

Optimización de la secuencia de movimientos de un brazo robot en una cadena de ensamblaje: el problema económico de Weber con normas poliédricas

Cañavate Bernal, Roberto J.

Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos

Universidad Politécnica de Cartagena

E-mail: r.canavate@upct.es

José Miguel Rodríguez Gómez

Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos

Universidad Politécnica de Cartagena

E-mail: jose.rodriguez@upct.es

Cobacho Tornel, M^a Belén

Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos

Universidad Politécnica de Cartagena

E-mail: belen.cobacho@upct.es

Resumen

La optimización de la trayectoria de movimientos seguida por un robot en una cadena de montaje desemboca de manera natural en el problema económico de Weber, en el que las distancias empleadas dependen de la forma de movimiento del brazo robot. Si se supone que posee dos motores de la misma velocidad para moverse en las direcciones de los ejes x e y pero que no pueden activarse de forma simultánea, entonces es necesario utilizar la distancia asociada a la norma l_1 . Otras consideraciones sobre los motores conducen a la utilización de casos particulares de normas poliédricas (por ejemplo, si los motores del robot funcionan de forma simultánea, el movimiento se modeliza con la norma l_∞). Se presentan en el trabajo algoritmos sencillos de resolución del problema de Weber con normas poliédricas en general y con la norma l_1 en particular, así como su adaptación al caso práctico de la cadena de montaje.

Palabras clave: Localización Continua, Problema de Weber, Normas Poliédricas.

1 Introducción

El problema económico de Weber atañe a la localización de un centro de servicio de forma que se minimice la suma de los costes asociados a las distancias con respecto a una serie de puntos conocidos, que generalmente son otros centros de servicio que interactúan con el que se desea ubicar. La interacción entre el nuevo centro y los existentes se considera que es un coste proporcional a la distancia, con lo cual, matemáticamente, el problema económico de Weber consiste en la búsqueda del punto que minimiza la suma de las distancias ponderadas (por valores reales positivos) a una cantidad finita de puntos conocidos.

Este tema ha sido tratado profusamente en la literatura desde su primera formulación en [Weber, 1909] a principios del siglo pasado, gracias a su capacidad de aplicación a las situaciones más diversas. Un ejemplo de ello es el presente trabajo, en el que se estudia la localización óptima de los recipientes que contienen las piezas que han de ser ensambladas por un robot en una cadena de montaje. El estudio se restringirá, al igual que en [Foulds y Hamacher, 1993], a la consideración de un robot con un único brazo.

Aunque existen numerosas aplicaciones del problema de Weber en la literatura, la mayoría de ellas se realizan bajo la suposición de que la distancia entre los puntos viene dada, o bien por la norma euclídea (véase [Cañavate et al., 2001]), o bien por alguna norma l_p con $p \in (1, 2)$ (véase [Brimberg y Love, 1993]), siendo más escasos los trabajos en los que se considera la norma l_1 o normas poliédricas (véase [Bindscheller y Moore, 1962] y [Love y Yerex, 1976]). En este estudio se comprobará la importancia que tiene para la formulación de problema la función de medida empleada, ya que se observará como pequeñas variaciones en la motorización del brazo robot precisan de un cambio en la función distancia utilizada. Para cubrir esta gama de posibilidades se introducirá la noción de normas poliédricas, un amplio abanico de distancias que se pueden utilizar para estimar la distancia.

2 Formulación del problema

Considérese una cadena de montaje en la que un brazo robot se encarga de montar una por una las piezas que conforman el producto final. Para cada uno de estos componentes el brazo robot realiza dos movimientos: desde la última posición en la que se encontraba el robot hasta el recipiente que contiene la pieza a ensamblar, y desde éste hasta el lugar exacto donde debe ser instalado el componente. Es usual que el producto final contenga más de un componente igual, de modo que es conveniente clasificar el conjunto de todas las piezas que se montan en cada producto según el tipo al que pertenecen. Se supone además que cada recipiente contiene piezas de un único tipo, y que todos los componentes iguales se encuentran en el mismo recipiente. Pero puesto que los puntos exactos donde se instalan las piezas y el orden de instalación de éstas son conocidos de antemano, la distancia recorrida por el brazo robot depende únicamente de la ubicación de cada uno

de los recipientes. En estas condiciones, el tiempo que tarda el robot en montar todas las piezas de un producto depende de las distancias recorridas por éste, pudiendo llegar a limitar la capacidad de fabricación de la cadena de ensamblaje. Es lógico, por tanto, preguntarse: *¿cuál es la localización de los recipientes que genera el mínimo tiempo de montaje de los productos?*

Para formalizar la situación, supóngase que el problema se produce en el plano, esto es, que tanto los puntos en los cuales se instalarán las piezas como la superficie sobre la que se apoyarán los recipientes se encuentran en un mismo plano (esto ocurre, por ejemplo, en el ensamblaje de una placa de circuito integrado). Denótense por $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq \mathbb{R}^2$ el conjunto de puntos en los que se instalarán las piezas (en cada producto se insertan, por tanto, m piezas). Si $\{1, \dots, s\}$ denotan los distintos tipos de componentes que se insertan en el producto ($s \leq m$), entonces se denominará x_k a la localización (por determinar) del contenedor de piezas del tipo k . En consecuencia, existen s incógnitas en el problema: x_1, \dots, x_s .

Definición 2.1

Sean $I = \{1, \dots, m\}$ y $T = \{1, \dots, s\}$. Se define la función $t: I \rightarrow T$ como $t(i) = k$ si en el punto a_i se monta un componente del tipo k .

Puesto que la secuencia de componentes a insertar es conocida, entonces la aplicación anterior está totalmente determinada. Además, se denotará por T_k al conjunto de puntos donde se monta un componente de tipo k , esto es,

$$T_k = t^{-1}(k) = \{i \in I / t(i) = k\} \quad \forall k \in T.$$

Con estas notaciones, la secuencia de lugares por los que pasa el brazo robot en el ensamblaje de un determinado producto viene dada por

$$x_{t(1)} \rightarrow a_1 \rightarrow x_{t(2)} \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{t(m)} \rightarrow a_m \rightarrow x_{t(1)}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la longitud del movimiento que se realiza en el ensamblaje de cada producto es

$$z(x_1, \dots, x_s) = \sum_{i=1}^m \left[d(x_{t(i)}, a_i) + d(a_i, x_{t(i+1)}) \right], \quad (1)$$

donde se considera $x_{t(m+1)} = x_{t(1)}$ y se ha denotado $d(x, y)$ a la distancia que recorre el brazo robot entre los puntos x e y . Sin embargo, para la cadena de ensamblaje lo importante desde el punto de vista económico es el tiempo que emplea el robot en realizar el montaje de un producto, y no la longitud del movimiento que realiza para llevar a cabo este montaje. Por todo ello, y a lo largo de todo el trabajo, las distancias serán consideradas en términos de tiempo de viaje, esto es, $d(x, y)$ es el tiempo de viaje entre el punto x y el y . Esta interpretación no supone una gran novedad, ya que basta

suponer que la velocidad del móvil es constante para que sean equivalentes la longitud y el tiempo de desplazamiento.

Como se puede observar en (1), la función z es un sumatorio de distancias, algunas de las cuales se pueden repetir. Partiendo de este hecho es posible reconstruir z de modo que se descomponga en s funciones independientes, $z_1(x_1), \dots, z_s(x_s)$, correspondiéndose cada una de ellas con un cierto problema de Weber que se resolverá independientemente de los otros.

Para ello, se considerarán las $m \times s$ distancias entre los puntos de inserción de las piezas (a_1, \dots, a_m) y las ubicaciones de los contenedores de los componentes (x_1, \dots, x_s) , esto es,

$$d(a_i, x_k) \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall k = 1, \dots, s.$$

Resta por cuantificar el número de veces que aparece en el sumatorio cada una de estas distancias, y al que se denotará por $w_{i,k}$. Obsérvese que $w_{i,k} \neq 0$ sólo si el brazo robot realiza en algún instante el movimiento desde el punto de inserción a_i hasta el recipiente x_k , y/o desde el contenedor x_k hasta el punto a_i .

El primero de estos movimientos (desde a_i hasta x_k) ocurre cuando el robot, después de montar una pieza en a_i , se desplaza hasta el recipiente x_k para recoger la pieza que insertará en la posición a_{i+1} , lo que implica que el componente en a_{i+1} es de tipo k , o en otras palabras, que $t(i+1) = k$. De forma similar se concluye que el robot realiza el trayecto desde x_k hasta a_i cuando el componente que se instala en a_i lo recoge previamente del recipiente x_k , o lo que es lo mismo, $t(i) = k$. Con estas dos observaciones, es fácil concluir que

$$w_{i,k} = \begin{cases} 2 & \text{si } t(i) = k, t(i+1) = k \\ 1 & \text{si } t(i) = k, t(i+1) \neq k \\ 1 & \text{si } t(i) \neq k, t(i+1) = k \\ 0 & \text{si } t(i) \neq k, t(i+1) \neq k \end{cases} \quad (2)$$

Con este nuevo enfoque, la función z queda

$$z(x_1, \dots, x_s) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^m w_{i,k} \cdot d(a_i, x_k) = \sum_{k=1}^s z_k(x_k),$$

donde

$$z_k(x_k) = \sum_{i=1}^m w_{i,k} \cdot d(a_i, x_k) \quad \forall k = 1, \dots, s. \quad (3)$$

De este modo, si se minimizan las funciones $z_k(x_k)$ de forma paralela, la mejor ubicación para el conjunto de recipientes x_k viene dada por la reunión de los resultados parciales obtenidos para cada $k = 1, \dots, s$.

Cada uno de los s subproblemas en los que se divide z es un problema de Weber en el que sólo falta por determinar la función distancia utilizada. Ésta depende a su vez de la capacidad de movimiento del brazo robot: número de motores, dirección de impulso de cada uno de éstos, etc. Bajo las motorizaciones que se considerarán en este trabajo, las distancias que se ajustan a estos movimientos son las asociadas al conjunto de normas poliédricas en general y a la norma l_1 en particular, donde, dada una norma $\|\cdot\|$ cualquiera, se denomina distancia asociada a $\|\cdot\|$ a la dada por $d(x, y) = \|x - y\|$.

3 Funciones distancia

Antes de pasar a discutir cuál es la distancia que debe ser empleada en (3), se recordarán brevemente las definiciones e interpretaciones de algunas de estas funciones norma.

Imagínese en primer lugar un problema de localización en una ciudad ideal en la que cada par de calles o bien son paralelas o bien se cortan perpendicularmente. En esta ciudad las calles estarían dispuestas en dos únicas direcciones, a las que se denominarán ‘horizontal’ y ‘vertical’, y las manzanas de los edificios formarían rectángulos delimitados por dos calles en una dirección y dos en la otra. La distancia entre dos tiendas de la ciudad estaría en general muy lejos de la euclídea ya que, excepto si los dos comercios se encuentren en la misma calle, los edificios serían obstáculos insalvables para una trayectoria recta entre ellas. El recorrido entre las dos tiendas se realizaría a lo largo de una o varias calles, así que el tiempo de viaje vendría dado por la suma del tiempo necesario para recorrer las calles dispuestas en dirección horizontal más la suma del tiempo empleado en calles situadas en la dirección vertical (véase Fig. 1). Pues bien, esta forma de medir distancias es la que da lugar a la norma l_1 .

Definición 3.1

La norma l_1 es la función $\|\cdot\|_1: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|, \text{ para } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

La definición de la clase de las normas poliédricas, generalización de la norma l_1 , no se hará por medio de la expresión funcional de éstas sino a través de consideraciones geométricas. Para ello se mostrará a continuación que existe una biyección entre las funciones norma y las bolas unidad de éstas, de modo que si se fija un conjunto verificando las propiedades adecuadas existe una única función norma cuya bola unidad (los vectores con norma menor o igual que uno) es igual a dicho conjunto (véase Teorema 15.2 en [Rockafellar, 1970]).

Teorema 3.2

Existe una correspondencia biyectiva entre las funciones norma sobre \mathbb{R}^n y los conjuntos

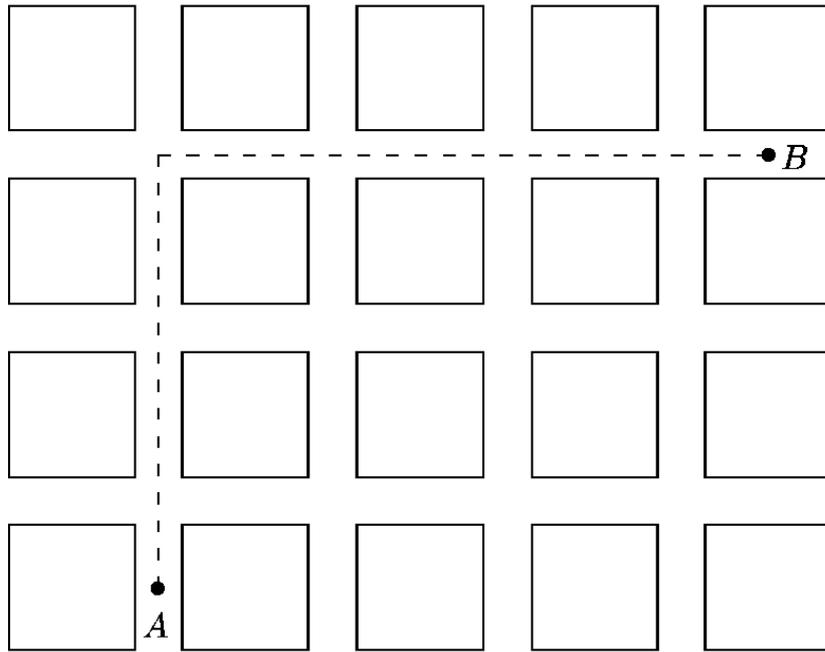


Figura 1: Distancia entre dos puntos con la norma l_1 .

de \mathbb{R}^n convexos, cerrados y acotados, que contienen en su interior el origen y que son simétricos respecto de éste.

Corolario 3.3

Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, compacto, simétrico respecto del origen y tal que el origen de coordenadas pertenece al interior de B . Entonces existe una única función norma $\|\cdot\|$ cuya bola unidad es el conjunto B .

Gracias a este resultado, para definir una función norma sólo es necesario determinar las características de su bola unidad, siempre que estén en consonancia con las hipótesis del corolario anterior.

Definición 3.4

Se dice que una norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n es una norma poliédrica si la bola unidad de $\|\cdot\|$ es un politopo de \mathbb{R}^n .

La bola unidad de la norma l_1 es claramente un politopo (véase Fig. 2) así que parece claro que la clase de las normas poliédricas generaliza a la norma l_1 , más aún si se tiene en cuenta que otras normas muy comunes en la literatura, como la norma l_2 o el conjunto de normas l_p con $p \in (1, 2)$, no son poliédricas. Sin embargo, basta dibujar la bola unidad de la norma l_∞ para percatarse de que ésta sí pertenece a la clase de las normas poliédricas.

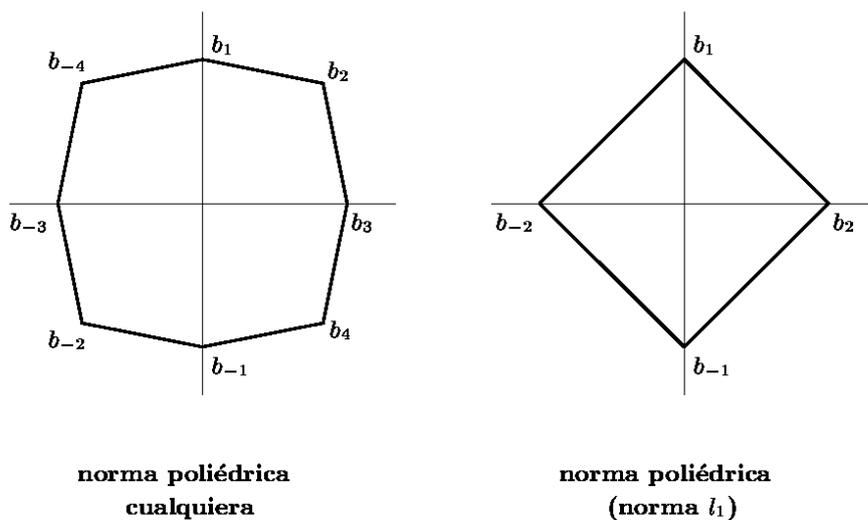


Figura 2: Dos ejemplos de bolas unidad de normas poliédricas.

Definición 3.5

La norma l_∞ es la función $\|\cdot\|_\infty: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\|x\|_\infty = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \text{ para } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Para establecer el siguiente teorema, se denotará al conjunto de puntos extremos de la bola unidad de una norma poliédrica por

$$\{b_g / g = \pm 1, \dots, \pm r\},$$

donde $b_{-g} = -b_g$ (véase Fig. 2), ya que la bola unidad es simétrica respecto del origen (teorema 3.2).

Teorema 3.6 ([Ward y Wendell, 1985])

Sea $\|\cdot\|$ una norma poliédrica y $\{b_g / g = \pm 1, \dots, \pm r\}$ los puntos extremos de su bola unidad. Entonces

$$\|x\| = \min \left\{ \sum_{g=1}^r |\beta_g| \mid x = \sum_{g=1}^r \beta_g b_g \right\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Fijando la atención en la expresión de la norma poliédrica que aparece en (4), se observa que para calcular la norma de un vector, digamos x , se expresa dicho vector como una combinación lineal de los puntos extremos, $x = \sum_{g=1}^r \beta_g b_g$, y se toma como

valor de $\|x\|$ el mínimo de las sumas de los valores absolutos de los multiplicadores de todas las combinaciones lineales anteriores, $\sum_{g=1}^r |\beta_g|$.

Por otra parte, sea d_g el vector director de la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto extremo b_g , $g = 1, \dots, r$, ya que por simetría, d_g también es el vector director de la recta que pasa por el origen y por b_{-g} . Nótese que el segmento que une el origen de coordenadas con un punto extremo de la bola unidad, digamos b_g , indica el tiempo unitario de viaje en la dirección de d_g y sentido desde el origen de coordenadas a b_g , y por simetría, también determina el tiempo unitario de viaje en dicha dirección pero sentido contrario. Suponiendo además que el movimiento entre dos puntos sólo se puede realizar en direcciones paralelas a los vectores d_g , se obtiene que $|\beta_g|$ es el tiempo de viaje en desplazamientos paralelos a d_g , que $\sum_{g=1}^r |\beta_g|$ es la suma de los tiempos de viaje en estos trayectos, y que el mínimo garantiza que este desplazamiento se hace ‘sin retrocesos’, esto es, en el menor tiempo posible.

Por tanto, el teorema permite introducir una interesante interpretación de las normas poliédricas en términos de tiempos de viaje: si se considera unitario el tiempo de viaje entre el origen y cualquier punto extremo b_g , entonces la distancia asociada a la norma poliédrica entre los puntos x e y proporciona el mínimo tiempo de viaje entre dichos puntos, pero utilizando únicamente desplazamientos en las direcciones paralelas a los vectores d_g con $g = 1, \dots, r$, es decir, en direcciones paralelas a rectas que pasen por el origen y algún punto extremo, b_g .

Tras estas consideraciones, se planteará de nuevo la pregunta que quedó pendiente al comienzo de este apartado: *¿cuál es la distancia que describe el movimiento del brazo robot?* Como ya se apuntó con anterioridad, la respuesta depende directamente de las características motoras del robot.

Supóngase en primer lugar que el robot posee dos motores iguales, uno para el desplazamiento horizontal y otro para el vertical. Si los motores no pueden funcionar simultáneamente, entonces el robot o bien se desplaza en horizontal, o bien en vertical. El tiempo de desplazamiento del brazo robot es, evidentemente, la suma de los tiempos empleados en dirección horizontal más los empleados en dirección vertical, y la distancia que se ajusta a este tipo de motores es, en consecuencia, la norma l_1 .

Suponiendo, por el contrario, que los motores trabajan de forma simultánea, el tiempo que el robot necesita para desplazarse desde x a y varía drásticamente. Sean $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ los puntos inicial y final del movimiento del robot. Si ambos puntos se sitúan sobre la misma recta horizontal, es decir, $x_1 = y_1$, el movimiento del robot se realiza completamente en vertical, esto es, con un único motor. Si fuera $x_2 = y_2$, la conclusión es simétrica: el robot se movería horizontalmente, para lo que únicamente necesita tener activado un motor. Y, por último, si $x_1 \neq y_1$ y $x_2 \neq y_2$, la forma más rápida de realizar el trayecto es desplazarse en ‘diagonal’ (a lo largo de rectas paralelas a $y = x$ o a $y = -x$) hasta que el robot se sitúe sobre un punto $z = (z_1, z_2)$ que verifique que $z_1 = y_1$ o que $z_2 = y_2$ (véase Fig. 3). El trayecto final desde z a y se realiza como se ha descrito en los casos anteriores. En cualquiera de los tres casos uno de los dos

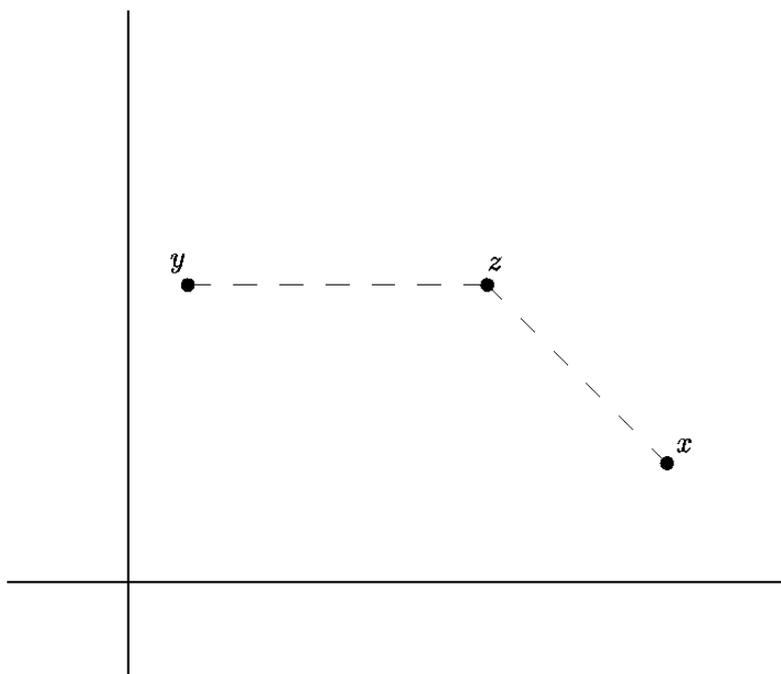


Figura 3: Trayectoria seguida por el robot para desplazarse desde x a y si los dos motores funcionan simultáneamente.

Los motores permanecen en funcionamiento todo el trayecto, así que el tiempo de viaje es el correspondiente al motor que mayor tiempo ha de estar en marcha, es decir, a la mayor de las dos distancias, horizontal o vertical. Esta forma de medir coincide completamente con la de la norma l_∞ , de modo que la distancia adecuada en este caso es la asociada a esta norma.

Las dos motorizaciones examinadas hasta el momento (quizás las más usuales) desembocan de forma natural en la consideración de la norma l_1 y de la norma l_∞ respectivamente, ambos casos particulares de normas poliédricas. Esta circunstancia no es casual, ya que, gracias a la interpretación en términos de tiempos de viaje de las normas poliédricas, siempre que el robot posea un número finito de motores que no puedan funcionar de forma simultánea, el tiempo de desplazamiento del robot se ajusta a una norma poliédrica fácilmente determinable. En efecto, supóngase que el robot posee r motores para el desplazamiento, m_1, \dots, m_r , en r direcciones distintas, d_1, \dots, d_r , y que cada motor tiene la capacidad de realizar indistintamente movimientos de avance y retroceso. El tiempo que emplea el robot en realizar cada trayecto es la suma de los tiempos que han estado en funcionamiento cada uno de los motores. Pero cada motor está asociado a una dirección de movimiento, así que el tiempo total de viaje es la suma de los tiempos de viaje en cada una de las r direcciones, tal y como sucede en las normas poliédricas.

Para determinar cuál es la norma poliédrica que corresponde a una motorización determinada, basta determinar los puntos extremos, $\{b_g / g = \pm 1, \dots, \pm r\}$, de la bola unidad de la norma. Pero estos puntos extremos se corresponden con los destinos de los desplazamientos unitarios en las direcciones d_g que parten del origen, así que de forma práctica basta con situar el robot sobre el origen de coordenadas, programarlo para que se mueva únicamente con el motor m_g , es decir, que se desplace en la dirección d_g , y denominar b_g al punto sobre el que se encuentra el robot después de una unidad de tiempo.

4 Algoritmo para la norma l_1

Tras las disertaciones anteriores, el problema inicial se ha reducido a la resolución de s problemas de Weber independientes entre sí (véase (3)) con algún tipo de norma poliédrica. Pero, a pesar de que existe un algoritmo general para la resolución de problemas de Weber con cualquier norma poliédrica (véase algoritmo 5.2), se presentará en este apartado un algoritmo específico para la norma l_1 , más sencillo y rápido de ejecutar que aquél.

Por otra parte, aunque el problema del desplazamiento del robot se ha supuesto que tenía lugar en el plano, se propondrá, tanto para la norma l_1 como para las normas poliédricas en general, un algoritmo general para problemas en \mathbb{R}^n . La razón de esto es que no es necesario realizar ningún esfuerzo adicional para obtener esta generalización, y que la particularización de los algoritmos obtenidos a los problemas en el plano es inmediata sin más que hacer $n = 2$. Por tanto, se considerará en adelante que $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n \ \forall i = 1 \dots, n$, y que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

La forma específica de la función objetivo del problema de Weber con normas rectangulares permite su descomposición en n funciones independientes, una por cada coordenada, lo que simplifica enormemente la obtención de un método de resolución. En efecto, una vez fijado $k \in \{1, \dots, s\}$ en (3), y denotando $w_i = w_{i,k}$, $x = x_k$ y $W = z_k$, se tiene que $W(x) = z_k(x_k)$ y que

$$\begin{aligned} W(x) &= \sum_{i=1}^m w_i \|x - a_i\| = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n |x_j - a_{ij}| \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m w_i |x_j - a_{ij}| \right) = \sum_{j=1}^n W_j(x_j), \end{aligned}$$

donde $W_j(x_j) = \sum_{i=1}^m w_i |x_j - a_{ij}|$ es una función definida en \mathbb{R} . Cada una de las funciones W_j es independiente de las otras, así que es posible descomponer el problema en

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} W(x) = \sum_{j=1}^n \left(\min_{x_j \in \mathbb{R}} W_j(x_j) \right),$$

y se tiene que x_j es el óptimo del problema $\min_{x_j \in \mathbb{R}} W_j(x_j)$ si, y sólo si, $x = (x_1, \dots, x_n)$ es el óptimo del problema $\min_{x \in \mathbb{R}^n} W(x)$.

Para resolver el problema en la coordenada j -ésima se necesita en primer lugar realizar un cambio de notación: si existen dos puntos en $\{a_1, \dots, a_m\}$ con la misma coordenada j , se eliminará uno de ellos y se añadirá el peso del que se quita al peso del que se deja. En otras palabras, si existen $i_1, i_2 \in \{1, \dots, m\}$, $i_1 \neq i_2$, tales que $a_{i_1 j} = a_{i_2 j}$ entonces se elimina $a_{i_2 j}$ y se asigna a $w_{(i_1)}$ el valor $w_{i_1} + w_{i_2}$. Después, se reordenan los valores a_{ij} de modo que $a_{(1)j} < a_{(2)j} < \dots < a_{(n_j)j}$, con $n_j \leq n$.

Lema 4.1

Las funciones $W_j(x)$ son continuas en \mathbb{R} y derivables en $\mathbb{R} \setminus \{a_{(1)j}, \dots, a_{(n_j)j}\}$. La función derivada de $W_j(x_j)$ es

$$W'_j(x_j) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{n_j} w_{(k)} & \text{para } x_j < a_{(1)j} \\ \sum_{k=1}^r w_{(k)} - \sum_{k=r+1}^{n_j} w_{(k)} & \text{para } a_{(r)j} < x_j < a_{(r+1)j} \\ \sum_{k=1}^{n_j} w_{(k)} & \text{para } a_{(n_j)j} < x_j \end{cases}$$

Demostración:

La continuidad de W_j es inmediata, mientras que para comprobar la afirmación acerca de la derivada será suficiente con quitar los valores absolutos de $W_j(x_j)$ hasta obtener la definición ‘a trozos’ de la función:

$$W_j(x_j) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n_j} w_{(k)}(a_{(k)j} - x_j) & \text{si } x_j \leq a_{(1)j} \\ \sum_{k=1}^r w_{(k)}(x_j - a_{(k)j}) + \sum_{k=r+1}^{n_j} w_{(k)}(a_{(k)j} - x_j) & \text{si } a_{(r)j} \leq x_j < a_{(r+1)j} \\ \sum_{k=1}^{n_j} w_{(k)}(x_j - a_{(k)j}) & \text{si } a_{(n_j)j} \leq x_j \end{cases} \quad (5)$$

□

Obsérvese que la función W_j es lineal a trozos con cambios de pendiente en los puntos $a_{(k)j}$, y que la pendiente de W_j es una función creciente en x_j . Así, es evidente que el mínimo o mínimos se encuentran donde la pendiente pasa de negativa a positiva o cero.

Teorema 4.2

Sea r el primer índice para el cual

$$\sum_{k=1}^r w_{(k)} - \sum_{k=r+1}^{n_j} w_{(k)} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^r w_{(k)} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_j} w_{(k)}. \quad (6)$$

Entonces, si la desigualdad anterior es estricta, el único óptimo de W_j es el punto $a_{(r)j}$, mientras que si es una igualdad, el conjunto de óptimos de W_j es $[a_{(r)j}, a_{(r+1)j}]$.

Demostración:

En el intervalo $(-\infty, a_{(1)j})$ la pendiente de W_j es negativa y en el intervalo $(a_{(n_j)j}, +\infty)$ la pendiente de W_j es positiva. Como la pendiente es creciente en x_j , existirá un primer índice r para el cual la pendiente sea positiva, es decir,

$$\sum_{k=1}^{r-1} w_{(k)} - \sum_{k=r}^{n_j} w_{(k)} < 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^r w_{(k)} - \sum_{k=r+1}^{n_j} w_{(k)} \geq 0,$$

o equivalentemente,

$$\sum_{k=1}^{r-1} w_{(k)} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_j} w_{(k)} \quad ; \quad \sum_{k=1}^r w_{(k)} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_j} w_{(k)}.$$

Si la desigualdad (6) es estricta, entonces

$$W'_j(x_j) \begin{cases} < 0 & \text{si } x_j < a_{(r)j} \\ > 0 & \text{si } x_j > a_{(r)j} \end{cases} \Rightarrow a_{(r)j} \text{ único óptimo de } W_j.$$

Pero si (6) es una igualdad se tiene que

$$W'_j(x_j) \begin{cases} < 0 & \text{si } x_j < a_{(r-1)j} \\ = 0 & \text{si } a_{(r)j} < x_j < a_{(r+1)j} \\ > 0 & \text{si } x_j > a_{(r+1)j} \end{cases}$$

y el conjunto $(a_{(r)j}, a_{(r+1)j})$ está formado por mínimos de W_j . Por la forma de la función W_j , expresión (5), se sabe que W_j es lineal sobre el intervalo $[a_{(r)j}, a_{(r+1)j}]$, y como es constante en $(a_{(r)j}, a_{(r+1)j})$, entonces también es constante sobre $[a_{(r)j}, a_{(r+1)j}]$. En resumen, si (6) es una igualdad el conjunto de soluciones óptimas de W_j es el intervalo $[a_{(r)j}, a_{(r+1)j}]$. \square

Con este resultado es inmediata la obtención de un algoritmo de resolución del problema de Weber con norma l_1 en \mathbb{R}^n (para problemas en el plano basta hacer $n = 2$).

Algoritmo 4.3 (Norma rectangular)

Hacer $j = 1$ y $s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m w_i$.

Paso Previo. Reordenar las coordenadas j -ésimas de los puntos a_1, \dots, a_m de modo que $a_{(1)j} \leq \dots \leq a_{(m)j}$. Hacer $h, n_j = m$.

Paso 0. Si $a_{(h-1)j} = a_{(h)j}$, hacer $w_{(h-1)} = w_{(h-1)} + w_{(h)}$. Eliminar $a_{(h)j}$ y $w_{(h)}$. Para cada $a_{(r)j}$ con $r > h$, hacer $a_{(r-1)j} = a_{(r)j}$ y eliminar $a_{(n_j)j}$. Hacer $h = h - 1$ y $n_j = n_j - 1$. Si $h = 1$ ir al Paso 1, en caso contrario ir al Paso 0.

Si $a_{(h-1)j} < a_{(h)j}$, hacer $h = h - 1$. Si $h = 1$ ir al Paso 1, en caso contrario ir al Paso 0.

Paso 1. Hacer $\text{Suma} = w_{(1)}$.

Si $\text{Suma} \geq s$, hacer $k = 1$ e ir al Paso Solución.

En caso contrario, hacer $k = 2$ e ir al Paso k .

Paso k . Hacer $\text{Suma} = \text{Suma} + w_{(k)}$.

Si $\text{Suma} \geq s$ ir al Paso Solución.

En caso contrario, hacer $k = k + 1$ e ir al Paso $k + 1$.

Paso Solución. Si $\text{Suma} > s$, hacer $S_j = a_{(k)j}$. Hacer $j = j + 1$. Si $j = n + 1$ ir al Paso Final, en caso contrario ir al Paso Previo.

Si $\text{Suma} = s$, hacer $S_j = [a_{(k)j}, a_{(k+1)j}]$. Hacer $j = j + 1$. Si $j = n + 1$ ir al Paso Final, en caso contrario ir al Paso Previo.

Paso Final. El conjunto de soluciones es el producto cartesiano $S_1 \times \dots \times S_n \subseteq \mathbb{R}^n$.

Además, una biyección de \mathbb{R}^2 en sí mismo (véase lema 4.4), permite reducir los problemas con la norma l_∞ a problemas con la norma l_1 .

Lema 4.4

La aplicación $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida como $T(x_1, x_2) = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_2-x_1}{2})$ es una biyección de \mathbb{R}^2 en sí mismo que verifica

$$\begin{aligned} l_\infty(x_1, x_2) &= l_1(T(x_1, x_2)) \\ l_1(x_1, x_2) &= l_\infty(T^{-1}(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

En consecuencia, para resolver un problema de Weber en el plano con norma l_∞ , basta hacer

$$a'_i = T(a_i) \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

resolver mediante el algoritmo 4.3 el problema correspondiente a los puntos $\{a'_1, \dots, a'_m\}$, y si $S_1 \times S_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ es el conjunto que proporciona el algoritmo, entonces las soluciones al problema con norma l_∞ es

$$T^{-1}(S_1 \times S_2) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \exists y \in S_1 \times S_2 \text{ con } T(y) = x\}.$$

5 Resolución para normas poliédricas

El teorema siguiente muestra que todo problema de Weber con normas poliédricas en \mathbb{R}^n puede ser reformulado como un problema de programación lineal con $2mr + n$ variables (incluyendo las componentes de x) y mn restricciones, que es resoluble a través del conocido método del símplex.

Teorema 5.1 ([Ward y Wendell, 1985])

Sean $\{a_1, \dots, a_m\}$ los vértices de un problema de Weber con la norma poliédrica $\|\cdot\|$ y $\{b_g / g = \pm 1, \dots, \pm r\}$ el conjunto de puntos extremos de la bola unidad de la norma. En estas condiciones, el problema de Weber es equivalente al siguiente problema de programación lineal:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{g=1}^r w_i \beta_{g,i}^+ + w_i \beta_{g,i}^- \quad (7)$$

s. a

$$x - a_i = \sum_{g=1}^r \beta_{g,i}^+ b_g - \beta_{g,i}^- b_{-g}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\beta_{g,i}^+, \beta_{g,i}^- \geq 0$$

Algoritmo 5.2 (Normas poliédricas)

Crear las variables positivas $\beta_{g,i}^+$ y $\beta_{g,i}^- \forall i = 1, \dots, m, \forall g = 1, \dots, r$.

Paso 1. Resolver, mediante el algoritmo del símplex, el problema lineal de variables $x_1, \dots, x_n, \beta_{g,i}^+$ y $\beta_{g,i}^- \forall i = 1, \dots, m, \forall g = 1, \dots, r$, cuya función objetivo viene dada por

$$\sum_{i=1}^m \sum_{g=1}^r w_i \beta_{g,i}^+ + w_i \beta_{g,i}^-$$

y cuyas restricciones son

$$x_j - a_{ij} = \sum_{g=1}^r \beta_{g,i}^+ b_{g,j} - \beta_{g,i}^- b_{-g,j}, \quad \forall i = 1 \dots, m, \forall j = 1, \dots, n,$$

donde $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ y $b_g = (b_{g,1}, \dots, b_{g,n})$.

Paso 2. Las soluciones al problema de Weber son los puntos $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Por último, es interesante notar que la solución del algoritmo verifica las restricciones de (7), es decir,

$$x - a_i = \sum_{g=1}^r \beta_{g,i}^+ b_g - \beta_{g,i}^- b_{-g}, \quad i = 1 \dots, m,$$

las cuales indican cómo se ha de realizar el movimiento desde x hasta a_i a través de direcciones paralelas a los vectores b_g .

6 Conclusiones

Se ha mostrado que la velocidad de producción de una cadena de ensamblaje en la que el montaje de los componentes de cada producto final se realiza mediante un brazo robot, depende de la ubicación de los recipientes que contienen esos componentes. Una vez determinado el orden de instalación de las piezas, la mejor localización de los recipientes es aquella en la que el brazo robot completa la secuencia de montaje de cada producto en el menor tiempo posible, lo que ocurre precisamente cuando el tiempo de movimiento total del robot desde los recipientes hasta los puntos de inserción se hace mínimo.

Tras descomponer el problema original en varios subproblemas independientes, uno por cada contenedor de piezas, se observa que cada uno de ellos es equivalente a un cierto problema de localización de Weber, en la que la distancia depende de las características motoras del brazo robot. Si el movimiento del robot se realiza a través de dos motores, uno para el movimiento horizontal y otro para el vertical, la distancia que debe utilizarse en los problemas de Weber es la asociada a la norma l_1 o a la norma l_∞ , dependiendo de que puedan, o no, funcionar a la vez. También se ha comprobado que las normas poliédricas se ajustan al movimiento del robot en un gran número de casos, por ejemplo, cuando éste posee varios motores que no pueden trabajar simultáneamente. Por último, se han presentado algoritmos sencillos de resolución del problema de Weber con las normas l_1 y l_∞ , así como para cualquier norma poliédrica, lo que cubre la mayor parte de las motorizaciones posibles para el robot.

Referencias

- [Bindscheller y Moore, 1962] A.E. Bindscheller, J.M. Moore (1961). *Optimal location of new machines in existing plant layouts*. The Journal of Industrial Engineering, 12, 41-48.
- [Brimberg y Love, 1993] J. Brimberg, R.F. Love (1993). *Global convergence of a generalized iterative procedure for the minisum location problem with l_p distances*. Operations Research, 41, 1153-1163.
- [Cañavate et al., 2001] R.J. Cañavate Bernal, M.B. Cobacho Tornel, J.M. Rodríguez Gómez. *El algoritmo de Weiszfeld para la resolución del problema económico de Weber*. XV Reunión de ASEPELT. A Coruña.
- [Foulds y Hamacher, 1993] L.R. Foulds, H.W. Hamacher (1993). *Optimal bin location and sequencing in printed circuit board assembly*. European Journal of Operational Research, 66, 279-290.
- [Love y Yerex, 1976] R.F. Love, L. Yerex (1976). *Application of a facilities location model in the prestressed concrete industry*. Interfaces, 6/4, 45-49.
- [Rockafellar, 1970] R.T. Rockafellar (1970). *Convex analysis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- [Ward y Wendell, 1985] J.E. Ward, R.E. Wendell (1985). *Using block norms for location modelling*. Operations Research, 33, 1074-1090.
- [Weber, 1909] A. Weber (1909). *Über den standort der industrien*. Tübingen. (Traducción de C.J. Friederich (1929): *Theory of the location of industries*. Chicago: University of Chicago Press.)