*Métodos de dinámica orbital y rotacional 167–173*

# Estabilidad de dos soluciones de equilibrio de un giróstato triaxial con un punto fijo en un campo de potencial $\mathrm{U}^{(3)}$

J. A. Vera y A. Vigueras

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística
Universidad Politécnica de Cartagena

**Abstract**

We consider the problem of motion of a triaxial gyrostat with a fixed point in a Newtonian force field when the potential function is approximated by $\mathrm{U}^{(3)}$. First, we give sufficient and necessary conditions for the existence of two equilibrium solutions. Then, by means of the Energy-Casimir method, we obtain sufficient conditions for the stability of the above equilibria. The obtained results generalize other previous results for rigid bodies or gyrostats in [9], [10], [1] , [2] and [7]. This method presents the advantage of being easy to use; in other way the problem is very difficult because of the complicated expression of the potential function.

## 1 Introducción

Buena parte de la literatura concerniente a problemas de movimiento está dedicada al estudio de integrales primeras, posiciones de equilibrio y su estabilidad para un giróstato con un punto fijo o bien en órbita, así como también al estudio de soluciones periódicas, bifurcaciones, caos, etc., ( ver por ejemplo [1], [3], [4], [5] y [6]).

Rumiantsev, haciendo uso del segundo método de Lyapunov, investiga ciertos movimientos de un giróstato triaxial pesado (el potencial del que derivan las fuerzas es aproximado por $U^{(1)}$) con un punto fijo $O$, así como de un giróstato de revolución. Obteniendo,en el caso triaxial, para la estabilidad de la solución de equilibrio:

$$\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega_3^0, k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 1$$

como condición suficiente de estabilidad que se verifiquen las siguientes desigualdades:

$$(I_3 - I_2)(\omega_3^0)^2 + \omega_3^0 l - m_0 z_0 > 0; (I_3 - I_1)(\omega_3^0)^2 + \omega_3^0 l - m_0 z_0 > 0$$

donde $I_{1,} I_2, I_3$, son los momentos principales de inercia del giróstato $S$ (considerado como un sólido rígido), $(0, 0, l)$ es el momento angular relativo o momento girostático (en el sistema móvil que suponemos solidario con la parte rígida del giróstato y coincidente con el de ejes principales de inercia con origen en $O$), $(x_0, y_0, z_0)$ son las coordenadas del centro de masas en dicho sistema, $m_0 = mg$ con $m$ la masa total del giróstato, $g$ la aceleración de la gravedad a la distancia $r$ del centro de atracción. Más recientemente, en [1] y [2] se aplica el mismo método para estudiar soluciones de equilibrio del problema para el caso simétrico, cuando el potencial es aproximado por $U^{(2)}$, y en [1] para el caso triaxial, bajo el potencial $U^{(2)}$, generalizando el anterior resultado, se obtiene como condición suficiente de estabilidad de dicha solución que se verifiquen las siguientes desigualdades:

$$
\begin{aligned}
(I_3 - I_2)(\omega_3^0)^2 + \omega_3^0 l - m_0 z_0 - m_1(I_3 - I_2) > 0 \\
(I_3 - I_1)(\omega_3^0)^2 + \omega_3^0 l - m_0 z_0 - m_1(I_3 - I_1) > 0
\end{aligned}
$$

donde $m_1 = 3g/r$.

El problema que vamos a considerar en este trabajo es el estudio de la existencia y estabilidad de dos soluciones de equilibrio de un giróstato triaxial con un punto fijo bajo un potencial newtoniano, aproximado este último por $U^{(3)}$.

La aplicación del método de Lyapunov a este último problema es prácticamente inabordable al tener el potencial $U^{(3)}$ una expresión muy complicada. Por ello, vamos a utilizar como herramienta de estudio de la estabilidad el método de la Energía-Casimir (verlo en [7] y [8], o sucintamente en [11] ).

## 2 Ecuaciones de Lie-Poisson y equilibrios.

*Los corchetes de Lie-Poisson para un giróstato con punto fijo, así como la matriz que define el correspondiente tensor de Poisson* $\mathbf{B}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{k})$, *vienen dados en la proposición 2.1 de [11]. Y las ecuaciones de Lie-Poisson, asociadas al hamiltoniano* $h$ *correspondiente, están dadas por las siguientes fórmulas:*

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\pi}} &= -\nabla_{\boldsymbol{\pi}} h \times (\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) - \nabla_{\boldsymbol{k}} h \times \boldsymbol{k} \\
\dot{\boldsymbol{k}} &= -\nabla_{\boldsymbol{\pi}} h \times \boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

*Además, el problema posee las dos funciones de Casimir:*

$$
\phi_1\left((\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{k}\right); \qquad \phi_2\left(\| \boldsymbol{k} \|^2\right)
$$

*siendo* $\phi_1, \phi_2$, *sendas funciones diferenciables. Así, junto con el hamiltoniano, dicho sistema posee en general dos integrales del movimiento en involución. Pues es fácil probar que*

$$
\nabla_{(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{k})}\phi_1\left((\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{k}\right), \nabla_{(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{k})}\phi_2\left(\| \boldsymbol{k} \|^2\right) \in \ker \mathbf{B}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{k})
$$

*Es decir dan campos vectoriales hamiltonianos nulos.*

### *2.1 Determinación de algunas soluciones de equilibrio.*

De las ecuaciones del movimiento correspondientes se deduce, fácilmente, que para todo equilibrio del campo hamiltoniano $X_h$ se verifica que $\boldsymbol{\omega} = \lambda\, \boldsymbol{k}$, siendo $\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\pi_1}{I_1}, \frac{\pi_2}{I_2}, \frac{\pi_3}{I_3}\right)$ la velocidad angular del giróstato $S$ y $\lambda$ real. En particular, cuando el momento girostático sea constante y esté sobre el tercer eje principal de inercia, $\boldsymbol{l} = (0,0,l)$, de dichas ecuaciones se deduce el siguiente resultado:

*Para que los puntos $E_1 = (0,0,\pi_3^0,0,0,1)$ y $E_2 = (0,0,\pi_3^0,0,0,-1)$ de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2$ sean soluciones de equilibrio es condición necesaria y suficiente que se verifiquen las ecuaciones siguientes:*

$$\frac{\partial U}{\partial k_1}(E_1) = \frac{\partial U}{\partial k_2}(E_1) = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial k_1}(E_2) = \frac{\partial U}{\partial k_2}(E_2) = 0.$$

La demostración es inmediata en virtud de las ecuaciones de Lie-Poisson anteriores. En nuestro caso particular, correspondiente a una aproximación de tercer orden del potencial newtoniano, tenemos que:

$$\begin{aligned} U(k_1,k_2,k_3) \quad = \quad & U^{(3)} = mg(x_0k_1 + y_0k_2 + z_0k_3) \\ & +\frac{3g}{2r}(I_1k_1^2 + I_2k_2^2 + I_3k_3^2) \\ & -\frac{3g}{2r^2}\Big((J_{xyy} + J_{xzz} + J_{xxx})k_1 + (J_{yyy} + J_{yzz} + J_{yxx})k_2 \\ & \quad +(J_{zzz} + J_{zxx} + J_{zyy})k_3\Big) \\ & +\frac{5g}{2r^2}\Big(J_{xxx}k_1^3 + J_{yyy}k_2^3 + J_{zzz}k_3^3 + 3J_{xxy}k_1^2k_2 \\ & \quad +3J_{xxz}k_1^2k_3 + 3J_{yyx}k_2^2k_1 + 3J_{yyz}k_2^2k_3 \\ & \quad +3J_{zzx}k_3^2k_1 + 3J_{zzy}k_3^2k_2 + 3J_{xyz}k_1k_2k_3\Big), \end{aligned}$$

donde los $J_{ijk}$ son los productos triples de inercia (ver [5]).

Por tanto, para que $E_1$ y $E_2$ sean soluciones de equilibrio se han de verificar:

$$\begin{aligned} mgx_0 - \frac{3g}{2r^2}(J_{xxx} + J_{xyy} + J_{xzz}) + \frac{15gJ_{xzz}}{2r^2} &= 0, \\ mgy_0 - \frac{3g}{r^2}(J_{yyy} + J_{yxx} + J_{yzz}) + \frac{15gJ_{yzz}}{2r^2} &= 0. \end{aligned}$$

Y si tomamos el centro de masas sobre el tercer eje de inercia $(0,0,z_0)$ tenemos:

$$5J_{xzz} - (J_{xxx} + J_{xyy} + J_{xzz}) = 0,$$

$$5J_{yzz} - (J_{yyy} + J_{yxx} + J_{yzz}) = 0,$$

que son las condiciones geométricas que debe verificar el sistema para que $E_1$ y $E_2$ sean soluciones de equilibrio. Entonces el potencial se reduce a:

$$\begin{aligned} U(k_1, k_2, k_3) &= mgz_0k_3 \\ &+\frac{3g}{r}(I_1k_1^2 + I_2k_2^2 + I_3k_3^2) \\ &-\frac{3g}{r^2}\Big(5J_{xzz}k_1 + 5J_{yzz}k_2 + (J_{zzz} + J_{zxx} + J_{zyy})k_3\Big) \\ &+\frac{5g}{2r^2}\Big(J_{xxx}k_1^3 + J_{yyy}k_2^3 + J_{zzz}k_3^3 + 3J_{xxy}k_1^2k_2 \\ &\qquad +3J_{xxz}k_1^2k_3 + 3J_{yyx}k_2^2k_1 + 3J_{yyz}k_2^2k_3 \\ &\qquad +3J_{zzx}k_3^2k_1 + 3J_{zzy}k_3^2k_2 + 3J_{xyz}k_1k_2k_3\Big) \end{aligned}$$

sujeto a las condiciones anteriores en los productos de inercia.

## 3 Estabilidad de los equilibrios $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$.

### *3.1 Estabilidad de $E_1$*

Esta solución corresponde físicamente al movimiento del giróstato alrededor de la vertical en sentido ascendente. Para aplicar el método de la Energía-Casimir, descrito en [11], sea la función:

$$f := \frac{1}{2}\left(\frac{\pi_1^2}{I_1} + \frac{\pi_2^2}{I_2} + \frac{\pi_3^2}{I_3}\right) + U(k_1, k_2, k_3) + \phi_1\Big((\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{k}\Big) + \phi_2\left(\| \boldsymbol{k} \|^2\right)$$

donde $\phi_1$ y $\phi_2$ son sendas funciones reales, al menos dos veces derivables, a determinar y $U = U^{(3)}$ es el potencial anterior.

Imponiendo la condición de que $\boldsymbol{d}(f)(E_1) = \mathbf{0}$, realizando los cálculos pertinentes(con ayuda de Maple) y denotando por $x = \phi_1'(\pi_3^0 + l)$, $y = 2\,\phi_2'(1)$, tenemos que se han de verificar

$$\begin{aligned} \phi_1'(\pi_3^0 + l) &= x = -\frac{\pi_3^0}{I_3} \\ 2\,\phi_2'(1) &= y = -\frac{2mgz_0r^2I_3 + 6gI_3^2r - 3g(J_{xxz} + J_{yyz} - 4J_{zzz})I_3 - 2(\pi_3^0)r^2(\pi_3^0 + l)}{2r^2I_3} \end{aligned}$$

En tanto que

$$W = \ker \boldsymbol{d}\phi_1\Big((\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{k}\Big)(E_1) \bigcap \ker \boldsymbol{d}\phi_2\left(\| \boldsymbol{k} \|^2\right)(E_1)$$

resulta ser

$$W = \mathbf{span} < (1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0) >$$

La matriz $\boldsymbol{d}^2(f)(E_1)\Big|_{W\times W}$ viene dada por:

$$\boldsymbol{d}^2(f)(E_1)\Big|_{W\times W} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{I_1} & 0 & x & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{I_2} & 0 & x \\ x & 0 & \dfrac{3gI_1}{r} + \dfrac{15gJ_{xxz}}{r^2} + y & \dfrac{15gJ_{xyz}}{r^2} \\ 0 & x & \dfrac{15gJ_{xyz}}{r^2} & \dfrac{3gI_2}{r} + \dfrac{15gJ_{yyz}}{r^2} + y \end{pmatrix}.$$

Estudiando el signo de sus menores principales, obtenemos condiciones suficientes para que dicha matriz sea definida positiva, condiciones que resumimos en el siguiente resultado.

*Una condición suficiente para que la solución de equilibrio $E_1$ sea estable, en sentido de Lyapunov, es que se verifiquen las desigualdades:*

$$\Phi_1 > 0; \qquad \Phi_1\Psi_1 > (15gJ_{xyz})^2,$$

siendo:

$$\Phi_1 = (I_3 - I_1)(\pi_3^0)^2 + l\pi_3^0 - \frac{gI_3^2(2mz_0r^2 + 6(I_3 - I_1)r - 3J_{yyz} - 33J_{xxz} + 12J_{zzz})}{2r^2},$$

$$\Psi_1 = (I_3 - I_2)(\pi_3^0)^2 + l\pi_3^0 - \frac{gI_3^2(2mz_0r^2 + 6(I_3 - I_2)r - 3J_{yyz} - 33J_{xxz} + 12J_{zzz})}{2r^2}.$$

*En particular, cuando $J_{xyz} = 0$, la condición suficiente para la estabilidad anterior se reduce a:*

$$\Phi_1, \Psi_1 > 0.$$

*Y una función de Lyapunov viene dada por la fórmula siguiente:*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi_1^2}{I_1} + \frac{\pi_2^2}{I_2} + \frac{\pi_3^2}{I_3}\right) + U(k_1, k_2, k_3) - \frac{\pi_3^0}{I_3}\left((\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{k}\right) -$$
$$\frac{2mgz_0r^2I_3 + 6gI_3^2r - 3g(J_{xxz} + J_{yyz} - 4J_{zzz})I_3 - 2(\pi_3^0)r^2(\pi_3^0 + l)}{2r^2I_3} \parallel \boldsymbol{k} \parallel^2 .$$

*3.2 Estabilidad de $E_2$*

Procediendo de un modo similar al del párrafo anterior, obtenemos el siguiente resultado:

*Una condición suficiente para que la solución de equilibrio $E_2$ sea estable, en sentido de Lyapunov, es que se verifiquen las relaciones:*

$$\Phi_2 > 0; \qquad \Phi_2\Psi_2 > (15gJ_{xyz})^2,$$

siendo:

$$\Phi_2 = (I_3 - I_1)(\pi_3^0)^2 + l\pi_3^0 + \frac{gI_3^2(2mz_0r^2 + 6(I_1 - I_3)r - 3J_{yyz} - 33J_{xxz} + 12J_{zzz})}{2r^2},$$
$$\Psi_2 = (I_3 - I_2)(\pi_3^0)^2 + l\pi_3^0 + \frac{gI_3^2(2mz_0r^2 + 6(I_2 - I_3)r - 3J_{yyz} - 33J_{xxz} + 12J_{zzz})}{2r^2}.$$

## 4 Conclusiones

Hemos dado condiciones necesarias y suficientes para la existencia de dos soluciones de equilibrio del problema planteado. Asimismo, utilizando el teorema de la Energía-Casimir, hemos obtenido condiciones suficientes para su estabilidad. Derivar dichas condiciones de la manera tradicional, (véase [5]) hubiese sido muy complicado si no imposible. Por otro lado, los resultados obtenidos constituyen una generalización de otros debidos a [9], [10], [1] , [2] y [7]. Basta para ello anular los coeficientes $J_{ijk}$ del potencial de tercer orden $U = U^{(3)}$ obteniéndose resultados válidos para el segundo orden $U = U^{(2)}$ para las soluciones de equilibrio $E_1$ y $E_2$. Se constata aquí una de las diferencias que ocurren al aumentar la aproximación del potencial newtoniano a $U^{(3)}$, es decir, la posibilidad de inestabilidad de la solución $E_2$.

Queda abierto para un trabajo posterior el estudio de condiciones necesarias de estabilidad, mediante la linealización de las ecuaciones de Lie-Poisson en torno a los equilibrios anteriores.


## Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Educación Cultura y Deportes (Proyecto n$^o$ PB98-1576).


## Referencias


[1] Cavas, J. A.: 1995, *Problemas integrables en la dinámica de sólidos rígidos y giróstatos: aplicaciones*, Tesis Doctoral, Universidad de Murcia.

[2] Cavas, J. A., Molina, R. y Vigueras, A.: 1995, "Soluciones de equilibrio y estabilidad de un problema generalizado de Lagrange-Poisson", *Proceedings XIV CEDYA/ IV CMA*, (publicación electrónica de la Universidad Politécnica de Cataluña, http://www.ma1.upc.es/cedya/comu.html); 9 páginas.

[3] Cavas, J. A. y Vigueras, A.: 1994, "An integrable case of a rotational motion analogous to that of Lagrange and Poisson for a gyrostat in a Newtonian force field", *Celes. Mech. & Dyn. Astr.*, **60**, 317–330.

[4] Elipe, A.: 1998, "Hamiltonianos cuadráticos sobre la esfera unidad o Giróstato en movimiento libre: dos problemas equivalentes", *Rev. Academia de Ciencias de Zaragoza*, **53**, 5–28.

[5] Leimanis, E.: 1965, *The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point*, Springer Verlag.

[6] Mondéjar, F., Vigueras, A. y Ferrer, S.: 2001, "Symmetries, Reduction and Relative Equilibria for a Gyrostat in the Three-body Problem", *Celest. Mech. & Dyn. Astr.*, pendiente de publicación.

[7] Ortega, J. P.: 1998, *Symmetry, Reduction and Stability in Hamiltonian systems.* Tesis doctoral, Universidad de California.

[8] Ortega, J. P. y Ratiu, T. S.: 1999, "Stability of Hamiltonian Relative Equilibria", *Nonlinearity*, **12(3)**, 693–720.

[9] Rumiantsev, V. V.: 1961, "On the stability of motion of gyrostats", *J. Appl. Math. Mech.*, **25**, 9–19.

[10] Rumiantsev, V. V.: 1961, "On the stability of motion of certain types of gyrostats", *J. Appl. Math. Mech.*, **25**, 1158–1169.

[11] Vera, J. A. y Vigueras, A.: 2001, "Estabilidad de ciertos equilibrios de un giróstato simétrico bajo un potencial con simetría axial $\mathrm{U}(\mathrm{K}_3)$", en esta publicación.