

Análisis y diseño óptimo integrado de secciones de hormigón armado de forma cualquiera

S. TORRANO MARTÍNEZ, P. MARTÍ MONTRULL

Departamento de Ingeniería Mecánica y Energética
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales,
Universidad Politécnica de Cartagena
Paseo Alfonso XIII, 48, 30203, Cartagena, España
(mstm@plc.um.es)

Resumen

Esta comunicación presenta un procedimiento para el análisis y diseño óptimo integrado de secciones de hormigón armado de forma cualquiera con cualquier número y distribución de armaduras, sometidas a flexión uniaxial o biaxial y carga axial.

El problema de análisis consiste en la determinación de la posición exacta del eje neutro, a partir de la cual, se determinan las deformaciones, las tensiones y los esfuerzos últimos de la sección.

El problema de diseño óptimo ha sido formulado como un problema de programación matemática no lineal. Se han considerado variables de armado, variables de geometría y variables de posición del eje neutro. La función objetivo es el costo del elemento estructural por unidad de longitud. Se han considerado restricciones de resistencia, restricciones de armaduras mínimas en tracción y restricciones de borde.

Abstract

This paper presents a procedure for the analysis and integrated optimal design of reinforced concrete sections of general shapes subject to a biaxial or uniaxial bending and axial load.

The analysis problem consist of calculate the neutral axis location, and the strains, stresses and ultimate strength of the section.

The optimal design problem has been formulated as a non-linear mathematical programming problem. Has been considered reinforcement variables, geometry variables and location of the neutral axis variables. The objective function is the cost of a structural member per unit length. Has been considered strength constraints, minimal tension reinforcement constraints and bound constraints.

1. Introducción

Dada una sección de forma cualquiera, con cualquier número y distribución de armaduras, sometida a flexión uniaxial o biaxial y carga axial, su análisis implica determinar la posición del eje neutro, usando para ello las ecuaciones de compatibilidad, comportamiento y equilibrio. Estas ecuaciones no pueden ponerse explícitamente en función de los parámetros que fijan la posición del eje neutro, por lo que el problema no tiene solución analítica exacta, y debe recurrirse a métodos iterativos basados en el tanteo de distintas posiciones del eje neutro.

En esta comunicación se presenta un procedimiento para el análisis de secciones de hormigón armado de forma cualquiera, con cualquier número y distribución de

armaduras, sometida a flexión uniaxial o biaxial y carga axial, utilizando el método de Newton-Raphson modificado para la obtención de las variables que definen la posición del eje neutro.

Posteriormente se plantea el problema de diseño óptimo, formulado como un problema de programación matemática no lineal. Se consideran variables de armado, variables de geometría y variables que definen la posición del eje neutro, evitándose con estas últimas, tener que determinar la posición exacta del eje neutro en cada iteración. Con este planteamiento, el problema de análisis expuesto en el párrafo anterior, puede convertirse en un problema de optimización en el que las variables sean exclusivamente aquellas que definen la posición del eje neutro.

Este trabajo ha sido desarrollado de acuerdo con la Instrucción EH-91.

Se presenta un ejemplo, resuelto para varios casos, extraído de la literatura sobre el tema. La implementación de la formulación presentada en este trabajo ha sido realizada mediante el programa de cálculo numérico MATLAB.

2. Análisis de una sección de hormigón armado

Para el análisis se han considerado las hipótesis: 1) adherencia perfecta entre acero y hormigón; 2) las secciones planas antes de la deformación, permanecen planas después de la deformación; 3) las deformaciones varían linealmente sobre la sección, siendo el valor mínimo en flexión, del extremo más comprimido, de 0,0035, y en compresión de 0,002; 4) no se considera resistencia a tracción para el hormigón; 5) se considera el diagrama parábola rectángulo para el hormigón; 6) se supone que el acero tiene un comportamiento elástico – perfectamente - plástico; 7) no se descuenta de la contribución a los esfuerzos últimos el área de hormigón sustituida por el acero.

Sea la sección indicada en la figura 1. El proceso de análisis comienza con la discretización de la sección de hormigón mediante una malla construida en el dominio de definición de la sección. El algoritmo utilizado para la construcción

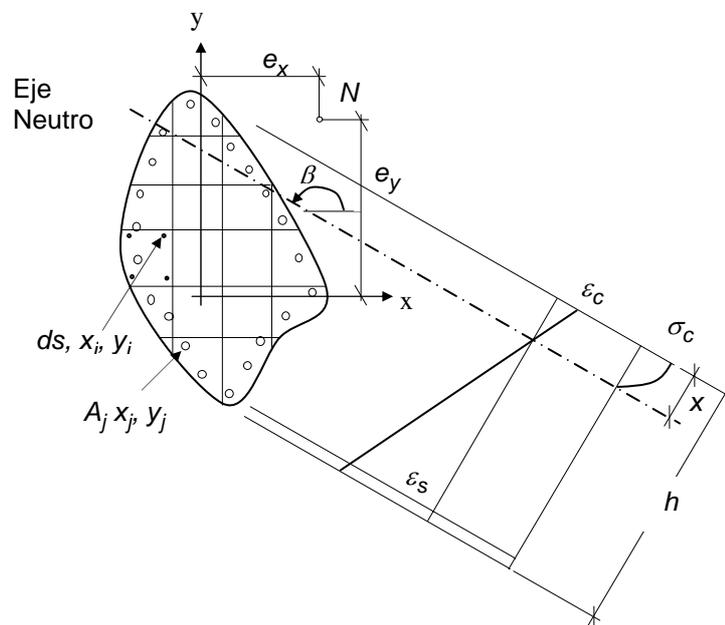


Fig. 1. Sección de hormigón armado

de la malla es del tipo 'mapeo' y función de transporte. Se tiene la posibilidad de discretizar en elementos triangulares lineales o cuadráticos y en elementos cuadrangulares lineales o cuadráticos.

El análisis de la sección consiste en determinar la posición del eje neutro, que dé lugar a unos esfuerzos últimos cuya resultante tenga la misma dirección y el mismo sentido que la sollicitación actuante, verificando las ecuaciones de equilibrio.

Las ecuaciones de equilibrio de una sección de hormigón armado de forma cualquiera con cualquier número y distribución de armaduras, sometidas a flexión uniaxial o biaxial y carga axial, son

$$\begin{aligned} \iint_s \sigma_c(\varepsilon_c) ds + \sum_{j=1}^n \sigma_s(\varepsilon_s) A_j &= N \\ \iint_s \sigma_c(\varepsilon_c) y ds + \sum_{j=1}^n \sigma_s(\varepsilon_s) y_j A_j &= N e_y = M_x \\ \iint_s \sigma_c(\varepsilon_c) x ds + \sum_{j=1}^n \sigma_s(\varepsilon_s) x_j A_j &= N e_x = M_y \end{aligned} \quad (1)$$

siendo:

σ_c, σ_s	tensiones en el hormigón y en el acero;
$\varepsilon_c, \varepsilon_s$	deformaciones relativas del hormigón y del acero;
x_i, y_i	coordenadas del punto de Gauss i ;
x_j, y_j	coordenadas del redondo j ;
N, M_x y M_y	esfuerzo normal y momentos flectores en la sección;
A_j	área del redondo j ;
e_x, e_y	excentricidades respecto a los ejes x e y ;
ds	área de un elemento de hormigón, y
n	número de redondos.

Las integrales han sido resueltas numéricamente mediante el método de Gauss.

3. Formulación del problema de diseño óptimo

El problema de diseño óptimo ha sido formulado integrando el análisis dentro de la optimización. Para ello, se han considerado los parámetros que definen la posición del eje neutro como variables de diseño, evitándose en cada iteración del proceso de optimización determinar la posición exacta del mismo, es decir, se evita tener un proceso iterativo dentro de otro proceso iterativo.

Variables de diseño

Se han considerado variables de geometría, variables de armado y variables de posición del eje neutro.

Como variables de geometría pueden usarse el canto total (h) y el ancho de la sección (b), o también los módulos de los vectores (r_i), que tienen su origen en un punto fijo y su extremo en un punto móvil que define la localización de cada uno de los vértices de la sección (figura 2). La dirección de cada vector se mantiene fija durante todo el proceso de optimización.

Las variables de armado corresponden a las áreas de los redondos distribuidos en la sección, y las variables de posición del eje neutro son $\xi = x/h$ y β .

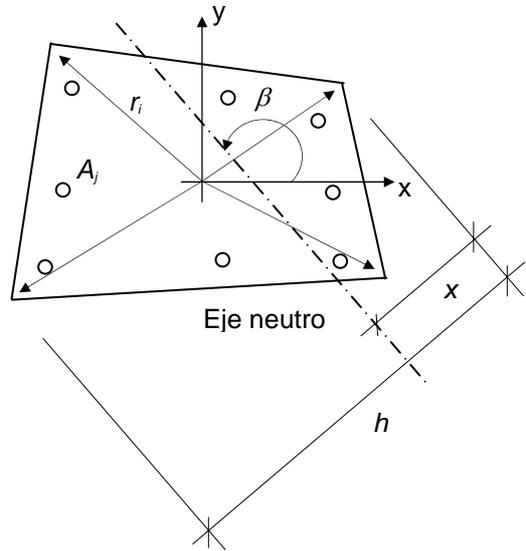


Fig. 2. Variables de diseño

Función objetivo

La función objetivo (F) es el costo del elemento estructural por unidad de longitud. Este costo es la suma del costo del hormigón, costo de la armadura longitudinal y costo del encofrado

$$F = A_c C_c + S_e C_e + \rho_s C_s \sum_{j=1}^n A_j \quad (2)$$

siendo:

A_c	área de la sección;	C_c	costo del hormigón (ptas./m ³);
S_e	superficie a encofrar;	C_e	costo del encofrado (ptas./m ²);
ρ_s	densidad del acero, y	C_s	costo del acero (ptas./N).

El área de la superficie a encofrar es función del tipo de elemento estructural, determinándose como el perímetro a encofrar por la longitud del elemento, en este caso la unidad.

Restricciones

Se han considerado restricciones de resistencia, restricciones de armaduras longitudinales mínimas en tracción y restricciones de borde.

Las restricciones de resistencia y de armaduras longitudinales mínimas en tracción son:

$$N_{ult} \geq N, |e_{2ult}| \geq |e_2|, \frac{M_{2ult}}{M_{1ult}} = \alpha \text{ y } A_s \geq 0,25 \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \frac{W_1}{h} \quad (3)$$

siendo:

$$|M_1| = \max(|M_x|, |M_y|). \text{ El eje 1 es al que corresponde el mayor flector;}$$

M_{1ult} y M_{2ult} momentos últimos máximos y mínimos respectivamente;

$$e_{2ult} = \frac{M_{1ult}}{N_{ult}}; e_2 = \frac{M_1}{N}; \alpha = \frac{M_2}{M_1} \text{ y } W_1 = \frac{I}{d-x};$$

A_s área de acero en tracción, e I momento de inercia de la sección.

4. Ejemplos numéricos

Con el objeto de validar los resultados obtenidos con la formulación desarrollada e implementada, presentada en este trabajo, se ha considerado el problema mostrado en la figura 3, obtenido de la literatura sobre el tema (Horowitz 1989).

Las variables de diseño son indicadas en dicha figura. Los redondos 1, 4, 7 y 10 no varían su área en el proceso de optimización. La tabla 1 resume los casos estudiados.

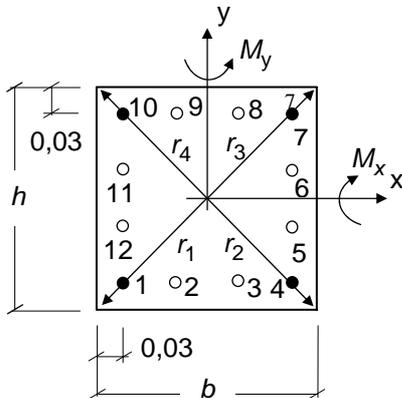


Fig. 3. Sección a optimizar

Tabla 1. Casos estudiados. Variables de diseño

Caso	Armado	Geometría	Eje Neutro
1		-	$\xi \beta$
2	$A_1=A_4=A_7=A_{10}=\text{cte.}$	$b h$	
3	$A_2 A_3 A_5 A_6 A_8 A_9 A_{11} A_{12}$	$r_1 r_2 r_3 r_4$	
4		$r_1 = r_2 \quad r_3 = r_4$	
5		$r_1 = r_4 \quad r_2 = r_3$	

La función objetivo es el costo del elemento estructural por unidad de longitud. Se han considerado restricciones de resistencia, de armadura longitudinal mínima en tracción y de borde.

Los parámetros de cargas son: $N_d = 1135 \text{ kN m}$, $M_{xd} = 92,25 \text{ kN m}$ y $M_{yd} = 115,32 \text{ kN m}$. Los parámetros de materiales son: $E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_c = 2,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $f_{yd} = 420 \text{ MPa}$, $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$ y $\rho_s = 78,5 \text{ kN/m}^3$. Los parámetros de costo son $C_h = 10865 \text{ ptas./m}^3$, $C_e = 4000 \text{ ptas./m}^2$ y $C_s = 14,7 \text{ ptas./N}$.

La sección ha sido dividida en 9 elementos (malla de 3x3) y se han usado 2x2 puntos de Gauss en la resolución numérica de las integrales de las ecuaciones de equilibrio.

5. Resultados

La tabla 2 muestra el diseño óptimo obtenido para cada uno de los cinco casos estudiados. También se incluyen los valores iniciales, máximos y mínimos de las

variables de diseño. En la figura 4 se muestran gráficamente los diseños óptimos obtenidos y la localización del eje neutro en cada uno de ellos.

La figura 5 muestra la pantalla de evolución del proceso de optimización del

Tabla 2. Resultados de la optimización

Variable	Valor Mínimo	Diseño Inicial	Valor máximo	Diseño óptimo				
				Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
$A_{1,4,7,10}$ (m ²)	3,142e-4	3,142e-4	3,142e-4	3,142e-4	3,142e-4	3,142e-4	3,142e-4	3,142e-4
$A_{2,3,5}$ (m ²)	0,0	3,142e-4	3,142e-4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
A_6 (m ²)	0,0	3,142e-4	3,142e-4	3,142e-4	3,142e-4	3,142e-4	3,142e-4	0,0
A_8 (m ²)	0,0	3,142e-4	3,142e-4	2,978e-4	3,142e-4	3,142e-4	3,142e-4	0,0
$A_{9,11,12}$ (m ²)	0,0	3,142e-4	3,142e-4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
r_1 (m)	0,177	0,247	0,353	-	-	0,177	0,177	0,177
r_2 (m)	0,177	0,247	0,353	-	-	0,177	0,177	0,294
r_3 (m)	0,177	0,247	0,353	-	-	0,349	0,299	0,294
r_4 (m)	0,177	0,247	0,353	-	-	0,177	0,299	0,177
h (m)	0,25	0,350	0,50	-	0,315	-	-	-
b (m)	0,25	0,350	0,50	-	0,382	-	-	-
ξ	-1,0	0,584	2,0	0,552	0,552	0,701	0,635	0,625
β (deg)	0,0	129,840	180,0	130,346	140,983		121,128	134,677
F (ptas./m)	-	11240	-	9067	9048	8291	8858	8768

programa desarrollado.

6. Conclusiones

Se ha presentado un procedimiento para el análisis y diseño óptimo integrado de secciones de hormigón armado de forma cualquiera, con cualquier número y distribución de armaduras, sometidas a flexión uniaxial o biaxial y/o carga axial.

Este procedimiento presenta como ventajas principales:

- Una formulación única del problema de análisis y diseño óptimo.
- La utilización de los parámetros que definen la

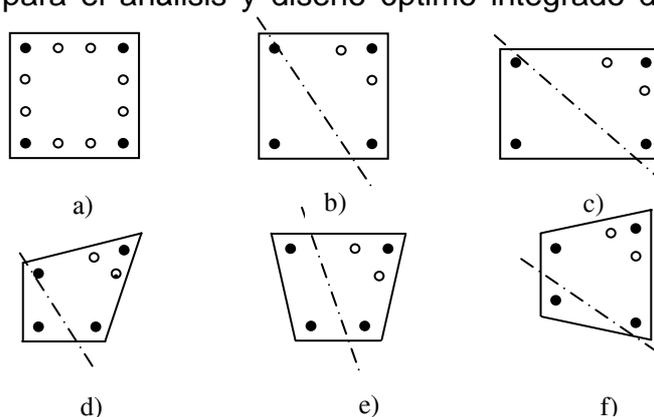


Fig. 4. a) Diseño inicial. b) Caso 1. c) Caso 2.
d) Caso 3. e) Caso 4. f) Caso 5.

posición del eje neutro como variables de diseño evita determinar en cada iteración del proceso iterativo de diseño óptimo la posición exacta del mismo.

- Facilidad de análisis y diseño óptimo de secciones de hormigón armado de forma cualquiera, debido a la discretización de la sección.

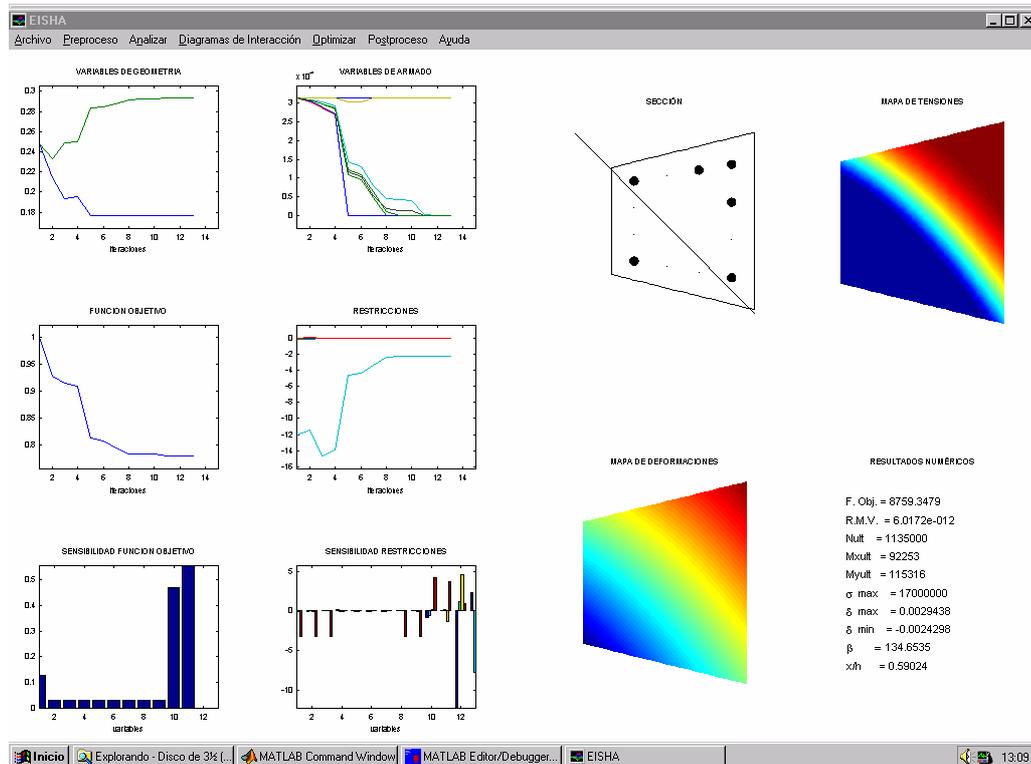


Fig. 5. Pantalla de evolución de la optimización para el caso 5

7. Referencias

Horowitz, B. (1989) "Design of columns subjected to biaxial bending", *ACI Struct. Journal*, 86, (6), 717-722.

MATLAB, (1990) *High-performance numeric computation and visualization software. User's Guide*, The MathWorks, Inc., Natick.

MOPT, (1990) *Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado*, Ministerio de Obras Públicas y Transportes.

Torrano, S., Martí, P. (1998) "Optimal design of shape and reinforcement for concrete sections", *Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics*. Argentina.