

# Cálculo eficiente de la función de Green en cavidades multicapa con sección transversal de tipo triángulo rectángulo-isósceles

J.S. Gómez-Díaz, M. Martínez-Mendoza, F.D. Quesada-Pereira and A. Alvarez-Melcon  
jsebastian\_gomez@ono.com, shanaz00@hotmail.com, fernando.quesada@upct.es, alejandro.alvarez@upct.es  
Universidad Politécnica de Cartagena, Antiguo Cuartel de Antigones, 30202 Cartagena, Murcia

**Abstract**—In this paper, an efficient calculation of the Green's functions inside multilayered shielded cavities with right isosceles-triangular cross-section is presented. The method is entirely developed in the spatial domain and it is based on image theory. The idea is to use the Green's functions inside a multilayered shielded square box in order to accurately obtain the Green's functions of the triangular structure. It is shown that the new algorithm is very robust, with limited computational effort. Cut-off frequencies and potential patterns of a triangular cavity have been calculated and compared to those obtain by other techniques showing very good agreement. Finally, a transversal filter inside a multilayered triangular shaped cavity is designed, manufactured and tested using the developed technique.

## I. INTRODUCCIÓN

El estudio de dispositivos de microondas ha suscitado el interés de los investigadores en los últimos tiempos, debido a su uso intensivo en la industria de las telecomunicaciones. De esta forma, el análisis de estructuras muy complejas (con varias capas de dieléctrico, operando a altas frecuencia, con la influencia de paredes metálicas, etc) debe de ser realizado con gran precisión, y en un tiempo mínimo.

El uso de la ecuación integral se encuentra muy extendido para realizar este tipo de análisis, empleándose en una gran cantidad de estructuras y circuitos de radiofrecuencia. En general, esta técnica se ha empleado con éxito en múltiples escenarios: análisis de antenas radiando en condiciones de espacio libre [1], análisis de circuitos de radiofrecuencia multicapa [2], problemas y circuitos en guíaonda y para antenas de cavidad [3]. Una de las principales dificultades en estos casos es el cálculo de las funciones de Green que tengan en cuenta la influencia de las paredes laterales de la guíaonda. Para solventar este problema, se han propuesto formulaciones tanto en el dominio espacial como en el dominio espectral. Así, la formulación en el dominio espectral obtiene con gran eficiencia las funciones de Green en cavidades tanto rectangulares [4] como circulares [5]. Sin embargo, presenta problemas de convergencia cuando la cavidad a analizar tiene un tamaño eléctrico muy superior a las del circuito impreso. En cuanto a la formulación en el dominio espacial, sólo se ha conseguido aplicar con éxito a guías rectangulares [6].

En esta comunicación se propone un nuevo método para el cálculo de las funciones de Green en cavidades multicapa encapsuladas que presenten una sección transversal de tipo triángulo rectángulo-isósceles. El método está formulado de forma íntegra en el dominio espacial y se basa en la teoría de imágenes. La idea consiste en dividir una cavidad de sección

transversa cuadrada multicapa en dos cavidades triangulares (A y B, ver Fig. 1). La técnica utiliza por primera vez las funciones de Green asociadas a la estructura cuadrada [7] para obtener las funciones de Green de una de las cavidades triangulares. Más específicamente, la teoría de imágenes [8] es empleada para satisfacer las condiciones de contorno en la hipotenusa del triángulo. De esta forma, cuando una fuente puntual se encuentra en el interior del triángulo (A), su correspondiente imagen se ubica en el triángulo (B). La imagen se coloca para imponer la condición de contorno en el lado desigual del triángulo. Finalmente, la función de Green en el interior del triángulo (A) se obtiene considerando la contribución de la fuente puntual original y de su imagen. Las condiciones de contorno en las otras paredes de la cavidad triangular se satisfacen automáticamente, gracias al uso de las funciones de Green en la cavidad de sección transversal cuadrada asociada.

Con el fin de demostrar la utilidad del método propuesto, se presenta un estudio de las frecuencias de resonancia y la distribución de los potenciales en una cavidad triangular multicapa. Los resultados son comparados con los obtenidos mediante un software comercial de elementos finitos (HFSS<sup>®</sup>), mostrando una buena concordancia. Finalmente, un filtro híbrido guíaonda-microstrip [9] es diseñado con la técnica presentada. Este tipo de filtros combina una de la resonancias de la cavidad con la resonancia de la línea microstrip, por lo que el correcto modelado de la cavidad es esencial. La comparación entre las medidas experimentales y los resultados simulados es excelente.

## II. TEORÍA

En la Fig. 1 se muestra una cavidad triangular (con sección transversal de tipo rectangular-isósceles), sobre la que se sitúa un dipolo eléctrico unitario.

Con el fin de simplificar el problema, se considera la cavidad de sección transversal cuadrada que contiene a la estructura triangular. Las funciones de Green asociadas a una cavidad cuadrada multicapa se pueden obtener de forma eficiente en el dominio espacial [7]. La estructura cuadrada se divide en dos cavidades triangulares iguales, (A) y (B). Cuando una fuente puntual se ubica en el interior de la estructura (A), la estructura (B) es utilizada para situar su imagen. Las funciones de Green de la cavidad de sección transversal cuadrada se emplean para obtener la contribución de cada fuente en un punto de observación (en el interior de la estructura A). A continuación se combinan la influencia

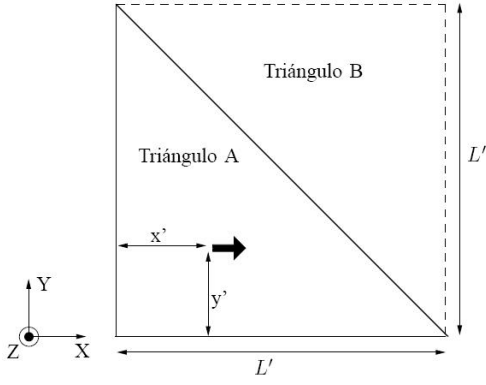


Fig. 1. Cavity triangular (A) sobre la que se ubica un dipolo eléctrico unitario. Para su estudio, se considera la estructura cuadrada que la contiene, con su triángulo simétrico (B).

de la fuente origen y de la imagen para recuperar la función de Green de la cavidad triangular. Como las fuentes están asociadas a una estructura multicapa, las funciones de Green recuperadas automáticamente consideran el mismo medio multicapa, compuesto de varios dieléctricos apilados.

La condición de contorno que se debe de satisfacer para el campo eléctrico tangencial es que se anule en las paredes metálicas. Esta condición puede ser trasladada directamente a los potenciales. El potencial escalar eléctrico debe de anularse a lo largo de las paredes de la cavidad triangular. Una carga eléctrica puntual ubicada en el interior de la estructura (A) es capaz de cumplir las condiciones de contorno en los lados iguales de la guía triangular (ya que comparte los lados con la guía cuadrada usada como referencia). Con el fin de imponer la condición de contorno a lo largo de la hipotenusa del triángulo, la imagen de la carga original se sitúa en el interior de la estructura triangular (B), como se puede apreciar en la Fig. 2.

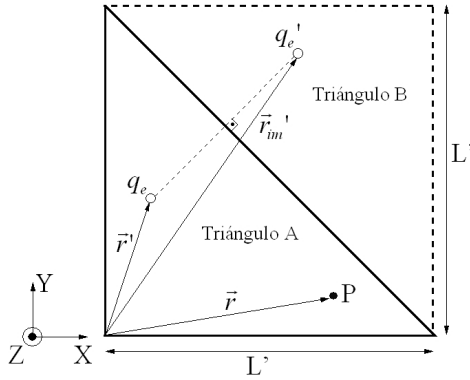


Fig. 2. Cargas original e imagen usadas para imponer la condición de contorno del potencial escalar eléctrico a lo largo de la hipotenusa de la guía triangular. El punto  $P$  es un punto de observación genérico.  $L' = \lambda$ .

Por teoría de imágenes [8], el valor de la carga imagen es el mismo que el de la original, pero cambiada de signo. La combinación de ambas fuentes es capaz de anular el potencial eléctrico a lo largo de la hipotenusa del triángulo, lo que también resultará válido en toda la altura de la pared (a lo largo de la dirección 'z'). Además, como ambas fuentes comparten los lados de la cavidad cuadrada principal, y se han utilizado como referencia las funciones de Green de esta

cavidad cuadrada, las condiciones de contorno también se satisfacen en los otros lados.

Finalmente, el potencial escalar eléctrico asociado a la cavidad triangular (A), se obtiene combinando la influencia de ambas fuentes:

$$G_{V_T}(\vec{r}, \vec{r}') = G_{V_q}(\vec{r}, \vec{r}') - G_{V_q'}(\vec{r}, \vec{r}'_{im}) \quad (1)$$

donde  $\vec{r}$  es un punto de observación arbitrario ( $P$ ),  $\vec{r}'$  es la posición de la fuente puntual original (ambos en el interior del triángulo A), mientras que  $\vec{r}'_{im}$  es la posición de la imagen (ubicada en el triángulo B). Es importante señalar que tanto  $G_{V_q}$  como  $G_{V_q'}$  están asociados al potencial escalar eléctrico de la cavidad cuadrada multicapa asociada [7].

Para la obtención de la función de Green diádica del potencial vector magnético se sigue un procedimiento similar. Si se ubican dos dipolos unitarios eléctricos en el estructura triangular (A) ( $I_x$  e  $I_y$ , orientados a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$ ), dos dipolos imagen, situados en la cavidad (B) ( $I'_x$  e  $I'_y$ , orientados a lo largo de los ejes  $y$  e  $x$ ), son necesarios para imponer las condiciones de contorno en la hipotenusa del triángulo, como se puede apreciar en la Fig. 3. Como

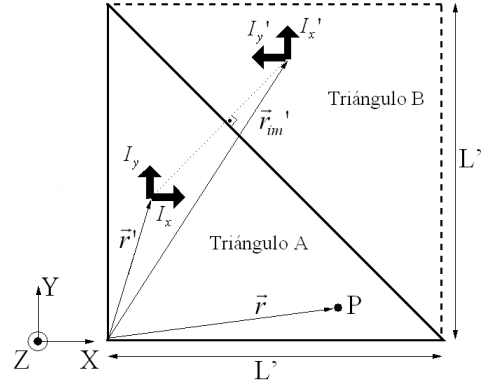


Fig. 3. Dipolos eléctricos fuente ubicados en el triángulo (A) y sus correspondientes dipolos imágenes (triángulo B) usados para imponer las condiciones de contorno a lo largo de la hipotenusa de la cavidad triangular. El punto  $P$  es un punto de observación genérico.  $L' = \lambda$ .

realmente todos los dipolos se encuentran en el interior de la cavidad cuadrada encapsulada multicapa, la condición de contorno a lo largo de los lados iguales del triángulo (A) se imponen de forma automática. Por teoría de imágenes, el valor absoluto de los dipolos imagen es el mismo que el de los dipolos originales. Sin embargo, se produce una rotación de 90 grados en su orientación, debido a la influencia de la hipotenusa del triángulo [8]. Finalmente, el potencial vector magnético puede ser fácilmente obtenido como

$$G_{A_T}^{xx}(\vec{r}, \vec{r}') = G_{A_{I_x}}^{xx}(\vec{r}, \vec{r}') \quad (2)$$

$$G_{A_T}^{yx}(\vec{r}, \vec{r}') = G_{A_{I'_x}}^{yy}(\vec{r}, \vec{r}'_{im}) \quad (3)$$

$$G_{A_T}^{xy}(\vec{r}, \vec{r}') = -G_{A_{I'_y}}^{xx}(\vec{r}, \vec{r}'_{im}) \quad (4)$$

$$G_{A_T}^{yy}(\vec{r}, \vec{r}') = G_{A_{I_y}}^{yy}(\vec{r}, \vec{r}') \quad (5)$$

donde  $\vec{r}$  es un punto de observación arbitrario ( $P$ ),  $\vec{r}'$  es la posición de los dipolos fuente (en el interior del triángulo A), mientras que  $\vec{r}'_{im}$  es la ubicación de los dipolos imagen. Es importante señalar que un dipolo orientado a lo largo del eje  $x$  es capaz de producir una componente cruzada  $y$  del potencial

vector magnético. Matemáticamente esta componente cruzada es debida al dipolo imagen  $I'_x$ , que está orientado en el eje  $y$ . Físicamente esta componente es producida por el plano oblicuo (hipotenusa) de la cavidad triangular.

### III. RESULTADOS

Con el fin de demostrar la utilidad de la técnica descrita, se analizarán las frecuencias de resonancia de un cavidad triangular, obteniéndose la distribución de los potenciales en su interior. Finalmente, se diseñará un filtro guíaonda-microstrip en el interior de una estructura multicapa triangular, usando medidas experimentales como validación.

En la Fig. 4 se presenta un cavidad triangular encapsulada multicapa. Para obtener las frecuencias de resonancia de la

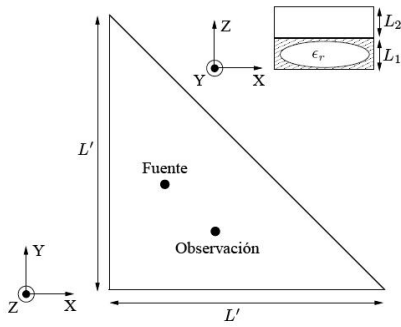


Fig. 4. Cavidad multicapa con sección transversal de tipo triángulo rectángulo-isósceles.  $L' = \lambda$ ,  $L_1 = L_2 = 0.2\lambda$ ,  $\epsilon_r = 5.0$ . La fuente puntual está ubicada en la posición  $(0.25\lambda, 0.35\lambda, 0.2\lambda)$  mientras que el punto de observación se encuentra en  $(0.35\lambda, 0.25\lambda, 0.2\lambda)$ .

cavidad, los potenciales calculados se representan en función de la frecuencia para un punto fijo de fuente y de observación. En la Fig. 5 se pueden observar claramente estas frecuencias de resonancia, correspondientes a los picos de potenciales en la respuesta. Con el fin de estudiar la exactitud

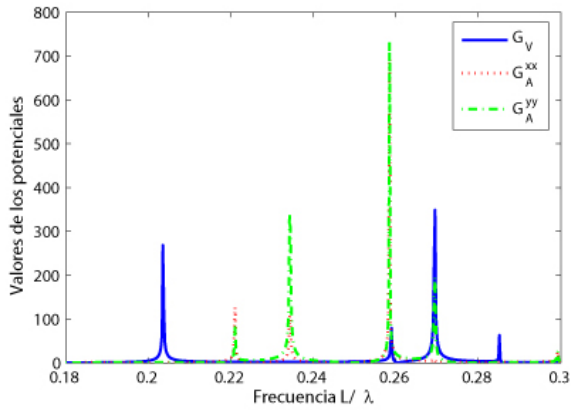


Fig. 5. Potenciales mixtos en función de la frecuencia en la cavidad triangular mostrada en la Fig. 4.

de los resultados obtenidos, el mismo estudio se ha realizado usando el software comercial de elementos finitos HFSS<sup>®</sup>. Como se puede observar en la Tabla I, la concordancia de los resultados es muy buena, obteniéndose un error relativo inferior al 0.08%, cuando el paso frecuencial es de  $0.005\lambda$ . Es importante señalar que la precisión obtenida depende de este paso frecuencial; así cuando el paso frecuencial es menor,

TABLE I  
FRECUENCIAS DE RESONANCIA DE LA CAVIDAD MOSTRADA EN LA FIG. 4.

Frecuencias de resonancia nuevo método ( $\frac{L'}{\lambda}$ )	Frecuencias de resonancia con HFSS <sup>®</sup> ( $\frac{L'}{\lambda}$ )	Error relativo (%)
0.2035	0.2035	0.0000
0.2210	0.2209	0.0453
0.2342	0.2342	0.0000
0.2585	0.2583	0.0774
0.2588	0.2587	0.0387
0.2695	0.2693	0.0743
0.2851	0.2849	0.0702
0.2991	0.2990	0.0334

la convergencia de los resultados aumenta. Por ejemplo, reduciendo el paso frecuencial a la mitad ( $0.0025\lambda$ ), el error relativo máximo se mantiene siempre inferior a 0.04%.

Los potenciales en el interior de la cavidad pueden ser calculados con la nueva técnica propuesta de forma precisa, sin problemas de convergencia, incluso a la frecuencia de resonancia de la cavidad. En la Fig. 6 se muestra la distribución del potencial escalar eléctrico en el interior de la guía triangular, a media altura, a la frecuencia normalizada de  $\frac{L'}{\lambda} = 0.2851$ . El potencial vector magnético  $G_A^{yy}$  se presenta

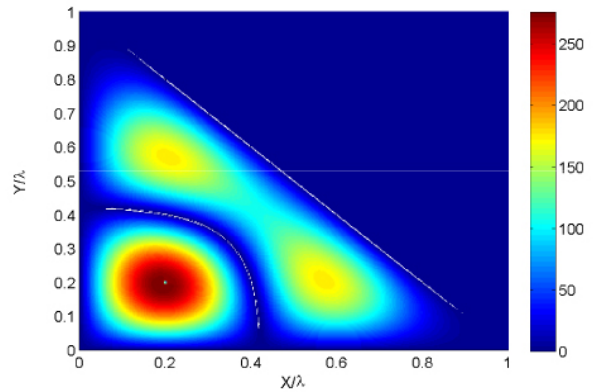


Fig. 6. Potencial escalar eléctrico obtenido con el método propuesto a la frecuencia de resonancia normalizada de  $\frac{L'}{\lambda} = 0.2851$ . La fuente se encuentra en la posición  $(0.2\lambda, 0.2\lambda, 0.2\lambda)$ .

en la Fig. 7 a la frecuencia normalizada de  $\frac{L'}{\lambda} = 0.2991$ . En ambos casos se puede observar una distribución nítida

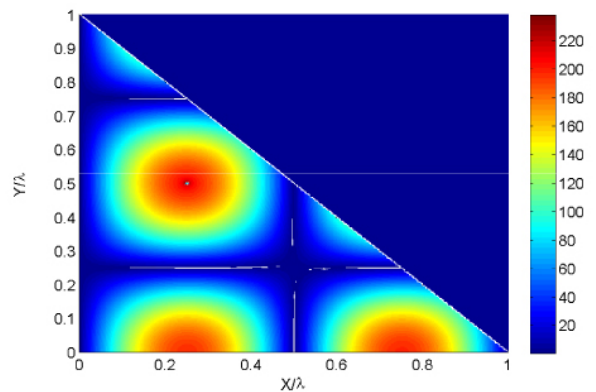


Fig. 7. Potencial vector magnético  $G_A^{yy}$  obtenido con el método propuesto a la frecuencia de resonancia normalizada de  $\frac{L'}{\lambda} = 0.2991$ . La fuente se encuentra en la posición  $(0.22\lambda, 0.5\lambda, 0.2\lambda)$ .

del potencial. Los mismos resultados (no mostrados por falta de espacio) se han obtenido usando el software comercial HFSS<sup>®</sup> para las componentes  $z$  e  $y$  del campo eléctrico.

El método propuesto puede también utilizarse para analizar filtros de microondas impresos en una cavidad encapsulada multicapa triangular, como la presentada en la Fig. 8. Este

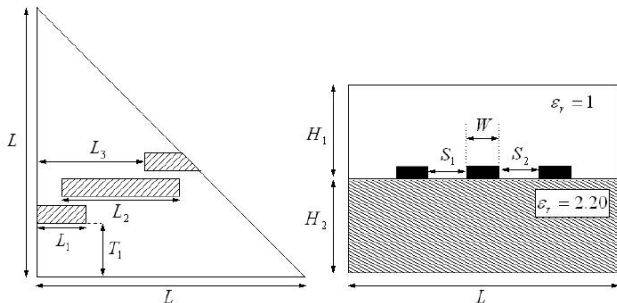


Fig. 8. Filtro híbrido guíaonda-microstrip [9] implementado en una cavidad triangular multicapa encapsulada.

tipo de filtros, guíaonda-microstrip [9], combinan una de las resonancias de la cavidad con la resonancia de la línea microstrip, obteniendo una respuesta de segundo orden. Para el diseño del filtro, se varía la dimensión  $L'$  de la cavidad triangular para sintonizar la frecuencia de resonancia de la caja a  $4.47GHz$ . Tras el proceso de diseño, un prototipo (ver Fig. 9) ha sido construido y medido. Es importante resaltar

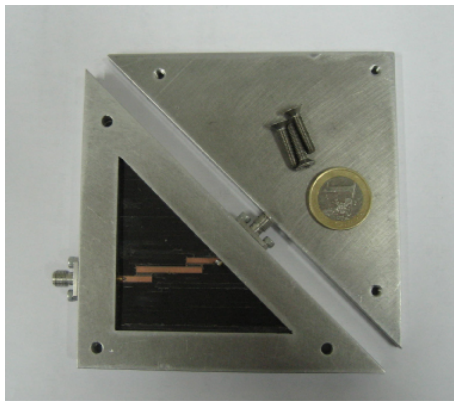


Fig. 9. Prototipo fabricado, mostrando todos los componentes del filtro.

que en este tipo de filtros el correcto modelado de la cavidad encapsulada multicapa es fundamental. La respuesta final obtenida con el nuevo método presentado puede observarse en la Fig. 10, donde resultados experimentales han sido incluidos como validación.

#### IV. CONCLUSIONES

En esta comunicación se ha presentado un nuevo método para el cálculo de las funciones de Green en el interior de cavidades encapsuladas multicapa que presenten una sección transversal de tipo triángulo rectangular-isósceles. Las funciones de Green en el dominio espacial asociadas a una cavidad de sección transversal cuadrada multicapa son usadas para obtener de forma exacta las funciones de Green asociadas a la estructura triangular situada en el interior de cavidad cuadrada. La teoría de imágenes es empleada para imponer

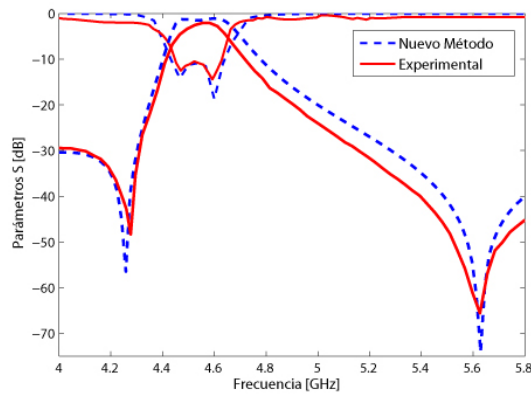


Fig. 10. Resultados para el filtro transversal paso-banda mostrado en la Fig. 8 obtenidos con el método propuesto. Las pérdidas en el dieléctrico ( $\tan\delta = 0.004$ ) y en las metalizaciones ( $\sigma = 1 \cdot 10^7 \Omega^{-1}/m$ ) son consideradas. Se presentan medidas experimentales como validación.

las condiciones de contorno a lo largo de la hipotenusa de la estructura triangular. Como validación, las frecuencias de resonancia y distribución de los potenciales en el interior de una cavidad triangular multicapa han sido calculadas y comparadas con las obtenidas mediante un método de elementos finitos. Finalmente, para mostrar la utilidad práctica de la formulación presentada, se realiza el diseño de un filtro guíaonda-microstrip que combina una resonancia de la cavidad triangular con la resonancia de una línea microstrip. Los resultados experimentales confirman la precisión del método presentado.

#### V. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido cofinanciado por el Ministerio de Educación y Ciencia (Proyecto: TEC2007-67630-C03-02, Beca: FPU-AP2006-015).

#### REFERENCES

- [1] O. I. Sukharevsky, S. V. Kukobko and A. Z. Sazonov, "Volume Integral Equation Analysis of a two-dimensional radome with a sharp nose", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 4, pp. 1500–1506, Abril 2005.
- [2] K.A. Michalski and J.R. Mosig, "Multilayered media Green functions in integral equation formulations", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 45, no. 3, pp. 508–519, March 1997.
- [3] Yi-Chi Shih, "Design of Waveguide E-Plane Filters with all Metal Inserts", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 32, no. 7, pp. 695–704, July 1984.
- [4] C. J. Railton and S. A. Meade, "ast Rigorous Analysis of Shielded Planar Filters," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 40, No. 5, 978–985, 1992.
- [5] F. Zavosh and J. T. Aberle, "Single and Stacked Circular Microstrip Patch Antennas Backed by a Circular Cavity," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 43, No. 7, 746–750, 1995.
- [6] Alejandro Alvarez Melcon and Juan R. Mosig, "A Novel Spatial Images Technique for the Analysis of Cavity Backed Antennas", *ACES, Applied Computational Electromagnetics Society*, vol. 14, no. 3, Mach 1999.
- [7] Alejandro Alvarez Melcon and Juan R. Mosig, "Two techniques for the efficient numerical calculation of the Green's functions for planar shielded circuits and antennas," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 48, September 2000.
- [8] C. A. Balanis, "Advanced Engineering Electromagnetics," John Wiley and Sons, 1989.
- [9] M. Martínez Mendoza, J.S. Gómez Díaz, D.C. Rebenaque, J.L. Gomez Tornero, A. Alvarez Melcon, "Design of Bandpass Transversal Filters Employing a Novel Hybrid Structure," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 55, December 2007.