

Teoría de la señal y carreteras

MARÍA MONCAYO¹ Y JUAN FRANCISCO REINOSO²

1. Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.
Universidad Politécnica de Cartagena.
2. Departamento de Ingeniería Cartográfica, Geodésica y Fotogrametría.
Universidad de Granada.

maria.moncayo@upct.es; jreinoso@ugr.es

Resumen

Desarrollar una herramienta que permita efectuar de forma automática un cambio de escala en carreteras reales constituye un problema de solución nada fácil. El cambio de escala, que todos conocemos a través de los mapas, es denominado “Generalización Cartográfica” por los Ingenieros del ramo. El procedimiento que hemos obtenido viene a definir una cadena de piezas diversas, alguna incluso del siglo XVII, que se van entrelazando y terminan en un final feliz. Esa secuencia de procesos tiene, según nuestro análisis, tres etapas. En una de ellas se utiliza la teoría multirresolución para señales unidimensionales. En consecuencia, podemos entender esta contribución como una muestra de la aplicabilidad de una teoría propia de señales y, por supuesto, de la Matemática que la sustenta, a contextos un tanto insospechados.

Proyecto/Grupo de investigación: Métodos numéricos y su relación con modelos matemáticos. Entidad financiadora: FUNDACIÓN SENECA. Plan de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia. Código: 08662/PI/08.

Líneas de investigación: *Generalización Cartográfica; Análisis Multirresolución; Teoría de Aproximación.*



Figura 1: Una carretera de la provincia de Jaén que utilizaremos en los experimentos. Las medidas han sido tomadas del Mapa Topográfico Nacional 1 : 25,000 (MTN25).

1. Primera etapa: De la carretera a la señal

Consideremos como punto de partida, y nunca mejor dicho, una carretera. Evidentemente, a menos que la carretera sea ideal, no existe una fórmula cerrada que la determine.

La primera representación numérica de nuestro objeto de partida viene dada por una poligonal en representación paramétrica, una unión de puntos o medidas de la carretera. Más precisamente, consideremos una cantidad finita de puntos, ordenados, que representan puntos de una carretera sobre un plano: $\mathcal{C} = \{P_0, \dots, P_N\} \subset \mathbb{R}^2$. Denotaremos $\|\cdot\|$ la norma euclídea en \mathbb{R}^2 . Una representación paramétrica de la poligonal que une todos los puntos de \mathcal{C} viene determinada por $\Gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$, definida como

$$t \mapsto \Gamma(t) = \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} P_i + \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}} P_{i-1},$$

donde $t_0 = 0$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$ y si λ denota la longitud de Γ , entonces para $i = 1, \dots, N$, los puntos t_i se definen mediante

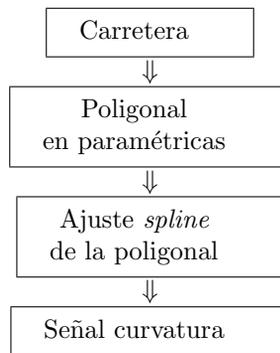
$$t_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^i \|P_k - P_{k-1}\|.$$

Por tanto, la carretera de partida es ahora una poligonal. Este tipo de curvas toma diferentes valores en una misma abscisa. Este hecho no resulta práctico para conseguir el propósito de cambio de escala [6] y explica la necesidad de encontrar una representación cómoda de la poligonal. Esta nueva representación se define a través de la curvatura, es decir, una función que explica cuánto se curva la carretera. Si se curva hacia la derecha la curvatura tomará valores positivos. Si se curva hacia la izquierda la curvatura tomará valores negativos. La

función curvatura define una función real de variable real y nos referiremos a ella como *señal curvatura*.

La curvatura no puede calcularse a partir de la unión de puntos original. De hecho, el cálculo de la curvatura pasa por hallar una derivada segunda. Enemiga, por tanto, de la poligonal. Lo siguiente entonces es ajustar a la poligonal una función que admita derivada segunda. Esta función, válida para el cálculo de la curvatura, se define a trozos. Cada trozo es un polinomio de grado tres y globalmente se consigue que la función tenga clase dos. Este tipo de funciones polinómicas a trozos se denominan *splines* [1]. Son muy utilizadas en el diseño de objetos e incluso en las películas de animación.

Para una mejor comprensión de lo desarrollado hasta el momento, mostramos los pasos seguidos en un diagrama.



Una vez que disponemos de la señal curvatura, reparametrizada por longitud de arco, pongamos $k(s)$, discretizamos la señal con idea de realizar un Análisis Multirresolución de la misma.

2. Segunda etapa: Análisis Multirresolución de la señal curvatura

El Análisis Multirresolución proporciona un conjunto de versiones de la curvatura. Cada versión pierde o gana *resolución*. La teoría matemática que sustenta al Análisis Multirresolución comenzó a elaborarse a finales de los años 80 y ha tenido un desarrollo extraordinario desde entonces. El origen de todo fue la búsqueda de una transformada que diera buen resultado para señales no suaves (pequeñas ondas, ondículas o wavelets), a las que no era posible aplicar con éxito la transformada de Fourier.

En concreto, las versiones a distintas resolución se consiguen aplicando, en este caso, el Algoritmo de Mallat (o transformada ortogonal wavelet discreta). Se trata de un algoritmo definido mediante convoluciones entre unos filtros h y g , respectivamente de paso bajo y paso alto, y la función, en nuestro caso, k . El

algoritmo puede ser aplicado en dos sentidos. Uno en el que se pierde resolución y se denomina descomposición. La definición matemática del concepto *resolución* escapa del objetivo principal de estas líneas. Simplemente asociaremos un número natural L al nivel de resolución. Convenimos que el número crece según se pierde resolución o, equivalentemente, se aplica el algoritmo de descomposición. En el sentido recíproco se gana resolución. Es el proceso de reconstrucción. La diferencia entre dos resoluciones consecutivas de k definen unos *detalles*, d , i.e., $k^{L-1} = k^L + d^L$. Para enunciar el algoritmo, aclaramos que hemos denotado la operación de inserción de ceros entre dos elementos de k^L mediante $k^{L;0}$. Un estudio completo del algoritmo lo encontramos, por ejemplo, en [4].

Descomposición:

$$k_j^L = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2j} k_n^{L-1} = (k^{L-1} \star \bar{h})_{2j}, \quad (1)$$

$$d_j^L = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2j} k_n^{L-1} = (k^{L-1} \star \bar{g})_{2j}.$$

Reconstrucción:

$$\begin{aligned} k_j^{L-1} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{j-2n} k_n^L + \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{j-2n} d_n^L, \\ &= (k^{L;0} \star h)_j + (d^{L;0} \star g)_j. \end{aligned}$$

La Figura 2 muestra la curvatura de la carretera original y el resultado de aplicar el algoritmo de descomposición hasta el nivel máximo en el que resulta posible, atendiendo al cardinal de las muestras de datos. Hemos utilizado en MatLab[©] los filtros que provienen de la función wavelet de Daubechies, *db6*, [2]. A medida que se aplica el algoritmo, se pierde resolución.

La idea ahora es obtener una carretera por cada una de las versiones de curvatura. El resultado nos proporcionará un conjunto de versiones de la carretera original a distinta resolución o, desde el punto de vista cartográfico, a distinta escala, como era nuestro objetivo.

3. Tercera etapa: De la señal curvatura a la carretera

La obtención de una curva espacial a partir de su curvatura y torsión es una cuestión teóricamente resuelta desde el siglo XVII. En nuestro caso, al tratarse de curvas planas, la torsión es nula y únicamente haremos mención de la curvatura. Las fórmulas de Serret-Frenet establecen que a partir de la curvatura existe una única curva, salvo movimiento rígido, a la que corresponde. Más precisamente se obtiene a través del siguiente resultado, que podemos encontrar en la clásica obra de Geometría Diferencial y referencia obligada [3].

Teorema 1 *Dada una función continua $k(s)$, existe una curva $\alpha : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^2$, parametrizada por longitud de arco, que es única salvo movimiento rígido, cuya curvatura es $k(s)$. La curva se parametriza como sigue:*

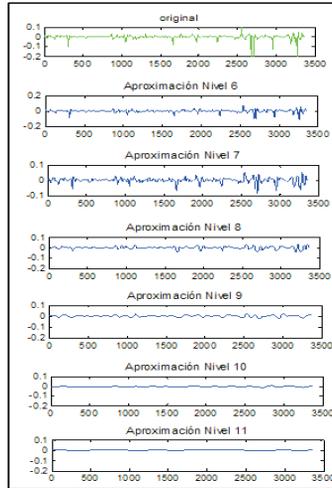


Figura 2: Arriba: Curvatura original que corresponde a la poligonal de la carretera de la Figura 1. Debajo: Seis descomposiciones realizadas el algoritmo de transformada ortogonal wavelet discreta (1).

$$\alpha(s) = \left(\int \cos(\theta(s)) ds + c_1, \int \sen(\theta(s)) ds + c_2 \right), \theta(s) = \int k(s) ds + \theta_0, \quad (2)$$

donde c_1, c_2 y θ_0 son constantes de integración y θ es el ángulo de giro.

□

Como vemos, la curvatura constituye un dato mientras que la incógnita es la curva real o espacial a la que corresponde. En este clásico resultado, el dato curvatura debe ser integrado. Sin embargo, ¿qué ocurre cuando la curvatura no proviene de una ecuación cerrada?. ¿Qué se introduce como k en (2)?. ¿Una aproximación de k ?. ¿Cómo se comporta, entonces la solución α ?. En más ocasiones de las que hubiésemos deseado, lo hizo mal.

Lo vemos con un sencillo ejemplo. La Figura 3 muestra el resultado de resolver (2) al introducir como curvatura $k(s) = s + \sen(s)$. Es decir, la curva espacial α que tiene como curvatura $s + \sen(s)$. Si consideramos una aproximación polinómica Taylor de $s + \sen(s)$, el resultado que se obtiene es el que mostramos en la Figura 5.

En definitiva, el cálculo de la curva a partir de curvaturas “no idílicas” tampoco es trivial. Las señales curvaturas que son irregulares, como las de la Figura 2, han de ser aproximadas por funciones definidas a trozos. Al intro-

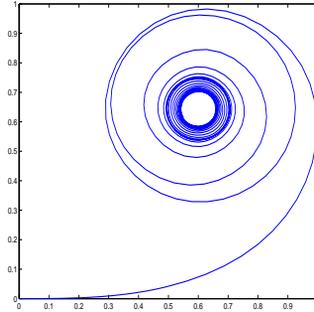


Figura 3: Curva obtenida a partir de la curvatura $k(s) = s + \text{sen}(s)$

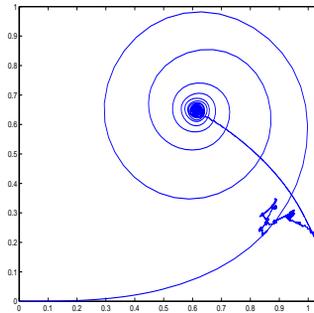


Figura 4: Curva obtenida a partir de una aproximación polinómica Taylor de $k(s)$.

ducir cada trozo de aproximación de k en la ecuación (2) aparecen “tirabuzones” en los puntos que van enlazando cada una de las soluciones obtenidas. En este punto de nuestro trabajo constatamos que no podíamos seguir adelante con MatLab[®] y tuvimos que recurrir a MATHEMATICA[®]. El potencial del cálculo simbólico de MATHEMATICA[®] hizo posible considerar como una *única* función (simbólica) el conjunto de aproximantes de las curvaturas. Empleamos un número considerable de polinomios interpoladores cúbicos para aproximar cada curvatura y todos ellos fueron considerados como una *única* función simbólica, que además resultó apta para introducir en (2).

La Figura 5 muestra las soluciones obtenidas al introducir en (2) cada una de las aproximaciones simbólicas de cada curvatura de la Figura 2.

Las distintas versiones de la carretera original a diferente resolución hacen posible definirla a diferentes escalas. Objetivo cumplido. Todos los detalles de

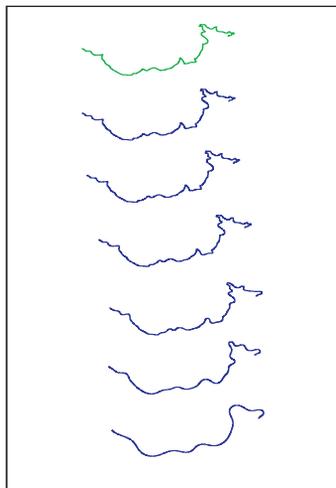


Figura 5: Arriba: Poligonal de la carretera original de la Figura 1. Debajo: Seis curvas (o carreteras generalizadas) obtenidas mediante las fórmulas de Serret-Frenet correspondiente a cada curvatura de la Figura 2.

este trabajo (cuentas incluidas) pueden consultarse en [5].

Referencias

- [1] C. de Boor, A Practical guide to Splines, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [2] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [3] M. P. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Englewood Clifs, 1976.
- [4] S. Mallat, A Theory for Multiresolution Signal Decomposition, IEEE T. Pattern Anal., vol II (7) (1989), 674-693.
- [5] M. Moncayo, J. F. Reinoso et al, The Frenet frame beyond classical differential geometry: Application to cartographic generalization of roads, Math. Comput. Simul., 79 (2009), 3556-3566.
- [6] S. Mustière, Cartographic generalization of roads in a local and adaptative approach: A knowledge adquisition problem, Int. J. Geogr. Inf. Sci., 19 (2005), 937-955.