OPTIMIZACIÓN CON MODELOS DE RED EN HOJA DE CÁLCULO

Bernal García, Juan Jesús juanjesus.bernal@upct.es

Martínez María-Dolores, Soledad María soledad.martinez@upct.es

Sánchez García, Juan Francisco jf.sanchez@upct.es

Dpto. de Métodos Cuantitativos e Informáticos.

Universidad Politécnica de Cartagena

RESUMEN

Los modelos de Programación Lineal son un instrumento eficaz de planificación estratégica, lo cual unido a la gran difusión de las hojas de cálculo y la herramienta "Solver" en ellas incluida, ha hecho posible su aplicación a modelos de optimización, facilitando así su utilización por las PYMES. Aún así, están menos entendidas las aplicaciones realizadas con los modelos de red, tanto los de transporte como los de determinación de ruta de coste mínimo. Presentamos aquí una forma de realizarlas, incluyendo además dos casos prácticos, con puertos marítimos y ciudades reales, donde se demuestra cómo estas técnicas pueden ser una ayuda inestimable a la hora de organizar las distribuciones de productos, informándonos sobre la forma de asignar las cantidades y destinos, o sobre cómo elegir la ruta óptima para que los costes de transporte involucrados sean mínimos.

1. INTRODUCCIÓN

Dentro de los denominados Modelos Cuantitativos tiene especial importancia los de Programación Lineal (P.L.), ya que al permitir trabajar con gran cantidad de variables de decisión y restricciones, pueden ser aplicados a la resolución de diversos problemas que requieran una optimización: Modelos de Selección, Modelos de Asignación, Modelos de Transporte, Modelos de Ruta Más Corta, etc.

Vamos a abordar aquí los dos últimos modelos de P.L. citados, que nos van a permitir optimizar, en el sentido de reducir, los costes de transporte, u optar por la forma de distribuir la mercancía, en el primer caso, o elegir la ruta más corta en el segundo. La resolución de estos modelos matemáticos mediante la herramienta Solver, incluida en Excel, resulta realmente asequible y por ello totalmente aconsejable de utilizar, cada vez en mayor medida, como apoyo a la toma de decisiones en las Pymes.

1.1. Los Modelos de Red:

Denominamos "Modelos de Red" [BAZARAA] a aquellos modelos donde intervienen orígenes y destinos. Dentro de los cuales se encuentran los Modelos de Transporte y los Modelos de Ruta más Corta. Resumamos en qué consisten cada uno de ellos:

1.1.1 El Modelo de Transporte:

En esencia, este modelo se propone determinar la forma de asignar los productos de los diferentes almacenes (u orígenes) a los diversos clientes (o destinos), con el fin de satisfacer la demanda con el menor coste de transporte posible. Para ello necesitaremos disponer de la información relativa a la demanda de cada uno de los clientes (destinos), así como de la disponibilidad de productos en cada almacén (orígenes). De la misma forma debemos conocer el coste unitario de transporte entre todas las combinaciones posibles de rutas origen-destino. Con estos datos, deberemos hacer mínimo el coste total de transporte. Es decir, la función objetivo a minimizar será la suma de todos los elementos resultantes de multiplicar los costes unitarios por el número de elementos a enviar en cada transporte.

Las restricciones que deben cumplirse en este modelo serán, en primer lugar que las cantidades enviadas desde cada origen no superen la disponibilidad de éste; siendo la segunda la que se encarga de garantizar la demanda. Además es necesario incluir siempre, para la correcta resolución del problema, la condición de que las soluciones sean positivas (soluciones factibles). Normalmente se realiza la minimización de los costes totales, aunque también sería posible plantear una función objetivo a maximizar, sin más que introducir en ésta, en vez de los costes unitarios, los rendimientos unitarios.

También debemos aclarar que si la demanda total no coincide con la oferta total, decimos que el modelo es “no equilibrado”, aunque sigue siendo posible su resolución. Veamos ahora las dos situaciones que pueden producirse:

Caso 1: La oferta es mayor que la demanda: Los productos no asignados aparecen como holgura o exceso en la restricción (al trabajar con desigualdades, ello no implica ningún problema).

Caso 2: La oferta es menor que la demanda: El modelo, así planteado no tiene solución, por lo que si queremos satisfacer toda la demanda posible, o bien se reformulan las desigualdades, o se añade un origen ficticio cuya oferta coincida con el desfase entre oferta y demanda anterior.

Finalmente, apuntamos otra “argucia” interesante, consistente en asignar un costo arbitrariamente grande a una de las rutas (mayor que las demás), cuando queremos “eliminar” una de ellas del modelo.

1.1.2. El Modelo de la Ruta Más Corta:

Se trata de un modelo de red (debido a la forma de diagrama de red usado para su representación), donde cada arco o rama que une dos nodos (elementos) que forman dicha red, viene caracterizado por un valor que representa la distancia (costo o tiempo) desde el nodo origen hasta el nodo destino. Si denominamos ruta o camino, a cualquier secuencia de arcos que conecte el nodo origen con el destino, la resolución consiste en encontrar la más corta posible.

Usualmente los arcos no están orientados, es decir, se permite el tráfico en ambos sentidos, salvo que se indique lo contrario (por ejemplo en una calle de dirección prohibida), e incluso podría asignársele distinto coste en un sentido que en otro (debido por ejemplo, a una diferente densidad de tráfico).

Como puede plantearse la ruta más corta entre cualesquiera nodos de la red, la forma de especificar el origen y el destino concreto a analizar, es asignando a éstos los valores +1 y –1 respectivamente; indicando que existe conexión entre dos nodos determinados mediante un 1, y 0 en caso contrario. A continuación colocamos en una tabla los productos entre los valores de la distancia entre los distintos nodos y los correspondientes unos. La suma total de estos productos, será la función objetivo que proporciona la distancia total a recorrer y es la que debemos minimizar. En este caso las soluciones sólo pueden ser 0 o 1, lo que significa elegir la rama en cuestión para formar parte de la ruta óptima, o no respectivamente.

2. METODOLOGÍA DE APLICACIÓN. SUPUESTO PRÁCTICO

Presentamos a continuación la forma de abordar este tipo de problemas con una hoja de cálculo, mediante la resolución de un supuesto práctico: "*Una empresa, desea conocer la mejor forma de organizar el trasporte de abastecimiento de sus fábricas, así como de elegir la ruta más corta para hacerlo a su nueva planta*".

2.1. Planteamiento del problema:

Se trata de una empresa que dispone de tres fábricas de montaje en las ciudades de Córdoba, Zaragoza y Valladolid. Estas plantas se abastecen de unos kits de montaje que llegan a España a su vez por los puertos de Barcelona, Cartagena y La Coruña.

En primer lugar se desea conocer, en función de la demanda de las citadas factorías y las disponibilidades los tres puertos enumerados, cuál debería ser el envío de dichos productos hacia cada planta y desde qué puertos de entrada, de forma que el coste total del transporte total sea el mínimo posible. En segundo lugar, se plantea la puesta de marcha de una nueva factoría en la ciudad de Burgos, por lo que se pregunta cuál sería la ruta más corta para transportar los elementos necesarios por la misma, los cuales entran por el puerto de la ciudad de Cartagena.

2.2. Modelo de Transporte:

Abordaremos la primera pregunta, comenzando con la presentación del mapa, realizado con la opción "Mapas" incluida hasta la versión Excel 2000[1], que muestra de forma gráfica el problema planteado con los tres puertos u orígenes del transporte y sus disponibilidades, así como las tres ciudades o destinos de la mercancía. (*Figura 1*).

Figura 1

2.1.1. Datos de partida:

En la *Figura 2* nos encontramos con la demanda de las tres plantas, que suman 1.000 uds., y la entrada prevista por los tres puertos, que asciende también a 1.000 kits (lo que anteriormente denominamos modelo equilibrado). A continuación, reflejamos en sendas tablas las distancias kilométricas (aproximadas) de las combinaciones posibles entre todos los puertos y las ciudades mencionadas, y los costos unitarios para transportar el kit entre cada origen y destino posible.

MODELO DE TRANSPORTE			
Fábrica	***Demanda***	***Puerto***	***Disponibilidad***
Córdoba	400	**Barcelona**	400
Zaragoza	250	**Cartagena**	350
Valladolid	350	**A Coruña**	250
Total:	**1.000**	**Total:**	**1.000**

Figura 2

[1] Para versiones posteriores puede utilizarse el software "Professional Map", compatible con Excel.

2.1.2 Planteamiento del problema de Programación Lineal:

Si partimos de una tabla donde aparecen los puertos y las fábricas consideradas, y asignamos unos valores iniciales (o simplemente unos valores cualesquiera), que representan el número de elementos que vamos a enviar de un puerto determinado a una ciudad dada, y seguidamente sumamos las filas y columnas, obtendremos una tabla como la *Figura 3a*.

	B	C	D	E	F	G
22			***Fábrica***			
23	***Puerto***	**Córdoba**	**Zaragoza**	**Valladolid**	***Suma***	***Disponibilidad***
24	**Barcelona**	50	250	100	*400*	**400**
25	**Cartagena**	350	0	0	*350*	**350**
26	**A Coruña**	0	0	250	*250*	**250**
27	***Suma***	*400*	*250*	*350*		**1.000**
28	***Demanda***	**400**	**250**	**350**	**1.000**	

Figura 3a

2.1.3. Función Objetivo:

En otra tabla similar a la anterior (*Figura 3b*), colocamos en cada casilla, el producto del coste unitario por las uds. a transportar (Figura 3a), y sumamos los costes por filas. Tendremos así el coste total de cada puerto a las tres ciudades posibles. Si sumamos por columnas, además obtendremos dicho coste por ciudad desde los tres puertos posibles. Hay que tener en cuenta que la suma, a su vez, de las columnas o filas deberá coincidir y proporcionar el coste total de transportar los 1.000 kits; coste total que es el que deberemos minimizar.

	B	C	D	E	F
31		**Costos TOTAL de Transporte**			
32			***Fábrica***		
33	***Puerto***	**Córdoba**	**Zaragoza**	**Valladolid**	***Suma***
34	**Barcelona**	1.290,50 €	2.327,50 €	2.194,00 €	***5.812,00 €***
35	**Cartagena**	4.921,00 €	- €	- €	***4.921,00 €***
36	**A Coruña**	- €	- €	3.470,00 €	***3.470,00 €***
37	***Suma***	***6.211,50 €***	***2.327,50 €***	***5.664,00 €***	***14.203,00 €***

Figura 3b

2.1.4. Resolución:

Para solucionar este problema utilizaremos "Solver" [BERNAL, LÓPEZ, SÁNCHEZ], que se encuentra en el "menú" herramientas de Excel), e introducimos la celda donde está el coste total como “celda objetivo” (*Figura 4a*). Especificamos que se trata de un “mínimo” y colocamos en “Estimar” el rango correspondiente a las 9 casillas de la *Figura 3a*, e introducimos, tal y como se indicó antes, las tres restricciones que se indican (*Figura 4a*):

1ª: Las soluciones son todas positivas (no tendría sentido enviar un nº de kits negativo).

2ª : Los artículos enviados son como mínimo los demandados por cada planta.

3ª: Los productos enviados son como máximo los disponibles en cada puerto.

Figura 4a

Cuando pulsamos “Resolver”[2], obtenemos la solución buscada (*Figura 3a*), que nos dice, por ejemplo, que a la factoría de Córdoba debemos llevar 50 kits de los 400 disponibles en Barcelona, 350 de los entrados por Cartagena (el total de lo que llegan a este puerto), y no enviar ninguno de los disponibles en La Coruña; lo que suman las 400 uds. que demandaba esta planta cordobesa. El modelo aconseja utilizar sólo 5 de las 9 rutas posibles, siendo el coste total del transporte de los 1.000 kits, de 14.203,00 €, cualquier otra implicará un coste mayor.

Cuando “Solver” encuentra una solución, muestra un “cuadro de diálogo” [WALKENBACH] que permite la realización automática de “Informes”, los “Informe de límites”, “Informe de respuestas”, e “Informe de Sensibilidad” (*Figura 4b*). De este último, el más importante podemos extraer información valiosa, como conocer que los costos totales descenderían a razón de 21,94 € por unidad hasta llegar a un máximo de

[2] Hemos utilizado las características estándar del Solver, relativas a la precisión, método de resolución, etc. empleados, y que pueden ser variadas según necesitemos.

200 kits, si se redujera la demanda de Valladolid, o que los costos totales descenderían a razón de 11,75€/Kit hasta un máximo de 50, si aumentara la disponibilidad en Cartagena.

Microsoft Excel 11.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Aumento permisible
C24	Barcelona Córdoba	50	0	25,81	13,78	7,99
D24	Barcelona Zaragoza	250	0	9,31	21,97	9,31
E24	Barcelona Valladolid	100	0	21,94	7,99	8,06
C25	Cartagena Córdoba	350	0	14,06	7,99	1E+30
D25	Cartagena Zaragoza	0	22	19,53	1E+30	21,97
E25	Cartagena Valladolid	0	8	18,19	1E+30	7,99
C26	A Coruña Córdoba	0	14	31,53	1E+30	13,78
D26	A Coruña Zaragoza	0	23	24,28	1E+30	23,03
E26	A Coruña Valladolid	250	0	13,88	8,06	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Aumento permisible
C27	Suma Córdoba	400	25,81	400	0	50
D27	Suma Zaragoza	250	9,31	250	0	250
E27	Suma Valladolid	350	21,94	350	0	100
F24	Barcelona Suma	400	0,00	400	1E+30	0
F25	Cartagena Suma	350	-11,75	350	50	0
F26	A Coruña Suma	250	-8,1	250	100	0

Figura 4b

2.3. Modelo de la ruta más corta:

En la *Figura 5* se muestra el mapa con el problema planteado en segundo lugar: determinar la ruta más corta entre el puerto de Cartagena y la nueva factoría de Burgos. En él se ven reflejadas las distintas rutas alternativas; se aprecia que hay cinco ciudades intermedias o de paso: Albacete (AB), Cuenca (CU), Toledo (TO), Segovia (SG) y Soria (SO), más las de origen, Cartagena (CT) y de destino, Burgos (BU).

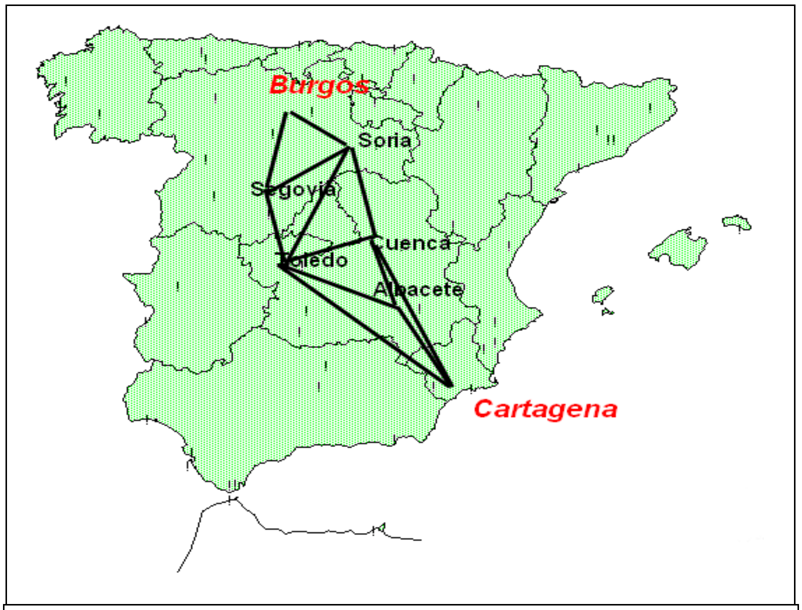

Figura 5

2.3.1. Datos de partida:

Se presenta en forma de tabla de doble entrada, la posibilidad de conexión o no entre cada nodo, mediante un 1 en el caso de que se plantee analizar un enlace entre dos ciudades como ruta alternativa. Por ejemplo, entre TO y CU ponemos un 1 (existe un arco previsto), pero entre TO y BU hay un 0, ya que no existe una conexión prevista en nuestro supuesto. Si copiamos dicha tabla y sustituimos los unos por las correspondientes distancias de cada arco, tendremos la tabla de la *Figura 6*, que refleja los kms. entre ciudades en la correspondiente casilla.

	CT	**AB**	**CU**	**TO**	**SG**	**SO**	**BU**
CT		200	340	440			
AB	200		142	240			
CU	240	142		187		359	
TO	440	240	187		158	302	
SG				158		194	197
SO			359	302	194		141
BU					197	141	

Figura 6

2.3.2. Planteamiento del problema de Programación Lineal y Función Objetivo:

A continuación se presentan, en forma de tabla, los datos utilizados para la optimización por parte de "Solver". La primera de ellas (*Figura 7a)* inicialmente es idéntica a la citada que contiene los ceros y unos, de conexión entre ciudades, y que deberá, tras la resolución, mostrar qué ruta seguir, dejando un "1" en los arcos a utilizar y poniendo un "0" en los no incluidos en esa ruta de longitud más corta.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
38		**CT**	**AB**	**CU**	**TO**	**SG**	**SO**	**BU**	**Total**
39	**CT**	0	**1**	0	0	0	0	0	**1**
40	**AB**	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**
41	**CU**	0	0	0	0	0	0	0	**0**
42	**TO**	0	0	0	0	**1**	0	0	**1**
43	**SG**	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**
44	**SO**	0	0	0	0	0	0	0	**0**
45	**BU**	0	0	0	0	0	0	0	**0**
46	**Total**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	
47		*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	
48	**Dif**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**
49	**Neto**	**1**						**-1**	

Figura 7a

En la *Figura 7b,* se encuentra la tabla cuyas casillas resultan de multiplicar las correspondientes de pertenencia a la ruta mínima, con "1" o "0" (*Figura 7a)* por la de los Kms. correspondiente a cada uno de esos arcos. La suma total de las filas (o de las columnas), de esta última tabla (*Figura 7b),* proporciona una cantidad en kilómetros que constituye la función objetivo a minimizar.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
51		**CT**	**AB**	**CU**	**TO**	**SG**	**SO**	**BU**	**Total**
52	**CT**	0	**200**	0	0	0	0	0	**200**
23	**AB**	0	0	0	**240**	0	0	0	**240**
54	**CU**	0	0	0	0	0	0	0	**0**
55	**TO**	0	0	0	0	**158**	0	0	**158**
56	**SG**	0	0	0	0	0	**0**	**197**	**197**
57	**SO**	0	0	0	0	0	0	0	**0**
58	**BU**	0	0	0	0	0	0	0	**0**
59	**Total**	**0**	**200**	**0**	**240**	**158**	**0**	**197**	**795**

Figura 7b

2.3.3. Resolución:

Para resolver el problema, llamamos de nuevo a "Solver" e introducimos la referencia de la celda donde hemos calculado la suma de kms. totales, como "celda objetivo" (*Figura 4a*), especificando que se trata de un "mínimo". Colocamos en "Estimar" el rango correspondiente a las 49 celdas de la *Figura 7a*; y finalmente introducimos las tres restricciones que indican (*Figura 8)*:

Figura 8

1^a restricción: Los rutas buscadas no tienen conexiones no establecidas (con "1" o "0")

2^a restricción: Las soluciones son todas positivas y sólo "ceros" o "unos", ello equivale a ser de tipo "binario", y se introducen directamente pulsando "Agregar..." en el *"Solver (Figura 8)* y eligiendo "bin" en el "cuadro de diálogo" que aparece para que escribamos las restricciones.

3^a restricción: La diferencia entre la rutas de salida y llegada ("Dif." de la *Figura 7a*, debe ser tal que proporcione en CT un 1 (origen) y en BU un –1 (destino).

La solución encontrada viene representada por los unos de la *Figura 7a* (presentados en negrita gracias al "formato condicional" de Excel), y presentada de forma gráfica en la *Figura 9*, que nos indican que debemos seguir la ruta que partiendo de Cartagena, va hacía Albacete, luego a Toledo, después a Segovia y finalmente llega a Burgos, con un total de 795 Kms. (200+240+158+197 Kms.). Nota: La distancia obtenida es la más corta, (no entramos aquí si es la más conveniente debido a otras condiciones relacionadas con la red vial).

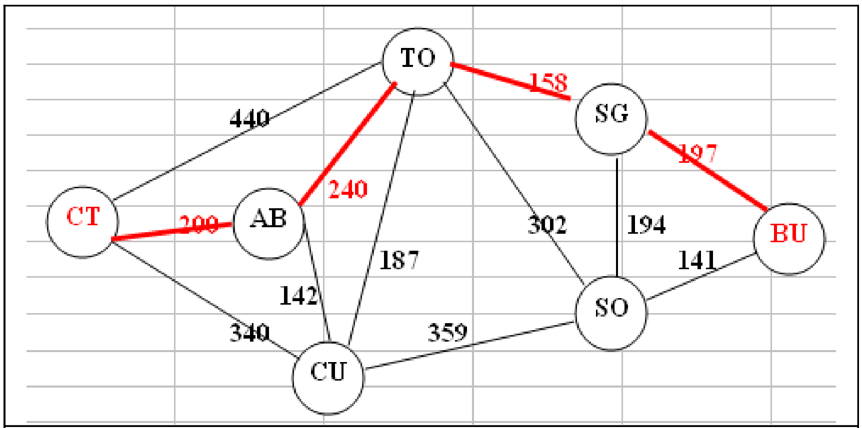

Figura 9

3. CONCLUSIONES

Los procedimientos matemáticos de la Programación Lineal, debidamente utilizados con ayuda de la hoja de cálculo, se convierten en una potente y versátil herramienta de planificación, con vistas a conseguir optimizar recursos y minimizar los costes, en este caso nada desdeñables, como son los de transporte.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAZARAA, M.S. JARVIS JJ.,HANIF D. S. (1999)" Programación lineal y flujo en Redes". Limusa. 2ª ed, 2ª reimp. México.

- BERNAL GARCÍA, JJ.(1999). "Asignación eficiente de vendedores y programación de visitas". Estrategia Financiera. CISS, 51, Mayo, pp. 26-33

- BERNAL GARCÍA, JJ., LÓPEZ ARES, S., SÁNCHEZ ÁLVAREZ, I. (1998). "Modelos de Optimización Empresarial con Solver". Revista de Estudios Empresariales de Cartagena. Departamento de Publicaciones de la U. de Murcia.

- JOHN A. LAWRENCE, JR., BARRY A. PASTERNACK (2002). "Applied Management Science. Modeling, Spreadsheet Analysis, and Communication for Decision Making.". John Wiley & Sons.

- WALKENBACH, J. (2004) El libro de Excel 2003. Anaya Multimedia. Madrid.