

OPTIMIZACION DE MALLAS ESPACIALES DE NUDOS ARTICULADOS

Pascual Martí Montrull  
Pedro P. Company Calleja

E.T.S. de Ing. Industriales (Universidad Politécnica de Valencia)  
Camino de Vera  
46022 VALENCIA

Resumen.- El diseño óptimo de grandes estructuras espaciales de nudos articulados presenta algunas dificultades, debido fundamentalmente al alto número de variables y restricciones.

En esta comunicación se estudia la optimización de mallas espaciales. Se exponen algunas formas de reducir el número de variables y restricciones.

Se expone un criterio de optimalidad, derivado de los de tipo F.S.D. (Fully Stressed Design) que permite considerar las restricciones de tensión, pandeo, esbeltez y constructivas.

Finalmente se comparan los diseños obtenidos con el criterio de optimalidad, con los obtenidos mediante un algoritmo de Programación Matemática no Lineal.

Abstract.- The optimal design of big space trusses present some difficulties, produced by the high number of variables and constraints.

The optimal design of regular space trusses is analysed in this paper. Some methods to reduce the number of variables and constraints are exposed.

An optimality criteria, derived of F.S.D. (Fully Stressed Design) types is exposed. This optimality criteria allows to consider the tension, buckling, slenderness and construction constraints.

Finally a comparation is made between the designs obtained by the optimality criteria and by a Nonlinear Mathematical Programming algorithm.

1. INTRODUCCION

Las dos aproximaciones que se han mostrado más adecuadas para la optimización de estructuras son: la que se basa en el empleo de la Programación Matemática y la que se basa en la obtención de criterios de optimalidad. El empleo conjunto de la Programación Matemática y el análisis por Elementos Finitos permite la realización de cualquier tipo de diseño estructural; sin embargo, su empleo en el diseño de grandes estructuras resulta muy costoso, debido fundamentalmente al alto número de variables y de restricciones. Frente a la Programación Matemática, los Criterios de Optimalidad se obtienen para un tipo particular de problemas, lo que los hace mucho más eficientes en lo referente a costo de análisis.

En la optimización de mallas espaciales, hay ocasiones en que es nece-

sario considerar distintos tipos de variables (de geometría y propiedades) y de restricciones (de tensión, de pandeo, de desplazamiento, constructivas, etc.); en estos casos es muy conveniente el empleo de la Programación Matemática para llegar a un diseño óptimo. Por otro lado, el gran número de elementos, variables y restricciones que aparecen en estas estructuras hace que sea muy costoso el empleo exclusivo de la Programación Matemática.

Frente al problema de tamaño, señalado en el párrafo anterior, hay que tener en cuenta la regularidad y particularidades constructivas de estas estructuras, cuya consideración, al definir la metodología de diseño, puede reducir de forma considerable el costo de análisis.

En esta comunicación se estudia la optimización de mallas espaciales. Se exponen algunas formas de reducir el número de variables y restricciones, así como un criterio de optimalidad, derivado de los de tipo F.S.D. (Fully Stressed Design), que permite considerar las restricciones de tensión, pandeo, esbeltez y constructivas. Finalmente se comparan los diseños obtenidos con el criterio de optimalidad, con los obtenidos mediante un algoritmo de Programación Matemática no Lineal.

## 2. FORMULACION DEL PROBLEMA DE DISEÑO OPTIMO

El problema de minimizar el peso de una estructura puede formularse como el problema de Programación Matemática No Lineal:

Encontrar el vector de variables de optimización  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  que:

minimice la función  $f(\underline{x})$

sujeto a:

$$\begin{aligned} g_j(\underline{x}) &= 0 & j= 1, 2, \dots, m_e \\ g_j(\underline{x}) &\leq 0 & j= m_e+1, \dots, m \end{aligned} \quad (1)$$

$$x_i^i \leq x_i \leq x_i^s \quad i= 1, 2, \dots, n$$

siendo  $f(\underline{x})$  la función objetivo;  $g_j(\underline{x})$  las restricciones de diseño;  $x_i^s(x_i^i)$  el límite superior (inferior) de la variable  $i$ ;  $m_e$  el número de restricciones de igualdad;  $m$  el número total de restricciones, y  $n$  el número de variables. En el caso más general, tanto la función objetivo como las restricciones son funciones no lineales de las variables de optimización.

### VARIABLES DE DISEÑO

En el caso más general, pueden intervenir cuatro tipos de variables:

- de material;
- de topología;
- de geometría;
- de propiedades de la sección transversal de los elementos.

Actualmente, no existen técnicas de optimización que puedan considerar, de forma eficiente, los cuatro tipos de variables de diseño, por lo que es habitual considerar fijos el material y la topología de la estructura, empleando únicamente variables de geometría y propiedades. A pesar de esta simplificación, el tamaño del problema sigue siendo muy grande, por lo que se hace necesario reducir el número de variables.

Dos de los métodos más adecuados para reducir el número de variables de optimización son:

- el agrupamiento de elementos, expresando las propiedades de todos los elementos en función de un número menor de propiedades.
- la reducción del número de variables de propiedades de un elemento o grupo de elementos, refiriéndolas a un número menor de propiedades por cada sección transversal.

Algunas ideas sobre el agrupamiento de elementos pueden encontrarse en la referencia /1/.

La reducción del número de variables de propiedades de una sección transversal se basa en las relaciones que presentan los perfiles correspondientes a una misma gama. La forma operativa consiste en adoptar una de las características de la sección transversal como independiente, y relacionarla con el resto de propiedades mediante expresiones del tipo:

$$D = a V^b \quad (2)$$

siendo  $D$  la variable dependiente y  $V$  la independiente, y obteniéndose los valores de  $a$  y  $b$  mediante ajustes, por mínimos cuadrados, de la gama de perfiles a emplear. En el caso de estructuras de barras de nudos articulados, lo más conveniente es adoptar el área como variable independiente, y obtener el resto a partir de ajustes del tipo (2).

### Restricciones de diseño

En la formulación del problema de optimización (1), una parte de las restricciones de igualdad corresponde al sistema de ecuaciones de equilibrio de la estructura. Puesto que en las mallas espaciales estas ecuaciones pueden resolverse fácilmente para un valor dado de las variables de diseño, es posible eliminar estas restricciones del algoritmo de optimización. Así pues, las únicas restricciones que habrá que considerar serán las de desplazamiento, tensión, pandeo, esbeltez y las debidas a los condicionamientos prácticos de diseño.

En la referencia /1/ puede verse una exposición detallada de la formulación de estas restricciones, así como algunas técnicas que permiten reducir el número total de restricciones a considerar.

### Función objetivo

En general, la función objetivo a minimizar suele asociarse al costo de la estructura. En las mallas espaciales,

este costo es la suma del costo de fabricación de nudos y barras, y del costo de montaje en obra. Puesto que el costo de montaje es difícilmente generalizable, es habitual considerar como función objetivo el peso de la estructura. En los ejemplos que aquí se exponen se ha considerado, exclusivamente, el peso de las barras. En los casos de material y topología fijos y con todos los nudos iguales, esta función objetivo conduce al mismo resultado que la consideración del peso total; sin embargo, cuando se emplean distintos tipos de nudos, se obtienen diseños con pequeñas diferencias respecto del óptimo, ya que el costo de los nudos no es exactamente proporcional al peso de las barras que a ellos concurren.

Así pues, la función objetivo en el caso más general de emplear agrupamiento de variables, viene dada por:

$$f(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{NG} \gamma_k A_{Gk}(x) L_{Gk}(x) \quad (3)$$

siendo:  
 $\gamma_k$  peso específico del material.  
 $A_{Gk}(x)$  área del grupo k.  
 $L_{Gk}(x)$  la suma de las longitudes de los elementos del grupo k.

### 3. RESOLUCION DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACION

Las dos formas de resolver el problema de optimización correspondiente a la formulación (1) son: el empleo de la Programación Matemática no Lineal y los Criterios de Optimalidad.

Existen una gran variedad de algoritmos de Programación Matemática que permiten resolver el problema (1); de todos ellos, uno de los más prometedores consiste en formular y resolver, de forma sucesiva, una serie de subproblemas cuadráticos con restricciones lineales. Este método fue introducido por Wilson /2/ en el año 1963; posteriormente, Han /3/ y Powell /4/ establecieron las bases del método de forma más rigurosa. Los aspectos generales de este método pueden encontrarse en las referencias /5/ y /6/, y su aplicación a estructuras de nudos articulados en las referencias /1/ y /7/.

Los criterios de optimalidad han sido ampliamente usados para la optimización de estructuras de nudos articulados. Los aspectos generales se pueden encontrar, p.e., en las referencias /8/ y /9/.

Uno de los criterios de optimalidad

más utilizados para el caso de restricciones de tensión es el denominado "F.S.D." (Fully Stressed Design), que supone que la estructura óptima es aquella en que cada una de sus barras, o grupo de barras, alcanza su tensión máxima al menos en un estado de carga. Basándose en hipótesis de este tipo, se expone a continuación un algoritmo sencillo que permite considerar, además de las restricciones de tensión, las restricciones de pandeo, de esbeltez y constructivas. Una exposición más completa, sobre todo de los aspectos de implementación en computador, puede encontrarse en la referencia /10/.

#### - Restricciones de tensión

Si  $N_{ij}$  es el esfuerzo en la barra i para el estado de carga j y  $A_k$  es el área del grupo al que pertenece el elemento, la tensión en la barra debe cumplir la condición:

$$\sigma_{ijk} = \left| \frac{N_{ij}}{A_k} \right| \leq \sigma_{u,kj} \quad (4)$$

siendo  $\sigma_{u,kj}$  la tensión máxima (a tracción o a compresión, del grupo de elementos k en el estado de carga j. A partir de esta expresión, el límite inferior del área será:

$$A_{k,T} = \left| \frac{N_{ij}}{\sigma_{u,kj}} \right| \quad (5)$$

#### - Restricciones de pandeo

Si la barra i está comprimida y existe posibilidad de pandeo, la restricción anterior de resistencia pasará a ser de pandeo. Para la consideración del pandeo mediante el método omega de la Norma NBE - MV 103, es necesario el conocimiento de la inercia de la sección. Puesto que solo se consideran las áreas como variables independientes de diseño, las inercias se obtienen mediante ajustes del tipo (2). Conocida la inercia, se puede obtener la esbeltez de la pieza y el coeficiente omega. Una vez conocido el valor de omega, el límite inferior del área debido a la restricción de pandeo será:

$$A_{k,P} = \omega \left| \frac{N_{ij}}{\sigma_{p,kj}} \right| \quad (6)$$

siendo  $\sigma_{p,kj}$  la tensión máxima, para pandeo, del grupo de elementos k para el estado de carga j. Debido a que el coeficiente omega no varía linealmente con la esbeltez, es necesario recurrir a un proceso iterativo; este proceso finaliza cuando la diferencia entre el coeficiente omega empleado para obtener  $A_{k,P}$  en una iteración y el obtenido a partir de esa área, sea suficientemente pequeña.

- Restricciones de esbeltez

Empleando los ajustes del tipo (2), el área mínima debida a la restricción de esbeltez, viene dada por:

$$A_{k,E} = \left[ \frac{L_p}{\lambda_{\max,k} \sqrt{a}} \right]^{2/(b-1)} \quad (7)$$

siendo  $L_p$  la longitud de pandeo de la pieza y  $\lambda_{\max,k}$  la esbeltez máxima admisible (a tracción o a compresión) del elemento.

Considerando las restricciones anteriores y la posibilidad de imponer valores mínimos a las áreas ( $A_{k,C}$ ), el área del grupo  $k$  en la nueva iteración tendrá un límite inferior dado por:

$$A_{k,TPEC} = \max (A_{k,T}, A_{k,P}, A_{k,E}, A_{k,C})_{ij}$$

extendiéndose el segundo miembro a todos los elementos del grupo  $k$ .

- Restricciones de desplazamiento

Una vez obtenido el valor mínimo del área de cada grupo, a partir de las restricciones anteriores, estas restricciones pueden considerarse como valores mínimos de las variables, con lo que la formulación (1) queda como:

minimizar  $f(x)$

sujeto a:

$$\begin{aligned} d_{ij} &\leq d_{ij}^{\max} & i= 1, 2, \dots, \text{NDR} \\ & & j= 1, 2, \dots, \text{NHC} \quad (8) \\ A_k &\geq A_{k,TPEC} & k= 1, 2, \dots, \text{NG} \end{aligned}$$

siendo NDR el número de desplazamientos restringidos. Esta formulación puede resolverse como un problema de minimización con múltiples restricciones de desplazamiento, en el que las restricciones  $A_k \geq A_{k,TPEC}$  se emplean para considerar como "pasivos" a aquellos grupos de elementos, en los que el área  $A_{k,TPEC}$  sea superior a la necesaria por las limitaciones de desplazamiento. El criterio de optimalidad obtenido a partir de la formulación (8) y las relaciones de recurrencia para las variables y los multiplicadores de Lagrange, pueden encontrarse en las referencias /8/ y /9/.

#### 4. EJEMPLOS

Los dos métodos de resolución del problema (1): el empleo de la Programación Matemática no Lineal y de los Criterios de Optimalidad, expuestos en el apartado anterior, están implementados en el Sistema DISSENY /7,11/. En este apartado se exponen una serie de resultados que permiten conocer las posibilidades de cada uno de los métodos

para el diseño óptimo de mallas espaciales.

La estructura a diseñar es la malla representada en la figura 1. La malla está apoyada en todos los nudos del perímetro de la capa superior. Se consideran dos casos distintos de diseño: geometría fija y canto variable.

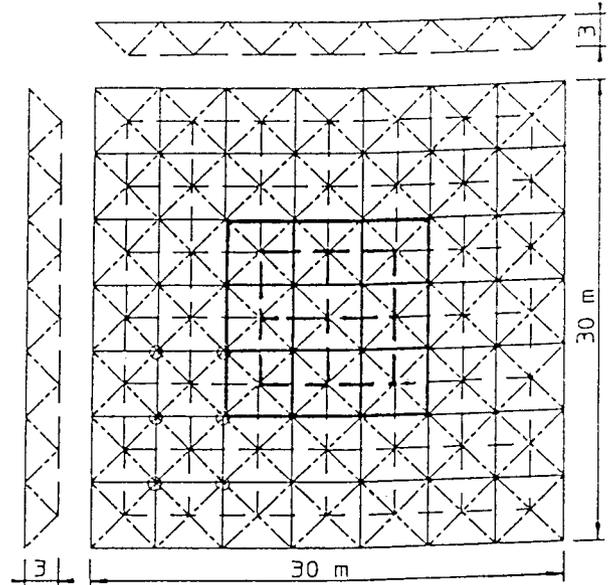


Fig. 1.- Malla espacial

#### Geometría fija

Se consideran cinco variables de diseño. La primera variable está asociada a las áreas de las barras de la parte exterior (líneas finas) de la capa superior; la segunda está asociada a las áreas de las barras de la parte interior (líneas gruesas) de la capa superior; la tercera está asociada con las áreas de las barras diagonales; la cuarta está asociada con las áreas de las barras exteriores (líneas de trazos finas) de la capa inferior, y la quinta está asociada con las áreas de las barras interiores (líneas de trazo grueso de la capa inferior).

Los perfiles utilizados son tubos de 3 mm. de espesor de pared para las diagonales y capa inferior, y de 4 mm. para la capa superior. Como variables independientes se han empleado las áreas de las secciones transversales, obteniéndose las inercias mediante ajustes del tipo (2). Los coeficientes empleados para los ajustes son los de la tabla 1.

El material de la malla es un acero de peso específico  $7.82 \text{ kg/dm}^3$  y un límite elástico de  $2600 \text{ kg/cm}^2$ . El valor del límite alástico se ha utilizado para las tensiones máximas en tracción, compresión y pandeo.

Se han aplicado dos estados de

carga; el primero corresponde a una carga uniforme ponderada de 150 Kg/m<sup>2</sup>, y el segundo a una carga uniforme ponderada de -66.5 Kg/m<sup>2</sup> (succión).

Tabla 1. Coeficientes de los ajustes  
 $I = a A^b$

TUBO	a	b
3 mm.	0.139990	3.004290
4 mm.	0.080257	2.994579

Esta estructura se ha optimizado con los dos métodos del apartado 3, partiendo de tres diseños iniciales distintos, cuyos valores se dan en la tabla 2.

Tabla 2. Diseños iniciales

	C.SUP. (cm <sup>2</sup> ) A <sub>1</sub> /A <sub>2</sub>	DIAG. (cm <sup>2</sup> ) A <sub>3</sub>	C. INF. (cm <sup>2</sup> ) A <sub>4</sub> /A <sub>5</sub>	F. OBJ (T)
1	5.000	5.000	5.000	6.553
	5.000		5.000	
2	15.200	8.190	8.190	13.365
	15.200		8.190	
3	20.000	20.000	20.000	26.211
	20.000		20.000	

El primer diseño inicial corresponde a un diseño imposible, en el que se violan todas las restricciones de tensión; el segundo corresponde al propuesto por la Norma Tecnológica NTE EAE/1986 para la carga de 150 Kg/m<sup>2</sup>, y no viola ninguna restricción; finalmente, el tercer diseño inicial corresponde a un diseño claramente excesivo.

La evolución de los distintos diseños puede verse en la gráfica de la figura 2. Como puede observarse, la velocidad de convergencia es mucho más rápida con el empleo del criterio de optimalidad, y el número de iteraciones es prácticamente independiente del diseño inicial adoptado; por el contrario, la convergencia del algoritmo de P.M.N.L. es más lenta y el número de iteraciones depende fuertemente del diseño inicial adoptado.

Como puede verse en la figura 2, todos los diseños finales son prácticamente iguales.

#### Canto variable

En este caso se consideran seis variables de diseño, las cinco del caso

anterior y otra asociada al canto de la malla. Con el fin de eliminar la simetría de la carga, se añade un tercer estado de carga, compuesto por seis cargas puntuales (gravitatorias) ponderadas de 6 T., aplicadas en los nudos encerrados en un círculo (fig. 1).

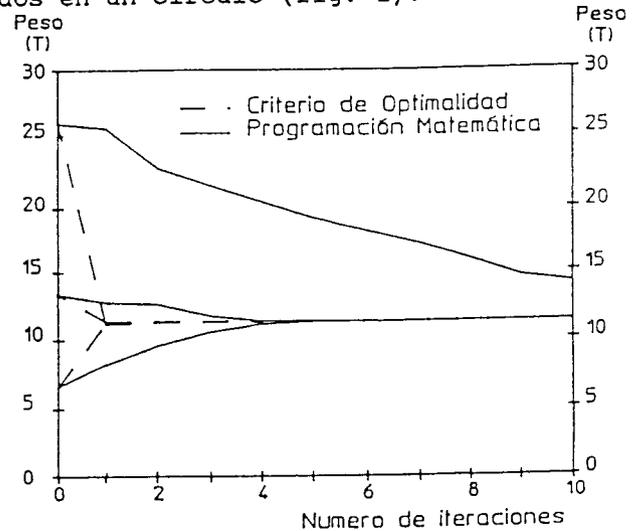


Figura 2. Evolución P.M.N.L. y Criterio de Optimalidad, con distintos diseños iniciales.

En la figura 3 se puede ver la evolución del diseño cuando se emplea P.M.N.L.

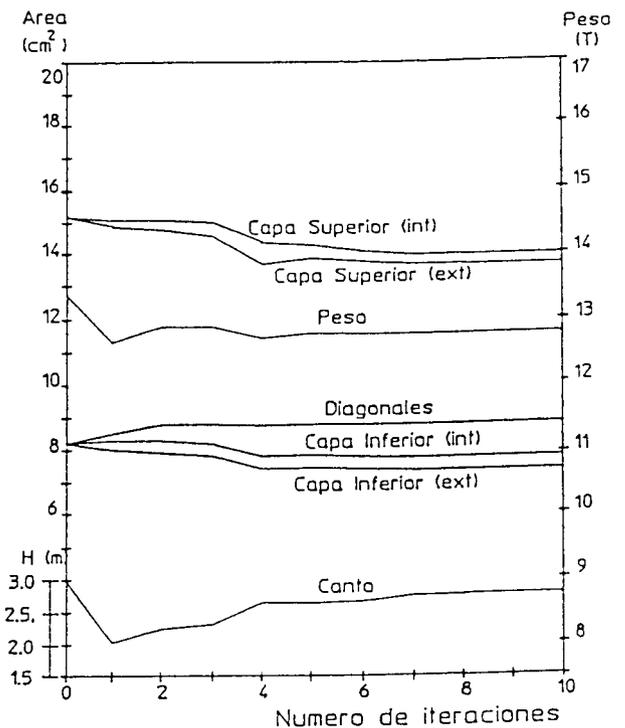


Figura 3. Evolución diseño con geometría variable

Este caso no se puede resolver directamente mediante criterios de opti-

malidad; sin embargo, se puede descomponer en un problema con cinco variables de propiedades y otro con una variable de geometría.

Basandose en que en las mallas espaciales la variación de la función objetivo con el canto es suave, es posible emplear una búsqueda unidimensional mediante ajuste a una función cuadrática /9/, que reduce al mínimo el número de puntos de evaluación de la función objetivo.

Para realizar el ajuste se han obtenido, mediante el criterio de optimalidad, los diseños óptimos de propiedades correspondientes a cantos de 2,3 y 4 m. A partir del ajuste cuadrático de estos valores, se obtiene un canto óptimo de 2.866 m, muy cercano al obtenido con el algoritmo de P.M.N.L.

## 5. CONCLUSIONES

En esta comunicación se estudian algunos aspectos del diseño óptimo de mallas espaciales. Dado el gran número de variables y restricciones que se presentan en este tipo de estructuras, se hace necesario el agrupamiento de variables y restricciones, con el fin de reducir el tamaño del problema de optimización.

Debido a las características particulares de las mallas espaciales, en particular la regularidad geométrica y la variación suave de la respuesta con los cambios de las variables de diseño, resulta muy adecuado emplear criterios de optimalidad.

El criterio de optimalidad expuesto es de gran sencillez y fácilmente implementable en computadores personales. Los resultados de esta algoritmo pueden considerarse como óptimos cuando se trata de problemas en que solo se consideran variables de propiedades.

En los casos en que se emplean variables de geometría, los resultados de esta algoritmo pueden emplearse como diseño inicial para un algoritmo de P.M.N.L., reduciendo de forma importante el número de iteraciones.

En los casos en que se emplean variables de geometría y no se dispone de un algoritmo de P.M.N.L. con restricciones, el algoritmo anterior puede utilizarse para obtener diseños óptimos para valores dados de las variables de geometría. Estos valores se pueden utilizar para obtener, a partir de ajustes cuadráticos, los valores óptimos de las variables de geometría. Este empleo de ajustes cuadráticos resulta muy eficiente debido a la "suavidad" de variación de la función objetivo con las variables de geometría.

## 6. BIBLIOGRAFIA

1. Martí, P.; Company, P., y Mas, F. "Diseño óptimo de estructuras espaciales de nudos articulados con geometría variable". Anales de Ingeniería Mecánica, No. 4 (2), pp. 213-218, 1986.
2. Wilson, R.B. "A simplicial algorithm for concave programming". Ph. D. dissertation, Graduate School of Business Administration. Harvard University, Boston, 1963.
3. Han, S.P. "Superlinearly convergent variable metric algorithm for general nonlinear programming problems". Mathematical Programming, Vol. 11, pp.263-282, 1976.
4. Powell, M.J.D. "A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations". Numerical Analysis. Dundee, 1977. Lecture Notes in Mathematics 630, Ed. G.A. Watson, Springer Verlag, Berlin, 1978, pp. 144-157.
5. Gil, P.E.; Murray, W; Saunders, M.A., y Wright, M.H. "Model building and practical implementation aspects in nonlinear programming". Proceedings of NATO Advanced Studies Institute, Bad Weindsheim, Germany, July 23 - August 2, 1984.
6. Schittkowski, K. "On the convergence of a sequential quadratic programming method with an augmented lagrangian line search function". Systems Optimization Laboratory. Department of Operation Research, Stanford University, Stanford, California 94305, 1982.
7. Martí, P.; Company, P., y Sanchis, M. "Acoplamiento elementos finitos-técnicas de optimización en el sistema DISSENY". II Simposium sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería, Barcelona 9-12 Junio 1986, pp. A-133 a A-147.
8. Gallagher, R.H., y Zienkiewicz, O.C. (Editores). Optimum Structural Design, John Wiley & Sons, 1973.
9. Morris, A.J. (Editor) Foundations of Structural Optimization: A Unified Approach, John Wiley & Sons, 1982.
10. Más, F. Diseño, implementación y prueba de un programa de análisis y diseño de estructuras metálicas de nudos articulados. P.F.C. E.T.S. de Ingenieros Industriales, Valencia, Marzo de 1987.
11. Martí, P.; Company, P., y Sanchis, M. "DISSENY. Un sistema interactivo para el diseño de estructuras basado en técnicas de optimización". Anales de Ingeniería Mecánica, No. 3(1), pp. 285-290, 1985.