

Capítulo 3

Modelo matemático

3.1 Introducción

Como se mencionó en el primer capítulo el flujo real que se obtendría en una chimenea solar, con las características dimensionales mostradas en el modelo utilizado en este proyecto, en la mayoría de las ocasiones es turbulento. Partiendo de esta realidad una buena parte de las simulaciones llevadas a cabo se harán utilizando el modelo de turbulencia $k-\omega$, de igual forma se desarrollarán simulaciones en flujo laminar por un lado para ampliar el rango de números de Rayleigh estudiado, y por otro para comparar los resultados obtenidos con los de otros autores, valorando de este modo el alcance y la precisión del método $k-\omega$.

En este capítulo se hará una descripción del modelo matemático utilizado para la resolución del problema de convección natural propuesto: ecuaciones de conservación para el campo fluido y condiciones de contorno utilizadas, tanto para el caso laminar como para el turbulento. En el caso turbulento se hará además una descripción matemática detallada del modelo de turbulencia $k-\omega$ utilizado.

3.2 Configuración geométrica del problema

Antes de comenzar describiendo las ecuaciones y condiciones de contorno que definen el problema, nos centraremos en la descripción geométrica del dominio fluido de estas ecuaciones y condiciones de contorno. Esto es equivalente a definir la configuración geométrica de este tipo de sistemas pasivos de climatización, así como las variables geométricas presentes en esta definición.

A continuación, en la Figura 3.1, se presenta la definición geométrica de los sistemas pared 'Trombe' y chimenea solar. También se ha representado una configuración de pared 'Trombe' que incluye la habitación a climatizar (Figura 3.1a), la cual producirá una solución más realista que si se considera dicho sistema pasivo de climatización truncado (3.1b y c). La acotación de estas figuras se ha parametrizado para mayor utilidad.

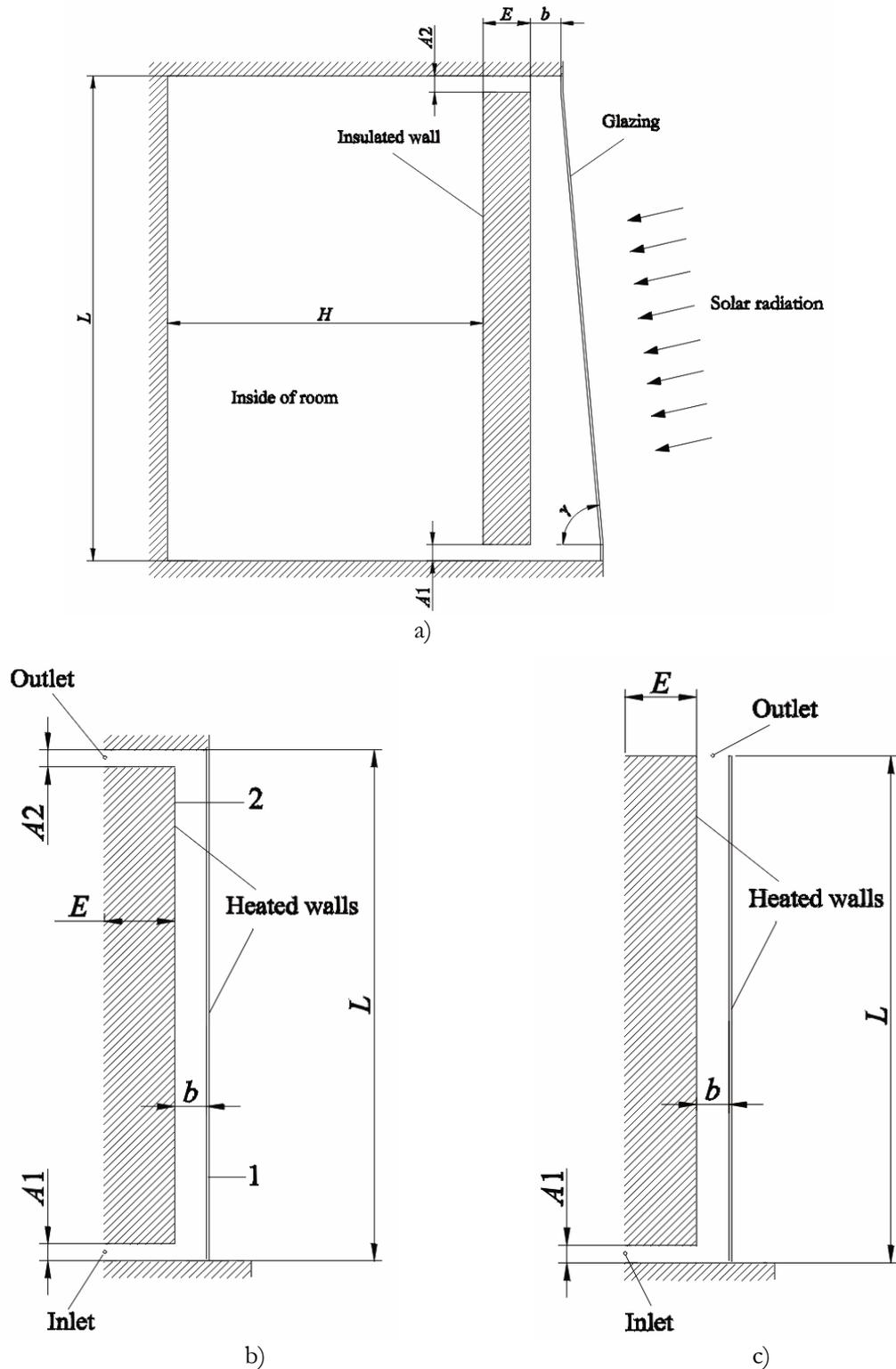


Figura 3.1. A) Habitación con una pared Trombe. B) Configuración típica de una Pared Trombe truncada. C) Configuración típica de una chimenea solar truncada.

Como se ha comentado, se presenta una acotación parametrizada debido a que estos parámetros; altura del cristal, L , anchura del canal vertical, b , altura de la sección de entrada, $A1$ (o simplemente A), o longitud del canal horizontal de entrada, E , serán las variables geométricas

utilizadas en este trabajo para estudiar el comportamiento del fluido que recorre dichos sistemas. En este proyecto nos centraremos en la variación de las dos primeras variables L y b . Se supondrá en general $A/L = E/L = 0.1$.

También podemos ver en esta figura las zonas calientes de la chimenea; la pared de cristal y el muro de gran capacidad térmica, elementos cuya función ya se comentó en el anterior capítulo.

3.3 Aproximación de las fuerzas de flotación

Antes de introducir el modelo matemático y debido a la importancia que tienen en los problemas de convección natural las fuerzas de flotación, debemos de introducir las aproximaciones llevadas a cabo para el cálculo de las mismas.

Una de las aproximaciones más utilizadas en convección natural para este fin es la conocida como *aproximación de Boussinesq*. Esta aproximación se puede emplear siempre que las variaciones de las propiedades del fluido con la temperatura sean pequeñas, para ello también es preciso que las variaciones de la presión sean pequeñas. Sólo se tendrán en cuenta las variaciones de temperatura para los cambios de densidad, siempre que tales variaciones sean lo suficientemente pequeñas y considerando sólo las variaciones de densidad que den lugar a fuerzas gravitacionales.

Por tanto, todas las propiedades del fluido, a excepción de la densidad, se considerarán constantes (viscosidad dinámica, conductividad, calor específico,...). En esta aproximación es común presentar estas variaciones de densidad como se muestra en la expresión (3.1), siendo en esta T_∞ y ρ_∞ , la temperatura y la densidad en un estado de referencia, respectivamente.

$$\rho = \rho_\infty [1 - \beta(T - T_\infty)], \quad (3.1)$$

siendo β el coeficiente de expansión térmica del fluido, definido en la expresión (3.2) e igual a $1/T_\infty$ en el caso de un gas perfecto.

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (3.2)$$

Como se ha indicado anteriormente, esta aproximación implica considerar el fluido incompresible con valores pequeños de $\Delta T/T_\infty$.

3.4 Introducción al flujo turbulento

En buena parte de las simulaciones desarrolladas en este proyecto fin de carrera, el flujo a simular se encontrará en régimen turbulento o en régimen de transición, razón por la que se hará una breve introducción a este tipo de flujo en esta sección.

En los flujos turbulentos las variables incluidas en las ecuaciones que definen el movimiento del fluido tales como la velocidad, densidad, temperatura y presión fluctúan de forma aleatoria, no son periódicas ni repetitivas, causando una fuerte mezcla de las cantidades transportadas. A pesar de estas fluctuaciones, si las condiciones de contorno que gobiernan el problema son estacionarias, se puede esperar que el valor medio de las variables turbulentas también lo sea. Este hecho ha motivado que a lo largo de la historia se haya desarrollado un enfoque estadístico de la turbulencia.

En los últimos años el aumento de potencia y velocidad de las computadoras, así como la mejora de los algoritmos de resolución computacional de flujos fluidos, están dando un mayor peso al estudio de la turbulencia en su rama computacional.

Este estudio computacional se ha ido perfeccionado con el paso de los años, pasando de los métodos basados en las ecuaciones promediadas de Reynolds, las cuales se definirán posteriormente, hasta la simulación numérica directa (DNS). A continuación podemos ver una completa relación de los modelos de simulación computacional de la turbulencia:

- Modelos clásicos: Basados en las ecuaciones de Reynolds (ecuaciones de Navier – Stokes promediadas temporalmente).
 1. Modelos de cero ecuaciones – Modelo de la longitud de mezcla.
 2. Modelos de dos ecuaciones – Modelo $k - \varepsilon$, $k - \omega$.
 3. Modelos de esfuerzos de Reynolds (RSM).
 4. Modelos algebraicos de esfuerzo.
- Simulación de grandes remolinos (LES, “*Large Eddy Simulation*”).
- Simulación numérica directa (DNS, “*Direct Numerical Simulation*”).

Los *modelos clásicos* forman la base de los cálculos turbulentos en los códigos comerciales de CFD (“Computational Fluids Dynamics”) actualmente disponibles, como es el caso del código PHOENICS que será el utilizado en este trabajo. La *simulación numérica directa*, como su nombre indica, simula directamente todo el campo fluido a partir de las ecuaciones de Navier – Stokes sin ningún tipo de promediado. En las *simulaciones de grandes remolinos*, las grandes escalas son resueltas por simulación directa, mientras que los efectos de las escalas más pequeñas son modelizadas.

Hoy en día las *simulaciones de grandes remolinos*, al igual que la *simulación numérica directa* de la turbulencia, se encuentran en una etapa de investigación en pleno proceso de desarrollo y los cálculos son todavía demasiado costosos para merecer algún tipo de consideración en la computación de propósito general actual.

Las fluctuaciones de las variables en régimen turbulento pueden ser de pequeña escala y alta frecuencia por lo que puede resultar muy laborioso desde el punto de vista computacional intentar la simulación numérica directa (DNS) de dichas ecuaciones (Versteeg & Niewstadt (1999), Philips (1996), Kasagi & Nishimura (1997)). Además para la mayoría de los propósitos de ingeniería no es necesario resolver los detalles de las fluctuaciones turbulentas. Normalmente sólo se buscan los efectos de la turbulencia en el flujo medio.

Ante esta dificultad, tal como se ha visto en la relación de modelos de simulación, se utilizan las ecuaciones de Navier - Stokes promediadas o ecuaciones de Reynolds que se introducen a continuación.

Partiendo de la hipótesis de un fluido incompresible de viscosidad y conductividad constantes se muestran en las expresiones (3.3), (3.4) y (3.5) las ecuaciones de Navier - Stokes para el campo fluido. Siendo \vec{v} , el vector velocidad, y P , T y e la presión, temperatura y energía interna, respectivamente (véase por ejemplo el texto de Crespo, 2006).

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla(\vec{v}\vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}_m \quad (3.4)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{v} \nabla e \right] = \Phi_v + k \Delta T + Q_r \quad (3.5)$$

Con $\tau'_{ij} = 2\mu\gamma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ y $\Phi_v = \tau'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij}$ (en coordenadas cartesianas),

además de las ecuaciones de estado $de = c(T)dT$ y $\rho = cte$, siendo τ'_{ij} el tensor de esfuerzos viscosos y Φ_v la potencia de deformación de los esfuerzos viscosos.

Suponiendo que todo valor instantáneo para una variable se puede descomponer en un valor medio y la fluctuación respecto a él:

$$\phi(\vec{x}, t) = \bar{\phi}(\vec{x}, t) + \phi'(\vec{x}, t), \quad (3.6)$$

podemos descomponer las variables presentes en el anterior sistema de ecuaciones; presión, velocidad y temperatura como se muestra a continuación:

$$\vec{v} = \bar{U} + \vec{v}'; \quad p = \bar{p} + p'; \quad T = \bar{T} + T'. \quad (3.7)$$

Aplicando esto y teniendo en cuenta que el valor medio de las fluctuaciones es nulo, obtenemos las ecuaciones del movimiento medio turbulento. Podemos ver estas ecuaciones en su forma final en las expresiones (3.8), (3.9) y (3.10).

$$\nabla \cdot \bar{U} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{U}\bar{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \bar{U} - \nabla \cdot \overline{u'u'} + \bar{f}_m \quad (3.9)$$

$$\rho c \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{U} \nabla T \right] = k \Delta \bar{T} + \Phi_{\bar{U}} + \Phi_{u'} - \rho c \nabla \cdot \overline{u'T'} + Q_r \quad (3.10)$$

Tenemos así un sistema de cinco ecuaciones (la de cantidad de movimiento es vectorial), y como incógnitas aparecen las cinco variables de siempre: \bar{U} , p y T más una serie de nuevas variables generadas por las fluctuaciones turbulentas y que no podemos poner en función de las anteriores, como son:

Tensor de esfuerzos aparentes de Reynolds: $-\overline{u'u'}$.

Vector transporte turbulento de calor: $-\overline{u'T'}$.

Disipación viscosa por fluctuaciones turbulentas: $\Phi_{u'} = \mu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)^2}$.

Al tener este sistema más incógnitas que ecuaciones, las ecuaciones de Reynolds no se pueden resolver por sí mismas, planteándose lo que se conoce como *problema de cierre de la turbulencia*. Para este problema de cierre es preciso utilizar correlaciones experimentales, hipótesis razonables (modelos) o ecuaciones complementarias. Los primeros intentos para el cierre de este sistema de ecuaciones fueron:

- *Coefficiente de viscosidad turbulenta de Boussinesq* (1877): Boussinesq propuso expresar los esfuerzos de modo análogo a los viscosos mediante una cierta "viscosidad" turbulenta y, por tanto, los esfuerzos de Reynolds podrían estar ligados a los índices medios de deformación.

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.11)$$

Esta expresión es similar a los esfuerzos viscosos en régimen laminar y se conoce como tensor de esfuerzos turbulentos de Reynolds específico.

- *Longitud o camino de mezcla de Prandtl* (1925): Siguiendo las ideas de la Teoría Cinética de Gases definió la longitud de mezcla como el recorrido medio que hacen las partículas del flujo cuando transportan una determinada cantidad (de movimiento, energía térmica, etc...). Así, los *modelos de longitud de mezcla* intentan describir los esfuerzos por medio de simples fórmulas algebraicas para μ_t como una función de la posición.
- *Hipótesis de Von Kármán* (1930): Parte de la idea de la invarianza local, en todos los puntos del flujo turbulento el mecanismo de turbulencia es el mismo y sólo se caracteriza por las escalas de longitud y tiempo.

Con posterioridad a estas teorías se han desarrollado otros muchos modelos que introducen ecuaciones adicionales y que se han ido adaptando para la resolución de flujos turbulentos de forma computacional. Un esquema representativo lo hemos podido ver en el apartado de modelos clásicos en la relación de modelos para la simulación computacional de la turbulencia expuesta anteriormente. Debido a la cantidad de modelos publicados a lo largo de los años, así como sus diversas variantes, hacen que en esta breve introducción al flujo turbulento sólo se pueda mostrar una división esquemática de los mismos.

No existe un modelo de turbulencia aceptado universalmente como óptimo para todos los problemas que se presentan en mecánica de fluidos. La elección de un modelo de turbulencia dependerá de aspectos como la física del problema, el nivel de precisión requerido, los recursos computacionales y la cantidad de tiempo disponible para la simulación, entre otros.

El modelo de turbulencia que se aplicará en las simulaciones turbulentas contenidas en este trabajo será el $k-\omega$ propuesto por Wilcox (2003). El origen del modelo $k-\omega$, primer modelo con dos ecuaciones de transporte, hay que situarlo en el estudio de las escalas de la turbulencia de Kolmogorov (1942). Este autor eligió la energía cinética turbulenta, k , como uno de sus parámetros de turbulencia y modelizó la ecuación diferencial que gobierna su comportamiento. Su segundo parámetro fue la disipación por unidad de energía cinética turbulenta, ω . En su modelo, ω satisface una ecuación diferencial similar a la de k .

El punto de partida para todos los modelos de dos ecuaciones es la hipótesis de viscosidad turbulenta de Boussinesq y la ecuación de la energía cinética turbulenta k , parámetro definido en (3.11).

$$k = \frac{\overline{u_x^2} + \overline{u_y^2} + \overline{u_z^2}}{2} \quad (3.11)$$

Estos modelos no sólo calculan k sino también la escala de longitud de la turbulencia o equivalente. Consecuentemente, estos modelos de dos ecuaciones son completos, es decir, pueden utilizarse para predecir propiedades de un flujo turbulento dado sin un conocimiento previo de la estructura de la turbulencia.

Si entendemos por *escala* el tamaño característico (y la velocidad asociada al mismo) de los torbellinos presentes en un flujo se puede comprobar fácilmente que la turbulencia es un tipo de movimiento que no ocurre en una sola escala, sino en todo un abanico de escalas. Las escalas mayores están asociadas al movimiento medio y transfieren energía a torbellinos de escala cada vez más pequeña.

Cada escala tendrá una energía cinética y siendo ε al ritmo de transmisión (o degradación) de esta energía cinética hacia escalas más pequeñas. Mientras la viscosidad no se haga presente este parámetro debe ser común para todas las escalas,

$$\varepsilon = \frac{dE_c}{dt} = \frac{dk}{dt} \quad (3.12)$$

Según la propuesta de Kolmogorov utilizando el análisis dimensional, la viscosidad turbulenta, la escala de longitud turbulenta y la disipación vienen dadas por (3.13).

$$v_t \approx \frac{k}{\omega} \quad \ell \approx \frac{k^{1/2}}{\omega} \quad \varepsilon \approx k\omega \quad (3.13)$$

Las definiciones dadas en (3.13) constituyen el punto de partida del método $k-\omega$ que posteriormente describiremos de forma detallada junto con las ecuaciones de gobierno del campo fluido.

MODELACIÓN DE LA TURBULENCIA CERCA DE LA PARED

La presencia de paredes hace que el comportamiento de un flujo y en especial la estructura de la turbulencia sean muy distintas de la que encontraríamos en un flujo turbulento libre. A la hora de simular mediante una computadora los flujos turbulentos en presencia de paredes se presentan dos opciones a la hora de simular el flujo adyacente al contorno sólido:

1. Imponer una cierta ley de comportamiento del flujo en la zona cercana a la pared (*“ley de la pared”*) y no calcular el flujo en esta región.
2. Simular el flujo en esta región adyacente a la pared.

Estas dos posibilidades serán tratadas en detalle en el siguiente capítulo pero debido a la importancia de la presencia de paredes en el desarrollo de la estructura de la turbulencia se estudiará brevemente en este apartado dicho comportamiento del flujo. Esta zona es conocida como *capa límite* y en ella el flujo pasa de estar dominado por los términos convectivos y turbulentos a estarlo por los términos viscosos hasta llegar a cumplir la condición de adherencia con la pared.

Las fuerzas de inercia suelen ser las dominantes en la región alejada de la pared, pero a medida que nos acercamos a esta las fuerzas viscosas aumentan su orden de magnitud hasta llegar a superar a las fuerzas de inercia.

La velocidad del flujo medio solamente depende de la distancia y a la pared, la densidad ρ y viscosidad μ del fluido y el esfuerzo cortante en la pared τ_w ,

$$U = f(y, \rho, \mu, \tau_w) \quad (3.14)$$

Con ayuda del análisis dimensional se puede llegar a:

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} = f\left(\frac{\rho u_\tau y}{\mu}\right) = f(y^+) \quad (3.15)$$

La anterior expresión es la conocida como ley de la pared e introduce términos adimensionales muy importantes u^+ e y^+ , donde la escala de velocidad correspondiente es $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$, la velocidad de fricción.

Lejos de la pared se espera que la velocidad en un punto se vea afectada por el efecto retardante de la pared a través del valor del esfuerzo cortante en la misma, pero no por la viscosidad propiamente dicha. La escala de longitud adecuada para esta región es el espesor de la capa límite δ . Es esta región se tiene

$$U = g(y, \rho, \delta, \tau_w) \quad (3.16)$$

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} = g\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (3.17)$$

Un análisis detallado de esta capa límite nos muestra las siguientes zonas:

Cerca de la pared la viscosidad empieza a tener importancia, y podemos denominar *región interior* a la zona donde los esfuerzos viscosos no son despreciables. Dentro de ésta, muy cerca de la pared la viscosidad llega a ser dominante, pues las fluctuaciones turbulentas tienden a anularse, y los esfuerzos viscosos se hacen muy superiores a los esfuerzos turbulentos. Esta será la *subcapa viscosa o laminar*.

Esta zona de la capa límite esta en contacto con la superficie sólida y allí, por la condición de adherencia, el fluido permanece estacionario. Esta capa es en la práctica extremadamente delgada ($y^+ < 5$) y se podría suponer que el esfuerzo cortante permanece más o menos constante en toda su extensión y que es del mismo valor que el esfuerzo cortante en la pared τ_w ,

$$\tau(y) = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \cong \tau_w. \quad (3.18)$$

Tras integrar esta ecuación y aplicar las condición de contorno ($U = 0$ si $y = 0$) obtenemos la siguiente distribución lineal entre la velocidad media y la distancia a la pared,

$$U = \frac{\tau_w y}{\mu}. \quad (3.19)$$

Además mediante relaciones algebraicas se puede llegar a la siguiente relación:

$$u^+ = y^+ \quad (3.20)$$

El resto de la región interior se denomina *subcapa intermedia o logarítmica* ($30 < y^+ < 500$) por razón del perfil de velocidades que presenta. Aquí los efectos viscosos y los turbulentos son igualmente importantes. El esfuerzo cortante τ varía lentamente con la distancia a la pared y dentro de esta región interna se supone que es constante e igual al esfuerzo cortante en la pared. El perfil de velocidades en esta zona toma la forma:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B = \frac{1}{k} \ln(Ey^+), \quad (3.21)$$

donde $k = 0.41$ y $B = 5.5$ (o el equivalente $E = 9.8$) son constantes universales, determinadas experimentalmente, válidas para todos los flujos turbulentos en paredes lisas a elevados números de Reynolds, teniendo presente que la rugosidad de la pared provoca una disminución del valor de B .

Por último, en la mayor parte de la capa límite la viscosidad debe ser despreciable frente a los esfuerzos turbulentos y frente a los términos convectivos. Esta zona se llama *región exterior* de la capa límite (que no hay que confundir con el flujo externo a la capa límite). En esta región la *ley del defecto de velocidad* proporciona la forma correcta del perfil de velocidades. En la región de superposición la ley logarítmica y la ley del defecto de velocidad han de hacerse equivalentes. Tennekes y Lumley (1972) demuestran que se obtiene una superposición coincidente suponiendo la siguiente ley logarítmica:

$$\frac{U_{m\acute{a}x} - U}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln(y/\delta) + A, \quad (3.22)$$

donde A es una constante. Esta ley del defecto de velocidad a menudo se denomina *ley de la estela*. La figura 3.2 de Schlichting (1979) muestra el coincidente acuerdo entre las ecuaciones teóricas (3.20) y (3.21) en sus respectivas áreas de validez y los datos experimentales.

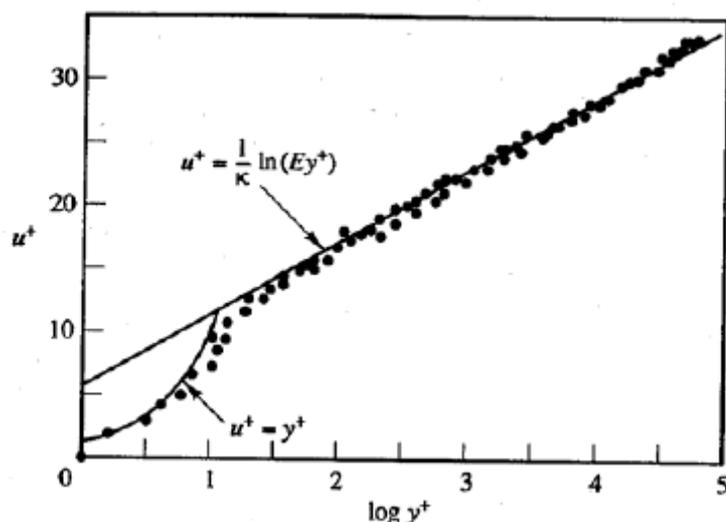


Figura 3.2. Distribución de velocidad en la proximidad de una pared.

3.5 Ecuaciones de conservación

FLUJO TURBULENTO

A continuación, utilizando la aproximación de Boussinesq, suponiendo flujo bidimensional y turbulento, mostramos la forma de las ecuaciones promediadas de Reynolds; ecuaciones de continuidad, conservación de cantidad de movimiento y conservación de la energía:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (3.23)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - g\beta(T - T_\infty) + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right), \quad (3.24)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} \right), \quad (3.25)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{(\text{Pr})} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \frac{\nu}{(\text{Pr})} \left(\frac{\partial \overline{u'T'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial y} \right). \quad (3.26)$$

donde (3.23) representa la ecuación de continuidad, (3.24) y (3.25) las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento en sus componentes x e y respectivamente, y por último la expresión (3.26) nos define la ecuación de la energía.

En estas ecuaciones U , V y T son las dos componentes de la velocidad y la temperatura medias; P la presión reducida media, diferencia entre la presión ambiente y P_∞ , dada por la ley de la hidrostática ($dP_\infty/dz = -g\rho_\infty$). Los esfuerzos turbulentos y el flujo de calor turbulento, que en forma genérica se pueden expresar como $-\overline{u_i u_j}$ y $-\overline{T' u_j}$, son definidos por el modelo de cierre del sistema de ecuaciones de flujo turbulento que se estudiará en profundidad más adelante partiendo de las siguientes premisas,

$$-\overline{u_i u_j} = 2\nu_t S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.27)$$

$$-\overline{T' u_j} = \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (3.28)$$

siendo ν_t y Pr_t , el coeficiente de viscosidad turbulenta y el número de Prandtl turbulento respectivamente; S_{ij} es el tensor de esfuerzos medio definido en la ecuación (3.29), δ_{ij} la delta de Krönecker, y k la energía cinética turbulenta introducida en la ecuación (3.11).

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.29)$$

FLUJO LAMINAR

Las ecuaciones de gobierno para este tipo de problemas de convección natural se simplifican de forma importante en flujo laminar, desapareciendo parte de los términos que se indicaron en el caso turbulento. Haciendo nulos estos términos en las ecuaciones para flujo turbulento, las ecuaciones de continuidad, conservación de cantidad de movimiento y conservación de la energía quedan como sigue:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (3.30)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - g\beta(T - T_\infty) + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \quad (3.31)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right), \quad (3.32)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{(Pr)} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (3.33)$$

Como se puede apreciar el sistema de ecuaciones en derivadas parciales presentado en flujo laminar es mucho menos complejo que el equivalente en flujo turbulento. En el caso laminar las ecuaciones de conservación sólo necesitan de las condiciones de contorno para su resolución, sin ningún tipo de modelo matemático complementario para el cierre de las ecuaciones, debido a la desaparición de todas las variables turbulentas introducidas en flujo turbulento.

Para completar las ecuaciones promediadas de Reynolds (3.23), (3.24), (3.25) y (3.26) es necesario un modelo de turbulencia, como se explicó en la anterior sección. A continuación se explica de forma detallada el utilizado en las simulaciones desarrolladas en este proyecto.

MODELO DE TURBULENCIA

Como se mencionó anteriormente el modelo de turbulencia utilizado en las simulaciones turbulentas de este proyecto será el $k-\omega$ propuesto por Wilcox (2003), a su vez basado en el modelo $k-\omega$ propuesto originalmente por Kolmogorov en 1942. El modelo definido por Wilcox incluye una extensión de bajo número de Reynolds para turbulencia cerca de la pared y permite resolver flujos transicionales, razones por las que se ha elegido este modelo para las simulaciones.

Como se comentó anteriormente, Kolmogorov eligió la energía cinética turbulenta, k , como uno de sus parámetros de turbulencia y modelizó la ecuación diferencial que gobierna su

comportamiento. Su segundo parámetro fue la disipación por unidad de energía cinética turbulenta, ω , satisfaciendo esta una ecuación diferencial similar a la de k .

En la definición del modelo, Kolmogorov se refirió a ω como el promedio de disipación de energía en la unidad de volumen y en la unidad de tiempo. Para relacionar físicamente ω con la escala externa de la turbulencia la definió en función de esta. Podemos ver esta definición en la expresión (3.13), donde despejando ω obtenemos la expresión (3.34). Aquí l representa la escala externa de la turbulencia y C es una constante. Kolmogorov también denominó a ω como frecuencia media.

$$\omega = Ck^{1/2}/l \quad (3.34)$$

El inverso de ω es la escala de tiempo en la que tiene lugar la disipación de energía turbulenta. En el proceso real la disipación tiene lugar en los vórtices más pequeños, sin embargo el promedio de disipación es equivalente a la transferencia media de energía cinética de los vórtices más grandes a los más pequeños. Ante esto podemos deducir que el promedio de disipación viene determinado por las propiedades de los grandes vórtices, y así escalas como k y l , o lo que es equivalente, ω , están relacionados indirectamente con los procesos de disipación.

También debemos de añadir que de forma equivalente a como ocurría con la viscosidad molecular se espera que la viscosidad turbulenta sea proporcional a las escalas de longitud y velocidad de las fluctuaciones turbulentas características, argumento que está en consonancia con lo indicado en la expresión (3.15). Se debe señalar que las analogías entre procesos moleculares y turbulentos no son totalmente ciertas, basándose más en el análisis dimensional que en los fundamentos físicos a los que hacen referencia, un ejemplo lo tenemos en esta analogía entre viscosidades.

Kolmogorov supuso que hay un pequeño número de procesos físicos comunes en el movimiento de un fluido: transitoriedad, convección, difusión, dispersión y producción. Basándose en estos procesos físicos y el análisis dimensional propuso una ecuación para ω (3.35),

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = -\beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma v_t \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (3.35)$$

donde β y σ son dos nuevos coeficientes de cierre. Esta ecuación es totalmente empírica guiada por un razonamiento físico y en ella podemos encontrar, por orden de aparición de los sumandos, un término transitorio y un término convectivo a la izquierda, coeficientes de cierre y término de difusión turbulenta a la derecha. Ante esto se debe de señalar la inexistencia de un término de producción, coherente con la noción de Kolmogorov de que ω esta asociada con las escalas más pequeñas de la turbulencia y por tanto no existe interacción directa con el flujo medio, en este punto es donde falla la lógica de esta ecuación dado que los vórtices de soporte de la energía de las grandes escalas son los principales responsables de determinar la escala temporal apropiada de la turbulencia y del propio promedio de disipación. Por último se debe añadir que no hay términos de difusión molecular por lo que esta ecuación sólo es válida para números de Reynolds altos y no puede integrarse a través de la subcapa viscosa.

En las últimas décadas esta ecuación ha sufrido muchos cambios, en todos los cambios posteriores se ha añadido a esta un término de producción. La variante utilizada en este proyecto es la dada por Wilcox (2003) que se muestra a continuación de forma detallada.

1. Ecuación de transporte para la energía cinética turbulenta k :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \beta^* f_{\beta^*} k \omega. \quad (3.36)$$

- En el término de difusión, la difusividad efectiva es $\nu + (\nu_t/\sigma_k)$, estando definida la viscosidad cinemática turbulenta como

$$\nu_t = \alpha^* \frac{k}{\omega}, \quad (3.37)$$

siendo α^* una función de amortiguación de la viscosidad turbulenta derivada de la corrección de este método para bajos números de Reynolds, dada por

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* \left(\frac{\alpha_\infty^* + \text{Re}_t/R_k}{1 + \text{Re}_t/R_k} \right), \text{ con } \text{Re}_t = \frac{k}{\nu\omega}. \quad (3.38)$$

- El término de producción de turbulencia es $\overline{u_i u_j} (\partial U_i / \partial x_j)$.
- En el término de disipación turbulenta, $-(\beta^* f_{\beta^*} k \omega)$, el factor f_{β^*} responde a la siguiente expresión

$$f_{\beta^*} = 1, \text{ con } \xi_k \leq 0 \text{ y } f_{\beta^*} = \frac{1 + 680\xi_k^2}{1 + 400\xi_k^2}, \text{ con } \xi_k > 0 \text{ siendo} \quad (3.39)$$

$$\xi_k \equiv \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (3.40)$$

y el factor β^* esta definido en función de Re_t por la expresión (3.41),

$$\beta^* = \beta_\infty^* \left(\frac{4/15 + (\text{Re}_t/R_\beta)^4}{1 + (\text{Re}_t/R_\beta)^4} \right). \quad (3.41)$$

No se ha añadido el término de producción de turbulencia por fenómenos de flotación, $-g_i \beta (\nu_t / \text{Pr}_t) (\partial T / \partial x_i)$, por esperar en estos problemas un campo de temperaturas no estratificado.

2. Ecuación de transporte para el promedio de disipación específica de la frecuencia turbulenta ω :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \alpha \frac{\omega}{k} - \beta f_{\beta^*} \omega^2. \quad (3.42)$$

- En el término de producción, $\overline{u_i u_j} (\partial U_i / \partial x_j) \alpha (\omega/k)$, α es otra función de amortiguación definida por la expresión (3.43),

$$\alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left(\frac{\alpha_0 + \text{Re}_t/R_\omega}{1 + \text{Re}_t/R_\omega} \right). \quad (3.43)$$

- En el término de disipación $-(\beta f_{\beta^*} \omega^2)$, f_{β^*} es:

$$f_{\beta^*} = \frac{1 + 70\xi_\omega}{1 + 80\xi_\omega}, \text{ con } \xi_\omega \equiv \left| \frac{\Omega_{ij} \Omega_{jk} S_{ki}}{(\beta_\infty^* \omega)^3} \right|, \quad (3.44)$$

siendo Ω_{ij} y S_{ki} los tensores de rotación media y esfuerzos medio respectivamente, definidos por

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.45)$$

Los factores, ξ_ω y f_β , toman los valores de 0 y 1 respectivamente para flujos bidimensionales. Además, debido a que el flujo es estacionario, $\partial k/\partial t = \partial \omega/\partial t = 0$. Por último las siguientes constantes experimentales completan el modelo: $\sigma_k = 2.0$, $R_k = 6.0$, $\alpha_0^* = \beta_i/3$, $\alpha_\infty^* = 1$, $\beta_i = 0.072$, $R_\beta = 8.0$, $\beta_\infty^* = 0.09$, $\sigma_\omega = 2.0$, $R_\omega = 2.95$, $\alpha_\omega = 0.52$, $\alpha_0 = 1/9$, $\beta = \beta_i$. Se usará el valor $Pr_t = 0.86$ en las simulaciones computacionales.

Con la formulación mostrada se puede observar que el valor de la disipación de k es $\varepsilon = \beta^* \omega k$. Las funciones f_{β^*} y f_β y los valores de α y β_0 han sido calibrados para dar valores de disipación que sean consistentes con las medidas experimentales de estelas lejanas, capas de mezcla y chorros, tanto planos como circulares y radiales. El mismo Wilcox sugirió que esas funciones eliminaban la confusión respecto a la sensibilidad de este modelo ante las condiciones de contorno de chorros libres.

Las funciones f_{β^*} y f_β se aplican para mejorar la predicción del valor del esfuerzo cortante en el flujo libre lejos de la pared. Su efecto es despreciable cuando estamos en las proximidades de la pared, principalmente porque ω es generalmente muy grande junto a las paredes sólidas y por tanto, tal y como se puede deducir de las expresiones algebraicas el valor de estas funciones es próximo a 1. De este modo, los coeficientes de disipación tienen un efecto muy pequeño sobre los flujos de capa límite, como los flujos resolveremos en este proyecto. Las funciones de amortiguación α , α^* y β^* tienden a la unidad en la zona de flujo turbulento desarrollado, donde $Re_t \gg 1$.

TRANSICIÓN DE RÉGIMEN LAMINAR A RÉGIMEN TURBULENTO

Uno de los objetivos principales en el desarrollo de modelos de turbulencia en los últimos años es el de ser capaces de detectar la transición de régimen laminar a régimen turbulento. El modelo $k-\omega$ propuesto por Wilcox (2003) permite determinar de manera descriptiva esta transición, aunque en general lo hace a un número de Reynolds menor que el detectado experimentalmente.

Para entender el modo en que este modelo resuelve el problema de la transición es preciso que agrupemos tanto en la ecuación para k como en la ecuación para ω los términos de producción y de disipación, expresiones (3.46) y (3.47),

$$\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \beta^* f_{\beta^*} k \omega = P_k \beta^* \omega k, \quad (3.46)$$

$$\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \alpha \frac{\omega}{k} - \beta f_\beta \omega^2 = P_\omega \beta^* \omega^2, \quad (3.47)$$

donde los términos de producción neta por unidad de disipación en las dos ecuaciones, P_k y P_ω se definen por las expresiones (3.48) y (3.49),

$$P_k = \frac{\alpha^*}{\beta^*} \left(\frac{\partial U / \partial y}{\omega} \right)^2 - 1, \quad (3.48)$$

$$P_\omega = \frac{\alpha \alpha^*}{\beta} \left(\frac{\partial U / \partial y}{\omega} \right)^2 - 1, \quad (3.49)$$

Ante esto se deben hacer dos puntualizaciones. Primero, si la energía cinética turbulenta es cero la ecuación para ω tiene una solución no trivial. Esto es, cuando $k = 0$, la viscosidad turbulenta desaparece y la ecuación para ω se desacopla de la ecuación para k . Así, el modelo $k-\omega$ presenta una solución para ω distinta de cero para régimen laminar con $v_t = 0$. Segundo, los signos de P_k y P_ω determinan si k y ω se amplifican o reducen en magnitud. Un estudio más detallado sobre la transición en el caso particular del flujo sobre una placa plana (Wilcox, 2003), en el que se aplica a estos términos la transformación de Blasius (Wilcox, 1998), muestra la relación entre el número de Reynolds y el signo de los términos P_k y P_ω , que determina el inicio y el fin de la transición.

TRATAMIENTO CERCA DE LA PARED

Otro de los aspectos básicos para describir un modelo de turbulencia es el tratamiento del flujo cerca de una pared. La presencia de una pared afecta de forma importante al desarrollo de un flujo turbulento. La condición de velocidad nula que se impone tiene una repercusión importante en la velocidad media del flujo; además cerca de la misma el amortiguamiento viscoso reduce las fluctuaciones de la velocidad. A medida que nos alejamos de esta subcapa viscosa, la turbulencia aumenta rápidamente por la producción de energía cinética turbulenta debido a los grandes gradientes de velocidad media.

Es evidente que la modelización de la zona cercana a la pared resulta decisiva a la hora de obtener resultados numéricos satisfactorios, ya que ésta puede considerarse como una de las principales fuentes de vorticidad media y de turbulencia. Se podría decir que una simulación precisa del flujo en la región cercana a la pared determina el éxito de las predicciones de un flujo en presencia de las mismas.

Basándose en este modelo universal de comportamiento de la capa límite algunos modelos de turbulencia imponen en las zonas cercanas a la pared las denominadas leyes de pared que simulan este comportamiento y evitan así tener que resolver el flujo en esta zona. Esto suele ser apropiado en flujos con turbulencia totalmente desarrollada y no existe una alta tridimensionalidad ni zonas con recirculación. En cambio, si estos efectos se producen, la solución de las leyes de pared no es satisfactoria debido a que el flujo real no se desarrolla como estas definen. En estos casos lo más recomendable es resolver el flujo dentro de la capa límite incluyendo la subcapa viscosa. El modelo $k-\omega$ permite trabajar con leyes de pared si la malla es lo suficientemente grosera cerca de la pared, con $y^+ > 30$, o bien resolver el flujo dentro de la subcapa viscosa si el mallado es suficientemente fino y presenta nodos dentro de esta, con $y^+ \approx 1$. Esto es posible en este modelo porque, a diferencia del modelo $k-\varepsilon$ para altos números de Reynolds, la producción de turbulencia no tiene que ir necesariamente unida a la disipación de la misma. En zonas próximas a las paredes la producción no coincide con la disipación por lo que el modelo $k-\varepsilon$ para altos números de Reynolds no puede ser utilizado sin leyes de pared y en cambio el $k-\omega$ sí que puede utilizarse. Esta última opción será la que se va a emplear en las simulaciones realizadas en este proyecto.

3.6 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno impuestas a los problemas de convección natural abordados en este proyecto han seguido el camino expuesto a continuación.

En la sección de entrada, la presión total se define como se muestra en la expresión (3.50).

$$P_T = P + \rho(U_x^2 + U_y^2)/2 = 0 \quad (3.50)$$

Siguiendo en la sección de entrada la temperatura se ha fijado igual a la temperatura ambiente T_∞ y los valores iniciales de k y ω han sido impuestos con una intensidad de la turbulencia del 2%. El parámetro de intensidad de la turbulencia, I , se muestra en la expresión (3.51) y a partir de este obtenemos los valores iniciales para k y ω definidos en las expresiones (3.52) y (3.53).

$$I = \frac{[(2/3)k]^{1/2}}{\bar{U}}, \quad (3.51)$$

$$k_{init} = \frac{3}{2} I^2 \bar{U}^2, \quad (3.52)$$

$$\omega_{init} = \frac{k_{init}}{\nu_t}. \quad (3.53)$$

De acuerdo con estas condiciones, los efectos de conducción podrían ser significativos. Esto dependerá del número Ra^* que a su vez dependerá de la longitud característica y de la geometría considerada. Según los estudios de Hernández et al.(1994), los efectos de conducción para una geometría determinada empezaban a tener importancia cuando este número adimensional era menor que 1, debido a que en la simulaciones llevadas a cabo en este trabajo los valores de este parámetro adimensional son muy superiores a la unidad no se tendrán en cuenta estos efectos.

En la sección de salida la presión media reducida es nula, $P = 0$. Es evidente que se desconoce el valor inicial de la velocidad en la sección de salida para problemas de convección natural, por lo que se necesita el nivel de presión antes definido para la simulación computacional de este problema elíptico. Físicamente el flujo se descarga al ambiente como un chorro sin recuperación de presión. Por lo tanto, las variaciones de velocidad, temperatura, energía cinética turbulenta y frecuencia de la turbulencia son despreciables.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (3.54)$$

En lo que respecta a las condiciones de contorno establecidas para las distintas paredes presentadas en la geometría del problema se ha adoptado la condición de velocidad nula, tanto en la componente media como en la fluctuación turbulenta. En el campo de temperaturas del problema se ha supuesto, en una serie de casos, un flujo de calor constante en las paredes verticales. En los demás casos simulados se supondrán estas paredes isoterma a una temperatura T_p , e incluso se tratarán casos donde una de estas paredes será adiabática. La condición de flujo de calor constante se especifica matemáticamente en la expresión (3.55).

$$k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) = q. \quad (3.55)$$

En las demás paredes se ha supuesto en todos los casos la condición adiabática.

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0. \quad (3.56)$$

Siendo n , en ambos casos, la coordenada perpendicular a la pared.

Las condiciones de contorno para k y ω , en todas las paredes, deben ser consistentes con las ecuaciones del modelo k - ω para bajos números de Reynolds. Por tanto se ha impuesto la condición de $k = 0$. Para problemas con alto número de Reynolds las leyes de pared que se adoptan para k y ω se muestran en (3.57) y (3.58).

$$k = \frac{u_\tau^2}{(\beta_\infty^*)^{1/2}}, \quad (3.57)$$

$$\omega = \frac{k^{1/2}}{(\beta_\infty^*)^{1/4} \kappa_\nu y}, \text{ con } y^+ \rightarrow \infty, \quad (3.58)$$

siendo $\beta_\infty^* = 0.09$ y κ_ν la constante de Von Kármán, de valor 0.41. La aproximación para bajos números de Reynolds, con y^+ lo suficientemente pequeña, se muestra en (3.59) (Wilcox (2003)).

$$k = 0, \text{ y } \omega = \frac{K \nu}{\beta_\infty^* y^2}, \quad (3.59)$$

siendo el valor teórico de K igual a 2. El valor de ω dado por la anterior expresión es utilizado para calcular computacionalmente el valor del primer punto junto a la pared.

A continuación presentamos de forma esquemática las condiciones de contorno tanto para el caso turbulento como para el laminar.

FLUJO TURBULENTO

- Sección de entrada:

$P_T = P + \rho(U_x^2 + U_y^2)/2 = 0$, $T = T_\infty$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$, junto con los valores iniciales para k y ω dados obtenidos de (3.52) y (3.53).

- Sección de salida:

$$P = 0, \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

- Paredes verticales:

$U = V = 0$, junto con las expresiones dadas en (3.59) para k y ω .

Caso flujo de calor: $k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = q$.

Caso isoterma: $T = T_p$.

Caso adiabático: $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$.

Siendo en estos casos la coordenada y la perpendicular a la pared.

- Paredes restantes:

$U = W = 0$, junto con las expresiones dadas por (3.59) para k y ω .

Estas paredes se considerarán adiabáticas; $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ (y representa la coordenada perpendicular a la pared).

FLUJO LAMINAR

Las condiciones de contorno impuestas para flujo laminar son semejantes a las utilizadas en flujo turbulento, con la excepción de las impuestas para k , ω y las fluctuaciones turbulentas, que no son necesarias en este caso. Se presentan en forma esquemática a continuación.

- Sección de entrada:

$$P_T = P + \rho(U_x^2 + U_y^2)/2 = 0, T = T_\infty, \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

- Sección de salida:

$$P = 0, \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

- Paredes verticales:

$$U = V = 0$$

$$\text{Caso flujo de calor: } k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = q.$$

$$\text{Caso isoterma: } T = T_p.$$

$$\text{Caso adiabático: } \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

Siendo en estos casos y la coordenada perpendicular a la pared

- Paredes restantes:

Estas paredes se considerarán adiabáticas; $U = V = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0$ (y representa la coordenada perpendicular a la pared).