

ANÁLISIS DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO DE FORMA CUALQUIERA SOMETIDAS A FLEXOCOMPRESIÓN ESVIADA

S. Torrano y P. Martí

Grupo de Optimización Estructural
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial (ETSII)
Universidad Politécnica de Cartagena
Campus Muralla del Mar, 30202 Cartagena, España
e-mail: santiago.torrano@upct.es, web <http://www.upct.es/~deyc>
e-mail: pascual.marti@upct.es, web <http://www.upct.es/~deyc>

Palabras clave: Hormigón armado, esfuerzos últimos, flexocompresión esviada, forma cualquiera, mallado libre, mallado en bandas.

Resumen. *En este artículo se comparan alternativas para el análisis de secciones de hormigón armado de forma y distribución de armaduras cualesquiera, sometidas a flexocompresión esviada. El sistema no lineal de ecuaciones de equilibrio es resuelto numéricamente mediante el método de Newton-Raphson, pudiendo utilizarse derivadas semianalíticas o numéricas. La integración de las tensiones se realiza numéricamente mediante la cuadratura de Gauss. Dicha integración se puede realizar sobre toda la sección o sobre la zona comprimida exclusivamente. Para la discretización de la sección se ha utilizado un mallador libre y otro en bandas.*

1. INTRODUCCIÓN

El análisis de secciones de hormigón armado ha sido ampliamente tratado en la bibliografía sobre hormigón. No obstante, con el uso generalizado de los ordenadores, aún se sigue investigando para encontrar metodologías y formulaciones que resuelvan el problema del análisis de forma más exacta y/o eficiente [1] [2] [3].

El análisis de una sección de hormigón armado implica determinar la posición del eje neutro mediante un sistema no lineal de ecuaciones. Para una sección de forma y distribución de armaduras cualesquiera, sometida a flexocompresión esviada, el problema no tiene solución analítica, y debe recurrirse a métodos numéricos para su resolución.

Otro problema que se presenta en el análisis de secciones de hormigón armado es la integración de las tensiones en el hormigón. Tradicionalmente se ha resuelto discretizando la sección (bien la sección completa, bien la zona comprimida) e integrando sobre los elementos de la malla generada. Esta malla puede ser obtenida mediante un malla libre o mapeado, o puede estar constituida por bandas paralelas [2] o normales [1] a la fibra neutra. Las integrales son resueltas, generalmente, mediante la cuadratura de Gauss.

En este trabajo el sistema no lineal de ecuaciones se ha resuelto mediante el método de Newton-Raphson, pudiendo utilizarse derivadas semianalíticas o derivadas numéricas por diferencias finitas. Se han comparado tres alternativas para la resolución del problema de integración de las tensiones en el hormigón. En la primera se discretiza toda la sección mediante un malla libre y se integra sobre cada celdilla. En la segunda alternativa se discretiza exclusivamente la zona comprimida, también mediante un malla libre, y en la tercera alternativa se realiza un malla de la zona comprimida mediante bandas paralelas al eje neutro.

Se han implementado las diferentes alternativas en un programa desarrollado en lenguaje Fortran, y se ha analizado la robustez, flexibilidad y costo computacional de cada una de las alternativas.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE ANÁLISIS

2.1 Hipótesis fundamentales

Se han considerado las siguientes hipótesis fundamentales:

- 1) El hormigón es un sólido homogéneo e isótropo.
- 2) Existe una perfecta adherencia entre las armaduras comprimidas y el hormigón que las envuelve.
- 3) Se admite que las deformaciones longitudinales son proporcionales a su distancia al eje neutro.
- 4) Las deformaciones no pueden rebasar unos valores límites. Las tensiones y las deformaciones están ligadas mediante las leyes de comportamiento.
- 5) No se considera la resistencia a tracción del hormigón.

2.2 Ecuaciones de equilibrio

Sea una sección de hormigón armado de forma y distribución de armaduras arbitrarias, sometida, en el caso más general, a una sollicitación de flexión compuesta esviada (figura 1a).

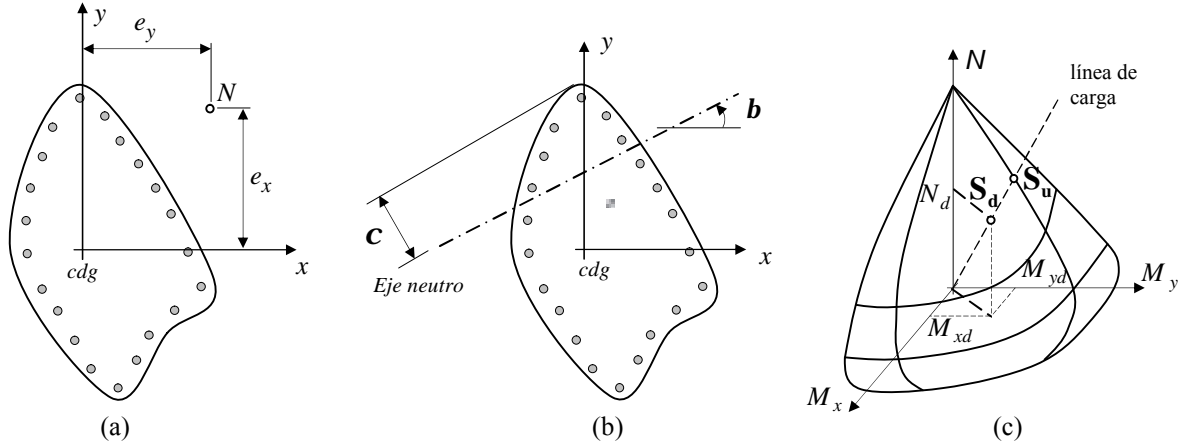


Figura 1. (a) Sección de hormigón armado de forma y distribución de armaduras arbitrarias.(b) Variables que definen la posición del eje neutro. (c) Obtención de los esfuerzos últimos para un determinado camino de carga.

Las ecuaciones de equilibrio son

$$\begin{aligned}
 N &= \iint_s \mathbf{s}_c(\mathbf{e}_c) ds + \sum_{j=1}^{nr} \mathbf{s}_{sj}(\mathbf{e}_{sj}) A_j - \sum_{j=1}^{nr} \mathbf{s}_{cj}(\mathbf{e}_{cj}) A_j \\
 M_x &= \iint_s \mathbf{s}_c(\mathbf{e}_c) y ds + \sum_{j=1}^{nr} \mathbf{s}_{sj}(\mathbf{e}_{sj}) y_j A_j - \sum_{j=1}^{nr} \mathbf{s}_{cj}(\mathbf{e}_{cj}) y_j A_j \\
 M_y &= \iint_s \mathbf{s}_c(\mathbf{e}_c) x ds + \sum_{j=1}^{nr} \mathbf{s}_{sj}(\mathbf{e}_{sj}) x_j A_j - \sum_{j=1}^{nr} \mathbf{s}_{cj}(\mathbf{e}_{cj}) x_j A_j
 \end{aligned} \tag{1}$$

siendo

N	Esfuerzo normal.
M_x, M_y	Momentos flectores alrededor de los ejes x e y respectivamente.
\mathbf{s}_c	Tensión del hormigón.
\mathbf{s}_{cj}	Tensión del hormigón en la posición ocupada por el redondo j .
\mathbf{e}_c	Deformación del hormigón.
\mathbf{e}_{cj}	Deformación del hormigón en la posición ocupada por el redondo j .
\mathbf{s}_{sj}	Tensión en el redondo j .
\mathbf{e}_{sj}	Deformación en el redondo j .
x, y	Coordenadas de un punto de la sección.

x_j, y_j	Coordenadas del redondo j .
A_j	Área del redondo j .
ds	Diferencial de área.
nr	Número de redondos distribuidos en la sección.

Se consideran positivas aquellas solicitaciones que producen compresión en el primer cuadrante.

2.3 Análisis en el Estado Límite Último

Es posible plantear el problema del análisis en el estado límite último de una sección sometida a cualquier tipo solicitación normal, como: *determinar la intersección de la línea de carga con el diagrama o superficie de interacción* (figura 1.c), es decir

$$\mathbf{S}_u - I \mathbf{S}_d = 0 \quad (2)$$

siendo

\mathbf{S}_u	Esfuerzos últimos.
\mathbf{S}_d	Solicitación de cálculo.
I	Factor de carga. Relación de módulos de los vectores acciones de cálculo y esfuerzos últimos.

En la ecuación (2), si partimos de una solicitación de servicio deberá verificarse siempre que $I \geq 1$ para que la sección sea válida desde el punto de vista resistente. No obstante, si lo que deseamos es obtener para un determinado camino de carga los esfuerzos últimos, bastará con que I sea mayor que cero.

2.4 Variables de diseño

Los esfuerzos últimos son función de la posición del eje neutro, la cual queda perfectamente definida por dos variables. En este estudio se utilizarán como variables (figura 1b) la profundidad (c) que es la mínima distancia del punto más comprimido de la sección al eje neutro, y la inclinación (b).

Una tercera variable de diseño utilizada es el factor de carga que asegura que la solución del problema se halle sobre la línea de carga.

3. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE ANÁLISIS

3.1. Ecuaciones de equilibrio en función de las variables de diseño

Desarrollando la ecuación (2), y expresando los esfuerzos últimos en función de c y b , obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 N_{ult}(\mathbf{c}, \mathbf{b}) - I N_d &= 0 \\
 M_{xult}(\mathbf{c}, \mathbf{b}) - I M_{xd} &= 0 \\
 M_{yult}(\mathbf{c}, \mathbf{b}) - I M_{yd} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

con $I > 0$, siendo

- N_{ult} Esfuerzo normal último.
- $M_{xult, yult}$ Momentos flectores últimos.
- N_d Esfuerzo normal de cálculo.
- $M_d, M_{xd, yd}$ Momentos flectores de cálculo.

3.2. Integración de las tensiones

La integración de las tensiones en el hormigón se realiza sobre la sección discretizada. Se han implementado dos algoritmos para la discretización que pueden usarse indistintamente para cualquier sección, basados en:

- a) Triangulación de Delaunay-Voronoi (en adelante mallador libre) (figuras 2a y b).
- b) Mallado en bandas paralelas al eje neutro (figura 2c).

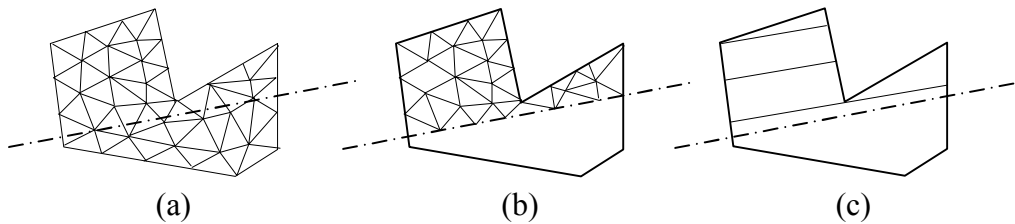


Figura 2. Discretización de la sección. (a) Mallado libre de toda la sección. (b) Mallado libre de la zona comprimida. (c) Mallado en bandas de la zona comprimida.

La sección puede ser mallada completamente o sólo su zona comprimida. En el primer caso, el eje neutro, generalmente, interceptará varias celdillas, lo que puede provocar problemas en la convergencia de los algoritmos de análisis, ya que debido al comportamiento considerado para el hormigón una parte de la celdilla “trabaja” y otra no. Una posible solución es hacer una malla más fina, lo que aumenta el costo computacional y no resuelve adecuadamente el problema. Este inconveniente queda solucionado si se mallan exclusivamente la zona comprimida. En cuanto al mallador de bandas, este problema no afectaría, ya que siempre el eje neutro es un lado de una de las bandas. En este último caso sólo se mallan la zona comprimida, pues un mallado de la zona traccionada carecería de sentido.

Las integrales de superficie expresadas en las ecuaciones de equilibrio (3), en coordenadas locales (haciendo una transformación geométrica) son

$$\begin{aligned}
 N_{ult_h} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\mathbf{x}, \mathbf{h}) |\mathbf{J}| d\mathbf{x} d\mathbf{h} \\
 M_{xult_h} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{h}) |\mathbf{J}| d\mathbf{x} d\mathbf{h} \\
 M_{yult_h} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H(\mathbf{x}, \mathbf{h}) |\mathbf{J}| d\mathbf{x} d\mathbf{h}
 \end{aligned} \tag{4}$$

siendo

N_{ult_h}	Resultante del bloque de compresiones del hormigón.
$M_{xult_h, yult_h}$	Momentos respecto al eje x e y de la resultante del bloque de compresiones del hormigón.
$F(\mathbf{x}, \mathbf{h})$	Integral $\iint_s \mathbf{s}_c(\mathbf{e}_c) ds$ expresada en función de las coordenadas naturales \mathbf{x} y \mathbf{h}
$G(\mathbf{x}, \mathbf{h})$	Integral $\iint_s \mathbf{s}_c(\mathbf{e}_c)_y ds$ expresada en función de las coordenadas naturales \mathbf{x} y \mathbf{h}
$H(\mathbf{x}, \mathbf{h})$	Integral $\iint_s \mathbf{s}_c(\mathbf{e}_c)_x ds$ expresada en función de las coordenadas naturales \mathbf{x} y \mathbf{h}
$ \mathbf{J} $	Determinante de la matriz Jacobiano de la transformación.

Integrando numéricamente con $n \times n$ puntos de Gauss

$$\begin{aligned}
 N_{ult_h} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j F(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_j) |\mathbf{J}(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_j)| \\
 M_{xult_h} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j G(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_j) |\mathbf{J}(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_j)| \\
 M_{yult_h} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j H(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_j) |\mathbf{J}(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_j)|
 \end{aligned} \tag{5}$$

siendo w_i y w_j los pesos de Gauss en las direcciones \mathbf{x} y \mathbf{h} , respectivamente.

4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Para comparar las diferentes alternativas expuestas, se presentan tres ejemplos habituales de la bibliografía sobre análisis de secciones de hormigón.

Sección en L. El primer ejemplo corresponde a una sección en L (ref [1][5]). Se han utilizado derivadas semi-analíticas (SA) y derivadas numéricas (N) por diferencias finitas hacia adelante, integrándose numéricamente desde 2x2 hasta 4x4 puntos de Gauss.

En la figura 4 se representan las mallas finales obtenidas con cada método, y junto a cada una de ellas una tabla con el número de puntos de Gauss utilizados, el % de error de la solución y el tiempo de cálculo consumido, tanto para derivadas semianalíticas como

numéricas.

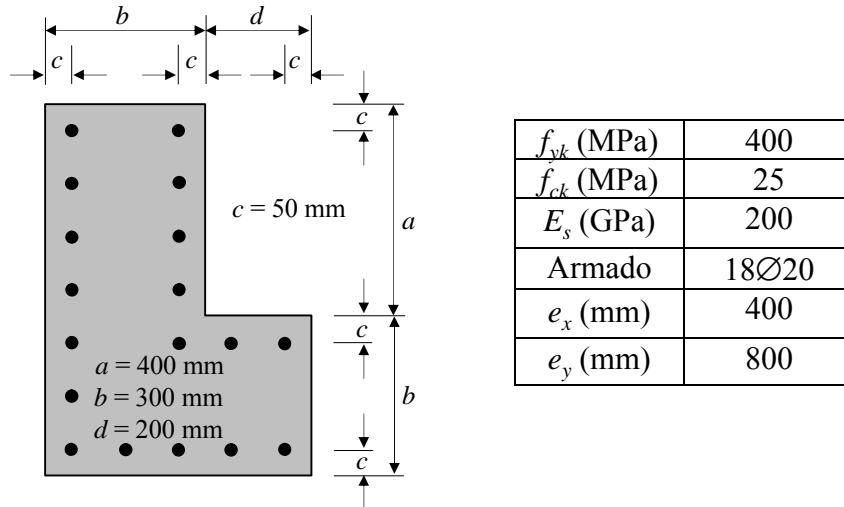
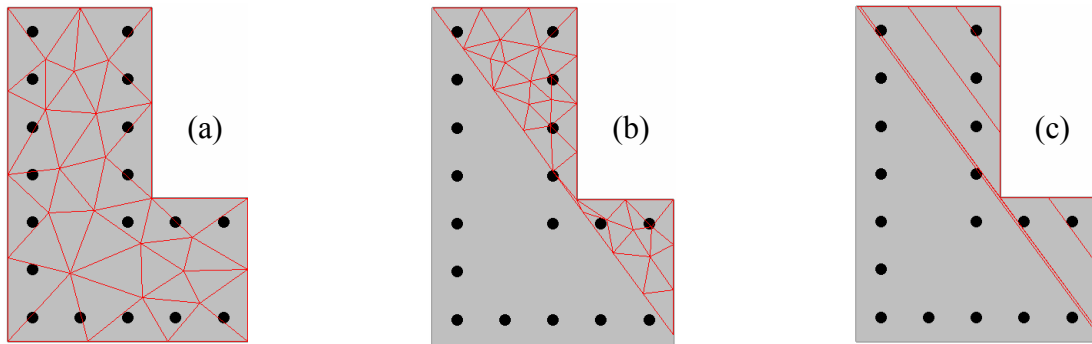


Figura 3. Sección en L.



Der.	nGauss	% Error	t (s)	Der.	nGauss	% Error	t (s)	Der.	nGauss	% Error	t (s)
SA	2x2	0,134	0,500	SA	2x2	0,012	0,906	SA	2x2	0,069	0,390
	3x3	0,008	0,720		3x3	0,026	0,797		3x3	0,008	0,380
N	2X2	0,079	1,640	N	2X2	0,033	1,470	N	2X2	0,079	1,350
	3X3	0,013	1,280		3X3	0,026	1,270		3X3	0,013	1,150

Figura 4. Resultados del análisis de la sección en L. (a) Mallado libre de toda la sección. (b) Mallado libre de la zona comprimida. (c) Mallado en bandas paralelas a la fibra neutra.

De los resultados obtenidos se observa, en todos los casos, el mejor comportamiento, tanto en error como en tiempo de cálculo, obtenido con el empleo de las derivadas semi-analíticas.

Así mismo se observa, en todos los casos, el mejor comportamiento, tanto en error como en tiempo de cálculo, obtenido con el empleo del mallado en banda.

Sección poligonal. El segundo ejemplo corresponde a la sección poligonal de la figura 5 (ref [4]).

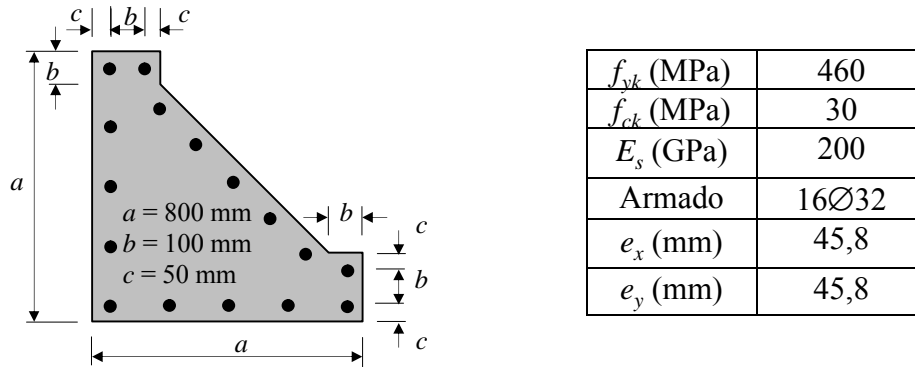


Figura 5. Sección poligonal

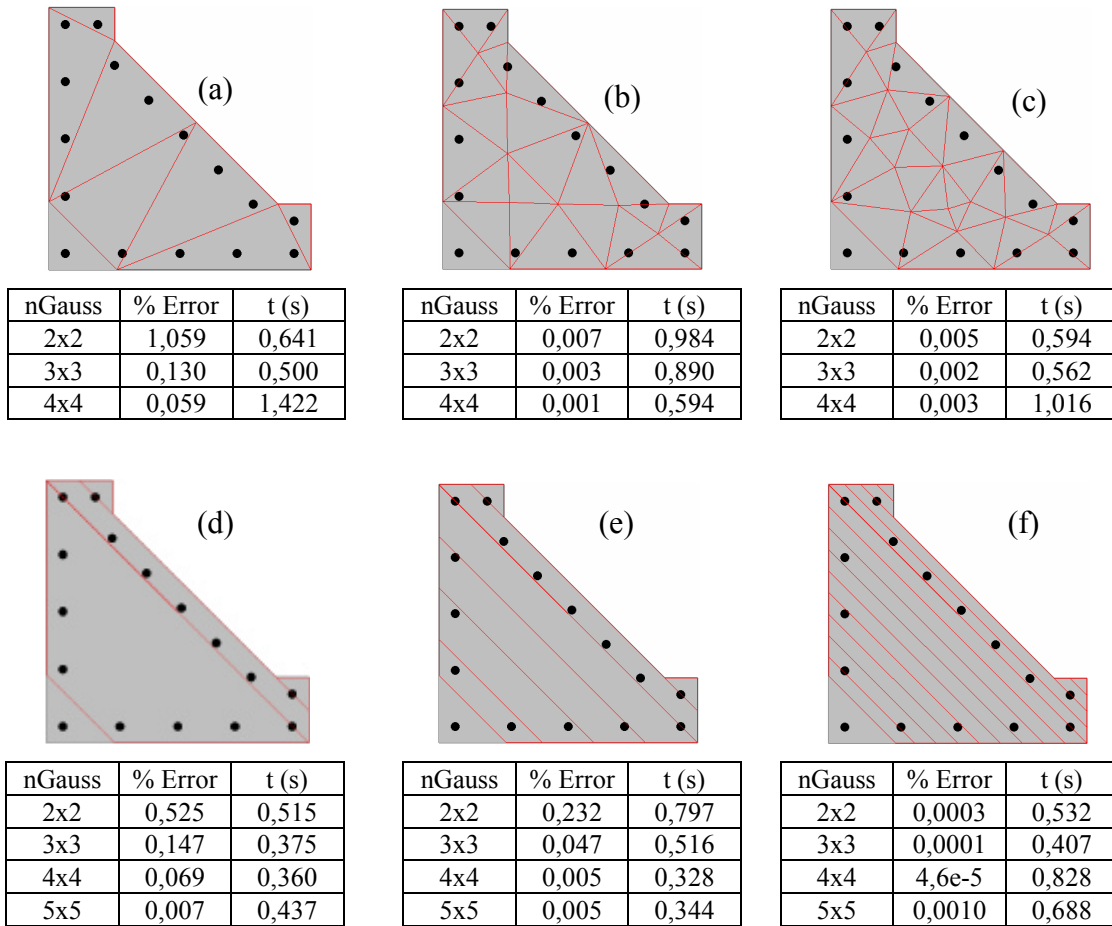


Figura 6. Resultados del análisis de la sección poligonal.

Sección cuadrada hueca. El tercer ejemplo corresponde a la sección cuadrada hueca de la figura 7 (ref. [1][5]).

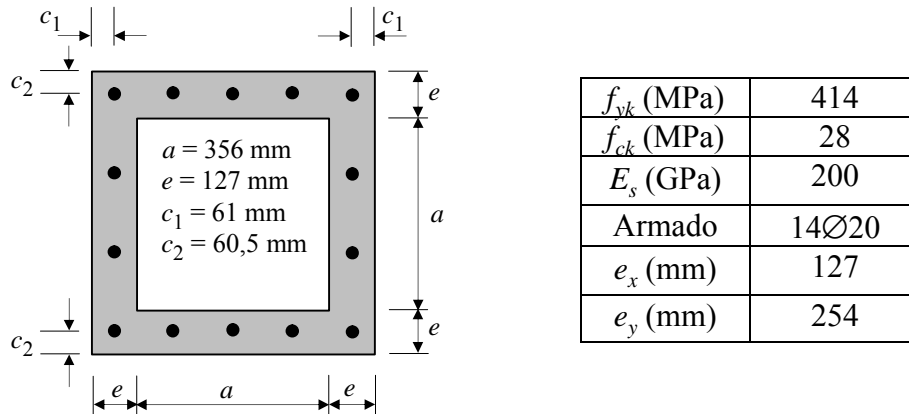


Figura 7. Sección cuadrada hueca.

En las figuras 8a a 8c se muestran las discretizaciones finales (mallado libre) de la zona comprimida, y en las figuras 8d a 8f las discretizaciones finales obtenidas mediante bandas paralelas a la fibra neutra. En la figura 8d, el número de bandas es el mínimo que permite el algoritmo de discretización propuesto. En las tablas que acompañan a cada una de las figuras se muestran los tiempos de cálculo y los errores cometidos. Para la obtención de dichos errores se han comparado los resultados obtenidos en cada uno de los casos anteriores con los de un mallado libre de la zona comprimida con 1726 nodos.

De los resultados obtenidos se deduce que el mallado con el método de bandas, adoptando el mínimo número de bandas y utilizando 2x2 puntos de Gauss, es el que proporciona menores errores con menores tiempos de cálculo.

Los resultados obtenidos para este tipo de sección aconsejan no utilizar más de 3x3 puntos de Gauss para los elementos triangulares, ni más de 4x4 para las bandas.

5. CONCLUSIONES

Del estudio realizado se concluye que el algoritmo basado en la discretización de toda la sección supone un mayor costo computacional que los basados en la discretización de la zona comprimida, a pesar de que en el primer caso la malla es fija en todo el proceso de análisis, mientras que en el de bandas es necesario un remallado en cada paso del proceso iterativo. Esta diferencia de costo computacional es debida al menor número de elementos y de iteraciones necesarias para conseguir una misma precisión.

Para la discretización de la zona comprimida, el mallado en bandas paralelas al eje neutro resulta más eficiente que el mallado libre. Con un número mínimo de bandas y con 3x3 puntos de Gauss se consigue unas buenas precisiones en unos tiempos aceptables.

Aumentando el número de bandas se logran buenas precisiones incluso con 2x2 puntos de Gauss.

Finalmente, indicar que la comparación llevada a cabo en este estudio, tiene como objetivo

encontrar un método rápido, fiable y preciso de análisis de secciones de hormigón armado de forma arbitraria y con cualquier distribución del armado para su posterior implementación en un proceso de optimización de secciones y elementos estructurales [6][7].

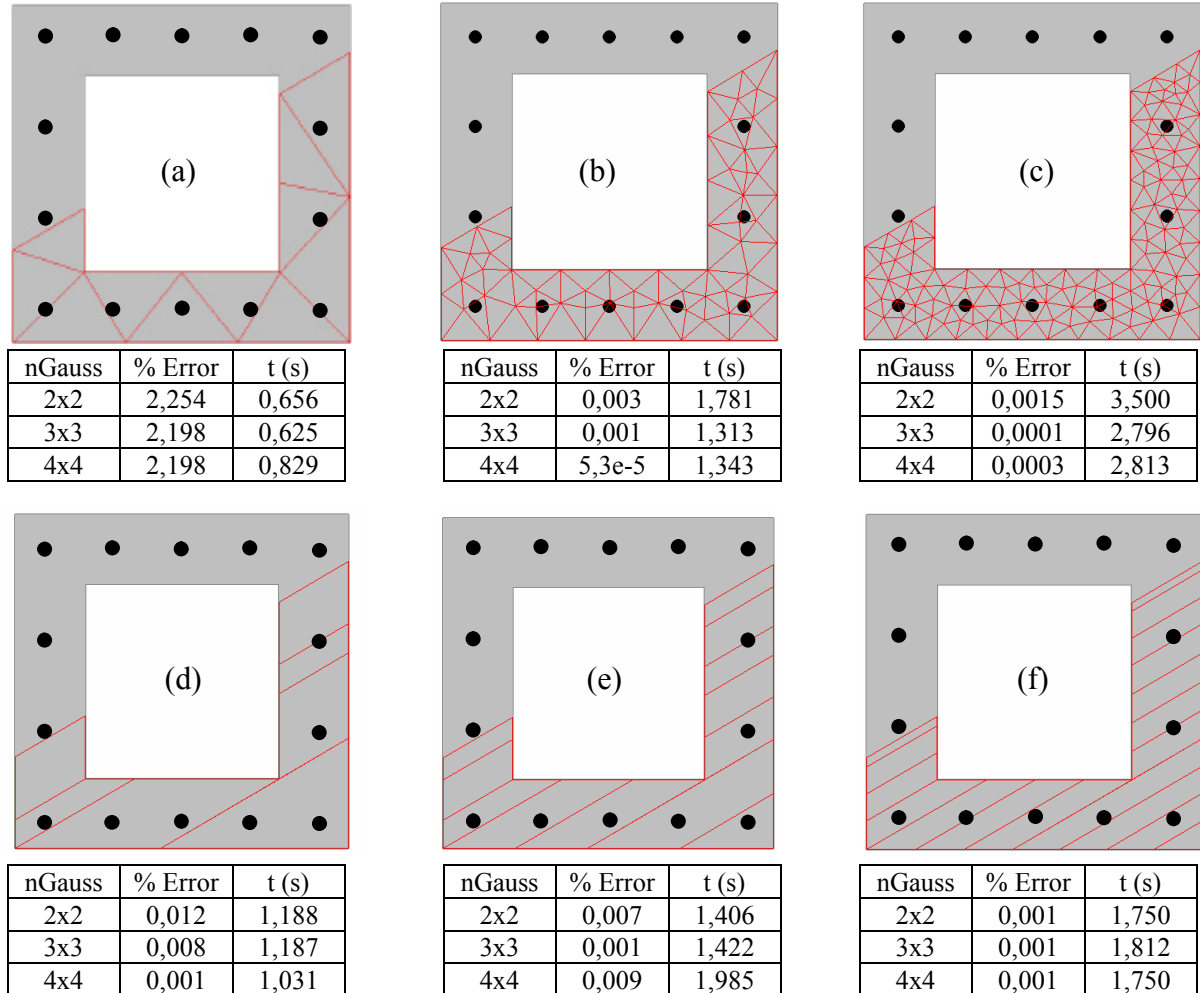


Figura 9. Resultados del análisis de la sección cuadrada hueca.

REFERENCIAS

- [1] J.A. Rodríguez and J. Darío Aristizabal -Ochoa, "Biaxial Interaction Diagrams for Short RC Columns of any Cross Section", *Journal of Structural Engineering*, (June 1999), pp. 672-683.
- [2] P.F. Miguel, J.L. Bonet y M.A. Fernández. "Integración de tensiones en secciones de hormigón sometidas a flexocompresión esviada", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 16, N° 2 (2000), pp. 209-225.

- [3] A. Fafitis. "Interaction Surfaces of Reinforced Concrete Sections in Biaxial Bending", *Journal of Structural Engineering*, (July 2001), pp. 840-846.
- [4] C.Y. Yau; S.L. Ch an and A.K.W. So, "Biaxial Bending Design of Arbitrarily Shaped Reinforced Concrete Column", *ACI Structural Journal*, Vol. 90, N° 3 (1993), pp. 269 - 278.
- [5] F. Barzegar and T. Erasito, "Concrete Sections under Biaxial Bending: Interactive Analysis with Spreadsheets", *Concrete International*, (December 1995), pp. 28-33.
- [6] S. Torrano and P. Martí, "Optimal design of shape and reinforcement for concrete sections". *Computational Mechanics: New Trends and Applications*. E. Oñate and S.R. Idelsohn (Eds.), CIMNE, Barcelona, Spain 1998.
- [7] P. Martí y S. Torrano, "Aplicación de las técnicas de optimización en el proceso de diseño de estructuras". *XVII Congreso Nacional de Ingeniería de Proyectos*, Murcia 19-21 de septiembre, 2001.