para que esto sea así son múltiples y de distinto nivel y van desde las formulaciones de los currícula oficiales, donde los problemas son contemplados como un procedimiento más de entre los muchos que hay que desarrollar, hasta las creencias de muchos profesores y los modelos de enseñanza que ellos desarrollan, donde la resolución de problemas se entiende como una aplicación de los conceptos y procedimientos previamente aprendidos.

Es cierto que en una clase de matemáticas se desarrollan actividades de distinto tipo: el conocido informe Cockcroft (1982) al referirse a ellas dice que, en toda clase de matemáticas, además de las explicaciones del profesor y la práctica de rutinas básicas, debería haber, en todos los niveles, discusiones entre el profesor y el alumnado y entre ellos mismos, trabajo práctico, resolución de problemas con inclusión de situaciones extraídas de la vida cotidiana y realización de trabajos de investigación. Como destaca Oriol Busquets en un reciente artículo sobre el mencionado informe, la simple consideración de la lista de actividades que acabamos de referenciar es un referente interesante para la reflexión sobre la propia práctica de los profesores de matemáticas en todos los niveles (Busquets, 2000).

Voy a referirme, en particular, a las dos últimas actividades citadas, que, sin olvidar la importancia de la discusión sobre cualquier aspecto de las matemáticas (fundamental para potenciar el aprendizaje) son las que, desde mi punto de vista, requieren una atención especial.

Antes de plantearnos qué problemas vamos a proponer en un nivel determinado y cómo los trabajaremos en clase, deberíamos reflexionar sobre qué pretendemos con la actividad que llamamos resolución de problemas. En mi opinión no se trata, fundamentalmente, de convertir a todos los alumnos en unos buenos técnicos en la resolución de problemas, a pesar de la utilidad de dicho objetivo, y de la necesidad de lograrlo con determinados alumnos (por ejemplo aquellos que participan en actividades como la Olimpiada Matemática) sino de utilizar los problemas, es decir, las preguntas que en ellos se formulan, los procesos que llevan a su resolución y los resultados obtenidos, para construir y dar significado a aquellos conceptos y procesos de la matemáticas que pretendemos enseñar. De esta manera, la resolución de problemas no es un fin en sí mismo, sino una manera de enseñar matemáticas, que permite mostrar en que consisten las matemáticas, como se construyen, qué dificultades plantean y para qué sirven. En palabras de Paulo Abrantes, el trabajo sobre las matemáticas en la escuela debe estar presidido por un ambiente de resolución de problemas (Abrantes, 1996).

Desde la perspectiva anterior, una buena actividad de resolución de problemas no se centrará en la aplicación de unos conocimientos, tanto conceptuales como de procesos, a una nueva situación (aspecto importante pero que relega los problemas a una fase posterior del proceso de enseñanza-aprendizaje, que podríamos llamar de aplicación) sino que, además de esto, posibilitará en algunos casos el descubrimiento de un nuevo concepto o proceso, y en otros, una manera distinta de percibir dichos conceptos en el marco de la nueva situación, lo cual puede llevar a un mejor conocimiento de los mismos. De esta manera, los problemas adquirirán sentido, no sólo en sí mismos, sino en relación con las matemáticas que pretendemos enseñar, y podrán convertirse en actividades potencialmente generadoras de aprendizaje matemático.

Otro aspecto importante es la relación entre resolución de problemas y razonamiento matemático. A veces se plantean estas dos actividades como algo separado, cuando en realidad deberían estar íntimamente ligadas. Hace ya muchos años que Puig Adam (1937) destacó que el carácter útil y el formativo de las matemáticas eran complementarios y que tratar de separarlos (creyendo que hay unas matemáticas para la vida y otras para pensar) es una falacia. Es cierto que en la resolución de determinados problemas esta relación no aparece de una manera clara (problemas fácilmente clasificables y cuya resolución se convierte en la aplicación de un determinado algoritmo), pero en otros (especialmente en las llamadas investigaciones matemáticas) las distintas formas de razonamiento aparecen de una manera natural. Por ejemplo, cuando formulamos una conjetura a partir de la intuición, de la experimentación o de la particularización, y debemos probar su validez nos encontramos frente al tipo de razonamiento más característico de las matemáticas.

Es cierto que en la educación obligatoria el papel de la demostración (entendida de una manera formal) prácticamente ha desaparecido de los currícula, pero sería un grave error creer que por ello, las matemáticas de estos niveles no deben incidir en la argumentación, es decir, en la búsqueda de razonamientos sobre cómo son las cosas y el porqué de las mismas, con el objetivo de tratar de convencernos y de convencer a los demás de que efectivamente aquella conjetura es (o no es) cierta. Como destacan Lladó y Jorba, es importante hallar aquellas situaciones en las que la práctica de la argumentación adquiera sentido para el alumnado, ya que de lo contrario podríamos abocar a los alumnos a una práctica matemática "empirista" donde nunca se plantee la necesidad de argumentar y de estructurar dichos argumentos desde un punto de vista lógico; esto, poco o nada tiene que ver con la reproducción de demostraciones sin sentido, que a menudo encontramos en los libros de texto, donde las exigencias de "presentación" de los contenidos prevalecen por encima del que debería ser el objetivo principal, destacar una de las características fundamentales de la actividad matemática (Lladó-Jorba, 1998).

Por todo ello entendemos que los problemas que proponemos a nuestros alumnos deberían contener, siempre que sea posible, por un lado elementos relacionados con la determinación de soluciones, en el sentido constructivo del término, y por otro elementos que lleven a la argumentación para dar validez a los resultados obtenidos.

Referencias bibliográficas

Abrantes, P. (1996) El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. *UNO*, num. 8, p. 7-18.

Busquets, O. (2000) L'informe Cockcroft. Algunes reflexions útils. *Butlletí ABEAM* num. 6, p. 2-3.

Cockcroft, W.H. (1985) *Las Matemáticas sí cuentan*. Madrid: M.E.C.

Deulofeu, J. (2000) Pensant en el 2001: resolució de problemes, activitat matemática raonament. *Perspectiva Escolar*, num. 242, p. 36-43.

Lladó, C.-Jorba, J. (1998) L'activitat matemática i les habilitats cognitivo-lingüístiques *Parlar i escriure per apendre*. Barcelona: ICE de la UAB.

Puig Adam, P. (1937) El que podria esser l'ensenyament de les matemàtiques a l'Institu Escola. *Butlletí de l'Institut Escola.*

I Olimpiada

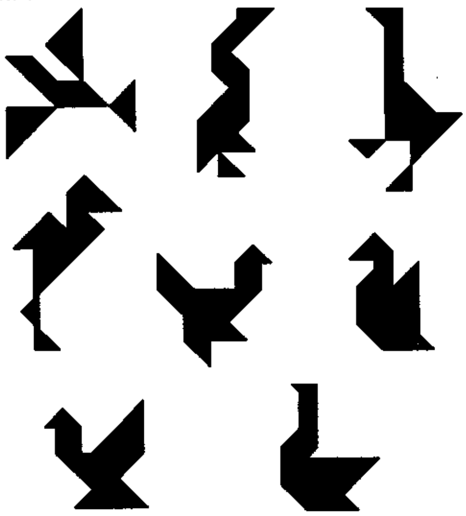
Panplona. 1990

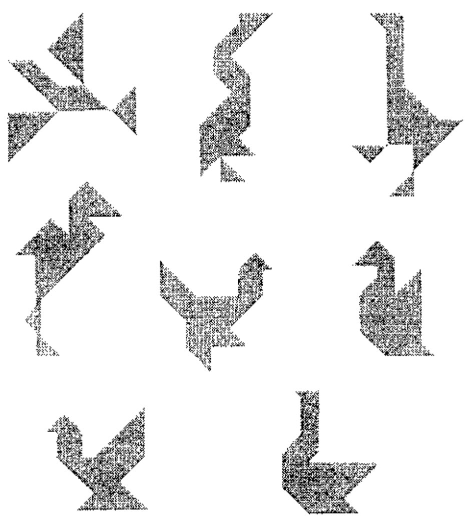
Problema 1

El ICONA, para preservar de su extinción a estos animales, ha elaborado un riguroso plan: "declarar como especies superprotegidas a estas aves".

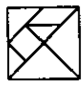
a) Intenta descomponer cada una de estas figuras en las siete piezas del TANGRAM y dibújalas en las siluetas adjuntas.

Tomando como unidad de superficie la pieza cuadrada, ¿cuál será la superficie de cada una de las aves?





Nota: El TANGRAM está formado por siete figuras que forman un cuadrado de la forma siguiente.

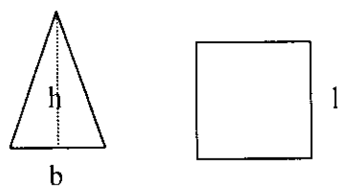


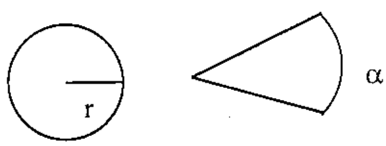
Problema 2

Tres parejas de novios deciden pasar la tarde en la Sierra de Huelva; tras preparar la merienda, emprenden un viaje paralelo a uno de los márgenes del río Odiel y llegan a un paraje encantador para quedarse. Para acceder a él deben atravesar el río: el bote en el que han de hacerlo sólo puede transportar a dos personas a la vez. Se pregunta cómo pasarán seis personas, de manera que ninguna mujer quede en compañía de uno o dos hombres si no está presente su novio.

Problema 3

Dibuja figuras cuya superficie sea el doble de las que se dan a continuación.



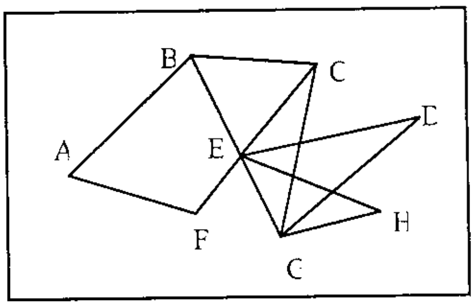


Problema 4

Últimamente muchos "profes" de Matemáticas que conocéis se quejan de que la geometría está olvidada. Estamos seguros de que vosotros vais a demostrar lo contrario. Te vamos a proponer un problema en el que el razonamiento que utilices para la resolución ha de ser geométrico. ¿Por qué el eje delantero de un tractor que, como sabes, tiene las ruedas delanteras más pequeñas que las traseras, se desgasta más y se calienta con mayor frecuencia que el eje trasero?

Problema 5

La FESPM ha recibido el encargo del Comité Ciclista Internacional de que estudie si existe posibilidad de organizar una prueba "Tour de los matemáticos" por las ciudades A, B, ..., H, de tal modo que los ciclistas recorran todo el trayecto plano sin pasar dos veces por la misma carretera. ¿Puedes ayudar a la FESPM en este difícil compromiso?



Problema 6

A veces, cuando paseamos, observamos que algunas matrículas de automóviles, los números de las casas..., contienen cifras curiosas que se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, como el número 1331. Estos números se llaman capicúas. Sin contar los números de un sólo dígito:

a) ¿Cuál es el menor número primo capicúa?
b) ¿Cuál es el menor capicúa que sea un cuadrado perfecto?

¿Cuáles son los cinco primeros números primos capicúas entre el 100 y el 200?

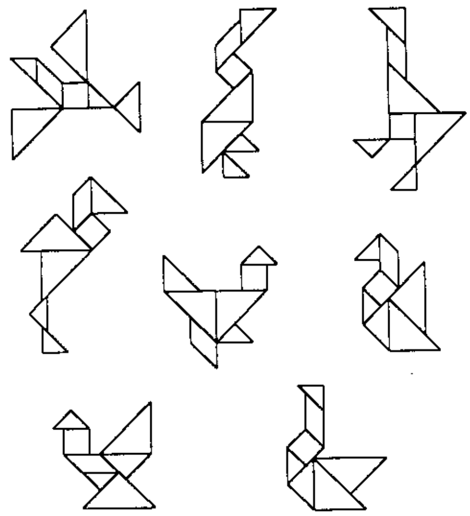
Problema 7

En una ciudad, 2/3 de los hombres están casados con los 3/5 de las mujeres. Si nunca se casan con forasteros, ¿cuál es la proporción de solteros en dicha ciudad?

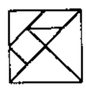
Soluciones

Problema 1. Solución

a)



b) Si se observa el TANGRAM, se verá que está formado por siete piezas: cinco triángulos, un paralelogramo y un cuadrado, como indica la figura:



Es fácil ver que la pieza cuadrada, señalada en la figura, es la octava parte del cuadrado total. Por tanto, el TANGRAM medirá ocho cuadrados y cada una de las figuras medirán también ocho cuadrados, porque cada una de ellas está construida con todas las piezas del rompecabezas.

Problema 2. Solución

Designemos los maridos por las letras mayúsculas A, B y C y sus mujeres respectivas por las minúsculas a, b y c. Se tiene de partida:

Primera orilla	Segunda orilla
A B C	* * *
a b c	* * *

Se procederá de la manera siguiente, observando que después de cada viaje el barco es amarrado a la segunda orilla.

Pasan dos mujeres:

A B C	* * *
* * c	a b *

Una mujer vuelve y se lleva la tercera:

A B C	* * *
* * *	a b c

Vuelve una mujer, se queda con su marido y pasan los otros dos maridos:

* * C	A B *
* * c	a b *

Un marido vuelve con su mujer y se lleva al otro marido:

* * *	A B C
* b c	a * *

La mujer que ha pasado vuelve a buscar a una de las otras dos:

* * *	A B C
* * c	a b *

Una de las mujeres vuelve a buscar a la última:

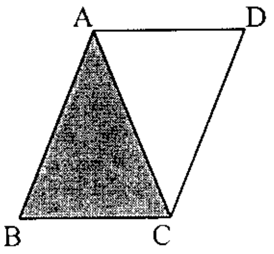
* * *	A B C
* * *	a b c

Problema 3. Solución

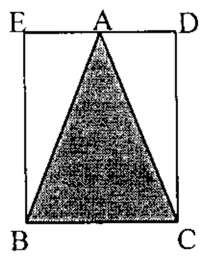
3. Se apuntan algunas de las posibles soluciones geométricas.

Para el caso del triángulo:

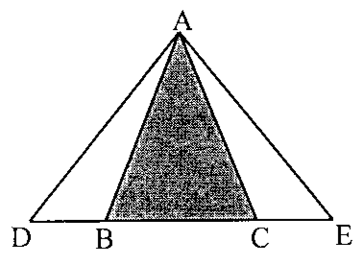
La 1ª solución se ha obtenido construyendo un paralelogramo ABCD, de igual base y altura que el triángulo, trazando por C una paralela al lado AB y por A otra paralela al lado BC.



La 2ª solución se obtiene construyendo un rectángulo BCDE, de igual base y altura que el triángulo, trazando las paralelas BE y CD a la altura y la paralela ED a la base BC.

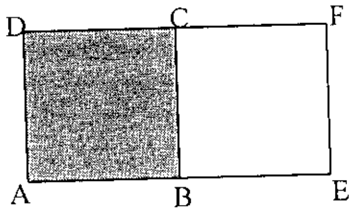


La 3ª solución se obtiene construyendo un triángulo de base doble que la del triángulo dado y de igual altura.

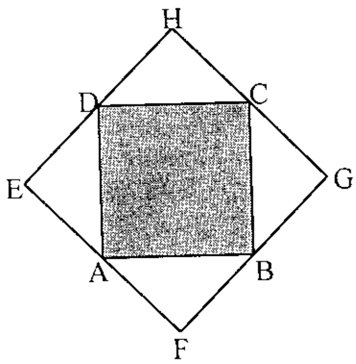


Para el caso del cuadrado:

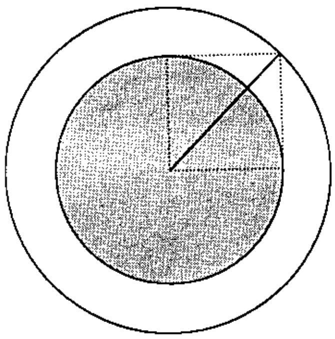
La 1ª solución es un rectángulo AEFD, de base doble de lado al cuadrado y de igual altura.



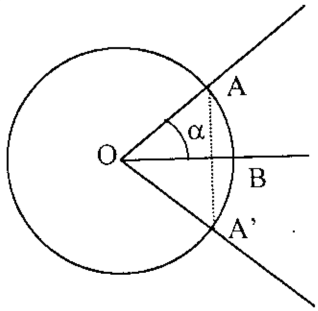
La 2ª es el cuadrado EFGH, que se obtiene trazando paralelas a las diagonales por cada uno de los vértices.



Para el caso del círculo:
La solución se ha obtenido determinando un círculo de radio R tal que su área $\pi R^2 = 2\pi r^2$. Por tanto $R = r\sqrt{2}$, que es la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado r.



4) Se ha construido un sector circular de amplitud 2α. Para ello se ha obtenido el punto A', simétrico del punto A con respecto a la recta OB.



Problema 4. Solución

Efectivamente, si los radios son r y R, con r < R, para recorrer una longitud L las ruedas han de dar L/2πr y L/2πR vueltas, respectivamente, siendo la primera fracción mayor que la segunda por tener menor denominador. Por tanto, en un mismo recorrido, el numero de vueltas que da la rueda delantera es mayor que el de vueltas que da la trasera, y a mayor número de vueltas corresponde mayor desgaste y mayor calentamiento.

Problema 5. Solución

Dos soluciones pueden ser:

B A F E C B E G D E H G C

B A F E C B E G H E D G C

Problema 6. Solución

a) Un número de dos cifras será de l forma $[aa] = 10a + a = 11a$. Sólo ser primo cuando a = 1. Entonces el meno número primo capicúa es el 11.

b) El menor número capicúa que se cuadrado perfecto es 121.

c) Los cinco números primero capicúas entre el 100 y el 200 son: 101 131, 151, 171 y 181.

Problema 7. Solución

Sea h el numero de hombres y m el numero de mujeres de la ciudad. Como no se casan con forasteros, el número de hombres casados será igual al de mujeres casadas:

$$\frac{2h}{3}=\frac{3m}{5} \quad \Rightarrow \frac{h}{m}=\frac{9}{10}$$

Entonces, de cada 19 personas, 9 son hombres y 10 mujeres.
Si 2/3 de los hombres son casados, 1/3 serán solteros. Habrá 3 solteros entre las 19 personas.
Si 3/5 de las mujeres son casadas, 2/5 serán solteras. Habrá 4 solteras.
El número total de solteros (hombres y mujeres) en cada 19 personas será 7.
Por tanto, la proporción de solteros será 7/19.

Un topólogo es una persona que no distingue entre una taza de café i un donut.

II Olimpiada

Canarias (La Laguna, Las Palmas y Lanzarote). 1991

Problema 1

En una votación para la elección de un alcalde entre dos candidatos A y B se emiten 9 votos y gana A por uno.
Hallar y describir el número de maneras en que pueden contarse las papeletas de votación, de tal forma que siempre vaya por delante el candidato ganador.

Problema 2

Las reglas de "Tres en raya" son bien conocidas: sobre las casillas de un tablero 3 x 3, dos jugadores colocan sus piezas alternativamente, (cruces y monedas, por ejemplo). Gana quien consigue una línea recta con sus piezas, bien sea horizontal, vertical u oblicuamente. Pues bien, observando las figuraas 1, 2 y 3 y considerando que, aun sin ser expertos, ambos jugadores saben jugar, resuelve las siguientes situaciones:

En el tablero de la figura 1 ¿cuál fue el primero en jugar, cruces o monedas?
En el tablero de la figura 2 ¿es posible que se dé esta situación?
En el tablero de la figura 3 ¿en qué casilla se hizo la última jugada?

Explícalo adecuadamente.

	X	
	●	X
		●

Fig. 1

X	●	●
●	X	●
X	●	X

Fig. 2

X		X
	●	
●		X

Fig. 3

Problema 3

Se quiere batir el record Guinness de apilamiento de pelotas de tenis. Para ello se forma una pirámide de base cuadrada adosando las pelotas y disminuyendo en cada capa una pelota por lado de sucesivos cuadrados hasta la bola fi que formará el vértice superior de pirámide.
Sabiendo que el número de bolas del l de la base es 1.000, ¿cuántas pelotas verán exactamente?

Problema 4

Tenemos el número suficiente de cub como el de la figura 1. Los apilar formando un cubo de 2 x 2 x 2 cubi ¿Cuántos cubitos no se ven sin variar punto de vista de la figura? Basta con veas una de las caras del cubito p considerar que se ve (figura 2).
Tomamos 27 cubitos y los apilamos h formar un cubo de 3 x 3 x 3, (figura ¿Cuántos cubitos no ves?
Se hace lo mismo con un cubo 4 x 4 x 64. ¿Cuántos cubitos ves?
¿Y en el caso de que se apilen n x n x n^3 cubitos?

Fig. 1

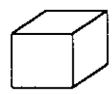


Fig. 2

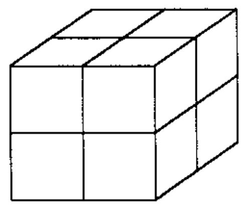
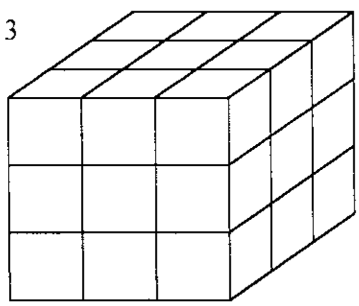


Fig. 3

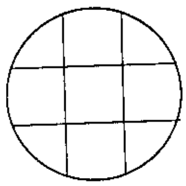


Problema 4

Demuestra que si al producto de los números anteriores y posteriores a cualquier múltiplo de 6 le sumamos 1 el resultado es múltiplo de 36.

Problema 5

En el país de los números andan locos para intentar colocar las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 en ocho de los espacios de esta superficie circular, atendiendo a la siguiente condición:
No pueden estar dos números consecutivos formando frontera por línea ni vértice.
¿Puedes encontrar una solución?

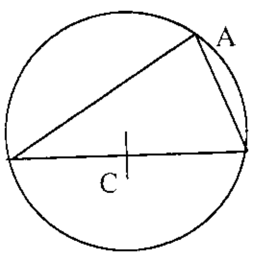


Problema 6

Si a los términos de una fracción irreducible se les suma el denominador y a la fracción resultante se le resta la de partida, se obtiene de nuevo ésta. ¿De qué fracción se trata?

Problema 7

Demuestra que el ángulo A de la figura es recto. El lado opuesto a A es un diámetro del círculo.



Problema 8

En la Agencia de Investigaciones MIA, (Matemáticas Investigadas y Aclaradas), han de resolver cierto número de misiones, pero disponemos de un número de agentes tal que: si encargamos una misión a cada agente, sobran "x" misiones; pero si damos "x" misiones a cada agente, se quedan "x" agentes sin misión. Como los agentes y misiones suman menos de 15, ¿sabrías decirnos cuántos agentes y misiones son?

Problema 10

¡Mira qué fácil se simplifican esta serie de fracciones!

$$\frac{16}{64} = \frac{1\ (6)}{(6)\ 4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{166}{664} = \frac{1(66)}{(66)4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1666}{6664} = \frac{1(666)}{(666)4} = \frac{1}{4}$$

¿Hay fracciones como la primera serie, donde el numerador y el denominador son números entre 10 y 100 con sus cifras diferentes y que se "simplifican" de igual manera?
¿Generan fracciones de forma diferente a como lo hace $\frac{16}{64}$?

Soluciones

Problema 1. Solución

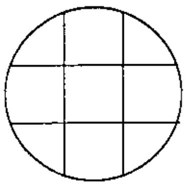
Si nos situamos en una cuadrícula y hacemos un movimiento horizontal por cada voto obtenido por un candidato (por ejemplo el A) y un movimiento vertical por cada voto obtenido por el otro (el candidato B), tendremos una situación como la que nos muestra la figura:

Problema 4

Demuestra que si al producto de los números anteriores y posteriores a cualquier múltiplo de 6 le sumamos 1 el resultado es múltiplo de 36.

Problema 5

En el país de los números andan locos para intentar colocar las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 en ocho de los espacios de esta superficie circular, atendiendo a la siguiente condición:
No pueden estar dos números consecutivos formando frontera por línea ni vértice.
¿Puedes encontrar una solución?

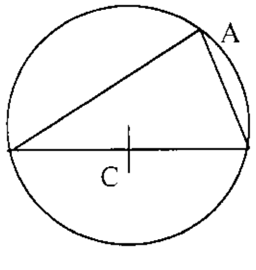


Problema 6

Si a los términos de una fracción irreducible se les suma el denominador y a la fracción resultante se le resta la de partida, se obtiene de nuevo ésta. ¿De qué fracción se trata?

Problema 7

Demuestra que el ángulo A de la figura es recto. El lado opuesto a A es un diámetro del círculo.



Problema 8

En la Agencia de Investigaciones MIA, (Matemáticas Investigadas y Aclaradas), han de resolver cierto número de misiones, pero disponemos de un número de agentes tal que: si encargamos una misión a cada agente, sobran "x" misiones; pero si damos "x" misiones a cada agente, se quedan "x" agentes sin misión. Como los agentes y misiones suman menos de 15, ¿sabrías decirnos cuántos agentes y misiones son?

Problema 10

¡Mira qué fácil se simplifican esta serie de fracciones!

$$\frac{16}{64} = \frac{1\ (6)}{(6)\ 4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{166}{664} = \frac{1(66)}{(66)4} = \frac{1}{4}$$

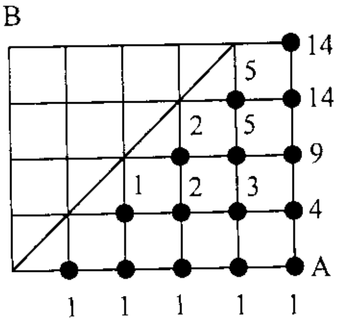
$$\frac{1666}{6664} = \frac{1(666)}{(666)4} = \frac{1}{4}$$

¿Hay fracciones como la primera serie, donde el numerador y el denominador son números entre 10 y 100 con sus cifras diferentes y que se "simplifican" de igual manera?
¿Generan fracciones de forma diferente a como lo hace $\frac{16}{64}$?

Soluciones

Problema 1. Solución

Si nos situamos en una cuadrícula y hacemos un movimiento horizontal por cada voto obtenido por un candidato (por ejemplo el A) y un movimiento vertical por cada voto obtenido por el otro (el candidato B), tendremos una situación como la que nos muestra la figura:



Como el candidato A va siempre por delante, nos hemos de mover por debajo de la diagonal.
El número de maneras será igual al número de caminos que podamos construir desde el extremo inferior izquierdo hasta el superior derecho.
En cada vértice tenemos el número de caminos diferentes que hay desde el origen.
Como vemos, el resultado es de 14.

Este ejercicio puede abordarse construyendo las distintas formas de obtener cada uno de los votos a partir del voto anterior, aunque de una forma más laboriosa.

1	A		
2	AA		
3	AAA	AAB	
4	AAAA	AAAB	AABA
5	AAAAA	AAAAB	AAABA
	AAABB	AABAB	
6	AAAAAB	AAAABA	AAAABB
	AAABAA	AAABAB	AAABBA
	AABAAA	AABAAB	AABABA
7	AAAAABB	AAAABAB	AAAABBA
	AAAABBB	AAABAAB	AAABABA
	AAABABB	AAABBAA	AAABBAB
	AABAAAB	AABAABA	AABAABB
	AABABAA	AABABAB	
8	AAAAABBB	AAAABABB	AAAABBAB
	AAAABBBA	AAABAABB	AAABABAB
	AAABABBA	AAABBAAB	AAABBABA
	AABAAABB	AABAABAB	AABAABBA
	AABABAAB	AABABABA	
9	AAAAABBBB	AAAABABBB	AAAABBABB
	AAAABBBAB	AAABAABBB	AAABABABB
	AAABABBAB	AAABBAABB	AAABBABAB
	AABAAABBB	AABAABABB	AABAABBAB
	AABABAABB	AABABABAB	

Problema 2. Solución

1) Pasando por alto el que haya una moneda en el centro, juegan cruces, ya que partimos del hecho de que los jugadores saben jùgar y el jugador "cruz" no hubiera desperdiciado una tirada sin evitar que el jugador "moneda" se hiciera una línea.
2) No tiene sentido, ya que hay una línea de cruces hecha y el número de monedas excede al de cruces.
3) La última jugada se hizo en la casilla de arriba a la derecha para evitar que el jugador "moneda" haga línea.

Problema 3. Solución

Veamos el número de bolas que se ven externamente en cada una de las capas.
En la capa superior, con una pelota, se ve dicha pelota.
En la segunda capa, que consta de 4 bolas, se ven también todas.
La tercera capa es un cuadrado de 3 bolas por cada lado; se ven las que forman los lados, que son 3 en la parte anterior, 3 en la posterior y 1 más por cada lateral; en total 8 bolas.
La cuarta capa consta de = 16 bolas, de las que se ven 4 en la cara anterior, 4 en la posterior y 2 en cada cara lateral; en total se ven 12 bolas.
En general, en la n-ésima capa, de bolas, se ven

$$n+n+(n-2)+(n-2)=4n-4$$

pelotas.
Así, de la última capa, se verán

$$4\cdot 1000-4=3996$$

En el conjunto de la pirámide se verán

$$1+4+8+12+\ldots+3996=$$
$$=1+(4+8+12+\ldots+3996)$$

Se observa que la suma entre paréntesis corresponde a los términos de una progresión aritmética de diferencia 4 y el número de términos que se suman es de

$$S=1+\frac{4+3996}{2}\bullet 999=1.998.002$$

2ª forma

Calcularemos el número de bolas visibles restando del total de bolas la cantidad de ellas que no se ve.

Llamemos B_t a la primera cantidad y B_i a la segunda.

Puesto que en cada capa hay n^2 bolas tenemos:

$$B_t=1+2^2+3^3+4^2+\ldots+999^2+1000^2$$

Razonando de la misma manera que hicimos anteriormente, en la primera capa están todas visibles, así como en la segunda; en la capa 3ª no se ve 1 de las 9 bolas; en la capa 4ª no se ve el cuadrado interior de 2 bolas por lado, es decir, 4 bolas; razonando de esta manera, en la capa n no se ve el cuadrado de n–2 bolas por lado: así, en la última capa, no se ven las bolas que forman un cuadrado de 998 por lado:

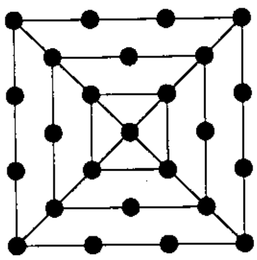
$$B_i=1+2^2+3^2+4^2+\ldots+998^2$$

Restando B_i de B_t:

$$Bt-Bi=$$
$$=(1+2^2+3^2+4^2+\ldots+999^2+1000^2)-$$
$$-(1+2^2+3^2+4^2+\ldots+998^2)=$$
$$=999^2+1000^2=1.998.001$$

3ª forma

Observemos la pirámide desde el vértice superior.



En la cara anterior se ven

$$1+2+3+\ldots+998+999+1000$$

En la cara posterior descontamos la bola del vértice, y el número de ellas visible será

$$2+3+\ldots+998+999+1000$$

En cada una de las caras laterales descontamos la del vértice y la de las aristas, que ya se incluyeron en las caras anterior y posterior.

Sumando todas las bolas obtenemos

$$\begin{array}{rl} & 1+2+3+\ldots+998+999+1000 \\ & \quad 2+3+\ldots+998+999+1000 \\ & 1+2+3+\ldots+998 \\ & 1+2+3+\ldots+998 \\ \hline Bt= & 3+8+12+\ldots+3992+1998+2000= \\ = & 3+1998+2000+4\cdot(2+3+\ldots+998) \end{array}$$

La suma del paréntesis corresponde a la suma de 997 términos de una progresión aritmética de diferencia 1:

$$S=4001+4\cdot\frac{2+998}{2}\cdot 997=1.998.001$$

4ª forma

Las pelotas que hay en una cara lateral de la pirámide son:

$1000+999+998+\ldots+1$

que es la suma de los mil primeros números naturales.

Para calcular esta suma observamos que

$1001+1=999+2=9998+3=$

$\ldots=500+501=1001$

esto es, asociamos los números por parejas equidistantes de los extremos cuya suma es 1001. Como resultan 500 parejas, la suma valdrá

$500\,x\,1001 = 500.500$

En las cuatro caras habrá

$4x500.500=2.002.000$

Como cada esquina la hemos contado dos veces, tenemos que restar $4\cdot 1.000$.

Con esto, la pelota de arriba no la estamos considerando, por lo que debemos añadir una. Quedará así:
$2.002.000 - 4 \cdot 1.000 + 1 = 1.998.001$

Problema 4. Solución

En la figura 1 la repuesta es 0.
En la figura 2 la respuesta es 1.
En la figura 3 la respuesta es 8.

Parece pues que para "n" la respuesta es

$$(n-1)^3$$

En realidad, siempre se ven tres caras, o sea $3 \cdot n^2$ cubitos; pero como se cuentan dobles todos los de las aristas, hay que restar $3 \cdot n$; con ello, el de la esquina, que se había contado 3 veces, una por cada arista, se ha restado también 3 veces, luego hay que añadirlo. Se verán entonces:
$3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1$
y, como en total, hay n^3 cubitos, el número de los que se ven es:
$n^3 - (3n^2 - 3n + 1) = n^3 + 3n^2 - 1 = (n-1)^3$

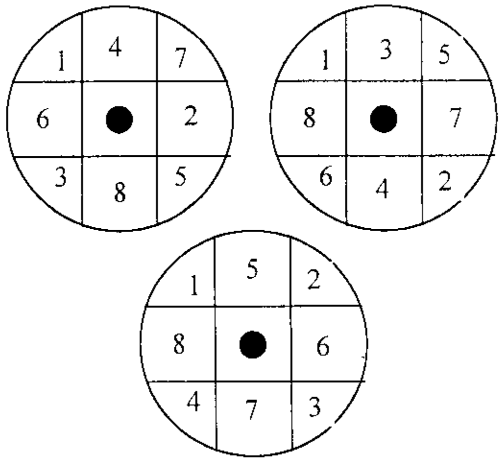
Problema 5. Solución

Un múltiplo de 6 es 6n, siendo "n" un número natural.
Los números anterior y posterior serán $6n - 1$ y $6n + 1$, cuyo producto vale $(6n-1) \cdot (6n+1) = 36n^2 - 1$
que es múltiplo de 6.

Problema 6. Solución

En el espacio central no debe haber ninguna cifra, pues si así fuera, formaría frontera con todos los espacios de alrededor.

Hay varias soluciones. Algunas de ellas son:



Problema 7. Solución

Sea $\frac{x}{y}$ una fracción tal que $m.c.d.(x, y) = 1$, esto es irreducible.
Entonces:
$\frac{x+y}{2y} - \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \Rightarrow x + y - 2x = 2x$
$\Rightarrow y = 3x$

Como $m.c.d.(x, y) = 1$, ha de ser: $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$

Problema 8. Solución

<u>1ª forma</u>
Completemos el paralelogramo (Fig.1) trazando paralelas a cada lado desde el vértice opuesto. El diámetro primitivo, FE, se transforma en una diagonal y la otra diagonal, AD, resulta ser también un diámetro. De esta manera las dos son iguales y el paralelogramo es un rectángulo, con sus cuatro ángulos rectos.

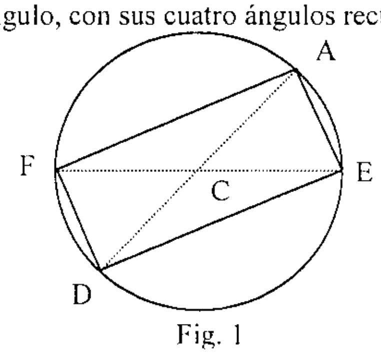
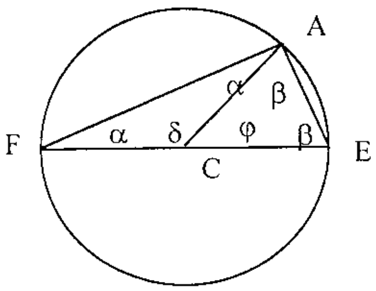


Fig. 1

2ªforma

Tracemos el radio de la circunferencia que une el centro C con el vértice A (Fig.2). Así, el ángulo A se descompone en α + β, como se observa en la figura, pues los dos triángulos obtenidos son isósceles y, por tanto, los ángulos adyacentes al lado desigual son iguales entre sí. De esta forma:



$$\left.\begin{array}{l}\delta = 180^\circ - 2\alpha \\ \varphi = 180^\circ - 2\beta \\ \delta + \varphi = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta + \varphi = 360^\circ - 2(\alpha + \beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

3ª forma

Situemos el centro de la circunferencia en el eje de coordenadas (Fig. 3).

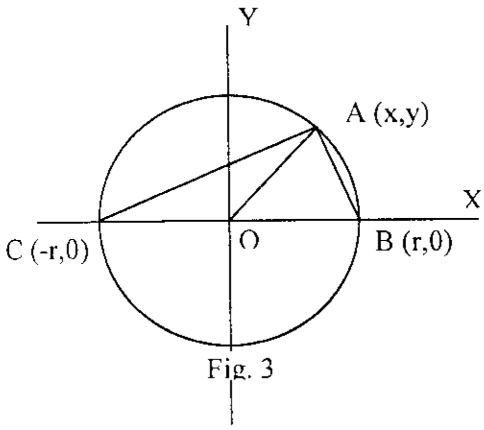


Fig. 3

Llamamos A (x,y) al vértice del ángulo y B (r,0) los puntos de intersección de la circunferencia con el eje X, donde r es el radio de la circunferencia.

Por ser A (x,y) un punto de la circunferencia, se verificará la ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Los vectores BA y CA tienen por coordenadas (x–r, y) y (x+r, y) respectivamente. Su producto escalar es:

$$BA \cdot CA = (x-r) \cdot (x+r) + y^2 = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

De donde BA y CA son ortogonales y el ángulo A de 90°.

4° forma

Sea BC el diámetro y 0 el centro de la circunferencia. Al trazar el radio ( ) A se forman los triángulos A0B y A0C, ambos isósceles, pues los lados 0A, 0B y 0C son iguales al radio.

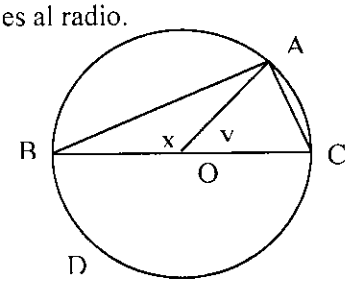


Fig. 4

Sean x e y los ángulos A0B y A0C. Tenemos que

$$A = \frac{180^\circ - x}{2} + \frac{180^\circ - y}{2} =$$

$$= \frac{360 - (x+y)}{2} = \frac{360^\circ - 180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Luego el ángulo A es recto.

Problema 9. Solución

Sea

a = número de misiones

b = número de agentes

Se verifica que

a – b = x y x (b – x) = a

Resolvemos el sistema y nos queda

$$a = \frac{2x^2}{x-1} \text{ y } b = \frac{x(x+1)}{x-1}$$

y como a + b > 15, ha de ser

$$\frac{2x^2}{x-1}+\frac{3x^2+x}{x-1}=\frac{3x^2+x}{x-1}<15$$

inecuación que tiene sus soluciones en el intervalo $\frac{5}{3}<x<3$, por tanto x=2, y el número de misiones será a=8 y el de agentes b=6.

2ª forma
Como b es natural, x-1 puede tomar distintos valores: x-1=1, x-2=2, ...
Si x-1=1, entonces x=2, a=8 y b=2. Solución válida.
Si x-1=2, entonces x=3, a =9 y b=6, que sumarían 15 y no sería válida.
Para valores superiores tampoco serían válidas las soluciones.

3ª forma
Sea

x el número de misiones
y el número de agentes.

Realizando el primer reparto, una misión para cada agente, tendremos que el número de misiones por cubrir será x-y, con x>y.
Si lo realizamos de la segunda forma tendríamos que $y-\frac{x}{x-y}$ sería el número de los agentes sin ocupar. Como ambos han de coincidir se obtiene:

$$x-y=y-\frac{x}{x-y}\Rightarrow$$
$$(x-y)^2-y(x-y)=-x\Rightarrow$$
$$x-2y<0\Rightarrow$$
$$x<2y$$

y teniendo en cuenta que x e y han de sumar menos de 15, es decir que tanto x como y han de ser inferiores a 14, por eliminación obtenemos x=8 e y=6.

4ª forma
Sea
a=número de misiones
b=número de agentes.
Como $x(b\text{-}x)=a$, el número de misiones ha de ser inferior a 15 y "a" tiene que ser compuesto, los posibles valores de los factores serían:

a=14 $\Rightarrow$ x=2, b-x =7
a=12 $\Rightarrow$ x=2, b-x=6

y por eliminación llegaríamos a la misma solución.

5ª forma
Sea "m" el número de misiones y "a" el número de agentes. Con el enunciado del problema tenemos tres ecuaciones.

m = a + x
x (a-x) =m
a +m < 15

Como m=a+x, será m<a, y, como a+m<15, entonces a debe ser menor o igual que 6.
De la segunda ecuación resulta:
a+x =ax-x ^{2}, luego x ^{2} +(1-a)x+a=0.
En esta ecuación el valor del discriminante es: a ^{2} -6a+1.
Como x es un número natural, dicho discriminante debe ser un cuadrado perfecto, por lo tanto:

a ^{2} >6ª-1

y para ello a debe ser mayor o igual que 6.
Como antes teníamos que a 6, entonces necesariamente a=6.
Volviendo a la ecuación de segundo grado, si sustituimos a por su valor obtenemos dos posibles valores para x (3 ó 2).
Teniendo presente que a+m<15, resulta:

m=8 y x=2

Habrá, pues, 8 misiones y 6 agentes.

Problema 10. Solución

Buscamos fracciones de la forma $\frac{an}{na}$ con la condición de que se verifique que

$\frac{an}{na}=\frac{a}{b}$, donde n toma los valores de 1 a 9, a y b cifras diferentes y con a distinta de cero.

La condición anterior nos lleva a:

$$(10a+n)b=a(10n+b)\Rightarrow$$
$$a(10n-9b)=nb$$

Empecemos dando a n los sucesivos valores que puede tomar:

Para n=1

a(10n - 9b) = nb a(10 - 9a) = b⇒

$$\begin{cases} b=0\Rightarrow 10a=0\Rightarrow a=0 \\ b=1\Rightarrow a=1 \end{cases}$$

siendo ambos resultados imposibles pues a debe ser distinto de cero y a y b distintos.

Para n=2

$$a(10n-9b)=nb\Rightarrow$$
$$\begin{cases} b=0\Rightarrow 20a=0\Rightarrow a=0 \\ b=1\Rightarrow 11a=2\Rightarrow a\notin \mathrm{N} \\ b=2\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2 \end{cases}$$

siendo los resultados imposibles por razones análogas al caso anterior.

Para n=3

De forma similar a la anterior se demuestra que no hay solución.

Para n=4

$$a(10n-9b)=nb\Rightarrow a(40-9b)=4b\Rightarrow$$
$$\begin{cases} b=0\Rightarrow 40a=0\Rightarrow a=0 \\ b=1\Rightarrow 31a=2\Rightarrow a\notin \mathrm{N} \\ b=2\Rightarrow 22a=8\Rightarrow a\notin \mathrm{N} \\ b=3\Rightarrow 13a=12\Rightarrow a\notin \mathrm{N} \\ b=4\Rightarrow 4a=16\Rightarrow a=4 \end{cases}$$

resultados que no son válidos.

Para n=5

Resultaría que $a(50\text{-}9b)=5b$, donde b puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5, que con ninguno de ellos se obtiene resultado válido.

Para n=6

Sería $a(60\text{-}9b)=6b \Rightarrow a(20\text{-}3b)=2b$, donde b pude tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Haciendo un estudio similar a los anteriores casos resultan como únicos valores posibles de a 1 y 2, correspondientes a b=4 y b=5, respectivamente.

Si b=4 y a=1, la solución que se obtiene es la del enunciado del problema, al ser n=6, el numerador es "an=16" y el denominador "nb=64", siendo la fracción $\frac{16}{64}$

Si b=5 y a=2, se obtiene como solución:

$$\frac{26}{65}=\frac{266}{665}=\frac{2.666}{6.665}=\text{............}=\frac{2}{5}$$

Para n=7 y n=8 se puede probar que no hay solución.

Para n=9

Sería $a(90\text{-}9b)=9b\Rightarrow a(10-b)=b$, donde b puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, obteniéndose solución para los valores de b 5 y 8.

Si b=5 es a=1, y las fracciones serían:

$$\frac{19}{95}=\frac{199}{995}=\frac{1.999}{9.995}=...=\frac{1}{5}$$

Si b=8 es a=4, y las fracciones

$$\frac{49}{98}=\frac{499}{998}=\frac{4.999}{9.998}=...=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Demostraremos finalmente que esta forma de simplificar es correcta en este tipo de fracciones. Para ello elegimos una de ellas y probamos la validez de la simplificación. Sea por ejemplo:

$$\frac{1666...6}{66...664}=$$
$$\frac{6+6\cdot 10+6\cdot 10^2+...+6\cdot 10^{n-1}+10^n}{4+6\cdot 10+6\cdot 10^2+...+6\cdot 10^{n-1}+6\cdot 10^n}=$$
$$\frac{6(1+10+10^2+...+10^{n-1})+10^n}{4+6(1+10+10^2+...+10^n)}$$

siendo los paréntesis que figuran en el numerador y denominador sumas de progresiones geométricas, por tanto

$$\frac{6\dfrac{10^{n-1}}{9}+10^{n}}{4+6\dfrac{10^{n-1}-10}{9}}=$$

$$\frac{15\cdot 10^{n}-6}{60\cdot 10^{n}-24}=\frac{3\cdot(5\cdot 10^{n}-2)}{12\cdot(5\cdot 10^{n}-2)}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

De forma similar demostraríamos que las otras fracciones son también reducibles.

<u>2ª forma</u>

Buscamos fracciones tales que:

$$\frac{ax}{xb}=\frac{a}{b};\frac{axx}{xxb}=\frac{a}{b};\frac{axxx}{xxxb}=\frac{a}{b};\text{ etc.}$$

De la primera equivalencia, tenemos

$$10\cdot ab+xb=10\cdot ax+ab$$

luego $x(10ab)=9ab$

es decir

$$x=\frac{9ab}{10a-b}$$

(De las otras equivalencias se obtiene la misma condición)

Para a=1, hacemos variar de 1 a 9, y los únicos casos en los que obtendremos un valor de x natural de un dígito son:

a=1, b=4, x=6, que origina las fracciones del enunciado

a=1, b=5, x=9, que origina las fracciones:

$$\frac{19}{95}=\frac{1}{5};\frac{199}{995}=\frac{1}{5};\frac{1999}{9995},\text{ etc.}$$

Se hace lo mismo para a=2, y obtenemos la serie:

$$\frac{26}{65}=\frac{2}{5};\frac{266}{665}=\frac{2}{5};\frac{2666}{6665}=\frac{2}{5},\text{ etc.}$$

Haciendo lo mismo para el resto de los posibles valores de a, sólo obtenemos otra serie:

$$\frac{49}{98}=\frac{4}{8};\frac{499}{998}=\frac{4}{8};\frac{4999}{9998}=\frac{4}{8},\text{ etc.}$$

¿Qué es un oso polar?

Un oso rectangular después de un cambio de coordenadas.

III Olimpiada

Huelva. 1992

Problema 1

Comienza con 3 y 4, luego se continúa sumando éstos, y luego el 4 y el 7 nos da 11, y ...

3	4	7	11	18	29

Pero si te dan sólo el primer número y el último, ¿sabrías cuáles son los otros números?

6					63

Problema 2

Calcula el producto L x H sabiendo que:

$$L = a + b + c$$
$$H = d + c = f + g$$

siendo a, b, c, d, f y g números naturales y que:

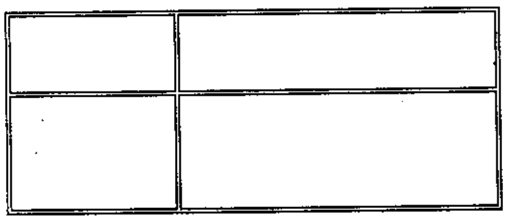
$$b \times f = 91$$
$$a \times d = 18$$
$$c \times d = 16$$
$$b \times g = 39$$

Problema 3

El Ayuntamiento de Bollullos Par del Condado dispone de un terreno en forma rectangular, doble de largo que de ancho. Quiere parcelar el mismo en cuatro parcelas, también rectangulares, para dedicarlas a distintos usos, a saber:

- La menor, a zona de servicios, cuya superficie está comprendida entre 30 y 40 m.
- La mayor, para una cancha de baloncesto de 450 m^2, semejante al terreno.
- Las otras dos, iguales en superficie, a zonas verdes.

¿De cuántos metros cuadrados dispone el Ayuntamiento de Bollullos?

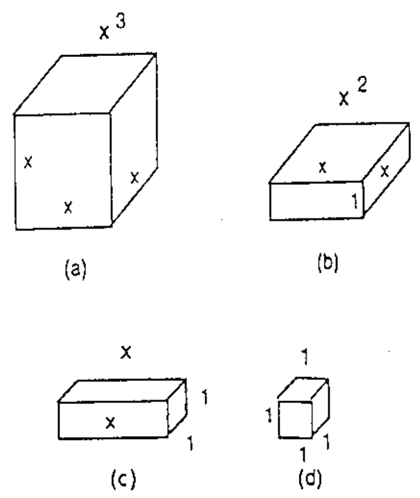


Problema 4

El marido de una señora embarazada fallece antes de dar a luz. Su deseo es que, si nace el niño, 2/3 de su herencia sea para el niño y 1/3 para la madre; pero si nace niña, 1/3 de la herencia sería para la madre y los 2/3 restantes para la niña. Como quiera que han nacido gemelos, niño y niña, el albacea testamentario se pregunta: <<¿Cómo he de hacer el reparto?>> ¿Podrías resolverle esa dificultad?

Problema 5

Aquí tienes un juego, el ORTOPOLI:
Como ves, se compone de cuatro piezas tal



como se indica en el dibujo, manipulables todas.
- La pieza (d), por tener la arista unidad, será: 1.1.1=1
- La pieza (c), por desconocer una de las dimensiones, será: x.1.1=x
- La pieza (b) será: $x.x.1 = x^2$
- La pieza (a) será: $x.x.x = x^3$

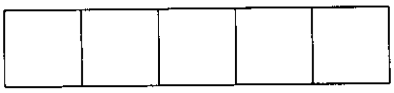
Con las piezas que creas necesarias forma razonadamente las siguientes expresiones, haciendo posteriormente el dibujo:

c) 8 f) 3x g) x(x+1)x

Teniendo en cuenta los dibujos y, si quieres, utilizando las piezas, indica la expresión que representan.

Problema 6

Los pentominós son figuras formadas por cinco cuadrados unidos por uno de sus lados:

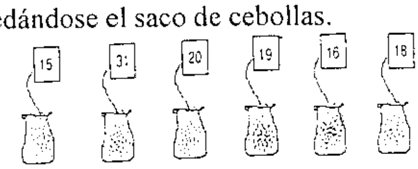


En este tablero hemos distribuido 25 vocales y te pedimos que localices cinco pentominós distintos y que en todos ellos existan las vocales a, e i, o, u.

e	a	i	o	i
u	e	u	e	o
o	i	a	o	a
i	u	e	a	i
a	o	u	e	u

Problema 7

En un puesto de venta del mercado de mayoristas de mi ciudad sólo quedan 6 sacos, todos ellos de patatas, salvo uno que era de cebollas. Llegó un cliente y se llevó una cierta cantidad de patatas; posteriormente llegó otro cliente que se llevó el doble de patatas que el anterior, quedándose el saco de cebollas.

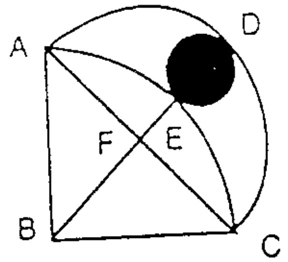


Sabiendo que en este tipo de mercados sólo se venden sacos completos y que todos ellos llevan el peso marcado en la etiqueta según la figura, ¿cuál es el saco de cebollas?

Problema 8

Un Arquitecto quiere construir una piscina con la forma circular DE, y conoce los lados del triángulo ABC, AB = CB= 20cm ¿Eres capaz de sorprenderte, al igual que el arquitecto, cuando comprobó que el área de la figura AECD es la misma que la del triángulo rectángulo isósceles ABC? Demuéstralo.

¿Es posible hacer un "largo" en la dirección ED en la piscina de más de ocho metros? Razona la repuesta.



Soluciones

Problema 1. Solución

Llamando x al segundo término resulta el siguiente cuadro:

6	x	6+x	6+2x	12+3x	18+5x=63

Resolviendo la ecuación resultaría x=9, siendo la solución:

6	9	15	24	39	63

Problema 2. Solución

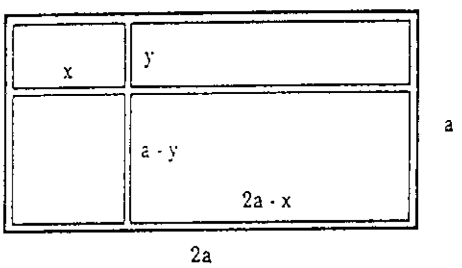
Descomponemos los números 91, 18, 16 y 39 en productos de dos factores:

91 = 7 x 13
18 = 2 x 9 = 3 x 6
16 = 2 x 8
39 = 3 x 13

Entonces:

$$b \times f = 7 \times 13$$
$$a \times d = 2 \times 9 = 3 \times 6$$
$$c \times d = 2 \times 8$$
$$b \times g = 3 \times 13$$

Deducimos que b=13, pues es factor común a 7 x 13 y 3 x 13.
d = 2 (factor común de 18 y 16)
Entonces a = 9, c = 8, f = 7, g = 3
Resulta que L = a + b + c = 30 y H = d + c = f + g = 10
El producto pedido valdrá L x H = 30 x 10 = 300



Problema 3. Solución

Con la notación empleada en la figura:

se obtienen las siguientes relaciones:

$$30 < xy < 40$$
$$(2a - x) \cdot (a - y) = 450$$
$$(2a - x) \cdot y = x \cdot (a - y)$$

De la tercera relación, después de operar, se obtiene que x = 2y, y sustituida en la primera resulta:

$$30 < 2y^2 < 40 \Rightarrow 15 < y^2 < 2$$
$$\Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = 4$$

Llevamos este resultado a la tercera ecuación:

$$(2a - 8) \cdot (a - 4) = 450 \Rightarrow a = 19$$

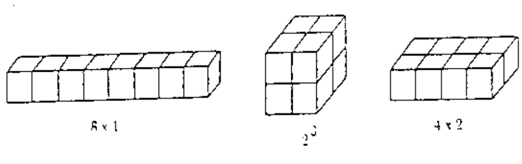
En consecuencia, las dimensiones del terreno son a=19 m i 2a =38 m, siendo 722 la cantidad de metros cuadrados de la que dispone el Ayuntamiento.

Problema 4. Solución

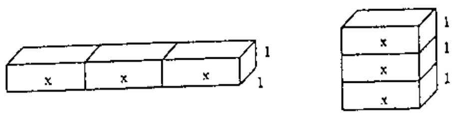
En el caso de nacer niño, éste recibe el doble que la madre, es decir, x = 2y, siendo x la parte del niño e y la de la madre
Si fuera niña, el reparto sería y = 2z, con z la parte correspondiente a la niña.
Por tanto x = 2y = 4z y las partes a recibir son proporcionales a 1, 2 y 4. De aquí que el reparto sea 4/7 para el niño, 2/7 para la madre y 1/7 para la niña.

Problema 5. Solución

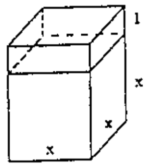
El 8 se puede obtener usando 8 piezas del tipo "d" colocándolas, por ejemplo:



La expresión "3x" la construimos con 3 piezas del tipo "e", colocándolas, por ejemplo:



Por último, la expresión $x(x+1)x = x^3 + x^2$ la dibujamos



Problema 6. Solución

He aquí una disposición:

e	a	i	o	i
u	e	u	e	o
o	i	a	o	a
i	u	e	a	i
a	o	u	e	u

Problema 7. Solución

Si "x" es la cantidad de kilos de patatas que se lleva el primer cliente, 2x será la que se lleva el segundo cliente. Si llamamos c a los kilos de cebollas se deberá cumplir que: x+2x +c = 119 ⇒ 3x = 119 - c ⇒ 119 - c= $\dot{3}$
ecuación que se verifica cuando c=20.
En consecuencia el saco de cebollas es el marcado con el 20 y cada uno de los clientes, se lleva, respectivamente, 33 y 66 kilos de patatas

Problema 8. Solución.

Puesto que los puntos A,C y E pertenecen a una misma circunferencia de centro en B, la distancia BE será también de 20 m.

AC es la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC y su medida será, aplicando el teorema de Pitágoras, de $20\sqrt{2}$, de donde $AF = CF = 10\sqrt{2}$
El área de la figura AECD se obtiene restando al área del semicírculo AFCD el área de AFCE.

a(AECD) = a(AFCD) - a(AFCE)

Por otra parte, esta última área se puede obtener como:

a(AFCE) = a(ABCE) – a(ABC)

De donde:

a(AECD)=a(AFCD)-a(ABCE)+a(ABC)

AFCD es la mitad del círculo de centro en F y radio $CF = 10\sqrt{2}$:

$$a(AECD) = \frac{200\pi}{2} = 100\pi$$

ABCE es un cuarto del círculo con centro en b y radio bc=20

$$a(ABCE) = \frac{400\pi}{4} = 100\pi$$

Luego

$$a(AECD) = 100\pi - 100\pi + a(ABC) = a(ABC)$$

Comprobamos que sí se puede hacer el largo, calculando el diámetro de la piscina

ED = FD – FE

$FE = BE - BF = 20 - 10\sqrt{2}$

$ED = 10\sqrt{2} - 10 + 10\sqrt{2} = 20\left(\sqrt{2} - 1\right) > 8$

Dos vectores se encuentran y uno le dice al otro: "Tienes un momento"

IV Olimpiada

Andorra. 1993

Problema 1

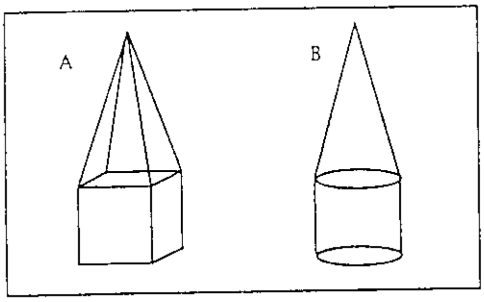
LA CINTA Y EL CARRETE

Sobre un carrete vacío se enrolla firmemente una cinta de 25 metros de largo y 0,1 mm. de espesor, dando así un rodillo de 10 cm. de diámetro.
¿Cuál es el diámetro del carrete original?

Problema 2

EL GORRO DE CARNAVAL

Berta, en las pasadas fiestas de Carnaval, hizo un gorro hueco como el de la figura A, con las siguientes medidas: diagonal de una de las caras cuadradas 36 cm. y altura total de la figura 90 cm.
Alberto hizo un gorro como el de la figura B y utilizó la misma cantidad de cartulina que Berta.
Sabemos además que:
- Área lateral de la pirámide = Área lateral del cono.
Arista lateral del prisma = Generatriz del cilindro.
¿Cuál es la medida de la generatriz del cono de la figura B?



Problema 3

NÚMERO DE HUEVOS

Andrés, el recovero, iba al mercado, y al preguntársele cuántos huevos tenía contestó que tomados en grupos de 11 sobraban 5, y tomados en grupos de 23 sobraban 3. ¿Cuál es el menor número de huevos que podía tener?
En otra ocasión respondió que tomados en grupos de 2, 3, 4, 5, 6, y 7 sobraban 1, 2, 3, 4, 5 y ninguno, respectivamente. ¿Cuál es el menor número de huevos en este caso?

Problema 4

DOS HERMANOS MILLONARIOS

En la última reunión familiar, mi hermana de Zaragoza me comentó que tenía, desde hace un año, 2.000.000 de pts. en una supercuenta que le daba el 10,25% de interés anual; además, en un sorteo de los que organiza la entidad bancaria para este tipo de cuentas le tocó un televisor valorado en 40.000 pts.

- "Sí, pero tú no cobras esos intereses" le repliqué.

- " No, me han descontado un 25% de los mismos en concepto de impuestos de Hacienda y, además, el banco me cobró el 5% de la ganancia neta en concepto de comisión y gastos bancarios."

- Pues yo, durante ese período de tiempo, compré 80 televisores en Barcelona, por la misma cantidad que tú tienes invertida, y aunque tuve que pagar además el 15% de IVA y 23.000 pts. de portes, luego, en la Aduana española, me devolvieron el IVA y pagué el 5% en la Aduana andorrana. Los primeros 55 televisores los vendí a 35.000 pts. y el resto se los quedó un hotel, que se estaba instalando, por 600.000 pts. Creo que he ganado más que tú.

Aclárale a estos dos hermanos cuánto ha ganado cada uno y diles cuál ha sido el % neto de ganancia de la ahorradora y del comerciante.

Problema 5

AMORES MATEMÁTICOS

Le pregunté a mi amor cuál era el número de su casa, en la calle de la Lógica.

"Pruébame – replicó – cuánto me adoras si lo calculas. No solamente operaciones, sino también debes pensar y de este modo unes la claridad y la fuerza de la intuición con mi posición."

Y dócilmente le contesté:
"Mi adorada, dame los datos fácticos y hablaremos de metafísica después"

Se precipitó directa al grano:
" Mi morada tiene tres cifras, todas diferentes.
Y van aumentando, creo, como tu amor por mí.
¿Tiene divisores? Sí, dos diferentes;
números primos ambos, mayores que diez más tres.
Suma los tres dígitos del número que buscas
y te encontrarás un resultado mayor que una decena y media."

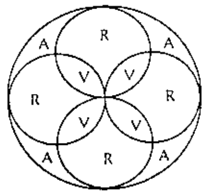
¿Cuál es el número de la casa de mi amada?

Problema 6

EL TREN CRONOMETRADO
Susana y Mikel, a la salida de la clase, observan el paso de un tren y con el cronómetro miden el tiempo que tarda en pasar enteramente por un punto de referencia (poste) y en circular tras una tapia de 240 metros. Los tiempos empleados han sido 10 y 30 segundos respectivamente. Pensando en la relación existente entre espacio, tiempo y velocidad, deciden calcular la longitud del tren y su velocidad. Explícales cómo lo harías tú.

Problema 7

EL ROSETÓN DE LA IGLESIA
La vidriera de la fachada principal de una iglesia contiene un rosetón como el de la figura, donde las letras R, V y A representan los colores rojo, verde y azul respectivamente.



Sabiendo que se han empleado 400 centímetros cuadrados de cristal verde, ¿cuántos centímetros cuadrados de cristal azul son necesarios?

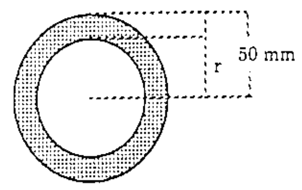
Problema 8.

DOBLANDO EL PAPEL
"Mitad de 90, dos terceras partes de 180, triángulo equilátero ..." murmuraba Ricardo mientras intentaba ver un ángulo de 60° dibujado en el papel, sin tener a mano ni regla ni medidor de ángulos.
De repente empezó a hacer dobleces con el papel hasta conseguirlo. Intenta descubrir cómo lo hizo y explícalo razonadamente. (Puedes ensayar con los folios en blanco que se te dan).

Soluciones

Problema 1. Solución

LA CINTA Y EL CARRETE
Una forma:
La cinta enrollada vista de perfil es una corona circular.



de superficie:

$$S_1=\pi\, 50^2-\pi\, r^2=\pi\,(2500-r^2)mm^2$$

Por otra parte la cinta estirada y de perfil es un rectángulo de base 2.500 mm y altura 0,1 mm, de superficie

$$S_2 = 25000 \cdot 0{,}1 = 2500mm^2$$

Igualando ambas superficies:

$$\pi\left(2.500-r^2\right)=2.555 \Rightarrow \quad r^2=\frac{2.500(\pi-1)}{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad r=50\sqrt{\frac{\pi-1}{\pi}} \cong 41{,}28m\,m$$

Siendo el diámetro del carrete original 82,56 mm.

Otra forma:

Suponiendo que tanto el ancho de la cinta como la altura del cilindro son iguales a h, el volumen del carrete, una vez enrollada la cinta es:

$$V_1 = 25.000\,.\,0{,}1.\,h = 2.500\,h$$

Por otra parte, la cinta desenrollada es un paralelepípedo de dimensiones 25.000 x 0,1 x h, cuyo volumen es:

$$V_2 = 25.000\,.\,0{,}1\,.\,h = 2.500\,h$$

Y el volumen del carrete es:

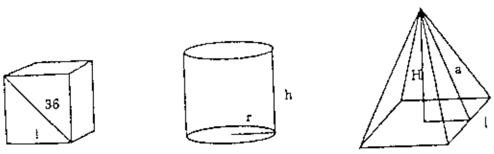
$$\pi\, r^2 h = V_1 - V_2 = 2.500\,\pi\, h - 2.500\,h$$

dividiendo por h y despejando r:

$$r^2 = \frac{2500(\pi - 1)}{\pi} \Rightarrow r = 50\sqrt{\frac{\pi - 1}{\pi}} \cong 41{,}28mm$$

Problema 2. Solución

EL GORRO DE CARNAVAL



Por ser la base del gorro A un cubo de 36 cm de diagonal, el lado mide

$$21^2 = 36^2 \quad \Rightarrow \quad l = 18\sqrt{2}\ cm$$

La generatriz del cilindro del gorro B es igual a la arista del cubo, por tanto

$$h = 18\sqrt{2}\ cm.$$

Como el área lateral del prisma es igual al área lateral del cono del gorro B y, a la vez, la cantidad de cartulina usada para hacer ambos gorros fue la misma, deducimos que el área lateral del prisma del gorro A es igual al área lateral del cilindro del gorro B, por tanto:

$$41^2 = 2\,\pi\, r\, h \quad \Rightarrow \quad 41^2 = 2\,\pi\, r\, l \quad \Rightarrow \quad .$$

$$r = \frac{36\sqrt{2}}{\pi}\ cm$$

Para expresar la condición de que el área lateral de la pirámide es la misma que la del cono, hemos de calcular la altura, H, y la apotema, a, de la pirámide.

$$\mathrm{H} = 90 - 1 = 90 - 18\sqrt{2} = 18\left(5 - \sqrt{2}\right)cm.$$

$$a^2 = \mathrm{H}^2 + \frac{1^2}{4} \Rightarrow \quad a = 18\sqrt{\frac{55 - 20\sqrt{2}}{2}}\ cm.$$

y siendo g la generatriz del cono:

$$4\,.\,\frac{a\,.\,1}{2} = \pi\,.\,r\,.\,g$$

Sustituyendo l, a y r, se obtiene:

$$g = 18\,.\sqrt{\frac{55 - 20\sqrt{2}}{2}} \cong 65{,}7\ cm$$

Problema 3. Solución

NÚMERO DE HUEVOS

Sea H el número total de huevos.

Se cumple que $\mathrm{H} = \dot{11} + 5\ y\ \mathrm{H} = \dot{23} + 3$

$\dot{11}+5$	5	16	27	38	49	60	71	...
$\dot{23}+5$	3	26	49	72	95	...	...	...

El primer número que cumple ambas condiciones es el 49

b) Sea H el número de huevos

Además de ser $\mathrm{H} = \dot{7}$, también se debe cumplir que:

$H - 1 = \dot{2} \Rightarrow$ *sumando a cada miembro* $2 \Rightarrow H + 1 = \dot{2}$

$H - 2 = \dot{3} \Rightarrow$ *sumando a cada miembro* $3 \Rightarrow H + 1 = \dot{3}$

$H - 3 = \dot{4} \Rightarrow$ *sumando a cada miembro* $4 \Rightarrow H + 1 = \dot{4}$

$H - 4 = \dot{5} \Rightarrow$ *sumando a cada miembro* $5 \Rightarrow H + 1 = \dot{5}$

$H - 5 = \dot{6} \Rightarrow$ *sumando a cada miembro* $6 \Rightarrow H + 1 = \dot{6}$

Por tanto H+1 será múltiplo del m.c.m. (2, 3, 4, 5, 6,) = $\dot{60}$, es decir, H=$\dot{60}$. Siendo

119, múltiplo de 7, el número que verifica todas las condiciones.

Problema 4. Solución

DOS HERMANOS MILLONARIOS

Ganancia de la hermana:

Intereses: $\frac{10,25}{100} \cdot 2.000.000 = 205.000\,ptas$

Retención: $\frac{25}{100} \cdot 205.000 = 51.250\ ptas.$

Comisión y gastos:

$\frac{5}{100} \cdot (205.000 - 51.250) = 7.867,5\ ptas.$

En total las ganancias fueron de 146.062,5 + 40.000 = 186.062,5

Ganancia del hermano:

I.V.A. : $\frac{15}{100} \cdot 2.000.000 = 300.000\ ptas.$

Aduana: $\frac{5}{100} \cdot 2.000.000 = 100.000\ ptas.$

Dinero total invertido: 2.000.000 + 100.000 + 23.000 = 2.123.000 ptas

Las ventas fueron: 55 · 35.000 + 600.000 = 2.525.000 pesetas

Total ganado: 2.525.000 – 2.123.000 = 402.000 pesetas

Es evidente que ganó más el negociante que el ahorrador.

El tanto por ciento de ganancia fue del 9,30% para el ahorrador y del 18,9% para el comerciante.

Problema 5. Solución

AMORES MATEMÁTICOS

Sean x, y, z las tres cifras del número de la casa.

Se verifica que $x < y < z$ y $x + y + z > 15$, por tanto $3z > x + y + z > 15 \Rightarrow z > 5$

Por tanto z puede valer 6, 7, 8 o 9.

Pero como el número es el producto de dos primos, z no puede valer ni 6 ni 8, por tanto z es 7 o 9.

Siendo el número pedido el 589, que lo obtenemos como producto de 19 x 31.

Problema 6. Solución

EL TREN CRONOMETRADO

Sea "l" la longitud del tren.

Si el tiempo que tarda en pasar por el poste es de 10 sg, su velocidad es v = 1/10. Si el tiempo que tarda en circular tras la tapia de 240 m es de 30 sg, la velocidad v = (240 + l) /30.

Ambas velocidades son iguales.

Por tanto: $\frac{240+l}{30} = \frac{l}{10} \Rightarrow$

$v = \frac{120}{10} = 12m/sg = 43,2Km/h$

La longitud del tren es de 120 m

Problema 7. Solución

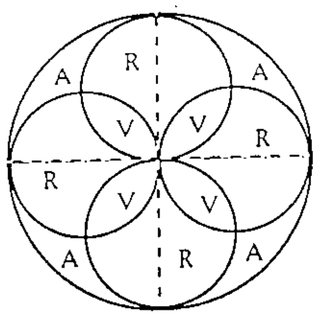
EL ROSETÓN DE LA IGLESIA

Sea "r" el radio del círculo grande.

El radio de cada uno de los cuatro círculos interiores es r/2.

Las áreas de los círculos son:

Área del círculo grande: $A_1 = \pi r^2$



Área del círculo interior: $A_2 = \pi \frac{r^2}{4}$

De donde: A1=4 A2

Pero, según se ve en la figura, las zonas pintadas de los distintos colores cumplen que:

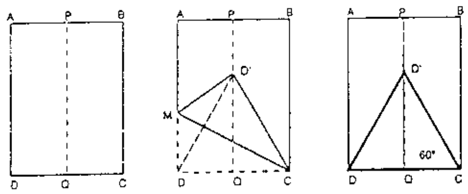
$A_1 = 4A + 4R + 4V = 4\ A_2 = 4\ (R+2V) = 4R + 8V \Rightarrow 4A + 4V = 8V \Rightarrow 4\ A = 4\ V$

de donde A = V, por lo que se han empleado 400cm² de cristal azul.

Problema 8. Solución

DOBLANDO EL PAPEL

Primero se hace un doblez por la mitad del



folio, por la línea PQ como indica el dibujo primero.

A continuación doblamos el papel por el vértice C hasta hacer coincidir el vértice D con un punto del segmento PQ, obteniéndose el punto D'.

El triángulo CDD' es equilátero. En efecto, los lados CD y CD' son iguales, pues ambos miden el ancho del folio. Por otra parte los triángulos CQD' y DQD' son iguales, pues tienen el lado QD' común y los lados DQ y QC iguales por ser ambos la mitad del ancho del folio. De donde las hipotenusas DD' y CD' son iguales. De ahí que el triángulo CDD' sea equilátero.

Como consecuencia el ángulo DCD' es de 60°.

Dos vascos haciendo problemas:

- **¿Escucha, Iñaki, que te da el último problema de matemáticas?**
- **Infinito.**
- **¿Sólo?**

V Olimpiada

Burgos. 1994

Prueba individual. Problema 1

EL CABALLO

Tito y Raquel tienen un solo caballo y quieren desplazarse de un pueblo a otro. Acuerdan hacer el recorrido por tramos, de manera que los dos lleguen al pueblo a la vez y vayan alternándose en el caballo de manera equitativa. Raquel sale primero a caballo y al final del primer tramo deja atado al caballo para que Tito, que viene caminando, lo recoja cuando llegue. Mientras tanto ella sigue caminando hasta que pueda volver a cabalgar y así sucesivamente. Si ellos caminan haciendo 4 km. Cada hora y el caballo va a 12 km/h, ¿qué parte del tiempo descansa el caballo?

Prueba individual. Problema 2

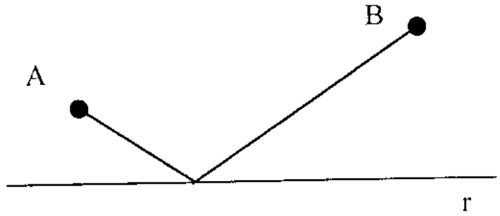
PANECILLOS

Pedro, Felipe y Juan son tres amigos dispuestos a salir de excursión. Cuentan para la merienda con un queso y ventiún panecillos. Cuando ya han preparado siete bocadillos, advierten que si siguen poniendo igual cantidad de queso en los restantes panes, éste no alcanzará. Reducen, pues, a la mitad la ración de queso en cada bocadillo. No obstante, el queso se termina cuando aún quedan siete panecillos vacíos. No parten ni desmontan ninguno de los panes –ni los de ración entera de queso, ni los de media razón, ni los que no llevan queso-, a pesar de lo cual reparten equitativamente la merienda y a cada uno le toca igual cantidad de queso y panecillos. ¿Cómo lo hacen?

Prueba individual. Problema 3

AGUA DEL RÍO

A y B representan dos ciudades y r un río. Estas dos ciudades necesitan abastecerse de agua de dicho río y se quieren construir una toma de agua para las dos.
¿En qué punto del río debe llevarse a cabo la construcción para que el gasto en la conducción sea mínimo?



Prueba individual. Problema 4

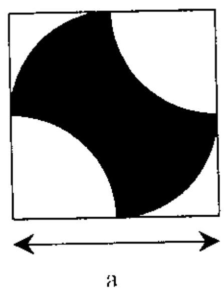
LA SANDÍA

Una sandía pesó 10 Kg., de los cuales el 99% es agua. Después de cierto tiempo al sol, se evaporó parte del agua, siendo ahora el porcentaje de agua del 98%. ¿Cuánto pesa ahora la sandía?

Prueba individual. Problema 5

LA FIGURA

Calcular el perímetro y el área de la figura sombreada.



Prueba por equipos

- Queremos distribuir 10 lámparas de pie en una habitación rectangular, de forma que en cada pared haya el mismo número de lámparas. Permitiendo colocar, a lo sumo, una lámpara en cada esquina de la

V Olimpiada

habitación, ¿es posible distribuirlas? Si es así, ¿de cuántas maneras diferentes puede hacerse?

- Con las condiciones de antes, contestar a las mismas preguntas para 11, 12 y 13 lámparas.
- ¿Se puede resolver el problema para un número cualquiera de lámparas? ¿Cuántas esquinas estarán ocupadas en este caso? ¿De cuántas formas diferentes las podremos distribuir?
- Aplicar lo anterior para resolver el caso en que haya 4001 lámparas en una nave industrial de forma rectangular.
- Intentar dar respuestas a las preguntas del problema si la habitación tuviera forma de triángulo o de pentágono. ¿Y si tiene forma de polígono de un número cualquiera de lados?

Nota: El problema se ha de analizar por grupos.

Soluciones

Prueba individual. Problema 1. Solución

EL CABALLO

Si por montar el caballo de forma equitativa convenimos que ambos lo montan las mismas unidades de tiempo, como la relación de velocidades es de 3 a 1, cuando Raquel se apea del caballo por primera vez, a Tito le faltan 2/3 del recorrido para alcanzar al caballo que lo espera. Para cuando Tito lo alcanza y lo monta, Raquel lleva una ventaja de recorrido (andando) exactamente de 2/3 de la distancia que Tito recorrerá montado en el caballo, de tal modo que cuando Raquel avance 1/3 más volverán a coincidir Raquel y Tito, hallándose en la misma situación que al inicio de la marcha.

En este ciclo, hasta que vuelven a coincidir en las mismas condiciones iniciales de salida, han empleado 4 unidades de tiempo (3 andando y 1 a caballo), de las cuales el caballo ha descansado durante 2 unidades (desde que Raquel deja el caballo hasta que lo coge Tito). Por lo tanto el caballo descansa la mitad del tiempo que cuesta cubrir el trayecto.

Prueba individual. Problema 2. Solución

PANECILLOS

Tomando como unidad una media ración de queso (x) habría

$$7(2x) + 7(x) + 7(0) = 21(x)$$

o sea 21 medias raciones de queso, por lo que a cada uno le corresponde 21/3 = 7 medias raciones.

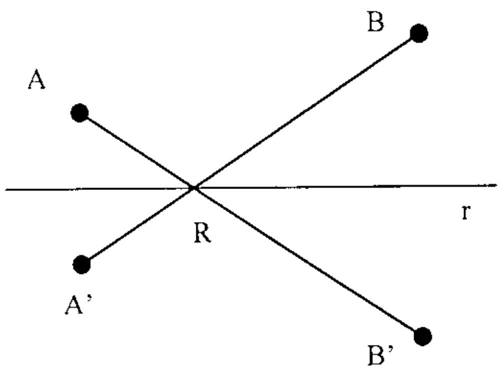
Al haber 21 panecillos a cada uno le corresponde 21/3 = 7 panecillos. Por lo que:

Juan: 2 enteros, 3 medios y 2 vacíos
Pedro: 2 enteros, 3 medios y 2 vacíos
Felipe: 3 enteros, 1 medio y 3 vacíos

Prueba individual. Problema 3. Solución

AGUA DEL RÍO

Si trazamos los puntos simétricos a A y B (A' y B') y unimos B' con A y A' con B observamos que coinciden en un punto R. La conducción ARB es la solución al problema ya que el gasto de conducción es mínimo por ser la línea recta la más corta entre dos puntos.



Prueba individual. Problema 4. Solución

LA SANDÍA

Si la sandía pesaba 10 Kg. y el 99% es agua, el agua pesará 9,9 Kg. y la parte sólida 0'1 Kg.

Después de la evaporación la parte de agua es del 98%, por tanto la parte sólida es el 2%. Como no se ha evaporado la parte sólida podemos decir que ese 2% sigue representando 0,1 Kg.

$$2\% \quad \ldots \quad 100\,gr$$

$$100\% \quad \ldots \quad x\,gr$$

por tanto $x = 5\,kg$.

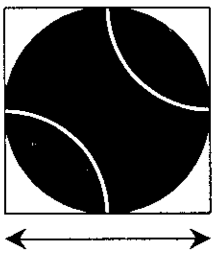
Que es lo que pesa ahora la sandía.

Prueba individual. Problema 5. Solución

LA FIGURA

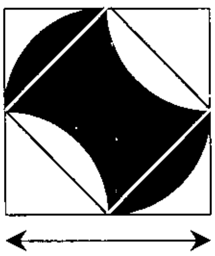
Si (Fig.1) los dos lados que están hacia dentro los pusiéramos hacia fuera, quedaría una circunferencia y el perímetro sería πa.

Fig.1



a

Fig.2



a

Si (Fig.2) los segmentos negros los colocamos en el lugar de los segmentos blancos, la figura resultante es un cuadrado y su área es $(a^2/2)$.

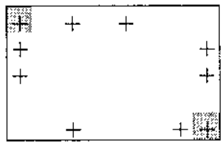
Prueba por equipos. Solución

- N=10.

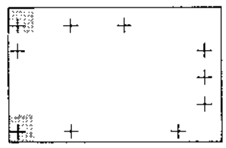
Cuatro paredes y diez es múltiplo de cuatro menos 2. Colocaremos 3 lamparas en cada pared y habrá dos esquinas ocupadas.

Caso A: Las dos lamparas están situadas en las esquinas de una diagonal, es decir en esquinas opuestas.

Esto genera dos variantes según la diagonal que se seleccione.



Caso B: Las dos esquinas ocupadas son consecutivas, es decir de la misma pared. Este caso genera cuatro variaciones, según la pared elegida.



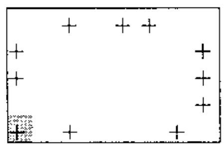
En total tenemos 6 situaciones diferentes.

- N=11

Once es múltiplo de cuatro menos 1.

Colocaremos tres lamparas en cada pared.

Hay una sola esquina ocupada por una lampara, es decir tendremos cuatro variantes según la esquina elegida.



En total tenemos 4 situaciones diferentes

- N=12

Doce es múltiplo de cuatro.
Caso A: Tres en cada pared y ninguna esquina ocupada
Caso B: Cuatro lamparas en cada pared. En cada esquina hay una lampara. Cuatro esquinas ocupadas.

- N=13

Trece es múltiplo de cuatro menos 3.
Cuatro lamparas en cada pared y tres esquinas ocupadas.
Cuatro variantes según la esquina libre.

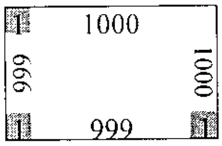
¿Se puede resolver el problema para un número cualquiera de lamparas?
Sí, para todos los casos exceptuando N=1.

¿Cuántas esquinas estarán ocupadas en cada caso?
Los múltiplos de 4, (4n) ocupan 4 o cero esquinas.
Los (4n+1) i (4n-3) ocupan 3 esquinas
Los (4n+2) i (4n-2) ocupan 2 esquinas
Los (4n+3) i (4n-1) ocupan 1 esquina

¿De cuantas maneras los podríamos distribuir?
Los múltiplos de 4 (4n) de dos formas.
Los (4n+1) y (4n-3) tienen tres esquinas ocupadas. Cuatro variaciones según la esquina libre.
Los (4n+2) (4n-2) tiene dos esquinas ocupadas, el caso de en diagonal, con dos variaciones y el caso de consecutivas cuatro variaciones. En total 6 maneras.
Los (4n+3) (4n-1) ocupan 1 esquina, es decir cuatro maneras según la esquina ocupada.

- N=4001

Es un múltiplo de 4 más uno o un múltiplo de 4 menos 3, (4n+1) o (4n-3)
Nos queda una esquina libre.



1001 lamparas en cada pared. 4 variaciones posibles según la esquina libre

Habitación en forma de triángulo.
Si tenemos 3n lamparas, se ocupan las tres esquinas o ninguna. Dos formas.
Si tenemos 3n-2 lamparas hay dos esquinas ocupadas y nos queda una libre, es decir hay tres variaciones según la esquina libre.
Si tenemos 3n-1, hay una esquina ocupada, hay tres variaciones

Habitación en forma de pentágono.
Si tenemos 5n lamparas, se ocupan las cinco esquinas o ninguna. Dos formas.
Si tenemos 5n-1 lamparas hay una esquina ocupada, es decir hay cinco variaciones según la esquina libre. En cada pared n+1 lamparas.
Si tenemos 5n-2, hay dos esquinas ocupadas, en cada pared hay n+1 lamparas. Diez variaciones
Si tenemos 5n-3, hay tres esquinas ocupadas, en cada pared hay n+1 lamparas. Diez variaciones.
Si tenemos 5n-4, hay cuatro esquinas ocupadas, en cada pared hay n+1 lamparas. Cinco variaciones

¿Y si la habitación tiene forma de cualquier polígono?
Tenemos k lados.
Si el número de lamparas es múltiplo del número de lados, se ocupan o k esquinas o ninguna,.

Si el número de lamparas es múltiplo del número de lados menos uno, se ocupa una esquina.
Si el número de lamparas es múltiplo del número de lados menos dos, se ocupan dos esquinas.

Si hay k paredes y nos quedan i esquinas no ocupadas, serán las posibles combinaciones, las maneras de escoger i esquinas entre las k existentes.

$$C_k^i = \binom{k}{i}$$

¿Qué es un niño complejo?
Uno que tiene la madre real i el padre imaginario

Teorema

- **Si** $\lim_{x\to 0}\frac{8}{x} = \infty$ **llavors** $\lim_{x\to 0}\frac{5}{x} = \rotatebox{90}{5}$
- $\lim_{\omega \to \infty} 3 = 8$
- **Si** $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$ **llavors** $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3} = \infty\infty$

V Olimpiada

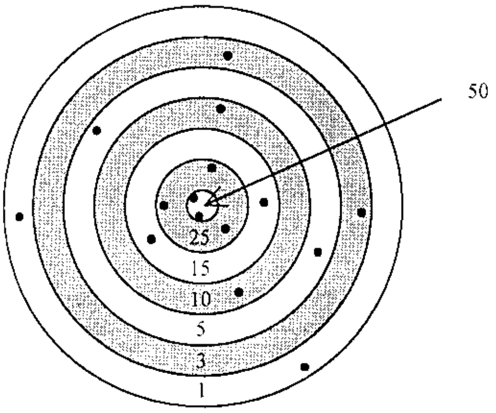
VI Olimpiada

Castellón y Alicante, 1995

Prueba individual. Problema 1

LOS TRES ARQUEROS

Tres arqueros han realizado, cada uno, 5 disparos contra la diana: en ella se han indicado los puntos de impacto. En el centro sólo han atinado dos veces. ¿Qué puntuación ha conseguido cada arquero, teniendo en cuenta que, al final han empatado y cuál puede haber sido la secuencia de puntos de los cinco disparos de cada uno?



Prueba individual. Problema 2

LA REINA CAUTIVA

Una reina cautiva, con su hijo y su hija, fueron encerrados en lo alto de una torre. En la parte exterior de la ventana había una polea de la que pendía una soga con dos canastas atadas, una a cada extremo; ambas canastas de igual peso. Los cautivos lograron escapar sanos y salvos usando una pesa que había en la habitación. Habría sido peligroso para cualquiera de los tres descender pesando más de 15 Kg. que el contenido de la canasta inferior, porque habría bajado demasiado rápido; y se las ingeniaron para no pesar tampoco menos de esa diferencia de 15 Kg.

La canasta que bajaba hacía subir naturalmente a la otra. ¿Cómo lo consiguieron?

La reina pesaba 75Kg, la hija 45, el hijo 30 y la pesa 15Kg.

Prueba individual. Problema 3

EL CAMPO TRIANGULAR

Un campo triangular está rodeado por tres campos cuadrados, cada uno de los cuales tiene un lado común con el triángulo. Las superficies de estos tres campos son iguales a 529, 256 y 81 ha. ¿Cuál es la superficie del campo triangular ?

Prueba individual. Problema 4

LOS SIETE SULTANES

(A pesar de su contenido sexista, se ha mantenido el texto por considerarse un problema de colección).

Siete sultanes tienen en total 2.879 mujeres. No hay dos con la misma cantidad. Si dividimos la cantidad de mujeres de uno cualquiera de esos harenes por la cantidad de mujeres de cualquier otro harén menor, el resultado es siempre un número entero.

Dime, infiel, cuántas mujeres hay en cada uno de los harenes

Prueba individual. Problema 5

EL PREMIO

Un preparador decide dar un premio cada día al grupo de muchachos o muchachas cuyas edades sumaran más.

El primer día sólo asistieron un chico y una chica. Como la edad del chico duplicaba a la de la chica, el premio fue para él.

Al día siguiente, la chica llevó a su hermana. Se descubrió que la edad de ambas era doble de la del chico, con lo que las jóvenes ganaron el premio.

Al tercer día un hermano del joven le acompañó, resultando que la suma de las edades de ellos duplicaba esta vez a la de

las jóvenes. Aquel día ganaron ellos el premio.
El cuarto día las jóvenes acudieron acompañadas por su hermana mayor que había cumplido 21 años el día anterior. En esta ocasión las edades de las tres duplicaba la edad de los hermanos. La pugna entre unos y otros continuó, pero no es necesario que el problema vaya a más. Deseamos saber la edad de aquel primer joven.

Prueba por parejas. Instrucciones

Material a utilizar
Hojas de papel DIN-A4 (cuantas se deseen)
Tijeras.
Enunciados y guión de los distintos informes, que se cumplimentarán con bolígrafo.
Un sobre tamaño folio.

Procedimiento
En la construcción de las figuras pedidas sólo se podrá trabajar con las manos, doblando las hojas y cortándolas con las tijeras. No se tomarán medidas. Caso de necesitar comprobar si dos longitudes o amplitudes son iguales, o caso de requerirse el transporte de distancias, se recurrirá a superposiciones o dobleces.

Documentación a entregar
En el sobre que se facilita con el material se introducirán:

- las figuras construidas
- el informe de construcción de cada una

Todos los elementos, el sobre, las figuras y el informe, llevarán el nombre de sus autores.

Puntuación
Primer enunciado, hasta 6 puntos; segundo y tercero, hasta 8 puntos distribuidos así:

- Construcción de la figura y apartado C del informe 1 punto cada uno.
- Resto de apartados 2 puntos cada uno.

Duración
1 hora y 30 minutos.
Advertencia
Se procurará que la necesaria comunicación entre los componentes de una pareja no facilite ni dificulte el trabajo de los restantes grupos.

Prueba por parejas. Problema 1

A partir de una hoja de tamaño DIN – A4, mediante dobleces y cortes, constrúyase el cuadrado de mayor área posible.

Responde a cada uno de los siguientes apartados:
PLANTEAMIENTO:
¿Qué ideas te han llevado a la solución?
MÉTODO:
Explicar el orden en que se han efectuado los dobleces y los cortes para la construcción de la figura.
JUSTIFICACIÓN:
¿Por qué no puede haber un cuadrado de mayor área?

Prueba por parejas. Problema 2

A partir de una hoja de tamaño DIN – A4, mediante dobleces y cortes, constrúyase el triángulo equilátero de mayor área que quepa dentro del cuadrado construido en (1).

Responde a cada uno de los siguientes apartados:
PLANTEAMIENTO:
¿Qué ideas te han llevado a la solución?
MÉTODO:
Explicar el orden en que se han efectuado los dobleces y los cortes para la construcción de la figura.

JUSTIFICACIÓN:
¿Por qué no puede haber un triángulo equilátero de mayor área dentro del cuadrado?
AMPLIACIÓN:
Si no se hubiera exigido que el triángulo cupiera dentro del cuadrado sino que se hubiera dejado utilizar toda la hoja de papel, ¿existiría un triángulo equilátero de mayor área?
En caso negativo explicar por qué no.
En caso afirmativo dibujar cuál y explicar por qué el área sería mayor que la del triángulo construido.

Prueba por parejas. Problema 2

A partir de una hoja de tamaño DIN-A4, mediante plegados y cortes, constrúyase el octógono regular de mayor área que quepa dentro del cuadrado construido en (1).

Responde a cada uno de los siguientes apartados:
PLANTEAMIENTO:
¿Qué ideas han llevado a la solución?
MÉTODO:
Explicar en qué orden se han efectuado los dobleces y los cortes para la construcción de la figura.
JUSTIFICACIÓN:
¿Por qué no puede haber un octógono regular de mayor área dentro del cuadrado?
AMPLIACIÓN:
Si no se hubiera exigido que el octógono cupiera dentro del cuadrado sino que se hubiera dejado utilizar toda la hoja de papel, ¿existiría un octógono regular de mayor área?
En caso negativo explicar por qué no.
En caso afirmativo dibujar cuál y explicar por qué el área sería mayor que la del octógono construido.

Prueba por equipos.

NATURALEZA MATEMÁTICA
"LA PRODUCTIVIDAD DEL LIMONERO"

Preliminares
Consideraremos a los árboles como una fábrica, que a partir de materias primas (agua, minerales y CO_2) y energía solar, producen materia orgánica, mediante el proceso que genera residuos que se reciclan al cien por cien en el mismo lugar que se producen.
Estudiaremos y analizaremos la productividad del limonero (citrus limonum): árbol de 3 a 6 metros de altura, formado por ramas irregulares, copa abierta y hojas coriáceas y perennes, dentadas y puntiagudas.

Elementos y conceptos
La clorofila se encuentra principalmente con la parte superior de las hojas. Por cada gramo de clorofila se producen alrededor de 175 gramos de carbono (C) por año. Cada gramo de carbono equivale a 2.6 veces más de materia orgánica seca. 425 mg. De clorofila se obtienen por cada m^2 de hojas de limonero.
La capacidad productora del limonero (o de un árbol, en general) está relacionada con la superficie de las hojas que contienen clorofila, sin contar la clorofila de los tallos verdes que pueden despreciarse.
Las hojas se disponen para absorber luz directa o reflejada de forma que la estructura (tronco, ramas,...) necesaria sea la óptima para realizar las funciones de sostén y de transporte. Una indicación de esta disposición es la relación entre la superficie del conjunto de las hojas y su proyección sobre el suelo. Esta relación se denomina índice foliar (IF).
El IF indica el número de hojas que se superponen desde la copa hasta el suelo en promedio.

Datos a determinar en el limonero asignado.
a) Índice foliar
b) Cantidad de clorofila anual
c) Producción de carbono anual

d) Producción de materia seca por año

Instrucciones para los participantes.
Se dispondrá por equipo del siguiente material: un cordel, papel milimetrado (varias hojas), papel normal, lápices, gomas de borrar y cinta métrica.

Se procederá del siguiente modo anotando cuantas explicaciones se consideren necesarias

1) Estimación del número de hojas: Elegimos una rama de tamaño medio, contamos el número de ramas de segundo orden en que se divide; elegimos otra de tamaño medio y volvemos a contar el número de ramas de 3° orden.... Finalmente, contamos el número de hojas de la rama del último orden que consideremos, y lo multiplicamos por el número de ramas de cada orden para conocer de forma aproximada el número de hojas del árbol.
2) Determinación de la superfície de una hoja mediana: Dibujamos el contorno de varias hojas sobre papel milimetrado y estimamos la superficie media.
3) Cálculo de la proyección del árbol sobre el suelo: Seguimos el contorno de la proyección del árbol e intentamos adaptarlo a la forma de una circunferencia para estimar su área.
4) Cálculo del índice foliar
5) Cálculo de la producción del árbol: Utilizando los datos calculados se pide obtener las cantidades de clorofila, carbono y producción de materia orgánica seca anualmente.

Se hará constar con claridad los resultados y la forma de obtener los mismos.

Soluciones

Prueba individual. Problema 1. Solución

LOS TRES ARQUEROS

Las 15 puntuaciones indicados en el dibujo suman en total 243 puntos. Teniendo en cuenta que los tres arqueros han obtenido la misma puntuación final, a cada uno le corresponde 243/3, o sea 81 puntos a cada uno.

Por tanto hay que hacer 3 grupos de 5 puntuaciones cada uno que sumen 81 puntos en total.

Esta distribución es única y es la siguiente:
Arquero 1: 50, 15, 10, 5, 1.
Arquero 2: 50, 15, 10, 5, 1.
Arquero 3: 25, 25, 25, 3, 3.

Prueba individual. Problema 2. Solución

LA REINA CAUTIVA

El procedimiento a seguir es el siguiente:
En primer lugar baja la pesa de 15 Kg.
A continuación baja el hijo de 30 Kg y sube la pesa de 15 Kg.
A continuación baja la hija de 45 Kg y sube el hijo de 30 Kg. La hija se queda abajo.
A continuación baja la pesa de 15 Kg y no sube nadie.
A continuación baja el hijo de 30 Kg y sube la pesa de 15 Kg.
A continuación baja la reina de 75 Kg y la pesa de 15 Kg y suben los dos hijos de 30 y 45 Kg. La reina se queda abajo ya definitivamente.
A continuación baja el hijo de 30 Kg y sube la pesa de 15 Kg.
A continuación baja la hija de 45 Kg y sube el hijo de 30 Kg. La hija se queda ya definitivamente abajo.
A continuación baja la pesa de 15 Kg y no sube nadie.

A continuación baja el hijo de 30 kg y sube la pesa de 15 Kg. El hijo se queda abajo y ya han conseguido escapar todos.

Prueba individual. Problema 3. Solución

EL CAMPO TRIANGULAR

El campo de 529 ha tiene un lado de 2300 m, el de 256 ha lo tiene de 1600 m y el de 81 ha lo tiene de 900 m.

Entonces el triángulo que forman tiene unos lados de 2300, 1600 y 900 m. Hace falta calcular el área de este triángulo del cual conocemos los lados.

Aplicando el teorema del coseno: $1600^2=2300^2+900^2-2\times2300\times900\times\cos\alpha$ despejando obtenemos $\cos\alpha=0'85507$, con lo cual $\sin\alpha=0'5185$.

El área del triángulo será: $A=900\times2300\times\sin\alpha/2=536656'3146$ $m^2=53'66563$ ha.

Prueba individual. Problema 4. Solución

LOS SIETE SULTANES

Ordenamos los sultanes por el número de mujeres, de menor a mayor, o sea el primer sultán será el que tenga menos mujeres y el séptimo el que tenga más mujeres. Entonces del enunciado se deduce que la cantidad de mujeres del segundo sultán es múltiplo de la cantidad de mujeres del primer sultán, la del tercero es múltiplo del segundo, y también del primero,...., la del séptimo es múltiplo de todos los anteriores. Designamos por S_1 la cantidad de mujeres del primer sultán. Se cumplirá: $S_1=a_1$; $S_2=a_1a_2$; ...; $S_7=a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$.

También se cumple $S_1+S_2+...+S_7=2879$. Si sumamos todos los valores asignados a S_i y sacamos factor común a_1, obtenemos que 2879 debe ser múltiplo de a_1.

Pero el número total de mujeres, 2879 es primo, como se comprueba con facilidad: 2879=1x2879. Por lo tanto la cantidad de mujeres del primer sultán debe ser 1 o 2879, evidentemente 2879 es imposible, entonces $\mathbf{S_1=1}$.

Quedan 2878 mujeres para repartir entre los otros sultanes. Se cumplirá como antes $S_2+S_3+...+S_7=2878$. Si sumamos todos los valores asignados a S_i y sacamos factor común a_2, obtenemos que 2878 debe ser múltiplo de a_2.

La descomposición de 2878 en factores primos es 2878=2x1439. La cantidad de mujeres del segundo sultán debe ser 2 o 1439. Si fuese 1439 la cantidad de mujeres de los otros sultanes sería múltiplo de 1439 y el total sería superior al dado; entonces $\mathbf{S_2=2}$.

El razonamiento siempre es el mismo. Entonces ahora quedan por repartir 2876 mujeres. La descomposición de 2876 es $2876=2^2\times719$. Con lo cual $\mathbf{S_3=4}$.

Ahora quedan por repartir 2872 mujeres. La descomposición de 2872 es $2872=2^3\times359$. Con lo cual $\mathbf{S_4=8}$.

Ahora quedan por repartir 2864 mujeres. La descomposición de 2864 es $2864=2^4\times179$. Con lo cual $\mathbf{S_5=16}$.

Ahora quedan por repartir 2848 mujeres. La descomposición de 2848 es $2848=2^5\times89$. Con lo cual $\mathbf{S_6=32}$.

Ahora quedan por repartir 2816 mujeres. Con lo cual $\mathbf{S_7=2816}$.

Prueba individual. Problema 5. Solución

EL PREMIO

Designamos con x la edad de la chica. Como la edad del chico es el doble será 2x.

Al día siguiente hay otra chica que juntas doblan la edad del chico; su edad será 3x. Al tercer día hay otro chico, su edad será de 6x para doblar la edad de las chicas. Finalmente en el cuarto día hay otra chica, su edad será 12x para doblar la edad de los chicos. Como tiene 21 años, igualando se obtiene x=1'75. Esta seria la edad de la primera chica. Como se supone que las edades se representan con números enteros, entonces esta edad no es correcta. La causa será que durante estos cuatro días algún chico/a ha cumplido años y ha cambiado su edad (sugerido por el enunciado del problema al indicar que una chica cumplió 21 años el día anterior).

Por el resultado x=1'75 sabemos que la edad de la primera chica será 1 año o a lo sumo 2 años. Veamos que ocurre en cada caso sin variar las edades durante estos 4 días.

Si la chica tiene 1 año, el chico debe tener 2; la segunda chica 3; el segundo chico 6 y finalmente la tercera chica 12 años.

Si la chica tiene 2 años, el chico debe tener 4; la segunda chica 6; el segundo chico 12 y finalmente la tercera chica 24 años.

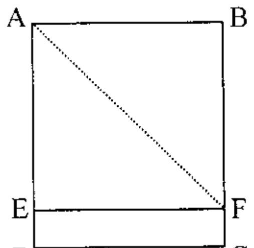
Como la tercera chica debe tener 21 años, vemos que en el primer caso la edad de la tercera chica (12 años) es menor y en el otro caso es mayor. Por lo tanto la edad inicial de 2 años no es válida porque nos daría una edad de la tercera chica superior. Entonces el primer día la chica tenía 1 año y el chico 2 y durante los 4 días algún chico/a cumplió años. De esta forma la edad final de la tercera chica ya no será de 12 años sino que aumentará su edad. Hará falta determinar quién cumple años de manera que la edad final sea de 21 años.

En el cuarto día la edad de las chicas dobla la edad de los chicos, por lo tanto esa cantidad es un número par, como una chica tiene 21 años, la suma de las otras dos debe ser una cantidad impar, así sumada a 21 dará un número par. Pero en el segundo día estas dos chicas doblaban la edad del primer chico, por lo tanto era un número par. Si esa cantidad es par en el segundo día e impar en el cuarto, significa que en el tercer día una de las dos chicas cumplió años y así la suma pasó de ser par a ser impar. Veamos qué ocurre en este caso:

La edad de la 1ª chica es 1 año. El primer chico 2 años. En el segundo día el chico 2 años y las chicas 4 años en total. En el tercer día una chica cumple años, en total tienen 5; por lo tanto los chicos deberán sumar 10 años. En el cuarto día los chicos 10 años y las chicas deberán sumar 20 años. Así la tercera chica no puede tener 21 años. Hace falta que algún chico también cumpla años. Si fuese en el cuarto día en lugar de 10 años tendrían 11 y las chicas deberían sumar 22. En este caso la tercera chica tampoco tendría 21 años.
Hay que cambiar la edad de los chicos algún día anterior al cuarto. Finalmente la solución buscada es:

La edad de la 1ª chica 1 año y la del primer chico 2 años.
En el segundo día el chico cumple 3 años y las chicas deberán sumar 6 años (1 y 5 años)
En el tercer día cumple años una de las chicas (cualquiera), ahora suman 7 años y los chicos deberán sumar 14 años en total.
En el cuarto día los chicos suman 14 años y las chicas deberán sumar en total 28 años. Las dos chicas anteriores tienen en total 7 años, entonces la tercera chica tendrá los 21 años indicados.

Prueba por parejas. Problema 1. Solución

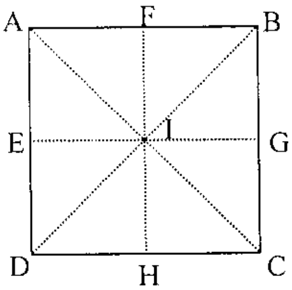


Si ABCD es la hoja DINA4 doblamos por la línea AF hasta hacer coincidir la recta AB sobre la recta AD. Cortamos por la recta EF. El cuadrado ABEF es la solución buscada.

Prueba por parejas. Problema 2. Solución

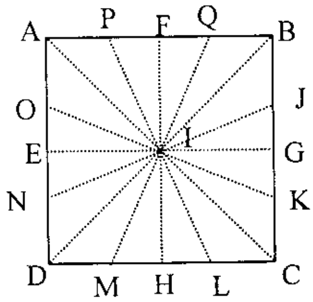
Si cortamos el cuadrado ABEF por la línea AF, el triángulo obtenido es el de área máxima.

Prueba por parejas. Problema 2. Solución

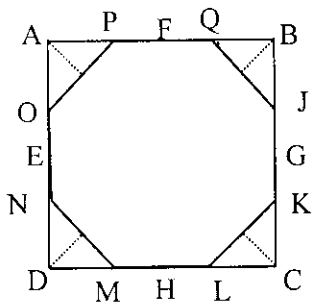


Marcamos, primero, las líneas AC, BD, EG y FH doblando el papel por la mitad en las direcciones adecuadas.

Después hemos de marcar las bisectrices de cada uno de los ángulos formados en el centro del cuadrado. Por ejemplo, para calcular la bisectriz del ángulo AIF doblamos el papel hasta hacer coincidir FFH sobre AIC. Hacemos lo mismo con los otros ángulos y obtenemos la siguiente figura.



Recortando los vértices por las líneas QJ, KL, MN y OP tenemos el octógono de mayor área que cabe en el cuadrado.



¿Cómo se llama el hombre matemáticamente más inepto de todo el Japón?

Niselo Kesumo

VI Olimpiada

VII Olimpiada

Cáceres. 1996

Prueba por equipos. Problema 1

LAS COLUMNAS

Augusta Emerita (la Mérida romana) fue una gran ciudad. Fundada como colonia en el año 25 a.C. para premiar a las legiones victoriosas de la guerra cántabra, llegó a alcanzar el noveno lugar entre las diecisiete ciudades más importantes del mundo romano (así lo afirma el poeta Marco Ausonio en el siglo IV).

El tamaño de algunas construcciones públicas permite estimar la población de la colonia y sus alrededores. Serían 30.000 y 50.000 los habitantes que llegaron a poblarla.

Dispuso de varios puentes, tres acueductos, dos embalses, una importante red de alcantarillado, dos foros (plazas públicas), teatro, anfiteatro, circo, termas, templos... De la grandeza de algunas de estas construcciones hablan las columnas que se conservan

Los romanos copiaron las proporciones y elementos de las columnas griegas. Los órdenes "dórico", "jónico" y "corintio" (ver gráfico) fueron adaptados por los arquitectos romanos, quienes, a su vez, crearon el orden compuesto.

Para que las columnas resulten bellas y armoniosas, es preciso respetar el llamado módulo, que no es más que la relación existente entre el diámetro del extremo inferior y la altura de la columna. Así, en el orden dórico esta relación es de cuatro a seis veces. Nueve veces en el jónico y diez en el corintio. Además, en este último, el capitel tiene una altura igual a la sexta parte del diámetro inferior.

Los tres tipos de columnas presentan canales o estrías a lo largo del fuste. Suelen ser 20 en el caso del dórico y 24 en los otros dos.

Hasta nosotros han llegado muy pocos restos de lo que fueron los foros (plazas públicas) de Mérida. Sabemos que hubo dos: uno provincial y otro municipal, este último más conocido.

El foro municipal era una gran plaza porticada rodeada de grandes edificios públicos (para más información observa las salas VIII, IX y X del museo).

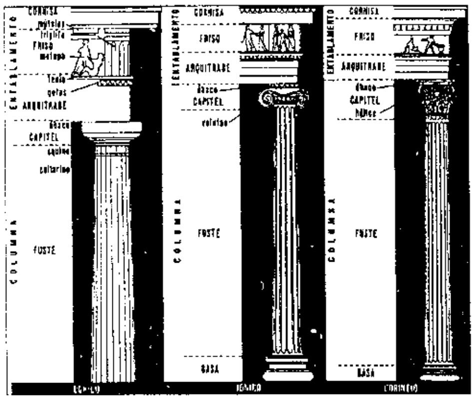
Vuestra máxima tarea consiste en idear un método que nos permita calcular la altura de las columnas del foro municipal. Ayudaos de toda la información que os hemos dado hasta ahora y de los restos arqueológicos que puedes encontrar en la sala X del museo.

Recordad que las columnas se hacen más delgadas a medida que van creciendo.

¿Cuánto medían las columnas del foro?

Explica detalladamente el procedimiento seguido.

Una vez contestada la pregunta anterior, no tendréis mucha dificultad para estimar la altura de las columnas del escenario del teatro romano (las de la parte baja), pero ¿seríais capaces de calcular de una forma aproximada el diámetro de la parte superior de esas columnas? Explicadlo.



Prueba por equipos. Problema 2

EL TEATRO

Todos los días de fiesta, los romanos celebraban representaciones teatrales en honor de los dioses. Las obras eran sencillas y cortas. Los actores se cubrían el rostro con máscaras que caracterizaban al personaje. A las representaciones podían asistir todos los ciudadanos, incluidos las mujeres y los niños, nunca los esclavos.

Aunque estos espectáculos eran los más nobles, no eran los preferidos del pueblo. Las luchas de gladiadores del anfiteatro y, sobre todo, las carreras del circo, eran los actos festivos que más público congregaban (uno de cada cinco ciudadanos acudía al teatro, uno de cada tres al anfiteatro y uno de cada dos al circo).

El teatro romano de Mérida se construyó por los años 16-15 a.C., contaba con una capacidad de 5.500 espectadores y tenía un diámetro total de 96 metros, mientras que el diámetro de la "orchestra" era de 30 m. Constaba de tres partes esenciales: la "cavea", o gradas de forma semicircular, la "orchestra" o espacio semicircular destinado a coros y bailes, y la "scena", o lugar destinado a representaciones teatrales.

A su vez, la "cavea" se dividía en tres partes: "ima cavea", la más baja; "media cavea", la del medio y "summa cavea", la más alta. Estaban separadas por corredores y a cada una se accedía por puertas distintas. Los espectadores ocupaban una u otra dependiendo de su clase social.

Os pedimos que penséis un método para averiguar qué número aproximado de espectadores tenía cabida en cada una de las "caveas". Así podremos saber a qué estrato de la población le interesaba más el teatro. Explicadlo bien antes de hacer cálculos.

Podéis encontrar más información en las salas I, II y III del museo.

Prueba por equipos. Problema 3

EL ARCO DE MEDIO PUNTO

Los romanos fueron grandes ingenieros y su empeño arquitectónico se encaminó principalmente a la construcción de obras que fueran de utilidad para los ciudadanos: puentes acueductos, calzadas, teatros, circos, templos, grandes plazas, etc.

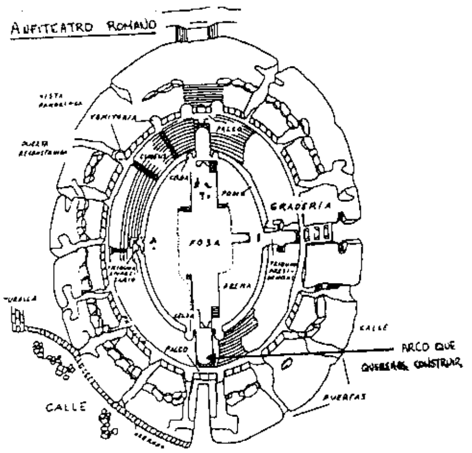
En sus edificaciones utilizaron la piedra (poco frecuente hasta entonces) y los muros sin cemento, en cuya construcción eran auténticos maestros. Cuando lo necesitaban, también sabían fabricar mortero fuerte, ladrillos y cemento.

Una de sus principales herramientas arquitectónicas fue el famoso arco de medio punto, arco semicircular que podemos ver en la mayor parte de sus construcciones.

El arco de medio punto está formado por una serie de piedras en forma de cuña llamadas "dovelas". Son siempre un número impar y la más importante, o "clave", es la que ocupa el lugar central.

Encontraréis estos arcos en cada una de las puertas de acceso a las gradas del teatro y también en el anfiteatro.

Suponed que sois arquitectos romanos y



debéis diseñar la construcción de un arco de medio punto. Las canteras (encargadas de tallar las piedras) esperan instrucciones precisas sobre el tamaño y forma de cada una de las dovelas.

Haced un plano donde se detallen las mediciones que deben hacerse y se explique a las canteras cómo deben obtenerse las piedras para que al final encajen perfectamente y formen el arco. Como aplicación de vuestro trabajo, diseñad sobre el papel el arco de la puerta de acceso a la arena del anfiteatro que aparece marcado en el croquis que se acompaña. ¿Cuál sería el volumen total de piedra necesario para tallar dicho arco (solamente la parte semicircular).

Prueba individual. Problema 1

DIFERENCIA DE TAMAÑO

En la novela *Los Viajes de Gulliver* de Jonathan Swift (1726) se narra que Gulliver, el protagonista, viaja por varios países imaginarios, uno de ellos es Liliput, cuyos habitantes son todos enanos y donde todo es reducido de tamaño. Encontrándose en este último país sabemos que Gulliver es semejante a los liliputienses, siendo 12 veces más alto que ellos. Contesta a las siguientes preguntas:

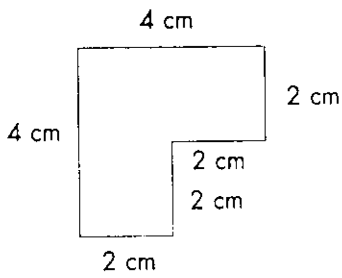
a) ¿Cuántos colchones de liliputienses deben coserse entre sí para hacerle uno a Gulliver, de forma que pueda dormir tan cómodamente como ellos

b) La casa media de un liliputiense tiene un solar de 0,75 m^2. ¿Cuál debe ser el solar que debe tener la casa que le construyan?

Prueba individual. Problema 2

POLIELES

Dada la siguiente figura geométrica y tomándola como guía:



a) Dividir la figura en 4 piezas iguales.

b) Dibujar razonadamente:

- Un triángulo isósceles de la misma área que la figura dada.
- Un rombo de la misma área que la figura dada.
- Un hexágono de la misma área que la figura dada. ¿Cuál es su perímetro?

Prueba individual. Problema 3

CUBO MANIA

Se tienen tres cubos coloreados de forma diferente*. A cada uno de los colores se le ha asignado un valor natural.

¿Serías capaz de calcular dichos valores, sabiendo que cumplen las siguientes condiciones?:

a) La suma de los valores correspondientes a todas las caras de los cubos es 96.

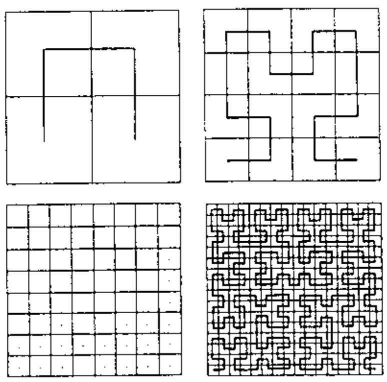
b) La suma de los valores de las caras de uno de los cubos es 29.

¿Es única la solución?.

Prueba individual. Problema 4

CURVA DE HILBERT

Las siguientes poligonales están construidas uniendo los centros de los cuadrados obtenidos al ir dividiendo cada cuadrado de cada fase en otros cuatros cuadrados.

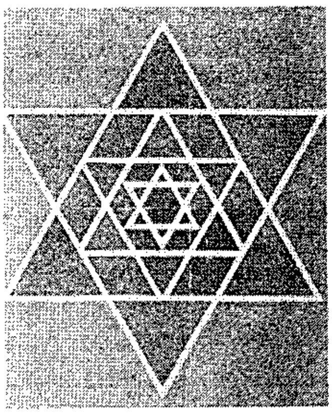


* *El juego de tres cubos está pintado de la siguiente manera: 1 cubo con 4 caras amarillas y 2 verdes; 1 cubo con 3 caras amarillas y 3 verdes; 1 cubo con 1 cara amarilla, 3 verdes i dos azules.*

Cada poligonal debe empezar en el centro del cuadrado de la esquina inferior izquierda y debe terminar en el centro del cuadrado de la esquina inferior derecha.
Puedes observar que cada poligonal está formada por cuatro poligonales como la de la fase anterior (reducida de tamaño) y conectándolas entre sí mediante tres segmentos de igual longitud.
En el dibujo que damos, las poligonales corresponden a la 1.°, 2.° y 4.° fase. ¿Cuál es la longitud, si el lado del cuadrado completo es de 10 cm?

Circuito Matemático. Problema 1

TRIÁNGULOS



¿Menos de 20? ¡Sigue buscando!
¿Más de 33? ¡Bien!
¿Más de 40? ¡Verifícalo!*

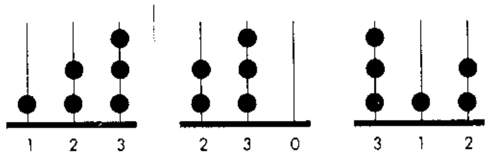
Circuito matemático. Problema 2

PENTOMINÓ
Los pentominós o pentaminós son figuras formadas por la unión de 5 cuadrados unitarios a lo largo de sus lados. El juego está compuesto por las 12 posibles piezas que se pueden formar. En el tablero que se presenta, tienes un juego completo.

¿Será posible formar rectángulos de distintas dimensiones encajando las piezas unas con otras sin que sobre ningún espacio?
Por cada uno que razones tendrás mayor puntuación y si a demás construyes uno de ellos, también aumentarás la puntuación.

Circuito Matemático. Problema 3

ÁBACO
El vocablo ábaco ha sido utilizado para designar un instrumento de cálculo que ha evolucionado a lo largo de los tiempos.
El más antiguo y simple lo utilizaron muchas culturas anteriores, entre ellas la griega. Se cuenta que Arquímedes fue muerto por un soldado romano cuando estaba calculando con un ábaco dibujado en la arena.
El <<abax>> de los griegos, <<abaq>> hebreo, <<habas>> romano, y el <<suan pan>> chino son algunos de sus nombres.
Seguro que en el colegio habrás visto utilizado un modelo actual que, fundamentalmente, nos sirve para comprender cómo funcionan los números en los sistemas de numeración, en especial el decimal que es universal.
Aquí tienes un ejemplo:



En un modelo como este de tres barras se quiere saber qué números cumpliría la condición de que, al cambiar una bola de una barra a la contigua, se obtendría el número siguiente o anterior.

Circuito matemático. Problema 4

OBRAS
El arquitecto del Ayuntamiento está estudiando la posibilidad de hacer un escenario de hormigón, como base de un futuro quiosco de música, en el lugar que

---

* *Matemáticas sin límites/ Holt. Rinehart and Wiston/Publishers. 5.*
Cartel 6

ocupa la fuente que hay en la Plaza Gregorio Bravo.
Para ello tomaría como base la figura que forman las farolas que la rodean. Si la altura que va a tener es de 2,5 metros, ¿cuántos metros cúbicos de hormigón necesitaría?

Circuito matemático. Problema 5

INVENTA UN PROBLEMA
Situaros en la plaza de la Constitución (plaza del Ayuntamiento) y tras observar detenidamente todo lo que la rodea y existe en ella, inventa un problema que proponer a tus compañeros.

Circuito Matemático. Problema 6

IGLESIA DE ROCAMADOR
La iglesia de Santa María de Rocamador es uno de los templos cristianos de Valencia de Alcántara. Su nombre procede de la advocación de los franceses que vinieron a luchar contra el invasor moro, ROCH-AMA-DOR, o amador de la Roca.
Esta iglesia ha tenido varias reformas a lo largo de los tiempos de su existencia y en su interior podrás observar su estructura, retablos, cuadros y otras circunstancias que habrás de tener en cuenta para realizar la siguiente prueba:
a) Año que aparece hasta en el techo. Los millares que tiene pueden servirte.
b) En éste se celebró una boda famosa. Suma sus cifras y repártelas siete veces.
c) Entonces se entrevistaron dos viudas de un mismo nombre. Su numeral es la clave.
d) Encuentra el número de juanes pintados.
e) El apodo del pintor del cuadro divino tiene un número de letras.
f) ¡Qué siglo! Restauraron hasta la techumbre. Lleva los datos anteriores a la casilla correspondiente y con imaginación completa los números que faltan.

A			12		F
B	D	C	4		E

Investigación. Problema 1

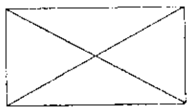
UN PASEO POR CÁCERES
Cáceres fue fundada como colonia romana en el siglo I a.C. Desde entonces ha vivido momentos de decadencia con las invasiones bárbaras, resurgió bajó dominio almohade y alcanzó tiempos de esplendor con la reconquista cristiana.
Tras su muralla, se fueron construyendo magníficas y austeras casas-palacios, torres, templos y conventos cuyo conjunto, por su homogeneidad, belleza y conservación, ha sido declarado Patrimonio de la Humanidad. Un paseo por sus calles transmite sensaciones evocadoras de otros tiempos que sobrecogen y cautivan al visitante.
Para comprobar todo esto, os invitamos a dar un paseo matemático por el Cáceres monumental. Tomad el mapa que os entregamos, en él aparecen una serie de calles y plazas y monumentos marcados en azul. Buscad de forma razonada (si es que existe) un itinerario que recorra todas las calles y plazas marcadas de forma que una misma calle nunca se recorra dos veces. Podremos pasar más de una vez (si es preciso) por las plazas o cruces, pero no por una calle que hayamos visitado antes.

Primera ayuda

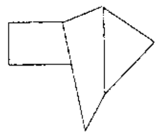
Esta tarea es muy semejante a los juegos que aparecen con frecuencia en libros, revistas o periódicos y que invitan al lector a reproducir un determinado dibujo, sin levantar el bolígrafo del papel ni pasar dos veces por el mismo sitio (salvo cruces). Son los llamados <<grafos unicursales>> que fueron estudiados por Euler (importante matemático). Él descubrió las razones por las que unas veces era posible hacer tales dibujos y en otras no.
Olvidémonos por el momento del plano de Cáceres e investigad sobre el tema: ¿por qué unas veces sí y otras no?, ¿dónde está el truco? Comenzad haciendo pruebas con

dibujos como los que hay a continuación. Intentad descubrir sus secretos. Cuándo lo hayáis logrado, seguro que os resultará más fácil pasear por Cáceres.

NOTA: Disponéis de otras dos ayudas que podréis solicitar (una o las dos) tras la primera media hora de trabajo. Anotad



No puede hacerse

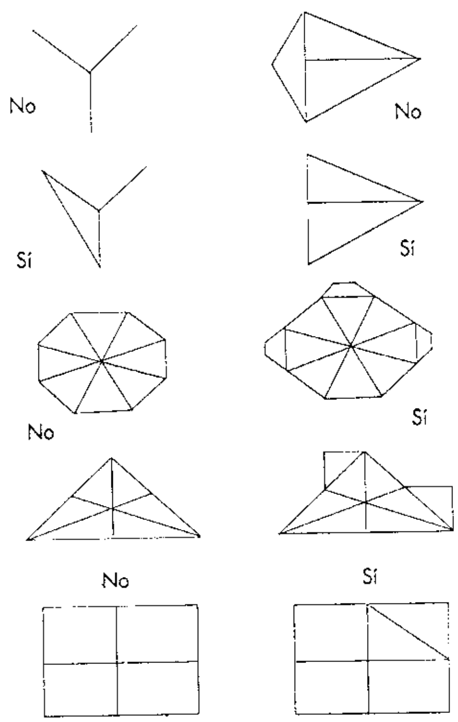


Sí, puede hacerse

todas vuestras averiguaciones, las buenas y las malas. Explicad lo mejor que podáis todos los métodos que probéis. Recordad: lo importante es el procedimiento.

Segunda ayuda

Observa los siguientes dibujos, unos pueden hacerse y otros no. Algunos que no podían dibujarse con un solo trazo, pueden serlo tras hacerles pequeños añadidos.



Tercera ayuda

Cuando uno de los dibujos puede hacerse con un único trazo:

¿Por dónde empiezas?

¿Dónde terminas?

Fijaos bien, el secreto está en los cruces.

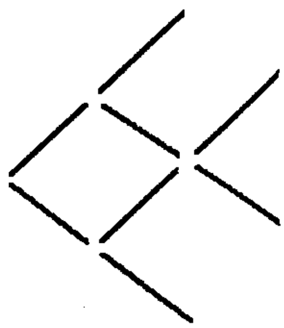
Ingenio. Problema 1

¿AQUÍ QUÉ PONE?

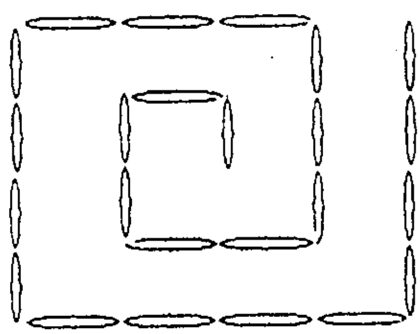
Ingenio. Problema 2

PROBLEMAS CON PALILLOS Y MONEDAS

a) Un pez tropical está nadando hacía el oeste. Hazle ir hacia el este cambiando la posición de sólo tres palillos.



b) Transforma la espiral de la figura en tres cuadrados (no es necesario que todos sean iguales) moviendo solo 4 palillos.



c) Coloca 3 monedas de manera que se vean 2 caras o un lado de la raya y dos cruces al otro.

Ingenio. Problema 3

PROBLEMAS DE LA "CUENTA LA VIEJA"

a) Cinco obreros en cinco horas cavan 5 metros de zanja. ¿Cuántos obreros serán necesarios para cavar en 100 horas 100 metros de zanja?

b) Cuando Ana va al instituto a pie y vuelve en autobús, tarda hora y media. Si va y vuelve en autobús, tarda media hora. ¿Cuánto tardará si hiciese la ida y la vuelta a pie?

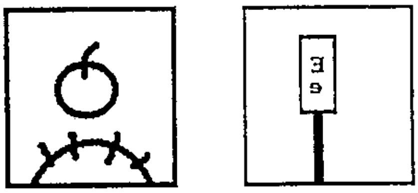
c) Cada mochuelo a su olivo y sobra un mochuelo. En cada olivo dos mochuelos y sobra un olivo. ¿Cuántos mochuelos y olivos hay?

d) Serías capaz de repartir en dos partes iguales los 8 litros de leche que llenan una vasija disponiendo de otras dos vasijas, también sin divisiones, vacías, de 3 y 5 litros.

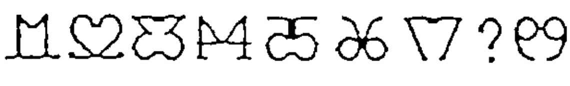
Ingenio. Problema 4

CON IMAGINACIÓN

a) Interpreta los garabatos de la figura. ¿A que no adivinas qué son?



b) ¿Cuál es el termino (?) que falta en la serie de la figura adjunta?



Ingenio. Problema 5

PROBLEMAS CON TRUCO

a) ¿Qué palabra de quince letras escriben incorrectamente todos los licenciados en Filología por Salamanca?

b) ¿Qué es lo contrario de <<no estoy dentro>>?

c) Acomoda las siguientes letras: ABAPA SONULALAR, de manera que formen una sola palabra. No es nombre propio ni voz extranjera. (Sesudos/as abstenerse).

d) La madre de Luis tiene cinco hijos. El primero se llama Pa, el segundo Pe, del tercero Pi y el cuarto Po. ¿Cómo se llama el quinto?

e) ¿Qué razón puede tener un barbero sevillano para preferir cortar el pelo a dos madrileños que a un solo catalán?

f) ¿Cuál es la pregunta que contiene la palabra <<melón>> sin razón aparente?

g) Cuando un reloj da 17 campanadas, ¿qué hora es?

h) ¿Cuántos minutos, a fuego fuerte, son necesarios para cocer un huevo duro?

i) ¿Cómo aumentar el número 666 a una vez y media sin realizar con él ninguna clase de operaciones matemáticas?

j) Cinco por cuatro veinte, más dos, igual a veintitrés. ¿Cómo puede ser eso cierto?

k) ¿Sabrías cómo quitarle a 19 uno y obtener como resultado 20?

l) ¿Escribe 1.000 con tres números romanos?

Ingenio. Problema 6

¡ YA NO PASO !

En la entrada del colegio hay dos carteles con los contenidos siguientes:

No hagas caso de los carteles

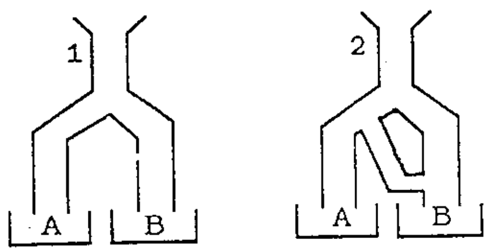
Prohibido entrar en el colegio

Supón que has llegado a las 9:30 al Colegio con unas <<enormes>> ganas de asistir a clase y que has leído los dos carteles anteriores. Explica razonadamente si entrarías en el Colegio o te marcharías a tu casa.

Ingenio. Problema 7

EL MÉTODO DEL MOGOLLÓN

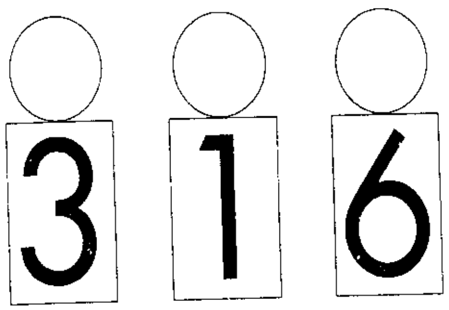
Se han echado 1.000 bolas por uno de los aparatos. Hemos contado 386 bolas en la caja A y 614 bolas en la B. ¿Qué aparato se ha utilizado, el 1 o el 2?



Ingenio. Problema 8

MÚLTIPLOS DE CABEZA

¿Cómo deben colocarse estos 3 chicos para que las cifras marcadas en sus camisetas formen un número de tres cifras que sea múltiplo de 7?



Ingenio. Problema 9

¡ME FALTAN DATOS!

¿Cuál crees que fue el día que menos hablaron los españoles y españolas el año pasado?

Imagina que eres un taxista. Tu taxi es amarillo y negro y ya tiene siete años. Faltan tres meses para pasar la ITV. Una de las escobillas del limpia parabrisas está rota; el carburador necesita una puesta a punto. Aunque en el depósito de combustible caben cincuenta litros, sólo está a unos tres cuartos de su capacidad. ¿Qué edad tiene el taxista?

Ingenio. Problema 10

LA EXCURSIÓN SEXISTA

Los encargados de organizar la excursión de los 120 alumnos y alumnas (60 son chicas y 60 son chicos) de 8.° de EGB, han contratado dos autobuses con 60 plazas cada uno. Para fastidiar, los organizadores deciden ocupar un autobús con todos los chicos y el otro para todas las chicas.

En la primera parada hay un grupo de chicos que se introducen en el autobús de las chicas. El conductor de este autobús, al comprobar que había mas viajeros que plazas, devolvió al otro autobús todas las personas que sobraban. Entre ellos había chicos y chicas.

Una vez que todas las plazas estaban cubiertas en los dos autobuses, reanudaron la marcha. Por tanto, en el autobús de las chicas van algunos chicos y en el de los chicos algunas chicas. En ese momento, ¿que será mayor, el número de chicos en el autobús de las chicas o el número de chicas en el autobús de los chicos? Razona tu respuesta.

Ingenio. Problema 11

EL CUBO DE LAS CARAS NEGRAS

Pintamos un cubo de madera con pintura negra y luego lo cortamos en 3x3x3=27 cubitos iguales. ¿Cuántos cubitos obtendremos con una cara pintada?, ¿y con dos caras pintadas?, ¿y con de tres caras pintadas?, ¿y con cuatro caras pintadas?, ¿y con ninguna cara pintada?

Ingenio. Problema 12

OTRA EXCURSIÓN

Con motivo de la Semana Cultural, los alumnos del grupo de Ecología, acompañados por su profesora, señorita Reciclatodo, realizan una marcha ecológica por la Sierra de Gredos. Un cambio brusco de temperatura y una copiosa nevada les obligó a resguardarse en un refugio, al que llegaron calados, hambrientos y muertos frío. La profesora pide las cerillas al encargado del material, quien descubre horrorizado que sólo le queda una.

En el refugio encuentran un cámping gas, una vieja lámpara de petróleo, una chimenea grande con leña y una cocina de carbón en perfecto estado. La señorita Reciclatodo pregunta a sus alumnos qué debe encender primero. Teniendo en cuenta las especiales circunstancias en que se encuentran, ¿qué responderíais vosotros?

Soluciones

Prueba por equipos. Problema 1. Solución

LAS COLUMNAS.

Actividad para realizar en el museo de Mérida.

Hay que usar la proporcionalidad:

Orden dórico: diámetro de la base/ altura = 4/6

Orden jónico: diámetro de la base/ altura = 4/9

Orden corintio: diámetro de la base/ altura = 4/10

Prueba por equipos. Problema 2. Solución

EL TEATRO.

Actividad en el mismo museo. El teatro tenía una capacidad para 5.500 espectadores. Hay que calcular la capacidad de cada "cavea", sabiendo que las "caveas", al igual que la zona de espectadores completa, tienen forma de sector circular de 180°, con un diámetro máximo de 96 m y mínimo de 30 m. Al ser 3 "caveas", se calcula (43-15)/3=11m, así los radios sucesivos que hemos de considerar son de 48m, 37m, 26m y 15 metros.

Calculamos el área total y el área de cada cavea, ya que el número de espectadores será proporcional al área. El resultado obtenido és:

Ima Cavea: ~ 2.474 espectadores

Media cavea: una tercera parte de los espectadores = 5.500/3 ~ 1833 espectadores

Summa cavea: ~ 1.193 espectadores

Prueba por equipos. Problema 3. Solución

EL ARCO DE MEDIO PUNTO

Falta el croquis. Cada piedra tendrá forma de prisma con base en forma de sector circular de ángulo, probablemente, 180/ (número de piedras) y radio mayor = (amplitud del conjunto de la puerta) / 2 y radio menor = (amplitud del paso de la puerta) / 2.

Prueba individual. Problema 1. Solución

VIAJES DE GUILLIVER

El cojín tiene volumen; así el número de cojines estará en proporción de $1:12^3$. Se tendrán que coser 1728 cojines.

La proporción entre las superficies es de $1:12^2$. El solar tendrá que ser de $0{,}75*144=108\ m^2$

Prueba individual. Problema 2. Solución

POLIELES

Se divide la figura geométrica dada en tres cuadrados de 2x2, cada cuadrado se divide en cuatro cuadrados de 1x1 y finalmente se ve cómo podemos dividir la pieza en cuatro piezas iguales de igual forma que la pieza grande, pero formadas por tres cuadrados pequeños.

Triángulo isósceles de la misma área:
Duplicamos el área de la figura con tres cuadrados más de 2x2 formando un rectángulo de 6x4. Unimos el punto medio del lado de 4cm con los extremos del lado opuesto formando un triángulo que tiene por área la mitad del rectángulo, es decir, la misma área que la pieza original. Este dibujo nos guía para dividir la pieza original en trozos que formarán el triángulo.

Rombo de la misma área:
Dibujamos un rectángulo de área doble de la pieza, como en el caso anterior. Dibujamos sobre el rectángulo un rombo de vértices en los puntos medios de los lados del rectángulo. Este rombo tiene área igual al área de la pieza original y el dibujo nos guía para saber cómo hemos de partir la pieza original para recomponerla formando el rombo.
Hexágono de la misma área:
Un hexágono está formado per seis triángulos equiláteros. Se trata de obtener de cada cuadrado de 2x2 un triángulo equilátero de superficie igual a la mitad de este cuadrado, es decir, 2cm^2. Esto nós permite calcular exactamente cuánto vale el lado del triángulo y, por tanto, el lado del hexágono (raíz cuadrada de 8 / raíz cuarta de 3). Este número se puede construir con regla y compás. La gracia está en encontrar una construcción geométrica sencilla. (I no la hemos encontrado!).

Problema 3. Prueba individual. Solución

CUBO MANIA
Problema de álgebra: X, Y, Z serán los nombres asignados a cada color: amarillo, verde, azul.

Tenemos dos posibilidades, ya que el cubo de 3 caras amarillas y 3 verdes ha de sumar múltiple de 3 y 29 y no lo es. Son dos sistemas de ecuaciones con tres incógnitas y en cada caso habrá infinitas soluciones (una incógnita libre):
Sistema 1: $4X+4Y+Z=48$
$4X+2Y=29$
Sistema 2: $4X+4Y+Z=48$
$X+3Y+2Z=29$

Prueba individual. Problema 4. Solución

CURVA DE HILBERT
La primera curva mide 3x10cm = 30cm. La longitud de una curva, A_n, está relacionada con la longitud de la curva anterior, A_{n-1}, por la siguiente fórmula:
$A_n= 2^{(n-1)}A_{n-1} + [(2^{(n-1)} -1)/2^n]*10$

Circuito Matemático. Problema 1. Solución

TRIÁNGULOS
Hay 60

Circuito Matemático. Problema 3. Solución

ÁBACO
No hay ningún número que cumpla esta condición, en base 10.

Circuito Matemático. Problema 4. Solución

OBRAS
Se tiene que hacer en el lugar.

Investigación. Problema 1. Solución

PASEO POR CÁCERES.
Las ayudas que da el enunciado son muy explícitas.

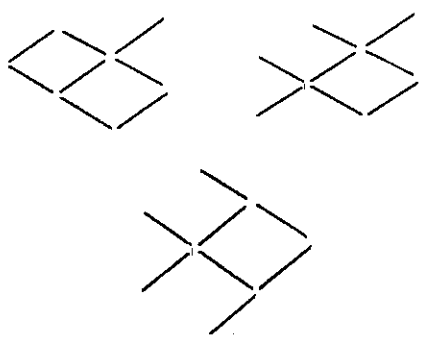
Ingenio. Problema 1. Solución

¿AQUÍ QUÉ PONE?
HOLA, en negativo.

Ingenio. Problema 2. Solución

PROBLEMAS CON PALILLOS Y MONEDAS

a)



b) Se pueden formar los cuadrados de 4x4, de 3x3 y de 1x1: el de 4x4, cerrando el grande; el de 3x3, aprovechando el lado derecho de arriba; y el de 1x1 en el lado inferior derecho, debajo del de 3x3.

c) Se pone una moneda de pie sobre la raya con la cara mirando hacia el lado donde colocaremos la cara.

Ingenio. Problema 3. Solución

PROBLEMAS DE "LA CUENTA LA VIEJA"

a) 5 obreros

b) 2 horas y media

c) 4 mochuelos y 3 olivos

d) Se distribuye sucesivamente la leche a les jarras de la siguiente forma:

Jarra de 8 litros	Jarra de 3 litros	Jarra de 5 litros
8	0	0
3	0	5
3	3	2
6	0	2
6	2	0
1	2	5
1	3	4
4	0	4

Ingenio. Problema 5. Solución

PROBLEMAS CON TRUCO

a) incorrectamente

b) <<estoy dentro>>

c) UNASOLAPALABRA

d) Luis

e) Por qué cobra el doble

f) Esta misma pregunta

g) Es la hora de llevar el reloj a arreglar.

h) Cero minutos

i) Girarlo 180 grados

j) 5 · 4,20 + 2 = 23

k) en cifras romanas XIX

l) MIL

Ingenio. Problema 6. Solución

¡YO NO PASO!

Hay argumentos para todos los gustos

Ingenio. Problema 7. Solución

EL MÉTODO DEL MOGOLLÓN

Muy probablemente el 2

Ingenio. Problema 8. Solución

MÚLTIPLOS DE CABEZA

931, ¡el primero tiene que hacer la vertical!

Ingenio. Problema 9. Solución

¡ME FALTAN DATOS!

a)Posiblemente, el 29 de febrero, si este día no existió en aquel año.

b) ¡Tú eres el taxista, es tu edad!

Ingenio. Problema 10. Solución

LA EXCURSIÓN SEXISTA

Igual número, porque los chicos y chicas se han cambiado uno por otro, ya que el número total de plazas en cada autobús es de 60 y 60, como al principio.

Ingenio. Problema 11. Solución

EL CUBO DE LAS CARAS NEGRAS

6 cubos con una cara pintada

12 cubos con dos caras pintadas
8 cubos con tres caras pintadas
0 cubos con una cuatro caras pintadas
1 con cero caras pintadas

Ingenio. Problema 12. Solución

OTRA EXCURSIÓN
¡La señorita 'Reciclatodo' ha de encender primero de todo una cerilla!

Jesús a sus discípulos:

- En verdad os digo que $y = x^2$.

Los discípulos lo comentan entre ellos y Pedro dice:

- Maestro, no lo entendemos.
-¡Burro! ¡Que es una parábola!

¿Qué le dice la curva a la tangente?
¡No me toques!

VIII Olimpiada

Asturias (Gijón). 1997

Problema 1

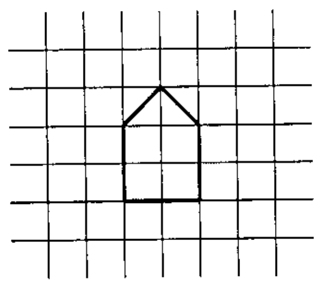
LA ESCALERA MECÁNICA

Juan y Luis van de compras al Corte Inglés, tienen un poco de prisa y se suben en una escalera mecánica. Juan es el triple de rápido que su amigo subiendo (ambos suben de peldaño en peldaño). Al terminar de subir, Juan contó 75 escalones y Luis 50 escalones. Con estos datos calcular los peldaños "visibles" de la escalera.

Problema 2

LA CASA DE PAPEL

Sobre una cuadrícula Lucía ha dibujado una pequeña casa. Su amiga Marga dice que con dos cortes de tijera rectilíneos se pueden obtener tres trozos con los que se puede formar un cuadrado. ¿Cómo han de hacerse los cortes?



Problema 3

LOS RODRÍGUEZ

Los Srs. Rodríguez tienen cinco niños de lo más activo:

El lunes van al cine CUATRO de ellos cuyas edades suman 38 años.

El martes por la tarde van a una pista de hielo CUATRO cuyas edades suman 35 años. El miércoles van al Parque de Atracciones CUATRO sumando 36 años sus edades.

El jueves salen CUATRO a nadar a la piscina y sus edades suman ahora 36 años.

El viernes van CUATRO a un concierto de Rock y sus edades suman 38.

El sábado se van al fútbol CUATRO y esta vez sus edades suman 39 años.

Sabemos que ningún chico sale las seis ocasiones.

¿Sabrás calcular la edad de cada muchacho?

Problema 4

¡VAYA FRASECITA!

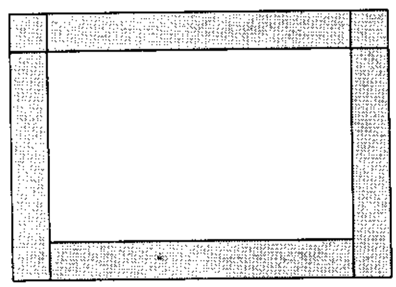
Completa la siguiente frase de modo que sea verdad lo que dice. Busca todas las soluciones posibles.

El número de 0 de esta frase es ___, el de 1 es ___, el de 2 es ___, el de 3 es ___, el de 4 es ___, el de 5 es ___, el de 6 es ___, el de 7 es ___, el de 8 es___, el de 9 es___.

Problema 5

BALDOSAS

Tenemos un suelo rectangular formado por baldosas cuadradas de color blanco, que está rodeado de baldosas sombreadas, también cuadradas, tal como se indica en la figura:



¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo blanco para que el área de la región interior sea igual al área de la franja negra que lo rodea, cuando esta franja negra es de una baldosa de ancha? ¿Y cuando es de 2, de 3, de 4 ...?

Problema 6

EL TELESILLA

En un telesilla, el momento en que Paco, que está sentado en la silla número 98, se cruza con la silla n° 105, su amiga Carmen que ocupa la silla n° 241 se cruza con la n° 230.

Por supuesto, las sillas están regularmente espaciadas sobre el cable y están numeradas en orden a partir del n° 1. ¿Cuántas sillas tiene este remonte?

Soluciones

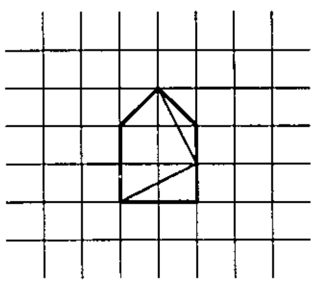
Problema 1. Solución

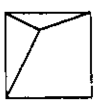
LA ESCALERA MECÁNICA

Cuando Juan ha contado 75, Luis ha contado 25, por lo tanto quedan 50 escalones vacíos. Como en total Luis cuenta 50, está en la mitad del camino, por lo que hay 100 escalones visibles.

Problema 2. Solución

LA CASA DE PAPEL





Problema 3. Solución

LOS RODRÍGUEZ

Uno de los 6 días no está el más pequeño: suman 39.

Uno de los 6 días no está el tercer hijo en edad: suman 38.

Uno de los 6 días no esta el segundo hijo en edad: suman 37.

Uno de los 6 días no esta el hijo mayor: suman 36.

Hijo pequeño x
Hijo tercero x+1
Hijo segundo x+3
Hijo mayor x+4

Hay dos gemelos x+1 o bien x+3 porque hay dos días en que la suma de edad es 36 y dos dias es 38

La solución es x=7

Problema 4. Solución

¡VAYA FRASECITA!

Hay dos soluciones

0-1	4-1	8-1
1-7	5-1	9-1
2-3	6-1	
3-2	7-2	

y

0-1	4-1	8-1
1-11	5-1	9-1
2-2	6-1	
3-1	7-1	

Problema 5. Solución

BALDOSAS

Suponemos que n es el número de baldosas que hay a lo ancho de la franja negra.

Si n=1, las soluciones son 3·10 y 4·6.

Si n=2, las soluciones son 5·36, 6·40 y 8·12.

Si n=3, las soluciones 7·78, 8·42, 9·30, 10·24, 12·18 y 14·15.

Si n=4, las soluciones son 9·36, 10·72, 12·40 y 16·24.

Para n las dimensiones son x·y con

VIII Olimpiada

$$y = \frac{2n(x+2n)}{x-2n} = 2n + \frac{8n^2}{x-2n}$$

con x, y enteros.
Para cada n hay tantas soluciones como el número de divisores de $8n^2$ dividido por 2.

Problema 6. Solución

EL TELESILLA

230-104 = 126 sillas

de 1 a 98   98 sillas

126-98 =28

240+28=268

268 sillas

¿Por qué se suicidó el libro de "Mates"?

Porque tenía muchos problemas.

IX Olimpiada

Almeria. 1998

Prueba individual. Problema 1

Una cuadrilla de pintores tenía que pintar dos paredes, una de doble superficie que la otra. Toda la cuadrilla estuvo pintado en la pared grande durante medio día. Por la tarde la mitad de la cuadrilla pintó en la pared pequeña y la otra mitad en la grande. Al finalizar el día sólo les quedo un poco por pintar en la pared pequeña, para lo cual fue necesario que pintara un solo pintor el día siguiente completo. ¿Cuántas personas componían la cuadrilla?

Nota: la jornada laboral está compuesta por 4 horas antes de mediodía y 4 horas por la tarde. Todos los pintores rinden el mismo trabajo y de forma uniforme.

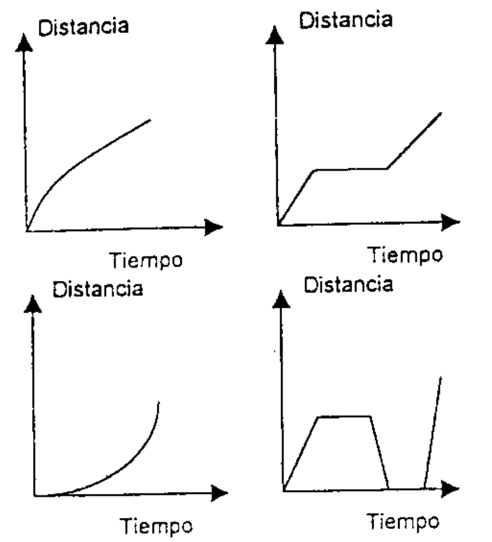
Prueba individual. Problema 2

Tenemos una mesa de billar con forma rectangular de lados a y b números enteros. Golpeamos una bola desde una esquina con ángulo de 45°. ¿Cuántas veces rebotará

en las bandas antes de entrar en otra esquina?. Se supone que la bola no toma efecto y que puede rodar indefinidamente.

Prueba individual. Problema 3

Las gráficas de la figura corresponden al recorrido que efectúan hasta la misma oficina cuatro personas que habitan en un mismo edificio. Da una posible interpretación.



Prueba por Equipos. Problema 1

En una convención del partido republicano de los Estados Reunidos Americanos de América había cien políticos. Cada político era o bien honesto, o bien deshonesto.

Sabiendo que:

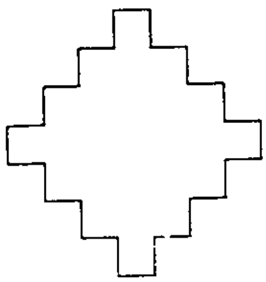
a) Al menos uno de los políticos era honesto

b) De cualquier par de políticos, al menos uno de los dos era deshonesto

¿Cuántos políticos deshonestos había?

Prueba por Equipos. Problema 2

La señora Eustaquia Chindasvinta es propietaria de un terreno con la forma que se ve en la figura. Esta forma posee la

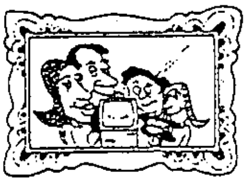


propiedad siguiente: "si medimos su perímetro en Km y su área en Km^2, las dos medidas están representadas por el mismo número". ¿Qué curioso, verdad?. ¿Cuál es, en metros, la longitud del perímetro?

Prueba por Equipos. Problema 3

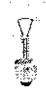
Diofanto (S. IV dc) fue uno de los matemáticos que más fama dio a Alejandría. Un relato griego narra de forma concisa su vida. Fue muchacho durante 1/6 de su vida, durante 1/12 se dedicó a viajar, se casó 1/7 después, tuvo un hijo 5 años más tarde, que vivió la mitad de la edad de su padre, el cual murió 4 años después. ¿Cuántos años vivió Diofanto?.

Prueba por Equipos. Problema 4



Andrés, que es un niño inquieto, observa que cuando cumple 14 años, su padre cumple 41, es decir, el número 14 con las cifras invertidas. Si Andrés y su padre vivieran cien años, ¿podrías decir las veces que a lo largo de su vida volverá a ocurrir este fenómeno?.

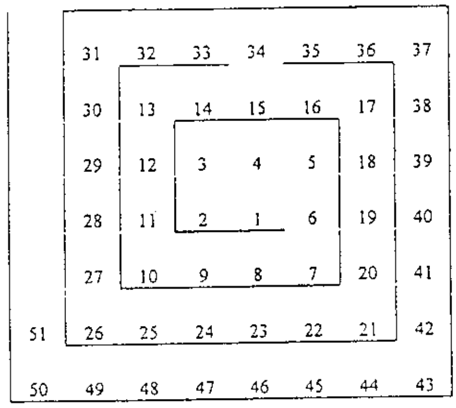
Prueba por Equipos. Problema 5



. ¿En qué cifra acaba el número 3^{3658}?

Prueba por Equipos. Problema 6

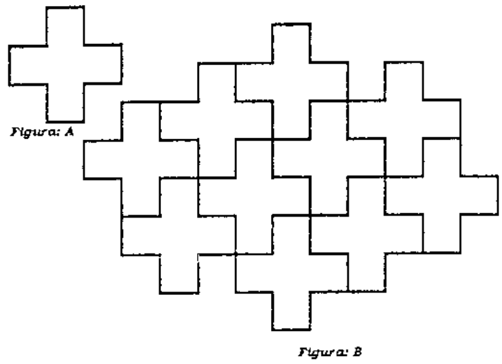
Los números del 1 al 51 están escritos en forma de espiral. El 51 está en la 4ª columna a la izquierda del que inicia la serie y dos filas por debajo. Si continuamos la serie, ¿dónde estará el 84?, ¿y el 3658?.



Prueba por Equipos. Problema 7

Los trabajadores de la construcción hacen paredes y suelos montando grandes cantidades de cuerpos sólidos geométricos, la mayoría de las veces, idénticos. Muchas aceras, calzadas, zócalos, frisos e incluso paredes completas se hacen con losetas de diferentes tamaños, formas y unidas entre sí en distintas posiciones.

A las losetas que cubren una superficie plana y se ajustan bien entre sí, sin dejar huecos ni montarse unas encima de otras, se les llaman *teselas*. Cuando una superficie podemos cubrirla perfectamente en todas direcciones con este tipo de losetas o teselas, decimos que hemos realizado una *teselación*.

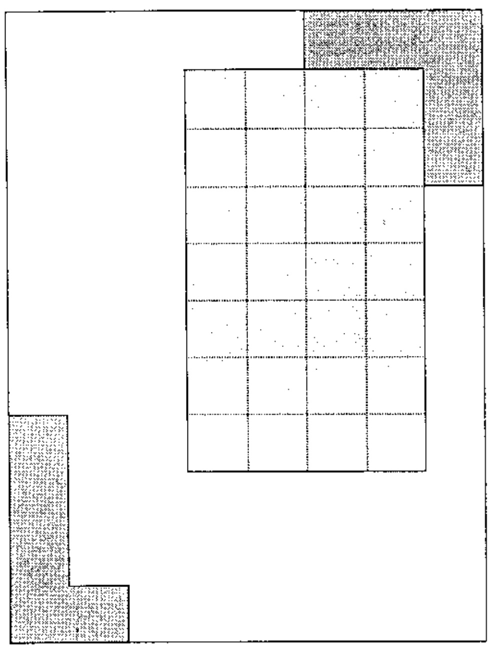


La *figura A* es un pentominó, con ella podemos rellenar el plano, es decir, podemos hacer una teselación *-figura B-*.

Observad que no deja huecos ni se monta una encima de la otra.
Utilizando los polígonos regulares que se os proporcionan, investigad cuál o cuáles de ellos pueden ponerse alrededor de un vértice sin que dejen huecos ni se monten unos encima de los otros
Combinando más de un polígono regular construir distintas teselaciones. *No os olvidéis que antes de descomponerlo*, la persona encargada de vuestro equipo debe tomar nota.

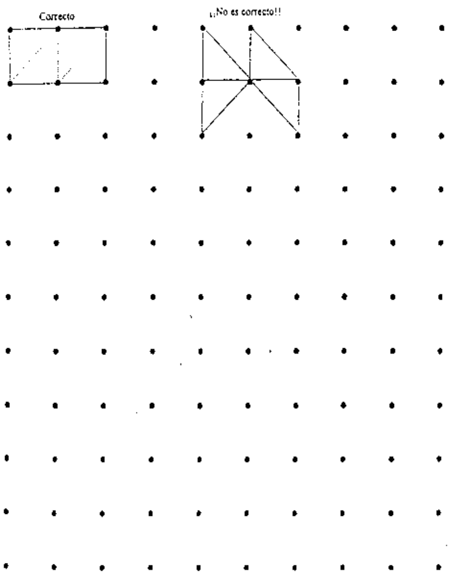
Prueba por Equipos. Problema 8

Alrededor de la piscina de 4 x 7 queremos colocar césped artificial. Para ello disponemos de piezas que tienen forma de los pentominós; en el manual de instrucciones nos confirman que con las mismas podemos cubrir todo el campo, sin cortar ni superponer ninguna pieza.
Por favor, ayudadnos a colocar el césped.



Prueba por Equipos. Problema 9

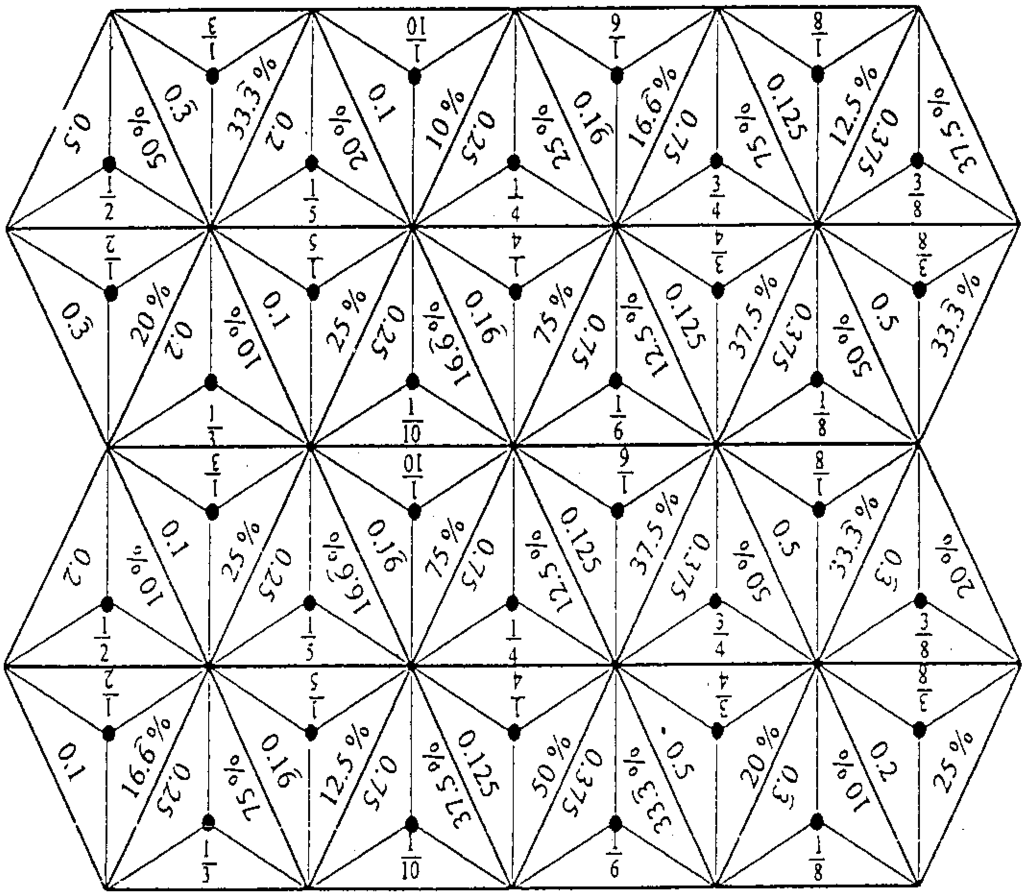
Construir en el geoplano todas las figuras posibles formadas por 4 triángulos rectángulos de igual superficie, unidos por los catetos o por la hipotenusa.
Podéis construir 10 figuras diferentes.



Prueba por Equipos. Problema 10

Con el dominó de triángulos equiláteros que os presentamos ya habréis tenido ocasión de jugar. Tenéis que unir siempre los lados que tengan expresiones equivalentes.
Cuando terminéis, procurad no destruirlo, ya que la persona encargada de vuestro equipo ha de tomar nota.

(Ver dibujo página siguiente)



Soluciones

Prueba individual. Problema 1. Solución

Planteamiento del problema.

Sea S = Superficie de la pared pequeña.
N = Número de componentes de la cuadrilla.
d = Superficie que pinta una persona en un día.
Según estos valores tenemos las siguientes expresiones:

i) $(N + N/2).d/2 = 2S \Rightarrow S = (3Nd)/8$
ii) $(N/2).(d/2) = S - d \Rightarrow S = (N+4)d/4$
Por tanto se tiene: $(N+4)/4=3N/8 \Rightarrow 8+2N = 3N \Rightarrow N = 8$

Reflexión : En la resolución del problema no es necesario conocer el valor de S = Superficie de la pared pequeña, sin embargo, si existe una relación en S=3d.

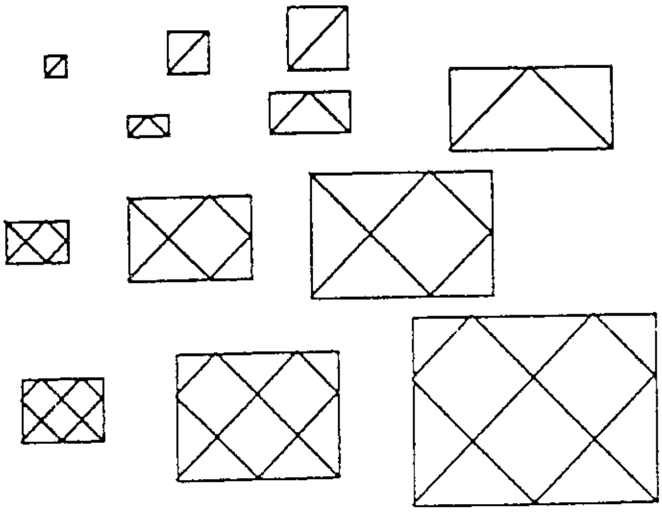
Prueba individual. Problema 2. Solución

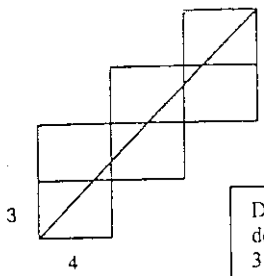
Para familiarizarse con el problema es conveniente analizar casos particulares cuadriculando las mesas de billar.

Mesa: 1x1, 2x2, 3x3, etc el número de rebotes es cero = 1+1-2.

Mesa: 1x2, 2x4, 3x6, etc el número de rebotes es uno = 1+2-2.

Mesa: 2x3, 4x6, 6x9, etc el número de rebotes es tres = 2+3-2.





Desarrollo de una mesa de billar de dimensiones 3 x4 mediante simetrias axiales

Mesa: 3x4, 6x8, 9x12, ect el número de rebotes es cinco = 3+4-2.
De estos deducimos que las trayectorias en mesas semejantes, o de lados proporcionales, son análogas y dan lugar al mismo número de rebotes. Por ese motivo, solo se tendrán en cuenta, dimensiones que sean primos entre sí.
Los rebotes de la bola se pueden simular por medio de simetrías axiales, de ejes los lados la mesa de billar.
Luego si una mesa tiene de dimensiones a y b, las dimensiones de la mesa semejante a esta son: a / m.c.d.(a,b) y b / m.c.d.(a,b).
Por tanto, se tiene que: Rebotes de la mesa (a, b) = Rebotes de la mesa [a / m.c.d.(a, b), b/m.c.d.(a,b)] = [(a+b)/m.c.d.(a, b)]-2

Prueba individual. Problema 3. Solución

a) No lleva una velocidad constante. Empieza el recorrido a mayor velocidad y va reduciendo poco a poco.
b) En el primer tramo lleva una velocidad constante, a continuación se detiene a desayunar, y por último continua a una velocidad constante, pero más rápido que en el primer tramo.
c) Comienza con una velocidad baja y no constante. Va aumentando la velocidad a medida que se acerca a la oficina.
d) Recorre parte del camino a una velocidad constante, se detiene un momento y comprueba que había olvidado algo en casa. Regresó a recogerlo y se dirigió de nuevo a la oficina.

Prueba por equipos. Problema 1. Solución

Por el apartado (a) elijo al político honesto. Al juntar a este, con cada uno de los 99 restantes, según el apartado (b), cada uno de ellos es deshonesto. Por tanto, hay 99 deshonestos.

Prueba por equipos. Problema 2. Solución

Si llamamos L a la longitud del lado del cuadrado en Km tenemos la siguiente igualdad: 28 x L = 25 x L^2, por tanto, tengo que L = (28/25)Km = 1,12 Km. Luego: Perímetro = 28 x 1,12 Km = 31,36 Km = 31360 metros

Prueba por equipos. Problema 3. Solución

Siendo x la edad de Diofanto tenemos la siguiente ecuación:
x = (x/6)+(x/12)+(x/7)+5+(x/2)+4 ; mcm(6, 12,7,2)=84
84x= 14x + 7x + 12x + 42x + 9,84;
84x - 75x = 9,84; por tanto, x=84

Prueba por equipos. Problema 4. Solución

Si ab es la edad del padre, entonces ba es la edad del hijo y se tiene, por tanto, que ab - ba = 27 ; de donde se sigue la siguiente igualdad b+10a-a-10b = 27 $\Rightarrow$ 9a-9b = 27 $\Rightarrow$ a - b =3. Los números naturales que cumplen esta relación además del 4 y el 1 son: 5 y 2, 6 y 3, 7 y 4, 8 y 5, 9 y 6. La respuesta es 5 veces.

Prueba por equipos. Problema 5. Solución

Si calculo las sucesivas potencias de 3 se observa que son cíclicas.
$3^0 = 1$; $3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$; $3^5 = 243$; $3^6 = 729$; $3^7 = 2187$; $3^8 = 6561$; etc.
Las potencias de tres múltiplos de 4 terminan en uno, por tanto, para saber la terminación de la potencia 3658 divido por cuatro y tengo: 3658 = 4 x 914 + 2.
Luego 3^{3658} termina igual que 3^2, es decir, en 9.

Prueba por equipos. Problema 6. Solución

Podemos empezar el problema estableciendo un sistema de coordenadas adecuado, siendo el número 1 el origen, así por ejemplo el 16 tiene de coordenadas (1, 2) que significa que se encuentra una columna a la derecha del uno y dos filas por encima; el 50 tiene de coordenadas (-4, -3) que significa que se encuentra 4 columnas a la izquierda y 3 filas por debajo. Para encontrar la posición de cualquier número, se pueden seguir muchas estrategias, ya que la tabla presenta múltiples regularidades. Una de ellas es observar las diagonales (1, 9, 25, 49,...) y (4, 16, 36,...) que son los cuadrados de los números impares y pares respectivamente. Según este criterio, el cuadrado perfecto más próximo a 84 es 81 que tiene coordenadas (-4, -4), luego siguiendo la serie desde el 81, el número 84 tiene (-5, -2), es decir, 5 columnas a la izquierda y dos filas por debajo. El cuadrado perfecto más próximo a 3658 es $3600=60^2$, que tiene (29, 30). La columna siguiente a 3600 tiene 61 números, luego el último número de esa columna es el 3661 que tiene de coordenadas (30, -30) de donde el número 3658 tiene de coordenadas (30, -27) es decir, 30 columnas a la derecha del uno 27 filas por debajo.

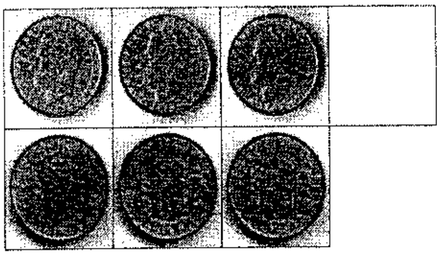
> ***Una poco de estadística*:**
>
> **En el 33% de los accidentes hay implicada alguna persona que ha bebido. En el 67% restante no. Por tanto, es más seguro conducir bebido.**

X Olimpiada

Albacete. 1999

Prueba Individual. Problema 1

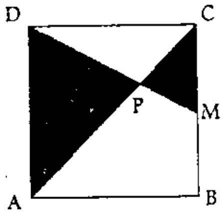
SEIS MONEDAS
Coloca seis monedas en un modelo de casillas como el que indica la figura, de manera que en las monedas de la fila superior se vea la cara y en las monedas de la fila inferior se vea la cruz.



El objetivo es intercambiar las caras con las cruces en el menor número de movimientos.
Caras y cruces se mueven por turno hacia cualquier casilla contigua que esté desocupada y cada movimiento puede hacerse hacia arriba, abajo, de lado o en diagonal.
¿Cuál es el mínimo número de movimientos para intercambiarlas?
Cuando encuentres la solución trata de resolver un problema parecido, con una fila de cinco casillas con cuatro caras encima de otra fila con cuatro casillas de cruces. Prueba entonces a diseñar una estrategia para resolver este problema en un caso general.

Problema 2. Prueba Individual

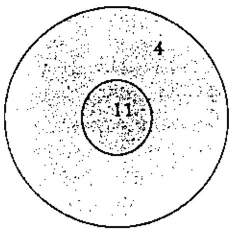
CUADRADO
En un cuadrado ABCD de lado unidad se traza AC. Se une el vértice D con el punto medio, M, del lado BC.



- Calcular la razón entre las superficies del cuadrilátero ABMP y el triángulo CDP.
- ¿Cuál sería la razón si M en lugar de estar en el punto medio del lado CB, estuviese a 1/3 del vértice B?.
- ¿ Podrías aportar algún tipo de solución para M situado a l/n del vértice B?.

Prueba Individual. Problema 3

JUGANDO A LOS DARDOS
Juan y María están jugando a los dardos tirando sobre una diana como la que muestra el dibujo.
La diana está dividida en sólo dos regiones: la interior vale 11 puntos y la exterior vale 4.
Los jugadores tiran los dardos por turnos,



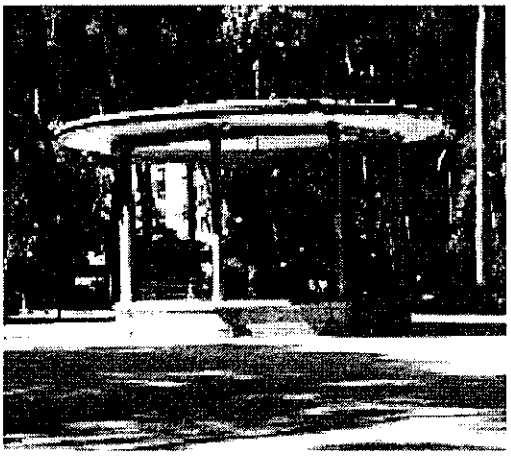
sumando los totales, hasta que alguno alcanza una puntuación previamente acordada. Este será el ganador.
Cuando Juan y María estaban jugando a conseguir puntos, se dieron cuenta que no eran capaces de conseguir esa puntuación. Así es que cogieron papel y lápiz y se sentaron para averiguar todos los totales posibles. Menos mal que vieron que, a partir de cierto número, cualquier puntuación era posible. Entonces acordaron que en el futuro siempre fijarían un total suficientemente grande.
Encuentra todos los totales imposibles de obtener en este juego.
Investiga acerca de los números imposibles de obtener cuando se definen otras puntuaciones para cada región de la diana.
Tal vez puedas descubrir una fórmula general para saber la máxima puntuación

imposible cuando la región interior vale m puntos y la exterior n puntos.

Problema 1. Prueba por equipos

EL TEMPLETE DE LA MÚSICA

Estáis viendo lo que se conoce como el templete de la música, y está situado al final de la calle central del parque. Aquí es donde, entre otras cosas, tienen lugar los conciertos de la banda municipal que atraen a multitud de albacetenses. Es una construcción agradable y sencilla y sobre ella os vamos a hacer una serie de preguntas que se nos han planteado estos días con motivo de la remodelación del parque.



Suponiendo que un músico necesita, para poder estar bien acomodado mientras interpreta, una superficie de 0.90 m^2 ¿cuál sería el número máximo de músicos que podrían tocar en el Templete, habida cuenta que aprovecharían toda la superficie disponible y que el director de la banda necesita dos m^2 para él?

En la parte superior podéis observar que, uniendo las columnas, hay unos arcos. Queremos adornar esos arcos adosándoles unas guirnaldas. ¿Qué longitud, aproximada, de guirnaldas deberemos comprar?

Por último, para darle más luminosidad por las noches, queremos colocar unas hileras de bombillas que, colocadas sobre el techo, vayan desde las columnas al punto en que cuelga la lámpara que se encuentra en el centro del Templete. ¿Qué longitud mínima de cable necesitaremos para hacer la instalación?

Problema 2. Prueba por equipos

LA FUENTE DE LAS COLUMNAS

Aquí estáis viendo una hermosa fuente, rodeada por columnas que la enmarcan recordando una figura geométrica que esperamos os resulte familiar. Precisamente sobre esa figura, os

queremos proponer unas preguntas que nos permitan resolver algunos problemas que tenemos planteados en el diseño de la nueva fuente que se quiere instalar.

¿Cómo encontraríamos el centro de la figura para poder colocar allí la fuente? Por supuesto, no nos está permitido entrar en el estanque, ni en el parterre que lo rodea.

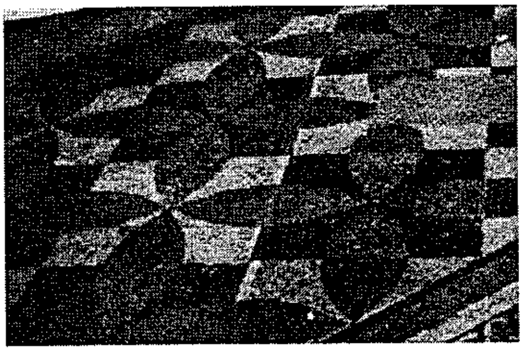
Queremos también completar el doble recinto de columnas colocando las cuatro que parecen faltar. ¿A qué distancia del centro se deberían colocar dichas columnas para que formen con las otras sendos polígonos regulares? ¿Qué distancia habría hasta las columnas contiguas?

Por último, si cubriésemos totalmente el pasillo que forman las columnas con un artesonado de madera al estilo del que ahora hay esbozado, ¿qué superficie mínima necesitaríamos cubrir?

Prueba por equipos. Problema 3

MOSAICO ROMANO

Últimamente, la palabra mosaico y los conceptos a ella ligados se utilizan mucho en matemáticas trabajando no sólo los aspectos geométricos sino incluso su vertiente cultural e histórica. Pero en las referencias históricas al uso de los mosaicos, casi siempre acudimos a los árabes olvidándonos que, aunque de una forma menos rica, los romanos también hicieron uso de ellos para embellecer sus construcciones. Buen ejemplo tenéis en las exposiciones permanentes del Museo Arqueológico de Albacete, en las que podemos observar los bellos diseños que



utilizaron por estas tierras.

Precisamente queremos que os fijéis en el mosaico procedente de Hellín, una ciudad situada a 60 km. de Albacete, porque sobre el debéis averiguar varias cosas.

¿Cuál es la figura geométrica básica utilizada por el artesano que diseñó este mosaico para poder cubrir todo el plano?

¿Podríais explicar, la forma en que está hecho y cómo se extiende en todas direcciones la construcción?

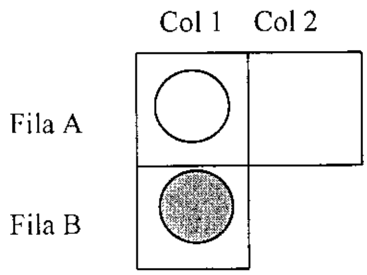
Como las piedrecillas negras que entran a formar parte del dibujo del mosaico son las que más escasean en la zona, queremos averiguar las que necesitaremos para cubrir el suelo de una habitación cuadrada de 5 metros de lado, sabiendo que se precisan, aproximadamente, 100 de esas piedrecillas para cubrir $1 dm^2$.

Soluciones

Prueba Individual. Problema 1. Solución

SEIS MONEDAS

Empezaremos el problema con solo 2 monedas, luego 4 monedas, 6 monedas, 8 monedas y luego generalizaremos.

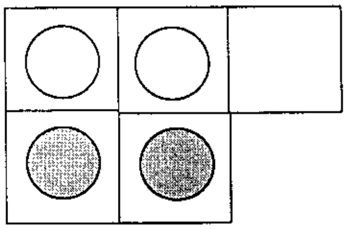


Para localizar las posiciones designamos a la primera fila A y a la segunda B. Las columnas las designamos 1 y 2. Así la moneda superior está en la posición A1 y la inferior en la B1. Para indicar los diferentes movimientos de las monedas indicaremos la posición inicial y la final.

Para intercambiar la posición de estas dos monedas se necesitan 3 movimientos:

B1→A2; A1→ B1; A2 →A1.

Ahora con 4 monedas:

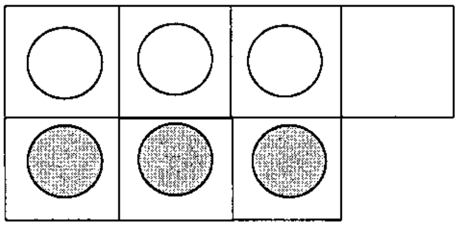


Son necesarios 5 movimientos:

B2 →A3; A1→ B2;B1→ A1;
A2 →B1; A3→ A2.

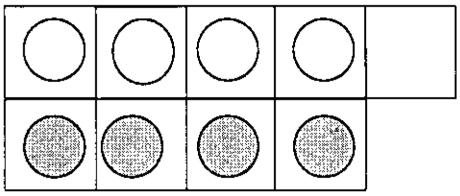
Han sido necesarios dos movimientos más que en el caso anterior.

Ahora con 6 monedas:



Son necesarios 7 movimientos:

B3 ⟶A4; A2⟶B3; B1⟶A2;
A1 ⟶B1; B2⟶ A1; A3⟶ B2;
A4⟶A3.
Han sido necesarios dos movimientos más que en el caso anterior.
Ahora con 8 monedas:



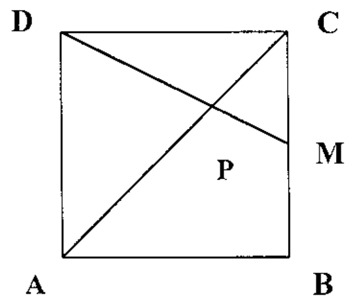
Son necesarios 9 movimientos: B4 ⟶A5;

A3⟶ B4; B2 ⟶A3;
A1 ⟶B2; B1 ⟶A1;
A2⟶ B1; B3 ⟶A2;
A4⟶ B3; A5 ⟶A4.

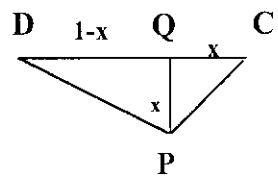
Han sido necesarios dos movimientos más que en el caso anterior. Como se puede observar es importante hacer los desplazamientos en diagonal y ocupar la plaza que se acaba de dejar libre.
Se observa que al añadir dos monedas más son necesarios también dos movimientos más. Así en el caso general de disponer de 2n monedas, serán necesarios 3+2(n-1) movimientos.

Prueba Individual. Problema 2. Solución

CUADRADO

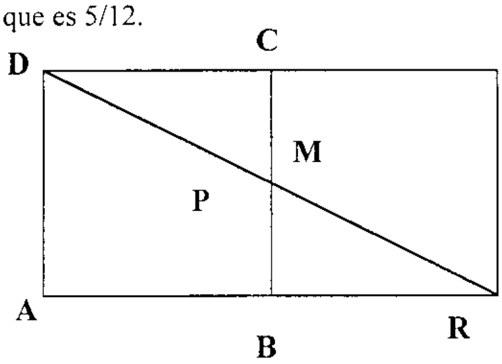


En primer lugar calcularemos la altura del triángulo PCD. Designamos con la letra x el valor de la altura, así el valor desde el pie de la altura, Q, hasta el vértice C también es x y el valor desde Q hasta a D será 1-x:



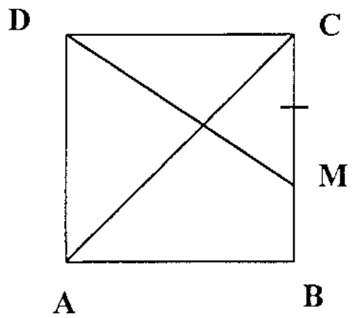
El triángulo PQD es semejante al triángulo MCD, porqué tienen los lados paralelos. En el triángulo MCD el lado MC es ½ i el lado CD es 1. Debido la proporción de sus lados se verifica: $\frac{x}{1-x}=\frac{\frac{1}{2}}{1}$, de aquí se obtiene x=1/3.
Ahora ya podemos calcular el área del triángulo PCD: su base (lado CD) es 1 y su altura 1/3. De esta forma su área es 1/6.
Ahora calcularemos el área del cuadrilátero ABMP:
Para calcularla calcularemos el área del triángulo APR y le restaremos el área del triángulo BMR. La base del triángulo APR es 2 y su altura 2/3, con lo cual su área será 2/3. La base del triángulo BMR es 1 y su altura 1/2, con lo cual su área será 1/4.

Restando tenemos el área del cuadrilátero, que es 5/12.



Finalmente la razón entre el área del cuadrilátero y la del triángulo da 5/2.

b)



Este será el nuevo dibujo. Mantenemos la misma notación que en el apartado anterior. Como en el apartado anterior, en primer lugar calcularemos la altura del triángulo PCD. El triángulo PQD es semejante a MCD, ahora el lado MC es 2/3 y el lado CD es 1. La proporción de los lados nos da $\frac{x}{1-x}=\frac{\frac{2}{3}}{1}$, con la cual la altura x da 2/5.

El área del triángulo PCD será 1/5 ya que su base (lado CD) es 1 y su altura 2/5.

Ahora calcularemos el área del cuadrilátero ABMP, utilizando el mismo procedimiento que en el apartado anterior. La base del triángulo APR es 3/2 y su altura 3/5, con lo cual su área será 9/20. La base del triángulo BMR es ½ y su altura 1/3, y su área 1/12. Restando tenemos el área del cuadrilátero, que es 11/30.

La razón entre las áreas es 11/6.

c) Primero calcularemos la altura del triángulo PCD. Volvemos a utilizar la semejanza entre los triángulos PQD y MCD. El lado MC es 1-1/n o sea (n-1)/n y el lado CD es 1. Debido a la proporción de sus lados: $\frac{x}{1-x}=\frac{\frac{n-1}{n}}{1}$, con lo cual la altura x vale (n-1)/(2n-1).

Área del triángulo PCD: su base (lado CD) es 1 y su altura (n-1)/(2n-1); su área es $\frac{n-1}{2(2n-1)}$.

Ahora calcularemos el área del cuadrilátero ABMP. Triángulo APR: en primer lugar determinaremos la base del triángulo APR (lado AR): El triángulo ARD es semejante al MCD, los lados del triángulo MCD ya los hemos calculado al principio de este apartado, los lados de ARD son: lado AD igual a 1 y lado AR es el que buscamos, lo designaremos por la letra y; teniendo en cuenta la proporción entre estos lados, se obtiene $\frac{1}{y}=\frac{\frac{n-1}{n}}{1}$; con lo cual y = n/(n-1). La altura del triángulo APR será 1-(n-1)/(2n-1) que es igual a n/(2n-1). Así el área de APR es $\frac{n^2}{2(n-1)(2n-1)}$. Triángulo BMR: su base es $\frac{n}{n-1}-1=\frac{1}{n-1}$. Su altura 1/n y su área $\frac{1}{2n(n-1)}$. Restando el área de estos dos triángulos tenemos el área del cuadrilátero: $\frac{n^3-2n+1}{2n(n-1)(2n-1)}$.

Finalmente la razón entre las áreas es $\frac{n^2+n-1}{n(n-1)}$. Substituyendo el valor de n por 2 da 5/2 que coincide con el resultado del primer apartado y si n es 3 da 11/6 que coincide con el resultado del segundo apartado.

Prueba Individual. Problema 3. Solución

JUGANDO A LOS DARDOS

Las puntuaciones que se pueden obtener son: 4, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, y a partir de aquí todas porque ya se han obtenido cuatro números consecutivos: 30, 31, 32 y 33; ahora sumando 4 a cada uno de ellos se obtienen todos los números consecutivamente.

Así los totales imposibles de obtener son: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 25 y 29.

En el caso general hay que distinguir dos casos: que los números dados sean primos entre sí o que no lo sean. En el caso anterior los números eran 4 y 11 que son primos entre sí, en este caso hemos visto que a partir de un cierto número todas las puntuaciones eran posibles. Si los números dados son primos entre sí esta situación se da siempre. Veamos otro ejemplo:

Supongamos que los números son 5 y 9. Los totales posibles son: 5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36 ... Se puede observar que se consiguen dos números consecutivos, más adelante tres números consecutivos, luego cuatro y luego cinco. Cuando la cantidad de números consecutivos coincide con el número menor de los dos números dados, en este caso 5, ya se pueden obtener a partir de ahí todos los números consecutivamente.

Observación: Si los números dados son **a** y **b** el último número que es imposible de obtener, en este ejemplo es el 31, coincide con **ab-a-b**, en este ejemplo 31=5.9-5-9=45-14. Con los números 4 y 11 dados, el último número imposible de aparecer era 29. Se verifica 29=4.11-4-11=44-15.

Veamos qué pasa cuando los números no son primos entre sí.

Supongamos que los números son 6 y 8. Se cumple MCD(6,8)=2, no son primos entre sí. Los totales posibles serán: 6, 8, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ... Evidentemente, sólo se obtienen números pares, a partir de un cierto número se obtienen todos los números pares consecutivamente.

Otro ejemplo: supongamos que los números son 9 y 12. Tenemos MCD(9,12) = 3. Los totales posibles serán: 9, 12, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36,... Solamente se obtienen números que son múltiplos de 3. A partir de un cierto número se obtienen todos los múltiplos de 3 consecutivamente.

La conclusión que podemos obtener es que cuando los dos números no son primos entre sí, a partir de un cierto número no se pueden obtener todas las puntuaciones posibles.

Si los dos números dados verifican que el mayor es múltiplo del menor, entonces se pueden obtener todos los múltiplos del número menor

Un estadístico podría poner su cabeza en un horno y sus pies en hielo y decir que, de media, se encuentra muy bien.

Memoria de las Olimpiadas Matemáticas Nacionales

I OLIMPIADA - Pamplona.1990
Matematihka Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Coordinador: Alberto Petri Etxeberria

II OLIMPIADA - Canarias (La Laguna, Las Palmas y Lanzarote). 1991
Sociedad Canaria de profesores de matemáticas "Isaac Newton"
Coordinador: Arnulfo Santos Hernandez

III OLIMPIADA - Huelva. 1992
Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Coordinador: José Romero Sánchez.

IV OLIMPIADA - Andorra. 1993
Coordinación de Centros Docentes Españoles en Andorra
Coordinador: José-María Sánchez Molina.

V OLIMPIADA - Burgos. 1994
Sociedad Castellano-Leonesa del Profesorado de Matemáticas.
Coordinador: Adrián-Francisco Fernández Pérez.

VI OLIMPIADA - Castellón y Alicante. 1995
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
Coordinador: José-Luis García Valls

VII OLIMPIADA - Cáceres. 1996
Sociedad Extremeña de Profesores de Matemáticas "Ventura Reyes Prosper"
Coordinador: José Macías Marín

VIII OLIMPIADA – Asturias (Gijón). 1997
Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustin de Pedrayes"
Coordinador: Josetxu Arrieta Gallastegui

IX OLIMPIADA - Almería. 1998
Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Coordinador: Pedro-J. Martínez Fernández

X OLIMPIADA - Albacete. 1999
Sociedad Castellano-manchega de profesores de Matemáticas.
Coordinadores: Serapio García Cuesta y Juan-Emilio García Jiménez

Amb la voluntat de continuar la tradició, que la "Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas" va començar fa deu anys, i per donar-li continuïtat, la Federació d'Entitats per a l'ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya" (FEEMCAT) s'ha fet càrrec de l'organització de la XI Olimpíada Matemàtica Nacional de l'any 2000. Any que ha estat declarat per la UNESCO Any Mundial de les Matemàtiques.

Seguint les normes del "Reglamento Orgánico de la Olimpíada Matemática de la Federación Española", un equip de responsables i col·laboradors hem treballat amb il·lusió per tal que el desenvolupament d'aquesta XI Olimpíada pugui assolir l'èxit de les olimpíades precedents.

Aquesta celebració matemàtica, a cavall de Tarragona, Barcelona i Girona, vol ser també un reconeixement al treball realitzat a les deu olimpíades anteriors, i a tots els que han contribuït a fer-les possible, sigui amb la seva participació, amb la seva aportació econòmica, o com a organitzadors.

OBJECTIUS

- *Estimular i fomentar entre els estudiants el gust per les matemàtiques, així com presentar-ne una visió complementària a la utilitzada a l'aula.*
- *Crear un marc adient per a la pràctica de la resolució de problemes*
- *Eliminar certes pors a l'assignatura de matemàtiques en la comunitat educativa, de manera que permeti situar-la on li correspon.*
- *Afavorir les relacions d'amistat i coneixement entre els joves de Comunitats Autònomes diferents.*
- *Afavorir el coneixement de la nostra Comunitat Autònoma, Catalunya, mitjançant les activitats, tant matemàtiques com lúdiques.*
- *Afavorir l'intercanvi d'experiències, projectes i debats, entre el professorat assistent, per tal de poder-los fer extensius a la resta de companys de les respectives comunitats.*

Con la voluntad de continuar la tradición que la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas inició hace ya diez años, y dando continuidad a la misma, "la Federació d'Entitats per a l'ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya" se ha hecho cargo de la organización de la XI Olimpiada Matemática Nacional del año 2000, con la feliz coincidencia de que este año ha sido declarado por la UNESCO como el Año Mundial de las Matemáticas.

Siguiendo las normas "del Reglamento Orgánico de la Olimpiada Matemática de la Federación Española", un equipo de responsables y colaboradores hemos trabajado con ilusión para que el desarrollo de esta XI Olimpiada pueda obtener el éxito y el acierto de las que le han precedido.

Esta celebración matemática, compartida entre Tarragona, Barcelona y Girona, también quiere ser un reconocimiento al trabajo realizado en las diez primeras olimpiadas, y a todos los que han contribuido a hacerlas posible, sea con su participación, con su aportación económica o como organizadores o responsables.

OBJETIVOS

- Fomentar entre los estudiantes el gusto por las matemáticas, así como presentar una visión de las mismas complementaria a la utilizada en el aula.
- Crear un ambiente adecuado para practicar la resolución de problemas
- Eliminar ciertos miedos hacia la asignatura de matemáticas en la comunidad educativa, de manera que permita situarla donde le corresponde.
- Favorecer las relaciones de amistad y conocimiento entre jóvenes de diversas Comunidades Autónomas.
- Favorecer el conocimiento de nuestra Comunidad Autónoma, Catalunya, a través de las distintas actividades tanto matemáticas como lúdicas.
- Favorecer el intercambio de experiencias, proyectos y debates, entre el profesorado asistente, para hacerlos luego extensivos al resto de compañeros de las respectivas comunidades.

CONVOCA

FESPM, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemàticas

ORGANIZA

FEEMCAT Federació d'Entitats per a l'ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

COMITÉ ORGANIZADOR

Girona:
Elisabet Saguer (Coordinadora)
Teresa Pagès
Pilar Xifra
Francesc Borrell

Barcelona:
Marta Berini
Pilar Figueras

Tarragona:
M. Lluïsa Girondo
Josep Borrut
Marià Cano
Joan M. Castells

PARTICIPAN ALUMNOS
DE SEGUNDO CURSO DE *ESO*
DE QUINCE COMUNIDADES AUTÓNOMAS:

ANDALUCIA,	**ANDORRA,**
ARAGÓN,	**ASTURIAS,**
CANARIAS,	**CANTABRIA,**
CASTILLA-LEÓN,	**CASTILLA-MANCHA,**
CATALUNYA,	**EXTREMADURA,**
GALICIA,	**MADRID,**
MURCIA,	**NAVARRA**
Y VALENCIA	

En números, son:

49 ESTUDIANTES
17 ACOMPAÑANTES
10 MIEMBROS DE LA ORGANIZACIÓN, COLABORADORES E INVITADOS

AVANCE DEL PROGRAMA

23 DE JUNIO:

Recepción de los participantes y acompañantes a partir de la 18 horas en el albergue "Santa Maria del Mar" de Comarruga
Verbena de San Juan

24 DE JUNIO:

Acto inagural de la XI Olimpiada a las 12.30 horas
Sesión de "MAGIA MATEMÁTICA"
Prueba individual de las 16 a las 19 horas
Sesión de "GEOMETRIA MOJADA"

25 DE JUNIO:

Visita cultural a la TARRAGONA ROMANA
Port Aventura

26 DE JUNIO:

Visita turística-cultural a BARCELONA
Aquarium, paseo en golondrina, museo de la ciencia

27 DE JUNIO:

Visita a SANT FELIU DE GUÍXOLS
Prueba por equipos
Taller de astronomia

28 DE JUNIO:

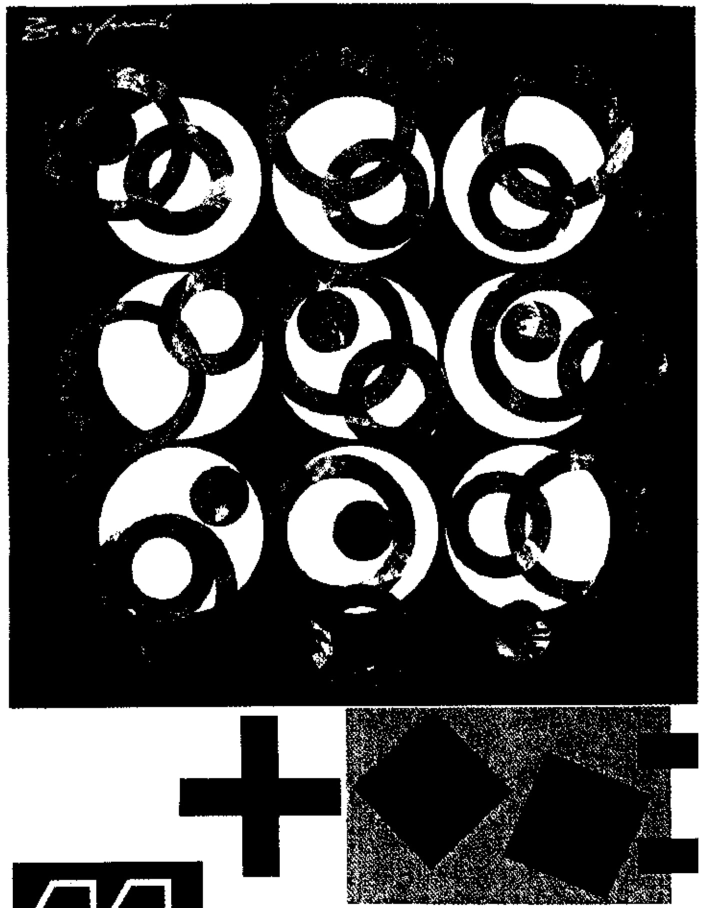
Visita ludico-cultural a GIRONA
Paseo turístico, Museo del CINEMA
Homenaje a las diez primeras olimpiadas:
Conferencia: TÁCTICAS MATEMÁTICAS PARA PRÁCTICAS TELEPÁTICAS
Exposición de fotografía matemática
Fiesta de despedida

29 DE JUNIO:

Valoración de la Olimpiada
Despedida y entrega de premios

Entitats patrocinadores:
Entidades patrocinadoras:

Ajuntament de Girona
Diputació de Girona
Levi's
Diputació de Tarragona
CASIO
Consell Comarcal del Gironès
Consell Comarcal Baix Penedès
Generalitat de Catalunya Departament d'Ensenyament
Universal Studios Port Aventura Costa Daurada
Ajuntament del Vendrell
Universitat Rovira i Virgili
Groupe Hamelin
ENRI
Enri 2000 S.A.
Caixa de Girona
Ajuntament de Sant Feliu de Guíxols
Ajuntament de Barcelona Institut d'Educació
AEA
Las Golondrinas® Sirenas S.A.
L'aquàrium Barcelona
Fundació "la Caixa" Museu de la Ciència
Universitat de Girona Institut de Ciències de la Educació



11 OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL

Catalunya,
del 23 al 29-6-2000
TARRAGONA - BARCELONA
GIRONA