



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Facultat d'Economia
Departament d'Anàlisi Econòmica

Tesis Doctoral

**Raíces Unitarias, Cointegración y Cotendencias no
Lineales: Un Análisis de la Relación entre el Tipo
de Interés y la Inflación en Europa.**

Presentada por:

Rosa M^a Badillo Amador

Dirigida por:

Dr. Jorge Belaire Franch

Dra. Dulce Contreras Bayarri

Valencia, 2002

Índice General

Introducción	v
1 Contrastes de Raíces Unitarias y Cambios Estructurales	1
1.1 Introducción	3
1.2 Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios es- tructurales	7
1.2.1 Exogeneidad o endogeneidad de la elección del punto de ruptura	21
1.2.2 Situación de la fecha de ruptura en la muestra, magnitud de la ruptura y tamaño muestral	38
1.2.3 Selección del orden de retardos del proceso autorre- gresivo	48
1.2.4 Múltiples puntos de ruptura	52
1.3 Contrastes de estacionariedad en presencia de cambios es- tructurales	60
1.4 Conclusiones	79

Bibliografía	87
Anexo	107
2 Cotendencias no Lineales: Efecto Fisher	129
2.1 Introducción	131
2.2 Efecto Fisher	141
2.3 Puzle de precios	185
2.4 Contraste de cotendencias no lineales	196
2.4.1 Tendencias no lineales	196
2.4.2 Análisis de cotendencias no lineales	203
2.5 Análisis empírico	207
2.5.1 Datos	208
2.5.2 Contrastes de raíz unitaria y de estacionariedad . . .	210
2.5.3 Contraste de cotendencias no lineales	221
2.5.4 Análisis del Puzle de precios	229
2.6 Conclusiones	234
Bibliografía	237
Anexo	259
3 Test de Cointegración CBB	277
3.1 Introducción	279
3.2 Problemática en torno al procedimiento bootstrap para tests de cointegración	282
3.3 Tests de cointegración por bootstrap	294
3.4 Test de Cointegración CBB	316

Índice general

3.5	Análisis de Monte Carlo	321
3.6	Aplicación empírica	327
3.7	Conclusiones	329
	Bibliografía	331
	Anexo	341

Introducción

La determinación del orden de integrabilidad de las series temporales adquiere especial relevancia al tratarse de un paso necesario previo a otros análisis como el de causalidad, cointegración, etc., y al facilitar la determinación del tipo de modelo que debe ser utilizado en un determinado estudio, así como el procedimiento de inferencia que debe tenerse en cuenta en las últimas etapas del análisis de series temporales. Además, en la última década ha surgido un interés especial en el análisis de las relaciones de corto y largo plazo que surgen entre diferentes variables en la actividad económica, adquiriendo aún mayor interés la identificación del verdadero proceso generador de las series implicadas en dichas relaciones. Recientes versiones de las nuevas teorías clásicas del ciclo económico (modelos del ciclo económico real) predicen que muchas variables económicas reales deben presentar una persistencia considerable, es decir, han de tener una raíz unitaria en sus representaciones autorregresivas. Durante las décadas de los años sesenta y setenta, la práctica convencional orientada al estudio de las series temporales consistía en modelizar agregados económicos en primeras

diferencias, es decir, se utilizaban mecanismos de diagnóstico simples, en lugar de contrastes estadísticos formales. Nelson y Plosser (1982) cambian este enfoque informal por un procedimiento basado en tests formales, como el test de Dickey y Fuller (1979) de raíces unitarias.

La presencia de una raíz unitaria en una serie temporal implica que un *shock* que incide en la serie tendrá una elevada persistencia. La medición del impacto que ocasiona un cambio exógeno en una serie temporal en el largo plazo también ha suscitado un interés considerable en los últimos años, ya que algunos autores representan el proceso generador de datos de una serie temporal a través de diferentes modelos dependiendo de la magnitud de las consecuencias que genera el *shock* en las mismas. Así, por ejemplo, si se observa que un *shock* provoca un efecto pequeño sobre la renta, Deaton (1987) representa esta serie como un modelo estacionario alrededor de una tendencia, mientras que si el impacto es más grande, Campbell y Mankiw (1987) la representan como un modelo estacionario en diferencias. Nelson y Plosser (1982) argumentan que la magnitud de un *shock* revela la fuente principal de las perturbaciones en la economía, de manera que si la magnitud es pequeña, la mayor parte de las perturbaciones son de demanda agregada, mientras que si el efecto es más grande, la mayor parte de las perturbaciones son de oferta.

El trabajo de Nelson y Plosser (1982) ha recibido considerables críticas, en especial de Perron (1989) y Rappoport y Reichlin (1989). Según estos autores, Nelson y Plosser (1982) no tienen en cuenta que el comportamiento de un gran número de series macroeconómicas puede verse afectado, en al-

Introducción

gún momento del tiempo, por determinados eventos. Además, añaden que el test de Dickey-Fuller tiene baja potencia si no se tiene en cuenta una posible ruptura en la serie, por lo que si el modelo que representa el verdadero proceso generador de la serie es estacionario, aunque afectado por una ruptura estructural, los estimadores de los parámetros autorregresivos tienden, asintóticamente, a valores próximos a la unidad. Por consiguiente, según Perron (1989) el comportamiento aparente de "raíz unitaria" que encuentran Nelson y Plosser en 13 de 14 series macroeconómicas estadounidenses es debido a que no tienen en cuenta la presencia de un cambio estructural, de manera que si se prescindiera de aquellos datos que representan un comportamiento anómalo en la evolución de la serie, a través de la inclusión de variables ficticias, aquélla presentaría un comportamiento estacionario.

A raíz de los trabajos de Perron (1989) y Rappoport y Reichlin (1989) han surgido otros que desarrollan procedimientos para contrastar si una serie es o no estacionaria, determinando el punto de ruptura de manera endógena, es decir, en función de los datos, como los trabajos de Banerjee *et al.* (1992), Christiano (1992), Perron y Vogelsang (1992) y Zivot y Andrews (1992), entre otros.

Aunque el número de estudios relativos a los contrastes de raíces unitarias que tienen en cuenta la posible existencia de rupturas estructurales en las series son menos numerosos, no existe un consenso claro sobre cuál es el "mejor" test que debe ser aplicado a una serie temporal, ya que las propiedades de la mayoría de estos tests dependen, entre otros factores, del tipo de ruptura (en la media o en la pendiente de la serie), de su magnitud,

de la ubicación de la misma en la muestra, del número de rupturas que presenta la serie, de la determinación exógena o endógena de la misma e incluso del tamaño muestral. La no consideración de estas rupturas en las series lleva, por ejemplo, a que algunos autores consideren relaciones de cointegración entre variables para las que los contrastes de raíces unitarias que utilizan ponen de manifiesto que son procesos integrados de orden unitario (I(1)), mientras que otros autores, a través de diferentes contrastes, obtienen que estas series son estacionarias y, por tanto, no tendría sentido analizar relaciones de cointegración entre ellas. De ahí la importancia de considerar la posible existencia de rupturas estructurales en las series y de conocer cómo inciden diferentes características de las mismas en las propiedades de los tests de raíces unitarias. Con el fin de arrojar luz sobre esta cuestión, en el Capítulo 1 llevamos a cabo una recopilación estructurada de la información más relevante sobre las propiedades de diferentes contrastes de raíces unitarias y de estacionariedad cuando una serie temporal se ve afectada por cambios estructurales. A fin de completar este análisis, efectuamos varios estudios de simulación que nos permitan inferir las propiedades de tamaño y potencia de algunos de los tests más utilizados en la literatura.

La relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación ha sido analizada por muchos autores y desde puntos de vista muy diferentes a lo largo de la historia. Esta relación adquiere especial relevancia desde que Irving Fisher (1896, 1930) formulara la noción de tipo de interés real. La versión más clásica de la denominada "hipótesis de Fisher" o "efecto

Introducción

Fisher” postula que la tasa de inflación esperada es absorbida completamente por el tipo de interés nominal en el largo plazo, lo que da lugar a la aparición de una relación de tipo uno a uno entre ambas series. Es decir, esta hipótesis supone que el tipo de interés real permanece constante en el largo plazo, no viéndose afectado por los cambios en las expectativas de inflación. Desde que Fisher enunciara su hipótesis, se ha desarrollado un amplio rango de modelos económicos que la utilizan cuando consideran la decisión de los agentes económicos individuales en relación a su inversión, ahorro y reasignación de su cartera. También se ha utilizado la hipótesis de Fisher en modelos de precios de opciones, en el ámbito de las finanzas, y en teorías modernas que desarrollan objetivos de inflación, por nombrar algunas de ellas. La literatura macroeconómica relativa al papel que juega el tipo de interés real en los modelos de Teoría Económica es muy amplia, especialmente en lo referente a la diversidad de procedimientos para caracterizar sus propiedades de dependencia temporal. Sin embargo, existe una falta de consenso en los estudios empíricos relativos al efecto Fisher, fundamentalmente, por las dificultades que implica su estudio como consecuencia del comportamiento, aparentemente no estacionario, del tipo de interés nominal y de la tasa de inflación y por el hecho de que el tipo de interés real *ex-ante* dependa de las expectativas de inflación, que son difíciles de cuantificar de forma directa.

El objetivo principal del Capítulo 2 es analizar si existe una relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en Alemania, España, Francia y Reino Unido que sea consecuencia de la existencia de una ten-

dencia no lineal común entre ambas series, ocasionada por efecto de algún tipo de *shock* estructural exógeno y si, efectivamente, se puede hablar de efecto Fisher. La importancia de este estudio radica en que, hasta la fecha, en Europa no se ha aplicado esta metodología para determinar una posible relación entre estas dos series, tratándose de un trabajo innovador que aporta un enfoque de estudio diferente sobre el análisis del efecto Fisher. El test no paramétrico elaborado por Bierens (2000) permite hallar posibles tendencias no lineales comunes entre diferentes series macroeconómicas, de manera que si estas series son el tipo de interés nominal y la tasa de inflación, y ambas son estacionarias alrededor de una tendencia determinista no lineal, dicho test permite encontrar una posible combinación lineal entre ellas que sea estacionaria alrededor de una tendencia lineal o una constante. Sin embargo, la aplicación de este contraste requiere partir del supuesto de que ambas series son estacionarias en torno a una tendencia no lineal, supuesto que no se descarta al aplicar algunos contrastes de raíces unitarias y de estacionariedad. Adicionalmente, otro de los objetivos perseguidos en el Capítulo 2 es determinar si en aquellos países para los que existe una cointendencia no lineal entre el tipo de interés y la tasa de inflación, se produce el fenómeno denominado como *puzle de precios*, es decir, si en el entorno de los modelos VAR un *shock* que perturba al tipo de interés nominal tiene un efecto positivo en la tasa de inflación.

En el Capítulo 3 proponemos un nuevo test de cointegración, basado en el test de raíces unitarias, que utiliza el procedimiento *continuous path block bootstrap* (CBB), desarrollado por Paparoditis y Politis (2001) y lo

Introducción

aplicamos a la tasa de inflación y tipo de interés nominal de los países considerados en el Capítulo 2, es decir, Alemania, España, Francia y Reino Unido. Para ello, partimos del supuesto de que el tipo de interés nominal y la tasa de inflación presentan una raíz unitaria, supuesto que tampoco se descarta al aplicar otro conjunto de contrastes de raíces unitarias y de estacionariedad. El procedimiento no paramétrico CBB permite generar pseudo-series integradas de orden unitario manteniendo las características más importantes de los datos. Por tanto, el CBB puede captar la distribución de algunos estadísticos de raíces unitarias y, por ende, puede ser utilizado para detectar si el término de perturbación aleatoria de la regresión de cointegración es $I(1)$ o $I(0)$, o lo que es lo mismo, permite detectar la presencia de un vector de cointegración entre dos series temporales. Previamente a su aplicación empírica, llevamos a cabo un estudio relativo a las propiedades de potencia y tamaño de este método, a través de experimentos de Monte Carlo, y las comparamos con las de otros tests, como el test Dickey-Fuller Ampliado (DFA), de Said y Dickey (1984), y el test del máximo autovalor ($\lambda_{máx}$) de Johansen (1988, 1991) y Johansen y Juselius (1990, 1992). Las conclusiones que se obtienen en el Capítulo 3, al tratar de hallar una relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en Alemania, España, Francia y Reino Unido son diferentes a las extraídas en el Capítulo 2. Con ello mostramos que se pueden obtener resultados diferentes si se parte de supuestos distintos sobre el proceso generador del tipo de interés nominal y de la tasa de inflación, supuestos que no se pueden descartar en virtud de los resultados obtenidos al aplicar una amplia batería de contrastes de raíces unitarias, lo que permite hacer uso

de procedimientos metodológicos diferentes que tratan de hallar relaciones entre estas series.

Por tanto, este trabajo orientado a la relación entre diferentes series temporales, como son el tipo de interés nominal y la tasa de inflación, pretende llamar la atención en la necesidad de seguir profundizando en el análisis de los contrastes de raíces unitarias, teniendo en cuenta que cuando se eligen series con un gran número de observaciones es difícil que no se hayan visto afectadas, en algún momento del tiempo, por algún *shock* exógeno. Ello origina una alteración de las propiedades de estos contrastes y, por ende, de las hipótesis de partida de los procedimientos utilizados para hallar relaciones entre varias series temporales.

CAPÍTULO 1

**Contrastes de Raíces Unitarias
y Cambios Estructurales**

1.1 Introducción

El comportamiento de la mayor parte de las series macroeconómicas se puede ver afectado, en algún periodo del tiempo, por determinados eventos (como la Gran Depresión de los años treinta, los *shocks* del petróleo, en los años setenta, etc.), que dificultan el conocimiento de su verdadero proceso generador. La necesidad de identificar si una serie es estacionaria o, por el contrario, presenta una o más raíces unitarias trasciende al ámbito de la Teoría Económica, de ahí la importancia de conseguir un consenso en este tipo de estudios.

La evidencia empírica pone de manifiesto que la mayor parte de las series económicas agregadas contienen una raíz unitaria. Pero este comportamiento de las series no se puede generalizar a todas ellas y es necesario llevar a cabo un estudio previo sobre su verdadero proceso generador con el fin de poder analizar, entre otros aspectos, la respuesta de una serie temporal a determinados tipos de *shocks*, las consecuencias de la aplicación de determinadas actuaciones de política económica, etc.

Existe un interés considerable en poder medir el impacto que ocasiona un cambio exógeno en una serie temporal en el largo plazo, ya que algunos autores representan el proceso generador de datos (p.g.d.) de una serie temporal a través de diferentes modelos dependiendo de la magnitud de las consecuencias que genera el *shock* en las mismas. Así por ejemplo, si se observa que un *shock* provoca un efecto pequeño sobre la renta, Deaton

(1987) representa esta serie como un modelo estacionario alrededor de una tendencia (TS), mientras que si el impacto es más grande, Campbell y Mankiw (1987) la representan como un modelo estacionario en diferencias (DS). Nelson y Plosser (1982) argumentan que la magnitud de un *shock* revela la fuente principal de las perturbaciones en la economía, de manera que si la magnitud es pequeña, la mayor parte de las perturbaciones son de demanda agregada (por ejemplo, *shocks* de dinero, cambios en el gasto público, variaciones en las preferencias de los consumidores, etc.), mientras que si el efecto es más grande, la mayor parte de las perturbaciones son de oferta (por ejemplo, *shocks* tecnológicos, enfatizados por Prescott, 1986)¹.

Cuando se trata de determinar el p.g.d. de una serie temporal mediante el uso de contrastes de raíces unitarias o de estacionariedad, es importante tener en cuenta que la omisión de los posibles cambios estructurales que puede presentar dicha serie por efecto de un *shock*, ya sea en su intercepto o en su tendencia, produce errores en el comportamiento de estos tests, por lo que pueden transmitir una información errónea sobre su verdadero p.g.d. Por ello, uno de los temas que ha suscitado mayor discusión en la Teoría Econométrica y aún, en la actualidad, continúa siendo objeto de numerosos debates es el desarrollo de tests de raíces unitarias y de estacionariedad cuando la variable objeto de estudio presenta cambios estructurales.

La detección del posible punto de ruptura que puede presentar una serie como consecuencia de un suceso exógeno también es un tema muy debatido

¹Para mayor discusión ver Deaton (1987) y Nelson y Plosser (1982), Christiano y Eichenbaum (1990) y Quah (1990), así como las referencias citadas por estos autores.

1.1. Introducción

en la literatura econométrica. Así, si la duración de la ruptura es desconocida se puede ver, por ejemplo, Quandt (1960), Hinkley (1969, 1970), Brown, Durbin y Evans (1975), Hawkins (1977), Worsley (1979), Kim y Siegmund (1989), Andrews (1993) y Andrews y Ploberger (1994). Cuando existe una ruptura, se han desarrollado algunos trabajos basados en la estimación de la localización de la misma, como el de Feder (1975), Yao (1987), Eubank y Speckman (1994) y Bai (1994). Los últimos trabajos, basados en una estructura paramétrica, utilizan funciones de pérdida cuadráticas, pero la robustez de los estimadores es considerada en los trabajos de Bai (1995), Antoch y Huskova (1997) y Fiteni (1998), entre otros. Sin embargo, también se han desarrollado trabajos que estudian los cambios estructurales en modelos de tendencia no paramétricos como los de Yin (1988), Müller (1992), Chu y Wu (1993) y otros más recientes como el de Delgado e Hidalgo (2000). Sin embargo, no es objeto del presente trabajo indagar en los procedimientos que permiten la detección de rupturas estructurales.

Debido a la gran diversidad de estudios existentes en la literatura econométrica relativos al análisis sobre el impacto que ocasiona la presencia de uno o más cambios estructurales en las propiedades de los contrastes de raíces unitarias y de estacionariedad y el hecho de que no exista un consenso claro sobre el test más apropiado para determinar el verdadero p.g.d. de una serie temporal, creemos necesario llevar a cabo una recopilación y estructuración de la información más relevante sobre el comportamiento de estos contrastes. Así, el presente Capítulo tiene como objetivo arrojar luz en relación a la problemática existente sobre la determinación del orden de

integración de una serie temporal, cuando ésta se ve afectada por algún *shock* exógeno que altera su comportamiento en algún periodo del tiempo. La importancia de este estudio radica, principalmente, en que la determinación del orden de integrabilidad de las series temporales es un paso necesario previo a otros análisis como el de causalidad, cointegración, etc., además de que el conocimiento del verdadero p.g.d. de una serie facilita la determinación del tipo de modelo que debe ser utilizado en un determinado estudio, así como el procedimiento de inferencia que debe tenerse en cuenta en las últimas etapas del análisis de series temporales. A tal efecto, la Sección 2 del presente Capítulo resume las características principales de los contrastes de raíces unitarias más utilizados en la literatura econométrica ante la presencia de rupturas en las series temporales. Con el fin de complementar dicho estudio, en esta Sección también exponemos las conclusiones que extraemos tras realizar experimentos de simulación de Monte Carlo con el fin de determinar las propiedades de algunos de estos tests, cuando se utilizan series temporales que tienen un número reducido de observaciones y éstas ven alterado su comportamiento por cambios derivados de algún *shock* exógeno. La Sección 3 se centra en el estudio relativo a las características de los principales contrastes de estacionariedad cuando existen rupturas estructurales en la tendencia de las series temporales. Sin embargo, debido al vacío existente en la literatura econométrica en relación al impacto que tiene sobre estos tests la alteración que sufre el componente tendencial de una serie por efecto de un *shock* exógeno, y con el fin de suplir dicho vacío, también llevamos a cabo experimentos de Monte Carlo y obtenemos las propiedades de tamaño y potencia de algunos de estos tests.

La Sección 4 recoge las conclusiones del Capítulo.

1.2 Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

A raíz de la publicación de Nelson y Plosser (1982), en la que se analizan las propiedades dinámicas de determinadas series temporales macroeconómicas y financieras, han surgido numerosos estudios al respecto. El enfoque tradicional considera que los *shocks* corrientes únicamente provocan efectos temporales en las series y, por consiguiente, no inciden en el comportamiento a largo plazo de las mismas. Otros autores, como Campbell y Mankiw (1987, 1988), Clark (1987), Cochrane (1988), Shapiro y Watson (1988) y Christiano y Eichenbaum (1990), consideran que los *shocks* corrientes son una combinación de *shocks* temporales y permanentes, y que las respuestas de una serie a los *shocks* corrientes, en el largo plazo, dependen de la importancia relativa del tamaño de estos dos tipos de *shocks*. Nelson y Plosser (1982) cambian el enfoque tradicional, al argumentar que si se utilizan las técnicas estadísticas desarrolladas por Dickey y Fuller (Dickey, 1976; Fuller, 1976; Dickey y Fuller, 1979, 1981), a partir de ahora DF, se puede concluir que los *shocks* corrientes tienen efectos en el comportamiento a largo plazo de la mayor parte de las series macroeconómicas y financieras. De hecho, Nelson y Plosser (1982) aplican el test DF a 14 series temporales anuales, no rechazando la hipótesis nula (H_0) de raíz unitaria para todas ellas, excepto para una de las series. Estos resultados no cambian si se

tiene en cuenta la autocorrelación del término de perturbación aleatoria de los respectivos procesos generadores, al aplicar el test ampliado de Said y Dickey (1984), a partir de ahora test DFA, el de Phillips (1987) y el test de Phillips y Perron (1988)². Otros autores obtienen resultados similares a los de Nelson y Plosser (1982) al analizar otras series económicas temporales³.

Los primeros estudios que ponen en cuestión las conclusiones extraídas por Nelson y Plosser (1982) son los de Perron (1989) y Rappoport y Reichlin (1989), al considerar que un test de raíz unitaria que no tiene en cuenta una posible ruptura en la serie tiene baja potencia, por lo que, si el modelo que constituye el verdadero p.g.d. es estacionario, aunque afectado por una ruptura estructural, los estimadores de los parámetros autorregresivos tienden, asintóticamente, a valores próximos a la unidad. Perron (1989) argumenta que si se prescindiera de aquellos datos que representan un comportamiento anómalo en la evolución de la serie, a través de la inclusión de variables ficticias, aquélla presentaría un comportamiento estacionario. Así, Perron (1989) propone contrastar la H_0 de que una serie $\{y_t\}_1^T$, que presenta una ruptura estructural en el periodo $1 < k < T$, posee una raíz unitaria con un cambio en la deriva en el periodo k versus la hipótesis alternativa (H_1) de que la serie es estacionaria alrededor de una tendencia determinista que muestra un cambio en el periodo k .

²El trabajo de Choi (1990), que tiene en cuenta la autocorrelación del término de perturbación aleatoria de las series, obtiene diferentes conclusiones al usar el procedimiento de estimación Mínimos Cuadrados Generalizados.

³Una lista parcial de estudios empíricos se puede encontrar en DeJong *et al.* (1989).

1.2. *Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales*

Perron (1989) considera tres tipos de parametrización del p.g.d. de una serie temporal, según como sea la ruptura estructural que afecta a la serie bajo la H_0 y la H_1 . En lo que respecta a la H_0 , este autor tiene en cuenta los siguientes modelos:

$$\text{Modelo (A)} : y_t = \mu + dD(k)_t + y_{t-1} + u_t,$$

$$\text{Modelo (B)} : y_t = \mu_1 + y_{t-1} + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + u_t,$$

$$\text{Modelo (C)} : y_t = \mu_1 + y_{t-1} + dD(k)_t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + u_t,$$

donde $D(k)_t = 1$ si $t = k + 1$ y 0 en los demás casos; $DU_t = 1$ si $t > k$ y 0 en otro caso, $A(L)u_t = B(L)v_t$, $v_t \equiv \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$, siendo $A(L)$ y $B(L)$ polinomios del operador de retardos de orden p y q , respectivamente. Así, el Modelo (A) permite un cambio exógeno en el nivel de la serie, el Modelo (B) admite un cambio exógeno en su pendiente, y el Modelo (C) permite ambos cambios. Por otra parte, los tres tipos de parametrización correspondientes a la H_1 de estacionariedad alrededor de una tendencia, que Perron (1989) considera, son las siguientes:

$$\text{Modelo (A)} : y_t = \mu_1 + \gamma t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + u_t,$$

$$\text{Modelo (B)} : y_t = \mu + \gamma_1 t + (\gamma_2 - \gamma_1)DT_t^* + u_t,$$

$$\text{Modelo (C)} : y_t = \mu + \gamma_1 t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + (\gamma_2 - \gamma_1)DT_t^* + u_t,$$

donde $DT_t^* = (t - k)1$ si $t > k$ y 0 en otro caso. El Modelo (A), que tiene en cuenta un cambio en el nivel de la serie, es denominado por Perron (1989)

como "Modelo Crash". La diferencia $\mu_2 - \mu_1$ representa la magnitud del cambio en el intercepto de la función tendencia, producido en el momento k . Perron (1989) denomina al Modelo (B) como "Modelo de cambio en el crecimiento", y la diferencia $\gamma_2 - \gamma_1$ representa la magnitud del cambio en la pendiente de la función tendencia, producido en el periodo k . El Modelo (C) combina cambios en el nivel y en la pendiente de la función tendencia de la serie. Perron (1989) propone el Modelo (A) para todas las series de Nelson-Plosser, excepto para el salario real y el precio de las acciones, para las que sugiere el Modelo (C), y somete al Modelo (B) las series trimestrales de Producto Nacional Bruto (PNB) del periodo de la postguerra.

Perron (1989, 1990) propone dos métodos para modelizar los cambios en la tendencia. El primero, denominado "*additive outlier*", considera que la ruptura en la tendencia se produce de manera repentina, no viéndose afectada por la dinámica de la serie. El segundo, denominado "*innovational outlier*", considera que la ruptura en la tendencia se realiza de forma más prolongada en el tiempo, de manera que esta ruptura sí se ve afectada por la dinámica de la serie.

En cuanto al modelo *additive outlier*, el contraste de raíz unitaria se lleva a cabo en dos pasos. El primero, extrae la tendencia estimando por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) las siguientes expresiones:

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

$$\text{Modelo (A)} : y_t = \mu_1 + \gamma t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + \tilde{y}_t^A, \quad (1.1)$$

$$\text{Modelo (B)} : y_t = \mu + \gamma_1 t + (\gamma_2 - \gamma_1)DT_t^* + \tilde{y}_t^B, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Modelo (C)} : y_t = \mu + \gamma_1 t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t & \quad (1.3) \\ & + (\gamma_2 - \gamma_1)DT_t^* + \tilde{y}_t^C. \end{aligned}$$

En el segundo paso se contrasta la $H_0 : \psi = 1$ de raíz unitaria, mediante el estadístico t , a través de las siguientes ecuaciones de regresión:

$$\tilde{y}_t^i = \sum_{j=0}^p \hat{d}_j D(k)_{t-j} + \hat{\psi} \tilde{y}_{t-1}^i + \sum_{j=1}^p \hat{\psi}_j \Delta \tilde{y}_{t-j}^i + \hat{u}_t, \quad (i = A, B) \quad (1.4)$$

$$\tilde{y}_t^C = \hat{\psi} \tilde{y}_{t-1}^C + \sum_{j=1}^p \hat{\psi}_j \Delta \tilde{y}_{t-j}^C + \hat{u}_t. \quad (1.5)$$

En la expresión (1.4) se incluyen $p+1$ variables ficticias de tipo $D(k)_{t-j}$ ($j = 0, \dots, p$) con el fin de eliminar los efectos de la dependencia temporal que puede presentar el término de perturbación aleatoria sobre la función de distribución del estadístico t asociado a $\hat{\psi}$. En el Modelo C, no se tiene en cuenta este tipo de variables ficticias, ya que si se realiza una elección de la fecha de ruptura apropiada, la función de distribución del estadístico t obtenido para el parámetro ψ es invariante, asintóticamente, a la estructura de correlación de los datos.

En lo que respecta al modelo *innovational outlier*, el contraste de raíz unitaria implica estimar las siguientes ecuaciones de regresión:

$$y_t = \hat{\mu}^A + \hat{\theta}^A DU_t + \hat{\gamma}^A t + \hat{d}^A D(k)_t + \hat{\psi}^A y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \hat{\psi}_j^A \Delta y_{t-j} + \hat{u}_t, \quad (1.6)$$

$$y_t = \hat{\mu}^B + \hat{\gamma}^B t + \hat{\beta}^B DT_t^* + \hat{\psi}^B y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \hat{\psi}_j^B \Delta y_{t-j} + \hat{u}_t, \quad (1.7)$$

$$y_t = \hat{\mu}^C + \hat{\theta}^C DU_t + \hat{\gamma}^C t + \hat{\beta}^C DT_t^* + \hat{d}^C D(k)_t + \hat{\psi}^C y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \hat{\psi}_j^C \Delta y_{t-j} + \hat{u}_t. \quad (1.8)$$

Para contrastar la presencia de una raíz unitaria en las expresiones (1.4) y (1.5), así como en las expresiones (1.6)-(1.8), Perron (1989, 1990) considera el siguiente estadístico:

$$t_{\hat{\psi}^i}(k), \quad i = A, B, C, \quad (1.9)$$

que es el estadístico estándar t para contrastar $\hat{\psi}^i = 1$. El resultado empírico que obtiene Perron (1989), al aplicar su contraste a las series de Nelson-Plosser, es el rechazo de la H_0 de raíz unitaria, al nivel de significación del 5%, en aquellas series para las que Nelson y Plosser (1982) no rechazan que sean procesos integrados de orden uno, $I(1)$, excepto para el índice de precios al consumo y el tipo de interés. Asimismo, Perron (1989) también rechaza esta hipótesis al nivel del 5% para todas las series trimestrales de PNB del periodo de postguerra. Evans (1989) y Perron (1990) sugieren un modelo relacionado que considera un cambio en el intercepto, destacando, además, en este último artículo, un modelo que tiene en cuenta tanto un

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

cambio en el intercepto, como una variación en la pendiente de la tendencia determinista.

Bierens (1997), a diferencia de Perron (1989), argumenta que las series de Nelson-Plosser, ampliadas al periodo 1988 por Schotman y van Dijk (1991), tales como el índice de precios al consumo y el tipo de interés, no muestran una raíz unitaria, sino que probablemente son estacionarias, aunque en torno a una tendencia determinista no lineal. Bierens (1997) considera que Perron (1989) al contrastar la H_0 de raíz unitaria, frente a la alternativa de estacionariedad alrededor de una tendencia determinista que presenta un cambio en su nivel y/o en su pendiente, y al recoger la no linealidad o posible ruptura en la tendencia mediante variables ficticias, no tiene en cuenta otros tipos de posibles no linealidades. Los contrastes desarrollados por Bierens (1997) se basan en la regresión auxiliar DF con tendencias lineales y no lineales, aproximando la no linealidad a través de polinomios temporales ortogonales de Chebishev que, al incluirlos en dichas ecuaciones de regresión, eliminan estas tendencias. Así, sus tests adoptan un enfoque parecido al de Ouliaris *et al.* (1989), aunque difieren de él en el uso de polinomios temporales de Chebishev, en lugar de utilizar polinomios temporales regulares. También Bierens (1997) difiere de Ouliaris *et al.* (1989) al utilizar una especificación paramétrica de la dinámica de la serie, en lugar de basarse en el estimador de la varianza de largo plazo que se muestra en Newey y West (1987), y al considerar la H_0 de raíz unitaria con deriva constante, en lugar de la de raíz unitaria con una tendencia no lineal y con deriva, frente a la alternativa de que la serie es estacionaria

alrededor de una función determinista del tiempo que se puede suponer casi arbitraria.

Los tests que propone Bierens (1997) se basan en el hecho de que una función no lineal del tiempo se puede aproximar a través de una función lineal de polinomios de Chebishev. Así, si y_t es una serie temporal univariante, y siguiendo a Dickey y Fuller (1979, 1981), Said y Dickey (1984) y Said (1991), sus contrastes se basan en la regresión auxiliar de tipo DFA:

$$\Delta y_t = \psi y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \psi_j \Delta y_{t-j} + \theta' P_{t,T}^{(m)} + \varepsilon_t, \quad (1.10)$$

donde ε_t es un proceso i.i.d., con media cero, varianza constante σ_ε^2 y un momento de cuarto orden finito; $\psi_j(L)$ es un polinomio de retardos de orden p con todas las raíces fuera del círculo unitario, y $P_{t,T}^{(m)} = (P_{0,T}^*(t), P_{1,T}^*(t), \dots, P_{m,T}^*(t))'$, de manera que para $t = 1, \dots, T$ y $q = 1, \dots, T - 1$, se cumple:

$$P_{0,T}(t) = 1, \quad P_{q,T}(t) = (\sqrt{2}) \cos[q\pi(t - 0.5)/T],$$

siendo m el número de polinomios de Chebishev.

Cabe referenciar que bajo la H_0 se cumple que: $\psi = 0$ y los últimos componentes m de θ son cero.

A partir de la regresión (1.10), Bierens (1997) considera los estadísticos siguientes:

1.2. *Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales*

1. $\hat{t}(m)$: estadístico t que analiza la significatividad del coeficiente ψ obtenido a partir de la regresión por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) de (1.10).

$$2. \hat{A}(m) = \frac{T\hat{\psi}}{(1 - \sum_{j=1}^p \hat{\psi}_j)}.$$

$$3. \hat{F}(m) = \frac{[\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_{0,t}^2 - \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_{m,t}^2]/(m+1)}{s^2}, \text{ donde: } s^2 = \frac{1}{T-p-m-1} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2.$$

$$4. \hat{T}_i(m) = T \frac{[\hat{\psi} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t P_{t,T}^{(i,m)} + \hat{\theta}^{(i,m)}]' [\hat{\psi} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t P_{t,n}^{(i,m)} + \hat{\theta}^{(i,m)}]}{s^2} \text{ para}$$

$i = 1, 2, \dots, m$, siendo $\hat{\theta}^{(i,m)} = (\hat{\theta}_i, \dots, \hat{\theta}_m)'$ y

$$P_{t,n}^{(i,m)} = (P_{i,T}^*(t), \dots, P_{m,T}^*(t))'.$$

5.

$$\tilde{T}(m) = \frac{[\sum_{t=1}^T \Delta y_t P_{t,T}^{(1,m)} - \hat{\xi}_1 P_{T+1,T}^{(1,m)} - \hat{\xi}_2 P_{1,T}^{(1,m)}]' [\sum_{t=1}^T \Delta y_t P_{t,T}^{(1,m)} - \hat{\xi}_1 P_{T+1,T}^{(1,m)} - \hat{\xi}_2 P_{1,T}^{(1,m)}]}{(1/T) \sum_{t=1}^T (y_t - \tilde{\theta}^{(m)' } P_{t,T}^{(m)})^2}.$$

Este último estadístico, a diferencia de los anteriores, no depende del número de retardos p que aparecen en la regresión auxiliar (1.10), ya que se basa en la siguiente especificación del p.g.d:

$$\Delta y_t = -\psi^* y_{t-1} + \mu + \psi^* \gamma t + f(t) + u_t, \quad \psi^* \in [0, 1],$$

donde $f(t)$ satisface las condiciones:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \sum_{t=1}^T f(t) = 0; \quad \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \sum_{t=1}^T t f(t) = 0, \quad (1.11)$$

y u_t es un proceso de media cero que obedece al Teorema Central del Límite.

Bierens (1997) pone de manifiesto que aunque se rechace la H_0 a través de sus tests, no debe ser interpretado automáticamente en favor de la H_1 de estacionariedad alrededor de una tendencia no lineal⁴. De hecho, cuando se utilizan los estadísticos $\hat{t}(m)$, $\hat{A}(m)$, $\hat{T}_2(m)$ y $\tilde{T}(m)$, y dados los supuestos en los que se basan estos tests, el rechazo de la H_0 por la cola de la derecha sugiere estacionariedad alrededor de una tendencia no lineal sin ningún tipo de ambigüedad. Sin embargo, el rechazo por la cola de la izquierda lleva a una identificación de la serie objeto de análisis que no está clara, cuando se utilizan estos estadísticos, ya que si se utilizan los tests $\hat{t}(m)$ y $\hat{A}(m)$, este rechazo lleva a la conclusión de estacionariedad en torno a su media o a una tendencia lineal o no lineal, mientras que con los estadísticos $\hat{T}_2(m)$ y $\tilde{T}(m)$ se llega a la conclusión de estacionariedad alrededor de la media o alrededor de una tendencia lineal. Asimismo, cuando se obtiene el estadístico de una cola $\hat{F}(m)$, si éste excede a su valor crítico tampoco se puede conocer con exactitud si la serie es estacionaria alrededor de su media o de una tendencia lineal o no lineal. De la misma manera, cuando se calcula el estadístico $\hat{T}_1(m)$, si éste supera al valor crítico de la cola de la derecha sólo se sabe que la serie puede ser estacionaria en torno a una tendencia, que puede ser lineal o no, y si se rechaza la H_0 por la cola de la izquierda sí se puede concluir que la serie es estacionaria alrededor de su

⁴De la misma manera Hassler y Wolters (1995) y otros autores, también señalan algo parecido en relación a los tests DFA y Phillips y Perron (1988), ya que ponen de manifiesto que la hipótesis de raíz unitaria con deriva puede tener otras alternativas diferentes a la de estacionariedad en torno a una tendencia lineal, por ejemplo, la de un proceso fraccionalmente integrado.

media.

Por otra parte, en la misma línea que Perron (1989), Campos, Ericsson y Hendry (1996), al utilizar el estadístico t del contraste DF, a partir de ahora t_{DF} , concluyen que un proceso $I(1)$ puede parecer que es $I(2)$, cuando el verdadero p.g.d. es un proceso $I(1)$ que presenta una ruptura. Por el contrario, Amsler y Lee (1995) obtienen que, cuando la H_0 de raíz unitaria es cierta, el estadístico t_{DF} estándar, al igual que el de Schmidt y Phillips (1992), no se ve afectado asintóticamente si se ignora la ruptura y añaden que no existe distorsión en el tamaño del test, incluso si no se tiene en cuenta esta ruptura. Sin embargo, cuando se trabaja con muestras finitas y se produce una ruptura repentina en la serie⁵, Leybourne, Mills y Newbold (1998) concluyen que se puede rechazar de forma espuria la H_0 de raíz unitaria utilizando el contraste estándar DF, en especial si la ruptura se produce al principio de la muestra. Por tanto, Leybourne *et al.* (1998) sostienen que si el test DF rechaza frecuentemente la H_0 de raíz unitaria, no implica necesariamente que la serie sea estacionaria alrededor de una tendencia, ya que el test puede rechazar la H_0 erróneamente si existe una ruptura en su p.g.d. y la muestra es pequeña. Estos autores consideran que se puede resolver este problema si se tuviera en cuenta en el test la existencia de una ruptura bajo la H_0 y la H_1 , por lo que sería adecuado utilizar el test de raíces unitarias desarrollado por Perron (1989, 1993, 1994), que sí que considera una ruptura bajo las dos hipótesis. Asimismo, también señalan

⁵El supuesto de que se produce una ruptura repentina en la serie lleva a Leybourne *et al.* (1998) a utilizar modelos *additive outlier*.

que este test mejoraría si se utilizaran métodos dependientes de los datos para determinar la fecha de la ruptura, en lugar de obtener dicha fecha de manera exógena a través de la inspección visual de la evolución de la serie, a no ser que existan razones suficientes para sospechar que una ruptura se produce en una fecha determinada.

En relación a los resultados obtenidos por Leybourne *et al.* (1998), el trabajo de Lee (2000) muestra que el problema del rechazo espurio, al que se refieren aquellos autores, es característico del test DF, al basarse en una función de distribución que se halla condicionada a los datos, y como consecuencia de que este test descuenta la primera observación. Lee (2000) argumenta que este problema no aparece si se utilizan otros tests que no tienen una función de distribución dependiente de los datos, como los estadísticos de González-Farías (1992) y el de Elliott y Stock (1994), o el de multiplicadores de Lagrange de Schmidt y Phillips (1992).

Así, dado el siguiente modelo generador de los datos:

$$y_t = \lambda z_t + x_t, \quad x_t = \psi x_{t-1} + u_t, \quad t = 2, \dots, T,$$

donde u_t está formado por variables aleatorias i.i.d. con media 0 y varianza σ^2 , siendo z_t un vector de variables exógenas y bajo el supuesto de que y_1 sigue una distribución normal con media λ y varianza σ^2 , la maximización de la función de verosimilitud no condicional es similar a la minimización de la expresión:

1.2. *Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales*

$$Q_u = n \log \sigma^2 + \sigma^{-2}(y_1 - \lambda)^2 + \sigma^{-2} \sum_{t=2}^T [y_t - \lambda(1 - \psi) - \psi y_{t-1}]^2,$$

siendo los estimadores obtenidos por máxima verosimilitud no condicional de González-Farías (1992) los siguientes:

$$\hat{\lambda} = \frac{y_1 + (1 - \hat{\psi}) \sum_{t=2}^T (y_t - \hat{\psi} y_{t-1})}{1 + (T - 1)(1 - \hat{\psi})^2},$$

$$\hat{\psi} = \frac{\sum_{t=2}^T (y_t - \hat{\lambda})(y_{t-1} - \hat{\lambda})}{\sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \hat{\lambda})^2},$$

$$\hat{\sigma}^2 = T^{-1}(y_1 - \hat{\lambda})^2 + T^{-1} \sum_{t=2}^T (y_t - \hat{\lambda}(1 - \hat{\psi}) - \hat{\psi} y_{t-1})^2. \quad (1.12)$$

Si se tiene en cuenta que ψ es el parámetro que acompaña a la variable endógena desfasada, los estimadores sugeridos por González-Farías (1992) son los siguientes:

$$\tau_{MV} = (\hat{\psi} - 1) \left[\hat{\sigma}^{-2} \sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \hat{\lambda})^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\hat{\Phi}_{MV} = T(s^2 - \hat{\sigma}^2)/\hat{\sigma}^2,$$

donde:

$$s^2 = \sum_{t=2}^T (y_t - y_{t-1})^2 / (T - 2).$$

Por su parte, Elliott y Stock (1994) sugieren el siguiente estadístico:

$$\hat{\Phi}_{ES} = T(\hat{\sigma}^{*2} - s^2)/s^2 + 7,$$

donde $\hat{\sigma}^{*2}$ viene dado en la ecuación (1.12), excepto si $\hat{\psi}$ se reemplaza por $\psi_7 = 1 - 7T^{-1}$ y si $\hat{\lambda}$ se calcula a partir de ψ_7 .

Schmidt y Phillips (1992) proporcionan un método alternativo para obtener su estadístico utilizando la siguiente regresión:

$$\Delta y_t = \rho' \Delta Z_t + \phi \tilde{S}_{t-1} + u_t,$$

donde $\tilde{S}_t = y_t - \tilde{\iota}_x - Z_t \tilde{\varrho}$, $t = 2, \dots, T$, $\tilde{\varrho}$ son coeficientes de la regresión de Δy_t respecto a ΔZ_t y $\tilde{\iota}_x$ es la estimación restringida obtenida por el procedimiento de estimación por máxima verosimilitud de $\iota_x (\equiv \iota + X_0)$, dada por $y_1 - Z_1 \tilde{\varrho}$. El estadístico de multiplicadores de Lagrange es el estadístico t obtenido para contrastar la $H_0 : \phi = 0$, al que se denota como $\tilde{\tau}_{ML}$.

Otro test de raíz unitaria que no utiliza el estadístico t_{DF} es el de Sargan y Bhargava (1983), que contrasta un paseo aleatorio Gaussiano, frente a la

1.2. *Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales*

alternativa de un proceso AR(1). Bhargava (1986) amplía este test, al considerar también la presencia de una tendencia temporal, y Stock (1988) tiene en cuenta la H_0 de proceso I(1) general. El análisis bayesiano también ofrece un método alternativo para evaluar la información de los datos con el fin de detectar la presencia de raíces unitarias. Así, en relación a las series de Nelson-Plosser, DeJong y Whiteman (1991), utilizando la metodología bayesiana, obtienen que únicamente dos de las series presentan tendencias estocásticas, mientras que Phillips (1991) concluye que cinco de las series tienen este tipo de tendencia.

De todo lo anterior, ponemos de manifiesto que la mayor parte de los tests que contrastan la presencia de una raíz unitaria en una serie temporal se ven afectados, en mayor o menor medida, por la presencia de un posible cambio estructural. Sin embargo, los resultados de los contrastes de raíces unitarias no sólo se ven alterados por la presencia de este cambio, sino que también dependen de si la detección de la fecha de la ruptura se considera exógena o, por el contrario, se halla correlacionada con los datos.

1.2.1 **Exogeneidad o endogeneidad de la elección del punto de ruptura**

Considerar la elección de un punto de ruptura en una serie de manera exógena supone implícitamente que la fecha en la que se produce la ruptura no está correlacionada con los datos y, aunque desde el punto de vista económico este enfoque pueda tener algún sentido, se critica, principalmente, por

el hecho de que las funciones de distribución de la mayor parte de los estadísticos que contrastan la existencia o no de raíz unitaria dependen del grado de correlación entre la elección del punto de ruptura y los datos.

Christiano (1992), al igual que Zivot y Andrews (1992), Banerjee, Lumsdaine y Stock (1992), Perron y Vogelsang (1992a), Perron (1994, 1997), y Vogelsang y Perron (1998), entre otros, argumentan que el punto de ruptura no debe ser determinado exógenamente, sino que, por el contrario, tiene que ser obtenido a partir de los datos. Para Christiano (1992), la determinación exógena o endógena del punto de ruptura en la serie adquiere gran relevancia en los contrastes de raíz unitaria, en cuanto que la inferencia se distorsiona si se considera la elección del punto de ruptura de manera exógena. Christiano (1992) muestra, a través del *bootstrap*, que si se selecciona la fecha de ruptura de manera exógena, sin tenerla en cuenta al generar los valores críticos, la H_0 de proceso estacionario alrededor de una tendencia determinista que no presenta cambio estructural, Modelo TS:

$$y_t = \mu + \gamma t + \sum_{t=1}^p \psi_t y_{t-1} + u_t,$$

o la H_0 de proceso estacionario en diferencias, cuya tendencia no presenta ruptura, Modelo DS:

$$\Delta y_t = \gamma + \sum_{t=1}^p \psi_t y_{t-1} + u_t,$$

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

se rechazan de forma espuria con una frecuencia más elevada, en favor de la alternativa de tendencia segmentada. Por el contrario, si los valores críticos se ajustan para tener en cuenta la selección endógena del punto de ruptura, éstos superarían, en valor absoluto, a los valores críticos que no tienen en cuenta la selección de la ruptura en función de los datos, por lo que se reduciría la frecuencia de rechazo espurio. Para Christiano (1992), Perron (1989) tabula un conjunto de valores críticos para su test, suponiendo la elección de la fecha de ruptura de manera exógena, ya que, según Christiano (1992), elige esta fecha tras observar la evolución histórica de la serie. Por ello, este autor considera que Perron (1989) obtiene rechazos espurios más elevados que si determinara la fecha de ruptura de forma endógena.

Un resultado análogo al de Christiano (1992) lo obtienen Zivot y Andrews (1992), al considerar diferentes algoritmos para la elección del punto de ruptura de forma endógena y al generar distribuciones asintóticas similares a las de Banerjee, Lumsdaine y Stock (1992), aunque los resultados obtenidos tras su aplicación empírica son sustancialmente diferentes de los de estos autores. Así, Zivot y Andrews (1992) construyen el mismo estadístico que Perron (1989), ver ecuación (1.9), aunque lo modifican para que tenga en cuenta la selección de la fecha de ruptura de manera endógena. La H_0 que consideran para los tres modelos *innovational outlier* sugeridos por Perron (1989): Modelos (A), (B) y (C), representados en las ecuaciones (1.6)-(1.8), es que una serie y_t es I(1) sin un cambio estructural:

$$H_0 : y_t = \mu + y_{t-1} + u_t, \quad (1.13)$$

mientras que la H_1 es que y_t es un proceso estacionario alrededor de una tendencia que presenta una ruptura estructural en un periodo k desconocido. El algoritmo para seleccionar la fecha de ruptura elige el valor de k que minimiza el estadístico t de una cola que contrasta $\psi^i = 1$ ($i = A, B, C$), de esta manera se pretende dar mayor peso a la H_1 . Este estadístico es el siguiente:

$$t_{\hat{\psi}^i}(\hat{k}_{\min}^i) = \text{mín } t_{\hat{\psi}^i}(k), \quad i = A, B, C,$$

donde Λ un subconjunto cerrado en el intervalo⁶ $[0,1]$. Dada la H_0 definida por la ecuación (1.13) y siguiendo la estrategia de Perron (1989) al utilizar el test DFA, las ecuaciones de regresión para contrastar la presencia de raíz unitaria, utilizadas por Zivot y Andrews (1992), son las siguientes:

$$\begin{aligned} y_t &= \hat{\mu}^A + \hat{\theta}^A DU_t(\hat{k}) + \hat{\gamma}^A t + \hat{\psi}^A y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \hat{\psi}_j^A \Delta y_{t-j} + \hat{u}_t, \\ y_t &= \hat{\mu}^B + \hat{\gamma}^B t + \hat{\beta}^B DT_t^*(\hat{k}) + \hat{\psi}^B y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \hat{\psi}_j^B \Delta y_{t-j} + \hat{u}_t, \\ y_t &= \hat{\mu}^C + \hat{\theta}^C DU_t(\hat{k}) + \hat{\gamma}^C t + \hat{\beta}^C DT_t^*(\hat{k}) + \hat{\psi}^C y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \hat{\psi}_j^C \Delta y_{t-j} + \hat{u}_t, \end{aligned}$$

donde $DU_t(\hat{k}) = 1$ si $t > T$ y 0 en los demás casos⁷, y $DT_t^*(\hat{k}) = (t - k)1$ si $t > k$ y 0 en otro caso. Zivot y Andrews (1992), obtienen menos

⁶En su aplicación empírica Zivot y Andrews (1992) eligen un intervalo $\Lambda = [0.001, 0.999]$

⁷ \hat{k} se refiere al valor estimado de la fracción de la muestra en la que se produce la ruptura.

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

evidencia contra la H_0 de raíz unitaria sin ruptura que la obtenida por Perron (1989). En particular, utilizando los valores críticos asintóticos, no pueden rechazar la hipótesis de raíz unitaria al nivel de significación del 5% para 4 de 10 series de Nelson-Plosser, para las que Perron (1989) sí rechaza esta hipótesis. Estas series son el PNB *per capita*, el deflactor del PNB, la cantidad de dinero en circulación y los salarios reales. Además, a diferencia de Perron (1989), no rechazan la H_0 de raíz unitaria, al nivel de significación del 5% y del 10%, para las series trimestrales de PNB de la postguerra. No obstante, el trabajo empírico desarrollado por Zivot y Andrews (1992) es bastante similar al de Perron (1990)⁸. La diferencia fundamental entre estos trabajos radica en que Perron (1990) incluye en el modelo de regresión estimado una variable ficticia temporal que recoge la fecha del cambio estructural, variable que no aparece en el trabajo de Zivot y Andrews (1992).

En relación a los contrastes de raíces unitarias que tienen como hipótesis alternativa cambios permanentes en la tendencia, como el de Perron (1989, 1990, 1991), Rappoport y Reichlin (1989), Banerjee, Dolado y Galbraith (1990), Balke y Fomby (1991), Perron y Vogelsang (1992a,b; 1993a,b, 1995), Park y Sung (1994), Stock (1994), Bradley y Jansen (1995), Nunes, Newbold y Kuan (1996) y Montañés (1997), entre otros, Kilian y Ohanian (1998) los critican, ya que argumentan que en estos trabajos se supone que

⁸Los resultados que aparecen en las columnas "p-value (*t sig*)" en las tablas VI y VIII de Perron (1990) son similares a las de Zivot y Andrews (1992), excepto para el salario nominal y el salario real.

la fecha de ruptura coincide con importantes eventos económicos, tales como guerras y depresiones, y que estos eventos tienen efectos permanentes en la actividad económica. Sin embargo, según Kilian y Ohanian (1998), la Teoría Económica estándar sugiere que estos eventos tienen efectos transitorios y no permanentes en la actividad económica, por lo que no pueden ser modelizados a través de modelos lineales ARIMA estándar. Estos autores señalan que la inadecuación para identificar la dinámica transitoria que provocan estos eventos a través de los modelos ARIMA tiene implicaciones en la inferencia. En particular, el uso de este tipo de modelos para considerar esta dinámica transitoria puede llevar a tasas de rechazo de la H_0 de raíz unitaria superiores al tamaño nominal del test. Por tanto, Kilian y Ohanian (1998) generan modelos de series temporales basados en la suma de un paseo aleatorio latente con deriva y grandes movimientos transitorios ocasionales conducidos mediante modelos de cambios de régimen, que se consideran endógenos. El resultado que obtienen estos autores, cuando llevan a cabo experimentos de Monte Carlo y utilizan este tipo de modelos es que al nivel de significación nominal del 10%, el test de Zivot y Andrews (1992) rechaza de manera espuria la H_0 de raíz unitaria, en favor de la de estacionariedad en torno a una tendencia que cambia en un momento del tiempo, hasta un 60% de las veces. Además, obtienen que incluso para un modelo basado en un paseo aleatorio puro, el test de Zivot y Andrews (1992) rechaza de forma espuria la H_0 hasta un 35% de las veces, al nivel de significación nominal del 10%, siendo sus resultados bastante robustos a diferentes especificaciones alternativas del p.g.d. No obstante, Kilian y Ohanian (1998) argumentan que el test de Zivot y Andrews (1992)

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

se comporta mejor cuanto mayor es el tamaño muestral. Si el tamaño de la muestra es pequeño, resulta extremadamente difícil diferenciar los ocasionales grandes movimientos transitorios que se producen en los datos, por efecto de eventos como la Gran Depresión y la expansión durante la Segunda Guerra Mundial, de las rupturas estructurales genuinas en un modelo estacionario alrededor de una tendencia, por lo que es probable que se produzca una evidencia espuria a favor de una tendencia no lineal en las series de Nelson-Plosser y las del PNB *per capita*. Estos autores concluyen que no es suficiente llevar a cabo un análisis puramente estadístico sobre las propiedades que tiene la tendencia, sino que también es necesario determinar si existen *shocks* importantes que puedan afectar al p.g.d., por lo que se debe acudir a la Teoría Económica para que ayude a analizar cómo estos *shocks* pueden afectar a las variables endógenas objeto de estudio.

Por otra parte, Banerjee, Lumsdaine y Stock (1992) también sugieren que el punto de ruptura de una serie debe ser considerado como desconocido *a priori*, por lo que, en tal caso, según estos autores, no es adecuado utilizar la teoría de la distribución estándar, condicionada a un punto de ruptura no aleatorio. Por este motivo, desarrollan una teoría distinta de la distribución para una serie de estadísticos, determinados para un rango de posibles fechas de ruptura, que permiten contrastar la H_0 de raíz unitaria sin cambios en la tendencia determinista, o la de proceso I(1) con cambios en dicha tendencia, o la de variaciones en el tipo de raíz. Los procedimientos que utilizan para determinar la fecha de ruptura en la serie son los

siguientes: recursivo⁹, rolling y secuencial. En el caso de los procedimientos recursivo y rolling, estos autores obtienen la distribución asintótica y para muestras finitas de los estadísticos t_{DF} construidos bajo la H_0 de raíz unitaria estable en todo el intervalo muestral. Sin embargo, la mayoría de los tests basados en el procedimiento secuencial parten de un modelo de tipo *innovational outlier* y la distribución asintótica y para muestras finitas de los estadísticos se obtienen suponiendo que el p.g.d. es $I(1)$, pudiendo presentar un cambio en su media o en su tendencia.

El procedimiento recursivo consiste en la obtención de una secuencia de estadísticos t_{DF} , cada uno de los cuales se calcula tras estimar el Modelo I de Banerjee *et al.* (1992, p. 273) en diferentes submuestras:

⁹El término "recursivo" deriva de Brown, Durbin y Evans (1975). Algunas técnicas recursivas se implementan en el paquete informático PC GIVE de Hendry (1987), también ver Dufour (1982). Un ejemplo de aplicación de estadísticos basados en el procedimientos recursivos se halla en Hendry y Ericsson (1991). Otra aplicación es la que realizan DeLong y Summers (1988), en la que se analiza si el *output* de Estados Unidos se vuelve más persistente después de la Segunda Guerra Mundial que antes de la Gran Depresión. En particular, se estudia si una raíz estacionaria se convierte más tarde en raíz unitaria aplicando este contraste a varios países. En los trabajos de Hendry y Ericsson (1991) y DeLong y Summers (1988), la inferencia se desarrolla sin una guía de la distribución formal para los estadísticos relevantes obtenidos mediante los procedimientos recursivo y rolling. Una solución sugerida en DeLong y Summers (1988) es la de llevar a cabo un conjunto de contrastes de raíz unitaria recursivos o rolling y aplicar la teoría asintótica desarrollada en el artículo de Banerjee *et al.* (1992), como se hace en Banerjee, Dolado y Galbraith (1990).

1.2. *Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales*

$$y_t = \mu + \gamma t + \psi y_{t-1} + A(L)\Delta y_{t-1} + u_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.14)$$

donde $A(L)$ es un polinomio de retardos de orden p conocido, con las raíces de $1 - A(L)L$ fuera del círculo unitario. Además, se supone que el término de perturbación aleatoria (u_t) satisface el supuesto de que es una secuencia de diferencias de martingalas que satisface $E(u_t^2 | u_{t-1}, \dots) = \sigma^2$, $E(|u_t|^i | u_{t-1}, \dots) = \varkappa_i$ ($i = 3, 4$) y $\sup_t E(|u_t|^{4+\varsigma} | u_{t-1}, \dots) = \bar{\varkappa} < \infty$ para algún $\varsigma > 0$. Las submuestras para las que se determina la secuencia de estadísticos t_{DF} abarcan el siguiente intervalo temporal: $t = 1, \dots, k$, en las que $k = k_0, \dots, T$, donde k_0 es el primer dato considerado como el último de la primera submuestra y T es el tamaño de toda la muestra. Estas submuestras, para las que se calcula el estadístico t_{DF} , van incrementando su tamaño en una observación hasta que finalmente se cubre toda la muestra. Así, la primera submuestra empieza en la observación primera y finaliza en k_0 , la siguiente comienza también en la observación 1 y termina en la observación $k_0 + 1$ y así sucesivamente.

El procedimiento rolling, aplicado al estadístico t_{DF} , se basa en el cálculo de una secuencia de estadísticos al estimar por MCO el Modelo I (1.14) en submuestras que representan una fracción constante de toda la muestra, desplazándose dichas submuestras a lo largo de ella. La primera submuestra cubre el periodo que va de la observación 1 a la k , la segunda submuestra abarca el periodo comprendido entre la observación 2 y la $k+1$, y así sucesivamente.

Por último, el procedimiento secuencial¹⁰, a diferencia del recursivo y el rolling, utiliza toda la muestra completa. Banerjee *et al.* (1992) consideran diferentes estadísticos para llevar a cabo su contraste de tipo secuencial. Así, en lo que se refiere al estadístico t_{DF} , el procedimiento secuencial consiste en obtener una secuencia de estadísticos, pero considerando que la fecha desconocida del hipotético punto de ruptura avanza secuencialmente a lo largo de toda la muestra. El modelo que se estima, en este caso, es el denominado Modelo II de Banerjee *et al.* (1992, p. 275),

$$y_t = \mu + dD(k)_t + \gamma t + \psi y_{t-1} + A(L)\Delta y_{t-1} + \omega' x_{t-1}(k) + u_t, \quad (1.15)$$

para $t = 1, \dots, T$. A diferencia del Modelo I, el Modelo II añade un vector de m regresores adicionales, $x_{t-1}(k)$, que se supone que es estacionario con una media cero y constante. El regresor determinista $D(k)_t$ permite considerar la posibilidad de un cambio o salto en la tendencia en el periodo k . Así, siguiendo a Perron (1989, 1990), se consideran dos casos:

¹⁰Banerjee *et al.* (1992) aplican su procedimiento secuencial al test de raíces unitarias de Perron (1989)/Rappoport-Reichlin (1989), considerando un cambio en la tendencia en el periodo k , calculado secuencialmente para $k = \delta T, \dots, T - \delta T$, donde se excluyen algunos de los datos correspondientes al principio y al final de la muestra a través del parámetro (δ). También aplican este procedimiento al test de razón de verosimilitud de Quandt (1960), calculando una secuencia de estadísticos razón de verosimilitud que permiten contrastar una ruptura en al menos uno de los coeficientes, teniendo en cuenta el máximo de todos los estadísticos. El resultado que Banerjee *et al.* (1992) obtienen amplía los trabajos de McCabe y Harrison (1980), Sen (1980, 1982), Dufour (1982), James, James y Siegmund (1987), Krämer, Ploberger y Alt (1988) y Ploberger, Krämer y Kontrus (1989).

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

Caso A (cambio en la tendencia):

$$D(k)_t = (t - k)1, (t > k), \quad (1.16)$$

Caso B (cambio en la media):

$$D(k)_t = 1, \quad (t > k). \quad (1.17)$$

El Caso A, se corresponde con el "Modelo de cambio en el crecimiento" de Perron (1989, 1990), expuesto en (1.7). El Caso B, es el denominado "Modelo Crash" de Perron (1989, 1990), que es el que aparece representado en (1.6). Banerjee *et al.* (1992) sugieren la posibilidad de obtener de forma secuencial, en el análisis empírico, el estadístico t asociado al coeficiente d , t_d . Este estadístico contrastaría la $H_0 : d = 0$ en el caso B (1.17), bajo los supuestos: $\psi = 1$ y $\gamma = 0$, proporcionando información respecto a si se produce un cambio en la media. Otro estadístico que se podría obtener mediante el procedimiento secuencial es el estadístico razón de verosimilitud de Quandt (1960), Q_{RV} , que contrastaría si se produce una ruptura en alguno o en todos los coeficientes. Este procedimiento se basa en realizar $2(T - 2k_0)$ regresiones separadas según el Modelo I (1.14) en las siguientes submuestras: $1, \dots, [T\delta]$ y $[T\delta] + 1, \dots, T$, donde k_0 es un parámetro que toma el valor $k_0 = [\delta_0 T]$, representando $[\cdot]$ la parte entera, calculando una secuencia de estadísticos para todos los posibles puntos de ruptura. Banerjee *et al.* (1992) también consideran que se podría obtener una secuencia de estadísticos F , cada uno de los cuales contrastaría la hipótesis conjunta $H_0 : d = 0$ y el p.g.d. de la serie y_t es I(1).

Banerjee *et al.* (1992) calculan los valores críticos para tamaños muestrales formados por 100, 250 y 500 observaciones, así como el tamaño y potencia de los tests a los que aplican los procedimientos recursivo, rolling y secuencial. El procedimiento recursivo lo aplican a cuatro estadísticos con el fin de contrastar la presencia de raíces unitarias: el estadístico t_{DF} para la muestra completa, es decir si $k_0 = T$, \hat{t}_{DF} ; el estadístico t_{DF} máximo, $\hat{t}_{DF}^{máx} \equiv \max_{k_0 \leq k \leq T} \hat{t}_{DF}$; el estadístico t_{DF} mínimo, $\hat{t}_{DF}^{mín} \equiv \min_{k_0 \leq k \leq T} \hat{t}_{DF}$, y el estadístico $\hat{t}_{DF}^{dif} \equiv \hat{t}_{DF}^{máx} - \hat{t}_{DF}^{mín}$. Estos estadísticos contrastan la $H_0 : \psi = 1$ al llevar a cabo la regresión (1.14) en submuestras $t = 1, \dots, k$. El procedimiento rolling lo aplican a tres estadísticos de tipo t_{DF} : $\bar{t}_{DF}^{máx} \equiv \max_{k_0 \leq k \leq T} \bar{t}_{DF}$; $\bar{t}_{DF}^{mín} \equiv \min_{k_0 \leq k \leq T} \bar{t}_{DF}$, y el estadístico $\bar{t}_{DF}^{dif} \equiv \bar{t}_{DF}^{máx} - \bar{t}_{DF}^{mín}$, contrastando la $H_0 : \psi = 1$ en la regresión (1.14) para submuestras $t = k - [T\delta] + 1, \dots, k$. El procedimiento secuencial¹¹ lo aplican al estadístico $\tilde{Q}_{RV}(p)$, para $p = 0, 4$ y 8 , siendo p el número de retardos de Δy_t en la regresión (1.14). También aplican el procedimiento secuencial a estadísticos calculados al estimar el Modelo II (1.15), como el estadístico F máximo, $\tilde{F}_T^{máx} \equiv \max_{k_0 \leq k \leq T-k_0} \tilde{F}_T$, que contrasta la $H_0 : y_t \sim I(1)$ y $d = 0$; el estadístico t_{DF} determinado para un valor de k que maximiza el estadístico \tilde{F}_T , $\tilde{t}_{DF}(\tilde{k})$; el estadístico t_{DF} mínimo, $\tilde{t}_{DF}^{mín} \equiv \min_{k_0 \leq k \leq T-k_0} \tilde{t}_{DF}$, y el valor absoluto del estadístico $t-extremo$ que contrasta la significatividad del parámetro d , $|ext_{\delta \in (\delta_0, 1-\delta_0)} \tilde{t}_d(\delta)|$, para el contraste de raíz unitaria, bajo los supuestos $\gamma = 0$ y $\psi = 1$.

¹¹Christiano (1992) propone los estadísticos secuenciales: $\tilde{F}_T^{máx}$, \tilde{t}_{DF} y $\tilde{t}_{DF}^{mín}$, para ampliar el análisis de Perron (1989) al caso en el que se desconoce el verdadero punto de ruptura.

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

En lo referente al tamaño de los tests de Banerjee *et al.* (1992), calculado para una muestra de 100 observaciones y un valor de $p = 4$, obtienen que utilizando sus valores críticos, ver Tablas 1 y 2 de Banerjee *et al.* (1992, p. 277 y 278), todos los estadísticos tienen un tamaño próximo al nominal, excepto en el caso del estadístico recursivo \hat{t}_{DF}^{dif} , el rolling $\bar{t}_{DF}^{máx}$ y especialmente \bar{t}_{DF}^{dif} . Si se contrasta la H_0 de raíz unitaria constante a lo largo del periodo muestral, frente a la alternativa de que un proceso estacionario se convierte en raíz unitaria (a partir del periodo central de la muestra), se obtiene que son los tests recursivos basados en los estadísticos \hat{t}_{DF}^{dif} y $\hat{t}_{DF}^{mín}$ y el estadístico secuencial \tilde{Q}_{RV} los que tienen mayor potencia. Asimismo, cuando se analiza la potencia de sus estadísticos frente a la H_1 de estacionariedad con un cambio en la tendencia determinista, se observa que el test recursivo \hat{t}_{DF} no rechaza la H_0 de raíz unitaria cuando ésta no es cierta, al igual que los tests recursivo $\hat{t}_{DF}^{máx}$ y rolling $\bar{t}_{DF}^{máx}$. Este resultado confirma la interpretación de Perron (1989, 1990) de que los cambios permanentes en la tendencia determinista se confunden con una innovación persistente de una tendencia estocástica. Sin embargo, el test que, en términos generales, presenta mayor potencia es el secuencial $\tilde{F}_T^{máx}$.

Entre los resultados de su análisis empírico para analizar el tipo de raíz que presenta el nivel de *output* de siete países de la OCDE (Canadá, Francia, Alemania del Oeste, Italia, Japón, Reino Unido y Estados Unidos), destaca el caso de Estados Unidos al no rechazarse la H_0 de raíz unitaria, lo que es análogo al resultado obtenido por Christiano (1992). Banerjee, Dolado y Galbraith (1990) tampoco rechazan la H_0 de raíz unitaria sin rup-

tura, frente a la alternativa de estacionariedad alrededor de una tendencia segmentada, para series de *output* de Estados Unidos con mayor número de datos al incluir también el periodo de la Gran Depresión. Estos resultados son también consistentes con los de Zivot y Andrews (1992), al no rechazar la H_0 de raíz unitaria, frente a la alternativa de tendencia segmentada, para los datos trimestrales de producción real de Estados Unidos.

Perron (1997), ante las duras críticas recibidas por algunos autores, especialmente de Christiano (1992), argumenta que las fechas de ruptura elegidas en su artículo de 1989 tienen cierto grado de correlación con los datos, y, por tanto, no son del todo exógenas, aunque tampoco están perfectamente correlacionadas con ellos. Perron (1997) argumenta que, en su artículo de 1989, elige las fechas de cambio estructural *ex-ante*, no siendo modificada *ex-post*, por consiguiente guardan relación con los sucesos exógenos para los que la Teoría Económica había previsto las consecuencias que realmente se produjeron más tarde (como el *Crash* bursátil de 1929, con el subsiguiente desmantelamiento de la organización económica internacional, y el repentino cambio exógeno en el precio del petróleo en los años setenta, con la posterior alteración en la coordinación de las políticas económicas internacionales). Así, aunque la elección *ex-ante* de las fechas de ruptura podría llevar a algunos autores, como Christiano (1992), a considerar dichas fechas como exógenas, para él esto no es cierto, ya que sólo serían exógenas si se hubiesen obtenido *ex-post*, es decir, después de analizar si se produjeron realmente los cambios que había predicho la Teoría Económica, como consecuencia de los eventos exógenos.

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

Con el fin de analizar la robustez de los resultados obtenidos en 1989, Perron (1997) parte del supuesto de que la fecha de ruptura en una serie está perfectamente correlacionada con los datos. Los contrastes realizados guardan relación con los modelos *innovational outlier* de su artículo de 1989, ecuaciones (1.6) y (1.8) y el modelo *additive outlier*, ecuación (1.2). El primer test permite un único cambio en el intercepto en el momento k , bajo la H_0 y la H_1 , y se supone que este cambio es gradual y no repentino, de ahí que se aplique a un *modelo innovational outlier*. El contraste de raíz unitaria se desarrolla a través del estadístico t , cuando se contrasta la $H_0 : \hat{\psi}^A = 1$ en la ecuación (1.6). El segundo test también se aplica a un *modelo innovational outlier*, que permite un cambio tanto en el intercepto como en la pendiente, bajo la H_0 y la H_1 . Este contraste considera la $H_0 : \hat{\psi}^C = 1$ en la regresión (1.8). El tercer test se basa en el cálculo del estadístico t que contrasta $\hat{\psi} = 1$ en (1.4), permitiendo un cambio en la pendiente de manera que ambos segmentos de la función tendencia se hallen unidos por el punto de ruptura. Se supone que este cambio se produce de forma repentina, no gradual, por lo que se utiliza un *modelo additive outlier*, como el (1.2), cuya estimación se lleva a cabo en dos pasos.

Perron (1997) selecciona la fecha de ruptura endógenamente de dos maneras. La primera se basa en seleccionar k como aquella fecha para la que el estadístico t que contrasta $\psi = 1$, t_ψ , es mínimo. La segunda escoge la fecha de ruptura en el punto de la muestra donde se minimiza el estadístico t correspondiente al parámetro asociado al cambio en el intercepto en el modelo (1.6), $t_{\hat{\theta}_A}$, al cambio en el nivel y pendiente en el modelo (1.8), $t_{\hat{\theta}_C}$,

y al cambio en la pendiente en el modelo (1.4), $t_{\hat{d}_B}$. Una vez determinado k , se calcula el estadístico t_ψ para contrastar si $\psi = 1$. Perron (1997) también considera el caso en el que el punto de ruptura se selecciona utilizando el mismo procedimiento anterior, pero sin ningún supuesto *a priori* en relación al signo del cambio. En este contexto, la fecha de ruptura se determina utilizando el máximo del valor absoluto de $t_{\hat{\theta}_A}$, $t_{\hat{\theta}_C}$ o $t_{\hat{d}_B}$ y calculando posteriormente el estadístico t_ψ , para contrastar si $\psi = 1$.

El resultado que obtiene Perron (1997) es que parece existir un evidente *trade-off* entre la potencia de los tests anteriores y la cantidad de información *a priori* utilizada para detectar el punto de ruptura. De manera que si no se utiliza ningún tipo de información *a priori*, es decir, si se considera el punto de ruptura correlacionado con los datos, sin partir de información exógena, la potencia de los tests es relativamente más elevada, por lo que se produce un mayor rechazo de la hipótesis de raíz unitaria. Perron (1997) obtiene un resultado parecido al de su artículo de 1989, al considerar las mismas series de datos¹². Por tanto, muestra que existen procedimientos alternativos que llevan a conclusiones menos favorables para la consideración de raíz unitaria, que los que sugieren los trabajos de Banerjee *et al.* (1992) y Zivot y Andrews (1992).

Vogelsang y Perron (1998) también consideran endógeno el punto de ruptura. Estos autores analizan si los resultados de los tests de raíces uni-

¹²Series de Nelson-Plosser, que son también analizadas en Zivot y Andrews (1992), y series trimestrales del PNB y PIB de Estados Unidos, Canadá, Japón, Francia, Alemania, Italia y Reino Unido, del periodo de la postguerra, utilizadas en Banerjee *et al.* (1992).

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

tarias, pueden verse distorsionados cuando se considera una ruptura bajo la H_0 de raíz unitaria. Para ello, se basan en los dos mecanismos generadores de los cambios mencionados anteriormente: modelos *additive outlier* e *innovational outlier*. Un estudio previo, como es el de Perron y Vogelsang (1992a), obtiene que si se considera la H_0 de raíz unitaria con un cambio en la media, los estadísticos que permiten contrastar dicha hipótesis, tanto en los modelos *additive outlier* como en los *innovational outlier*, presentan una distribución asintótica que es invariante al caso en el que la H_0 no tenga en cuenta ese cambio en la media. Sin embargo, Perron y Vogelsang (1992a) demuestran que si se trabaja con muestras finitas sí que existen diferencias en las funciones de distribución de estos estadísticos. Vogelsang y Perron (1998) amplían el estudio llevado a cabo por Perron y Vogelsang (1992a) considerando también el caso en el que la H_0 sea la de raíz unitaria con un cambio en su pendiente, tanto en modelos *additive outlier* como en los de tipo *innovational outlier*. El resultado que obtienen es que la función de distribución asintótica de los estadísticos que permiten contrastar esta H_0 , en ambos tipos de modelos, sí difiere de la función de distribución de los estadísticos cuando no se tiene en cuenta el posible cambio en la pendiente bajo la H_0 . Asimismo, estos autores obtienen que, si se tiene en cuenta la magnitud del cambio en la pendiente que se suele hallar en la mayor parte de las series macroeconómicas, la función de distribución asintótica de los estadísticos que consideran la H_0 de raíz unitaria sin cambios en la tendencia, representa una buena aproximación a la función de distribución de estadísticos que contrastan la H_0 de raíz unitaria con cambios en la pendiente en muestras finitas. Por el contrario, si se producen grandes cambios

en la pendiente, es la función de distribución asintótica de los estadísticos que contrastan la H_0 de raíz unitaria con cambios en la pendiente la que proporciona una aproximación adecuada a la distribución de estadísticos que contrastan la misma H_0 en muestras finitas. Además, si se sospecha que se pueden producir cambios grandes en el intercepto o en la pendiente, Vogelsang y Perron (1998) aconsejan el uso de modelos de tipo *additive outlier*, independientemente de que el verdadero modelo generador de los datos sea de este tipo o, por el contrario, sea de tipo *innovational outlier*, ya que el tamaño de los tests basados en modelos *additive outlier* es prácticamente invariable a los grandes cambios que se produzcan en el intercepto o en la pendiente de las series.

Por tanto, la mayoría de autores confirman que la consideración del punto de ruptura en una serie temporal como exógeno o endógeno, incide considerablemente en los resultados que se extraen a través de los tests de raíces unitarias. En términos generales, podemos decir que la mayoría de estos tests presentan mejores propiedades de tamaño y potencia si se considera el punto de ruptura endógeno, es decir, correlacionado con los datos, que si se supone que es exógeno.

1.2.2 Situación de la fecha de ruptura en la muestra, magnitud de la ruptura y tamaño muestral

Tal y como se ha expuesto anteriormente, Christiano (1992) obtiene los valores críticos de los estadísticos F generados para contrastar la H_0 de

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

tendencia determinista, Modelo (TS), o estocástica, Modelo (DS), sin cambio estructural, siendo la H_1 la de tendencia cambiante¹³, mediante procedimientos *bootstrap* aplicados a los posibles periodos de ruptura¹⁴, k , y a cada uno de los 1000 conjuntos de datos artificiales generados para los modelos TS y DS. El resultado que obtiene Christiano (1992), al derivar los valores críticos de los estadísticos F estimados sin tener en cuenta en su cálculo la endogeneización del punto de ruptura y utilizando tamaños muestrales pequeños, no sólo sorprende porque obtiene valores críticos de la distribución F estimada¹⁵, en valor absoluto, por encima de los valores estándar, sino también porque muestra que los valores críticos alejados del principio y del final de la muestra son más elevados que los de los extremos. Por tanto, cuando se trabaja con muestras de tamaño reducido, si la fecha de ruptura se sitúa en el periodo central de la muestra y la determinación de esta fecha es exógena, se rechazaría con mayor frecuencia la H_0 cuando se utilizan los valores críticos estándar, que si se hace uso de los valores críticos que Christiano (1992) obtiene por *bootstrap* para ese menor tamaño muestral. Asimismo, este autor demuestra que, cuando se obtienen los valores críticos teniendo en cuenta la endogeneización del punto de ruptura, el tamaño del test F disminuye considerablemente respecto al que se obtiene cuando se endogeneiza el punto de ruptura sin tenerlo en cuenta en el cálculo de los valores críticos, y además estos valores son independientes de

¹³Las conclusiones de su artículo no son muy sensibles al p.g.d. utilizado.

¹⁴ $k = 3, \dots, T - 2$.

¹⁵Valores críticos obtenidos para la distribución F , con 2 grados de libertad en el numerador y 148 en el denominador.

la localización del punto de ruptura en la muestra, aunque no del algoritmo utilizado para seleccionar el punto de ruptura.

Banerjee *et al.* (1992) demuestran que la distorsión de tamaño de sus estadísticos, calculados mediante los procedimientos recursivo, rolling y secuencial, disminuye a medida que se incrementa el tamaño muestral. Asimismo, cuando la muestra es pequeña y se considera una ruptura estructural endógena en la tendencia de la serie, obtienen valores críticos superiores, en valor absoluto, a los estándar. En particular, al endogeneizar la selección del punto de ruptura y corregir los valores críticos asintóticos para tener en cuenta muestras pequeñas, no rechazan la H_0 de raíz unitaria para 8 de las 11 series para las que Perron (1989) sí rechaza esta hipótesis. No obstante, al igual que Perron (1989), rechazan la hipótesis de raíz unitaria para el PNB real, el PNB nominal y la producción industrial de Estados Unidos. En cuanto a la potencia de los tests que analizan, es destacable que ésta depende también de la ubicación de la fecha de ruptura en la muestra. Así por ejemplo, el estadístico secuencial $\tilde{F}_T^{máx}$, que es el que mayor potencia presenta, en general, frente a la H_1 de estacionariedad alrededor de una tendencia determinista segmentada, tiene una potencia aún mayor si el punto de ruptura se sitúa al final de la muestra. Además, si se consideran los tests \tilde{t}_{DF} secuenciales, éstos tienen una mayor potencia, en general, cuanto más próxima al principio de la muestra se halle la ruptura.

En relación al resultado obtenido por Banerjee *et al.* (1992), Perron (1997) replica su análisis obteniendo más evidencia que estos autores contra

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

la hipótesis de raíz unitaria para todos los países, excepto para Japón. Las diferencias entre el análisis empírico llevado a cabo por Perron (1997) y Banerjee *et al.* (1992) son las siguientes: las fuentes y el horizonte temporal son diferentes; Banerjee *et al.* (1992) utilizan el método *innovational outlier* y no tienen en cuenta un cambio en la pendiente bajo la H_0 ; además, Banerjee *et al.* (1992) fijan el orden de retardos máximo autorregresivo en 4 para todos los países y demuestran que los resultados son robustos cuando se fija un valor de 8 o cuando se utiliza el criterio de información de Akaike (AIC) o de Schwartz para seleccionar el orden de retardos. Por el contrario, Perron (1997) no fija este orden de retardos sino que lo considera desconocido y utiliza métodos que dependen de los datos para obtener el número máximo de retardos autorregresivos, ya que considera que este tipo de métodos tienen mejores propiedades, en términos de un tamaño estable y una potencia elevada, que los métodos que lo fijan *a priori*.

Nosotros, también ampliamos el estudio de Banerjee *et al.* (1992), mediante experimentos de Monte Carlo¹⁶, analizando el comportamiento del estadístico $t_{DF}^{mín}$ cuando se considera endógena la determinación de la fecha de ruptura de una serie temporal y si se utilizan tamaños muestrales más pequeños (30, 50 y 75) que los de estos autores. Además, analizamos las propiedades de tamaño y potencia del test DF no solamente en función del procedimiento utilizado para averiguar la fecha de ruptura (recursivo, $\hat{t}_{DF}^{mín}$; rolling, $\bar{t}_{DF}^{mín}$, y secuencial, $\tilde{t}_{DF}^{mín}$), sino también del tipo de ruptura,

¹⁶Todos los cálculos se han programado en Ox, versión 2.1 (Doornik, 1998), y todas las simulaciones se han basado en 1000 réplicas para cada caso analizado.

del tamaño muestral, de la magnitud de la ruptura y de la situación de la ruptura en la muestra. Además, obtenemos los valores críticos (ver Tabla 1), para varios niveles de significación (1%, 2.5%, 5.0% y 10.0%), mediante procedimientos de simulación basados en 10000 réplicas, suponiendo que los datos son generados mediante el proceso: $\Delta y_t = \varepsilon_t$, siendo ε_t i.i.d. $N(0, 1)$. Determinamos cada estadístico recursivo \hat{t}_{DF}^{min} estimando el Modelo I, ver ecuación (1.14), para $p = 0$ en cada uno de los periodos ($t = 1, \dots, k$) de cada submuestra, para $k = k_0, \dots, T$, siendo $\delta_0 = 0.25$ y teniendo en cuenta que $\delta = \frac{k}{T}$. Los estadísticos rolling \bar{t}_{DF}^{min} los obtenemos estimando también el Modelo I (1.14) con $p = 0$ en cada uno de los periodos $t = k - [T\delta_0] + 1, \dots, k$ para $k = [T\delta_0], \dots, T$, siendo $\delta_0 = \frac{1}{3}$. El estadístico secuencial \tilde{t}_{DF}^{min} para el cambio en la tendencia lo determinamos estimando secuencialmente la ecuación (1.15) con el regresor $D(k)_t$ dado por la expresión (1.16) y $p = 0$, y el estadístico secuencial \tilde{t}_{DF}^{min} para el cambio en la media lo calculamos estimando secuencialmente también la ecuación (1.15), pero con $D(k)_t$ dado por (1.17) y $p = 0$. Para el cálculo de \tilde{t}_{DF}^{min} suponemos que $\delta_0 = 0.15$, considerando las observaciones comprendidas entre $\delta_0 T$ y $(1 - \delta_0)T$. El resultado que extraemos, a partir de la Tabla 1, no contradice el de Banerjee *et al.* (1992), en el sentido de que los valores críticos son más elevados, en valor absoluto, cuanto menor es el tamaño muestral, por lo que, si la muestra es pequeña y utilizamos los valores críticos asintóticos, rechazaríamos con mayor probabilidad la H_0 de raíz unitaria. Sin embargo, el tamaño de la muestra no es el único factor que determina el buen comportamiento de los contrastes.

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

En relación al tamaño de los tests, las columnas $\hat{\vartheta}_\mu$, de las tablas 2 a 10 exponen las tasas de rechazo espurio (al nivel de significación nominal del 5%) de la H_0 de raíz unitaria con un cambio en el intercepto de magnitud¹⁷ α , producido en el momento δT , para muestras de tamaños 30, 50 y 75, al aplicar los tests recursivo, rolling y secuencial. Asimismo, en las columnas $\hat{\vartheta}_\tau$ de estas tablas se exponen las tasas de rechazo espurio de la H_0 de raíz unitaria con un cambio en la pendiente de magnitud¹⁸ β , que se produce en el momento δT , para los mismos tamaños muestrales. En relación a la H_0 de raíz unitaria con un cambio en su intercepto, si dicha hipótesis es cierta, el test secuencial no rechaza esta hipótesis cuando el punto de ruptura recae en la segunda mitad de la muestra. Sin embargo, cuando la ruptura se produce en la primera mitad del periodo muestral, no es el test secuencial, sino el rolling, el que presenta un menor tamaño. Pese a ello, si $T = 75$, la magnitud de la ruptura es elevada y la fecha de la ruptura se sitúa próxima al periodo central de la muestra, la tasa de rechazo espurio de la H_0 , a través del test rolling, toma un valor en torno al 55%. Por otra parte, si la H_0 a contrastar es la de un proceso I(1) con un cambio en su pendiente, al utilizar el contraste secuencial no se rechaza de forma espuria esta hipótesis, independientemente de la magnitud de la ruptura y de su ubicación en el periodo muestral. Por tanto, el resultado que obtenemos es que el test secuencial es, en términos generales, el que presenta mejores

¹⁷Los valores seleccionados para α (2.5, 5.0 y 10.0) son arbitrarios. Los valores 5.0 y 10.0 coinciden con los utilizados por Vogelsang y Perron (1998).

¹⁸Los valores seleccionados para β (0.5, 1.0 y 2.0) son arbitrarios. Los valores 1.0 y 2.0 coinciden con los utilizados por Vogelsang y Perron (1998).

propiedades.

En cuanto a la potencia de los tests, si suponemos que la serie, objeto de análisis, es estacionaria, implica que el valor de ψ en las ecuaciones (1.14) y (1.15) es inferior a la unidad¹⁹. Los resultados del análisis de la potencia de estos tests se exponen en las tablas 11 a 19, en las que se muestra que ésta es diferente dependiendo del tamaño muestral, si se produce un cambio en el intercepto o en la pendiente de la serie, según la magnitud de los cambios y en función de la ubicación del punto de ruptura en el periodo muestral, entre otros factores. A través de los resultados expuestos en estas tablas, obtenemos que si el verdadero p.g.d. es estacionario con un cambio en su intercepto (ver columnas $\hat{\vartheta}_\mu$), la potencia es más elevada si se utiliza el test secuencial, independientemente del tamaño muestral, de la magnitud de la ruptura, de la ubicación de la misma en el periodo muestral y si los coeficientes estimados de los parámetros autorregresivos del proceso son muy próximos a la unidad o, por el contrario, son cercanos al valor cero. Por el contrario, si la serie es estacionaria, pero presenta un cambio en su pendiente (ver columnas $\hat{\vartheta}_\tau$), el test recursivo es el que presenta una mayor potencia, en términos generales, incrementando paradójicamente su potencia cuanto más cercano se halle el p.g.d. de la serie a la raíz unitaria, especialmente si esta ruptura se produce en los periodos extremos de la muestra y, particularmente, al principio del periodo muestral.

Zivot y Andrews (1992) generan los valores críticos asintóticos y para

¹⁹Suponemos, de forma arbitraria, los siguientes valores de ψ : 0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 y 0.9.

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

muestras finitas de su estadístico $t_{DF}^{mín}$, obtenido al elegir el estadístico t más pequeño de todos los estadísticos calculados para las posibles fechas de ruptura, que se obtienen al contrastar la H_0 de raíz unitaria sin considerar ninguna ruptura estructural exógena, frente a la H_1 de proceso estacionario alrededor de una tendencia determinista que tiene una ruptura en su intercepto y/o en su pendiente. Estos autores obtienen que, aunque sus valores críticos asintóticos son más elevados, en valor absoluto, que los de Perron (1989), para un valor fijo de la fecha de ruptura, son aún mayores si éstos se calculan para muestras finitas. Asimismo, Zivot y Andrews (1992) obtienen que si se investiga el efecto de la relajación del supuesto de normalidad en la función de distribución del estadístico $t_{DF}^{mín}$ en muestras finitas y aplican su contraste a las series para las que rechazan la H_0 de raíz unitaria, estos rechazos no son muy sensibles a la relajación de aquel supuesto.

Cuando existe un error en la determinación de la fecha ruptura y, por lo tanto, en la ubicación de la ruptura en el periodo muestral, algunos autores, como Montañés y Olloqui (1999), también añaden una serie de objeciones al test de raíces unitarias de Perron (1989) aplicado a los modelos de tipo *innovational outlier*, ver ecuaciones (1.6)-(1.8). Estos autores concluyen que cuando la variable es estacionaria alrededor de una tendencia segmentada y los investigadores fracasan en determinar el periodo verdadero en el que se produce la ruptura, es más difícil rechazar la H_0 de raíz unitaria, cuanto mayor es la magnitud de la ruptura y cuando la muestra es finita. Además, Montañés y Olloqui (1999) obtienen que la potencia del test propuesto por Perron (1989) se reduce si la fecha de ruptura estimada es

posterior a la verdadera. Únicamente si el verdadero p.g.d. es estacionario alrededor de una media que cambia en un periodo del tiempo, Montañés y Olloqui (1999) obtienen que el estadístico que contrasta la H_0 de raíz unitaria muestra asintóticamente un valor correcto, en la medida en que tiende a $-\infty$, aunque se cometa un error en la determinación de la fecha de ruptura. No obstante, no se rechaza la H_0 en aquellos casos en los que la magnitud de la ruptura es diez veces superior a la desviación estándar del término de perturbación aleatoria.

En lo referente a la fecha de la ruptura, Leybourne, Mills y Newbold (1998) obtienen que si un proceso es $I(1)$ y presenta una ruptura estructural, el test DF rechaza con mayor probabilidad la H_0 de raíz unitaria cuanto más próximo se halle el punto de ruptura al principio del periodo muestral. Por tanto, paradójicamente, no siempre resultaría adecuado aumentar el tamaño muestral, si éste incremento se lleva a cabo añadiendo observaciones al final de la muestra, o si al incrementar el tamaño muestral se incluyen datos que incorporan una ruptura estructural.

Otros estudios, como el de Carrión, Sansó y Artís (1999) estiman la superficie de respuesta²⁰ del estadístico DF de raíz unitaria, que contrasta la H_0 de un proceso integrado con tendencia segmentada *versus* un proceso estacionario alrededor de una tendencia también segmentada, en función del tamaño muestral y de la fecha de ruptura, que consideran exógena con

²⁰MacKinnon (1991, 1994), Cheung y Lai (1993, 1995), Shepton (1995), Gregory y Hansen (1996) y Sansó *et al.* (1997) son algunas referencias que utilizan superficies de respuesta para calcular valores críticos en muestras finitas.

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

el fin de obtener los valores críticos de la distribución del estadístico. Estos autores consideran dos modelos de tipo *innovational outlier*, uno de ellos tiene en cuenta un cambio en la media y el otro un cambio tanto en la media como en la tendencia, y un modelo de tipo *additive outlier*, que considera únicamente un cambio en la tendencia. Carrión *et al.* (1999) concluyen que, comparando los valores críticos asintóticos calculados por Perron (1989) y Zivot y Andrews (1992), con los obtenidos a partir de las superficies de respuesta elaboradas para tamaños muestrales comprendidos entre 30 y 1250 observaciones, se obtienen unas pequeñas diferencias que ponen de manifiesto que los valores críticos asintóticos de Perron (1989) y Zivot y Andrews (1992) están sesgados por defecto.

De todo lo anterior se deduce que si se utilizan los valores críticos estándar, la mayoría de tests de raíces unitarias que tienen en cuenta cambios estructurales parecen mostrar mejores propiedades de tamaño y potencia si aumenta el tamaño de la muestra. Sin embargo, debido a que estas propiedades, en la mayoría de estos contrastes, dependen de la situación del punto de ruptura en la muestra, no creemos que sea tan evidente que un aumento del tamaño muestral lleve siempre a una mejora en las propiedades de estos tests, ya que el aumento de la muestra puede situar el cambio estructural en una zona muestral donde estas propiedades son peores. Sin embargo, sí parece ser un hecho evidente el que la potencia de la mayoría de los tests de raíces unitarias experimente una mejora cuanto mayor es la magnitud de la ruptura que incide en la serie temporal.

1.2.3 Selección del orden de retardos del proceso autorregresivo

Otro aspecto que cabe resaltar es que la función de distribución de los estadísticos que permiten contrastar la hipótesis de raíz unitaria también se ve afectada por el método seleccionado para determinar el orden de retardos (p) del proceso autorregresivo.

Zivot y Andrews (1992) destacan que el número p de regresores adicionales requeridos para llevar a cabo la regresión DFA, pueden variar dependiendo de la elección de k . El método que utilizan para seleccionar p es como el utilizado por Perron (1989), es decir, consideran un número elevado de retardos y los van reduciendo hasta encontrar el número adecuado. El criterio que escogen para ir disminuyendo p es seleccionar aquel valor para el cual el estadístico t asociado al parámetro que acompaña a la variable endógena retardada p periodos supere, en valor absoluto, el valor 1.6, de manera que si se eligiera un retardo adicional, el parámetro asociado a la variable endógena retardada $p + 1$ periodos debería ser inferior²¹ a 1.6. Cuando se trabaja con muestras finitas, las funciones de distribución de los estadísticos que utiliza para su contraste de raíz unitaria son sensibles al procedimiento que le permite determinar p . Así, en particular, si se calcula p según el procedimiento descrito anteriormente, y se fija para cada posible

²¹Para las series de Nelson y Plosser (1982), $pmáx = 8$, y para las series trimestrales de PNB del periodo de la postguerra $pmáx = 12$, que son valores similares a los obtenidos por Perron (1989).

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

fracción de la muestra donde se supone provisionalmente que se produce la ruptura, la función de distribución del estadístico $t_{DF}^{mín}$ en muestras finitas para el valor fijado de p tiende más a la distribución asintótica que si se considera una determinación de p aleatoria en muestras finitas.

El criterio escogido por Christiano (1992) para seleccionar el número de retardos máximo de la variable endógena se basa en tratar de conseguir las mejores propiedades dinámicas para los residuos estimados²², ya que las conclusiones de su artículo consideran el supuesto de que las perturbaciones aleatorias de sus modelos son i.i.d.

Tal y como se ha expuesto anteriormente, Perron (1997) muestra evidencia de que utilizando métodos de selección del número de retardos dependientes de los datos, los tests tienen mejores propiedades (tamaño estable y mayor potencia) que si se fija p *a priori* (a menos, que se seleccione el mejor valor de p), ver Ng y Perron (1995), Perron y Vogelsang (1992a) y Hall (1994). Perron (1997) utiliza dos procedimientos dependientes de los datos para seleccionar p , llevando a cabo su selección "de lo general a lo específico". El primero (*t-sig*), es un procedimiento recursivo basado en el estadístico t del coeficiente asociado al último retardo en la estimación de la autorregresión. Así, se selecciona el valor de p , de manera que el coeficiente del último retardo de orden p^* del proceso autorregresivo sea significativo y el coeficiente de un proceso autorregresivo de orden más elevado que p^* no sea significativo. El segundo (*F-sig*), se basa en un método utiliza-

²²Christiano (1992) elige un valor de $p = 4$ para el Modelo TS y $p = 3$ para el Modelo DS.

do por Said y Dickey (1984). Este procedimiento utiliza un estadístico F que contrasta si retardos adicionales hacen que todos los coeficientes sean significativos. Así, se elige un valor máximo para p , $pmáx$, y se estima un proceso autorregresivo con $pmáx$ y con $(pmáx - 1)$ retardos. Se utiliza un test F , al nivel de significación del 10%, para determinar si todos los coeficientes de los retardos son significativos conjuntamente y, por tanto, si el valor de p es el máximo. Si no resultan significativos, se estima un modelo con $(pmáx - 2)$ utilizando los valores críticos de la distribución chi-cuadrado para un nivel de significación del 10%. Este procedimiento se repite hasta conseguir que retardos adicionales al considerado hagan que los coeficientes autorregresivos no sean significativos. Cuando se utilizan muestras finitas, Perron (1997) demuestra que los dos procedimientos para seleccionar el orden de retardos p máximo del proceso autorregresivo, al contrastar la H_0 de raíz unitaria, tienen buenas propiedades de tamaño y de potencia y dominan a los procedimientos en los que se fija p . Además, obtiene que, en muestras finitas, la potencia de los tests es más elevada si se utiliza el procedimiento $t - sig$ que el $F - sig$. Perron (1997) no emplea otros métodos basados en criterios de información, como el AIC, debido a que considera que este procedimiento selecciona modelos parsimoniosos provocando que los tests de raíces unitarias presenten importantes distorsiones de tamaño y/o pérdidas de potencia.

Ng y Perron (1995) muestran que utilizando criterios de información para seleccionar el valor de p , éstos llevan a que p tienda a infinito a una tasa muy lenta, $\log(T)$, a medida que T aumenta. Este resultado es consistente

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

con otros trabajos empíricos que muestran que utilizando el procedimiento AIC se llega a una selección de p pequeña (generalmente 0 o 1) y los residuos frecuentemente exhiben una importante correlación (ver Perron, 1994). En concreto, Ng y Perron (1995) muestran, a través de ejercicios de simulación, que los procedimientos secuenciales que permiten determinar el número de retardos del proceso autorregresivo tienen ventaja sobre los métodos basados en criterios de información, ya que los primeros hacen que los tests de raíces unitarias sean más robustos en cuanto a su tamaño, sin que disminuya mucho su potencia.

Banerjee *et al.* (1992) muestran que los valores críticos para el cálculo de los estadísticos que permiten contrastar la hipótesis de raíz unitaria con o sin cambios en su nivel o en su pendiente mediante los procedimientos recursivos, rolling y secuenciales, no dependen del valor de p , salvo en el caso del estadístico razón de verosimilitud de Quandt (1960), Q_{RV} . Sin embargo, aunque los estadísticos t_{DFA} obtenidos a través de los procedimientos recursivo, rolling y secuencial consideran la fecha en la que se produce la ruptura dependiente de los datos, requieren una elección de p , que, en la práctica, no suele ser conocida. Al aumentar el valor de p (de 4 a 8) se obtiene como resultado un deterioro en el tamaño del test recursivo \hat{t}_{DF}^{max} y del test rolling \bar{t}_{DF}^{max} y una reducción en la potencia de algunos tests como el test Q_{RV} .

1.2.4 Múltiples puntos de ruptura

Hasta el momento hemos analizado contrastes de raíces unitarias que tienen en cuenta la presencia de un posible y único cambio estructural en una serie temporal. Sin embargo, muchas veces varios sucesos exógenos inciden en la serie provocando varias rupturas en su comportamiento, lo que dificulta aún más la detección de su verdadero p.g.d. El análisis relativo a las consecuencias que la presencia de múltiples cambios estructurales en las series puede ocasionar en los contrastes de raíces unitarias recibe menos atención en la literatura econométrica. La mayoría de trabajos se centran en la determinación de los cambios estructurales. Así, algunos trabajos, como el de Bai (1994, 1997) se centran en el análisis de las propiedades de la distribución asintótica de la fecha de ruptura estimada cuando en la serie existe una única ruptura. La detección de múltiples cambios estructurales ha recibido menos atención en la literatura. En esta línea destaca el trabajo de Andrews, Lee y Ploberger (1996), quienes consideran tests óptimos en modelos lineales con varianza conocida. También destaca el estudio de García y Perron (1996) que analiza el comportamiento del contraste *sup* Wald cuando se consideran dos cambios en las series temporales dinámicas²³. Liu, Wu y Zidek (1997) consideran múltiples cambios estruc-

²³Alguna contribución anterior es la de Fu y Curnow (1990), que tiene en cuenta la estimación máximo-verosímil de múltiples cambios en cualquier modelo restrictivo binomial. Yao (1988) estima el número de rupturas en la media en una secuencia de variables aleatorias normales, utilizando el Criterio de Información Bayesiano (CIB). Yao y Au (1989) estiman el número de múltiples rupturas en la media a partir de una

1.2. *Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales*

turales en un modelo lineal estimado por mínimos cuadrados, proponiendo un criterio de información para seleccionar el número de cambios. De manera independiente, Bai y Perron (1998) consideran un problema similar, aunque consideran una estructura más genérica.

Centrándonos en el objetivo principal de nuestro estudio y, por consiguiente, adentrándonos nuevamente en el contexto de los contrastes de raíces unitarias, Kim y Maddala (1991) argumentan que si existen múltiples rupturas estructurales en las series temporales, deberían aplicarse los contrastes de raíces unitarias a submuestras en las que los parámetros de regresión deben ser constantes en cada una de ellas. Otros autores muestran que la inferencia relacionada con las raíces unitarias es sensible al número de posibles rupturas. Así, Vogelsang (1994) muestra que la potencia de un test de raíces unitarias no es monótona cuando se estima un modelo con una ruptura en la serie, si el verdadero p.g.d. presenta dos rupturas. Este argumento es similar a lo apuntado por Perron (1989), cuando afirma que los modelos que no tienen en cuenta un cambio estructural están mal especificados, por lo que la inferencia lleva a que se concluya una excesiva persistencia en las series.

En la literatura de raíces unitarias, una de las contribuciones más relevantes es la de Lumsdaine y Papell (1997). Estos autores permiten que,

secuencia de variables aleatorias utilizando el criterio CIB. Yin (1988) utiliza la técnica no paramétrica de ventana móvil para estimar las rupturas en una secuencia de variables aleatorias. Feder (1975) estima los puntos de ruptura conjuntamente en regresiones polinómicas segmentadas (cambios no discretos).

bajo la H_1 de estacionariedad, se consideren dos puntos de ruptura²⁴ en la tendencia determinista de las series. La fecha en la que se producen ambas rupturas se considera desconocida, determinándose de manera endógena a partir de secuencias de estadísticos t que contrastan la H_0 de raíz unitaria²⁵. Por tanto este test es muy similar al test secuencial para cambios en los coeficientes de Banerjee *et al.* (1992), en el caso en el que sólo existe una ruptura estructural. Estos autores muestran que los tests que contrastan la H_0 de raíz unitaria son sensibles al número de rupturas, bajo la especificación alternativa²⁶. Como resultado de su análisis empírico, Lumsdaine y Papell (1997) encuentran mayor evidencia contra la H_0 de raíz unitaria que la que hallan Zivot y Andrews (1992), pero menos que la obtenida por Perron (1989). Así, rechazan la H_0 de raíz unitaria al nivel de significación del 5% para 7 de las 13 series de Nelson-Plosser y al nivel del 10% para dos series adicionales. En particular, se rechaza la H_0 de raíz unitaria para 3 de las 7 series para las que Perron (1989) rechaza esta hipótesis, pero para las que Zivot y Andrews (1992) no la rechazan, en favor del modelo alternativo con dos rupturas. Además, muestran que los datos de Nelson-Plosser exhiben dos rupturas centradas en torno a la Gran Depresión y la Segunda Guerra Mundial. Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de encontrar contrastes que sean robustos a una mala especificación

²⁴Se supone que las dos fechas de ruptura están separadas por un conjunto de datos muestrales. Para más detalles ver Bai y Perron (1995).

²⁵En otros contextos puede desearse contrastar una ruptura sin tener en cuenta si existe una raíz unitaria, como proponen Perron (1991) y Vogelsang (1994).

²⁶Lumsdaine y Papell (1997), en su análisis empírico, suponen que no se produce ninguna ruptura en la tendencia bajo la H_0 .

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

del número de rupturas. Sin embargo, Lumsdaine y Papell (1997) reiteran que el objetivo de su trabajo no es defender la preferencia por modelos con un número específico de rupturas, sino que la literatura subsiguiente debe dirigirse a seleccionar la especificación del modelo más adecuado y, por tanto, a determinar tanto el número de rupturas como el tipo de rupturas. A tal efecto, Lumsdaine y Papell (1997) consideran tres posibles modelos.

Un primer modelo en el que se permiten dos cambios estructurales en la media y otros dos en la pendiente de la tendencia determinista bajo la H_1 , al que denominan Modelo CC:

$$\begin{aligned}\Delta y_t = & \mu + \gamma t + \theta_1 DU1_t + \beta_1 DT1_t + \theta_2 DU2_t + \beta_2 DT2_t \\ & + \psi y_{t-1} + \sum_{t=1}^p \psi_t y_{t-1} + u_t.\end{aligned}\tag{1.18}$$

para $t = 1, \dots, T$, donde $\psi(L)$ es un polinomio de retardos de orden p conocido y $1 - \psi(L)L$ tiene todas las raíces fuera del círculo unitario. $DU1_t$ y $DU2_t$ son variables ficticias que recogen un cambio en la media que se produce en los periodos k_1 y k_2 , respectivamente, y $DT1_t$ y $DT2_t$ son variables ficticias que recogen un cambio en la pendiente de la tendencia. Es decir, $DU1_t = 1$ ($t > k_1$), $DU2_t = 1$ ($t > k_2$), $DT1_t = (t - k_1)1$ si $t > k_1$ y $DT2_t = (t - k_2)1$ si $t > k_2$ y toman valor cero en los demás casos.

Otro de los modelos que tienen en cuenta Lumsdaine y Papell (1997) recoge dos cambios en el nivel de la serie, Modelo AA:

$$\Delta y_t = \mu + \gamma t + \theta_1 DU1_t + \theta_2 DU2_t + \psi y_{t-1} + \sum_{t=1}^p \psi_t y_{t-1} + u_t.$$

El último modelo al que se refieren estos autores es aquél que permite dos cambios en la media y uno en la pendiente de la serie, Modelo CA:

$$\Delta y_t = \mu + \gamma t + \theta_1 DU1_t + \beta_1 DT1_t + \theta_2 DU2_t + \psi y_{t-1} + \sum_{t=1}^p \psi_t y_{t-1} + u_t.$$

Algunos de los resultados empíricos difieren según el modelo utilizado. Lumsdaine y Papell (1997), con el objeto de determinar el orden de retardos del proceso autorregresivo, obtienen los valores críticos mediante el procedimiento *bootstrap* para una muestra de 125 observaciones, estimando modelos ARMA para cada una de las series (bajo la H_0 de no rupturas) y suponiendo que estos modelos representan el verdadero p.g.d. Estos autores determinan el orden de retardos del proceso autorregresivo siguiendo la metodología de Campbell y Perron (1991), Zivot y Andrews (1992) y Perron (1994), al utilizar un número máximo de retardos según el procedimiento DFA²⁷. Por tanto, Lumsdaine y Papell (1997) abogan por un método dependiente de los datos para seleccionar el orden de retardos del proceso autorregresivo, mediante un procedimiento que va de lo general a lo específico, ya que opinan que es mejor que si se fija *a priori*.

²⁷Lumsdaine y Papell (1997), al igual que Zivot y Andrews (1992) en el contexto de una ruptura, consideran que la ampliación de estos resultados al caso en el que $p \xrightarrow{p} \infty$ no es trivial.

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

Otros autores, entre los que destacan Clemente, Montañés y Reyes (1998) también tienen en cuenta que algunas series temporales suelen presentar más de una ruptura, por lo que, según estos autores, se debe introducir un gran número de puntos de rupturas en la especificación de los modelos, con el fin de obtener los estadísticos adecuados que permitan detectar la presencia o no de raíz unitaria. Clemente *et al.* (1998) amplían el trabajo de Perron y Vogelsang (1992a) al caso en el que las variables exhiben doble cambio en su media, derivan la distribución asintótica de los estadísticos y los tabulan para determinados tamaños muestrales y para diferentes valores de los parámetros cambiantes de las variables que representan el crecimiento de la variable endógena retardada. Así, contrastan la hipótesis nula:

$$H_0 : y_t = y_{t-1} + d_1 D1(k)_t + d_2 D2(k)_t + u_t,$$

frente a la alternativa:

$$H_1 : y_t = \mu + \theta_1 DU1_t + \theta_2 DU2_t + \varepsilon_t,$$

siendo $D1(k)_t = 1$ si $t = k_1 + 1$ y 0 en otro caso; $D2(k)_t = 1$ si $t = k_2 + 1$ y 0 en los demás casos; $DU1_t = 1$ si $t > k_1$ y 0 en otro caso, y $DU2_t = 1$ si $t > k_2$ y 0 en el resto de casos, donde $k_i = \delta_i T$ ($i = 1, 2$), siendo $0 < \delta_i < 1$ y $\delta_2 > \delta_1$. En el caso en el que ambas rupturas se consideren *innovational outlier*, se contrasta la hipótesis de raíz unitaria estimando el modelo siguiente:

$$y_t = \mu + \psi y_{t-1} + d_1 D1(k)_t + d_2 D2(k)_t + \theta_1 DU1_t + \theta_2 DU2_t + \sum_{i=1}^p \psi_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (1.19)$$

obteniendo el valor mínimo del pseudo-ratio t que permite contrastar si el parámetro autorregresivo, ψ , es igual a la unidad, para todas las posibles combinaciones de fechas de rupturas. Asimismo, Clemente *et al.* (1998) también consideran el caso en el que los cambios en la tendencia sean de tipo *additive outlier*, por lo que se contrasta la hipótesis de raíz unitaria a través de un procedimiento basado en dos pasos. El primero, estima el siguiente modelo:

$$y_t = \mu + \theta_1 DU1_t + \theta_2 DU2_t + \tilde{y}_t, \quad (1.20)$$

subsiguientemente, se lleva a cabo el contraste a través del mínimo ratio t que contrasta la hipótesis $\psi = 1$ en el siguiente modelo:

$$\tilde{y}_t = \sum_{i=0}^p d_{1i} D1(k)_{t-i} + \sum_{i=0}^p d_{2i} D2(k)_{t-i} + \psi \tilde{y}_{t-1} + \sum_{i=1}^p \psi_i \Delta \tilde{y}_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (1.21)$$

La conclusión que extraen a través de su estudio empírico es que los resultados que obtienen al aplicar el estadístico t_{DF} cuando se contrasta la H_0 de raíz unitaria sin ruptura, o a través de los estadísticos t_{DF} de Perron y Vogelsang (1992a), que sí tienen en cuenta dos ruptura bajo la H_0 de proceso I(1), son diferentes. Así, por ejemplo, cuando se aplica

1.2. Contrastes de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales

el estadístico t_{DF} a las series de tipos de interés a largo plazo del Reino Unido y de Estados Unidos, para el periodo comprendido entre el primer trimestre de 1980 y el último de 1995, y se considera la H_0 de raíz unitaria sin ruptura, no rechaza esta hipótesis. Por el contrario, si se considera el modelo *innovational outlier* con dos rupturas (1.19) y se contrasta la H_0 de raíz unitaria, se obtiene que ambas series son estacionarias alrededor de una media que cambia a principios de los años ochenta y a finales de 1991. Si el modelo utilizado es un modelo *additive outlier* (1.20) y (1.21), no se rechaza tampoco esta H_0 para Estados Unidos, pero sí para el Reino Unido. Por tanto, nuevamente este trabajo enfatiza la importancia de considerar el número de rupturas cuando se pretende caracterizar las propiedades de las series temporales. Cabe señalar que estos autores eligen los posibles puntos de ruptura de manera exógena, a partir de la inspección visual de la evolución de las series. Además, en cuanto al orden de retardos del proceso autorregresivo p , se utiliza el procedimiento seguido en Perron y Vogelsang (1992a), recomendado en Ng y Perron (1995), empleando un valor máximo de $p = 5$.

Arestis y Biefang-Frisancho (1999) aplican, a series de tasas de desempleo de 26 países de la OCDE, contrastes de raíces unitarias que tienen en cuenta dos puntos de ruptura endógenos en dos modelos *innovational outlier*. Uno de ellos supone un doble cambio en la media de una variable, como la regresión (1.19) de Clemente *et al.* (1998), y otro considera rupturas en el intercepto y en la tendencia, de la misma forma que en el Modelo CC (1.18) de Lumsdaine y Papell (1997). Los valores críticos para

contrastar la H_0 de raíz unitaria son los de Clemente *et al.* (1998, p. 178) y Lumsdaine y Papell (1997, p. 216), respectivamente. Estos modelos eligen el máximo número de retardos del proceso autorregresivo reduciéndolos hasta que el último retardo sea significativo al nivel del 10% o a un nivel más bajo (Ng y Perron, 1995). Los resultados de sus contrastes llevan a la conclusión de que los *shocks* afectan al comportamiento de las series analizadas únicamente a corto plazo y, por ende, los tests de raíces unitarias que no tienen en cuenta la presencia de rupturas estructurales presentan errores de especificación y sugieren una excesiva persistencia de los *shocks*.

1.3 Contrastes de estacionariedad en presencia de cambios estructurales

Como consecuencia de que la mayor parte de las series económicas no poseen información suficiente acerca de la presencia o no de raíces unitarias, es útil tener en consideración también los tests que contrastan la H_0 de estacionariedad, en lugar de la hipótesis clásica de raíz unitaria. Así, según Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin (1992), si los tests que plantean la H_0 de raíz unitaria llegan a conclusiones similares a las de los tests que consideran la H_0 de estacionariedad, se pueden inferir las propiedades estadísticas de las series analizadas con mayor grado de confianza. Sin embargo, si ambos tipos de contrastes obtienen soluciones diferentes, entonces no se puede concluir, con cierto grado de fiabilidad, las características verdaderas de los datos. Además, según Ahn (1994), es necesario utilizar también tests de

1.3. Contrastes de estacionariedad en presencia de cambios estructurales

estacionariedad para analizar el comportamiento de las series temporales, ya que evitan establecer una H_0 puntual, cuyo rechazo se puede interpretar como evidencia de no estacionariedad en las series. Además, Ahn (1994) señala que este tipo de contrastes permite distinguir una serie estacionaria con tendencia cambiante de las series no estacionarias.

Un trabajo que trata de discernir la hipótesis de estacionariedad, frente a la de proceso no estacionario, es el de Park y Choi (1988), al considerar un estadístico que es esencialmente el estadístico F que contrasta la significatividad de los parámetros asociados a tendencias deterministas. Bajo el enfoque de Park y Choi (1988), este estadístico toma valor cero bajo la H_0 de estacionariedad, pero no bajo la hipótesis de raíz unitaria. Rudebusch (1990) tiene en cuenta el estadístico t_{DF} , pero lo estima tanto en modelos estacionarios alrededor de una tendencia, como en modelos estacionarios en diferencias²⁸, obteniendo la función de distribución del estadístico t_{DF} por *bootstrap*.

DeJong *et al.* (1989) utilizan la regresión DF siguiente:

$$y_t = \mu + \gamma t + \psi y_{t-1} + u_t$$

bajo los supuestos $\psi = 1$ o $\psi = 0.85$, no pudiendo rechazar ambas hipótesis, lo que es razonable en virtud de los resultados que obtienen en sus

²⁸Utilizando los datos de Nelson-Plosser no puede rechazar ni el modelo estacionario alrededor de una tendencia, ni el modelo estacionario en diferencias.

experimentos Monte Carlo relativos a la potencia del test. Los primeros intentos razonables para contrastar la hipótesis de estacionariedad mediante una restricción paramétrica no consiguen obtener un modelo adecuado que permita contrastar esta H_0 , debido a que, si se tiene en cuenta la regresión DF, la H_0 de estacionariedad es una hipótesis compuesta, ya que ψ puede tomar cualquier valor inferior a la unidad bajo dicha hipótesis ($H_0 : \psi < 1$).

Otros tests que contrastan la H_0 de estacionariedad frente a la alternativa de no estacionariedad son los de Park (1990), Saikkonen y Luukkonen (1990), Bierens (1991), Herce (1991), Choi (1992), DeJong *et al.* (1992), Kahn y Ogaki (1992), Tsay (1993) y Stock (1994). Además, Choi y Yu (1993) muestran una estructura general elaborando contrastes que consideran la $H_0 : I(m)$, frente a la $H_1 : I(m+r)$ y Choi y Ahn (1999) desarrollan contrastes que consideran la H_0 de estacionariedad en series temporales multivariantes.

Sin embargo, la mayor parte de los tests de raíces unitarias que consideran la presencia de una ruptura estructural son contrastes que tienen en cuenta la H_0 de no estacionariedad, frente a la alternativa de estacionariedad alrededor de funciones de polinomios temporales que presentan rupturas estructurales. Los procedimientos que tratan de contrastar la H_0 de estacionariedad con una ruptura estructural frente a la alternativa de no estacionariedad en una serie temporal univariante son más escasos.

Algunos de los tests más utilizados para contrastar la H_0 de estacionariedad son el de Kwiatkowski *et al.* (1992), al que denominamos a partir de

1.3. Contrastes de estacionariedad en presencia de cambios estructurales

ahora test KPSS, y el de Leybourne y McCabe (1994), al que denominamos en forma abreviada test LMC. Sin embargo, en Kwiatkowski *et al.* (1992) y Leybourne y McCabe (1994) no se tiene en cuenta cómo afecta a estos tests la presencia de un posible cambio estructural en las series. Por tanto, como consecuencia de la relevancia de estos tests en la literatura econométrica y debido al vacío existente en la misma en relación a las propiedades de los mismos cuando la tendencia de la serie, objeto de identificación, se ve alterada en algún momento del tiempo por efecto de algún *shock* exógeno, en la presente Sección llevamos a cabo un estudio de simulación de Monte Carlo con el fin de poder conocer mejor cómo se comportan estos tests ante cambios estructurales en las series y poder así cubrir ese vacío.

El test KPSS contrasta la H_0 de estacionariedad de una serie temporal y_t , $t = 1, 2, \dots, T$, al igual que el de Leybourne *et al.* (1994), contrariamente a los tests tradicionales que consideran como H_0 la presencia de una o más raíces unitarias. Kwiatkowski *et al.* (1992), de la misma manera que Leybourne *et al.* (1994), utilizan una determinada parametrización para representar las variables estacionarias y las no estacionarias, de manera que les permita contrastar la hipótesis de estacionariedad. De manera específica, eligen una representación de componentes, en la que la serie temporal objeto de estudio se representa como la suma de una tendencia determinista (t), una tendencia estocástica (r_t) y un término de perturbación aleatoria estacionario (ε_t):

$$y_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t, \quad (1.22)$$

donde r_t es un paseo aleatorio,

$$r_t = r_{t-1} + e_t, \quad (1.23)$$

en el que el término de perturbación aleatoria e_t es un proceso i.i.d. $(0, \sigma_e^2)$ y el valor inicial r_0 se considera fijo y desempeña el papel de intercepto. Para contrastar la hipótesis de estacionariedad, se contrasta que la varianza de e_t sea nula ($\sigma_e^2 = 0$). Bajo la H_0 , si ε_t se supone que es un proceso estacionario, y_t sería una variable estacionaria en torno a una tendencia, en la medida en que se cumpla que $\xi \neq 0$, o estacionario en torno a una constante (r_0), si $\xi = 0$. El estadístico utilizado²⁹ es de tipo multiplicador de Lagrange³⁰ (ML), y permite contrastar la $H_0 : \sigma_e^2 = 0$ bajo los supuestos de que e_t sigue una distribución normal y que ε_t es i.i.d. $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Si $\hat{\varepsilon}_t$ es el residuo de la regresión de y_t respecto a un intercepto³¹ y $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ es la varianza del residuo de esta regresión (suma del cuadrado de los residuos, dividida por el tamaño muestral, T), se define la suma parcial de los residuos (S_t) de la siguiente manera:

²⁹La ecuación (7) de Kwiatkowski *et al.* (1992, p. 163) permite relacionar su estadístico y el de DF estándar.

³⁰Nyblom y Makelainen (1983) utilizan el estadístico localmente invariante y óptimo y lo adaptan para el caso de estacionariedad en torno a un nivel. Nyblom (1986) considera un modelo equivalente al KPSS utilizando dicho estadístico.

³¹Bajo la H_0 de estacionariedad en torno a un nivel, el residuo de la regresión de y_t respecto a un intercepto es el siguiente: $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \bar{y}$, $t = 1, 2, \dots, T$.

1.3. *Contrastes de estacionariedad en presencia de cambios estructurales*

$$S_t = \sum_{i=1}^t \hat{\varepsilon}_i, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

El estadístico ML ³² es:

$$ML = \sum_{t=1}^T S_t^2 / \hat{\sigma}_\varepsilon^2. \quad (1.24)$$

Bajo la hipótesis de estacionariedad, este estadístico converge a $\int_0^1 V_X^2$, donde $V_X(r) = W(r) - [\int_0^r X'] [\int_0^1 X X']^{-1} [\int_0^1 X dW]$ es un puente browniano generalizado. Asimismo, el valor del estadístico ML , en el test KPSS, es muy sensible a la elección del tamaño muestral (T) y al número de retardos del término de perturbación aleatoria ε_t (l).

La función de distribución del estadístico (1.24) es de una cola y se deriva bajo el supuesto de que el término de perturbación aleatoria ε_t es i.i.d. $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Bajo supuestos adicionales, como el de que r_t es un paseo aleatorio con una distribución normal y que el término de perturbación aleatoria, e_t , es ruido blanco con una distribución normal, el estadístico (1.24) coin-

³²Saikkonen y Lukkonen (1990) derivan un estadístico de la misma forma mediante un test localmente invariante, insesgado y óptimo, que contrasta la hipótesis $\theta = -1$ en el modelo $\Delta y_t = \nu_t + \theta \nu_{t-1}$, con $E(y_0)$ desconocida y que toma el papel de intercepto, con ν_t i.i.d. y distribución normal.

cide con el estadístico localmente invariante y óptimo³³ de Nabeya y Tanaka (1988). Sin embargo, debido a que en muchas aplicaciones no es creíble el supuesto de que el término de perturbación aleatoria es ruido blanco, ya que implicaría que bajo la H_0 la variable debería tener desviaciones i.i.d. de la tendencia, el denominador apropiado para el estadístico del test ML es un estimador consistente de la varianza de largo plazo de ε_t , en lugar de $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$. Así, definiendo la varianza de largo plazo de ε_t de la siguiente manera:

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} E(S_T^2),$$

se construye un estimador consistente de σ^2 , al que denominamos $s^2(l)$, a partir de los residuos $\hat{\varepsilon}_t$, como en Phillips (1987) o en Phillips y Perron (1988). Específicamente, Kwiatkowski *et al.* (1992) utilizan una corrección de tipo Newey-West del estimador de la varianza de largo plazo:

$$s^2(l) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 + 2T^{-1} \sum_{s=1}^l w(s, l) \sum_{t=s+1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-s},$$

donde $w(s, l)$ es una función opcional de ponderación que corresponde a una ventana espectral³⁴. Por tanto, el estadístico, con independencia de

³³Nyblom y Makelainen (1983) obtienen el estadístico localmente invariante y óptimo para el caso de estacionariedad alrededor de un nivel, como el considerado en Kwiatkowski *et al.* (1992). Nyblom (1986) contrasta el coeficiente del paseo aleatorio. Otras referencias importantes son las de Tanaka (1983), Franzini y Harvey (1983) y Leybourne y McCabe (1989) y se encuentra un estudio genérico en Harvey (1989).

³⁴Se usa la ventana de Bartlett $w(s, l) = 1 - s/(l + 1)$ como en Newey-West, lo que garantiza la no negatividad de $s^2(l)$.

1.3. Contrastes de estacionariedad en presencia de cambios estructurales

si el modelo incorpora o no una tendencia determinista³⁵, se construye utilizando la serie de residuos adecuada, mediante la expresión:

$$\hat{\eta} = T^{-2} \sum S_t^2 / s^2(l), \quad (1.25)$$

de manera que se rechaza la H_0 si excede a su valor crítico³⁶.

Kwiatkowski *et al.* (1992), siguiendo la idea de Phillips (1987) y Phillips y Perron (1988), relativa a la obtención de la distribución asintótica del estadístico, proponen una versión modificada del estadístico ML que es válida asintóticamente bajo condiciones más generales. Así, la distribución asintótica no es estándar, correspondiendo a órdenes elevados de puentes Brownianos.

Los resultados que obtienen Kwiatkowski *et al.* (1992) al aplicar este contraste a las series de datos de Nelson-Plosser, sin considerar las posibles rupturas que pueden hallarse en ellas, dependen de la tendencia determinista acomodada. Para casi todas estas series no se puede rechazar la hipótesis de estacionariedad alrededor de un nivel, pero para muchas series tampoco se puede rechazar la hipótesis de estacionariedad alrededor de una tendencia³⁷. Por tanto, estos autores ponen en duda la existencia de raíz unitaria

³⁵Para referirnos al estadístico que se construye a partir de los residuos de la regresión que incluye una tendencia determinista, utilizamos el símbolo $\hat{\eta}_\tau$, y si incluye únicamente una constante, el estadístico es $\hat{\eta}_\mu$.

³⁶Los valores críticos asintóticos para los estadísticos $\hat{\eta}_\tau$ y $\hat{\eta}_\mu$ son los que aparecen en Kwiatkowski *et al.* (1992, p. 166).

³⁷Estos resultados están en concordancia con los de DeJong *et al.* (1989) y Rudebusch

para muchas series, a pesar de que el test DF (y otros tests de raíces unitarias) no rechazan la H_0 de raíz unitaria. Sin embargo, debemos señalar que el test KPSS depende del orden de retardos del proceso autorregresivo (l) del término de perturbación aleatoria (ε_t), de manera que si éste es muy elevado, es necesario aumentar el tamaño muestral para que mejoren las propiedades del mismo.

El otro test para el que analizamos su comportamiento ante la presencia de un punto de ruptura en la tendencia determinista es el test LMC de Leybourne y McCabe (1994). Nosotros consideramos como H_0 que la serie presenta un proceso estacionario ARIMA $(p, 0, 0)$, mientras que la H_1 es que se trata de un modelo ARIMA $(p, 1, 1)$, con un coeficiente MA(1) positivo. Así, pretendemos analizar la estacionariedad o no de las series, teniendo en cuenta que la mayor parte de las series no estacionarias presentan componentes³⁸ MA(1). El test LMC se basa en un modelo de componentes muy similar al test KPSS; no obstante, difiere de él, entre otros aspectos, en el tratamiento de la autocorrelación bajo una misma H_0 , ya que el test (1990) y con los obtenidos a través del análisis bayesiano de DeJong y Whiteman (1991), y Phillips (1991).

³⁸ Agiakloglou y Newbold (1992) y Schwert (1987, 1989) muestran, a través de simulaciones, que si el p.g.d. de una serie se puede representar mediante un modelo ARIMA $(0, 1, 1)$, los valores críticos de los contrastes de raíces unitarias estándar, como los de DFA y Phillips y Perron (1988) no son apropiados, a menos que el coeficiente MA tienda a un valor de cero. En particular, sus resultados muestran que si el coeficiente MA es grande y positivo, y se utilizan los valores críticos asintóticos estándar de DF, estos tests rechazan de manera espuria y con mayor frecuencia la H_0 de raíz unitaria. Pantula (1991) también sostiene este resultado mediante un desarrollo teórico y a través de simulaciones.

1.3. Contrastes de estacionariedad en presencia de cambios estructurales

LMC tiene en cuenta la autocorrelación en forma paramétrica, incluyendo términos de retardos de la variable endógena (y_t) en la especificación inicial del modelo³⁹, mientras que el test KPSS modifica el modelo de forma no paramétrica⁴⁰. Además, mientras que el test KPSS depende del orden de retardos (l) del proceso autorregresivo del término de perturbación aleatoria, el test LMC no se ve afectado si se escoge un número de componentes (p) del proceso autorregresivo de y_t por encima del verdadero⁴¹, ya que su inferencia es bastante robusta a la elección de este valor⁴². Adicionalmente, el test LMC es consistente de orden T , mientras que el KPSS es consistente de orden T/l .

El modelo del que parte el test LMC tiene en cuenta la siguiente estructura autorregresiva:

$$\Phi(L)y_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t, \quad (1.26)$$

siendo r_t un paseo aleatorio, $r_t = r_{t-1} + e_t$, en el que r_0 se considera fijo y $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$ es un polinomio autorregresivo, donde L es el operador de retardos con todas las raíces fuera del círculo unitario, p el orden de retardos del término autorregresivo, ε_t es un proceso i.i.d.

³⁹En este sentido, se puede considerar que es análogo al test de raíz unitaria DFA convencional.

⁴⁰La modificación es análoga al ajuste no paramétrico que lleva a cabo el test de Phillips y Perron (1988), respecto al test DF.

⁴¹Se puede considerar que el test KPSS es una versión simplificada del test LMC, bajo el supuesto de que $p = 0$.

⁴²Ver Leybourne y Mc Cabe (1994) y Lee (1996).

$(0, \sigma_\varepsilon^2)$ y e_t es también un proceso i.i.d. $(0, \sigma_e^2)$. Asimismo, se supone que ε_t y e_t son independientes entre sí.

Bajo determinadas condiciones de regularidad, el modelo estructural (1.26) es equivalente, en segundo orden, a un proceso ARIMA $(p, 1, 1)$ reducido (Harvey, 1989):

$$\Phi(L)(1-L)y_t = \xi + (1-\theta L)\zeta_t, \quad 0 < \theta < 1, \quad (1.27)$$

en el que ζ_t se distribuye como un proceso i.i.d. $(0, \sigma_\zeta^2)$, siendo $\sigma_\zeta^2 = \sigma_e^2/\theta$, y θ se relaciona con σ_e^2 de la siguiente manera⁴³: $\theta = (\lambda + 2 - (\lambda^2 + 4\lambda)^{1/2})/2$, siendo $\lambda = \sigma_e^2/\sigma_\varepsilon^2$. Para contrastar la H_0 de estacionariedad, ARIMA $(p, 0, 0)$, frente a la alternativa de un modelo ARIMA $(p, 1, 1)$ con coeficientes del proceso MA positivos, se contrasta la $H_0 : \sigma_e^2 = 0$ frente a la $H_1 : \sigma_e^2 > 0$.

Para implementar el test LMC se construye la serie y_t^* :

$$y_t^* = y_t - \sum_{s=1}^p \phi_s^* y_{t-s}, \quad (1.28)$$

donde ϕ_s^* son los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros ϕ_s obtenidos a partir de la estimación del modelo ARIMA $(p, 1, 1)$:

$$\Delta y_t = \xi + \sum_{s=1}^p \phi_s \Delta y_{t-s} + \zeta_t - \theta \zeta_{t-1},$$

⁴³ Para $0 < \sigma_e^2 < \infty$ y $0 < \theta < 1$.

1.3. Contrastes de estacionariedad en presencia de cambios estructurales

y se calculan los residuos de la regresión de y_t^* sobre un intercepto (si $\xi = 0$) o sobre una tendencia determinista (si $\xi \neq 0$). Si denominamos a $\hat{\varepsilon}_t$ como los residuos de esta regresión, el estadístico de tipo ML ($\hat{\nu}$) que se construye es el siguiente⁴⁴:

$$\hat{\nu} = T \sum_{t=1}^T S_t^2 / s^2, \quad (1.29)$$

donde s^2 es un estimador consistente de la varianza de largo plazo de ε_t , y S_t^2 es la suma parcial de los residuos $\hat{\varepsilon}_t$ al cuadrado. Se rechaza la hipótesis de estacionariedad si el estadístico $\hat{\nu}$ excede a su valor crítico⁴⁵.

Como se ha expuesto anteriormente, nosotros analizamos, a través de experimentos de simulación de Monte Carlo, cómo afecta la presencia de una ruptura, localizada en el nivel o en la pendiente de una serie temporal, sobre los resultados que se extraen al aplicar los tests KPSS y LMC, cuando el verdadero p.g.d. es estacionario y el tamaño muestral es pequeño (50, 100 y 300 observaciones). En línea con Perron (1989) y Leybourne *et al.* (1998), entre otros autores, consideramos un único cambio estructural y también suponemos que éste es conocido *a priori*.

En las columnas $\hat{\eta}_\mu$, de las tablas 20 a 22, y en las $\hat{\nu}_\mu$, de las tablas 23 a 25 se exponen las tasas de rechazo espurio (al nivel de significación

⁴⁴Para referirnos al estadístico construido a partir de los residuos de la regresión que incluye tendencia determinista utilizamos el símbolo $\hat{\nu}_\tau$ y si sólo incluye una constante, el estadístico es $\hat{\nu}_\mu$.

⁴⁵Los valores críticos asintóticos para los estadísticos $\hat{\nu}_\tau$ y $\hat{\nu}_\mu$ son los que aparecen en Kwiatkowski *et al.* (1992, p. 166), con terminología $\hat{\eta}_\tau$ y $\hat{\eta}_\mu$, respectivamente.

del 5%) de la H_0 de estacionariedad en torno a un intercepto, mientras que las columnas $\hat{\eta}_\tau$, de las tablas 20 a 22, y las columnas $\hat{\nu}_\tau$ de las tablas 23 a 25, recogen las tasas de rechazo espurio de la H_0 de estacionariedad alrededor de una tendencia, cuando el verdadero p.g.d. es estacionario con un cambio en el intercepto de magnitud α ⁴⁶, producido en el momento δT , para muestras de tamaños 50, 100 y 300, respectivamente⁴⁷.

Las columnas $\hat{\eta}_\mu$, de las tablas 26 a 28, y las $\hat{\nu}_\mu$, de las tablas 29 a 31, exponen las tasas de rechazos espurio (al nivel de significación del 5%) de la H_0 de estacionariedad en torno a un intercepto, mientras que en las columnas $\hat{\eta}_\tau$, de las tablas 26 a 28, y en las de $\hat{\nu}_\tau$, de las tablas 29 a 31, se representan las tasas de rechazos espurio de la H_0 de estacionariedad alrededor de una tendencia, si el verdadero p.g.d es estacionario en torno a una tendencia cuya pendiente experimenta un cambio de magnitud⁴⁸ β .

A partir de los resultados obtenidos en estas tablas, podemos decir que estos tests rechazan con elevada frecuencia la hipótesis de estacionariedad, cuando se produce un cambio en el nivel o en la tendencia de la serie objeto de análisis. Además, la tasa de rechazo varía dependiendo del tamaño muestral, de la ubicación del punto de ruptura en el periodo muestral y de

⁴⁶Los valores de α elegidos en los ejercicios de simulación ($\alpha = 2.5, 5.0$ y 10.0) son arbitrarios, aunque idénticos a los de Leybourne *et al.* (1998).

⁴⁷Todos los cálculos se han programado en Ox, versión 2.1 (Doornik, 1998), y las simulaciones se han basado en 10000 réplicas para cada caso analizado.

⁴⁸Los valores de β elegidos en los ejercicios de simulación ($\beta = 0.5, 1.0$ y 2.0) son arbitrarios, aunque idénticos a los de Leybourne *et al.* (1998). Los dos últimos valores de β también se utilizan en Vogelsang y Perron (1998).

1.3. Contrastes de estacionariedad en presencia de cambios estructurales

la magnitud de la ruptura, por lo que es necesario tener en cuenta estos aspectos al utilizar este tipo de contrastes. A tal efecto, demostramos que, paradójicamente, la tasa de rechazo espurio de la hipótesis de estacionariedad (alrededor de una constante o de una tendencia) es mayor cuanto más elevado es el tamaño muestral en ambos tests. Asimismo, la tasa de rechazo espurio aumenta con la magnitud de la ruptura, excepto cuando se contrasta la H_0 de estacionariedad alrededor de una tendencia, a través del test LMC, y se produce un cambio en la pendiente en una fracción de la muestra no muy próxima a sus extremos. Respecto a la ubicación de la fecha de ruptura en la muestra, se suele obtener, en ambos tipos de contrastes, un rechazo mayor cuanto más centrado se halle el punto de ruptura en ella o, por el contrario, si se encuentra muy próximo a los extremos del periodo muestral. Sin embargo, si se produce un cambio en el intercepto de la serie temporal objeto de estudio y la H_0 que se contrasta es la de estacionariedad alrededor de una tendencia, tanto el test KPSS como el LMC presentan tasas de rechazo espurio de dicha hipótesis que aumentan cuanto menos centrado esté el punto de ruptura en la muestra o si no se halla en los periodos más extremos de la misma (ver Figuras 1 y 2, respectivamente). En cuanto a la comparación entre estos dos tests, obtenemos que si la serie es estacionaria y presenta un cambio en su nivel, el test LMC rechaza con mayor probabilidad que el KPSS la hipótesis de estacionariedad en torno a un intercepto o alrededor de una tendencia, disminuyendo las diferencias entre ellos a medida que el tamaño muestral aumenta. Asimismo, cuando se produce un cambio estructural en la pendiente de una serie, el test KPSS rechaza con mayor probabilidad que el test LMC la H_0 de estacionariedad

en torno a un intercepto, mientras que si la hipótesis que se contrasta es la de estacionariedad alrededor de una tendencia, la tasa de rechazo es mayor si se utiliza el test LMC, aunque, de nuevo, las diferencias entre ambos tests se reducen a medida que aumenta el tamaño muestral.

Por otra parte, Ahn (1994) analiza varios contrastes que tienen en cuenta la H_0 de estacionariedad con un posible punto de ruptura desconocido, frente a la alternativa de no estacionariedad, aplicándolos a series univariantes y multivariantes⁴⁹. Ahn (1994) demuestra que sus estadísticos se vuelven divergentes cuando se ignora la ruptura estructural, por lo que los modifica de manera que tengan en cuenta posibles rupturas desconocidas, mediante el procedimiento de Zivot y Andrews (1992) de elección de las rupturas a través del supremo de los estadísticos.

Ahn (1994) considera el sistema de ecuaciones:

$$y_t = Ac_t + x_t, \quad (1.30)$$

donde y_t representa un vector de series $n \times 1$, c_t es un vector de polinomios temporales de orden $(p + 1) \times 1$ y A representa una matriz de parámetros $n \times (p + 1)$. De manera específica, $c_t = [1, t, \dots, t^p]'$, con una matriz de ponderación apropiada $h_T, h_T^{-1}d_{[Tr]} \rightarrow c(r)$ en $D[0, 1]$. Por tanto, $\int_0^1 c(r)c(r)'dr$ no es singular y definida positiva (ver Park, 1990; 1992). En este caso, $h_T = \text{diag}[1, T, \dots, T^p]$ y $c(r) = [1, r, \dots, r^p]'$.

⁴⁹Los contrastes propuestos por Ahn (1994) son variantes de los contrastes de estacionariedad y de cointegración sugeridos por Choi y Ahn (1993, 1999).

1.3. *Contrastes de estacionariedad en presencia de cambios estructurales*

La H_0 que contrastan es si la variable x_t es estacionaria cuando existen múltiples rupturas estructurales:

$$H_0 : x_t = I(0) \quad \text{con rupturas estructurales,} \quad (1.31)$$

frente a la alternativa:

$$H_1 : x_t^{(i)} = I(q_i), \quad q_i \geq 1 \text{ para algún } i. \quad (1.32)$$

La H_0 (1.31) es equivalente a considerar que cada una de las series del sistema de ecuaciones dadas en (1.30) es estacionaria posiblemente alrededor de tendencias temporales con un orden apropiado y con rupturas estructurales. Bajo la H_1 (1.32), se permite que cada elemento de x_t tenga un orden diferente de integración, pero se requiere que al menos un elemento sea no estacionario.

Para construir sus tests, Ahn (1994) transforma la ecuación (1.30), como en Choi y Ahn (1993, 1999) y Choi y Yu (1993), a través de una serie de sumas, obteniendo:

$$P_t = Ag_t + S_t, \quad (1.33)$$

donde $P_t = \sum_{j=1}^t y_j$, $g_t = \sum_{j=1}^t c_j$ y $S_t = \sum_{j=1}^t x_j$.

Bajo la H_0 se obtiene que $x_t = w_t$, siendo $\{w_t\}$ un proceso lineal que cumple los supuestos A1-A7 que aparecen en Ahn (1994, p. 6), y bajo la alternativa, $\Delta^i x_t^{(i)} = w_t^{(i)}$. Así, teniendo en cuenta sus supuestos A1-A5 y A6, se obtiene, como en Phillips y Solo (1992, p. 985):

$$T^{-1/2} \sum_{t=1}^{[Tr]} w_t \Rightarrow B(r), \quad (1.34)$$

donde, $B(r)$ es un movimiento Browniano con matriz de covarianzas Ω y $[\cdot]$ denota la parte entera. Además, teniendo en cuenta los resultados de Hannan y Heyde (1972), se tiene que, bajo los supuestos A1, A4, A5 y un supuesto implícito en A2, que:

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T w_t w_t' \xrightarrow{p} \Sigma,$$

donde $\Sigma = E(w_t w_t') = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \Psi C_i'$. El supuesto A3 asegura que la distribución límite del proceso de sumas (1.34) no degenera y asegura que $\{w_t\}$ no tenga una raíz unitaria MA.

Los estadísticos para contrastar la H_0 de estacionariedad con rupturas estructurales que se obtienen a partir de los de Choi y Ahn (1993, 1999), son los siguientes:

$$LM_I = tr \left\{ \left(T^{-1} \sum_{t=2}^T \Delta \tilde{S}_t \tilde{S}'_{t-1} - \tilde{\Omega}'_1 \right) \tilde{\Omega}_l^{-1} \left(T^{-1} \sum_{t=2}^T \tilde{S}_{t-1} \Delta \tilde{S}'_t - \tilde{\Omega}_1 \right) \tilde{\Omega}_l^{-1} \right\},$$

$$LM_{II} = tr \left\{ \left(\sum_{t=2}^T \Delta \tilde{S}_t \tilde{S}'_{t-1} - T \tilde{\Omega}'_1 \right) \left(\sum_{t=2}^T \tilde{S}_{t-1} \tilde{S}'_{t-1} \right)^{-1} \right\}$$

1.3. Contrastes de estacionariedad en presencia de cambios estructurales

$$\left(\sum_{t=2}^T \tilde{S}_{t-1} \Delta \tilde{S}'_t - T \tilde{\Omega}_1 \right) \tilde{\Omega}_l^{-1} \Big\},$$

$$SBDH_I = tr \left\{ \left(T^{-2} \sum_{t=1}^T \tilde{S}_t \tilde{S}'_t \right) \tilde{\Omega}_l^{-1} \right\},$$

$$SBDH_{II} = tr \left\{ \left(T^{-2} \sum_{t=1}^T \bar{S}_t \bar{S}'_t \right) \bar{\Omega}_l^{-1} \right\},$$

donde la barra ($\bar{\quad}$) denota los residuos obtenidos a partir de la ecuación (1.30) y la tilde ($\tilde{\quad}$) los residuos de la ecuación (1.33). Merece destacarse que $\tilde{\Omega}_l$ y $\tilde{\Omega}_1$ son estimadores consistentes de Ω_l y $\Omega_1 = \sum_{t=2}^{\infty} E(w_1 w'_t)$, respectivamente. $\tilde{\Omega}_l$ y $\bar{\Omega}_l$ se definen como en Hannan (1970) y Ahn (1994).

Suponiendo que existe una ruptura estructural en el periodo $k = \delta T$, para un valor del parámetro $\delta \in (0, 1)$, la ecuación (1.30) se modifica para tener en cuenta esta ruptura, tal y como se expone a continuación:

$$\begin{aligned} y_t &= A_1 c_t + x_t, & t = 1, \dots, \delta T, \\ y_t &= A_2 c_t + x_t, & t = \delta T + 1, \dots, T, \end{aligned} \quad (1.35)$$

donde $A_1 \neq A_2$. Si $\iota_1 = 1$, cuando $t \leq \delta T$ o cero en otros casos y $\iota_2 = 1$ si $t > \delta T$ o cero en otros casos, la ecuación (1.35) se puede representar a través de la función indicador $\iota = [\iota_1, \iota_2]'$ de la siguiente manera:

$$y_t = A_1 c_t \iota_1 + A_2 c_t \iota_2 + x_t = A \iota c_t + x_t,$$

donde $d_t = [\iota_1 c_t', \iota_2 c_t']' = \iota \otimes c_t$ y $A = [A_1, A_2]$, que tiene dimensión $n \times 2(p + 1)$. Estos autores añaden que, a partir de aquí es fácil ampliar el estudio para considerar varias rupturas estructurales sin más que redefinir la matriz de parámetros A y los regresores d_t , dados los puntos de ruptura estructurales. Destaquemos que la expresión (1.30) no es correcta bajo la H_0 de estacionariedad con cambios estructurales, de manera que Ahn (1994) señala que la omisión del componente determinista debería hacer que los residuos no sean estacionarios, lo que haría que el estadístico diverja.

Ahn (1994) obtiene como principales resultados que si existe una ruptura estructural, siempre se rechaza la H_0 de estacionariedad asintóticamente, incluso si x_t es $I(0)$. Por consiguiente, el rechazo de la H_0 de estacionariedad no significa que la serie no sea estacionaria, ya que puede rechazarse debido a la presencia de una ruptura estructural. Además, sus resultados son consistentes con los de Perron (1989), en el sentido en el que una ruptura estructural puede hacer que una serie temporal estacionaria se comporte como si no lo fuera. A través de los resultados de simulación, Ahn (1994) sugiere que estos contrastes trabajan razonablemente bien en muestras finitas y considera que es mejor utilizar tests multivariantes que aplicar tests univariantes varias veces a cada componente de una serie multivariante. Según Choi y Ahn (1999) este último procedimiento ignora la correlación entre los elementos de las series temporales múltiples, por lo que aconsejan llevar a cabo contrastes de estacionariedad mediante tests multivariantes. A través de un análisis de simulación, llevado a cabo para muestras finitas, Ahn (1994) obtiene que el test multivariante LM_{II} ofrece una

1.4. Conclusiones

distorsión de tamaño, con una dirección negativa. Así cuando el tamaño muestral es de 200 y 400 observaciones, LM_{II} tiene elevada potencia. El test multivariante LM_I mantiene su tamaño nominal y es muy potente, si el tamaño muestral es de 400 observaciones.

1.4 Conclusiones

El interés creciente y generalizado en poder medir el impacto que ocasiona un cambio exógeno en una serie temporal en el medio y largo plazo requiere la adecuada identificación de su verdadero proceso generador. La caracterización de una serie como estacionaria alrededor de una tendencia determinista o estocástica trasciende al ámbito de la Teoría Económica, desarrollándose numerosos tests que pretenden discernir esta disyuntiva. Sin embargo, las propiedades de tamaño y potencia de la mayoría de estos tests se ven afectadas considerablemente por efecto de *shocks* exógenos que inciden en el comportamiento de la serie, lo que añade dificultades a la hora de identificar su verdadero proceso generador y, por ende, en la predicción del impacto de un *shock* sobre la misma. Existe una gran diversidad de estudios que analizan el efecto de estos cambios estructurales en las propiedades de los contrastes, pero no hay un consenso claro sobre el test más apropiado para determinar el verdadero proceso generador de una serie temporal que se ve afectado por una o varias rupturas estructurales en diferentes periodos del tiempo. A este respecto, el presente trabajo tiene como objetivo arrojar luz en relación a la problemática de la determinación

del orden de integración de una serie temporal, cuando ésta se ve afectada por algún tipo de *shock* exógeno que provoca una variación en su comportamiento. Para conseguir este propósito hemos realizado una recopilación y estructuración de la información más relevante sobre el comportamiento de diferentes contrastes de raíces unitarias y de estacionariedad cuando la serie objeto de estudio se ve afectada por un cambio estructural y, con el fin de completar este análisis, hemos llevado a cabo algunos estudios de simulación que nos permitan ver las propiedades de tamaño y potencia de algunos de estos tests cuando se producen cambios estructurales.

La conclusión que extraemos es que, efectivamente, las propiedades de los tests de raíces unitarias o de estacionariedad se ven afectadas por la presencia de una o varias rupturas estructurales. Además, la alteración del tamaño y potencia de estos tests es diferente dependiendo del tipo de ruptura presentada por la serie (ruptura en su nivel o ruptura en su pendiente), de la consideración de la fecha de ruptura como exógena o endógena, de su localización en el periodo muestral, de la magnitud de la ruptura e incluso del número de rupturas, entre otros aspectos. Por consiguiente, debido a las limitaciones que presentan los tests más utilizados en la literatura para identificar el orden de integrabilidad de las series cuando éstas se ven afectadas por algún evento exógeno, creemos conveniente que se lleve a cabo un análisis previo a la aplicación de los tests de raíces unitarias y/o de estacionariedad, de aquellos aspectos que pueden incidir en el tamaño y potencia de los mismos (tipo y magnitud de la ruptura, ubicación en el periodo muestral, etc.) con el fin de seleccionar aquel o aquellos tests que

1.4. Conclusiones

resulten más apropiados para identificar el verdadero proceso generador de una serie, ya que la omisión de estos posibles cambios estructurales podría provocar una identificación errónea.

En relación a los contrastes de raíces unitarias y a partir de los estudios llevados a cabo por Christiano (1992), Zivot y Andrews (1992), Banerjee, Lumsdaine y Stock (1992) y Perron (1994, 1997), entre otros autores, consideramos que se obtienen mejores propiedades de estos contrastes si se determina el punto de ruptura de manera endógena, es decir, a partir de la información que contienen los datos, que si se determina independientemente de ella. Asimismo, aunque en la mayoría de estudios se manifiesta que un aumento del tamaño muestral consigue mejorar las propiedades de tamaño y potencia de la mayor parte de los contrastes de raíces unitarias, también se evidencia que la ubicación de la fecha del cambio estructural en la muestra puede alterar estas propiedades. Por tanto, si decidimos aumentar el número de observaciones muestrales con el fin de mejorar las propiedades de estos tests, es necesario prestar atención al hecho de que las rupturas estructurales no se vean desplazadas a intervalos muestrales donde estos contrastes presentarían peores propiedades. Así, por ejemplo, si se contrasta la H_0 de raíz unitaria, frente a la alternativa de tendencia determinista que cambia, Banerjee *et al.* (1992) obtienen que el procedimiento secuencial, basado en el estadístico $\tilde{F}_T^{máx}$, es el que mayor potencia presenta si el punto de ruptura se sitúa al final de la muestra, pero si el tamaño muestral incrementa al añadir datos al final de ella, el punto de ruptura dejaría de estar ubicado en el extremo final de la muestra, por lo que

las propiedades de este estadístico podrían empeorar. De igual manera, si se contrasta la misma H_0 y el punto de ruptura está situado al principio del periodo muestral, según Banerjee *et al.* (1992), es más apropiado utilizar el test secuencial \tilde{t}_{DF} aplicado a toda la muestra, pero si la muestra incrementa con datos que se ubican al principio de ella, a medida que el punto de ruptura va alejándose del inicio de la misma, las buenas propiedades de este contraste se irían desvaneciendo. En este sentido, nosotros obtenemos un resultado parecido al determinar, mediante un estudio de Monte Carlo, las propiedades de tamaño y potencia de los tests $t_{DF}^{mín}$ cuando el punto de ruptura se determina endógenamente a través de los procedimientos recursivo, rolling y secuencial. Algunos de los resultados que obtenemos es que el tamaño de estos tests, cuando se trabaja con muestras pequeñas, formadas por 30, 50 o 75 observaciones, se ve afectado también por la ubicación del punto de ruptura en la muestra. Así, por ejemplo, obtenemos que si se contrasta la H_0 de raíz unitaria con un cambio en su intercepto no se rechaza de manera espuria esta hipótesis si se utiliza el procedimiento secuencial y la ruptura recae en la segunda mitad de la muestra, pero si ésta recae en la primera mitad, es el test basado en el procedimiento rolling el que mejores propiedades de tamaño presenta. Asimismo, si la serie es estacionaria pero presenta un cambio en su pendiente, es el test que utiliza el procedimiento recursivo el que presenta una mayor potencia, en términos generales, especialmente si esta ruptura se produce en los periodos extremos de la muestra y, de manera especial, si se produce al principio del periodo muestral.

Por otra parte, debido a que algunos de los contrastes de raíces uni-

1.4. Conclusiones

tarias también se ven afectados por el número de retardos p del proceso autorregresivo, a partir de la información recopilada en el presente trabajo, consideramos que es más apropiado utilizar procedimientos de selección del número de retardos que sean dependientes de los datos, en lugar de fijarlos *a priori*, ya que, en general, estos contrastes presentan mejores propiedades.

Otro aspecto a destacar, a partir de todo lo expuesto en las secciones anteriores, es el hecho de que la mayoría de contrastes de raíces unitarias presentan una distorsión de tamaño elevada si se estiman modelos especificados con menos rupturas de las que realmente posee la serie temporal. Por tanto, es necesario tener en cuenta este aspecto a la hora de aplicar estos tests para identificar el verdadero p.g.d. de una serie. Así, si se determinan los puntos de ruptura de manera endógena, será necesario utilizar algoritmos que permitan la detección de más de un punto de ruptura, pero si se determinan exógenamente, tal y como Clemente, Montañés y Reyes (1998) argumentan, sería necesario introducir un elevado número de puntos de ruptura en la especificación de los modelos, con el fin de obtener estadísticos adecuados que permitan determinar si la serie presenta o no una raíz unitaria. Para estos autores, el número de rupturas que se tienen que considerar se obtendría una vez realizada una inspección visual de la evolución de las series.

Finalmente, respecto a los contrastes de estacionariedad, existen pocos estudios orientados a la determinación del impacto que sobre ellos tiene el hecho de que una serie temporal se vea afectada por una ruptura estructural. Sin embargo, los escasos estudios existentes ponen de manifiesto que

las propiedades de estos tests también se ven deterioradas ante la presencia de una ruptura, de manera que se rechaza con mayor probabilidad la H_0 de estacionariedad, cuando ésta es cierta, si la serie temporal objeto de estudio presenta un cambio en su nivel o en su pendiente. Además, en dos de los test de estacionariedad más utilizados en la literatura, como son el KPSS, de Kwiatkowski *et al.* (1992), y el LMC, de Leybourne y McCabe (1994), se produce, en general, un resultado paradójico, puesto que obtenemos, a través de los estudios de simulación que llevamos a cabo en el presente Capítulo, que si una serie es estacionaria, pero presenta un cambio en su nivel o pendiente en algún momento del tiempo, se rechaza con mayor probabilidad la H_0 de estacionariedad (alrededor de una constante o de una tendencia) cuanto más elevado es el tamaño muestral. Sin embargo, tenemos que ser cautelosos al considerar la afirmación anterior, ya que, al igual que en los contrastes de raíces unitarias, estos contrastes de estacionariedad también se ven afectados por la ubicación de la ruptura en la muestra, por lo que podríamos aumentar el tamaño muestral, de tal manera que la ruptura recayera en un periodo muestral donde mejoraran las propiedades del test, por lo que, en tal caso no sería cierta la afirmación anterior. Sin embargo, sí sería cierta bajo el supuesto de que la ruptura de la serie recayera en la misma fracción muestral, independientemente del tamaño de la muestra. Respecto a la ubicación de la fecha de ruptura en la muestra, obtenemos que, en general, incrementa la tasa de rechazo espurio del test cuanto más centrado se halla el punto de ruptura en la muestra o si se sitúa muy próximo a los extremos de ella. Sin embargo, esto último no sucede si se produce un cambio en el intercepto de la serie y la hipótesis

1.4. Conclusiones

que se contrasta es la de estacionariedad en torno a una tendencia, en cuyo caso, tanto el test KPSS como el LMC, obtienen tasas de rechazo menores en el periodo central de la muestra y en los extremos de la misma. Otro resultado que obtenemos es que el tamaño de la ruptura incide considerablemente en las propiedades de estos tests. Así por ejemplo, en términos generales, rechazamos de forma espuria la H_0 de estacionariedad cuanto mayor es la ruptura que se produce en la serie.

Bibliografía

- [1] Agiakloglou, C. y Newbold, P. (1992): Empirical evidence on Dickey-Fuller type tests. *Journal of Time Series Analysis*, 6, 471-483.
- [2] Ahn, B. C. (1994): Testing the null of stationarity in the presence of structural breaks for multiple time series. Unpublished Manuscript (Department of Economics, The Ohio State University, Columbus).
- [3] Amsler, C. y Lee, J. (1995): An LM test for a unit root in the presence of a structural change. *Econometric Theory*, 11, 359-368.
- [4] Andrews, D. W. K. (1993): Tests for parameter instability and structural change with unknown change point. *Econometrica*, 61, 81-856.
- [5] Andrews, D. W. K. y Ploberger, W. (1994): Optimal tests when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Econometrica*, 62, 1383-1414.
- [6] Andrews, D. W. K, Lee, I. y Ploberger, W. (1996): Optimal change-point tests for normal linear regression. *Journal of Econometrics*, 70, 9-38.

- [7] Antock, J. y Huskova, M. (1997): Estimators of changes. Working Paper (Charles University, Praha).
- [8] Arestis, P., Biefang-Frisancho, M. (1999): Unit roots and structural breaks in OECD unemployment. *Economics Letters*, 65, 149-156.
- [9] Bai, J. (1994): Least squares estimation of a shift in linear processes. *Journal of Time Series Analysis*, 15, 453-472.
- [10] Bai, J. (1995): Least absolute deviation estimation of a shift. *Econometric Theory*, 11, 403-436.
- [11] Bai, J. (1997): Estimation of a change point in multiple regression models. *Review of Economic and Statistics*, 79, 551-563.
- [12] Bai, J. y Perron, P. (1995): Testing for and estimation of multiple structural changes. Unpublished Manuscript.
- [13] Bai, J. y Perron, P. (1998): Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, 66, 47-78.
- [14] Balke, N. S y Fomby, T. B. (1991): Shifting trends, segmented trends and, infrequent permanent shocks. *Journal of Monetary Economics*, 28 (1), 61-85.
- [15] Banerjee, A., Dolado, J. y Galbraith, J. W. (1990): Recursive tests for unit roots and structural breaks in long annual GNP series. Unpublished manuscript (Institute of Economics and Statistics, Oxford, U.K.).

Bibliografía

- [16] Banerjee, A., Lumsdaine, R. L. y Stock, J. H. (1992): Recursive and sequential tests for a unit root: Theory and international evidence. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 271-287.
- [17] Bhargava, A. (1986): On the theory of testing for unit roots in observed times series. *Review of Economic Studies*, 53, 369-384.
- [18] Bierens, H. J. (1991): Testing stationarity against the unit root hypothesis. Working Paper (Vrije Universiteit and Texas A&M University).
- [19] Bierens, H. J. (1997): Testing the unit root drift hypothesis against nonlinear trend stationarity, with an application to the US price level and interest rate. *Journal of Econometrics*, 81, 29-64.
- [20] Bradley, M. D. y Jansen, D. W. (1995): Unit roots and infrequent large shocks: New international evidence on output growth. *Journal of Money, Credit, and Banking*, 27(3), 876-893.
- [21] Brown, R. L., Durbin, J. y Evans, J. M. (1975): Techniques for testing the constancy of regression relationships over time. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 37, 149-192.
- [22] Campbell, J. Y. y Mankiw, N. G. (1987): Are output fluctuations transitory? *Quarterly Journal of Economics*, 102, 857-880.
- [23] Campbell, J. Y. y Mankiw, N. G. (1988): Searching for a break in GNP. Working Paper, 2695 (National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA).

- [24] Campbell, J. Y. y Perron, P. (1991): Pitfalls and opportunities: What macroeconomists should know about unit roots. *NBER Macroeconomics Annual*, 141-200.
- [25] Campos, J., Ericsson, N. R. y Hendry, D. F. (1996): Cointegration tests in the presence of structural breaks. *Journal of Econometrics*, 70, 187-220.
- [26] Carrión, J. L., Sansó, A. y Artís, M. (1999): Response surfaces estimates for the Dickey-Fuller unit root test with structural breaks. *Economic Letters*, 63, 279-283.
- [27] Cheung, Y.-W. y Lai, K. S. (1993): Finite-sample sizes of Johansen's likelihood ratio test for cointegration. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 55, 313-328.
- [28] Cheung, Y.-W. y Lai, K. S. (1995): Lag order and critical values of the augmented Dickey-Fuller test. *Journal of Business and Economic Statistics*, 13 (3), 277-280.
- [29] Choi, I. (1990): Most of the US economic time series do not have unit roots: Nelson and Plosser's results reconsidered. Discussion paper (Department of Economics, The Ohio State University, Columbus, OH).
- [30] Choi, I. (1994): Residual based tests for the null of stationarity with applications to U.S. macroeconomic time series. *Econometric Theory*, 3 (4), 720-746.

Bibliografía

- [31] Choi, I. y Ahn, B. C. (1993): Test for cointegration in a system of equations. Working Paper (The Ohio State University).
- [32] Choi, I. y Ahn, B. C. (1999): Testing the null of stationarity for multiple time series. *Journal of Econometrics*, 88, 41-77.
- [33] Choi, I. y Yu, B. (1993): A general framework for testing $I(m)$ against $I(m + k)$. Working Paper (The Ohio State University).
- [34] Christiano, L. J. (1992): Searching for a break in GNP. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 237-250.
- [35] Christiano, L. J. y Eichenbaum, M. (1990): Unit roots in real GNP: Do we know, and do we care? *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 32, Spring, 7-61.
- [36] Chu, J. S. y Wu, C. K. (1993): Kernel-type estimators of jump points and values of a regression function. *Annals of Statistics*, 21, 1545-1566.
- [37] Clark, P. K. (1987): The cyclical component of U.S. economic activity. *Quarterly Journal of Economics*, 102, 797-814.
- [38] Clemente, J., Montañés, A. y Reyes, M. (1998): Testing for a unit root in variables with a double change in the mean. *Economics Letters*, 59, 175-182.
- [39] Cochrane, J. H. (1988): How big is the random walk in GNP? *Journal of Political Economy*, 96, 893-920.

- [40] Deaton, A. (1987): Life-cycle models of consumption: Is the evidence consistent with the theory? *Advances in Econometrics: Fifth World Congress, II*, T. G (ed.). Bewley, Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 121-148.
- [41] DeJong, D. N., Nankervis, J. C., Savin, N. E. y Whiteman, C. H. (1989): Integration versus trend stationarity in macroeconomic time series. Working Paper, 89-99 (Department of Economics, University of Iowa, Iowa City, IA).
- [42] DeJong, D. N., Nankervis, J. C., Savin, N. E. y Whiteman, C. H. (1992): Integration versus trend stationarity in time series. *Econometrica*, 60, 423-433.
- [43] DeJong, D. N. y Whiteman, C. H. (1991): Reconsidering "Trends and random walks in macroeconomic time series". *Journal of Monetary Economics*, 28, 221-254.
- [44] Delgado, M. A. e Hidalgo, J. (2000): Nonparametric inference on structural breaks. *Journal of Econometrics*, 96, 113-144.
- [45] DeLong, J. B. y Summers, L. H. (1988): How does macroeconomic policy affect output? *Brookings Papers on Economic Activity*, 2, 433-480.
- [46] Dickey, D. A. (1976): Estimation and hypothesis testing in nonstationary time series, Ph.D. Dissertation (Iowa State University, Ames, IA).

Bibliografía

- [47] Dickey, D. A. y Fuller, W. A. (1979): Distribution of the estimators for autorregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.
- [48] Dickey, D. A. y Fuller, W. A. (1981): Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49, 1057-1072.
- [49] Doornik, J. A. (1998): Object-oriented matrix programming using Ox 2.0, London: Timberlake Consultants Ltd and Oxford: www.nuff.ox.ac.uk/Users/Doornik.
- [50] Dufour, J. M. (1982): recursive stability analysis of linear regression relationships: An exploratory methodology. *Journal of Econometrics*, 19, 31-76.
- [51] Elliott, G. y Stock, J. H. (1994): Inference in time series regression when the order of integration of a regressor is unknown. *Econometric Theory*, 10, p. 672-700.
- [52] Eubank, R. L. y Speckman, P. L. (1994): Nonparametric estimation of functions with jump discontinuities. Lecture Notes, 23 (Institute of Mathematical Statistics, 130-144).
- [53] Evans, G. W. (1989): Output and unemployment dynamics in the United States: 1950-1985. *Journal of Applied Econometrics*, 4, 213-237.

- [54] Feder, P. I. (1975): On asymptotic distribution theory in segmented regression problem: Identified case. *Annals of Statistics*, 3, 49-83.
- [55] Fiteni, I. (1998): Robust estimation of structural break points. Working Paper (Universidad Carlos II, Madrid).
- [56] Franzini, L. y Harvey, A. C. (1983): Testing for deterministic trend and seasonal components in time series models. *Biometrika*, 76, 169-177.
- [57] Fu, Y-X. y Curnow, R. N. (1990): Maximum likelihood estimation of multiple change points. *Biometrika*, 77, 563-573.
- [58] Fuller, W. A. (1976): *Introduction to statistical time series*. Ed. Wiley, New York, NY.
- [59] García, R. y Perron, P. (1996): An analysis of the real interest rate under regime shifts. *Review of Economics and Statistics*, 78, 111-125.
- [60] Gonzalez-Farias, G. M. (1992): A new unit root test for autoregressive time series. Unpublished Ph. D. thesis (Dept. of Statistics, North Carolina State University).
- [61] Gregory, A. W. y Hansen, B. E. (1996): Test for cointegration in models with regime and trend shifts. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 58 (3), 555-560.
- [62] Hall, A. (1994): Testing for a unit root in time series with pretest data based model selection. *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 461-470.

Bibliografía

- [63] Hannan, E. J. (1970): *Multiple Time Series*. New York. John Wiley.
- [64] Hannan, E. J. y Heyde, C. (1972): On limit theorems for quadratic functions of discrete time series. *Annals of Mathematical Statistics*, 43, 2058-2066.
- [65] Harvey, A. C. (1989): *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [66] Hassler, U. y Wolters, J. (1995): Long memory of inflation rates: international evidence. *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, 37-45.
- [67] Hawkins, D. M. (1977): Testing a sequence of observations for a change in location. *Journal of the American Statistical Association*, 72, 180-186.
- [68] Hendry, D. F. (1987): *PC-GIVE: An interactive menu-driven econometric modelling program (User's Manual, Version 5.0)*, Oxford, U. K.: Institute of Economics and Statistics.
- [69] Hendry, D. F. y Ericsson, N. R. (1991): An econometric analysis of U.K. money demand in monetary trends in the United States and the United Kingdom, by Milton Friedman and Anna, J. Schwartz. *American Economic Review*, 81, 8-38.
- [70] Herce, M. (1991): Stationarity tests for time series. Working Paper (UNC at Chapel Hill).

- [71] Hinkley, D. (1969): Inferencia about the intersection in two phase regression. *Biometrika*, 56, 495-504.
- [72] Hinkley, D. (1970): Inference about the change point in a sequence of random variables. *Biometrika*, 57, 1-17.
- [73] James, B., James, K. L. y Siegmund, D. (1987): Tests for a change-point. *Biometrika*, 74, 71-83.
- [74] Kahn, J. A. y Ogaki, M. (1992): A consistent test for the null of stationarity against the alternative of a unit root. *Economics Letters*, 39, 7-11.
- [75] Kilian, L. y Ohanian, L. E. (1998): Is there a trend break in U.S. GNP? A macroeconomic perspective. Manuscript (Federal Reserve Bank of Minneapolis, Research Department Staff Report 244).
- [76] Kim, I.-M. y Maddala, G. S. (1991): Multiple structural breaks and unit roots in exchange rates. Artículo presentado en the Econometric society meeting of New orleans, en diciembre de 1991.
- [77] Kim, H. J. y Siegmund, D. (1989): The likelihood ratio test for a change point in simple linear regressions. *Biometrika*, 76, 409-423.
- [78] Krämer, W., Ploberger, W. y Alt. R. (1988): Testing for structural changes in dynamic models. *Econometrica*, 56, 409-423.
- [79] Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P. y Shin, Y. (1992): Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.

Bibliografía

- [80] Lee, J. (1996): On the power of stationary test using optimal bandwidth estimates. *Economics Letters*, 51, 131-137.
- [81] Lee, J. (2000): On the end-point issue in unit root tests in the presence of a structural break. *Economics Letters*, 68, 7-11.
- [82] Leybourne, S. J. y McCabe, B. P. M. (1989): On the distribution of some test statistics for parameter constancy. *Biometrika*, 76, 169-177.
- [83] Leybourne, S. J. y McCabe, B. P. M. (1994): A consistent test for a unit root. *Journal of Business Economic Statistics*, 12.2, 157-168.
- [84] Leybourne, S. J., Mills, T. C. y Newbold, P. (1998): Spurious rejections by Dickey-Fuller tests in the presence of a break under the null. *Journal of Econometrics*, 87, 191-203.
- [85] Liu, J., Wu, S. y Zidek, J. V. (1997): On segmented multivariate regressions. *Statistica Sinica*, 7, 497-525.
- [86] Lumsdaine, R. L. y Papell, D. H. (1997): Multiple trend breaks and the unit-root hypothesis. *The Review of Economics and Statistics*, 79 (2), 212-218.
- [87] MacKinnon, J. G. (1991): Critical values for cointegration tests. En Engle, R., Granger, C. W. J. (eds.), *Long-Run Economic Relationships*, Oxford University Press, 267-287.
- [88] MacKinnon, J. G. (1994): Approximate asymptotic distribution functions for unit-root and cointegration tests. *Journal of Business and Economic Statistics*, 12 (2), 167-176.

- [89] McCabe, B. P. M. y Harrison, M. J. (1980): Testing for structural change in dynamic models. *Econometrica*, 56, 1355-1370.
- [90] Montañés, A. (1997): Level shifts, unit roots and misspecification of the breaking date. *Economics Letters*, 54(1), 7-13.
- [91] Montañés, A. y Olloqui, I. (1999): Misspecification of the breaking date in segmented trend variables: effect on the unit root tests. *Economic Letters*, 65, 301-307.
- [92] Müller, H.-G. (1992): Change-points in nonparametric regression analysis. *Annals of Statistics*, 20, 737-761.
- [93] Nabeya, S. y Tanaka, K. (1988): Asymptotic theory of a test for the constancy of regression coefficients against the random walk alternative. *Annals of Statistics*, 16, 218-235.
- [94] Nelson, C. R. y Plosser, C. I. (1982): Trends and random walks in macroeconomic time series. *Journal of Monetary Economics*, 10, 139-162.
- [95] Newey, W. K. y West, K. D. (1987): A simple, positive definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55, 703-708.
- [96] Ng, S. y Perron, P. (1995): Unit root tests in ARMA models with data dependent methods for the selection of the truncation lag. *Journal of the American Statistical Association*, 90, 268-281.

Bibliografía

- [97] Nunes, L. C., Newbold, P. y Kuan, C.-M. (1996): Testing for unit roots with breaks: Evidencie on the Great Crash and the unit root hypothesis reconsidered. Discussion Paper (University of Illinois at Urbana-Champaign).
- [98] Nyblom, J. (1986): Testing for deterministic linear trend in time series. *Journal of the American Statistical Association*, 81, 545-549.
- [99] Nyblom, J. y Makelainen, T. (1983): Comparisons of tests for the presence of random walk coefficients in a simple linear model. *Journal of the American Statistical Association*, 78, 856-864.
- [100] Ouliaris, S. Park, J. Y. y Phillips. P. C. B. (1989): Testing for a unit root in the presence of a maintained trend. En Ray. B. (Ed.), *Advances in Econometrics and Modelling*. Kluwer, Dordrecht, 6-28.
- [101] Pantula, S. G. (1991): Asymptotic distributions of unit root tests when the process is nearly stationary. *Journal of Business & Economic Statistics*, 9, 63-71.
- [102] Park, J. Y. (1990): Testing for unit roots and cointegration by variable addition. *Advances in Econometrics*, 8, 107-133.
- [103] Park, J. Y. y Choi, B. (1988): A new approach to testing for a unit root. Working Paper, 88-23. (Center for Analytical Economics, Cornell University, Ithaca, NY).
- [104] Park, J. Y. y Sung, J. (1994): testing for unit toots in models with structural change. *Econometric Theory*, 10(5), 917-936.

- [105] Perron, P. (1989): The Great Crash, the oil price shock and the unit root hypothesis. *Econometrica*, 57, 1361-1401.
- [106] Perron, P. (1990): Testing for a unit root in a time series with a changing mean. *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 153-162.
- [107] Perron, P. (1991): A test for changes in a polynomial trend function for a dynamic time series. Unpublished manuscript (Princeton University, Dept. of Economics).
- [108] Perron, P. (1993): The Great Crash, the oil price shock and the unit root hypothesis: Erratum. *Econometrica*, 61, 248-249.
- [109] Perron, P. (1994): Trend, unit root and structural change in macroeconomic time series. En B. B. Rap (ed.), "Cointegration for the applied economists". MacMillan Press, Basingstoke, 113-146.
- [110] Perron, P. (1997): Further evidence on breaking trend functions in macroeconomic variables. *Journal of Econometrics*, 80, 355-385.
- [111] Perron, P. y Vogelsang, T. J. (1992a): Nonstationarity and level shifts with an application to purchasing power parity. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10(3), 301-320.
- [112] Perron, P. y Vogelsang, T. J. (1992b): Testing for a unit root in a time series with a changing mean: Corrections and Extensions. *Journal of Business and Economic Statistics* 10(4), 467-470.

Bibliografía

- [113] Perron, P. y Vogelsang, T. J. (1993a): A note on the asymptotic distribution of unit roots tests in the additive outlier model with breaks. *Revista de Econometría* 13(2), 181-207.
- [114] Perron, P. y Vogelsang, T. J. (1993b): The Great Crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis: Erratum. *Econometrica*, 61(1), 248-249.
- [115] Perron, P. y Vogelsang, T. J. (1995): Additional tests for a unit root allowing for a break in the trend function at unknown time. Unpublished Manuscript (Cornell university, Dept. of Economics).
- [116] Phillips, P. C. B. (1987): Time series regression with unit roots. *Econometrica*, 55, 277-301.
- [117] Phillips, P. C. B. (1991): To criticize the critics: An objective Bayesian analysis of stochastic trends. *Journal of Applied Econometrics*, 6, 333-364.
- [118] Phillips, P. C. B. y Perron, P. (1988): Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 75, 335-346.
- [119] Phillips, P. C. B. y Solo, V. (1992): Asymptotics for linear processes. *Annals of Statistics*, 20, 971-1001.
- [120] Ploberger, W., Krämer, W. y Kontrus, K. (1989): A new test for structural stability in the linear regression model. *Journal of Econometrics*, 40, 307-318.

- [121] Prescott, E. C. (1986): Theory ahead of business cycle measurement. *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 10, Fall, 9-22.
- [122] Quah, D. (1990): Permanent and transitory movements in labor income: An explanation for 'excess smoothness' in consumption. *Journal of Political Economy*, 98, 449-475.
- [123] Quandt, R. E. (1960): Tests of the hypothesis that a linear regression system obeys two separate regimes. *Journal of the American Statistical Association*, 55, 324-330.
- [124] Rappoport, P. y Reichlin, L. (1989): Segmented trends and non-stationary time series. *Economic Journal*, 99, 168-177.
- [125] Rudebusch, G. D. (1990): Trends and random walks in macroeconomic time series: A reexamination. Working Paper, 105. (Economic Activity section, Board of Governors of the Federal Reserve System, Washington, DC).
- [126] Said, S. E. (1991): Unit-roots test for time-series data with a linear time trend. *Journal of Econometrics*, 47, 285-303.
- [127] Said, S. E. y Dickey, D. A. (1984): Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order. *Biometrika*, 71, 599-608.
- [128] Saikkonen, P. y Luukkonen, R. (1990): Testing for a moving average unit root. Working Paper (Department of Mathematics. University of Helsinki).

Bibliografía

- [129] Sansó, A., Suriñach, J. y Artís, M. (1997): Response surfaces for parametric seasonal unit root test. Document de Treball 97R22. (Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola. Universitat de Barcelona).
- [130] Sargan, J. D. y Bhargava, A. (1983): Testing for residuals from least squares regression for being generated by the Gaussian random walk. *Econometrica*, 51, 153-174.
- [131] Schmidt, P. y Phillips, P. C. B. (1992): LM test for a unit root in the presence of deterministic trends. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, 257-287.
- [132] Schotman, P. C. y Van Dijk, H. K. (1991): On bayesian routes to unit roots. *Journal of Applied Econometrics*, 6, 387-401.
- [133] Schwert, G. W. (1987): Effects of model specification on tests for unit roots in macroeconomic data. *Journal of Monetary Economics*, 20, 73-103.
- [134] Schwert, G. W. (1989): Tests for unit roots: a Monte Carlo investigation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 7, 147-160.
- [135] Sen, P. K. (1980): Asymptotic theory of some tests for a possible change in the regression slope occurring at an unknown time point". *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 52, 203-218.

- [136] Sen, P. K. (1982): Invariance principles for recursive residuals. *The Annals of Statistics*, 10, 307-312.
- [137] Shapiro, M. y Watson, M. (1988): Sources of business cycle fluctuations. *NBER Macroeconomics Annual*, 3, 11-148.
- [138] Shepton, P. S. (1995): Response surface estimates of the KPSS stationary test. *Economics Letters*, 47, 255-261.
- [139] Stock, J. H. (1988): A class of tests for integration and cointegration. Unpublished manuscript (Harvard University, Kennedy School of Government).
- [140] Stock, J. H. (1994): Deciding between $I(1)$ and $I(0)$. *Journal of Econometrics*, 63(1), 105-131.
- [141] Tanaka, K. (1983): Non-normality of the Lagrange multiplier statistic for testing the constancy of regression coefficients. *Econometrica*, 51, 1577-1582.
- [142] Tsay, R. (1993): Testing for noninvertible models with applications. *Journal of Business and Economic Statistics*, 11, 225-233.
- [143] Vogelsang, T. J. (1994): Wald-type tests for detecting shifts in linear time series models with some unit roots. Unpublished Manuscript (Cornell University).
- [144] Vogelsang, T. J. y Perron, P. (1998): Additional tests for a unit root allowing for a break in the trend function at an unknown time. *International Economic Review*, vol. 39(4), 1073-1100.

Bibliografía

- [145] Worsley, K. L. (1979): On the likelihood ratio test for a shift in locations of normal populations. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 365-367.
- [146] Yao, Y-C. (1987): Approximating the distribution of the maximum likelihood estimate of the change-point in a sequence of independent random variables. *Annals of Statistics*, 3, 1321-1328.
- [147] Yao, Y-C. (1988): Estimating the number of change-points via Schwarz' Criterion. *Estatistica and Probability Letters*, 6, 181-189.
- [148] Yao, Y-C. y Au, S. T. (1989): Least squares estimation of a step function. *Sankhyā*, 51, Serie A. 370-381.
- [149] Yin, Y. Q. (1988): Detection of the number, locations and magnitudes of jumps. *Communications in Statistics-Stochastic Models*, 4, 445-455.
- [150] Zivot, E. y Andrews, D. W. K. (1992): Further evidence on the Great Crash, the oil-price shock, and the unit-root hypothesis. *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 10, 3, 251-270.

Bibliografía

Bibliografía

105

107

Bibliografía

CAPÍTULO 2

Cotendencias no Lineales: Efecto Fisher

2.1 Introducción

En los numerosos estudios empíricos que tratan de analizar la relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación existe un relevante conflicto de resultados. Nuestro trabajo pretende abordar esta cuestión, aunque utilizando una metodología innovadora y diferente, hasta la fecha, desarrollada por Bierens (2000). Así concretamente, el objetivo principal del presente Capítulo es analizar si existe una relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en algunos países europeos, tales como Alemania, España, Francia y Reino Unido, que sea consecuencia de la existencia de una tendencia no lineal común entre ambas series, ocasionada por efecto de algún tipo de *shock* estructural exógeno. El nuevo test no paramétrico elaborado por Bierens (2000) permite hallar posibles tendencias no lineales comunes (cotendencias no lineales) entre diferentes series macroeconómicas. Así, si estas series son el tipo de interés nominal y la tasa de inflación, y ambas son estacionarias alrededor de una tendencia determinista no lineal, el test de Bierens (2000) permite encontrar una posible combinación lineal entre ellas que sea estacionaria alrededor de una tendencia lineal o una constante.

Bierens (2000), utilizando la tasa de crecimiento de los precios de los bienes de consumo y el tipo de interés de los fondos federales de Estados Unidos, para el periodo que abarca desde julio de 1954 hasta diciembre de 1994, llega a la conclusión de que, efectivamente, existe una cotendencia no lineal entre ambas series. A su vez, este autor demuestra que se cumple el

fenómeno denominado "puzle de precios", es decir, al estimar un modelo vectorial autorregresivo (VAR), un *shock* en el tipo de interés nominal tiene un efecto positivo en la respuesta de la tasa de inflación. Además, obtiene como resultado que el puzle de precios está ocasionado por la tendencia no lineal común que presentan estas dos variables, que a su vez es consecuencia de la incidencia que sobre las mismas tuvo la evolución del precio del petróleo.

Chapman y Ogaki (1993) también analizan la posible existencia de una tendencia no lineal común entre el deflactor de los gastos de las familias estadounidenses en bienes de consumo no duraderos, o el deflactor de los gastos en bienes de consumo no duraderos más los servicios, y el tipo de interés de las Letras del Tesoro a un mes, aunque utilizan una metodología diferente a la de Bierens (2000). A través de su estudio empírico, estos autores obtienen que no existe una tendencia no lineal común entre estas variables y, alternativamente, rechazan la hipótesis de que el tipo de interés real sea estacionario. No obstante, su estudio se basa en el supuesto implícito de que sólo existe una ruptura en la tendencia determinista, que data en octubre de 1979, fecha que es escogida a partir de información exógena procedente de las operaciones que lleva a cabo la Reserva Federal¹. Por ello, consideramos más apropiado el uso de la metodología adoptada por Bierens (2000) para desarrollar nuestro trabajo empírico.

La relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación ha sido

¹Si no se conoce esta fecha de ruptura, Chapman y Ogaki (1993) argumentan que tiene que ser estimada como en García y Perron (1991) o Evans y Lewis (1992).

2.1. Introducción

estudiada por muchos autores, y desde puntos de vista muy diferentes, a lo largo de la historia. Esta relación adquiere especial relevancia desde que Irving Fisher (1896, 1930) formulara la noción de tipo de interés real². En 1930, Fisher señala que los mercados de capitales eficientes deben compensar a los inversores por los cambios que se producen en el poder adquisitivo del dinero como consecuencia de la inflación. Esta hipótesis es denominada "hipótesis de Fisher" o también "efecto Fisher". La versión más clásica de esta hipótesis postula que la tasa de inflación esperada es absorbida completamente por el tipo de interés nominal en el largo plazo³, lo que da lugar a la aparición de una relación de tipo uno a uno entre la tasa de inflación esperada y el tipo de interés nominal. Por tanto, esta hipótesis supone que el tipo de interés real permanece constante en el largo plazo, no viéndose afectado, en este periodo de tiempo, por los cambios en las expectativas de inflación. Por consiguiente, el tipo de interés real no puede verse alterado por la política monetaria en el largo plazo. Sin embargo, tal y como Ferrer (1998) argumenta, ello no significa que el tipo de interés real se mantenga

²Fisher (1896) se basa en Marshall (1895) para distinguir entre tipo de interés nominal y real. La idea de que la inflación esperada afecta al tipo de interés real surge anteriormente en los discursos políticos y en los panfletos de política económica. Howitt (1992) y Laidler (1991) proporcionan más información acerca del concepto y de la distinción entre tipo de interés nominal y real, aunque Fisher parece ser el primer investigador en llevar a cabo un estudio continuado sobre los mismos y en explorar esta distinción de forma más rigurosa a través del análisis empírico.

³Fisher (1930) y otros autores, por ejemplo: Lucas (1980); Friedman y Schwartz (1982) y Summers (1983), enfatizan que el ajuste a una relación de equilibrio entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación se puede llegar a dar en el largo plazo.

ga inalterado, ya que existe evidencia de que diversos factores económicos reales, como la productividad del capital, las preferencias temporales y la aversión al riesgo, entre otros, ocasionan fluctuaciones en esta variable.

Desde que Fisher enunciara su hipótesis, se ha desarrollado un amplio rango de modelos económicos que la utilizan cuando consideran la decisión de los agentes económicos individuales en relación a su inversión, ahorro y reasignación de su cartera; también se ha utilizado la hipótesis de Fisher en modelos de precios de opciones, en el ámbito de las finanzas, y en teorías modernas que desarrollan objetivos de inflación, por nombrar algunas de ellas. La literatura macroeconómica relativa al papel que juega el tipo de interés real en los modelos de Teoría Económica es muy amplia, especialmente en lo referente a la diversidad de procedimientos para caracterizar sus propiedades de dependencia temporal. La propuesta de Fisher recibe un amplio grado de aceptación a nivel teórico, de tal manera que algunas veces se le otorga el estatus de ley, como muestra Feldstein (1982, p.825): *”En la actualidad, todo estudiante aprende la conclusión de Fisher de que todo incremento porcentual en la tasa de inflación respecto a su estado estacionario se transmite íntegramente al tipo de interés nominal, sin cambiar el tipo de interés real”*. Sin embargo, en la literatura abundan los trabajos empíricos que rechazan el cumplimiento del efecto Fisher, no habiéndose resuelto aún este problema.

La falta de consenso en los estudios empíricos relativos al efecto Fisher se debe, fundamentalmente, a las dificultades que implica su estudio como consecuencia de dos factores importantes, a los que hace alusión Phillips

2.1. Introducción

(1998):

- El comportamiento aparentemente no estacionario del tipo de interés nominal y de la inflación.
- El hecho de que el tipo de interés real dependa de las expectativas de inflación, que son difíciles de cuantificar de forma directa.

Así, en particular, mientras los modelos de Teoría Económica suponen que el tipo de interés real es constante o fluctúa estacionariamente alrededor de una media constante, el análisis empírico pone de manifiesto que, generalmente, esto sólo se obtiene para periodos pequeños de tiempo. La gran diversidad de estudios empíricos relativos a la relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación, y el hecho de que muchas de las técnicas de análisis utilizadas en los mismos se vean distorsionadas si ambas series no son estacionarias, confiere gran relevancia a la identificación del verdadero proceso generador de estas series. Sin embargo, la mayoría de los tests de raíces unitarias y de estacionariedad tienen propiedades de tamaño y potencia que se ven afectadas si las series presentan una tendencia determinista que experimenta cambios estructurales por efecto de algún *shock* exógeno, tal y como argumentamos en el Capítulo 1, por ello, es necesario tener en cuenta estos cambios y no obviarlos.

Los motivos por los que Bierens (2000) utiliza un test para determinar la posible existencia de una cotendencia no lineal entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación y que, al mismo tiempo, justifican nuestro estudio, son los siguientes:

1. El primer motivo se basa en la evidencia empírica propugnada inicialmente por Perron (1989) de que algunas series de datos macroeconómicas, como las que se utilizan en el trabajo de Nelson y Plosser (1982), percibidas por estos autores como procesos integrados de orden unitario, $I(1)$, muestran un comportamiento más acorde con la hipótesis de procesos estacionarios en torno a una tendencia no lineal. Asimismo, según Bierens (1997), si una serie es estacionaria alrededor de una tendencia determinista lineal, en lugar de un proceso $I(1)$, y la hipótesis nula (H_0) que se contrasta es la de raíz unitaria frente a la alternativa de estacionariedad, en lugar de la de estacionariedad en torno a una tendencia, prevalece la hipótesis de raíz unitaria, ya que los procesos que tienen una raíz unitaria y los que son estacionarios alrededor de una tendencia, muestran un comportamiento bastante similar.

2. El segundo motivo consiste en que algunas series macroeconómicas temporales que no presentan raíz unitaria se comportan como procesos cointegrados, es decir, como si se movieran conjuntamente a lo largo del tiempo de manera sincrónica. Sin embargo, el fenómeno de cointegración sólo es posible para procesos no estacionarios, por lo que una explicación plausible a este comportamiento evolutivo de estas series, si son procesos estacionarios, podría ser que presentan una tendencia determinista no lineal común.

3. El tercer motivo se basa en que mantener la hipótesis de estacionariedad alrededor de una tendencia lineal, así como la de raíz unitaria con una deriva constante en series temporales macroeconómicas, implica suponer que la estructura de la economía no cambia a lo largo del tiempo, o lo que

2.1. Introducción

es lo mismo, que los parámetros de los diferentes procesos generadores de datos (p.g.d.) no varían en un modelo, lo que resulta implausible en series macroeconómicas que contemplan un periodo de tiempo relativamente largo, como las de Nelson-Plosser que abarcan una centuria o más.

4. El cuarto motivo que señala Bierens (2000), quizás más controvertido y criticable, es de naturaleza filosófica. La cuestión filosófica se basa en si las intervenciones de política económica deben ser consideradas como eventos estocásticos, deterministas o una mezcla de ambos. Así por ejemplo, en Estados Unidos, el Comité Federal de Mercado Abierto, organismo de la Reserva Federal encargado de controlar la tasa de inflación, responde a las señales inflacionistas, a las que este autor califica como sucesos estocásticos. Por tanto, según Bierens (2000), la respuesta completamente automática que lleva a cabo este organismo también será estocástica. Sin embargo, esta respuesta también se ve afectada por la evaluación subjetiva que llevan a cabo los 12 miembros de este Comité, la cual, según Bierens (2000), puede ser considerada como determinista y variable a lo largo del tiempo. Así, la cuestión filosófica que plantea Bierens (2000) es la siguiente: si un grupo de políticos determina el valor de una variable Y_t basándose en la información procedente de un vector de variables X_t (que posiblemente recoge retardos de la variable Y_t), ¿es la esperanza condicional de Y_t , dada X_t , variable en el tiempo o es una función de X_t invariable en el tiempo? En este último caso, se obtendría la siguiente relación: $Y_t = g(X_t) + U_t$, donde U_t tendría una esperanza condicional igual a cero. Esto significaría que el grupo de políticos tienen un "plan" de acción, $g(X_t)$, para cada situación, X_t , en

relación a la variable que pretenden controlar, Y_t , aparte de la incertidumbre representada por U_t , y que este "plan" ha sido y será el mismo para siempre. Sin embargo, según Bierens (2000), los políticos no son siempre los mismos y es posible que la función g cambie a lo largo del tiempo, por lo que, en este caso, la esperanza condicional, $E(Y_t)$, puede cambiar con el tiempo. Bierens (2000) señala, a modo de ejemplo, que las acciones de la OPEP son, al menos en parte, *shocks* deterministas, ya que son causados por las decisiones adoptadas por un grupo de políticos. Por consiguiente, la esperanza no condicional de la tasa de inflación es probable que sea dependiente del tiempo, debido a los dos *shocks* de precios del petróleo. Además, cabe señalar que estos *shocks* provocaron cambios estructurales también en las economías, ya que se desarrollaron áreas diferentes de producción de petróleo, como las del Mar del Norte, y dieron lugar al uso de tecnologías ahorradoras de energía.

En Chapman y Ogaki (1993) se argumenta que el concepto de cotendencia no lineal puede resultar atractivo también porque su aplicación no necesita imponer supuestos de exogeneidad en la estimación de los parámetros estructurales, por lo que los modelos económicos se pueden contrastar examinando únicamente las restricciones de cotendencia utilizadas.

El tipo de estacionariedad con tendencia no lineal que se considera en el presente trabajo es el propuesto por Bierens (2000), es decir, si y_t es un proceso temporal formado por n variables, se define su proceso generador de datos (p.g.d.) como:

2.1. Introducción

$$y_t = g(t) + u_t,$$

donde $g(t) = \beta_0 + \beta_1 t + f(t)$, siendo $f(t)$ una función de tendencia no lineal, constituida por n variables, que recoge la posible existencia de aparentes cambios estructurales en la serie observada, y siendo u_t un proceso estacionario de media cero formado también por n variables⁴. Analíticamente se puede decir que existe una tendencia no lineal común entre las series implicadas si existe un vector no nulo θ , tal que $\theta' f(t) = 0$.

Para completar nuestro estudio sobre el contraste de cotendencias no lineales, destacamos que éste no es más que un caso particular del contraste de "rasgos comunes" de Engle y Kozicki (1993). Estos autores generan un estadístico para contrastar la hipótesis de que algunos rasgos presentes en algunas series son comunes a todas ellas. Los rasgos que señalan pueden referirse a la correlación serial, tendencias, estacionalidad, heterocedasticidad, heterocedasticidad autorregresiva condicional (ARCH) y exceso de curtosis, entre otros. La metodología utilizada por Engle y Kozicki (1993) se basa, en primer lugar, en contrastar la H_0 de que las series individualmente analizadas no tienen un determinado rasgo, frente a la hipótesis alternativa (H_1) de que sí lo poseen. Posteriormente, si las series objeto de estudio presentan ese rasgo, se contrasta la posibilidad de que el rasgo sea común a todas ellas, ya que si esto es así, se puede encontrar una combinación

⁴En el presente trabajo, al igual que Bierens (2000), consideramos el caso en el que el vector β_1 es nulo.

adecuada de variables que no posea ese rasgo. Analíticamente se muestra que el contraste de rasgos comunes de Engle y Kozicki (1993) engloba al de Bierens (2000). Así, si Y_t es un vector de series temporales de dimensión $N \times 1$ que representa el siguiente modelo multivariante:

$$Y_t = \beta x_t' + \Gamma z_t' + \varepsilon_t,$$

en el que Γ es una matriz $N \times K$ que incluye los rasgos que deben encontrarse en las series individualmente consideradas, z_t la matriz que incluye los rasgos comunes a analizar y x_t una matriz que recoge el resto de variables, entonces, para estos autores, si existe un vector no nulo δ , tal que $\delta'Y_t$ no tenga el rasgo, se puede decir que δ es un vector de "rasgo común" o "co-rasgo". Por tanto, cualquier vector que cumpla la propiedad: $\delta'\Gamma = 0$, es un vector co-rasgo. El estudio de Bierens (2000) supone que el rasgo es una tendencia determinista no lineal, sin embargo, se diferencia del enfoque de Engle y Kozicki (1993) en que no requiere que se parametrize el rasgo analizado.

El principal objetivo del presente Capítulo es determinar si existe una relación entre el tipo de interés y la tasa de inflación en Alemania, España, Francia y Reino Unido que sea consecuencia de la existencia de una tendencia determinista no lineal común entre estas dos series y si, efectivamente, se puede hablar de efecto Fisher. Adicionalmente, otro de los objetivos perseguidos en el presente Capítulo es analizar si dicha cotendencia no lineal produce un puzle de precios. En la Sección 2 se lleva a cabo una síntesis

2.2. Efecto Fisher

de los principales estudios centrados en el denominado efecto Fisher. La Sección 3 revisa algunos de los estudios relativos al puzle de precios. La Sección 4 expone el test de cotendencias no lineales elaborado por Bierens (2000). La Sección 5 se centra en el análisis empírico y la Sección 6 recoge las conclusiones.

2.2 Efecto Fisher

Fisher (1896, 1930) formula el concepto de tipo de interés real *ex-ante* (r_t^e) con el fin de poder contabilizar cuál es el tipo de interés que muestra el valor de devolución de un préstamo, en términos de dólares reales. Este tipo de interés real *ex-ante* es el tipo de interés nominal (i_t) que asegura un tipo de interés real esperado (r_t^e), cuando se produce un cambio en los precios anticipado (π_t^e), o lo que es lo mismo, es el tipo de interés nominal ajustado para compensar al prestamista por la pérdida que se produce en el poder de compra del principal y en el tipo de interés como consecuencia de la inflación, es decir, $i_t = r_t^e + \pi_t^e + r_t^e \pi_t^e$. El término $r_t^e \pi_t^e$ generalmente se ignora debido a que suele ser muy pequeño, por lo que la ecuación de Fisher se expresa comúnmente como:

$$i_t = r_t^e + \pi_t^e. \quad (2.1)$$

Fisher (1896, 1930) postula que los cambios en la inflación esperada inducen variaciones iguales en el tipo de interés nominal en el largo plazo, de manera que el tipo de interés real no se ve alterado. Algunas veces la

ecuación (2.1) se modifica para tener en cuenta el periodo de tiempo (m) de madurez de los bonos u obligaciones, por lo que si se tiene en cuenta dicho periodo al considerar las expectativas de inflación, se obtiene la siguiente expresión:

$$i_t^m = r_t^{e,m} + \pi_t^{e,m}. \quad (2.2)$$

El denominado "efecto Fisher" tiene implicaciones importantes en la racionalidad y eficiencia de los mercados financieros. Por esta razón, la hipótesis de Fisher inspira un gran número de trabajos empíricos. Muchos de ellos no detectan un efecto Fisher completo, es decir un movimiento conjunto a largo plazo y de tipo uno a uno entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación realizada, sino que, por el contrario, parece que la hipótesis de Fisher se cumple de manera parcial, es decir, parece que el cambio en el tipo de interés nominal es menos que proporcional a la variación en la tasa de inflación esperada. Esta evidencia lleva a muchos autores a concluir que los mercados financieros presentan "ilusión monetaria"⁵. Sin embargo, cabe señalar que la idea de ilusión monetaria se halla en conflicto con el supuesto fundamental de racionalidad de la Teoría moderna.

Algunas hipótesis consistentes con la racionalidad de la Teoría moderna postulan que la inflación disminuye sistemáticamente el tipo de interés real. Una de las más citadas es el denominado "efecto Mundell-Tobin", basado en que la inflación provoca una sustitución de dinero por capital, por lo que

⁵Ver Modigliani y Cohn (1979) o Summers (1983).

2.2. Efecto Fisher

el incremento en la demanda de stock de capital reduce el tipo de interés real. Coppock y Poitras (2000), por el contrario, argumentan que no parece que el efecto Mundell-Tobin sea significativo empíricamente en el tipo de interés real. Además, Summers (1983) obtiene que debido a que la posesión de dinero, en términos generales, suele ser inferior al 2% del valor del stock de capital, la sustitución de dinero por capital puede disminuir el tipo de interés real, pero no más de 6 puntos básicos.

Otra explicación que justifica el ajuste parcial del tipo de interés nominal a la tasa de inflación es el denominado "efecto Wicksell". Este efecto considera que la redistribución que se produce por una expansión monetaria reduce sistemáticamente el tipo de interés real (Wicksell, 1907; Cagan, 1980). Sin embargo, algunos autores como Coppock y Poitras (2000), obtienen que, el efecto Wicksell, al igual que el efecto Mundell-Tobin, no puede explicar una reducción significativa en el tipo de interés real debido al tamaño relativamente grande del stock de capital existente. Según Coppock y Poitras (2000), una explicación plausible a la reducción que experimenta el tipo de interés real, ante un incremento en el nivel de precios, es la idea de que los activos financieros de bajo riesgo, tales como los Bonos del Estado, producen rendimientos no pecuniarios de liquidez. Fried y Howitt (1983) muestran que si el dinero y los bonos se sustituyen en la generación de liquidez y cada uno de ellos ofrece una liquidez marginal positiva, aunque decreciente, entonces la inflación, que provoca una sustitución de dinero por bonos, incrementa la prima de liquidez de los bonos y disminuye el tipo de interés real pecuniario. Por ello, para Coppock y

Poitras (2000), el denominado "efecto Fried-Howitt" implica que el efecto Fisher completo podría cumplirse únicamente entre activos que no poseen liquidez, pero no entre los que sí la tienen⁶.

Fisher (1930) comienza su trabajo empírico haciendo referencia al gran número de problemas que encuentra para relacionar el tipo de interés nominal y la tasa de inflación. Él conduce su estudio a un análisis de correlación entre estas dos series, utilizando, en primer lugar, datos anuales de Estados Unidos y, posteriormente, del Reino Unido, llegando a la conclusión de que la correlación de primer orden entre la tasa de inflación y el tipo de interés es débil, e incluso se ve oscurecida por otros factores. Sin embargo, cuando considera el supuesto razonable de que el efecto que produce un cambio en los precios no se agota en un año, sino que perdura durante un periodo más largo de tiempo, aunque con una intensidad cada vez menor, encuentra una relación significativa, especialmente en el periodo que abarca la Segunda Guerra Mundial, caracterizado por las violentas fluctuaciones a las que se ven sometidos los precios. A partir de este trabajo, tal y como se ha comentado en la Introducción del presente Capítulo, surge una gran cantidad de análisis empíricos relacionados con esta cuestión que, o bien utilizan datos de otros países, o cubren diferentes periodos de tiempo, o utilizan una metodología diferente, y que, por ello, obtienen conclusiones

⁶Coppock y Poitras (2000) corroboran esta idea tras incluir en su modelo, expuesto más adelante en la ecuación (2.22), variables ficticias que tratan de recoger las diferencias de liquidez entre diferentes activos, para cada uno de los países considerados, rechazando el efecto Fisher completo para los países con activos más líquidos, pero no para los que tienen activos con menor grado de liquidez.

2.2. Efecto Fisher

distintas en relación a las propiedades estadísticas del tipo de interés real esperado (r_t^e).

Estudios alternativos analizan la relación entre el tipo de interés nominal y la inflación utilizando métodos de regresión. En particular, utilizan la ecuación de regresión siguiente:

$$i_t = c + b\pi_t^e + u_t,$$

de manera que para que se cumpla el efecto Fisher completo, el coeficiente b tiene que ser unitario y los residuos u_t deben ser estacionarios. Bajo esta hipótesis, se puede expresar el tipo de interés real *ex-post* como:

$$r_t = c + b(\pi_t^e - \pi_t) + u_t = c + \omega_t,$$

lo que implica que las fluctuaciones que se producen en el tipo de interés real son estacionarias alrededor de un nivel c constante.

Algunos autores como Fama y Schwert (1977), Fama y Gibbons (1982), Huizinga y Mishkin (1984, 1986) y Kandel *et al.* (1996), entre otros, examinan el posible cumplimiento efectivo de la hipótesis de Fisher utilizando técnicas habituales de regresión por mínimos cuadrados ordinarios (MCO), llegando a la conclusión de que efectivamente esta hipótesis no se cumple, ya que el tipo de interés real se halla correlacionado con la tasa de inflación esperada de forma negativa. Sin embargo, tal y como señala Ferrer (1998), este tipo de análisis presenta varias carencias significativas, como

el hecho de que no diferencia entre movimientos de equilibrio a largo plazo y procesos de ajuste a corto plazo, al realizar un estudio completamente estático. Además, Ferrer (1998) añade que si las variables utilizadas en la regresión no son estacionarias se pueden encontrar relaciones espurias entre las variables implicadas. Summers (1983) también señala el problema de simultaneidad entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación esperada. Algunos autores resuelven este problema añadiendo restricciones a la relación entre estas dos series, como lleva a cabo, por ejemplo, Fama (1975) al suponer que el tipo de interés nominal es exógeno, encontrando soporte empírico a la idea de tipo de interés real constante en el periodo 1953-1971 para Estados Unidos. Sin embargo, Mishkin (1981), subsiguientemente, rechaza la constancia en el tipo de interés real, en un estudio que cubre periodos más amplios: 1931-1952 y 1953-1979. Mundell (1963) también añade dudas teóricas a la relación propuesta por Fisher y a los resultados empíricos de Fama (1975), al considerar que la tasa de inflación disminuye los saldos reales de dinero, reduciendo la riqueza y provocando un aumento en el tipo de interés nominal inferior al incremento que experimenta la tasa de inflación. Nelson y Schwert (1977) también critican a Fama (1975), argumentando que los contrastes que utiliza este autor no tienen buenas propiedades de potencia, por lo que no rechaza la hipótesis conjunta de expectativas racionales y que el tipo de interés real *ex-ante* es constante. Si, por el contrario, se rechazara esta hipótesis, Nelson y Schwert (1977) argumentan que el tipo de interés real *ex-ante* se podría considerar que es variable y/o que el mercado es ineficiente. Otros autores que también añaden restricciones a la relación entre el tipo de interés y la

2.2. Efecto Fisher

tasa de inflación son Carmichael y Stebbing (1983), al suponer que la tasa de inflación anticipada es exógena⁷, en lugar de suponer que es exógeno el tipo de interés nominal como hace Fama (1975).

MacDonald y Murphy (1989), Mishkin (1992), Wallace y Warner (1993), Evans *et al.* (1994), Crowder y Hoffman (1996), Daniels *et al.* (1996) y Engsted (1995), *inter alia*, desechan los procedimientos de regresión estándar para contrastar empíricamente el efecto Fisher, utilizando técnicas de cointegración. Estos autores apoyan su metodología basándose en el hecho de que Fisher, en su artículo de 1930, encuentra evidencia de que, en general, el ajuste del tipo de interés nominal a las expectativas de variaciones en los precios es un proceso lento y gradual, por lo que interpretan este fenómeno como de equilibrio a largo plazo. Asimismo, su metodología se escuda en los estudios de Nelson y Plosser (1982) y Schwert (1987), que manifiestan que la mayoría de las series temporales financieras, entre las que se incluyen el tipo de interés nominal y la tasa de inflación esperada, son procesos no estacionarios, y en los análisis de Granger y Newbold (1974) y Phillips (1986), que señalan la posible aparición de problemas de regresión espuria si se utilizan las técnicas clásicas de estimación por MCO con series

⁷Carmichael y Stebbing (1983) tienen en cuenta la paradoja que el propio Fisher ya había adelantado, consistente en que el uso de datos sobre activos financieros para contrastar una teoría sobre activos reales, tiene que incorporar supuestos implícitos sobre los márgenes de sustitución entre dinero y activos financieros, por un lado, y entre activos financieros y capital, por otro. Por otra parte, Atkins (1989) señala que si el tipo de interés nominal es un predictor de la tasa de inflación, entonces el tipo de interés real está determinado por factores reales y no puede estar influenciado por la política monetaria.

no estacionarias. Otros autores que también utilizan la teoría de la cointegración para llevar a cabo su estudio empírico sobre el efecto Fisher son los de Atkins (1989), Bonham (1991), Pérez y Sáez (1992), Owen (1993), Phylaktis y Blake (1993), Aznar y Nievas (1995), Evans y Lewis (1995), Strauss y Terrell (1995), Dutt y Ghosh (1995), Peláez (1995), Ferrer (1998) y Lee, *et al.* (1998). Todos ellos parten de enfoques diferentes y se localizan en países y durante periodos de tiempo distintos, con hipótesis dispares sobre las propiedades estocásticas del tipo de interés real esperado, por lo que obtienen resultados muy heterogéneos, en unos casos a favor, y en otros en contra, del efecto Fisher.

El trabajo de MacDonald y Murphy (1989) se puede considerar como el precursor que aborda la interrelación entre el tipo de interés nominal y la expectativa de la tasa de inflación, explorando una posible relación de equilibrio a largo plazo entre ambas series haciendo uso de la teoría de la cointegración introducida por Engle y Granger (1987). En concreto, basándose en el supuesto de expectativas racionales⁸ y considerando que el tipo de interés real *ex-ante* es estacionario, analizan la presencia de una relación de equilibrio a largo plazo entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación esperada centrándose en cuatro países industrializados: Bélgica, Estados Unidos, Canadá y Reino Unido, durante el periodo que va de 1955

⁸Crockett (1998) analiza la plausibilidad de la hipótesis de expectativas racionales llegando a la conclusión de que, bajo supuestos macroeconómicos normales, no se espera que se pueda dar este tipo de expectativas. Por tanto, considera que la mayoría de los estudios empíricos sobre el efecto Fisher, basados en la hipótesis de expectativas racionales, no pueden mostrar evidencia convincente a favor o en contra de esta relación.

2.2. Efecto Fisher

a 1986. Sus resultados rechazan la validez de la ecuación de Fisher, aunque encuentran alguna evidencia empírica favorable para Canadá y Estados Unidos, durante el periodo de tipos de cambios fijos. A partir de este trabajo, se desarrollan muchos otros que también enfatizan la relación de equilibrio, o de largo plazo, entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación. Sin embargo, este enfoque requiere el supuesto de que la tasa de inflación y el tipo de interés nominal contengan una raíz unitaria. Este supuesto contradice la Teoría Económica, ya que gran parte del espectro de modelos macroeconómicos especifica o predice una covarianza de la tasa de inflación estacionaria⁹. Además, los contrastes de raíces unitarias tienen potencia muy baja, incluso nula, frente a alternativas plausibles (Cochrane, 1991).

Ferrer (1998) también utiliza la metodología de la cointegración para analizar el efecto Fisher, centrandó su estudio en la economía española. Este autor considera que si el mercado procesa de forma eficiente toda la información disponible, el tipo de interés nominal que genera un determinado activo financiero puede ser calculado como la suma del tipo de interés real esperado y la tasa de inflación anticipada:

$$i_t = E_t r_t + E_t \pi_t,$$

donde i_t representa el tipo de interés nominal durante un intervalo de tiempo unitario que comienza en el momento t ; $E_t r_t$ denota el tipo de interés

⁹Una excepción es la Teoría del señoriaje óptimo (Mankiw, 1987).

real *ex-ante* esperado *a priori* correspondiente al periodo de tiempo $[t, t+1]$; $E_t\pi_t$ es la tasa de inflación esperada asociada al periodo $[t, t+1]$. Ferrer (1998) opta por introducir el supuesto de expectativas racionales, de manera que la tasa de inflación anticipada se obtiene como el valor esperado de la tasa de inflación condicionada al conjunto de información disponible en el momento presente. Una de las implicaciones básicas de este supuesto es que la inflación observada y la anticipada difieren únicamente por un término de perturbación aleatoria con media cero, varianza constante y libre de correlación serial¹⁰, tal y como se especifica a continuación:

$$\pi_t = E_t\pi_t + \varepsilon_t,$$

donde π_t denota la tasa de inflación observada o realizada en el periodo $[t, t+1]$; ε_t representa el error de pronóstico racional o término de perturbación aleatoria con las características señaladas anteriormente. La ventaja de la adopción del enfoque de expectativas racionales radica en que en el largo plazo, bajo los mecanismos convencionales de formación de expectativas, éstas son correctas y, por consiguiente, la inflación observada se puede utilizar como *proxy* de la inflación esperada. Asimismo, Ferrer (1998) considera el supuesto de estacionariedad del tipo de interés real esperado. Tras incorporar estos dos supuestos, este autor llega a la siguiente ecuación representativa de la relación de Fisher:

¹⁰El término de perturbación aleatoria es ortogonal a cualquier información conocida en el periodo presente y, en ocasiones, recibe el nombre de tasa de inflación no anticipada.

2.2. Efecto Fisher

$$i_t = \alpha + \beta\pi_t + \mu_t, \quad (2.3)$$

donde α representa la media constante a largo plazo del tipo de interés real esperado; β es el coeficiente que mide la respuesta del tipo de interés nominal ante una variación en la tasa de inflación realizada; μ_t denota un término de error aleatorio constituido por la suma del error de pronóstico racional de la inflación y un componente que recoge los *shocks* de carácter estacionario que afectan al tipo de interés real *ex-ante*. En el ámbito de la teoría de la cointegración, la ecuación (2.3) recibe el nombre de regresión de cointegración, α y β son los parámetros del vector de cointegración, que es el vector que representa la relación estable de largo plazo entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación y μ_t es el denominado residuo de la regresión de cointegración.

Ferrer (1998) también distingue entre la forma fuerte de la ecuación de Fisher, o efecto Fisher total o completo, que establece un movimiento sincrónico a largo plazo y de tipo uno a uno entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación realizada, en este caso β es igual a la unidad, y la forma débil de la hipótesis de Fisher, denominada efecto Fisher parcial o incompleto, que plantea una vinculación estable en el largo plazo entre las dos variables implicadas, pero en la que no se produce un ajuste completo entre las dos variables, siendo β menor que la unidad, o lo que es lo mismo, se trata de una relación menos que proporcional. El análisis empírico de Ferrer (1998) utiliza un periodo muestral que abarca desde junio de 1989,

mes caracterizado por la entrada de España en el mecanismo de tipos de cambio del Sistema Monetario Europeo (SME), y marzo de 1996. Aplicando al tipo de interés nominal y a la tasa de inflación el test de raíces unitarias de Dickey Fuller ampliado (Dickey, 1976; Fuller, 1976; Dickey y Fuller, 1979, 1981), a partir de ahora DFA, y el de Said y Dickey (1984), concluye que ambas series son procesos $I(1)$. Asimismo, Ferrer (1998) aplica la metodología multivariante desarrollada por Johansen (1988, 1991) y por Johansen y Juselius (1990, 1992) para determinar, mediante el empleo de técnicas de estimación por máxima verosimilitud, la existencia de una relación de cointegración entre el conjunto de variables implicadas en la ecuación de Fisher. El resultado que obtiene es que este método confirma la ausencia de cointegración entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación, es decir, no detecta una conexión estable en el largo plazo entre estas series, por lo que, para Ferrer (1998), el tipo de interés nominal no refleja de forma sistemática las expectativas inflacionistas. Ferrer (1998) argumenta como posibles razones del fracaso a nivel empírico de la relación de Fisher las siguientes:

- La omisión de algunas variables relevantes en la relación de cointegración estimada¹¹.
- La ineficiencia del mercado español de renta fija.
- La formación no racional de las expectativas inflacionistas.

¹¹MacDonald y Murphy (1989), Bonham (1991) y Strauss y Terrell (1995) plantean que si no es correcta la hipótesis de estacionariedad de los tipos de interés reales ex-ante, entonces sería necesario incluir alguna variable representativa de los tipos de interés reales ex-ante en la ecuación empleada para la contrastación del Efecto Fisher.

2.2. Efecto Fisher

Ferrer (1998) obtiene como resultado que el tipo de interés real no es independiente de la tasa de inflación. Además, este resultado no difiere mucho de los obtenidos por otros trabajos anteriores llevados a cabo en el mercado español. La diferencia entre estos trabajos y el de Ferrer (1998) es que mientras que aquéllos analizan la presencia de cointegración entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación a través del método bietápico tradicional, elaborado por Engle y Granger (1987), en el estudio de Ferrer (1998) se emplea el procedimiento de Johansen y Juselius (1990, 1992). Sin embargo, tal y como Ferrer (1998) argumenta, y de acuerdo con MacDonald y Murphy (1989), lo que realmente se contrasta en su estudio es una hipótesis conjunta sobre la validez empírica de la hipótesis de Fisher y la racionalidad de la inflación anticipada.

Otro estudio que analiza la relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación, considerando una metodología diferente para estudiar el efecto Fisher según si ambas series son $I(1)$ o $I(0)$ es el de Aznar y Nievas (1995). Estos autores, que centran su estudio en la economía española, señalan que si se acepta que el tipo de interés real no es constante, las especificaciones que se utilizan para el contraste del efecto Fisher no deben tomarse como fenómenos aislados, sino que, como indican Levi y Makin (1978), deben tenerse en cuenta ecuaciones en forma reducida obtenidas a partir de un modelo macroeconómico de equilibrio general. Teniendo en cuenta este principio, Aznar y Nievas (1995) señalan que en la literatura se proponen diferentes modelos a partir de los cuales se derivan ecuaciones en forma reducida relativas a la relación entre el tipo de interés nominal y real

esperados. Aunque existen diferencias sustanciales entre todos los modelos, tal y como argumentan Aznar y Nievas (1995, p.283), tienen una estructura común: "...el núcleo está constituido por dos relaciones, la primera es una función IS y la segunda una función LM. Estas dos relaciones siempre van acompañadas por otra que explica la tasa de inflación y por la denominada ecuación de Fisher, en la que el tipo de interés nominal se expresa como suma del tipo de interés real esperado y la tasa de inflación esperada". Algunos autores también añaden una función de oferta y/o una relación que tiene en consideración el sector exterior. Algunos ejemplos de estos modelos en la literatura se pueden ver en Peek (1982), Wilcox (1983a, 1983b), Peek y Wilcox (1983, 1984), Groenewold (1989), Allen (1991, 1992) y Findlay (1991). Como ilustración de este enfoque, Aznar y Nievas (1995) se basan en el modelo contenido en Groenewold (1989), aunque lo aplican a datos de la economía española sin prestar atención a las series de impuestos. Así, las cuatro relaciones de este modelo se pueden representar de la siguiente manera:

$$y_t = a_0 + a_1(i_t - \pi_t^e) + a_2(p_x/p)_t + a_3(p_m/p)_t + a_4g_t, \quad (2.4)$$

$$m_t = b_0 + b_1y_t - b_2\pi_t^e - b_3(i_t - \pi_t^e) - b_4(y_t^* + e_t^e - \pi_t^e), \quad (2.5)$$

$$i_t = r_t^e + \pi_t^e, \quad (2.6)$$

$$\pi_t = \pi_t^e + \varepsilon_t, \quad (2.7)$$

donde:

y = nivel de producción real

2.2. Efecto Fisher

y^* = nivel de producción real del exterior

i = tipo de interés nominal

i^* = tipo de interés nominal del exterior

r^e = tipo de interés real esperado

π^e = tasa de inflación esperada

p_x = índice de precios de las exportaciones

p_m = índice de precios de las importaciones

p = índice de precios interior

g = gasto público en términos reales

m = stock de dinero en términos reales

e^e = depreciación esperada del tipo de cambio

ε = perturbación aleatoria

La relación (2.4) es la curva IS; la ecuación (2.5) es la curva LM, la expresión (2.6) es la ecuación de Fisher y la relación (2.7) recoge el supuesto de expectativas racionales, cumpliéndose que $E(\varepsilon_t/I_{t-1}) = 0$, donde I_{t-1} recoge la información relevante para los agentes en el periodo de formación de expectativas.

Algunas veces también se añaden las dos ecuaciones siguientes:

$$\dot{i}_t = r_t + \pi_t, \quad (2.8)$$

$$\pi_t^e = z_t' \gamma, \quad (2.9)$$

donde:

r_t = tipo de interés real *ex-post*

π_t = tasa de inflación *ex-post*

z'_t = vector de variables explicativas de la tasa de inflación.

A partir de (2.4) y (2.5) se obtiene la relación en forma reducida del tipo de interés real esperado, que se puede representar de la siguiente manera:

$$r_t^e = \alpha + \theta\pi_t^e + \delta_1 g_t + \delta_2 m_t + \delta_3 i_t^* + \delta_4 (p_x/p)_t + \delta_5 (p_m/p)_t + \delta_6 r_t^e, \quad (2.10)$$

y de forma más resumida se puede escribir así:

$$r_t^e = \alpha + \theta\pi_t^e + w'_t\delta,$$

donde w'_t es el conjunto de variables explicativas diferentes de la tasa de inflación esperada. A partir de estas ecuaciones, Aznar y Nievas (1995) argumentan que existen tres enfoques distintos para llevar a cabo el contraste del efecto Fisher con expectativas racionales:

(a) Enfoque de Errores en Variables: Este enfoque se basa en las relaciones (2.6), (2.7) y (2.10). Sustituyendo (2.10) y (2.7) en (2.6), se obtiene:

$$i_t = \alpha + (1 + \theta)\pi_t + w'_t\delta - (1 + \theta)\varepsilon_t = \beta\pi_t + w'_t\delta - \beta\varepsilon_t. \quad (2.11)$$

Para contrastar el efecto Fisher es necesario estimar (2.11) y contrastar la siguiente hipótesis:

2.2. Efecto Fisher

$$H_0 : \beta = 1.$$

Debido a que en la expresión (2.11), al menos uno de los regresores, como es π_t , está correlacionado con la perturbación aleatoria, la estimación por MCO conduce a subestimaciones del verdadero parámetro β , por lo que, según Aznar y Nievas (1995), para estimar correctamente esta ecuación hay que utilizar alguna variante del método variables instrumentales¹².

Si en la función IS se considera que la demanda de inversión depende también del tipo de interés real pasado y en lugar de utilizar la hipótesis (2.10), se utiliza la siguiente hipótesis sobre el tipo de interés real:

$$r_t^e = \alpha + \phi r_{t-1}^e + \theta \pi_t^e + w_t' \delta, \quad (2.12)$$

entonces se obtiene una expresión alternativa a (2.11).

Así, teniendo en cuenta que, a partir de (2.6), (2.7) y (2.8) se puede escribir:

$$r_t = r_t^e - \varepsilon_t, \quad (2.13)$$

y utilizando (2.7), (2.12) y (2.13), se llega a la siguiente expresión:

¹²Los problemas que plantea esta cuestión cuando se contrasta el efecto Fisher se desarrollan en Graham (1988).

$$r_t = \alpha + \phi r_{t-1} + \theta \pi_t + w_t' \delta + v_t, \quad (2.14)$$

donde:

$$v_t = -(1 + \theta)\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1}. \quad (2.15)$$

La estimación de (2.14), con la perturbación aleatoria representada como en la expresión (2.15), presenta problemas econométricos importantes. Kinal y Lahiri (1988) y Lahiri y Zaporowski (1988) proponen una solución a estos problemas teniendo en cuenta el trabajo de Cumby *et al.* (1983). La solución se basa en el uso del método de estimación por variables instrumentales, lo que deja un gran margen de arbitrariedad a la hora de seleccionar los instrumentos.

(b) Enfoque Mishkin: Se denomina así a este tipo de enfoque porque lo desarrolla y aplica Mishkin, en Mishkin (1981, 1984) y en Huizinga y Mishkin (1984). La propuesta es que a partir de (2.6) y (2.8) se obtiene:

$$r_t - r_t^e = -(\pi_t - \pi_t^e) = -\varepsilon_t.$$

Despejando r_t y sustituyendo en (2.10) se obtiene:

$$r_t = \theta \pi_t^e + w_t' \delta - \varepsilon_t.$$

2.2. Efecto Fisher

Por último, sustituyendo π_t^e por (2.9), se llega a la expresión:

$$r_t = z_t' \theta \gamma + w_t' \delta - \varepsilon_t. \quad (2.16)$$

El enfoque Mishkin propone estimar (2.16), obtener su estimación (\hat{r}_t), derivar la serie de tasa de inflación esperada a partir de (2.6) y analizar la correlación entre estas series, concluyendo la existencia o no del efecto Fisher. Según Aznar y Nievas (1995), en sentido estricto, se puede considerar que este procedimiento es más bien un contraste de la hipótesis de expectativas racionales a partir de la tasa de inflación esperada.

(c) Enfoque Sustitución: Este enfoque parte de un sistema formado por las dos relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} i_t &= \beta \pi_t^e + w_t' \delta + \varepsilon_t, \\ \pi_t &= \pi_t^e + \eta_t = z_t' \gamma + \eta_t. \end{aligned}$$

En forma matricial se puede representar este sistema como:

$$i = \pi^e \beta + W \delta + \varepsilon, \quad (2.17)$$

$$\pi = \pi^e + \eta = Z \gamma + \eta. \quad (2.18)$$

Este enfoque se basa en estimar γ en (2.18), obteniendo $\hat{\gamma} = (Z'Z)^{-1}Z'\pi$, posteriormente se calcula $\hat{\pi} = Z(Z'Z)^{-1}Z'\pi$, se sustituye π^e por $\hat{\pi}$ en (2.17) y, por último, se estiman los parámetros β y δ por MCO.

Esta sustitución lleva al siguiente modelo:

$$i = \hat{\pi}\beta + W\delta + \varepsilon + \pi^e\beta - \hat{\pi}\beta = \hat{\pi}\beta + W\delta + u. \quad (2.19)$$

Teniendo en cuenta:

$$\pi^e - \hat{\pi} = Z\gamma - Z(Z'Z)^{-1}Z'\pi = -Z(Z'Z)^{-1}Z'\eta = -P_z\eta,$$

la perturbación aleatoria en la expresión (2.19), se puede escribir como:

$$u = \varepsilon - \beta P_z\eta.$$

Si se supone que ε y η son independientes, entonces los dos primeros momentos de u vienen dados por:

$$\begin{aligned} E(u) &= 0 \\ \text{Var}(u) &= \sigma_\varepsilon^2 + \beta^2 P_z \sigma_\eta^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Según Pagan (1984), Pesaran (1987) y McAleer y McKenzie (1991), se puede estimar β a través de tres procedimientos:

- Aplicar MCO a la expresión (2.19).
- Aplicar Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG) a (2.19), considerando (2.20).

2.2. Efecto Fisher

- Aplicar métodos de estimación máximo-verosímiles al sistema (2.17)-(2.18).

En las referencias citadas previamente se obtiene que el método más eficiente es el tercero, pero si se supone que β y δ son diferentes de cero existen dos casos para los que el primer método es tan eficiente como el tercero: i) W es ortogonal a Z y ii) las variables presentes en W están también presentes en Z . En la literatura relativa al efecto Fisher (por ejemplo, Graham, 1988) se opta, generalmente, por la segunda solución, utilizando para estimar la expectativa de π un grupo de variables entre las que se encuentran las incluidas en W .

Para contrastar el efecto Fisher, Aznar y Nievas (1995) proponen que si todas las variables son estacionarias, entonces debe tratarse el problema de la correlación entre algunos de los regresores y la perturbación aleatoria prestando atención a alguno de los tres procedimientos explicados anteriormente, aconsejando utilizar una de las dos vías que aparecen en el enfoque sustitución, es decir, suponer ortogonalidad de las variables que forman W respecto a las incluidas en Z o que las variables en W estén incluidas en Z . Así, teniendo en cuenta que estos autores consideran que el efecto Fisher equivale a que las variables que determinan el tipo de interés real esperado no coinciden con las que determinan la tasa de inflación, creen que la mejor vía a seguir sería la basada en la ortogonalidad de las variables en W respecto a las incluidas en Z , y no en el método habitualmente utilizado basado en que las variables en W estén incluidas en Z . Si, por el contrario, las variables son $I(1)$, la solución es diferente. En este caso, Aznar y Nievas

(1995) obtienen la siguiente versión de la relación (2.11):

$$i_t = \sum_{i=1}^p \phi_i i_{t-i} + \sum_{i=0}^p \beta_i \pi_{t-i} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^p \delta_{ij} w_{i,t-j} + u_t, \quad (2.21)$$

donde se supone que u_t es ruido blanco. Estos autores obtienen que si π_t es un proceso I(1) y la perturbación aleatoria es I(0), teniendo en cuenta a Cuthbertson *et al.* (1992) y Hamilton (1994), el estimador obtenido por MCO de β_0 es consistente, aunque exista correlación entre la variable y la perturbación aleatoria. De esta manera, se resolvería el problema de la correlación entre el regresor y la perturbación, pero surgiría el de tratar un modelo con variables integradas.

Cuando el tipo de interés nominal y la tasa de inflación son procesos I(1), Aznar y Nievas (1995) plantean contrastar la posible relación de cointegración entre i_t y π_t y las variables incluidas en w_t . Si al aplicar el contraste se obtiene como resultado que no hay cointegración, se rechaza el efecto Fisher.

Si se acepta la existencia de relación de cointegración, significa que hay un vector de parámetros (β_0, δ_0') de tal manera que la expresión $i_t - \pi_t \beta_0 - w_t' \delta_0$ es estacionaria. Tras determinar el valor de p en la expresión (2.21), el siguiente paso consiste en llevar a cabo el contraste de la hipótesis:

$$H_0 : \beta = 1$$

2.2. Efecto Fisher

La conclusión que Aznar y Nieves (1995) extraen es que no sólo se rechaza el efecto Fisher en la economía española en el periodo que va desde enero de 1990 a diciembre de 1994, sino también se rechaza que la tasa de inflación tenga algún efecto sobre el tipo de interés nominal. En Nieves (1994) se recogen las explicaciones que se dan en la literatura para dar cuenta de la ausencia del efecto Fisher. Un primer grupo de autores argumentan que se rechaza esta hipótesis porque los modelos utilizados están mal especificados y aconsejan incorporar nuevas variables¹³. Un segundo grupo de autores asocia el incumplimiento del efecto Fisher a la capacidad de los agentes para predecir los cambios en la tasa de inflación, según la trayectoria seguida por ésta¹⁴. Finalmente, un tercer grupo de autores gira sus argumentos en torno a la denominada *hipótesis inversa de Fisher*, destacando el grado de sustituibilidad entre los diferentes activos¹⁵. Según Aznar y Nieves (1995) cualquiera de estas argumentaciones serían válidas para explicar la ausencia de efecto Fisher que obtienen para el caso español.

Uno de los trabajos que se centran en el análisis del comportamiento del

¹³En particular, Darby (1975), Feldstein (1976), Gandolfi (1976) y Tanzi (1976) hacen hincapié en la ausencia de variables impositivas. Wilcox (1983a, 1983b y 1983c) pone el acento en la necesidad de introducir en el modelo lo que llama "variables de oferta". Chouldhry, Placome y Wallace (1991) consideran necesario incluir variables que tengan en cuenta el grado de regulación monetaria existente. Viren (1987, 1989) justifica el incumplimiento del efecto Fisher por los cambios institucionales acaecidos en la economía.

¹⁴Con este enfoque destacan los trabajos de Barthold y Dougan (1986), Barsky (1987) y Mishkin (1992).

¹⁵En este sentido, ver Carmichael y Stebbing (1983), Fried y Howit (1983) y Mitchel (1985).

tipo de interés real en el largo plazo y que no requiere el supuesto de raíz unitaria en el tipo de interés nominal y en la tasa de inflación es el de Duck (1993), quien encuentra evidencia de un efecto Fisher completo en el largo plazo, utilizando promedios a largo plazo de la tasa de inflación y del tipo de interés nominal en una sección cruzada de países¹⁶. El método de promedios a largo plazo tiene la ventaja de ser válido tanto en el caso en que las series presenten raíz unitaria o sean estacionarias¹⁷. Coppock y Poitras (2000) también vuelven a analizar el efecto Fisher utilizando el procedimiento de promedios a largo plazo en una sección cruzada de países, llegando a la conclusión de un efecto Fisher parcial. Estos autores consideran promedios de tasas anuales de la tasa de inflación y del tipo de interés nominal en el periodo 1976-1988 con datos *cross-section* de 40 países. El modelo empírico que consideran adopta la siguiente forma:

$$i_t = \alpha + \beta_0 \pi_t + \beta_1 VP_t + \varepsilon_t. \quad (2.22)$$

¹⁶Ver también Evans y Lewis (1995), Peláez (1995) o Crowder y Hoffman (1996).

¹⁷Coppock y Poitras (2000), para demostrar la validez de este procedimiento, consideran el supuesto de que la inflación sigue un paseo aleatorio simple, $\pi_t = \pi_{t-1} + v_t$, siendo v_t un ruido blanco. Sin pérdida de generalidad suponen que el tipo de interés real es igual a cero, de manera que para compensar a los prestamistas por la inflación esperada, el tipo de interés nominal debe seguir el siguiente proceso: $i_t = \pi_{t-1}$. Así, $\pi_t - i_t = v_t$. Calculando promedios muestrales se obtiene: $\sum_t \pi_t/T - \sum_t i_t/T = \sum_t v_t/T$, que tiende al valor cero cuando el tamaño muestral (T) tiende a infinito, ya que v_t es ruido blanco. Por tanto, para un valor de T suficientemente grande, los promedios de tasas de inflación y de tipos de interés nominales se mueven en correspondencia aproximada uno a uno, incluso aunque posean una raíz unitaria.

2.2. Efecto Fisher

Para el país i , π_i representa el promedio de inflación anual, medida por el deflactor del Producto Nacional Bruto (PNB) o el deflactor del Producto Interior Bruto (PIB); i_i es el promedio de corto plazo o medio plazo del tipo de interés a corto o medio plazo de la deuda del Estado; y VP_i es la variabilidad de la inflación, medida como la desviación estándar de la tasa de inflación anual. El modelo considera la variable VP_i como *proxy* de la incertidumbre respecto a la tasa de inflación. Coppock y Poitras (2000), sin embargo, señalan que la ecuación (2.22) puede tener un importante sesgo debido a las variables omitidas, ya que muchos factores pueden hacer que el tipo de interés real varíe entre países¹⁸. Por ejemplo, algunos países pueden poner controles a su tipo de interés nominal, o los países pueden tener diferentes tipos impositivos que gravan los ingresos que se obtienen por intereses, además, los Bonos del Estado de diferentes naciones pueden tener características distintas de liquidez y riesgo. Otro efecto que puede influir considerablemente en la relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación es la hiperinflación acaecida en algunos países como Brasil, Bolivia y Perú, que puede romper las condiciones de regularidad empírica que existen cuando la inflación es moderada. De hecho, cuando Coppock y Poitras (2000) estiman por MCO la ecuación (2.22) para todos los países, sus resultados apoyan la conclusión extraída por Duck (1993) de

¹⁸Si no existe movilidad perfecta de bienes entre países, los tipos de interés reales pueden diferir entre ellos, incluso si existe movilidad perfecta de capitales en el mercado financiero. La movilidad imperfecta en el mercado de bienes, implica que los inversores tienen un incentivo pequeño a responder a diferenciales en los tipos de interés reales, expresados en términos de bienes de diferentes países.

que se produce el efecto Fisher completo, al obtener una estimación de β_0 igual a la unidad. Por el contrario, si se omiten los datos de Brasil, la estimación del parámetro β_0 pasa a tomar un valor inferior a la unidad, al nivel de significación del 1%. Por ello, aplican las técnicas *Bounded-Influence*, presentadas por Welsch (1980) y Krasker y Welsch (1982). Estas técnicas no son una panacea para resolver todas las patologías econométricas, pero proporcionan una inferencia robusta a cambios que se puedan producir en pequeñas muestras y mitigan los efectos de variables omitidas y de datos que presentan errores. El resultado de aplicar el método en dos pasos de Welsch (1980) y el método iterativo de Krasker-Welsch lleva a Coppock y Poitras (2000) a concluir que no se produce un efecto Fisher completo, sino un efecto parcial¹⁹, ya que mediante el método en dos pasos obtiene un valor de β_0 de 0.78, significativo al nivel del 1%, y si se utiliza el método iterativo, β_0 toma un valor de 0.63, también significativo al nivel del 1%. Según Coppock y Poitras (2000), los modelos de precios de activos, como el de Lucas (1978) y Stulz (1986), predicen generalmente un efecto negativo de la incertidumbre de la tasa de inflación en el tipo de interés nominal.

¹⁹Utilizando 33 observaciones de datos, como las que usa Duck (1993), Coppock y Poitras (2000) obtienen resultados similares. Reemplazando la variable VP_i por el logaritmo de VP_i , para disminuir el efecto marginal de la incertidumbre de la inflación en el tipo de interés real, los resultados tampoco cambian sustancialmente. Omitiendo completamente la variable VP_i y utilizando una estimación *Bounded-Influence* de la regresión simple del tipo de interés nominal y la tasa de inflación, también proporciona una inferencia similar. En este caso, el procedimiento en dos pasos estima un efecto marginal de la incertidumbre de la inflación en el tipo de interés real de 0.63, mientras que el iterativo obtiene un efecto de 0.59.

2.2. Efecto Fisher

Este efecto procede de la desigualdad de Jensen (Coppock y Poitras, p.182 y 183): *"El rendimiento real esperado del valor nominal de un bono incrementa a medida que la inflación se vuelve más variable, debido a que el valor real de vencimiento del bono es una función cóncava del nivel de precios"*. Por tanto, para mantener el rendimiento real de equilibrio, el tipo de interés nominal debe disminuir. De modo menos formal, Friedman y Schwartz (1982) argumentan que la variabilidad de la inflación puede perjudicar el rendimiento de un bono u obligación, al deteriorar la eficiencia del mercado de capitales y al disminuir el promedio de productividad real²⁰.

Los estudios analizados anteriormente se centran en un análisis sobre la relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en el largo plazo. Sin embargo, también se han desarrollado estudios que tratan de hallar una relación entre ambas variables en el corto plazo. Estos últimos se centran en la relación entre la tasa de crecimiento del tipo de interés nominal y la variación de la tasa de inflación, denominando a esta relación "efecto Fisher de corto plazo". Mishkin (1992) fue el primer autor en aglutinar en un mismo artículo los denominados "efecto Fisher de largo plazo" y "efecto Fisher de corto plazo". Para analizar la relación de largo plazo entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación, Mishkin (1992) utiliza tests de cointegración basados en los residuos. A través de estos contrastes encuentra soporte empírico a favor del cumplimiento del efecto Fisher de largo plazo, ya que halla una tendencia estocástica común entre el tipo de interés nominal y la tasa de crecimiento de los precios de Estados Unidos

²⁰Ver el modelo de oferta de trabajo de Snow y Warren (1986).

para el periodo de la postguerra, enero 1953-diciembre1990, y para los subperiodos siguientes: enero 1953-octubre 1979, noviembre 1979-octubre 1982 y noviembre 1982-diciembre 1990. Así, Mishkin (1992) obtiene que si π_t^m es la tasa de inflación en el periodo m , entonces a partir de la ecuación (2.2) se llega a la siguiente relación entre el tipo de interés real *ex-post* ($r_t^m = i_t^m - \pi_t^m$) y el tipo de interés *ex-ante* ($r_t^{e,m}$) :

$$r_t^m = r_t^{e,m} + (\pi_t^{e,m} - \pi_t^m) = r_t^{e,m} + \varepsilon_t.$$

Bajo el supuesto de expectativas racionales, que se basa en que los agentes utilizan toda la información de forma eficiente a la hora de predecir la inflación, el error de predicción de la tasa de inflación ($\varepsilon_t = \pi_t^{e,m} - \pi_t^m$) es una diferencia de martingalas y, por tanto, es estacionario o integrado de orden cero, I(0). Bajo esta hipótesis, el tipo de interés real *ex-post* y *ex-ante* difieren por un componente estacionario y, por consiguiente, tienen las mismas propiedades en el largo plazo. Así, Mishkin (1992) argumenta que el tipo de interés real *ex-post* solo puede ser I(1) si $r_t^{e,m}$ es I(1). Por tanto, un contraste de raíz unitaria aplicado a r_t^m , frente a la H_1 de estacionariedad, se puede interpretar como un test de raíz unitaria aplicado a la serie $r_t^{e,m}$, frente a la alternativa de tipo de interés real *ex-ante* estacionario. Asimismo, la existencia de una relación de cointegración entre i_t^m y π_t^m es la hipótesis alternativa en un contraste de raíz unitaria aplicado al tipo de interés real *ex-post*. El efecto Fisher de largo plazo implica no rechazar la hipótesis de que el tipo de interés real *ex-ante* es estacionario,

2.2. Efecto Fisher

es decir, bajo expectativas racionales y errores de predicción estacionarios para la inflación, se cumple el efecto Fisher si el tipo de interés real *ex-post* también es estacionario.

En lo referente al estudio de Mishkin (1992) relativo al efecto Fisher de corto plazo, y teniendo en cuenta expectativas racionales, este autor también deriva una ecuación alternativa para contrastar dicho efecto:

$$\Delta\pi_t^m = \alpha_m + \beta_m \Delta i_t^m + \eta_t^m,$$

donde

$$\eta_t^m = u_t^m + \varepsilon_t^m - \varepsilon_{t-1}^m,$$

de manera que un coeficiente β_m positivo proporciona evidencia de que un cambio en el tipo de interés nominal está asociado a un cambio inmediato en la tasa de inflación esperada. Sin embargo, su estudio empírico no encuentra soporte al efecto Fisher de corto plazo, argumentando que la no existencia del mismo no excluye la posibilidad de que pueda darse un efecto Fisher de largo plazo.

Lee, Clark y Ahn (1998), más recientemente, también estudian el efecto Fisher de largo y corto plazo. Para contrastar el efecto Fisher de largo plazo también utilizan técnicas de cointegración y se basan en los mismos datos que Mishkin (1992). Así, teniendo en cuenta la identidad de Fisher, de manera que el tipo de interés nominal en el periodo m es igual al tipo de

interés real esperado en el mismo periodo, más la expectativa de inflación a lo largo de m periodos, Lee *et al.* (1998) obtienen la siguiente expresión:

$$i_t^m = E_t r_t^m + E_t \pi_t^m, \quad (2.23)$$

Suponiendo expectativas racionales: $\pi_t^m = E_t \pi_t^m + \varepsilon_t^m$, donde ε_t^m es el error de predicción de la inflación, se puede expresar la ecuación (2.23) de la siguiente manera:

$$i_t^m = E_t r_t^m + \pi_t^m - \varepsilon_t^m. \quad (2.24)$$

Si i_t^m y π_t^m son procesos I(1) y cointegran, entonces se cumple el efecto Fisher. La expresión (2.24) se puede representar de tal manera que se muestre en el lado izquierdo de la ecuación dicho efecto²¹:

$$i_t^m - \pi_t^m = E_t r_t^m - \varepsilon_t^m.$$

Según estos autores, bajo expectativas racionales, el valor esperado de ε_t^m es cero, además ε_t^m debe ser estacionario²². Así, si el tipo de interés real *ex-ante*, $E_t r_t^m$, también es estacionario, entonces $i_t^m - \pi_t^m$ es estacionario

²¹Sheehan (1996) considera la identidad de la ecuación de Fisher "ampliada", mediante la especificación de un modelo macroeconómico con un número mayor de variables y obtiene a partir de él la forma reducida de la ecuación del tipo de interés.

²²Aunque el valor esperado del término de perturbación aleatoria se puede desviar de cero en el corto plazo, en el largo plazo debe converger a cero.

2.2. Efecto Fisher

y $(1, -1)$ será el vector de cointegración de $Y = [i_t^m, \pi_t^m]'$. En este caso especial, el tipo de interés nominal se mueve uno a uno con la tasa de inflación (Mishkin, 1992, y Owen, 1993), es decir, se produce un efecto Fisher completo. Sin embargo, las series i_t^m y π_t^m podrían estar cointegradas con un vector de cointegración $(1, -\beta)$ (Owen, 1993). En este caso, el tipo de interés nominal y la tasa de inflación tendrían una tendencia estocástica común y si $\beta \neq 1$ existiría un efecto Fisher parcial. Si no se encuentra ninguna combinación lineal entre i_t^m y π_t^m que sea estacionaria, cuando ambas variables son procesos $I(1)$, implicaría ausencia de efecto Fisher en el largo plazo.

Lee *et al.* (1998), utilizando el test de razón de verosimilitud de Yap y Reinsel (1995) y el test KPSS sugerido por Kwiatkowski *et al.* (1992), muestran que el tipo de interés nominal y la tasa de inflación de Estados Unidos presentan una raíz unitaria²³. Partiendo de estos resultados, Lee *et al.* (1998) analizan si existe una relación estacionaria entre ambas series o, lo que es lo mismo, si existe un vector de cointegración entre ellas mediante el test de máxima-verosimilitud de Ahn y Reinsel (1990, 1992). Para ello, consideran un vector autorregresivo, a partir del vector constituido por el tipo de interés nominal y la tasa de inflación $Y_t = [i_t^m, \pi_t^m]'$:

$$\Gamma(L)Y_t = \theta + \left(I_n - \sum_{j=1}^p \Gamma_j L^j \right) Y_t + \varepsilon_t, \quad (2.25)$$

²³Estos resultados son bastantes similares a los de Mishkin (1992), que utiliza técnicas alternativas.

donde $n = 2$, L es un operador de retardos y ε_t es una secuencia de vectores aleatorios de dimensión n distribuidos independientemente con $E(\varepsilon_t) = 0$ y $cov(\varepsilon_t) = \Omega_\varepsilon$. Si Y_t está cointegrado con un rango de cointegración $k = 1$, denotado CI(1,1), entonces el rango de $\{\Gamma(1)\} = k = 1$ y el número de raíces unitarias que satisfacen que el determinante de $\{\Gamma(L)\} = 0$ es $d = n - k = 2 - 1 = 1$, por lo que el modelo (2.25) tiene la siguiente representación de corrección de error, según Engle y Granger (1987):

$$\Delta Y_t = \theta + \Psi Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i^* \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (2.26)$$

donde $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$; $\Psi = \alpha\beta'$ tiene un rango reducido k ; α es una matriz de parámetros de los términos de corrección de error no nula de dimensión $n \times k$; β' es un vector normalizado de dimensión $k \times n$, tal que $\beta'Y_{t-1}$ es estacionario y la matriz $\alpha\beta'$ contiene la información de largo plazo de los datos. Adicionalmente, $\Gamma_i^* = -\sum_{j=i+1}^p \Gamma_j$, con parámetros Γ_j autorregresivos dados en la ecuación (2.25). Si se produce el efecto Fisher existe un vector de cointegración y la matriz Ψ tiene rango $k = 1$. Cuando se produce este resultado, se puede contrastar el efecto Fisher completo comparando el vector de cointegración estimado $(1, -\beta)$ con el hipotético $(1, -1)$.

El resultado que obtienen es el rechazo de la H_0 de no cointegración cuando se utiliza todo el periodo muestral y, por consiguiente, no se rechaza la existencia de efecto Fisher de largo plazo completo, es decir, el tipo de interés nominal se mueve con la tasa de inflación a través de una relación de tipo uno a uno. Por el contrario, los resultados difieren si se consideran

2.2. Efecto Fisher

diferentes subperiodos muestrales. La subdivisión muestral que tienen en cuenta se basa en la variación que se produce en la relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación como consecuencia de los cambios de regímenes que experimenta la Reserva Federal en octubre de 1979 y octubre de 1982 (Huizinga y Mishkin, 1986). Así, por ejemplo, en la submuestra anterior a noviembre de 1979²⁴, obtiene un efecto Fisher de largo plazo parcial, coincidiendo este resultado con el de Mishkin (1992). Sin embargo, no encuentran que se produzca dicho efecto en los periodos relativamente más cortos: noviembre de 1979-octubre de 1982 y noviembre 1982-diciembre de 1990, a diferencia de Mishkin (1992) que sí encuentra evidencia empírica a favor del efecto Fisher en estos periodos.

Adicionalmente, Lee *et al.* (1998) también encuentran apoyo al efecto Fisher de corto plazo. Utilizando el test de causalidad de Granger, que le permite conocer de manera simultánea la relación de cointegración y el valor estimado de los parámetros que aparecen en el modelo de corrección de error (MCE), representado en la ecuación (2.26), y a través del estadístico de razón de verosimilitud, obtienen evidencia del efecto Fisher de corto plazo en el subperiodo anterior a noviembre de 1979 (este resultado difiere del de Mishkin, 1992), pero no en el resto de periodos y tampoco si tiene en cuenta toda la muestra. Según Lee *et al.* (1998), algunas de las diferencias entre sus resultados y los de Mishkin (1992) se deben a que utilizan técnicas

²⁴Los datos se disponen desde enero de 1953, si el periodo de maduración de las Letras del Tesoro va de 1 a 3 meses; desde enero de 1959, si el periodo de maduración es de 6 meses, y desde enero de 1964, si el periodo de maduración va de 9 a 12 meses.

más eficientes y con mayor potencia para identificar el efecto Fisher de corto plazo. Ante estos resultados, cabe señalar que, tal y como argumentan Vahid y Engle (1993), el hecho de que la tasa de inflación y el tipo de interés, considerados en niveles, muestren una evolución muy parecida, lo que implicaría un efecto Fisher de largo plazo, no tendría porqué significar que tenga que encontrarse una evolución parecida entre las primeras diferencias de estas series, es decir, no tendría porqué producirse un efecto Fisher de corto plazo.

Por otra parte, Koustas y Serletis (1999) estudian el cumplimiento del efecto Fisher, utilizando datos trimestrales del periodo de la postguerra, para Bélgica, Canadá, Dinamarca, Francia, Alemania, Grecia, Irlanda, Japón, Holanda, Reino Unido y Estados Unidos. Para ello, utilizan una metodología autorregresiva bivalente, propuesta por King y Watson (1997), prestando especial atención a las propiedades de integración y cointegración de las variables, ya que, para estos autores, el efecto Fisher depende de estas propiedades, y también analizan, entre otros aspectos, el efecto dinámico que produce un *shock* de inflación en el tipo de interés nominal. Sus resultados, aunque no exentos de diferentes interpretaciones, son similares a los de King y Watson (1997) para Estados Unidos, pero diferentes a las conclusiones obtenidas por Mishkin (1984), quien encuentra un fuerte efecto Fisher completo para Canadá, Reino Unido y Estados Unidos (y débil para Francia, Alemania y Holanda). Así, sus resultados apoyan una gran parte de la literatura orientada al análisis del efecto Fisher que considera que la inflación completamente anticipada tiene un efecto menor

2.2. Efecto Fisher

que la unidad en el tipo de interés nominal y, por consiguiente, el tipo de interés real se reduce incluso en el largo plazo.

Rico (2001), también analiza el efecto Fisher a largo plazo y a corto plazo con datos de la economía española para el periodo junio 1982-junio 1998. En particular, utiliza el índice de precios al consumo (IPC) y el Mibor a tres meses y a un año, obtenidos del boletín estadístico del Banco de España. Los resultados que obtiene, tras estimar un modelo de corrección de error (MCE) a través del test de máxima verosimilitud de Johansen (1988, 1991) y Johansen y Juselius (1990, 1992) y siguiendo el enfoque de Crowder y Hoffman (1996), es que se cumple el efecto Fisher ampliado (por las primas de inflación) y corregido (por impuestos) en el largo plazo²⁵, por lo que concluye que se cumple el denominado "efecto Darby"²⁶. Por el contrario, no encuentra evidencia de efecto Fisher a corto plazo.

Ante la dificultad que supone la aparente no estacionariedad del tipo de interés real, la mayoría de estudios empíricos se centran, únicamente, en el análisis del efecto Fisher de corto plazo. Sin embargo, es necesario remarcar que el verdadero efecto Fisher, postulado por este autor en su artículo de 1930, se basa en el ajuste del tipo de interés nominal a la tasa de inflación esperada en el largo plazo. Por tanto, no es sorprendente que muchos de los estudios centrados en el corto plazo no detecten un efecto Fisher completo.

²⁵El rendimiento nominal de los bonos está sujeto a una tasa impositiva marginal.

²⁶El efecto Darby (Darby, 1975) consiste en que el tipo de interés nominal es más sensible a la tasa de inflación que lo que supone el efecto Fisher completo, como consecuencia de la presencia de impuestos.

Los primeros estudios relativos únicamente al efecto Fisher de corto plazo surgen a raíz del de Fama (1975), quien encuentra que cambios en el tipo de interés nominal ayudan a predecir variaciones en la tasa de inflación. Para Fama (1975), si se tiene en cuenta un modelo con datos en niveles, tal y como se describe en la siguiente ecuación:

$$\pi_t^m = \alpha^m + \beta^m i_t^m + \varepsilon_t^m,$$

y las series implicadas en la relación anterior no son estacionarias, podríamos encontrar una relación entre ellas que fuera espuria. Otros autores, como Nelson y Schwert (1977) y Schwert (1979) proporcionan soporte empírico al efecto Fisher de corto plazo utilizando un enfoque alternativo al de Fama (1975). Estos autores se basan en los contrastes de causalidad de Granger, ya que se utilizan generalmente para predecir en el corto plazo.

Coppock y Poitras (2000) critican los contrastes orientados al análisis del efecto Fisher en el corto plazo, ya que consideran que la mayoría de los modelos macroeconómicos centrados en el estudio de esta relación en el corto plazo determinan la tasa de inflación y el tipo de interés nominal de manera endógena, por lo que la correlación observada en el corto plazo entre estas series depende de la trayectoria de las variables exógenas, que son las que fuerzan el sistema. Por ejemplo, *shocks* temporales de productividad podrían inducir una correlación positiva entre la tasa de inflación y el tipo de interés nominal, mientras que *shocks* de liquidez podrían causar una correlación negativa. Por tanto, según Coppock y Poitras (2000), la

2.2. Efecto Fisher

Teoría Económica puede conseguir predecir correctamente la respuesta del tipo de interés nominal a los cambios en la tasa de inflación únicamente en el largo plazo, ya que en este periodo de tiempo la tasa de inflación se puede considerar exógena con respecto al tipo de interés. Además, argumentan que la mayoría de estudios de series temporales convencionales, que contrastan únicamente la correlación entre estas dos series en el corto plazo, tampoco encuentran apoyo a la hipótesis de Fisher²⁷. Coppock y Poitras (2000) adicionalmente argumentan que los modelos empíricos de corto plazo encuentran dificultades para medir la inflación esperada. Numerosos estudios utilizan la inflación efectiva como *proxy* de la inflación esperada, pero Honohan (1985) y Graham (1988) demuestran que este enfoque puede generar errores substanciales de sesgo en las variables. Además, Coppock y Poitras (2000) añaden que en el largo plazo la "Ley de los grandes números"²⁸ hace que, si se tienen en cuenta promedios en el largo plazo, se cancelen los errores de corto plazo, por lo que utilizan un método basado en estos promedios, explicado anteriormente.

²⁷A pesar de estas consideraciones, los investigadores continúan llevando a cabo contrastes del efecto Fisher únicamente en el corto plazo. Por ejemplo, el estudio de Kandel *et al.* (1996). Para una discusión más clara ver Summers (1983).

²⁸El argumento de la Ley de los grandes números es el siguiente: si ε_t representa el error esperado en el corto plazo, tal que $\pi_t = E\pi_t + \varepsilon_t$. De acuerdo con las expectativas racionales, si ε_t es un proceso i.i.d. con media cero y varianza σ_ε^2 , entonces, $var(T^{-1} \sum_t \pi_t - T^{-1} \sum_t E\pi_t) = var(T^{-1} \sum_t \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2/T$. Por tanto, $T^{-1} \sum_t \pi_t$, el promedio de la tasa de inflación en el corto plazo, converge en media cuadrática a $T^{-1} \sum_t E\pi_t$, el promedio de expectativa de inflación en el corto plazo.

Hasta ahora hemos resumido algunos de los principales estudios relativos al efecto Fisher, basados en diferentes metodologías, pero sin tener en cuenta la posible existencia de cambios estructurales en el tipo de interés nominal y en la tasa de inflación. La no consideración de estas rupturas puede desvirtuar las propiedades de estas series temporales, por lo que también surgen estudios que tienen en cuenta los cambios que experimenta la media o la tendencia determinista de las mismas, ocasionados por eventos exógenos que inciden en ellas. Los estudios que llevan a cabo el análisis del efecto Fisher como una relación de cointegración, parten del supuesto de que la tasa de inflación y el tipo de interés nominal son procesos no estacionarios. Sin embargo, los contrastes de raíces unitarias, tal y como demuestra Perron (1989) y como argumentamos en el Capítulo 1, tienen una potencia muy baja ante cambios estructurales en las series, de manera que estos tests confunden rupturas estructurales en la media o en la tendencia determinista de las series como perturbaciones estocásticas permanentes. Por tanto, la aparente relación de largo plazo, detectada en la gran mayoría de trabajos que se basan en contrastes de cointegración, puede ser producto de un *shock* determinista común que afecta a ambas series, siendo estacionarias alrededor de una tendencia segmentada.

Teniendo en cuenta que tanto el tipo de interés nominal como la tasa de inflación pueden presentar rupturas en la media o en la tendencia determinista, Malliaropulos (2000) propone el contraste del efecto Fisher suponiendo que el tipo de interés nominal a tres meses de las Letras de Tesoro y la tasa de inflación de Estados Unidos, desde el primer trimestre de 1960

2.2. Efecto Fisher

al tercero de 1995, son series estacionarias alrededor de una tendencia con una ruptura estructural tanto en la media no condicional como en la pendiente, que se produce a principios de los años ochenta. Este planteamiento contrasta con el de García y Perron (1996), que identifica dos rupturas estructurales en la media de la inflación y en el tipo de interés real²⁹, y con el de Evans y Lewis (1995), que muestra evidencia de estacionariedad en el tipo de interés real con una ruptura estructural en la media, pero no encuentra evidencia de estacionariedad para la tasa de inflación y el tipo de interés nominal. Malliaropulos (2000) contrasta la H_0 de no estacionariedad, frente a la hipótesis de estacionariedad con cambios estructurales tanto en la media como en la pendiente de las series. Por tanto, se puede considerar que el contraste de Malliaropulos (2000) incluye el de Evans y Lewis (1995) como un caso especial bajo la H_1 . Además, utiliza el test secuencial de Zivot y Andrews (1992) para identificar la ruptura estructural de manera endógena, es decir, teniendo en cuenta la información que proporcionan los datos. Por otra parte, con el fin de analizar la relación dinámica entre la tasa de inflación y el tipo de interés nominal, Malliaropulos (2000) emplea un modelo VAR. Así, utilizando las funciones impulso-respuesta de un VAR³⁰, deriva las correlaciones entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación para diferentes horizontes temporales y considera el efec-

²⁹García y Perron (1996), mediante procedimientos de cambios de régimen, encuentran soporte empírico a la idea de que el tipo de interés real *ex-ante* es constante en el periodo 1961-1986, aunque sujeto a ocasionales cambios en la media.

³⁰Algunos ejemplos sobre el tratamiento del efecto Fisher utilizando modelos VAR pueden verse en Sargent (1973), Dwyer (1981), Saracoglu (1984), Canto *et al.* (1987), Atkins (1989) y Thoma (1992), entre otros.

to Fisher como una relación dinámica. Sus resultados confirman que se produce el efecto Fisher en el medio y largo plazo. Además, obtiene que la velocidad de ajuste del tipo de interés nominal a los *shocks* de inflación es considerablemente más alta que lo que sugieren estudios previos. Así por ejemplo, Crowder y Hoffman (1996) muestran que el tipo de interés nominal tarda en ajustarse completamente a la tasa de inflación durante un periodo de seis a ocho años. Por el contrario, el estudio de Malliaropulos (2000) obtiene un ajuste más rápido, en particular, cinco o seis trimestres y, consecuentemente, una persistencia menor de los *shocks* de inflación en el tipo de interés real. La diferencia entre estos dos estudios radica en que Malliaropulos (2000) estima un modelo VAR con variables estacionarias, a las que extrae la tendencia determinista, mientras que Crowder y Hoffman (1996) estiman un VAR en primeras diferencias que contiene, por definición, una proporción más elevada de *shocks* permanentes.

Phillips (1998) introduce procedimientos estadísticos diferentes para describir y analizar la no estacionariedad de los datos y aplica estas técnicas al estudio de la ecuación de Fisher. Bajo fuertes condiciones que aseguran el cumplimiento de alguna forma del Teorema del Límite funcional, construye densidades espaciales asintóticamente válidas y medidas de funciones de riesgo para las series, teniendo en cuenta que ambas adoptan la forma de procesos aleatorios, en lugar de funciones no aleatorias, como es el caso de las series temporales estacionarias. Phillips (1998) aplica estas técnicas al tipo de interés real de Estados Unidos que comprende el periodo 1934-1997. Los resultados que obtiene cuando utiliza el subperiodo muestral

2.2. Efecto Fisher

que abarca de 1961 a 1985, corroboran la conclusión extraída por García y Perron (1996) de fluctuaciones alrededor de niveles constantes que cambian a lo largo de diferentes regímenes. Sin embargo, según Phillips (1998), el enfoque de cambio de régimen para el periodo más largo (1934 a 1997) requiere muchos puntos de ruptura, por lo que tiene una apariencia bastante artificial. Por tanto, este autor utiliza un procedimiento alternativo para determinar las propiedades que presenta el tipo de interés real, basado en un modelo semiparamétrico que considera la posibilidad de aplicar la metodología de la integración fraccional al tipo de interés real. Por tanto, analiza si el tipo de interés real (r) se puede representar mediante un proceso autorregresivo e integrado fraccionalmente con un orden p, d, q , lo que es denotado como modelo ARFIMA (p, d, q):

$$\phi(L)(1-L)^d(r_t - \mu) = \theta(L)a_t,$$

donde μ es la media poblacional, L es el operador de retardos estándar, $\phi(L)$ es un polinomio de grado p , d es el parámetro de diferenciación, que puede ser un número no entero, $\theta(L)$ es un polinomio de grado q , las raíces de los polinomios $\phi(L)$ y $\theta(L)$ están fuera del círculo unitario, $\phi(L)$ y $\theta(L)$ no tienen raíces comunes y la secuencia de innovación a_t es ruido blanco con media cero y varianza σ_a^2 . El operador de diferencias $(1-L)^d$ se puede expresar mediante la siguiente representación binomial: $(1-L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j$, donde $\psi_j = \Gamma(j-d)/\Gamma(j+1)\Gamma(-d)$, y $\Gamma(\cdot)$ es la función *gamma*. Así, si el tipo de interés real fuera un proceso ruido blanco fraccional se definiría como:

$$(1 - L)^d r_t = a_t,$$

que es el caso más simple de modelo ARFIMA³¹. Utilizando el parámetro de integración fraccional d en su modelo, se pueden considerar los casos de raíz unitaria y de estacionariedad del tipo de interés real como casos especiales dentro de un amplio rango de diferentes grados de integración que puede presentar esta serie cuando se caracteriza su comportamiento de largo plazo. Phillips (1998) lleva a cabo estimaciones empíricas del parámetro de diferenciación fraccional para el tipo de interés real *ex-post* en el periodo 1934-1997 y dos subperiodos más cortos. Sus resultados confirman tanto la no estacionariedad del tipo de interés real en todos los periodos, dando soporte empírico a la conclusión alcanzada por algunos autores como Rose (1988) y Walsh (1987), como el rechazo de existencia de una raíz unitaria en el tipo de interés real, obtenido por Mishkin (1992). Aunque Phillips (1998) obtiene que se puede rechazar tanto las hipótesis de raíz unitaria, como la de memoria corta en esta serie, las estimaciones puntuales indican, generalmente, un comportamiento no estacionario del tipo de interés real, con una región de confianza del parámetro de diferenciación fraccional comprendida entre 0.4 y 0.6. Por consiguiente, según este autor, no se excluye la posibilidad de que el tipo de interés real sea estacionario con un grado de dependencia elevado. Así, el modelo de integración fraccional aplicado al

³¹Este proceso es introducido por primera vez por Granger (1980, 1981), Granger y Joyeux (1980) y Hosking (1981). Estos autores muestran que una variable Y_t es estacionaria cuando $d < 0.5$ y es invertible si $d > -0.5$ (ver Baillie,1996, para más detalles).

2.2. Efecto Fisher

tipo de interés real parece que logra transformarlo en estacionario cuando se consideran los subperiodos muestrales: 1934-1997, 1961-1985 y 1961-1997, obteniendo, en todos ellos, un parámetro de integración fraccional muy similar. Por tanto, Phillips (1998) concluye que su modelo de integración fraccional es parsimonioso y se puede aplicar de forma más general que un modelo con muchos cambios de régimen.

Recientemente, Tsay (2000) reexamina las propiedades temporales del tipo de interés real *ex-post* de Estados Unidos, utilizando el mismo conjunto de datos que Mishkin (1990), que contiene datos mensuales y trimestrales de la tasa de inflación y el tipo de interés nominal de las Letras del Tesoro de Estados Unidos para el periodo: enero de 1953-diciembre de 1990. Mishkin (1990) divide todo el periodo muestral en tres subperiodos: enero de 1953-octubre de 1979, noviembre de 1979-octubre de 1982 y noviembre de 1982-diciembre de 1990, ya que Clarida y Friedman (1984), Huizinga y Mishkin (1986) y Roley (1986) sugieren que la relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación varía con los cambios monetarios acaecidos en octubre de 1979 y octubre de 1982. Para tener en cuenta el impacto de estos cambios estructurales en el tipo de interés real *ex-post*, Tsay (2000) compara los resultados obtenidos para cada uno de los tres subperiodos. Siguiendo la metodología de Baillie y Bollerslev (1994) y Baillie *et al.* (1996), Tsay (2000) utiliza el tests de Phillips y Perron (1988) para analizar si el tipo de interés real *ex-post* es un proceso $I(1)$. Además, utiliza el test KPSS de Kwiatkowski *et al.* (1992) para contrastar si el tipo de interés real *ex-post* es realmente un proceso $I(0)$, frente a alternativas de

memoria larga, incluyendo $I(1)$ como un caso especial (ver Lee y Schmidt, 1996). El resultado que se obtiene a través de estos tests es que el tipo de interés real *ex-post* no es ni un proceso genuino $I(1)$ ni un proceso $I(0)$ genuino, por lo que Tsay (2000) considera que puede tratarse de un proceso $I(d)$, es decir, un proceso integrado de orden d , donde $0 < |d| < 1$ o un modelo ARFIMA (p, d, q) . Tsay (2000) utiliza el método de sumas de cuadrados condicional³² para estimar si el tipo de interés real *ex-post* se puede especificar de forma correcta a través de un modelo ARFIMA. Los resultados de su análisis empírico revelan que el tipo de interés real *ex-post* revierte a la media, debido a que todos los parámetros de diferenciación son menores que la unidad. Además, obtiene que la estimación del parámetro de diferenciación es mayor cuando se utilizan datos trimestrales, en lugar de mensuales, en todos los subperiodos considerados. Así, por ejemplo, la estimación de este parámetro es 0.27, no siendo significativamente diferente de cero cuando se utilizan datos mensuales desde noviembre de 1979 a octubre de 1982, y, al mismo tiempo, se rechaza la H_0 de una raíz unitaria; mientras que la estimación del parámetro de diferenciación es 0.73 cuando se utilizan datos trimestrales para el mismo periodo muestral y no se rechaza la H_0 de raíz unitaria. Por consiguiente, Tsay (2000) argumenta que efectivamente el tipo de interés real *ex-post* se puede representar como un modelo ARFIMA con memoria larga.

³²Una descripción de las propiedades del contraste sumas de cuadrados condicional y su representación en muestras finitas se muestra en Chung y Baillie (1993).

2.3 Puzle de precios

En el contexto de los modelos VAR se puede observar para algunos países otra relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación, que resulta de elevado interés, a la que se denomina "puzle de precios". El puzle de precios es el fenómeno por el que un *shock* que perturba al tipo de interés nominal tiene un efecto positivo en la tasa de inflación.

Sims (1992), a través de un sistema VAR y utilizando datos mensuales del tipo de interés a corto plazo, un agregado monetario, un índice de precios de consumo, un índice de producción industrial, un índice de tipo de cambio de la moneda doméstica y un índice de precios al por mayor, para Francia, Alemania, Japón, Reino Unido y Estados Unidos, en el periodo que va desde enero de 1957 y enero de 1964 hasta finales de 1990 o 1991³³, muestra que los precios responden inicialmente, en todos estos países, de forma positiva a *shocks* en el tipo de interés, aunque este efecto es más fuerte en Francia y Japón. Sin embargo, en los restantes países esta respuesta no sólo es más débil sino que, incluso, se vuelve negativa con el paso del tiempo. Sims (1992), en sus esquemas de identificación, confía en el postulado de que las perturbaciones en una variable, como el tipo de interés nominal a corto plazo, representan alteraciones en la política monetaria, por lo que trata de caracterizar las consecuencias de las perturbaciones de dicha política. La respuesta positiva de los precios a un *shock* en el tipo de

³³En Alemania, el periodo muestral acaba a finales de 1989 para evitar los efectos distorsionadores del proceso de unificación.

interés, junto a una pérdida del valor de la moneda doméstica en relación a las extranjeras, genera dificultades para interpretar esos *shocks* como variaciones en la política monetaria. Por ello, Sims (1992) justifica sus resultados suponiendo que las autoridades monetarias tienen mejor información acerca de las presiones inflacionistas que la que se puede obtener a partir de las variables incluidas en sus modelos. Este autor supone que las autoridades monetarias conocen cuándo se va a producir una presión inflacionista y contraen su oferta monetaria para enfriar los efectos que producirán tales presiones. De esta manera, según Sims (1992), los precios pueden aumentar después de la contracción monetaria, aunque en menor medida que si no se hubiese llevado a cabo dicha contracción y, por consiguiente, el *output* total de la economía debe disminuir debido a los efectos de la contracción de la demanda nominal en el *output* real.

Sims (1992) considera que los resultados de su análisis no contradicen la teoría del Ciclo Económico Real, ni las teorías de los monetaristas que utilizan el modelo IS-LM. Así, según este autor, los teóricos de la teoría del Ciclo Económico Real considerarían que las mismas perturbaciones previstas que generan la presión inflacionista son también causantes de la caída en el nivel de producción total. El aumento en el tipo de interés precede a la caída en el *output* sólo debido a que las autoridades monetarias tienden a aumentar el tipo de interés cuando anticipan con precisión *shocks* de oferta negativos, pero no es la política monetaria el factor causante de la subsiguiente disminución en el nivel de producción de la economía sino la contracción de la oferta. Según Sims (1992), la interpretación de los

2.3. Puzle de precios

teóricos monetaristas que se basan en el modelo IS-LM, debería sostener que las presiones inflacionistas generan un nivel de producción menor en la economía debido a la reacción generada contra ellas por parte de las autoridades monetarias. De esta manera, Sims (1992) justifica sus resultados relativos al puzle de precios.

Eichenbaum (1992) critica el estudio de Sims (1992) al demostrar que su resultado no es robusto a otras medidas plausibles de las perturbaciones de la política monetaria, distintas al tipo de interés nominal a corto plazo. Según Eichenbaum (1992), el puzle de precios que obtiene Sims (1992) supone un desafío a los economistas keynesianos, monetaristas y teóricos del Ciclo Económico Real. Además, señala que incluso Sims (1992) construye su explicación relativa al puzle de precios considerando implícitamente que la autoridad monetaria tiene información sobre las presiones inflacionistas futuras, no captada en la historia de las variables incluidas en el modelo VAR. Teniendo en cuenta esta idea, los políticos podrían aumentar el tipo de interés en un esfuerzo por atajar la inflación prevista. Bajo estas circunstancias, los económetras encontrarían que las innovaciones en el tipo de interés están seguidas de aumentos en el nivel de precios y de reducciones en el nivel de producción agregado. Lo que no pueden analizar los económetras es el nivel de precios que se obtendría si los políticos no actuaran de forma contractiva. Eichenbaum (1992) argumenta que las perturbaciones en el tipo de interés son una medida contaminada de las perturbaciones de la política monetaria. Además, según este autor, no se puede conocer cómo se vería afectada la inferencia si se pudiera corregir el hecho de que alguna

fracción no conocida de las perturbaciones en el tipo de interés representa la respuesta endógena de los políticos a *shocks* que no tienen nada que ver con la política monetaria, por ejemplo aquellos responsables de generar presiones inflacionistas en un primer término. Eichenbaum (1992) considera que si se atribuyen de forma espuria los *shocks* exógenos en política monetaria a las innovaciones en el tipo de interés, los analistas estarían sobrevalorando la importancia de las perturbaciones políticas en las fluctuaciones del *output*. Este autor reconoce que las perturbaciones en el tipo de interés de corto plazo explican un elevado porcentaje de la varianza del *output* (al menos para el periodo de la postguerra en Estados Unidos). Sin embargo, no se sabe qué porcentaje de estas innovaciones representa perturbaciones exógenas de política. Eichenbaum (1992) obtiene que si se utilizan las innovaciones en las reservas disponibles de los bancos, para medir las perturbaciones de la política monetaria, no emerge el puzle de precios, aunque sí que se produciría un aumento pequeño de los precios ante innovaciones en estas reservas si se supone que la Reserva Federal responde contemporáneamente ajustándolas a la información de precios y al nivel de producción.

Christiano, Eichenbaum y Evans (1994), también se oponen al puzle de precios obtenido por Sims (1992). Estos autores consideran que utilizando los *shocks* ortogonalizados del tipo de interés de los fondos federales o *shocks* ortogonalizados de las reservas disponibles de los bancos, como medidas de *shocks* de política monetaria exógenos, se obtiene que *shocks* contractivos de política monetaria están asociados a reducciones en los precios de pro-

2.3. *Puzle de precios*

ducción de los bienes. El resultado que se observa es que el deflactor del PIB no responde durante un año al *shock* de política monetaria, disminuyendo posteriormente. Christiano, Eichenbaum y Evans (1994) argumentan que, teniendo en cuenta el trabajo de Sims y Zhou (1993), se evita el puzle de precios si se supone que la autoridad monetaria responde a los precios de producción de los bienes, así como a otras variables, ajustando su política monetaria. Por tanto, según estos autores si el puzle de precios, tal y como Sims (1992) argumenta, es consecuencia de que la Reserva Federal tiene algún indicador de inflación en su función de reacción, que se omite en el modelo VAR que recoge los *shocks* de política, entonces, si se incluyera en el VAR un indicador de los precios como son los precios de producción no se obtendría el resultado anómalo del puzle de precios. Christiano, Eichenbaum y Evans (1994) muestran que la solución que plantean al puzle de precios es robusta al uso de diferentes índices de precios de producción de bienes. Christiano, Eichenbaum y Evans (1994) utilizan como primer instrumento de política monetaria el logaritmo en niveles de las reservas disponibles de los bancos, en lugar de utilizar otros agregados más amplios. Ello es consecuencia de los argumentos de Christiano y Eichenbaum (1992) de que las perturbaciones en las reservas disponibles de los bancos reflejan principalmente *shocks* exógenos de política monetaria, mientras que innovaciones de los agregados monetarios reflejan fundamentalmente *shocks* de demanda de dinero. Asimismo, estos autores utilizan también el tipo de interés a corto plazo de los fondos federales, como otra medida de instrumento de política monetaria, debido a los argumentos de McCallum (1983), Bernanke y Blinder (1992) y Sims (1986, 1992). Así, por ejemplo,

Bernanke y Blinder (1992) muestran que el tipo de interés de los fondos federales aporta suficiente información acerca de los futuros movimientos de las variables macroeconómicas. Utilizando datos desde julio de 1959 hasta septiembre de 1979, muestran a través de modelos VAR, en los que se impone recursividad a través de la descomposición de Choleski, que cambios en la tasa de los fondos federales están relacionados sistemáticamente con cambios no previstos en la tasa de inflación y en el desempleo. Específicamente, el tipo de interés de los fondos federales aumentaría en respuesta a incrementos inesperados en la tasa de inflación y se reduciría en respuesta a crecimientos inesperados en el desempleo. Por tanto, sus resultados son consistentes con una política monetaria *leans against the wind* o política que reacciona de manera contracíclica. La razón que argumentan estos autores para utilizar el tipo de interés de los fondos federales como predictor de la actividad económica futura, es que este tipo de interés es muy sensible a los *shocks* de oferta de las reservas disponibles de los bancos, es decir, el tipo de interés de estos fondos es un buen indicador de las acciones de la política monetaria, por lo que si la política monetaria afecta a la economía real, entonces el tipo de interés de los fondos federales sería un buen predictor de la evolución de las variables macroeconómicas³⁴. Este argumento es importante ya que desafía al de Sims (1980), Litterman y Weiss (1985) y otros seguidores del ciclo económico real que confían en que

³⁴Bernanke y Blinder (1992) señalan que el tipo de interés de los fondos federales no sería un buen indicador de las medidas de las acciones monetarias si la información que contiene recoge shocks de demanda de reservas, procedentes de cambios en la economía, en lugar de shocks en la oferta de reservas.

2.3. *Puzle de precios*

el poder predictivo que tiene el tipo de interés es debido a factores reales y no monetarios. Asimismo, la idea de que la cantidad de dinero que hay en circulación en una economía tiene menor poder predictor del nivel de producción, que el tipo de interés, constituye también un desafío importante al tradicional *money leads income*, que es el argumento en el que se basa la efectividad de la política monetaria. Asimismo, Bernanke y Blinder (1992) consideran adecuada la sugerencia de McCallum (1983) que argumenta que los resultados de Sims (1980) y Litterman y Weiss (1985), basados en que el tipo de interés absorbe el poder predictor del dinero, no implica que la política monetaria sea inefectiva. McCallum (1983) considera que el tipo de interés debe ser mejor indicador de las acciones políticas que los agregados monetarios.

Balke y Emery (1994) analizan si las conclusiones extraídas por Bernanke y Blinder (1992) persisten al utilizar datos del tipo de interés de los fondos federales desde noviembre de 1982 hasta septiembre de 1992³⁵. Su análisis considera que las condiciones estructurales de la economía estadounidense pueden ser diferentes cuando se considera una muestra que parte de 1982, en lugar de considerarla con datos anteriores a 1979, como hacen Bernanke y Blinder (1992), ya que sus datos recogen algunos cambios estructurales en la economía estadounidense, como las innovaciones financieras que surgen y la desregulación que se produce en los años ochenta.

³⁵Balke y Emery (1994) excluyen el periodo octubre 1979-septiembre 1982, pues es el periodo en el que la Reserva Federal utiliza el tipo de interés para ajustar la política monetaria.

ta. Asimismo, argumentan que la elevada tasa de inflación que se produce en los años setenta puede haber modificado la forma de reacción pública a la misma, por lo que éste puede ser un motivo adicional para esperar un cambio en sus resultados, respecto a los de Bernanke y Blinder (1992). Balke y Emery (1994) obtienen que el tipo de interés de los fondos federales mantiene su poder predictivo con respecto a la tasa de inflación y a la de desempleo, por tanto, rechazan la hipótesis de que el tipo de interés de los fondos federales pueda omitirse del sistema. Sin embargo, no obtienen el mismo resultado si utilizan agregados más amplios, como M2, el cuál pierde bastante poder predictivo y no se puede rechazar el que se pueda omitir esta variable del sistema. Balke y Emery (1994) obtienen que los *shocks* de inflación influyen poco en la variabilidad del tipo de interés de corto plazo en el periodo posterior a 1982, por lo que la respuesta del tipo de interés de los fondos federales a la inflación no se corresponde a una función de reacción *leans against the wind*, es decir, contrariamente a los resultados de Bernanke y Blinder (1992), en el periodo 1982-1992, no se produciría un incremento en el tipo de interés de los fondos federales en respuesta a un *shock* positivo de inflación. No obstante, la respuesta de la tasa de inflación, en el periodo posterior a 1982, a un *shock* positivo en el tipo de interés de la reserva federal sí es positiva. Cabe señalar que esta respuesta positiva de la tasa de inflación a un incremento en el tipo de interés de la Reserva Federal es menor que la que se obtiene si se utilizan datos anteriores a 1979. Este resultado es consecuencia de que en los años ochenta varía el comportamiento de la tasa de inflación, que exhibe menos persistencia que en periodos anteriores. Otra explicación es que la Reserva Federal cambia

2.3. *Puzle de precios*

su política *leans against the wind* por una política *forward-looking*.

Otros autores, entre los que destacan Cushman y Zha (1997), obtienen que en pequeñas economías abiertas, un *shock* de política monetaria contractiva produce una reducción a corto plazo en el nivel de producción total y una respuesta negativa en el nivel de precios. Cushman y Zha (1997) argumentan que el puzle de precios se obtiene si se lleva a cabo una identificación inapropiada de la política monetaria para economías pequeñas y abiertas. Por tanto, estos autores amplían el estudio de Bernanke (1986), Blanchard y Watson (1986) y Sims (1986), utilizando un modelo VAR estructural, aplicando éste a una economía pequeña y abierta, en comparación a la estadounidense, como es la de Canadá. Gordon y Leeper (1994) y Sims y Zha (1995) utilizan la misma metodología general para eliminar las respuestas puzle de la tasa de inflación a *shocks* en el tipo de interés, halladas, en algunas ocasiones, en una economía relativamente cerrada como la estadounidense. Este enfoque especifica una función de política monetaria, en lugar de utilizar únicamente ecuaciones en forma reducida, haciendo uso, al mismo tiempo, de la descomposición de Choleski. La ventaja de la utilización de un proceso de identificación estructural es debido a que el uso frecuente del enfoque de Choleski, según estos autores, puede producir el puzle de precios en pequeñas economías abiertas. Por tanto, consideran que el enfoque que proponen es simplemente un caso especial de numerosos esquemas de identificación y un modelo de identificación exacta. Además, según estos autores, el enfoque de Choleski recurre a una cadena causal de Wold o a una ordenación recursiva y, por consiguiente, excluye interaccio-

nes simultáneas entre las variables. Según estos autores, en una economía pequeña y abierta, el enfoque de Choleski fracasa en considerar cómo la política monetaria responde a cambios contemporáneos tanto en variables interiores como a otras variables exteriores de países que se hallan en su entorno comercial. Por tanto, Cushman y Zha (1997) sugieren un esquema de identificación que tenga en cuenta la simultaneidad, ya que tiene el potencial de generar resultados más creíbles. La ecuación de política económica que proponen estos autores considera la posibilidad de que dicha política reaccione contemporáneamente a una variedad de variables domésticas y extranjeras, cuyos datos es probable que se obtengan de forma inmediata. La interacción de estas variables con otras que aparecen en la ecuación de información de Cushman y Zha (1997) tendría en cuenta reacciones monetarias contemporáneas e indirectas.

Kim y Roubini (1995) siguen una estrategia similar al considerar interacciones contemporáneas entre las variables de política monetaria y el tipo de cambio en países distintos a Estados Unidos y a los que conforman el grupo del G-7. Según Cushman y Zha (1997), la utilización de esta estrategia puede explicar porqué Kim y Roubini (1995) obtienen resultados que están menos de acuerdo con el puzle de precios. Sin embargo, estos autores suponen que los bancos centrales de los países que analizan no responden contemporáneamente a cambios en el tipo de interés de otros países, como puede ser el tipo de interés estadounidense.

Otros autores, como Racette y Raynauld (1992), sí que encuentran un efecto puzle de precios en su estudio aplicado a la economía canadiense al

2.3. *Puzle de precios*

tener en cuenta que el banco de Canadá reacciona contemporáneamente a variables tales como los deflatores del PIB de Canadá y de Estados Unidos y el PIB de Estados Unidos. Sin embargo, Cushman y Zha (1997) consideran que el resultado que obtienen es consecuencia de que la información sobre los deflatores no es posible obtenerla en un periodo de tiempo inmediato, mientras que por ejemplo el tipo de cambio sí está diariamente disponible y, sin embargo, no lo tienen en cuenta.

Bierens (2000), a través de modelos VAR no estructurales, obtiene que la aparente reacción positiva de la tasa de inflación al tipo de interés nominal, que se observa si se aplica esta metodología a la economía estadounidense, es consecuencia de la presencia de una tendencia no lineal común a ambas variables en el periodo que va desde julio de 1954 hasta diciembre de 1994. Por tanto, si se elimina esta tendencia no lineal a través de polinomios de Chebishev, desaparece el efecto puzle. Sin embargo, Bierens (2000) no comprueba si el puzle de precios desaparece realmente por la eliminación de esta tendencia no lineal o simplemente porque el uso de polinomios de Chebishev hace que desaparezca este puzle de precios. En la Sección 5.4 del presente Capítulo mostramos que utilizando datos relativos a la economía alemana y francesa obtenemos que el puzle de precios desaparece únicamente por la inclusión de polinomios de Chebishev en el modelo VAR. Por tanto, no podemos aseverar con certeza que esta cotendencia no lineal sea la causa principal del puzle de precios observado en estos países, por lo que el puzle de precios continuaría sin ser resuelto.

2.4 Contraste de cotendencias no lineales

Antes de llevar a cabo la exposición del contraste no paramétrico de cotendencias no lineales de Bierens (2000), describimos algunos tipos de tendencias no lineales que se suelen encontrar al analizar determinadas series temporales macroeconómicas. Sin embargo, cabe señalar que esta descripción se introduce con un fin únicamente ilustrativo, para clarificar mejor la metodología seguida por este autor, ya que el test de Bierens (2000) es un test no paramétrico y, por tanto, no necesita especificar la naturaleza de la tendencia determinista no lineal. Así, la primera tendencia que especificamos es aquella que experimenta un cambio en su nivel, la segunda se refiere a un cambio en su pendiente y la tercera considera un cambio en su tendencia cuadrática. Posteriormente, desarrollamos el contraste de cotendencias no lineales de Bierens (2000).

2.4.1 Tendencias no lineales

Tendencia lineal con un cambio en el nivel

Si existe un cambio en el nivel de la serie, se puede considerar que existe una tendencia determinista no lineal. En este caso, $g(t)$ es una constante que presenta un salto en el periodo t_1 , de tal manera que: $g(t) = a$ si $t \leq t_1$ y $g(t) = b$ si $t > t_1$, siendo a y b vectores. Además, se supone que t_1 es proporcional al número de observaciones³⁶ $T : t_1 = \tau T$, donde $\tau \in (0, 1)$ es

³⁶Este supuesto es común en la literatura referida a contrastes de la H_0 de raíz unitaria, frente a la H_1 de estacionariedad alrededor de una tendencia segmentada (ver Perron

2.4. Contraste de cotendencias no lineales

fijo.

Bierens (2000) representa $g(t) = c_T + f_T(t)$ para $t = 1, \dots, T$, donde $c_T = b + (a-b)[\tau T]/T$ es la media de las funciones $g(t)$'s para $t = 1, \dots, T$, y $f_T(t) = (a-b)(1 - [\tau T])/T$ si $t \leq [\tau T]$, $f_T(t) = -(a-b)[\tau T]/T$ si $t > [\tau T]$. $[\tau T]$ representa el número entero más grande que es $\leq \tau T$.

Considerando un número no negativo p , se obtiene:

$$\begin{aligned} F_{p,T}(x) &= (n^{-1}) \sum_{t=1}^{[Tx]} \frac{f_T(t)}{T^p}, \quad \text{si } x \in [T^{-1}, 1], \\ F_{p,T}(x) &= 0, \quad \text{si } x \in [0, T^{-1}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

permitiéndose que $F(x) = (a-b)(1-\tau)x$ si $x \in [0, \tau]$ y $F(x) = (a-b)\tau(1-x)$ si $x \in (\tau, 1]$. En este caso, se considera que $p = 0$, por lo que:

$$\begin{aligned} \int \|F_{p,T}(x)\|^2 dx &= O(1), & \int \|F(x)\|^2 dx &< \infty, \\ \int \|F_{p,T}(x) - F(x)\|^2 dx &= o(1), \\ F_{p,T}(0) = F_{p,T}(1) &= 0, & F(0) = F(1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde las integrales se hallan en el intervalo unitario.

Además, bajo el supuesto: $p = 0$, se obtiene la siguiente matriz, que es clave para obtener el vector de cotendencias:

$$M_{1,p,T} = \int F_{p,T}(x)F_{p,T}(x)'dx \rightarrow M_1 = \int F(x)F(x)'dx. \quad (2.29)$$

1988, 1989, 1990) y también es común en la literatura relativa a contrastes de cambios estructurales.

Si se considera una subsecuencia de números naturales m tal que $m \rightarrow \infty$, $m = o(T)$, para $p \geq 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} F_{p,T}^*(x) &= (m^{-1}) \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f_T([Tx]+1-j)}{T^p}, & \text{si } [Tx] \geq m-1, \\ F_{p,T}^*(x) &= 0, & \text{si } [Tx] < m-1, \end{aligned} \quad (2.30)$$

siendo $F^*(x) = (a-b)(1-\tau)$ si $x \in [0, \tau]$, $F^*(x) = -(a-b)\tau$ si $x \in (\tau, 1]$. Entonces para $p = 0$:

$$\begin{aligned} \int \left\| F_{p,T}^*(x) \right\|^2 dx &= O(1), & \int \|F^*(x)\|^2 dx &< \infty, \\ \int \left\| F_{p,T}^*(x) - F^*(x) \right\|^2 dx &= o(1), \end{aligned} \quad (2.31)$$

obteniendo la matriz $M_{2,p,T}$, que es necesaria para hallar el vector de cotendencias no lineales:

$$M_{2,p,T} = \int F_{p,T}^*(x) F_{p,T}^*(x)' dx \rightarrow M_2 = \int F^*(x) F^*(x)' dx. \quad (2.32)$$

La matriz $M_{2,p,T}$ también se puede escribir como:

$$M_{2,p,T} = T^{-p-1} \sum_{t=m}^T \left((m^{-1}) \sum_{j=0}^{m-1} f_T(t-j) \right) \left((m^{-1}) \sum_{j=0}^{m-1} f_T(t-j) \right)'. \quad (2.33)$$

Así, si existe un vector de cotendencias θ , tal que $\theta'g(t) = \theta'c_T + \theta'f_T(t)$ es constante, entonces $\theta'f_T(t) = 0$ para $t = 1, \dots, T$, ya que si c_T es la media

2.4. Contraste de cotendencias no lineales

de las funciones $g(t)$'s, el promedio de las funciones $f_T(t)$'s tiene que ser cero. Así, el vector de cotendencia θ se obtiene como el autovector de las matrices $M_{1,p,T}$ y $M_{2,p,T}$, correspondiente a un autovalor cero. Debido a los resultados de convergencia que aparecen en las expresiones (2.29) y (2.32), se puede aplicar el mismo planteamiento a las matrices límite M_1 y M_2 .

Cabe señalar que estos resultados son aplicables a funciones $g(t)$ que presentan cambios finitos en el nivel de la tendencia.

Tendencia lineal con un cambio en la pendiente

Este apartado recoge el caso en el que $g(t)$ es una función de tendencias lineales adyacentes con diferente pendiente. Se supone que los cambios en la pendiente se producen en periodos proporcionales a T .

Para $t = 1, \dots, T$, se puede escribir $g(t) = \beta_{0,T} + \beta_{1,T}t + f_T(t)$, donde $f_T(t)$ cumple que:

$$\sum_{t=1}^T f_T(t) = 0, \quad \sum_{t=1}^T t f_T(t) = 0. \quad (2.34)$$

Se supone, por conveniencia, que $\beta_{0,T} = \beta_0$ y $\beta_{1,T} = \beta_1$, aunque este supuesto no es esencial para nuestro argumento. De acuerdo con (2.34), habría al menos dos pliegues en $f_T(t)$, es decir:

$$\begin{aligned}
 f_T(t) &= a_1 t && \text{para } t \leq \tau_1 T, \\
 f_T(t) &= a_1 \tau_1 T + a_{2,T}(t - \tau_1 T) && \text{para } \tau_1 T < t \leq \tau_2 T, \\
 f_T(t) &= a_1 \tau_1 T + a_{2,T}(\tau_2 - \tau_1)T + a_{3,T}(t - \tau_2 T) && \text{para } t > \tau_2 T,
 \end{aligned}$$

donde $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$, τ_1, τ_2 y a_1 son fijos y $a_{2,T}$ y $a_{3,T}$ son tales que se cumplen las dos condiciones en (2.34). Esto último implica que $a_{2,T}$ y $a_{3,T}$ son proporcionales a a_1 : $a_{i,T} = \zeta_{i-1,T} a_1$, $i = 2, 3$, donde las funciones $\zeta_{i-1,T}$'s son funciones de τ_1 y τ_2 y convergen al límite de ζ_{i-1} , respectivamente. Por tanto, se obtiene que $f_T(Tx)/T \rightarrow a_1 \psi(x)$ de manera uniforme en $[0, 1]$:

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \tau_1, \\ \tau_1 + \zeta_1(x - \tau_1) & \text{si } \tau_1 < x \leq \tau_2 \\ \tau_1 + \zeta_1(\tau_2 - \tau_1) + \zeta_2(x - \tau_2) & \text{si } \tau_2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Así, definiendo $F(x) = a_1 \int_0^x \psi(y) dy$, $F^*(x) = a_1 \psi(x)$, se obtienen los resultados (2.28), (2.29), (2.31) y (2.32) para $p = 1$. Además, teniendo en cuenta la segunda parte de (2.34), se tiene que:

$$\int F_{p,T}(x) dx = \int F(x) dx = 0. \tag{2.35}$$

Un aspecto que cabe referenciar es que estos resultados se pueden aplicar a casos en los que la tendencia lineal presenta más de dos pliegues y para

2.4. Contraste de cotendencias no lineales

el caso en el que las tendencias lineales cambiantes tienen segmentos no adyacentes.

La diferencia fundamental entre una tendencia lineal con un cambio en la pendiente y una tendencia no lineal con un cambio en el nivel es el valor de p : $p = 1$ versus $p = 0$. La razón para introducir esta variable p en las definiciones (2.27) y (2.30) es que permite acomodar diferentes tipos de tendencias no lineales.

Tendencia con diferentes segmentos cuadráticos

Se considera también el caso en el que $f_T(t)$ está formado por varios segmentos cuadráticos diferenciables. Suponiendo que $f_T(t)$ se compone de tres segmentos que son diferentes funciones cuadráticas:

$$f_T(t) = a_1 t + (b_1/T)t^2, \text{ para } t \leq \tau_1 T.$$

$$f_T(t) = a_1 \tau_1 T + b_1 \tau_1^2 T + a_{2,T}(t - \tau_1 T) + (b_{2,T}/T)(t - \tau_1 T)^2,$$

para $\tau_1 T < t \leq \tau_2 T$.

$$f_T(t) = a_1 \tau_1 T + b_1 \tau_1^2 T + a_{2,T}(\tau_2 - \tau_1)T + b_{2,T}(\tau_2 - \tau_1)^2 T + a_{3,T}(t - \tau_2 T) + (b_{3,T}/T)(t - \tau_2 T)^2, \text{ para } t > \tau_2 T,$$

donde τ_1 y τ_2 se definen igual que antes y a_1 y b_1 son vectores constantes. La condición de diferenciables junto con la condición (2.34) imponen cuatro restricciones a los parámetros. Por consiguiente, $a_{2,T}$, $a_{3,T}$, $b_{2,T}$ y $b_{3,T}$ son combinaciones lineales de a_1 y b_1 , con coeficientes que dependen de τ_1 , τ_2 y T . Al igual que en el apartado anterior, relativo a una tendencia lineal segmentada, se obtiene que existen dos funciones cuadráticas segmentadas

diferenciables que son $\phi(x)$ y $\psi(x)$ en $[0, 1]$, tales que $f_T(Tx)/T \rightarrow a_1\phi(x) + b_1\psi(x)$ de manera uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

Si se considera el caso en el que existen q segmentos cuadráticos, la condición de diferenciabilidad impone $q - 1$ restricciones lineales a los componentes correspondientes de los vectores de $2q$ parámetros. Debido a que la condición (2.34) impone dos restricciones adicionales, existen $q + 1$ vectores de parámetros que son combinaciones lineales de los restantes $q - 1$ vectores de parámetros libres. Así, existen vectores a_j y funciones cuadráticas diferenciables segmentadas $\phi_j(x)$ en $[0, 1]$, tales que:

$$\frac{f_T([Tx]/T)}{T} \rightarrow \sum_{j=1}^{q-1} a_j \phi_j(x),$$

de forma uniforme en $[0, 1]$.

Definiendo:

$$F^*(x) = \sum_{j=1}^{q-1} a_j \phi_j(x), \quad F(x) = \sum_{j=1}^{q-1} a_j \int_0^x \phi_j(y) dy,$$

se obtienen los resultados (2.28), (2.29), (2.31) y (2.32) para $p = 1$.

Es necesario resaltar que si se define $A = (a_1, \dots, a_{q-1})$, $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_{q-1}(x))'$ y $\Phi(x) = \int_0^x \phi(y) dy$, entonces:

$$M_1 = A \left(\int \Phi(x) \Phi(x)^2 dx \right) A', \quad M_2 = A \left(\int \phi(x) \phi(x)^2 dx \right) A'.$$

2.4. Contraste de cotendencias no lineales

En este caso existen cotendencias no lineales si las filas de A son linealmente dependientes.

2.4.2 Análisis de cotendencias no lineales

Una vez vistos algunos de los tipos de tendencias deterministas no lineales más relevantes que se pueden encontrar en las series macroeconómicas temporales, indagamos en el análisis de la posible relación entre diferentes series temporales a través de una tendencia determinista no lineal común a las mismas. Para ello, Bierens (2000) obtiene un estadístico que permite contrastar la posible existencia de cotendencias no lineales entre un conjunto de series temporales. Así, considerando un proceso temporal formado por n variables $y_t = g(t) + u_t$, donde $g(t) = E(y_t)$ es una función de tendencia no lineal y u_t es un proceso estacionario con media nula, el test de Bierens (2000) contrasta la H_0 de que existe un vector no nulo θ , tal que $\theta'g(t)$ es lineal en t (caso 1), o constante (caso 2). Es decir, se contrasta la H_0 de que la serie temporal y_t presenta una cotendencia no lineal.

Con el fin de facilitar el análisis, Bierens (2000) diseña, en primer lugar, un contraste que considera la H_0 de que el espacio de todos los vectores de cotendencia θ tiene dimensión 1, $v(1)$, frente a la alternativa de que tiene dimensión cero, $v(0)$, o lo que es lo mismo, que el vector θ para el que $\theta'g(t)$ es lineal en t es el vector cero. Posteriormente, se amplía el análisis para contrastar $v(r)$ versus $v(s)$ con $0 \leq s < r$, para $r = 1, \dots, n$.

Si $\theta'g(t)$ es lineal en t , entonces también lo es $\theta'f_T(t)$, donde $f_T(t)$ son los residuos obtenidos a partir de la estimación por MCO de la regresión de

$g(t)$ respecto a un intercepto y una tendencia lineal en t , para $t = 1, \dots, T$. Las dos condiciones que aparecen en (2.34) implican que $\theta' f_T(t) = 0$ para $t = 1, \dots, T$, por lo que $\theta' g(t)$ sería lineal en t , para $t \leq T$. En cualquier caso, θ es el autovector correspondiente a las matrices M_1 y M_2 , correspondientes al autovalor cero³⁷. Por tanto, los vectores de cotendencias que se necesitan para poder construir el estadístico son los autovectores comunes de las matrices M_1 y M_2 , correspondientes a los autovalores cero.

La matriz M_1 se estima mediante:

$$\hat{M}_1 = (T^{-1}) \sum_{t=1}^T \hat{F} \left(\frac{t}{T} \right) \hat{F} \left(\frac{t}{T} \right)',$$

donde,

$$\begin{aligned} \hat{F}(x) &= (T^{-1}) \sum_{t=1}^{[Tx]} (y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 t) & \text{si } x \in [T^{-1}, 1], \\ \hat{F}(x) &= 0 & \text{si } x \in [0, T^{-1}), \end{aligned} \quad (2.36)$$

siendo $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ estimadores MCO de los vectores de interceptos y de los parámetros de la pendiente, respectivamente, correspondientes a la regresión de y_t en el periodo t , para $t = 1, \dots, T$. Si $\hat{F}(x)$ es una función escalón,

³⁷Puede ser posible que para este autovector común, $\theta' g(t)$ no sea exactamente lineal en t , por ejemplo, si $\theta' g(t)$ no es lineal para un número finito de t 's. También es posible que para una subsecuencia t_j , $\theta' g(t_j)$ no sea lineal, mientras que θ es el autovector común de las matrices M_1 y M_2 correspondientes a un autovalor cero. En este caso, si el número finito de t_j 's es menor o igual a T , entonces es de orden $o(T)$. Sin embargo, debido a que el número de t 's para los que ocurre esta no linealidad es finito, este fenómeno se difumina en el conjunto de los números naturales.

2.4. *Contraste de cotendencias no lineales*

entonces $\hat{F}(1) = 0$ debido a la primera condición en (2.34), y $\hat{F}(0) = 0$ por definición, por lo que se puede escribir:

$$\hat{M}_1 = \int \hat{F}(x) \hat{F}(x)' dx.$$

Teniendo en cuenta el Supuesto 1 de Bierens (2000, p.326): "Existe un número no negativo p , tal que $F_{p,T}(x)$ y $F_{p,T}^*(x)$ se definen por medio de las expresiones (2.27) y (2.30), respectivamente, y se dan las condiciones (2.28), (2.31), por tanto, se cumplen las condiciones (2.29) y (2.32). Además, las matrices $M_1, M_{1,p,T}, M_2$ y $M_{2,p,T}$ en (2.29) y (2.32), respectivamente, tienen el mismo rango" y considerando la hipótesis de cotendencia no lineal: $v(1)$, junto al supuesto de que u_t es un proceso lineal:

$$u_t = C(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \varepsilon_{t-j}, \quad \text{donde } \varepsilon_t \sim i.i.d. (0, I_n), \quad (2.37)$$

entonces, $T^{-2p} \hat{M}_1 \rightarrow M_1$ en probabilidad y, en particular, $T\theta' \hat{M}_1 \theta$ converge en distribución a una funcional de procesos estándar de Wiener, multiplicada por $\theta' C(1) C(1)' \theta$.

El factor $\theta' C(1) C(1)' \theta$ es un parámetro molesto. Para deshacerse de él se puede utilizar un estimador de tipo Newey-West, como en Bierens (1994, p.197), según se expone a continuación: Si m es una secuencia de números naturales que convergen a infinito con T a una tasa $o(T)$, es decir:

$$m = [T^\alpha], \quad \text{donde } 0 < \alpha < 1, \quad (2.38)$$

y considerando la matriz

$$\hat{M}_2 = T^{-1} \sum_{j=m}^T \left((m^{-1}) \sum_{j=0}^{m-1} (y_{t-j} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1(t-j)) \right) \left((m^{-1}) \sum_{j=0}^{m-1} (y_{t-j} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1(t-j)) \right)'$$

que se puede expresar como:

$$\hat{M}_2 = \int \hat{F}^*(x) \hat{F}^*(x)' dx,$$

donde,

$$\begin{aligned} \hat{F}^*(x) &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left(y_{[Tx]+1-j} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1([Tx] + 1 - j) \right) \quad \text{si } [Tx] \geq m - 1, \\ \hat{F}^*(x) &= 0 \quad \text{si } [Tx] < m - 1, \end{aligned} \tag{2.39}$$

Bierens (2000) demuestra que $T^{-2p} \hat{M}_2 \rightarrow M_2$ y bajo la $H_0 : v(1)$, $T^\alpha \theta' \hat{M}_2 \theta \rightarrow \theta' C(1) C(1)' \theta$ en probabilidad. Según este autor, un contraste que tiene en cuenta la $H_0 : v(1)$, frente a la alternativa $v(0)$ se puede basar en la solución mínima $\hat{\lambda}_1$, es decir, en el autovalor generalizado que resuelve el problema $\det(\hat{M}_1 - \hat{M}_2) = 0$, por lo que el estadístico a considerar es $T^{1-\alpha} \hat{\lambda}_1$. La razón para utilizar este enfoque del autovalor generalizado es

2.5. Análisis empírico

que asintóticamente permite eliminar el parámetro molesto $\theta' C(1)C(1)'\theta$. De forma análoga se puede extender este contraste al caso de múltiples cotendencias no lineales y contrastar el número de restricciones lineales que presentan los vectores de cotendencias θ .

Un aspecto importante que cabe tener en cuenta es que la potencia asintótica de este test depende de la elección de α , de manera que cuanto menor es su valor, se obtiene mayor potencia. Nosotros consideramos un valor $\alpha = 1/2$, ya que tal y como argumenta Bierens (2000, p.327) " $\alpha = 1/2$ es el valor óptimo para la convergencia de \hat{M}_2 a M_2 , debido a que un valor de α demasiado pequeño puede provocar distorsión en el tamaño del test".

Bierens (2000) también demuestra que bajo la hipótesis $v(r)$ con $r \geq 1$, los autovectores de la matriz \hat{M}_1 , y los autovectores generalizados de \hat{M}_1 versus \hat{M}_2 , que corresponden a los r autovalores más pequeños, son estimadores \sqrt{T} -consistentes de los vectores de cotendencias θ .

2.5 Análisis empírico

En la presente sección exponemos los resultados obtenidos tras aplicar el test de cotendencias no lineales de Bierens (2000) al tipo de interés nominal y a la tasa de inflación de Alemania, España, Francia y Reino Unido³⁸. Para ello, en la primera subsección nos centramos en una descripción de

³⁸ Algunos de los cálculos se han hecho utilizando el programa EasyReg International, 2001, elaborado por H. J. Bierens (<http://econ.la.psu.edu/~hbierens/EASYREG.HTM>).

los datos utilizados. Posteriormente, debido a que el test de Bierens (2000) es un test de cointegración si las series a las que se aplica dicho test son procesos $I(1)$, llevamos a cabo un análisis sobre el p.g.d. de cada una de las series a través de una amplia batería de tests de raíces unitarias y estacionariedad. Así, la subsección segunda se centra en la aplicación de estos tests al tipo de interés y a la tasa de inflación de los cuatro países considerados. En la tercera subsección se expone el resultado de aplicar el contraste no paramétrico de Bierens (2000), con el fin de detectar la posible existencia de una cotendencia no lineal entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en cada uno de los países analizados. La subsección cuarta está orientada al análisis del puzzle de precios en aquellos países en los que encontramos que el tipo de interés nominal y la tasa de inflación poseen una tendencia no lineal común, y a identificar si esta cotendencia no lineal es la causa principal del puzzle de precios.

2.5.1 Datos

Los datos que utilizamos en nuestro análisis empírico son el tipo de interés nominal a corto plazo y la tasa de inflación interanual de Alemania, España, Francia y Reino Unido³⁹. Su periodicidad es mensual y el tamaño muestral de cada una de ellas, así como la fuente de la que proceden, son diferentes dependiendo de la variable de que se trate. Así, en relación al tipo de interés nominal, el tipo de interés a corto plazo de Alemania es la media mensual de los datos diarios del FIBOR a tres meses y su periodo muestral abarca

³⁹Cada una de las series $x(t)$ se estandariza entre 0 y 1, aplicando la transformación siguiente: $y(t) = (x(t) - \min_{1 \leq t \leq T} \{x(t)\}) / (\max_{1 \leq t \leq T} \{x(t)\} - \min_{1 \leq t \leq T} \{x(t)\})$.

2.5. Análisis empírico

desde enero de 1960 hasta diciembre de 1998. El tipo de interés considerado para España es el tipo medio a tres meses de los depósitos en el mercado interbancario, desde enero de 1977 hasta agosto de 2000. El tipo de interés a corto plazo de Francia es la media mensual de datos diarios del PIBOR y su periodo muestral se extiende desde enero de 1970 hasta diciembre de 1998. En el caso del tipo de interés nominal del Reino Unido, se considera la media mensual de datos diarios de los préstamos interbancarios a tres meses, desde enero de 1978 hasta agosto de 2000. Las fuentes de las que proceden estos tipos de interés son la OCDE, excepto en el de España cuya fuente es el Banco de España.

En cuanto a la tasa de inflación, ésta se calcula como la tasa interanual del índice de precios de consumo (IPC) de cada país. Así, para Alemania, el IPC abarca el periodo enero de 1961-agosto de 2000. Para España, el periodo muestral disponible se extiende desde marzo de 1955 hasta agosto de 2000. En el caso de Francia, los datos de IPC que consideramos comienzan en enero de 1961 y finalizan en agosto de 2000; y en el caso de Reino Unido, el periodo muestral abarca el periodo enero de 1961-agosto de 2000. La fuente de la que proceden estos datos es la OCDE, excepto en el caso de España, cuya fuente es el Instituto Nacional de Estadística (INE).

En las figuras 1 a 4 se muestra la evolución de la tasa de inflación y del tipo de interés en los cuatro países considerados. Tal y como se observa en estas figuras, ambas series siguen un patrón de comportamiento similar en todos ellos. Además, es evidente que existe algún tipo de *shock* exógeno, común a las series tipo de interés y tasa de inflación, que hace que tengan

un valor elevado a principios de los años setenta y en torno a 1980, fechas que coinciden con la manifestación en estos países de los efectos de *shocks* energéticos.

2.5.2 Contrastes de raíz unitaria y de estacionariedad

En la presente subsección exponemos los resultados de aplicar algunos de los contrastes de raíces unitarias y de estacionariedad más utilizados en la literatura a las series tipo de interés y tasa de inflación de Alemania, España, Francia y Reino Unido. Aunque pueda no ser relevante considerar los contrastes de integración y de estacionariedad que tienen en cuenta la H_0 o la H_1 , respectivamente, de que las variables fluctúan en torno a cero o alrededor de una tendencia lineal, aplicamos también este tipo de contrastes para mostrar el conflicto de resultados al que se llega por el hecho de no tener en cuenta una hipótesis adecuada al aplicar estos contrastes.

Los tres primeros tests (ver Tablas 1 y 2) son el de Phillips (1987) y dos tests de Phillips y Perron (1988), que contrastan la hipótesis de raíz unitaria, frente a las alternativas de estacionariedad en torno a una media cero, estacionariedad alrededor de una constante y estacionariedad en torno a una tendencia determinista lineal, respectivamente. Estos tests utilizan un estimador de la varianza propuesto por Newey y West (1987) con un parámetro de truncamiento⁴⁰ $m = [cT^r]$, donde $c > 0$, y $0 < r < 1/3$.

⁴⁰ [•] Indica la parte entera.

2.5. Análisis empírico

Nosotros utilizamos los valores $c = 5$ y $r = 0.25$, al igual que Bierens (1997).

Los tres tests siguientes son del tipo DFA (Dickey, 1976; Fuller, 1976; Dickey y Fuller, 1979, 1981), con una amplitud de retardos elevada que vamos reduciendo hasta que el test de Wald nos indica que el último retardo es significativo. Es de destacar que, en la mayor parte de los casos, la amplitud de retardos que se obtiene a través de este procedimiento coincide con los aconsejados por los criterios de Akaike, Hannan-Quinn y Schwarz.

Posteriormente aplicamos cuatro tests de raíces unitarias, elaborados por Bierens (1993), basados en una autocorrelación muestral de orden elevado. Los dos primeros de ellos, denominados HOAC(1,1) y HOAC(2,2), contrastan la hipótesis de raíz unitaria, frente a la alternativa de estacionariedad; mientras que los dos siguientes, denominados DHOAC(1,1) y DHOAC(2,2), contrastan la H_0 de raíz unitaria con deriva, frente a la alternativa de estacionariedad en torno a una tendencia determinista. La amplitud de retardos que consideramos es $p = 1 + [\alpha T^{\delta\mu/(3\mu+2)}]$, por lo que estos cuatro tests dependen de los parámetros $\mu > 0$, $\alpha > 0$ y $0 < \delta < 1$. Nosotros utilizamos los valores $\mu = 2$, $\alpha = 5$ y $\delta = 0.5$, como en Bierens (1997).

Los siguientes seis tests, que aparecen en las tablas 1 y 2, son los tests de Cauchy de Bierens y Guo (1993). Los cuatro primeros contrastan la H_0 de estacionariedad frente a la alternativa de raíz unitaria, mientras que los dos últimos contrastan la hipótesis de estacionariedad alrededor de una ten-

dencia lineal frente a la H_1 de raíz unitaria con deriva. Los cuatro primeros tests de Cauchy también utilizan un estimador de la varianza de largo plazo de tipo Newey-West, con un número de retardos de truncamiento similar al utilizado en los tests de Phillips (1987) y Phillips y Perron (1988).

El último contraste es el KPSS de Kwiatkowski, *et al.* (1992). Este test permite contrastar la H_0 de estacionariedad alrededor de una constante frente a la alternativa de raíz unitaria, así como contrastar la hipótesis de que la serie es estacionaria en torno a de una tendencia, frente a la H_1 de raíz unitaria con deriva. En ambos casos, se utiliza un estimador de la varianza de largo plazo de tipo Newey-West, con un número de retardos de truncamiento similar al utilizado en los contrastes precedentes.

A partir de los resultados expuestos en las tablas 1 y 2, se observa que la aplicación de estos tests a la tasa de inflación de Alemania, España, Francia y Reino Unido y al tipo de interés de estos mismos países lleva a resultados contradictorios, ya que mientras algunos tests de raíces unitarias no rechazan esta hipótesis, otros sí lo hacen, y mientras algunos tests de estacionariedad no rechazan esta hipótesis, otros también la rechazan. Por ello, podemos concluir que ambas series no son ni procesos genuinos estacionarios, ni procesos genuinos $I(1)$. Por lo que una explicación plausible a este conflicto de resultados podría ser que estas series fueran estacionarias en torno a una tendencia determinista no lineal.

Debido a que algunos tests de raíces unitarias pueden tener una potencia baja cuando la serie se ve afectada por un cambio en la función

2.5. Análisis empírico

tendencia, tal y como demuestra Perron (1989, 1990) y como argumentamos en el Capítulo 1, y como consecuencia del conflicto de resultados que obtenemos cuando aplicamos algunos de los contrastes de raíz unitaria y de estacionariedad más utilizados en la literatura, aplicamos al tipo de interés nominal y a la tasa de inflación de estos países tests que contrastan la H_0 de raíz unitaria, frente a la alternativa de estacionariedad alrededor de su media, cuando ésta presenta una ruptura, o estacionariedad en torno a una tendencia, cuya pendiente experimenta un cambio, o la de estacionariedad alrededor de una tendencia que experimenta un cambio en su nivel y en su pendiente. Para ello, utilizamos los modelos propuestos por Perron (1989):

(i) Modelo *additive outlier*: supone que la ruptura se produce de manera repentina⁴¹.

(ii) Modelo *innovational outlier*: supone que la ruptura en la tendencia se produce lentamente a lo largo del tiempo⁴².

Además, especificamos ambos modelos considerando que la ruptura se puede producir sólo en el nivel de la serie⁴³, o únicamente en la pendiente de la tendencia⁴⁴ o tanto en el nivel como en la pendiente. Para ello, in-

⁴¹Las ecuaciones representativas de los modelos *additive outlier* aparecen representadas en las ecuaciones (1.1) a (1.3) del Capítulo 1.

⁴²Las ecuaciones representativas de los modelos *innovational outlier* aparecen representadas en las ecuaciones (1.6) a (1.8) del Capítulo 1.

⁴³Tal y como exponemos en el Capítulo 1, Perron (1989) denomina al modelo especificado con un cambio en el nivel como "modelo *crash*".

⁴⁴Perron (1989) denomina al modelo especificado con un cambio en la pendiente como "modelo de cambio en el crecimiento", tal y como comentamos en el Capítulo 1.

corporamos en los modelos *additive outlier* e *innovational outlier* variables ficticias que recogen estos cambios. Debido a las numerosas críticas que ha recibido el trabajo de Perron (1989), en especial la de Christiano (1992), al considerar la determinación del punto de ruptura de manera exógena, y como consecuencia de que otros autores, como Zivot y Andrews (1992), Banerjee, *et al.* (1992), Perron y Vogelsang (1992), Perron (1994, 1997) y Vogelsang y Perron (1998), argumentan que la mayoría de los contrastes de raíces unitarias presentan mejores propiedades cuando el punto de ruptura se determina de manera endógena, es decir, a través de la información que transmiten los datos, nosotros también procedemos a la determinación endógena de la fecha de ruptura. Los modelos que consideramos son los siguientes:

- Modelo A: Modelo *additive outlier* con un cambio en la media.
- Modelo B: Modelo *additive outlier* con un cambio en la pendiente.
- Modelo C: Modelo *additive outlier* con un cambio en la media y en la pendiente.
- Modelo D: Modelo *innovational outlier* con un cambio en la media.
- Modelo E: Modelo *innovational outlier* con un cambio en la pendiente.
- Modelo F: Modelo *innovational outlier* con un cambio en la media y en la pendiente.

La determinación de la fecha de ruptura la llevamos a cabo seleccionando el periodo muestral en el que se obtiene el valor máximo del estadístico F que contrasta la significatividad del parámetro o parámetros asociados a las variables ficticias que recogen el cambio en la media y/o el cambio

2.5. Análisis empírico

en la pendiente de la tendencia. Una vez determinada la fecha en la que es probable que se produzca la ruptura en la serie, calculamos el valor del estadístico t asociado al parámetro de la variable endógena desfasada un periodo, para cada uno de los modelos considerados, y lo comparamos con los valores críticos de Vogelsang y Perron (1998), para los modelos A, B, C y F, y con los valores críticos de Banerjee *et al.* (1992), para los modelos D y E. Rechazamos la H_0 de raíz unitaria si el estadístico excede, en valor absoluto, a los correspondientes valores críticos.

Los resultados de aplicar estos contrastes de raíces unitarias a la tasa de inflación y al tipo de interés nominal de los cuatro países que consideramos en nuestro estudio se exponen en las tablas 3 y 4. A partir de la Tabla 3 obtenemos que, en el caso de España y Reino Unido rechazamos la H_0 de raíz unitaria, al nivel de significación del 5%, cuando consideramos los modelos *additive outlier* o *innovational outlier* con un cambio en la pendiente de la tendencia. En España también llegamos a rechazar esta H_0 , al nivel del 5% si se considera el modelo D y al 10% si tenemos en cuenta una especificación como la del modelo F. Para el tipo de interés nominal (ver Tabla 4) únicamente rechazamos la H_0 de raíz unitaria en España. Esta hipótesis se rechaza en favor de la de estacionariedad alrededor de una tendencia que cambia su pendiente, al nivel de significación del 10%, cuando se consideran los modelos B y E. Estos resultados apoyan la hipótesis de que si se tienen en cuenta los cambios estructurales en las hipótesis de partida de los contrastes de raíces unitarias, el tipo de interés nominal y la tasa de inflación pueden ser procesos estacionarios en torno a una tendencia

determinista no lineal.

Teniendo presente el argumento anterior, también aplicamos algunos tests elaborados por Bierens (1997) para contrastar la H_0 de raíz unitaria con deriva constante, frente a la alternativa general de estacionariedad alrededor de una tendencia que puede ser lineal o no lineal, o hallarse en torno a una constante. Estos tests modifican la versión no lineal de los contrastes de Dickey y Fuller (1979), llevada a cabo por Park y Choi (1988) y Ouliaris, Park y Phillips (1989), reemplazando los polinomios temporales ordinarios, por polinomios temporales ortogonales de Chebishev. La ventaja de utilizar polinomios de Chebishev es que permiten distinguir entre estacionariedad alrededor de una tendencia determinista lineal y estacionariedad en torno a una tendencia no lineal, bajo la hipótesis alternativa.

Los estadísticos que utilizamos son los de Bierens (1997): $\hat{t}(m)$, $\hat{A}(m)$, $\hat{F}(m)$ y $\hat{T}(m)$. La H_0 de estos tests es la de raíz unitaria con deriva constante, mientras que la H_1 es distinta según el test considerado. Así, en el caso de los tests $\hat{t}(m)$ y $\hat{A}(m)$, si el estadístico estimado supera al valor crítico por la cola de la derecha de la función de densidad, entonces no se rechaza que la serie es estacionaria alrededor de una tendencia no lineal, mientras que si éste es inferior al valor crítico por la cola de la izquierda, no se puede aseverar con certeza si la serie es estacionaria alrededor de una media constante, en torno a una tendencia lineal o una tendencia no lineal. En el caso del test $\hat{F}(m)$, si el estadístico estimado supera al valor crítico, tampoco se rechaza que la serie es estacionaria, pero se desconoce si es estacionaria en torno a

2.5. Análisis empírico

una media constante, o alrededor de una tendencia lineal o no lineal. En cuanto al test $\tilde{T}(m)$, si el estadístico estimado supera al valor crítico de la cola de la función de densidad por la derecha, no se rechaza que la serie es estacionaria alrededor de una tendencia no lineal, mientras que si se rechaza por la izquierda, se considera que la serie es estacionaria en torno a una media constante o una tendencia determinista lineal.

Para aplicar estos tests, tenemos en cuenta los tests DFA no lineales, basados en la regresión auxiliar:

$$\Delta y_t = \alpha y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \phi_j \Delta y_{t-j} + \theta' P_{t,T}^{(m)} + \varepsilon_t, \quad (2.40)$$

donde $P_{t,T}^{(m)} = (P_{0,T}^*(t), P_{1,T}^*(t), \dots, P_{m,T}^*(t))'$, siendo $P_{0,T}^*(t), P_{1,T}^*(t), \dots, P_{m,T}^*(t)$ polinomios de Chebishev transformados para que sean ortogonales a t . El número de retardos p se determina a través del criterio de Akaike (1973). Tal y como señala Bierens (1997), se podría especificar $p = 0$ y adoptar el enfoque de Phillips y Perron (1988), estimando la varianza de largo plazo no paramétricamente mediante un estimador de la varianza de tipo Newey-West, pero el problema de especificar p sería reemplazado por el de determinar el orden de retardos del parámetro de truncamiento que implica la utilización de este estimador. Alternativamente, se puede utilizar un enfoque similar al de Said y Dickey (1984) y Ng y Perron (1995) especificando p adaptativamente como una función del tamaño muestral, tal y como hace Cushman (2000) al aplicar también los tests de Bierens (1997) a las series: oferta de dinero, nivel de precios, renta real y tipo de

interés nominal, de Canadá. Sin embargo, utilizamos el criterio de Akaike (1973) porque aunque Ng y Perron (1995) demuestran que su contraste secuencial basado en un test t , desarrollado para determinar el orden p , causa menos distorsión de tamaño que el criterio de Akaike (1973), consideramos, al igual que Bierens (1997), que este último es más apropiado para simular el verdadero tamaño del test.

En cuanto al número de polinomios de Chebishev (m), consideramos los casos en los que $m = 10$ y $m = 20$, teniendo en cuenta que una tendencia no lineal suave se aproxima bien mediante un número pequeño de polinomios de Chebishev. La elección de estos valores para m se basa en el estudio llevado a cabo por Bierens (1997) para algunas series como el deflactor del Producto Nacional Bruto, el índice de precios de consumo y el tipo de interés de Estados Unidos. Además, debemos resaltar que la elección de m está sujeta a un número menor de críticas que la especificación del orden de la tendencia polinómica en el enfoque de Ouliaris *et al.* (1989); sin embargo, la potencia y el tamaño de estos tests dependen de m . El problema del tamaño de los tests de Bierens (1997) se puede resolver por simulación, pero dado un valor de m , la potencia depende de la tendencia desconocida no lineal bajo la H_1 . Si esta tendencia no lineal es "más" no lineal que la aproximación mediante los polinomios de Chebishev con un orden de m fijo, puede ser que la potencia sea demasiado baja, pero si se considera un valor de m muy elevado puede disminuir la potencia como consecuencia de estimar parámetros superfluos. Bierens (1997) propone fijar un valor de m que converja a infinito a una tasa controlada con el tamaño muestral, como

2.5. Análisis empírico

la amplitud de truncamientos del estimador de Newey-West, pero no llega a obtener ninguna conclusión evidente que abogue a favor de este criterio.

Los resultados que obtenemos al aplicar los tests propuestos por Bierens (1997), expuestos en las tablas 5 y 6, ponen de manifiesto que si $m = 10$, no se rechaza la H_0 de raíz unitaria con deriva en la tasa de inflación de los cuatro países considerados, mientras que sí se rechaza en el caso del tipo de interés nominal de España al nivel de significación del 10%, cuando se utiliza el estadístico $\hat{t}(m)$, y al 5%, cuando el estadístico utilizado es $\hat{A}(m)$. Si escogemos un valor de m superior ($m = 20$), no rechazamos la H_0 en la mayoría de los casos. No obstante, sí rechazamos esta hipótesis, al nivel de significación del 5%, para la tasa de inflación francesa, cuando utilizamos el estadístico $\hat{A}(m)$, y también la rechazamos al nivel de significación del 5% para el tipo de interés nominal de Alemania, cuando utilizamos el estadístico $\hat{t}(m)$ y al 10% si se utiliza $\hat{A}(m)$.

Para series de tamaño modesto como son el tipo de interés y la tasa de inflación de Alemania, España, Francia y Reino Unido, los valores críticos de los tests de Bierens (1997), determinados para un tamaño muestral de 500 observaciones, parecen tener un limitado uso, por consiguiente, consideramos apropiado simular los p-valores de los contrastes precedentes para los tamaños muestrales de cada serie a través de los procedimientos *bootstrap* paramétrico y *wild bootstrap*⁴⁵ (ver tablas 7 y 8). Comparan-

⁴⁵Los p-valores se obtienen por simulación del siguiente modelo AR(q): $z_t - z_{t-1} = b_1(z_{t-1} - z_{t-2}) + \dots + b_q(z_{t-q} - z_{t-q-1}) + b_{q+1} + u_t$, siendo $t = q + 2, \dots, T$ y $q = 10$ y 20. El término de perturbación aleatoria (u_t) se extrae a partir de una distribución

do los resultados que se obtienen cuando se utilizan los valores críticos de Bierens (1997) con los p-valores simulados, todos los tests de Bierens (1997) que contrastan la H_0 de raíz unitaria con deriva, frente a la alternativa de estacionariedad alrededor de una tendencia no lineal, muestran una cierta distorsión de tamaño, ya que al simular estos p-valores ninguno de ellos permite rechazar la H_0 . Esta distorsión de tamaño no sólo depende del orden m de polinomios temporales de Chebishev, sino también del orden AR de los polinomios de la parte estocástica de las series temporales. Asimismo, las propiedades de potencia de cada uno de los tests considerados son muy diferentes, ya que parece que cada uno de ellos recoge diferentes aspectos de la H_1 y, además, depende de una tendencia no lineal desconocida bajo esta hipótesis. Por tanto, a través de estos tests no se puede rechazar la H_0 de que el tipo de interés y la tasa de inflación en los cuatro países considerados sean procesos I(1) con deriva constante. Sin embargo, tal y como Bierens (2000) señala para Estados Unidos, este resultado se puede obtener ante la falta de suavidad de las tendencias no lineales que presentan las series.

A pesar de los resultados de la aplicación de los tests de Bierens (1997) y, considerando la conclusión extraída de los tests de raíces unitarias y estacionariedad previos (ver Tablas 1 a 6), podemos considerar que la tasa

normal con media cero y la varianza de esta distribución, en el caso del procedimiento *bootstrap* paramétrico, es la varianza estimada de los residuos del modelo bajo la H_0 y, en el caso del procedimiento *wild bootstrap*, se obtiene a partir del cuadrado de los residuos estimados por MCO del modelo bajo la H_0 . Los parámetros b_i y la varianza de u_i se estiman utilizando las series originales y los valores iniciales z_1, \dots, z_{q+1} también se obtienen a partir de los datos originales.

2.5. Análisis empírico

de inflación y el tipo de interés en Alemania, España, Francia y Reino Unido no son procesos genuinos $I(1)$ ni $I(0)$, por lo que no se descarta que sean series estacionarias con una tendencia determinista no lineal. Además, desde un punto de vista económico es fácil pensar en ambas series como procesos estacionarios, ya que, por ejemplo, si el tipo de interés nominal fuera un proceso $I(1)$ significaría que cuando el periodo temporal tiende a infinito, la probabilidad de que el tipo de interés nominal tome en algún momento del tiempo un valor negativo es uno, lo que no tiene sentido. Asimismo, tal y como Verbrugge (1998) argumenta, una tasa de inflación que sea un proceso $I(1)$ implicaría costes elevados derivados de procesos inflacionistas o desinflacionistas extremadamente rápidos, por lo que las autoridades económicas actuarían para evitar esta circunstancia.

2.5.3 Contraste de cotendencias no lineales

Los contrastes precedentes permiten concluir que el tipo de interés y la tasa de inflación en Alemania, España, Francia y Reino Unido no son procesos genuinos estacionarios ni integrados de orden unitario. Por tanto, se puede aplicar el test propuesto por Bierens (2000), que parte del supuesto de que el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en estos países son procesos estacionarios alrededor de una tendencia determinista no lineal. Asimismo, al igual que Bierens (2000) en su estudio orientado a la relación entre estas dos series en el caso de Estados Unidos, nosotros aplicamos el contraste de cotendencias no lineales sin incluir una tendencia determinista lineal en nuestros modelos especificados para Alemania, España, Francia y Reino

Unido. La inspección visual sobre la evolución del tipo de interés nominal y la tasa de inflación en estos países (ver figuras 1 a 4) y el hecho de que los contrastes de raíces unitarias y de estacionariedad no sean concluyentes al respecto, hace que sea razonable el supuesto de que ambas series no presenten una tendencia lineal o, si poseen una raíz unitaria, no tengan deriva. Por tanto, si existe una tendencia no lineal común entre estas series, este test permite hallar una relación entre ellas que sea estacionaria en torno a una constante.

Al tratarse el contraste de Bierens (2000) de un test no paramétrico, para su aplicación no es necesario especificar las tendencias no lineales, ni cualquier correlación serial que siga el proceso. Así, construimos para cada país un vector de series temporales y_t constituido por la tasa de inflación y el tipo de interés, y elaboramos el estadístico de Bierens (2000), que contrasta la H_0 de presencia de r cotendencias no lineales, frente a la alternativa de $r - 1$ cotendencias.

Utilizando los valores críticos de Bierens (2000), no rechazamos la H_0 de presencia de un vector de cotendencia no lineal entre estas dos series en Alemania y Francia, al nivel de significación del 5%, e incluso del 10% (ver Tabla 9), mientras que en España y Reino Unido no se rechaza al nivel de significación del 5%, pero sí al 10%. Sin embargo, se nos plantea la cuestión de si este rechazo de la H_0 al nivel de significación del 10% para España y Reino Unido puede ser debido a la utilización de los valores críticos de Bierens (2000), obtenidos para un tamaño muestral de 500 observaciones, mientras que en el caso de España sólo tenemos 284 observaciones y en el

2.5. Análisis empírico

Reino Unido tenemos 272 observaciones. Así pues, simulamos los valores críticos del test de Bierens⁴⁶ (2000), para este menor número de observaciones mediante 10000 réplicas⁴⁷. Los resultados, expuestos en la Tabla 10, ponen de manifiesto que los valores críticos de Bierens (2000) no son muy sensibles al tamaño muestral, por lo que de nuevo rechazamos la H_0 de presencia de un vector de cotendencia no lineal entre el tipo de interés y la tasa de inflación en España y Reino Unido, al nivel de significación del 10%. Por tanto, no podemos hablar de existencia de una cotendencia no lineal entre estas dos series en ambos países con certeza. Por el contrario, no rechazamos esta H_0 para Alemania y Francia, incluso al nivel de significación del 20%. Este resultado nos lleva a poder aseverar, con un elevado grado de certeza, que existe una tendencia no lineal común entre estas series en Alemania y Francia, mientras que no podemos decir lo mismo para España y Reino Unido.

En relación al resultado obtenido al aplicar el test de Bierens (2000) al tipo de interés y a la tasa de inflación de Alemania, los valores propios generalizados de \hat{M}_1 con respecto a \hat{M}_2 son $\hat{\lambda}_1 = 0.007$ y $\hat{\lambda}_2 = 0.026$ y los correspondientes vectores propios generalizados estandarizados de \hat{M}_1 *versus* \hat{M}_2 son los siguientes:

⁴⁶Utilizamos un programa escrito en Ox, versión 2.1 (Doornik, 1998).

⁴⁷En la Tabla 10 también exponemos los resultados de simulación de los valores críticos del estadístico de Bierens (2000), calculados para los tamaños muestrales de Alemania y Francia, formados por 456 y 348 observaciones, respectivamente.

$$\begin{array}{rcl} 0.094 & 1 & \leftarrow \text{TINFLAL} \\ 1 & -0.770 & \leftarrow \text{TINTAL} \end{array} \quad (2.41)$$

siendo TINFLAL la tasa de inflación de Alemania y TINTAL el tipo de interés alemán. Multiplicando $\hat{\lambda}_r$ por la raíz cuadrada del tamaño muestral, se obtienen los estadísticos que permiten contrastar la H_0 de que existen r vectores de cotendencias deterministas no lineales, frente a la alternativa de que existen $r - 1$ vectores de cotendencia.

Los resultados, mostrados en la Tabla 9, tal y como hemos comentado anteriormente, confirman la hipótesis de un vector de cotendencia entre ambas series. Además, considerando las Figuras 5 y 6, en las que se representan las componentes, estandarizadas entre -1 y 1, de las funciones estimadas $\hat{F}(x)$ y $\hat{F}^*(x)$ de la tasa de inflación y tipo de interés de Alemania, cuyas representaciones analíticas se hallan expuestas en las ecuaciones (2.36) y (2.39), respectivamente, se observa que ambas series siguen un patrón de comportamiento similar, lo que permite corroborar el resultado de presencia de una cotendencia no lineal entre la tasa de inflación y el tipo de interés de Alemania.

Teniendo en cuenta el Teorema 4 (Bierens, 2000, p.331), la primera columna de la matriz (2.41) es un estimador consistente del vector de cotendencia. Los resultados de nuestra estimación nos llevan a la siguiente relación:

2.5. Análisis empírico

Tendencia no lineal en TINFLAL=2.02xTendencia no lineal en TINTAL.

Además, también consideramos la H_0 de que el vector $(1, -1)'$ es un vector de cotendencia no lineal. Es decir, contrastamos si puede existir una relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación que tenga un valor esperado constante, debido a que esta idea subyace en un gran número de estudios en el campo de la Teoría Económica y de las Finanzas sin obtener conclusiones claras (ver Sección 2 del presente Capítulo para más detalles). El resultado que obtenemos es el rechazo de esta hipótesis al nivel de significación del 5%. Así, si suponemos que la única relación que existe entre la tasa de inflación y el tipo de interés nominal procede de esta tendencia no lineal común, y tenemos en cuenta el argumento de Ferrer (1998), expuesto en la Sección 2 del presente Capítulo, de manera que bajo el supuesto de expectativas racionales, en el largo plazo y considerando mecanismos convencionales de formación de expectativas, se puede utilizar la inflación observada como *proxy* de la inflación esperada, entonces, podemos decir que en el largo plazo no existe en Alemania un efecto Fisher completo, aunque sí parcial. Asimismo, cabe remarcar que la existencia o no de una tendencia determinista común entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación es independiente de que se produzca o no el efecto Fisher. Así, podría no existir una cotendencia no lineal entre estas series y, sin embargo, sí producirse el efecto Fisher. En este último caso, el tipo de interés real presentaría también una tendencia determinista no lineal.

En lo que se refiere al análisis de cotendencia no lineal de Bierens (2000) aplicado a las series de tasa de inflación y tipo de interés de Francia, los valores propios generalizados de \hat{M}_1 versus \hat{M}_2 son $\hat{\lambda}_1 = 0.015$ y $\hat{\lambda}_2 = 0.071$, siendo los correspondientes vectores propios generalizados estandarizados los siguientes:

$$\begin{array}{rcl} -0.329 & 1 & \leftarrow \text{TINFLFR} \\ 1 & -0.448 & \leftarrow \text{TINTFR} \end{array} \quad (2.42)$$

siendo TINFLFR la tasa de inflación de Francia y TINTFR el tipo de interés del mismo país.

Contrastando la H_0 de que existen r vectores de cotendencias deterministas no lineales, frente a la alternativa de que existen $r - 1$, tal y como se ha expuesto anteriormente y como se muestra en la Tabla 9, no se rechaza la existencia de una cotendencia no lineal entre estas series. Las Figuras 7 y 8 representan las componentes de las funciones estimadas $\hat{F}(x)$ y $\hat{F}^*(x)$, estandarizadas entre -1 y 1, de la tasa de inflación y tipo de interés de Francia. Su comportamiento sincrónico parece confirmar el resultado de que ambas series están relacionadas mediante una tendencia no lineal común.

El resultado de la estimación de la relación entre la tendencia no lineal de la tasa de inflación de Francia y la tendencia no lineal del tipo de interés en este país, es el siguiente:

2.5. Análisis empírico

Tendencia no lineal en TINFLFR=2.67xTendencia no lineal en TINTFR.

Al igual que se obtiene para Alemania, no se puede considerar que la relación entre la tasa de inflación y el tipo de interés nominal presente un patrón estable, ya que rechazamos, al nivel de significación del 5%, la H_0 de que el vector $(1, -1)'$ es un vector de cotendencia no lineal. Por tanto, si suponemos que la única relación que existe entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación procede de esta tendencia no lineal común y bajo el supuesto de expectativas racionales, podemos decir que en el largo plazo no se produce un efecto Fisher completo en este país, pero sí parcial.

Así pues, en el caso de Alemania y Francia hallamos una relación entre el tipo de interés y la tasa de inflación que viene dada por la tendencia no lineal común que presentan ambas series, por efecto de algún *shock* exógeno que influye en ellas de manera que consigue que presenten un patrón común de comportamiento y que, por ende, estén relacionadas.

En Estados Unidos, Bierens (2000), al aplicar su contraste de cotendencia no lineal, también encuentra una relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación, relación que resulta ser indirecta y que es consecuencia de la tendencia no lineal común que presentan ambas series. Además, Bierens (2000) concluye que esta tendencia no lineal es probable que se deba a la evolución del precio del petróleo. Nuestro objetivo, en el

presente trabajo, no es tratar de identificar cuál es la causa de la relación hallada entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en Alemania y Francia, a través de sus tendencias no lineales, sino verificar que efectivamente existe una relación entre ellas. Sin embargo, debido a que ambas series presentan cambios en su tendencia, precisamente en los periodos en los que se produjeron algunos de los principales *shocks* energéticos, nos induce a pensar que probablemente la tendencia no lineal común detectada en el tipo de interés nominal y la tasa de inflación de Alemania y Francia sea consecuencia de la dependencia de estas series respecto a la evolución del precio del petróleo.

Una importante diferencia entre los resultados de Bierens (2000) y los nuestros para Alemania y Francia, es que Bierens (2000) obtiene que el coeficiente estimado que relaciona la tendencia no lineal de la tasa de inflación estadounidense con la tendencia no lineal del tipo de interés de los fondos federales es menor que la unidad, y no rechaza estadísticamente que dicha relación pueda ser incluso de tipo uno a uno. Sin embargo, para Alemania y Francia sobrepasa ampliamente la unidad, en concreto, en Alemania el valor estimado es 2.02 y en Francia es 2.67, y rechazamos que estadísticamente pueda ser la unidad. Por tanto, bajo los supuestos de expectativas racionales y que la única relación que existe entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en estos países es consecuencia de la cotendencia no lineal hallada entre estas dos series, no podemos hablar de efecto Fisher completo en el largo plazo. El resultado que obtenemos relativo a que la relación entre la tendencia no lineal que presenta el tipo de

2.5. Análisis empírico

interés nominal y la tasa de inflación en Alemania y en Francia es superior a la unidad, mientras que en Estados Unidos puede ser igual o inferior a la unidad, podría ser explicado por el hecho de que, en economías grandes, y, por ello, relativamente cerradas, como la estadounidense, el banco central puede responder a determinados *shocks*, por ejemplo un alza en los precios del petróleo, modificando su tipo de interés en mayor medida que lo pueden hacer las economías más pequeñas y abiertas, como es el caso de Alemania y Francia. En estos países, la política monetaria de sus bancos centrales está restringida a la de otros países de su entorno comercial, de manera que sus tipos de interés no pueden desviarse mucho de los tipos de sus socios comerciales, ya que si lo hicieran el tipo de cambio de sus monedas podría experimentar elevados desajustes. Así pues, si existe un *shock* exógeno que afecta a la tasa de inflación de estos países, la respuesta de sus bancos centrales al mismo será menor, ya que está sujeta también a la evolución de otras variables de los países de su entorno.

2.5.4 Análisis del Puzle de precios

Con el fin de determinar si la tendencia determinista no lineal común hallada entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación de Alemania y Francia causa un efecto puzle de precios, estimamos inicialmente un modelo VAR(36) bivalente no estructural, con intercepto, para el vector de series temporales de los procesos $y_t(TINTAL_t, TINFLAL_t)'$, para Alemania, y $y_t(TINTFR_t, TINFLFR_t)'$, para Francia, y representamos la

función impulso-respuesta para un horizonte temporal de 24 meses.

Las líneas de trazo grueso que aparecen en las figuras 9 y 10, muestran la respuesta de la tasa de inflación a un *shock* unitario en el tipo de interés nominal de Alemania y Francia, respectivamente. A través de ambas figuras se observa que existe un evidente puzle de precios en ambos países durante el periodo considerado de dos años, es decir, la tasa de inflación responde positivamente a un *shock* unitario en el tipo de interés nominal.

Como consecuencia de este resultado, posteriormente nos planteamos la posibilidad de que el puzle de precios hallado en estos países sea consecuencia de la tendencia no lineal común entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación. Con este fin, volvemos a estimar los modelos VAR, pero ahora incluyendo 20 polinomios temporales de Chebishev ($P_{j,T}(t)$, $j = 1, \dots, 20$) con el objeto de extraer dicha tendencia no lineal. Los polinomios de Chebishev adoptan la siguiente forma (ver Hamming, 1973; y Bierens, 1997):

$$\begin{aligned} P_{0,T}(t) &= 1, \\ P_{j,T}(t) &= \sqrt{2} \cos \left(j\pi \left(t - \frac{1}{2} \right) / T \right), \quad j = 1, \dots, T - 1. \end{aligned}$$

Además, estos polinomios son ortonormales: $(1/T) \sum_{t=1}^T P_{i,T}(t)P_{j,T}(t) = I(i \neq j)$ para $i, j = 0, \dots, T - 1$, donde $I()$ es una función indicador, por consiguiente, cualquier función de tendencia $g(t)$ se puede representar así:

2.5. Análisis empírico

$$g(t) = \sum_{j=0}^{T-1} \gamma_{j,T} P_{j,T}(t), \quad t = 1, \dots, T$$

donde

$$\gamma_{j,T} = (1/T) \sum_{t=1}^T g(t) P_{j,T}(t).$$

Tal y como se expone en Bierens (1997), el número de polinomios de Chebishev es muy flexible, de manera que una tendencia determinista lineal se puede representar con un número de polinomios de Chebishev muy bajo. Nosotros, al igual que Bierens (2000), elegimos 20 polinomios de Chebishev para recoger el comportamiento no lineal tanto del tipo de interés como de la tasa de inflación en Alemania y en Francia. Las líneas de trazo más fino que aparecen en las figuras 9 y 10, representan las funciones impulso-respuesta de los modelos VAR que incluyen en su especificación 20 polinomios de Chebishev. Comparando las funciones impulso-respuesta de los modelos VAR con y sin polinomios de Chebishev, representadas en las figuras 9 y 10, obtenemos un resultado muy interesante, ya que el hecho de extraer la tendencia no lineal de la tasa de inflación y del tipo de interés, en cada uno de estos países, hace que se reduzca considerablemente la respuesta de la tasa de inflación a un *shock* en el tipo de interés, llegando incluso a oscilar en torno al nivel cero durante el periodo de dos años considerado. Por tanto, podríamos concluir *a priori* que el puzle de precios es provocado por una tendencia no lineal común entre el tipo de interés y la tasa de inflación

tanto en Alemania como en Francia, tal y como hace Bierens (2000) para la economía estadounidense.

Sin embargo, la afirmación anterior resulta demasiado arriesgada, ya que, aunque el test de Bierens (2000) no rechaza la existencia de una tendencia no lineal común entre el tipo de interés y la tasa de inflación en Alemania y Francia, no conocemos realmente si este puzle de precios es generado realmente por la existencia de una cotendencia no lineal entre ambas series o es resultado de otro tipo de factores. Por tanto, nos planteamos si el puzle de precios desaparece cuando se introducen polinomios de Chebishev en los modelos VAR, independientemente de que exista o no una cotendencia no lineal entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en ambos países. Con este fin llevamos a cabo un estudio de simulación mediante *bootstrap* no paramétrico.

Utilizando los parámetros y los residuos de los modelos VAR estimados a partir de las variables originales, que muestran un evidente puzle de precios, simulamos series por *bootstrap* con las mismas propiedades que las series originales, pero sin tendencias deterministas no lineales. Con estas nuevas series volvemos a estimar los respectivos modelos VAR incluyendo 20 polinomios de Chebishev. Para llevar a cabo este estudio realizamos 1000 réplicas y obtenemos la media de las funciones impulso-respuesta de los VAR simulados, así como las funciones impulso-respuesta inferiores y superiores correspondientes a los cuantiles 2.5% y 97.5% de los valores tabulados para cada horizonte temporal. En las figuras 11 y 12 comparamos las funciones impulso-respuesta de los modelos VAR con polinomios de

2.5. Análisis empírico

Chebichev con la media de las funciones impulso-respuesta obtenidas a partir de los modelos VAR para Alemania y Francia, respectivamente, que incluyen polinomios de Chebichev, aunque se estiman a partir de series simuladas que no presentan tendencias deterministas no lineales. Ambas figuras muestran que estas funciones siguen un patrón muy similar, lo que evidencia que independientemente de que el tipo de interés nominal y la tasa de inflación presenten una tendencia no lineal común, la inclusión de polinomios de Chebichev en los modelos VAR elimina el puzle de precios en Alemania y en Francia. Un resultado similar se obtiene si comparamos las funciones impulso-respuesta de los modelos VAR estimados con polinomios de Chebichev con las bandas inferior y superior de estas funciones obtenidas como *output* de modelos VAR estimados a partir de series simuladas por *bootstrap*, para Alemania y Francia, de tal manera que no presenten una tendencia determinista no lineal. Así, en las figuras 13 y 14, se observa como la respuesta de la inflación a un *shock* unitario en el tipo de interés nominal tras incluir 20 polinomios de Chebichev en el modelo VAR se halla entre las bandas obtenidas por simulación. Por tanto, se puede concluir que el puzle de precios desaparece, incluso en ausencia de cotendencia no lineal entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación, sólo por el hecho de incluir polinomios de Chebichev en los modelos VAR. Así pues, con estos resultados no se puede aseverar, tal y como hace Bierens (2000) en su estudio aplicado a la economía estadounidense, que es la cotendencia no lineal hallada entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación la que provoca el puzle de precios en Alemania y Francia.

2.6 Conclusiones

El resultado que obtenemos, al utilizar el contraste no paramétrico de Bierens (2000) con la finalidad de hallar una relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en Alemania, España, Francia y Reino Unido, es que, en España y Reino Unido no existe una relación entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación que esté ocasionada por la presencia de una tendencia determinista no lineal común a ambas series. Sin embargo, en Alemania y Francia, sí que hallamos una relación entre estas dos variables que es consecuencia de la presencia de esta cotendencia no lineal. Por tanto, existe una combinación lineal entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación, en ambos países, que es estacionaria alrededor de una constante, lo que no quiere decir que el tipo de interés real tenga que ser estacionario en torno a una constante, ya que pueden existir otros tipos de relaciones entre ambas series que provengan de otros factores. Asimismo, es importante destacar que esta tendencia no lineal es consecuencia, a su vez, de la incidencia que sobre ambas series tiene algún *shock* exógeno, que consigue que éstas presenten un patrón común de comportamiento.

Los resultados que obtenemos en nuestro estudio, en el caso de Alemania y Francia, difieren de los de Bierens (2000), aplicados a Estados Unidos, ya que si bien en Estados Unidos existe una relación entre las tendencias no lineales del tipo de interés nominal y la tasa de inflación estadísticamente igual o inferior a la unidad, en Alemania y Francia sobrepasa ampliamente la unidad, en torno a 2.02 en Alemania y alrededor de 2.67 en Francia. Por

2.6. Conclusiones

tanto, si la única relación que pudiera existir entre estas dos series fuera consecuencia de la tendencia no lineal común hallada en ambas y bajo el supuesto de expectativas racionales que, en el largo plazo y bajo los mecanismos convencionales de formación de expectativas, nos permite utilizar la tasa de inflación observada como sustituto de la tasa de inflación esperada, podemos decir que no se cumple el efecto Fisher de manera completa, aunque sí de forma parcial. Además, los resultados que obtenemos para Alemania y Francia creemos que pueden ser explicados por el hecho de que en economías grandes, como la estadounidense, el banco central puede responder a determinados *shocks*, por ejemplo, un alza en los precios del petróleo, modificando su tipo de interés en mayor medida que lo pueden hacer las economías más pequeñas y abiertas, como es el caso de Alemania y Francia. En estos países, la política monetaria de sus bancos centrales está restringida a la de los países de su entorno comercial, de manera que sus tipos de interés no pueden desviarse mucho de los tipos de sus socios comerciales, ya que si lo hicieran, el tipo de cambio de sus monedas podría experimentar elevados desajustes. Así pues, si existe un *shock* exógeno que afecta a la tasa de inflación en estos países, la respuesta de sus bancos centrales al mismo será menor.

Además, obtenemos que existe un puzle de precios en Alemania y Francia, es decir, al estimar un modelo VAR, una innovación en el tipo de interés nominal tiene un efecto positivo, durante al menos 24 meses, en la respuesta que se produce en la tasa de inflación de estos países. Bierens (2000), en su estudio llevado a cabo en el marco de la economía estadounidense

obtiene que al incluir polinomios de Chebishev con el fin de extraer la tendencia no lineal común que presenta el tipo de interés nominal y la tasa de inflación, desaparece el puzle de precios, concluyendo que efectivamente el puzle de precios es consecuencia de esta cotendencia no lineal. Sin embargo, no comprueba si éste desaparece sólo por el hecho de incluir estos polinomios de Chebishev en el modelo VAR o si, por el contrario, desaparece porque realmente consigue extraer esta tendencia no lineal común. Así pues, nosotros vamos más allá en el presente estudio y, aunque también obtenemos un resultado similar al de Bierens (2000) al incluir en los modelos VAR polinomios de Chebishev, cuando trasladamos este estudio a las economías alemana y francesa, comprobamos mediante simulación *bootstrap* no paramétrica que el puzle de precios detectado en Alemania y Francia desaparece únicamente por la inclusión de polinomios de Chebishev en el modelo VAR y no por el hecho de que estos polinomios consigan extraer la tendencia no lineal común. Por tanto, podemos concluir que el puzle de precios que se produce en Alemania y Francia sigue, sencillamente, sin resolverse.

Bibliografía

- [1] Ahn, S. K. y Reinsel, G. C. (1990): Estimation for partially non-stationary multivariate autoregressive models. *Journal of the American Statistical Association*, 85, 813-823.
- [2] Akaike, H. (1973): Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. En *Second International Symposium on Information Theory*, 267-281, ed. B.N. Petro y F. Csaki. Budapest.
- [3] Allen, S. D. (1991): Government borrowing and tax-adjusted real and nominal interest rates. *Applied Economics*, 23, 31-39.
- [4] Allen, S. D. (1992): The determinants of the tax-adjusted real interest rate. *Journal of Macroeconomics*, 14, 15-32.
- [5] Atkins, F. J. (1989): Co-integration, error correction and the Fisher effect. *Applied Economics*, 21, 1611-1620.
- [6] Aznar, A. y Nievas, J. (1995): Una propuesta de contraste del efecto Fisher con expectativas racionales: aplicación al caso español. *Revista Española de Economía*, Vol.12, 2, 281-307.

- [7] Baillie, R. T. (1996): Long memory processes and fractional integration in econometrics. *Journal of Econometrics*, 73, 5-59.
- [8] Baillie, R. T. y Bollerslev, T. (1994): Long memory in the forward premium. *Journal of International Money and Finance*, 13, 565-571.
- [9] Baillie, R. T., Chung, C. F. y Tieslau, M. A. (1996): Analyzing inflation by the fractionally integrated ARFIMA-GARCH model. *Journal of Applied Econometrics*, 11, 23-40.
- [10] Balke, N. S. y Emery, K. M. (1994): The federal funds rate as an indicator of monetary policy: Evidence from the 1980s. *Economic Review*, first quarter, 1-15. Federal Reserve Bank of Dallas.
- [11] Banerjee, A., Lumsdaine, R. L. y Stock, J. H. (1992): Recursive and sequential tests for a unit root: Theory and international evidence. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 271-287.
- [12] Barsky, R. B. (1987): The Fisher hypothesis and the forecastability and persistence of inflation. *Journal of Monetary Economics*, 19, 3-24.
- [13] Barthold, T. A., y Dougan, W. E. (1986): The Fisher hypothesis under different monetary regimes. *The Review of Economics and Statistics*, 68, 674-679.
- [14] Bernanke, B. S. (1986): Alternative explorations of the money-income correlation. Carnegie-Rochester Conferences Series on Public Policy, 25, 49-99.

Bibliografía

- [15] Bernanke, B. S. y Blinder, A. S. (1992): The Federal funds rate and the channels of monetary transmission. *American Economic Review*, Vol. 82, 4, 901-921.
- [16] Bierens, H. J. (1993): Higher-order sample autocorrelations and the unit root hypothesis. *Journal of Econometrics*, 57, 137-160.
- [17] Bierens, H. J. (1994): " *Topics in advanced econometrics: Estimation, testing and specification of cross-section and time series models*". Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.
- [18] Bierens, H. J. (1997): Testing the unit root with drift hypothesis against nonlinear trend stationarity, with an application to the US price level and interest rate. *Journal of Econometrics*, 81, 29-64.
- [19] Bierens, H. J. (2000): Nonparametric nonlinear cotrending analysis, with an application to interest and inflation in the United States. *Journal of Business and Economics Statistics*, Vol. 18, 3, 323-337.
- [20] Bierens, H. J. y Guo, S. (1993): Testing stationarity and trend stationarity against the unit root hypothesis. *Econometric Reviews*, 12, 1-32.
- [21] Blanchard, O. J. y Watson, M. W. (1986): Are business cycles all alike? En Gordon, R. (Ed.). *The American business cycle: continuity and change*. University of Chicago Press, Chicago, 123-156.

- [22] Bonham, C. S. (1991): Correct cointegration tests of the long-run relationship between nominal interest and inflation. *Applied Economics*, 23, 1487-1492.
- [23] Cagan, P. (1980): Comment. En S. Fisher (Ed.), *Rational Expectations and Economic Policy*, 156-160. Chicago: University of Chicago Press.
- [24] Canto, V. A., Nickelsburg, G. y Rizos, P. (1987): The effect of fiscal policy on the short-run relation between nominal interest rates and inflation. *Economic Inquiry*, enero, 27-42.
- [25] Carmichael, J. y Stebbing, P. W. (1983): Fisher's paradox and the theory of interest. *American Economic Review*, Vol. 73, 2, 619-630.
- [26] Chapman, D. A. y Ogaki, M. (1993): Cotrending and the stationarity of the real interest rate. *Economics Letters*, 42, 133-138.
- [27] Chouldhry, T., Placone, D., y Wallace, M. (1991): Changes in the Fisher effect in the 1980's: Evidence from various models. *Journal of Economics and Business. Temple University*, 43, 59-68.
- [28] Christiano, L. J., Eichenbaum, M. (1992): Liquidity effects, monetary policy and the business cycle. NBER Working paper, 4129.
- [29] Christiano, L. J., Eichenbaum, M. y Evans C. (1994): The effects of monetary policy shocks: evidence from the flow of funds. *Research Department Federal Reserve Bank of Chicago*.

Bibliografía

- [30] Chung, C. F. y Baillie, R. T. (1993): Small sample bias in conditional sum-of-squares estimators of fractionally ARMA models. *Empirical Economics*, 45, 293-297.
- [31] Clarida, R. H. y Friedman, B. M. (1984): The behavior of US short term interest rates since October 1979. *Journal of Finance*, 39, 671-682.
- [32] Cochrane, J. (1991): Comment. En O. Blanchard y S. Fischer (Eds.), *NBER Macroeconomics Annual 1991*, 201-210. Cambridge, MA: MIT Press.
- [33] Coppock, L. y Poitras, M. (2000): Evaluating the Fisher effect in long-term cross-country averages, *International Review of Economics and Finance*, 9, 181-192.
- [34] Crockett, J. A. (1998): Rational expectations, inflation and the nominal interest rate, *Journal of Econometrics*, 83, 349-363.
- [35] Crowder, W. y Hoffman, D. (1996): The long-run relationship between nominal interest rates and inflation: the Fisher equation revisited. *Journal of Money, Credit and Banking*, 28, 102-118.
- [36] Cushman, D. O. (2000): Nonlinear trends and co-trending in Canadian money demand. Mimeo. Department of Economics. University of Saskatchewan, Canada.
- [37] Cushman, D. O. y Zha, T. (1997): Identifying monetary policy in a small open economy under flexible exchange rates. *Journal of monetary economics*, 39, 433-448.

- [38] Cuthbertson, K., Hall, S. C. y Taylor, M. P. (1992): *Applied Econometric Techniques*. Philip Allan, New York.
- [39] Cumby, R. E., Huizinga, J. y Obstfeld (1983): Two-step two-stage least squares estimation in models with rational expectations. *Journal of Econometrics*, 21, 333-355.
- [40] Daniels, J. P., Nourzad, F. y Toutkoshian, R. K. (1996): Testing the Fisher effect as a long-run equilibrium relation. *Applied Financial Economics*, 6, 115-120.
- [41] Darby, M. R. (1975): The financial and tax effects of monetary policy on interest rates. *Economic Inquiry*, 13, 266-276.
- [42] Dickey, D. A. (1976): Estimation and hypothesis testing in nonstationary time series, Ph.D. Dissertation (Iowa State University, Ames, IA).
- [43] Dickey, D. A. y Fuller, W. A. (1979): Distribution of the estimators for autoregressive times series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.
- [44] Dickey, D. A. y Fuller, W. A. (1981): Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49, 1057-1072.
- [45] Doornik, J. A. (1998): Object-oriented matrix programming using Ox 2.0, London: Timberlake Consultants Ltd and Oxford: www.nuff.ox.ac.uk/Users/Doornik.

Bibliografía

- [46] Duck, N. (1993): Some international evidence on the quantity theory of money. *Journal of Money, Credit and Banking*, 25, 1-12.
- [47] Dutt, S. D. y Ghosh, D. (1995): The Fisher hypothesis: Examining the Canadian Experience. *Applied Economics*, 27, 1025-1030.
- [48] Dwyer, G. P. (1981): Are expectations of inflation rational? *Journal of Monetary Economics*, 8, 59-84.
- [49] Eichenbaum, M. (1992): Comment on interpreting the macroeconomic time series facts: The effects of monetary policy. *European Economic Review*, 36, 1001-1011.
- [50] Engle, R. F. y Granger C. W. J. (1987): Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica*, 55, 251-276.
- [51] Engle, R. F. y Kozicki, S. (1993): Testing for common features, *Journal of Business and Economics Statistics*, 11, 369-386.
- [52] Engsted, T. (1995): Does the long-term interest rate predict future inflation? *Review of Economics and Statistics*, 77, 42-54.
- [53] Evans, M. D. D. y Lewis, K. K. (1992): Do expected shifts in inflation policy affect real rates? NBER Working paper, 4134.
- [54] Evans, L. T., Keef, S. P. y Okunev, J. (1994): Modelling real interest rates. *Journal of Banking and Finance*, 18, 153-165.

- [55] Evans, M. D. D. y Lewis, K. K. (1995): Do expected shifts in inflation affect estimates of the long-run Fisher relation? *Journal of Finance*, 50, 225-253.
- [56] Fama, E. F. (1975): Short term interest rates as predictors of inflation. *American Economic Review*, 65, 269-282.
- [57] Fama, E. F. y Schwert, W. G. (1977): Asset returns and inflation. *Journal of Financial Economics*, 4, 115-146.
- [58] Fama, E. F. y Gibbons, M. R. (1982): Inflation, real returns and capital investment. *Journal of Monetary Economics*, 9, 297-324.
- [59] Feldstein, M. S. (1976): Inflation, income taxes, and the rate of interest: a theoretical analysis. *American Economic Review*, 66, 809-820.
- [60] Feldstein, M. S. (1982): Inflation, tax rules and investment: some econometric evidence. *Econometrica*, 50, 825-862.
- [61] Ferrer, R. (1998): Evidencia empírica de la hipótesis de Fisher en el mercado español. *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, Vol. 7, 1, 135-148.
- [62] Findlay, D. W. (1991): Budget deficits, short-term real interest rates and the specification of expected inflation: an empirical investigation. *Applied Economics*, 23, 1147-1158.
- [63] Fisher, I. (1896): Appreciation and interest, *AEA Publications*, 3 (11), 331-442.

Bibliografía

- [64] Fisher, I. (1930): *The theory of interest*. New York.
- [65] Fried, J. y Howitt, P. (1983): The effects of inflation on real interest rates. *American Economic Review*, 73, 968-979.
- [66] Friedman, M. y Schwartz, A. (1982): *Monetary trends in the United States and the United Kingdom*. Chicago: University of Chicago Press.
- [67] Fuller, W. A. (1976): *Introduction to statistical time series*. Ed. Wiley, New York, NY.
- [68] Gandolfi, A. E. (1976): Taxation and the Fisher effect. *The Journal of Finance*, 31, 1375-1386.
- [69] García, R. y Perron, P. (1991): An analysis of the real interest rate under regime shifts. Manuscript (Princeton University).
- [70] García, R. y Perron, P. (1996): An analysis of the real interest rate under regime shifts. *Review of Economics and Statistics*, 78, 111-125.
- [71] Gordon, D. B. y Leeper, E. M. (1994): The dynamic impacts of monetary policy: an exercise in tentative identification. *Journal of Political Economy*, 102, 1228-1247.
- [72] Graham, F. (1988): The Fisher hypothesis: A critique of recent results and some new evidence. *Southern Economic Journal*, 54, 961-968.
- [73] Granger, C. W. J. (1980): Long memory relationships and the aggregation of dynamic models. *Journal of Econometrics*, 14, 227-238.

- [74] Granger, C. W. J. (1981): Some properties of time series data and their use in econometric model specification. *Journal of Econometrics*, 16, 121-130.
- [75] Granger, C. W. J. y Newbold, P. (1974): Spurious regression in econometrics. *Journal of Econometrics*, 2, 111-120.
- [76] Granger, C. W. J. y Joyeux, R. (1980): An introduction to long-memory time series models and fractionally differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1, 15-29.
- [77] Groenewold, N. (1989): The adjustment of the real interest rate to inflation. *Applied Economics*, 21, 947-956.
- [78] Hamilton, J. D. (1994): *Time series analysis*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey.
- [79] Hamming, R. W. (1973): *Numerical methods fo scientists and engineers*, New York: Dover Publications.
- [80] Hassler, U. y Wolters, J. (1995): Long memory of inflation rates: International evidence. *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, 37-45.
- [81] Hosking, J. R. M. (1981): Fractional differencing. *Biometrika*, 68, 165-176.
- [82] Howitt, P. (1992): Fisher effect. *New Palgrave Dictionary of Money and Finance*, London: Macmillan.

Bibliografía

- [83] Honohan, P. (1985): Fisher's paradox: comment. *American Economic Review*, 75, 567-568.
- [84] Huizinga, J. y Mishkin, F. S. (1984): Inflation and real interest rates on assets with different risk characteristics. *Journal of Finance*, 39, 699-712.
- [85] Huizinga, J. y Mishkin, F. S. (1986): Monetary policy regime shifts and the unusual behavior of real interest rates. *Carnegie-Rochester Conference on Public Policy*, 24, 231-274.
- [86] Johansen, S. (1988): Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231-254.
- [87] Johansen, S. (1991): Estimation and hypothesis testing of cointegrating vectors in gaussian vector autoregressive models. *Econometrica*, 59, 1551-1580.
- [88] Johansen, S. y Juselius, K. (1990): Maximum likelihood estimation and inference on cointegration, with applications to the demand for money. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52, 169-210.
- [89] Johansen, S. y Juselius, K. (1992): Testing structural hypotheses in a multivariate cointegration analysis of the PPP and the UIP for UK. *Journal of Econometrics*, 53, 211-244.
- [90] Kandel, S., Ofer, A. R. y Sari, O. (1996): Real interest rates and inflation: An ex ante empirical analysis. *Journal of Finance*, 51, 205-225.

- [91] Kim, S. y Roubini, N. (1995): Liquidity and exchange rates in the G-7 countries: evidence from identified VAR's. Working Paper, Yale University, New Haven, CT.
- [92] Kinal, T. y Lahiri, K. (1988): A model for ex-ante real interest rates and derived inflation forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 83, 665-673.
- [93] King, R. G. y Watson, M. W. (1997): Testing long-run neutrality. *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*, 83, 69-101.
- [94] Koustas, Z. y Serletis, A. (1999): On the Fisher effect. *Journal of Monetary Economics*, 44, 105-130.
- [95] Krasker, W. y Welsch, R. (1982): Efficient bounded-influence regression estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 77, 595-604.
- [96] Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P. y Shin, S. (1992): Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.
- [97] Laidler, D. (1991): The golden age of the quantity theory. Hemel Hempstead: Phillip Allan.
- [98] Lahiri, K. y Zaporowski, M. (1988): A comparison of alternative real rate estimates. *Oxford University Bulletin of Economics and Statistics*, 50, 303-313.

Bibliografía

- [99] Lee, D., Schmidt, P. (1996): On the power of the KPSS test of stationarity against fractionally-integrated alternatives. *Journal of Econometrics*, 73, 285-302.
- [100] Lee, J., Clark, C. y Ahn, S. K. (1998): Long- and short-run Fisher effects: new tests and new results. *Applied Economics*, 30, 113-124.
- [101] Levi, M. D. y Makin, J. H. (1978): Anticipated inflation and interest rates: Further interpretation of findings on the Fisher equation. *American Economic Review*, 68, 801-812.
- [102] Litterman, R. B. y Weiss, L. (1985): Money, real interest rates, and output: A reinterpretation of postwar U.S. data. *Econometrica*, 53, 129-156.
- [103] Lucas, R. (1978): Asset prices in an exchange economy. *Econometrica*, 46, 1429-1445.
- [104] Lucas, R. E., Jr. (1980): Two illustrations of the quantity theory of money. *American Economic Review*, 70, 1005-1014.
- [105] MacDonald, R. y Murphy, P. D. (1989): Testing for the long-run relationship between interest rates and inflation using cointegration techniques. *Applied Economics*, 21, 439-447.
- [106] Malliaropoulos, D. (2000): A note on nonstationarity, structural breaks, and the Fisher effect. *Journal of Banking and Finance*, 24, 695-707.

- [107] Mankiw, N. G. (1987): The optimal collection of seigniorage: theory and evidence. *Journal of Monetary Economics*, 20, 337-342.
- [108] Marshall, A. (1895): *Principles of Economics*. 3^aEd. London: Macmillan.
- [109] McAleer, M., y McKenzie, C. R. (1991): When are two step estimators efficient? *Econometric Reviews*, 10, 235-252.
- [110] McCallum, B. T. (1983): A reconsideration of Sims' evidence regarding monetarism. *Economics Letters*, Vol. 13, 2-3, 167-171.
- [111] Mishkin, F. S. (1981): The real rate of interest: An empirical investigation. The cost and consequences of inflation. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 15, 151-200.
- [112] Mishkin, F. S. (1984): The real interest rate: A multy-country empirical study. *Canadian Journal of Economics*, VII, 283-311.
- [113] Mishkin, F. S. (1990): What does the term structure of interest rates tell us about future inflation? *Journal of Monetary Economics*, 25, 77-95.
- [114] Mishkin, F. S. (1992): Is the Fisher effect for real? A reexamination of the relationship between inflation and interest rates. *Journal of Monetary Economics*, 30, 195-215.
- [115] Mitchell, D. W. (1985): Expected inflation and interst rates in a multi-asset model: A note. *Journal of Finance*, 40, 595-599.

Bibliografía

- [116] Modigliani, F. y Cohn, R. (1979): Inflation, rational valuation, and the market. *Financial Analysts Journal*, 35, 24-44.
- [117] Mundell, R. (1963): Inflation and real interest. *Journal of Political Economy*, 71, 280-283.
- [118] Nelson, C. R. y Schwert, G. W. (1977): Short-term interest rates as predictors of inflation: On testing the hypothesis that the real rate of interest is constant. *American Economic Review*, Vol. 67, 3, 478-486
- [119] Nelson, C. R. y Plosser, C. I. (1982): Trends and random walks in macroeconomics time series. *Journal of Monetary Economics*, 10, 129-162.
- [120] Newey, W. K. y West, K. D. (1987): A simple positive definite heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55, 703-708.
- [121] Ng, S. y Perron, P. (1995): Unit root tests in ARMA models with data-dependent methods for the selection of the truncation lag. *Journal of the American Statistical Association*, 90, 268-281.
- [122] Nievas, J. (1994): *El Efecto Fisher: Análisis teórico y propuesta de un marco general para su contraste*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.
- [123] Ouliaris, S., Park, J. Y. y Phillips, P. C. B. (1989): "Testing for a unit root in the presence of a maintained trend". In Ray, B. (Ed.), *Avances in Econometrics and Modelling*. Kluwer, Dordrecht, 6-28.

- [124] Owen, P. D. (1993): Cointegration analysis of the Fisher hypothesis: the role of the real rate and the Fisher identity. *Applied Financial Economics*, 3, 21-26.
- [125] Pagan, A. (1984): Econometric issues in the analysis regressions with generated regressors. *International Economic Review*, 25, 221-247.
- [126] Park, J. Y. y Choi, B. (1988): A new approach to testing for a unit root. Working paper, 88-23 (Center for Analytical Economics, Cornell University, Ithaca, NY).
- [127] Peek, J. (1982): Interest rates, income taxes, and anticipated inflation. *American Economic Review*, 72, 980-991.
- [128] Peek, J. y Wilcox, J. A. (1983): The postwar stability of the Fisher effect. *Journal of Finance*, 38, 1111-1124.
- [129] Peek, J. y Wilcox, J. A. (1984): The degree of fiscal illusion in interest rates: some direct estimates. *American Economic Review*, 74, 1061-1066.
- [130] Pelaéz, R. (1995): The Fisher effect: reprise. *Journal of Macroeconomics*, 17, 333-346.
- [131] Pérez, J. V. y Sáez, M. (1992): Cointegración y efecto Fisher para el caso español. *Cuadernos de Economía*, 20, 345-360.
- [132] Perron, P. (1988): Trends and random walks in macroeconomic time series: Further evidence from a new approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 297-332.

Bibliografía

- [133] Perron, P. (1989): The great crash, the oil price shock and the unit root hypothesis. *Econometrica*, 57, 1361-1402.
- [134] Perron, P. (1990): Testing the unit root in a time series with a changing mean. *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 153-162.
- [135] Perron, P. (1994): Trend, unit root and structural change in macroeconomic time series. En B. B. Rap (ed.), "Cointegration for the applied economists". MacMillan Press, Basingstoke, 113-146.
- [136] Perron, P. (1997): Further evidence on breaking trend functions in macroeconomic variables. *Journal of Econometrics*, 80, 355-385.
- [137] Perron, P. y Vogelsang, T. J. (1992): Nonstationarity and level shifts with an application to purchasing power parity. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10(3), 301-320.
- [138] Pesaran, M. H. (1987): *The limits to rational expectations*. Basil Blackwell Ltd. Oxford, UK.
- [139] Phillips, P. C. B. (1986): Understanding spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*, 33, 311-340.
- [140] Phillips, P. C. B. (1987): Time series regression with a unit root. *Econometrica*, 55, 277-301.
- [141] Phillips, P. C. B. (1998): Econometric analysis of Fisher's equation. Working paper. Yale University.

- [142] Phillips, P. C. B. y Perron, P. (1988): Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 75, 335-346.
- [143] Phylaktis, K. y Blake, D. (1993): Testing for unit roots in autoregressive moving average models with unknown order. *Biometrika*, 71, 599-607.
- [144] Racette, D. y Raynauld, J. (1992): Canadian monetary policy: will the checklist approach ever get us to price stability? *Canadian Journal of Economics*, 25, 819-838.
- [145] Reinsel, G. C. y Ahn, S. K. (1992): Likelihood ratio test for unit roots and forecasting properties in the nonstationary vector AR model. *Journal of Time Serie Analysis*, 13, 353-375.
- [146] Rico, P. (2001): El efecto Fisher y la paridad de interés real. Evidencia para la economía española. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Vol. 30, 109, p. 691-722.
- [147] Roley, V. V. (1986): The response of interest rates to money announcement under alternative operating procedures and reserve retirement system. Working paper, 1812, National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA.
- [148] Rose, A. K. (1988): Is the real interest rate stable? *Journal of Finance*, 43, 1095-1112.

Bibliografía

- [149] Said, S. E. y Dickey, D. A. (1984): Testing for unit roots in autoregressive-moving average of unknown order. *Biometrika*, 71, 599-607.
- [150] Saracoglu, R. (1984): Expectations of inflation and interest rate determination. *IMF Staff Papers*, 31, 141-178.
- [151] Sargent, T. J. (1973): Rational expectations, the real rate of interest and the natural rate of unemployment. En *Rational Expectations and Econometric Practice*. Ed. por R. E. Lucas y T. J. Sargent. George Allen and Unwin, 1981.
- [152] Schwert, G. W. (1979): Tests of causality: The message in the innovations, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 10, 55-95.
- [153] Schwert, G. W. (1987): Effects of model specification on tests for unit root in macroeconomic data. *Journal of Monetary Economics*, 20, 73-103.
- [154] Sheehan, R. G. (1996): Adaptive versus rational expectations and the Fisher effect. *Applied Economics*, 28, 1-11.
- [155] Sims, C. A. (1980): Comparison of interwar and postwar business cycles: Monetarism reconsidered. *American Economic Review*, May 1980 (*Papers and Proceedings*), 70, 250-257.
- [156] Sims, C. A. (1986): Are forecasting models usable for policy analysis? Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, Winter.

- [157] Sims, C. A. (1992): Interpreting the macroeconomic time series facts: The effects of monetary policy. *European Economic Review*, 36: 975-1011.
- [158] Sims, C. A. y Zha, T. (1995): Does monetary policy generate recessions? Working paper, Yale University, New Haven, CT.
- [159] Snow, A. y Warren, R. (1986): Price level uncertainty, saving, and labor supply. *Economic Inquiry*, 24, 97-106.
- [160] Strauss, J. y Terrell, D. (1995): Cointegration tests of the Fisher hypothesis with variable trends in the world real interest rate. *Southern Economic Journal*, 61, 1047-1056.
- [161] Stulz, R. (1986): Interest rates and monetary policy uncertainty. *Journal of Monetary Economics*, 17, 331-347.
- [162] Summers, L. H. (1983): The non-adjustment of nominal interest rates: A study of the Fisher effect. En James Tobin (ed.) *A Symposium in Honor of Arthur Okun*. Brookings Institution: Washington.
- [163] Tanzi, V. (1976): Inflation, indexation and interest income taxation. *Banca Nazionale del Lavoro, Quarterly Review*, 116, 64-76.
- [164] Thoma, M. A. (1992): Some international evidence on the exogeneity of the ex-ante real rate of interest and the rationality of expectations. *Journal of Macroeconomics*, 15, 33-45.
- [165] Tsay, W. (2000): Long memory story of the real interest rate. *Economics Letters*, 67, 325-330.

Bibliografía

- [166] Vahid, F. y Engle, R. F. (1993): Common trends and common cycles. *Journal of Applied Econometrics*, 8, 341-360.
- [167] Verbrugge, R.J. (1998): A Cross Country Investigation of Macroeconomic Asymmetries. Manuscrito. Virginia Polytechnic Institute and State University.
- [168] Viren, M. (1987): Inflation, hedding and the Fisher hypothesis. *Journal of Macroeconomics*, 9, 45-57.
- [169] Viren, M. (1989): The long-run relationship between interest rates and inflation. *Journal of Banking and Finance*, 13, 571-585.
- [170] Vogelsang, T. J. y Perron, P. (1998): Additional tests for a unit root allowing for a break in the trend function at an unknown time. *International Economic Review*, vol. 39(4), 1073-1100.
- [171] Wallace, M. S. y Warner, J. T. (1993): The Fisher effect and the term structure of interest rates: Tests of cointegration. *Review of Economics and Statistics*, 75, 320-324.
- [172] Walsh, C. E. (1987): Three questions concerning nominal and real interest rates. *Economic Review*, 4, 5-20. Federal Reserve Bank of San Francisco.
- [173] Welsch, R. (1980): Regression sensitivity analysis and bounded influence estimation. En J. Kmenta y J. Ramsay (Eds.), *Evaluation of Econometric Models*, 153-167. New York: Academic Press.

- [174] Wicksell, K. (1907): The influence of the rate of interest on prices. *Economic Journal*, 17, 213-220.
- [175] Wilcox, J. A. (1983a): The missing effect on nominal interest rates in the 1950's. *Review of Economics and Statistics*, 65, 644-647.
- [176] Wilcox, J. A. (1983b): Why real interest rates were so low in the 1970's? *American Economic Review*, 73, 44-53.
- [177] Wilcox, J. A. (1983c): The effects of inflation uncertainty and supply shocks on real interest rates. *Economics Letters*, 12, 163-167.
- [178] Yap, S. F. y Reinsel, G. C. (1995): Estimation and testing for unit roots in a partially nonstationary vector autoregressive moving average model. *Journal of the American Statistical Association*, 90, 253-267.
- [179] Zivot, D. y Andrews, D. W. K. (1992): Further evidence on the great crash, the oil-price shock and the unit-root hypothesis. *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 10, 3, 251-270.

Bibliografía

257

259

Bibliografía

CAPÍTULO 3

Test de Cointegración CBB

3.1 Introducción

A partir de los trabajos de Granger (1983) y Engle y Granger (1987), el concepto de cointegración ha sido ampliamente utilizado en el análisis empírico orientado a la búsqueda de relaciones de equilibrio, o de largo plazo, entre variables integradas. De manera resumida, decimos que dos variables integradas de orden unitario, $I(1)$, y_t y x_t , están cointegradas si existe una combinación lineal entre ellas que es estacionaria. En este caso, el término de perturbación aleatoria (u_t) es un proceso $I(0)$ en el siguiente modelo:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t$$

La literatura relativa a los tests de cointegración es muy amplia. Así, existen tests que contrastan la existencia de relaciones de cointegración (Park, 1990, 1992; Phillips y Hansen, 1990), contrastes que contrastan la ausencia de cointegración (Engle y Granger, 1987; Phillips y Ouliaris, 1990), contrastes de cointegración basados en Modelos de Corrección de Error (MCE) introducidos por Hendry (1987), contrastes basados en tests de Wald (Boswijk, 1994), contrastes para detectar el número de raíces unitarias aplicados al término de perturbación aleatoria (Johansen, 1988; Stock y Watson, 1988; Saikonen, 1992) y contrastes de hipótesis relativas al vector de cointegración (Saikonen, 1992; Johansen, 1995; Elliot, 1998, entre otros;

ver Watson, 1994, para una revisión sobre estos contrastes). Sin embargo, no existe consenso en relación a cuál es el "mejor" test de cointegración.

En el presente Capítulo, proponemos un procedimiento para contrastar la hipótesis nula (H_0) de no cointegración entre dos variables, basándonos en un contraste de raíces unitarias aplicado a los residuos de la regresión de cointegración, utilizando el procedimiento *continuous path block bootstrap* (CBB) de Paparoditis y Politis (2001). Este procedimiento no paramétrico permite generar pseudo-series integradas de orden unitario manteniendo las características más importantes de los datos. Por tanto, el CBB puede captar la distribución de algunos estadísticos de raíces unitarias y, por ende, puede ser utilizado para detectar si el término de perturbación aleatoria de la regresión de cointegración es $I(1)$ o $I(0)$, o lo que es lo mismo, permite detectar la presencia de un vector de cointegración entre dos series temporales. Asimismo, a través de experimentos de Monte Carlo analizamos las propiedades de potencia y tamaño del test de cointegración CBB que desarrollamos en el presente Capítulo y las comparamos con las de otros tests, como el test Dickey-Fuller Ampliado (DFA), de Said y Dickey (1984), y el test del máximo autovalor ($\lambda_{m\acute{a}x}$) de Johansen (1988, 1991) y Johansen y Juselius (1990, 1992). Nuestro estudio de simulación muestra que este nuevo procedimiento tiene buenas propiedades y que se comporta siempre mejor que el test DFA. Además, realizamos una aplicación empírica del nuevo contraste que proponemos al tipo de interés nominal y a la tasa de inflación de Alemania, España, Francia y Reino Unido, con el fin de tratar de determinar la posible existencia de una relación de equilibrio entre am-

3.1. Introducción

bas variables, es decir, para poder discernir si se cumple o no el denominado efecto Fisher en estos países¹.

La segunda Sección del presente Capítulo está orientada a una exposición sobre la problemática existente a la hora de elaborar tests de cointegración basados en el procedimiento bootstrap. En la tercera Sección realizamos una breve recopilación de los estudios más utilizados en los trabajos empíricos, basados en procedimientos bootstrap, que permiten determinar el rango del vector de cointegración cuando se utilizan muestras con un número reducido de observaciones. La Sección cuarta muestra el algoritmo que proponemos para contrastar el rango del vector de cointegración, basado en el test de raíces unitarias CBB de Paparoditis y Politis (2001). En la Sección quinta exponemos las propiedades de tamaño y potencia de nuestro test y las comparamos con las de los tests DFA y $\lambda_{máx}$ de Johansen. La Sección sexta muestra una aplicación empírica del procedimiento que desarrollamos para determinar la posible existencia de una relación de cointegración entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en Alemania, España, Francia y Reino Unido. Finalmente, la sección séptima recoge las conclusiones.

¹Un estudio más detallado sobre el efecto Fisher se realiza en la Sección 2 del Capítulo 2.

3.2 Problemática en torno al procedimiento bootstrap para tests de cointegración

El método bootstrap fue inicialmente propuesto por Efron (1979). Originalmente, el procedimiento de remuestreo por bootstrap se diseñó bajo el supuesto de términos de perturbación independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.). Sin embargo, tal y como señalan Hinkley (1988) y Jeong y Maddala (1993), entre otros, en la mayor parte de las aplicaciones econométricas, la estructura del término de perturbación aleatoria es, en general, más compleja que la i.i.d. y, por consiguiente, es necesario tener en cuenta otras técnicas bootstrap más sofisticadas. La posible autocorrelación en el término de perturbación aleatoria, así como la existencia de variables retardadas dependientes en los modelos, generan problemas en la elaboración de pseudo-datos. También añaden problemas la presencia de raíces unitarias en las series y los modelos con regresiones de cointegración. Nosotros centramos parte de nuestro estudio precisamente en los métodos bootstrap que han surgido para detectar el número de vectores de cointegración, cuando el tamaño muestral es pequeño. Sin embargo, es necesario tener en cuenta previamente algunos de los problemas que se plantean cuando se trabaja con modelos que presentan relaciones de cointegración.

Según Li y Maddala (1997), los problemas principales que surgen cuando se intenta estimar una regresión de cointegración son los siguientes:

- (i) La elección de un método de estimación.

3.2. Problemática en torno al procedimiento bootstrap para tests de cointegración

(ii) La elección del procedimiento apropiado para realizar inferencia.

Respondiendo al primero de los problemas, existen varios estudios de Monte Carlo que comparan diferentes métodos de estimación para sistemas cointegrados, como por ejemplo: Banerjee *et al.* (1986), Phillips y Loretan (1991), Inder (1993), Gonzalo (1994), Hargreaves (1994) y Li y Maddala (1995). Estos trabajos no encuentran que exista algún método, en particular, que sea superior a los demás. Ello es debido, entre otros factores, a que muchos métodos de estimación no son del todo comparables, al basarse en diferentes procesos generadores de datos (p.g.d.) y al mostrar enormes diferencias en los ratios señal/ruido. Por tanto, continúa siendo complicado responder a la primera cuestión.

Respondiendo a la segunda cuestión, es necesario tener en cuenta que la mayoría de los procedimientos estándar de inferencia utilizan tests de significatividad que se basan en la teoría asintótica. Sin embargo, la inferencia basada en distribuciones asintóticas tiene dos importantes inconvenientes cuando se utilizan muestras pequeñas:

- (a) Los estimadores, aunque pueden ser consistentes e incluso superconsistentes, presentan un sesgo sustancial.
- (b) Los tests de significatividad basados en distribuciones asintóticas tienen grandes distorsiones de tamaño.

Li y Maddala (1997) obtienen que la elevada distorsión de tamaño que tienen los contrastes de significatividad asintóticos cuando se trabaja con

muestras de tamaño reducido, se corrige cuando se utilizan procedimientos bootstrap. Además, esta mejora en las propiedades de tamaño del test, al utilizar este tipo de procedimientos, es muy elevada en relación con la pequeña pérdida de potencia que se produce al aplicar el método bootstrap en lugar del asintótico.

Hinkley (1997) añade al respecto que existen dos métodos para realizar contrastes de significatividad mediante el uso de métodos bootstrap: directamente y a través de intervalos de confianza. Según este autor, si se utilizan tests de significatividad sobre parámetros, tales como los coeficientes del vector de cointegración, se utilizaría el procedimiento de intervalos de confianza, existiendo un gran número de procedimientos bootstrap basados en intervalos de confianza². Pero para realizar contrastes más generales, se debe utilizar el procedimiento directo. Dado que este procedimiento implica tener en cuenta propiedades muestrales bajo la H_0 , los datos simulados se tienen que generar bajo un modelo que satisfaga esta hipótesis. Dado un estadístico r , las opciones que señala Hinkley (1997) para llevar a cabo el método directo, que son similares a las que existen para el método basado en intervalos de confianza, son las siguientes:

- Contrastar r , frente a su distribución bajo la H_0 .
- Contrastar r estudentizado, frente a su distribución bajo la H_0 .
- Contrastar r estudentizado y transformado, frente a su distribución bajo la H_0 .

²Ver por ejemplo Li (1994).

3.2. Problemática en torno al procedimiento bootstrap para tests de cointegración

- Ajustar mediante bootstrap el estadístico r frente a su distribución bajo la H_0 , es decir, aplicar un doble proceso bootstrap a r .

Según Hinkley (1997), la primera de las opciones es, en teoría, inferior, en el sentido de que el tamaño real del test difiere de su tamaño nominal en $O(T^{-1/2})$, mientras que la divergencia entre el tamaño real y el nominal del test, para el resto de las opciones, es $O(T^{-1})$. Algunas veces el fenómeno de estudentizar un estadístico en muestras pequeñas es inestable, ya que la varianza estimada es inestable. La última opción, según este autor requiere, en principio, un proceso de cálculo laborioso. Sin embargo, para estadísticos lineales, los enfoques teóricos pueden hacer que este procedimiento de cálculo sea rápido, e incluso se pueden diseñar procedimientos de Monte Carlo que reduzcan este proceso.

Algunos de los principales métodos de cointegración basados en el procedimiento bootstrap más utilizados en la literatura, hasta la fecha, son los siguientes:

- Procedimiento bootstrap ordinario o estándar: Este método parte de una muestra aleatoria (y_1, y_2, \dots, y_T) obtenida a partir de una distribución caracterizada por un parámetro θ . La inferencia acerca de θ se basa en un estadístico Ξ , de manera que este procedimiento consiste en extraer muestras repetidas con reemplazamiento de tamaño T' , que puede ser distinto de T , denotando a cada una de estas muestras así: $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_{T'}^*)$. Este procedimiento se repite un número elevado de veces B y para cada muestra bootstrap se calcula el estadístico Ξ , al que denominamos Ξ^* . La distribu-

ción de Ξ^* , basada en B muestras bootstrap, se conoce como distribución de Ξ y es la que se utiliza para hacer inferencia acerca de θ . Existen algunos estudios que aplican este procedimiento a las regresiones de cointegración, como por ejemplo Shea (1989a,b). Sin embargo, estos trabajos se basan en el supuesto de perturbaciones aleatorias i.i.d., el cual es muy restrictivo cuando la mayor parte de los métodos para estimar regresiones de cointegración se han diseñado precisamente para resolver los problemas de autocorrelación en las perturbaciones aleatorias y de endogeneidad de los regresores.

- Procedimiento bootstrap recursivo: Este procedimiento, introducido por Freedman y Peters (1984), se usa, especialmente, cuando se trabaja con variables dependientes retardadas y perturbaciones aleatorias con problemas de autocorrelación, si el término de perturbación aleatoria tiene una estructura bien especificada, es decir, se parte de un modelo ARMA (p, q) estacionario con órdenes de retardos p y q conocidos. Este método también es utilizado por Efron y Tibshirani (1986), aunque aplicado a modelos AR(1) y AR(2). A través del método bootstrap recursivo se estima un modelo por MCO, o por otro método de estimación consistente, se obtienen los residuos y, después de reescalarlos y centrarlos, se elaboran nuevas muestras a partir de ellos. Con estas muestras de residuos se generan otras bootstrap de manera recursiva. Así por ejemplo, en el caso de un modelo de regresión con perturbaciones AR(1), tal como,

3.2. Problemática en torno al procedimiento bootstrap para tests de cointegración

$$\begin{aligned}y_t &= \beta x_t + u_t, \\u_t &= \rho u_{t-1} + e_t,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $e_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$, se estima la ecuación (3.1) por MCO y utilizando los residuos de la regresión \hat{u}_t , se estima $\hat{\rho}$ a través de los procedimientos Cochrane-Orcutt o Prais-Winsten y obtenemos \hat{e}_t . Tras obtener muestras a partir de \hat{e}_t y mediante un procedimiento recursivo se genera \hat{u}_t y la muestra bootstrap basada en y_t . Rayner (1991) utiliza este procedimiento con algunos resultados importantes en lo que se refiere a la corrección del tamaño del test. Li y Maddala (1997), a través de experimentos de Monte Carlo, obtienen que este test corrige la elevada distorsión de tamaño que presentan los estudios basados en la inferencia asintótica cuando se trabaja con muestras pequeñas, con apenas una pequeña pérdida de potencia.

- Procedimiento bootstrap con bloques de datos de tamaño fijo: Cuando no se conoce la estructura de correlación de las series o ésta se especifica erróneamente, un procedimiento basado en los residuos da lugar a estimadores inconsistentes. Por tanto, surge otro enfoque que no requiere ajustar los datos a una forma paramétrica determinada y que utiliza bloques de datos de series temporales. Carlstein (1986) fue el primero en considerar la idea de generar bloques bootstrap de observaciones, en lugar de utilizar observaciones individuales. Estos bloques, para Carlstein (1986), no pueden solaparse. Sin embargo, más tarde, Künsch (1989) y Liu y Singh (1992), de manera independiente, introducen un procedimiento bootstrap más general

basado en bloques de datos, al que denominan "bloque bootstrap móvil". Este procedimiento se puede aplicar a series temporales estacionarias y se diferencia del anterior en que sí permite que los bloques de observaciones se solapen.

Los métodos de Carlstein (1986) y Künsch (1989) dividen las T observaciones, que conforman una serie, en bloques de tamaño l y seleccionan b bloques, que pueden ser repetidos, obteniendo muestras a partir de todos los posibles bloques. Según Li y Maddala (1997), si suponemos por simplicidad: $T = bl$, a través del procedimiento de Carlstein (1986) se obtendrían b bloques, mientras que a través del procedimiento de Künsch (1989) se obtendría un número mayor de bloques, en concreto, $T - l + 1$ bloques. Por tanto, Li y Maddala (1997) señalan que la probabilidad de cometer un error es más elevada utilizando el esquema de Carlstein (1986). Los procedimientos bootstrap basados en bloques son muy utilizados en la estimación de medias y varianzas muestrales, aunque Liu y Singh (1992) también los aplican a estadísticos más generales y Künsch (1989) los utiliza para modelos AR(1) y MA(1).

- Procedimiento bootstrap estacionario: Debido a que el procedimiento bootstrap basado en bloques móviles da lugar a pseudo-series no estacionarias, aunque las series originales lo sean, Politis y Romano (1994) sugieren el método bootstrap estacionario. Los pasos a seguir para aplicar este procedimiento son los mismos que los del bootstrap con bloques móviles. Sin embargo, existe una diferencia fundamental entre estos dos esquemas: el procedimiento bootstrap estacionario obtiene muestras a través de bloques

3.2. Problemática en torno al procedimiento bootstrap para tests de cointegración

de datos que tienen un tamaño aleatorio³, mientras que el procedimiento bootstrap de bloques móviles genera muestras mediante bloques de datos del mismo tamaño⁴.

A través de los experimentos de Monte Carlo que realizan Li y Maddala (1997), donde comparan el comportamiento de los procedimientos bootstrap anteriores, se obtiene que, si la estructura de correlación serial está mal especificada en el modelo y el tamaño muestral es pequeño, es el procedimiento bootstrap recursivo el que proporciona peores resultados, aunque éste presenta mejores propiedades que si se utiliza la inferencia asintótica. Asimismo, obtienen que el método bootstrap estacionario es el que funciona mejor.

Hinkley (1997) también señala que los estudios empíricos iniciales sugieren que los algoritmos ordinarios que se utilizan en el procedimiento bootstrap de bloques móviles se comportan de manera errática, pudiendo llevar a una estimación por defecto de la varianza. Según este autor, el tamaño medio del bloque tiene que ser mayor que el rango de correlación de la serie. Asimismo, Hinkley (1997) argumenta que el algoritmo utilizado para aplicar el procedimiento bootstrap estacionario lleva a una estimación

³El procedimiento bootstrap estacionario considera que la longitud del i -ésimo bloque (l_i) tiene una distribución geométrica con un parámetro s , por lo que la longitud promedio de un bloque es igual a $1/s$.

⁴En Carlstein (1986), Künsch (1989), Hall y Horowitz (1996) y Politis y Romano (1994) se analiza el tamaño óptimo de los bloques, en el caso del procedimiento bootstrap con bloques móviles y en el de bootstrap estacionario, cuando se utilizan muestras de tamaño pequeño.

por exceso de la varianza. Por tanto, genera series simuladas con enormes saltos, sobretodo cuando la media de la longitud del tamaño de los bloques no es muy grande.

Antes de adentrarnos en el uso de la metodología bootstrap en el campo de la cointegración es necesario tener en cuenta otra serie de cuestiones que surgen cuando se generan muestras bootstrap y estadísticos a partir de ellas:

I. La primera de ellas se basa en si se deben utilizar los residuos o los datos para obtener la muestra bootstrap. Aunque existen algunos ejemplos en la literatura donde se aplica el método bootstrap directamente a los datos, según Li y Maddala (1997) esta alternativa no es válida para el caso de regresiones de cointegración. Estos autores argumentan que a la hora de obtener un modelo con datos que son *output* de muestras bootstrap es necesario considerar la información existente acerca de la estructura del modelo cuando se parte de datos originales. Esto se consigue si las muestras bootstrap se obtienen a partir de los residuos, pero no si se obtienen a partir de los datos originales. En el caso de cointegración, suponemos que y_t y x_t son dos variables temporales que son I(1), y tenemos en cuenta las siguientes ecuaciones:

$$y_t = \beta x_t + u_t, \quad (3.2)$$

$$x_t = x_{t-1} + v_t. \quad (3.3)$$

Si aplicamos el procedimiento bootstrap a los datos (y_t, x_t) y estimamos

3.2. Problemática en torno al procedimiento bootstrap para tests de cointegración

la ecuación (3.2) por MCO, entonces si u_t es I(1), la relación (3.2) es espuria. Sin embargo, esto no se puede conocer utilizando el método bootstrap directo, es decir, aplicado a los datos, sin contrastar previamente si (3.2) es efectivamente una relación de cointegración. Suponiendo que inicialmente aplicamos contrastes de cointegración a la ecuación (3.2) y hacemos que ésta no sea una regresión espuria, entonces y_t y x_t son I(1) y u_t es I(0); sin embargo el método bootstrap directo, no utiliza la información relativa a que u_t es I(0) y que x_t es I(1).

Li y Maddala (1997) también apuntan que cuando se utiliza el método bootstrap ordinario directamente aplicado a los datos, las muestras bootstrap que se obtienen a partir de las variables y_t y x_t no pueden ser I(1), ya que se destruye la estructura de las series temporales I(1) al utilizar este procedimiento que considera distribuciones i.i.d. Si en lugar de utilizar este método se aplicara un procedimiento bootstrap de bloques móviles a los datos originales, Li y Maddala (1997) manifiestan que las muestras bootstrap de estas series tampoco serían integradas de orden unitario⁵. Por tanto, consideran que los métodos bootstrap para el análisis de cointegración deben basarse en los residuos, de manera que los datos bootstrap (y_t^* y x_t^*) se generen de acuerdo con las ecuaciones (3.2) y (3.3), que garantizan que y_t^* y x_t^* sean I(1). Así, según Li y Maddala (1997) existen dos tipos de aspectos claves que se tienen que considerar en el contraste

⁵Hinkley (1997) considera que el hecho de que el procedimiento bootstrap basado en bloques no sea completamente robusto a los modelos integrados, no tiene porqué ser importante, ya que la estimación que se obtiene a través de este procedimiento no es un parámetro del proceso x_t .

de cointegración:

- (a) x_t es I(1).
- (b) La ecuación (3.2) es una regresión de cointegración.

Por tanto, el algoritmo bootstrap que estos autores sugieren es el siguiente:

1. Estimar la ecuación (3.2) por MCO⁶ y obtener las estimaciones $\hat{\beta}$ y \hat{u}_t .
2. Definir $\hat{v}_t = \Delta x_t$ y aplicar el procedimiento bootstrap a los pares de datos (\hat{u}_t, \hat{v}_t) . Si los términos de perturbación aleatoria están autocorrelacionados, se pueden utilizar los métodos bootstrap recursivo y de bloques, ya que usan la información (a) y (b) y además preservan la correlación entre \hat{u}_t y \hat{v}_t , es decir, se tiene en cuenta la endogeneidad de x_t .

Hinkley (1997) también señala que el procedimiento bootstrap basado en los residuos funciona perfectamente si la forma del modelo es correcta, aunque incluya homocedasticidad, siempre que los residuos se ajusten y se centren antes de ser utilizados como términos de errores empíricos. Asimismo, argumenta que el algoritmo basado en los datos es más sencillo, pero su utilización no sería una elección apropiada. El primer motivo que argumenta Hinkley (1997) para no hacer uso de algoritmos que utilizan los datos directamente se basa en que, en este caso, no es necesario ajustar ningún modelo, lo que podría animar a los investigadores a omitir en su análisis el proceso de verificación del modelo. El segundo motivo, se basa en que estos

⁶ Al ser $\hat{\beta}$ superconsistente es válido aplicar el procedimiento bootstrap a \hat{u}_t .

3.2. Problemática en torno al procedimiento bootstrap para tests de cointegración

algoritmos generan resultados que son robustos a la heterocedasticidad y aunque en algunos casos represente una ventaja, bajo homocedasticidad los resultados serían ineficientes. El tercer motivo es que la variación de los coeficientes de regresión, obtenidos por bootstrap, puede ser exagerada.

II. Otra cuestión que se plantea al elaborar muestras bootstrap y estadísticos a partir de ellas es cómo generar los residuos bootstrap. Es decir, cuando se contrasta, por ejemplo, la $H_0 : \beta = \beta_0$, entonces surge la duda sobre si se deben utilizar los residuos MCO ($\hat{u}_t = y_t - \hat{\beta}x_t$) o los residuos restringidos ($\tilde{u}_t = y_t - \beta_0x_t$) y aplicar el método bootstrap a los pares (\tilde{u}_t, \hat{v}_t) . Li y Maddala (1997) responden a esta cuestión, argumentando que los residuos y la generación de pseudo-datos tiene que ser consistente con los estadísticos utilizados. Así, si se tiene en cuenta únicamente un modelo de regresión simple:

$$y_t = \beta x_t + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2),$$

y se considera la $H_0 : \beta = \beta_0$, existirían tres tipos de esquemas muestrales:

$$\begin{aligned} S_1 & : y^* = \hat{\beta}x + \varepsilon^*, \\ S_2 & : y^* = \beta_0x + \varepsilon^*, \\ S_3 & : y^* = \beta_0x + \varepsilon_0^*, \end{aligned}$$

en los que $\hat{\beta}$ es un estimador MCO de β , $\hat{\varepsilon}$ son los residuos obtenidos por MCO, ε^* son los residuos bootstrap obtenidos a partir de $\hat{\varepsilon}$, y ε_0^* son los

residuos elaborados a partir de $\tilde{\varepsilon}_0 = y - \beta_0 x$. También pueden existir dos tipos de estadísticos Ξ :

$$\begin{aligned}\Xi_1 &= \Xi(\hat{\beta}) = (\hat{\beta}^* - \hat{\beta})/\hat{\sigma}^*, \\ \Xi_2 &= \Xi(\beta_0) = (\hat{\beta}^* - \beta_0)/\hat{\sigma}^*,\end{aligned}$$

siendo $\hat{\sigma}$ un estimador MCO de σ . Por tanto, teniendo en cuenta lo anterior, y en el contexto de relaciones de cointegración, Li y Maddala (1997) obtienen, a través de sus estudios de Monte Carlo, que en los casos de raíces unitarias y modelos de cointegración, los procedimientos (S_1, Ξ_1) tienen una distribución límite que no es correcta y únicamente se deben utilizar los procedimientos (S_2, Ξ_2) y (S_3, Ξ_2) . Asimismo, estos autores obtiene que el procedimiento (S_3, Ξ_2) es incluso superior al (S_2, Ξ_2) .

3.3 Tests de cointegración por bootstrap

Dentro del conjunto de tests de cointegración basados en ecuaciones sencillas, los tests de cointegración basados en MCE suelen mostrar propiedades de potencia superiores a los tests basados en residuos (Boswijk y Frances, 1992; Kiviet y Phillips, 1992, y Kremers, Ericsson y Dolado, 1992). Sin embargo, los tests basados en MCE no se utilizan en muchos estudios empíricos debido a que existe una gran variedad de este tipo de tests y no existen tablas de valores críticos adecuadas para cada uno de ellos. Según Mantalos y Shukur (1998), una forma de resolver estos problemas es utilizar

3.3. Tests de cointegración por bootstrap

valores críticos obtenidos mediante el procedimiento bootstrap⁷. El atractivo de los modelos MCE surge por el hecho de que recogen información sobre la estructura de largo plazo o de equilibrio (relación de cointegración) y la estructura dinámica o de corto plazo que existe entre diferentes conjuntos de variables. Johansen (1988) considera un vector autorregresivo (VAR) en forma de MCE para analizar las propiedades estadísticas de los sistemas de cointegración. El interés que este contraste ha suscitado en la literatura empírica es debido al hecho de que permite corregir los problemas de endogeneidad de los regresores y de autocorrelación en el término de perturbación aleatoria de la regresión de cointegración, problemas que en el caso del procedimiento de estimación de Engle y Granger (1987) da lugar a que la estimación de β en la ecuación (3.1) posea una distribución con parámetros molestos⁸. A través del MCE se pueden analizar las propiedades de largo plazo y de corto plazo de forma conjunta y se puede llevar a cabo una inferencia eficiente utilizando métodos máximo verosímiles.

El primer paso del procedimiento desarrollado por Johansen consiste en determinar el rango del espacio de cointegración, es decir, el número de vectores de cointegración. Este paso se puede llevar a cabo a través del

⁷Mantalos y Shukur (1998) comparan el test de cointegración de tipo MCE cuando se utilizan los valores críticos obtenidos por *bootstrap* con aquéllos que utilizan los valores críticos de Dickey-Fuller y los Gaussianos. Estos autores obtienen que el test de cointegración del tipo MCE funciona mejor cuando se utilizan los valores críticos elaborados por *bootstrap* que si se utilizan los de Dickey-Fuller o los Gaussianos.

⁸El procedimiento *fully modified* MCO de Phillips y Hansen (1990) elimina asintóticamente estos parámetros molestos.

estadístico de la traza (λ_{traza}) o el estadístico del máximo autovalor ($\lambda_{máx}$). Ambos estadísticos no tienen funciones de distribución asintóticas estándar, sino que se tratan de funcionales de procesos multivariantes de Wiener. Una de las críticas a las que son sometidas las funciones de distribución de estos estadísticos es que dependen de las variables deterministas que aparecen tanto en el p.g.d. como en el modelo estimado VAR. Por tanto, el procedimiento bootstrap, introducido inicialmente por Efron (1979), al ser un método de remuestreo que simula valores críticos distintos para cada muestra, puede ser una solución a este problema. De ahí que la mayor parte de la literatura basada en los contrastes del rango de cointegración, que utilizan el procedimiento bootstrap, se haya desarrollado para modelos VAR, además, entre otros aspectos, de que estos tests presentan buenas propiedades de potencia. Sin embargo, tal y como exponemos en la Sección cuarta, el test de cointegración que proponemos, basado en el CBB, también tiene una potencia elevada, que en determinados casos llega a ser incluso superior a la de algún test basado en modelos VAR, como es el test $\lambda_{máx}$ de Johansen.

El test del número de vectores de cointegración desarrollado por Johansen⁹ se basa en la estimación del vector de corrección de error (VCE) autorregresivo Y_t ($n \times 1$) de variables aleatorias:

⁹Este procedimiento está explicado de forma más extensa en muchos estudios (ver, por ejemplo, Cuthbertson *et al.* (1992), Capítulo 5, y Harris (1995), Capítulo 5).

3.3. Tests de cointegración por bootstrap

$$\Delta Y_t = \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} - \Psi Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.4)$$

donde $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } (0, \Sigma)$ y $\Psi = \alpha\beta'$, siendo α y β matrices $n \times k$ de rango $k < n$, de no ser así Ψ debe ser una matriz de ceros¹⁰. Si los componentes de Y_t son $I(1)$, entonces $\Psi Y_{t-p} \sim I(0)$ y el rango de β (y, por ende, el de Ψ) debe ser inferior a n . El verdadero rango de Ψ indica el número de vectores de cointegración, de manera que Johansen desarrolla un procedimiento para contrastar la existencia de como máximo k vectores de cointegración¹¹, basando su estudio en la elaboración de un estimador máximo verosímil para β , calculando las correlaciones canónicas entre ΔY_t y Y_{t-p} , ajustadas por todos los retardos. Reescribiendo (3.4) como:

$$\Delta Y_t + \Psi Y_{t-p} = \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (3.5)$$

Johansen maximiza la función de verosimilitud para la variable Y_t condicionada a un valor dado de β , estimando por mínimos cuadrados estándar y por separado las regresiones de ΔY_t y Y_{t-p} respecto a $\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2}, \dots, \Delta Y_{t-p+1}$, obteniendo los vectores ($n \times 1$) de residuos r_{0t}

¹⁰El vector de parámetros α se puede interpretar como la velocidad promedio de ajuste hacia el equilibrio en el MCE. El vector de parámetros β es un vector de coeficientes de largo plazo (o de equilibrio).

¹¹Tal y como se sabe, la estimación de Ψ tiene rango completo, por ello los tests de Johansen tratan de analizar si los autovalores de Ψ son estadísticamente diferentes de cero.

y r_{pt} , respectivamente. A partir de estos vectores se obtienen las matrices de residuos $S_{ij} = T^{-1} \sum_{t=1}^T r_{it}r'_{jt}$, $i, j = 0, p$.

La estimación máximo verosímil de β son los autovectores correspondientes a los k autovalores más grandes que se obtienen al resolver la siguiente ecuación:

$$|\lambda S_{pp} - S_{p0}S_{00}S_{0p}| = 0.$$

Este procedimiento permite obtener n autovalores ordenados: $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots > \hat{\lambda}_n > 0$ y sus correspondientes autovectores. El test de ratio de verosimilitud (RV) no estándar de Johansen, que contrasta la existencia de como máximo k vectores de cointegración, es equivalente al contraste de que los $n - k$ autovalores más pequeños toman valor cero, es decir $\hat{\lambda}_i = 0$, para $i = k + 1, \dots, n$ frente a la hipótesis $\hat{\lambda}_i > 0$ para $i = 1, \dots, k$. El contraste de esta H_0 equivale, por tanto, a imponer la restricción de que sólo los k primeros autovalores son no nulos y se puede obtener el estadístico RV estándar (aunque con una distribución no estándar), comparando el logaritmo de la función de máxima verosimilitud que se obtiene a partir del modelo restringido, es decir, aquél que considera nulos los $n - k$ autovalores más pequeños, con el logaritmo de la función de máxima verosimilitud del modelo no restringido. Para ello, Johansen considera dos estadísticos RV:

- (i) El estadístico de la traza,

3.3. Tests de cointegración por bootstrap

$$\lambda_{traza} = -2 \log(Q) = -T \sum_{i=k+1}^n \log(1 - \hat{\lambda}_i), \quad k = 0, 1, \dots, n-2, n-1,$$

(ii) El estadístico de *autovalor-máximo* o estadístico $\lambda_{máx}$,

$$\lambda_{máx} = -T \log(1 - \hat{\lambda}_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, n-2, n-1.$$

Cabe matizar que la presencia de una tendencia determinista y/o una constante en (3.4), o sólo en los vectores de cointegración, lleva a diferentes estadísticos y distintos valores críticos asociados a ellos¹². Reimers (1992) y Cheung y Lai (1993), *inter alia*, consideran que estos valores críticos deben ser corregidos por el número de parámetros estimados para poder obtener propiedades de tamaño satisfactorias en muestras finitas. En particular, Reimers (1992) sugiere corregir los estadísticos λ_{traza} y $\lambda_{máx}$ de Johansen por el número de grados de libertad, reemplazando el tamaño muestral (T) por $T - np$, donde n es el número de variables que contiene el modelo y p el número de retardos que se consideran cuando se estima la ecuación (3.4). Cheung y Lai (1993) muestran que el sesgo en muestras finitas de los estadísticos de Johansen es una función positiva de $T/(T - np)$. Van Giersbergen (1996) considera que para la corrección de los estadísticos RV, se deben multiplicar por el factor $T/(T - np)$.

¹²Los valores críticos asintóticos sin constante y tendencia determinista o con estos términos, basados en simulaciones de un paseo aleatorio Gaussiano, aparecen en Osterwald-Lenum (1992).

Algunos autores, como Boswijk y Frances (1992), también destacan la importancia de especificar la dinámica correcta del modelo, ya que cuando se utiliza el procedimiento desarrollado por Johansen (1988), para detectar el rango del espacio de cointegración, se supone que los datos se generan a partir de un determinado VAR. Estos autores demuestran que una especificación de la dinámica del modelo con un número de retardos de la variable endógena inferior al verdadero lleva a una evidente distorsión de tamaño del test, mientras que un exceso de retardos lleva a una pérdida de potencia. Asimismo, si se utilizan procedimientos de selección del número de retardos y el MCE contiene un componente de media móvil (MA) negativo, estos procedimientos tienden a estimar un orden de retardos de la variable endógena inferior al verdadero, por lo que los residuos del MCE presentarían autocorrelación. Por tanto, si se desconoce la especificación correcta del modelo VAR, para estos autores es más apropiado el uso del procedimiento bootstrap, ya que permite realizar simulaciones bootstrap de la distribución del estadístico bajo la H_0 para cada muestra particular. Cuando se utiliza el procedimiento bootstrap ordinario, al realizar extracciones aleatorias a partir de los residuos del MCE, se elimina la correlación que podría existir en los residuos. Sin embargo, si se generan nuevas muestras a partir de extracciones de bloques formados por residuos adyacentes, entonces se preserva la estructura de correlación que presentan los residuos dentro de cada bloque. Por ello, este tipo de procedimientos bootstrap son los más utilizados en el campo de la cointegración, cuando se parte de un MCE.

3.3. Tests de cointegración por bootstrap

Van Giersbergen (1996) utiliza el procedimiento bootstrap estacionario, centrándose únicamente en el estadístico λ_{traza} desarrollado por Johansen (Johansen, 1988, 1991; Johansen y Juselius, 1990, 1992) para determinar el rango de la matriz de vectores de cointegración. El procedimiento bootstrap puede obtener una aproximación de la distribución del estadístico λ_{traza} bajo la H_0 en muestras finitas. Sin embargo, hay que tener especial cuidado cuando existe una raíz unitaria. Basawa *et al.* (1991a) muestran el fracaso del procedimiento bootstrap ordinario en modelos AR(1), ya que, cuando se utiliza este procedimiento, la función de distribución condicional del parámetro que acompaña a la parte AR(1) no converge a una función de distribución que no sea condicional a este parámetro. No obstante, Basawa *et al.* (1991b) muestran la validez asintótica del procedimiento bootstrap en modelos AR(1) cuando se considera la hipótesis de raíz unitaria, si se conoce la media y si la muestra bootstrap se genera por medio de parámetros estimados bajo esta hipótesis.

Debido a que el procedimiento bootstrap ordinario supone que los términos de perturbación aleatoria son independientes y aunque el procedimiento bootstrap de bloques móviles, desarrollado por Künsch (1989) y Liu y Singh (1992), permiten aplicar este procedimiento en el caso de fuerte dependencia entre las perturbaciones aleatorias, van Giersbergen (1996) considera más apropiado para detectar el rango del espacio de cointegración el procedimiento bootstrap estacionario elaborado por Politis y Romano (1994). El algoritmo que desarrolla van Giersbergen (1996) para contrastar el rango de la matriz de cointegración, es decir, $H_0 = k$, cuando se utiliza el

estadístico λ_{traza} en un modelo como el representado en (3.4), pero con un intercepto conocido y una longitud promedio de los bloques dada por $1/s$ para $s \in [0, 1]$, es el siguiente:

1. Aplicar el procedimiento de Johansen para calcular el estadístico λ_{traza} sobre la serie original.
2. Obtener los parámetros estimados bajo la H_0 conjunta $H'_0 : \text{rango}(\Psi) = k$ e intercepto con valor cero, estimando el siguiente modelo:

$$\Delta Y_t = -\alpha\beta'Y_{t-1} + \Gamma_1\Delta Y_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1}\Delta Y_{t-p+1} + \varepsilon_t, \quad (3.6)$$

para $t = 1, \dots, T$, siendo $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\Gamma}_1, \dots, \hat{\Gamma}_{p-1}$ y $\hat{\varepsilon}_t$ los parámetros estimados y el residuo, respectivamente, bajo la H'_0 . Denominando a $\hat{\mu}_T = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t$ la media muestral de los residuos, que no puede ser cero ya que el modelo (3.6) no contiene un intercepto, se pueden obtener los residuos ajustados (centrados¹³ y escalados¹⁴), a los que denotamos como $\tilde{\varepsilon}_t$:

$$\tilde{\varepsilon}_t = \sqrt{T/(T - (p - 1)n)}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\mu}_T).$$

Debido a que $\tilde{\varepsilon}_t$ es estacionario bajo la H'_0 , se puede aplicar el procedimiento bootstrap estacionario a estos residuos.

¹³Al no incluir intercepto en el modelo es necesario centrar los residuos antes de llevar a cabo la "extracción" para asegurar que la media de la población bootstrap sea cero.

¹⁴Se escalan los residuos debido a que los residuos MCO son más pequeños que las perturbaciones aleatorias verdaderas (ver Peters y Freedman, 1984).

3.3. Tests de cointegración por bootstrap

3. Generar perturbaciones bootstrap $\{\varepsilon_t^*\}_1^T$ elaborando muestras con bloques de residuos adyacentes ajustados de acuerdo con el procedimiento bootstrap estacionario¹⁵. Cuando se extraen T perturbaciones aleatorias bootstrap, construir una muestra $\{Y_t^*\}_1^T$ a partir de $\{\varepsilon_t^*\}$ y de los parámetros estimados restringidos:

$$\Delta Y_t^* = -\hat{\alpha}\hat{\beta}'Y_{t-1}^* + \hat{\Gamma}_1\Delta Y_{t-1}^* + \dots + \hat{\Gamma}_{p-1}\Delta Y_{t-p+1}^* + \varepsilon_t^*,$$

donde $\{Y_{1-p}^*, \dots, Y_0^*\} = \{Y_{1-p}, \dots, Y_0\}$.

4. Calcular una realización bootstrap del estadístico λ_{traza} , aplicando el procedimiento de Johansen a la muestra bootstrap $\{Y_t^*\}$.

5. Repetir los pasos 3 a 4 un gran número de veces (B).

6. Rechazar la $H_0 : \text{rango}(\Psi) = k$ si el estadístico λ_{traza} obtenido a partir de la muestra original es mayor que la realización $(1 - \alpha)(B + 1) - \text{ésima}$ más grande de dicho estadístico, obtenida por el procedimiento bootstrap.

Como se ha comentado anteriormente, el procedimiento bootstrap estacionario preserva la correlación entre los residuos adyacentes dentro de un bloque, aunque deteriora la correlación entre bloques. Por tanto, se espera que el procedimiento bootstrap estacionario funcione mejor si la longitud promedio ($1/s$) de los bloques se incrementa. Sin embargo, si s es demasiado pequeño, no se pueden elaborar valores críticos precisos. Por tanto, surge la cuestión sobre qué tamaño de los bloques es el adecuado¹⁶.

¹⁵Ver el apéndice de van Giersbergen (1996, p. 407 y 408) para más detalles.

¹⁶Si $s = 1$, el procedimiento bootstrap ordinario coincide con el bootstrap estacionario.

Van Giersbergen (1996) obtiene mediante experimentos de Monte Carlo que, cuando se trabaja con muestras pequeñas, la inferencia basada en el procedimiento bootstrap ordinario es tan buena como la inferencia basada en valores críticos asintóticos sujetos a un ajuste para ser aplicados a muestras finitas. Por tanto, este autor argumenta que el procedimiento bootstrap es apropiado para realizar inferencia acerca del rango del espacio de cointegración en modelos VAR. Cuando existen errores de especificación en la parte dinámica de un VEC e incluso si existen componentes MA, van Giersbergen (1996) obtiene que el uso del procedimiento bootstrap estacionario con muestras elaboradas a partir de bloques de residuos, puede ser más apropiado que si se utiliza la inferencia basada en valores críticos asintóticos. Sin embargo, las propiedades del procedimiento bootstrap estacionario dependen del tamaño de los bloques, el cual, a su vez, depende del número de retardos de la variable endógena incluidos en el modelo VAR. Por tanto, este hecho junto con el resultado de que la potencia del test es mayor cuanto mayor es el orden de retardos que se consideran en el VAR, representan un límite a la aplicación del procedimiento bootstrap estacionario. No obstante, van Giersbergen (1996) propone este procedimiento como una herramienta importante de diagnóstico para investigar la sensibilidad de los procedimientos de inferencia a especificaciones erróneas de la parte dinámica de los VEC.

Harris y Judge (1998) también desarrollan un test de cointegración mediante bootstrap a partir del test de Johansen. Su trabajo se basa en el de van Giersbergen (1996) y analizan las propiedades de tamaño y potencia de

3.3. Tests de cointegración por bootstrap

su test en muestras finitas mediante un estudio de Monte Carlo. Además, comparan estas propiedades con las asintóticas obtenidas por Johansen. Van Giersbergen (1996) utiliza el método bootstrap estacionario (Politis y Romano, 1994) en lugar del bootstrap ordinario, el cual permite realizar extracciones aleatorias (con reemplazamiento) de los residuos, porque aborda el problema de la especificación errónea de los modelos VAR. Sin embargo, Harris y Judge (1998) argumentan dos razones fundamentales para no utilizar el procedimiento bootstrap estacionario. En primer lugar, porque están interesados en conocer si la técnica bootstrap proporciona "mejores" estadísticos que si se utilizan los asintóticos basados en un modelo paseo aleatorio (Osterwald-Lenum, 1992). Por tanto, no consideran que sea necesario complicar el análisis tratando de analizar la especificación dinámica correcta del VAR señalado. En segundo lugar, los resultados de van Giersbergen (1996) muestran que el procedimiento bootstrap ordinario es, en general, preferido al bootstrap estacionario, ya que este último tiene una potencia inferior. Además, van Giersbergen (1996, p. 401) concluye diciendo: "*... es mejor tener un modelo VAR con un orden de retardos suficiente para mejorar la potencia del test ..., por consiguiente, el uso práctico del bootstrap estacionario parece estar limitado*".

El algoritmo que elaboran Harris y Judge (1998) para determinar el número de vectores de cointegración es el siguiente:

1. Estimar (3.4) y obtener las estimaciones: $\hat{\Gamma}_i$ y $\hat{\Psi} = \hat{\alpha}\hat{\beta}'$.
2. Restringir $\hat{\beta}$ de manera que contenga sólo los k -autovectores mayores (el

resto toman valor cero) y generar de forma dinámica nuevos valores de Y_t^* con $\beta = \hat{\beta}^*$ a través del siguiente modelo:

$$\Delta Y_t^* = \sum_{i=1}^{p-1} \hat{\Gamma}_i Y_{t-i}^* - \hat{\alpha} \hat{\beta}^{*/'} Y_{t-p}^* + \varepsilon_t^*, \quad t = 1, \dots, T,$$

obteniendo muestras i.i.d.(con reemplazamiento) de valores ε_t^* a partir de los residuos (normalizados) $\{\varepsilon_t^*\}$.

3. Utilizar Y_t^* , para estimar (3.5), y el modelo VAR no restringido, obteniendo las funciones de distribución por bootstrap de los estadísticos λ_{traza} y $\lambda_{máx}$ ¹⁷. A partir de estas funciones de distribución se pueden obtener los valores críticos y, por ende, el nivel de significación para el rechazo de la H_0 : existen como máximo k vectores de cointegración. Así, se rechaza la H_0 : rango (Ψ) = 0 si λ_{traza} o $\lambda_{máx}$, obtenidos a partir de la muestra original, presentan un valor superior al de los estadísticos bootstrap, al nivel de significación considerado. Así, al nivel del 5% se rechaza la H_0 si $\lambda > \lambda_{[0.95]}^*$.

Harris y Judge (1998), utilizando el modelo empírico de Engle y Yoo (1987) y Podivinsky (1990) y teniendo en cuenta la posibilidad de que exista uno o dos vectores de cointegración entre tres variables integradas, obtienen las propiedades de tamaño y potencia de los estadísticos RV (λ_{traza} y $\lambda_{máx}$) de Johansen cuando el tamaño muestral es de 50 observaciones. Aunque algún autor, como Podivinsky (1990), afirma que los valores críticos simulados por Johansen para los estadísticos RV son inapropiados cuando el

¹⁷Harris y Judge (1998) utilizan 5000 réplicas y las ordenan ($\lambda_{(1)}^* < \dots < \lambda_{(5000)}^*$).

3.3. Tests de cointegración por bootstrap

tamaño muestral es igual o inferior a 100 y a pesar de que Reimers (1992) sugiere que los valores críticos de Johansen, cuando la muestra es pequeña, llevan a un excesivo rechazo de la H_0 cuando es verdadera, Harris y Judge (1998) utilizan estos valores críticos. El resultado que estos autores obtienen es que, en general, el procedimiento de cointegración por bootstrap no tiene buenas propiedades de tamaño cuando la muestra es pequeña y cuando existe al menos un vector de cointegración. Estos autores obtienen que cuando no hay una relación de cointegración entre tres variables integradas y el tamaño de la muestra es igual a 50, el estadístico $\lambda_{máx}$ tiene buenas propiedades de tamaño, especialmente si se utiliza el estadístico $\lambda_{máx}$ determinado por bootstrap; sin embargo, cuando existe un vector de cointegración entre las tres variables, los estadísticos RV asintóticos de Johansen presentan mejores propiedades de tamaño que si se determinan por bootstrap (en especial cuando utilizan el $\lambda_{máx}$), aunque la potencia de los estadísticos RV asintóticos y por bootstrap es elevada. No obstante, si existen dos vectores de cointegración entre tres variables integradas, ambos estadísticos RV, el asintótico y el bootstrap, cuando la muestra es pequeña, tienen buenas propiedades de potencia, sin embargo, ninguno tiene propiedades adecuadas de tamaño.

Otro test de cointegración por bootstrap es el desarrollado por Kapetanios y Camba-Mendez (1999). Este procedimiento también pretende determinar el rango de la matriz de coeficientes de las variables en niveles que aparece en una representación de corrección de error (matriz Ψ en la ecuación (3.4)), aunque no utiliza la correlación canóni-

ca o el análisis de componentes principales tal y como llevan a cabo los contrastes propuestos por Johansen (1988), Stock y Watson (1988), Gregoir y Laroque (1994) y Snell (1999). El procedimiento que desarrollan Kapetanios y Camba-Mendez (1999) es una adaptación del sugerido por Cragg y Donald (1996) para la determinación del rango de matrices con estimadores \sqrt{T} -consistentes. Por simplicidad suponen para Y_t un modelo VAR(1), en lugar de un VAR(p), cuya representación de corrección de error es la siguiente:

$$\Delta Y_t = \Psi Y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (3.7)$$

Con el fin de poder clarificar el procedimiento de Kapetanios y Camba-Mendez (1999), realizamos previamente una breve incursión en el contraste de Cragg y Donald (1996). Estos autores contrastan la hipótesis de que una matriz A , con estimadores \sqrt{T} -consistentes, \hat{A} , tiene un rango $k = k^*$, frente a la hipótesis de que $k > k^*$. El test se basa en la transformación de la matriz A utilizando el procedimiento de eliminación Gaussiana con pivotaje completo¹⁸. Después de aplicar k^* pasos en los que se realizan transformaciones de eliminación con pivotaje, A se transforma en una matriz con la siguiente estructura:

¹⁸Ver Cragg y Donald (1996) o Golub y Loan (1983) para obtener más información sobre eliminación Gaussiana con pivotaje completo.

3.3. Tests de cointegración por bootstrap

$$\begin{pmatrix} A_{11}(k^*) & A_{12}(k^*) \\ A_{21}(k^*) & A_{22}(k^*) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Aplicando transformaciones con pivotaje de eliminación Gaussianas en \hat{A} se obtiene la estimación de $A_{22}^*(k^*)$, $\hat{A}_{22}^*(k^*)$. Bajo condiciones de regularidad y requiriendo que la matriz de covarianzas $\sqrt{T}vec(\hat{A} - A)$ tenga rango completo, estos autores demuestran que bajo la H_0 , se cumple:

$$\sqrt{T}vec(\hat{A}_{22}^*(k^*)) \xrightarrow{d} N(0, \Phi V \Phi'),$$

siendo Φ una función de submatrices obtenidas a partir de la partición de la matriz A llevada a cabo en (3.8) y considerando la transformación de matrices utilizadas en la eliminación Gaussiana. Entonces,

$$\hat{\xi} = Tvec\hat{A}_{22}^*(k^*)'(\hat{\Phi}\hat{V}\hat{\Phi}')^{-1}vec\hat{A}_{22}^*(k^*) \xrightarrow{d} \chi_{(n-k^*)^2}^2,$$

donde $\hat{\Phi}$ y \hat{V} son estimaciones muestrales de Φ y V , respectivamente. Cabe señalar que se puede relajar el requerimiento de que la matriz de covarianzas no sea singular, ya que para llevar a cabo este contraste sólo se necesita que exista la inversa de $\Phi V \Phi'$ y no de V . Tal y como muestran Cragg y Donald (1996), la matriz Φ , que tiene una dimensión $(n - k^*)^2 \times n^2$, tiene rango completo en sus filas. Por consiguiente, $\Phi V \Phi'$ no es singular si el rango de V es mayor o igual a $(n - k^*)^2$. El procedimiento de Cragg y Donald (1996) requiere que el rango de la matriz de covarianzas asintótica de \hat{A}

sea mayor que $(n - k^*)^2$. Sin embargo, el trabajo de Kapetianos y Camba-Mendez (1999) relaja este requerimiento, permitiendo que no tenga rango completo, utilizando la inversa de *Moore-Penrose*, en lugar de una inversa para obtener una forma cuadrática que tenga una distribución asintótica χ^2 .

Bajo la $H_0 : k = k^* \neq 0$ y considerando la $H_1 : k > k^*$, Kapetianos y Camba-Mendez (1999) proporcionan un test consistente mediante el procedimiento bootstrap. Estos autores proponen aplicar este procedimiento a la distribución del siguiente estadístico:

$$\xi = Tvec\hat{\Psi}_{22}(k^*)'vec\hat{\Psi}_{22}(k^*). \quad (3.9)$$

Siguiendo las sugerencias que aparecen en Basawa *et al.* (1991) y Li y Maddala (1996), aplicadas a una estructura no estacionaria univariante, Kapetianos y Camba-Mendez (1999) proponen aplicar el procedimiento bootstrap al estadístico (3.9) llevando a cabo el siguiente algoritmo:

1. Estimar $\hat{\Psi}$ a partir del VCE (3.7).
2. Definir $\Psi^*(k^*)$ como la matriz de coeficientes utilizada para construir las muestras bootstrap, tratando de asegurar, tal y como se explica en Kapetianos y Camba-Mendez (1999, p. 5), que $\Psi^*(k^*)$ incorpora la restricción impuesta en la H_0 , es decir, $k = k^*$.
3. Simular un vector de series Y_t^* a partir de un modelo como el representado en (3.7) utilizando la matriz $\Psi^*(k^*)$ calculada en el paso anterior:

3.3. Tests de cointegración por bootstrap

$$\Delta Y_t^* = \Psi^*(k^*)Y_{t-1}^* + \varepsilon_t^*,$$

El cálculo de ε_t^* se discute en la sección 6 del trabajo de Kapetianos y Camba-Mendez (1999, p.5 y 6).

4. Utilizar la serie simulada Y_t^* para estimar Ψ^* en la expresión siguiente:

$$\Delta Y_t^* = \Psi^* Y_{t-1}^* + \varepsilon_t^*.$$

denotando la estimación como $\hat{\Psi}^*$.

5. Calcular el estadístico de Cragg y Donald (1996) bajo la $H_0 : k = k^*$:

$$\xi^* = Tvec\hat{\Psi}_{22}^*(k^*)'vec\hat{\Psi}_{22}^*(k^*).$$

6. Repetir los pasos 3 a 5 un gran número de veces, B , con el fin de obtener:

$$D_\xi = \{\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_B^*\}.$$

7. Calcular el cuantil relevante de D_ξ para obtener los valores críticos.

Kapetianos y Camba-Mendez (1999) obtienen que el nuevo estadístico que desarrollan para llevar a cabo un contraste de cointegración mediante el procedimiento bootstrap es consistente y tiene propiedades de tamaño y potencia superiores a los estadísticos ($\lambda_{m\acute{a}x}$ y λ_{traza}) de Johansen (1988).

Otro trabajo que utiliza el procedimiento bootstrap para determinar el número de vectores de cointegración, a través de un MCE, es el de Ahlgren (2000). Este autor obtiene los valores críticos del estadístico que permite contrastar el rango del espacio de cointegración, utilizando el procedimiento bootstrap, a partir de un MCE y analiza los efectos de la especificación dinámica sobre las propiedades de tamaño y potencia del test cuando se utiliza este tipo de valores críticos.

Entre las diferentes alternativas posibles para realizar el contraste de cointegración de tipo MCE, Ahlgren (2000) considera la propuesta por Kremers, Ericsson y Dolado (1992). Antes de desarrollar el algoritmo que permite obtener los valores críticos propuesto por Ahlgren (2000), resumimos brevemente esta propuesta con el fin de clarificar el procedimiento utilizado por este autor.

Así, en relación al test de cointegración de tipo MCE, el p.g.d. que considera Ahlgren (2000) es el siguiente:

$$\Delta y_t = \beta_1 \Delta x_t + \beta_2 (y_{t-1} - x_{t-1}) + \varepsilon_{1t}, \quad (3.10)$$

$$\Delta x_t = \varepsilon_{2t}, \quad (3.11)$$

donde:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \sim \text{i.i.d.} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right], \quad t = 1, \dots, T,$$

3.3. Tests de cointegración por bootstrap

Δ es el operador de primeras diferencias ($1-L$), L es el operador de retardos y T es el tamaño muestral. Las variables y_t y x_t son $I(1)$ y posiblemente cointegradas, $CI(1,1)$. Si $\beta_2 = 0$, y_t y x_t no están cointegradas. Si $\beta_2 < 0$, entonces y_t y x_t están cointegradas y el vector de cointegración es el siguiente: $\beta = (1, -1)'$. Considerando que x_t es fuertemente exógena en (3.11), Kremers, Ericsson y Dolado (1992) muestran que un contraste de cointegración se puede basar en el siguiente MCE:

$$\Delta y_t = \beta_1 \Delta x_t + \beta_2 w_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \quad \varepsilon_{1t} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_1^2), \quad (3.12)$$

donde $w_t = y_t - x_t$. La H_0 de no cointegración es $\beta_2 = 0$ y la alternativa de cointegración es $\beta_2 < 0$. Asimismo, el estadístico t del MCE que se utiliza para contrastar la H_0 es el siguiente:

$$t_{MCE} = \frac{1}{\hat{\sigma}_1} \left(\sum_{t=1}^T w_{t-1}^2 \right)^{1/2} \hat{\beta}_2 + O_p(T^{-1/2}). \quad (3.13)$$

Kremers, Ericsson y Dolado (1992) obtienen la distribución asintótica del estadístico (3.13) bajo la H_0 de no cointegración (ver también Banerjee, Dolado, Hendry y Smith, 1986).

Ahlgren (2000) considera un procedimiento bootstrap ordinario basado en los residuos. La limitación que tiene este procedimiento, tal y como se ha especificado anteriormente, es que sólo es válido para perturbaciones aleatorias i.i.d. (ver Li y Maddala, 1996; Maddala y Kim, 1998; y Horowitz, 1999, donde se amplía información sobre el procedimiento bootstrap de

bloques móviles y el bootstrap estacionario). Ahlgren (2000) elabora el siguiente algoritmo bootstrap para obtener los valores críticos del test de cointegración de tipo MCE:

1. Estimar el MCE por MCO:

$$\Delta y_t = \beta_1 \Delta x_t + \beta_2 w_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_{1t}, \quad (3.14)$$

siendo $\varepsilon_{1t} \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma_1^2)$ y $t = 1, \dots, T$, y obtener el estadístico t_{MCE} que aparece en (3.13).

2. Calcular los residuos centrados y reescalados:

$$\tilde{\varepsilon}_{1t} = \left(\hat{\varepsilon}_{1t} - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_{1t} \right) \left(\frac{T}{T-d} \right)^{1/2},$$

donde $d = p + 2$ es el número de coeficientes estimados.

3. Realizar extracciones independientes (con reemplazamiento) de los residuos $(\tilde{\varepsilon}_{11}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{1T})$, con el fin de obtener la muestra bootstrap $(\varepsilon_{11}^*, \dots, \varepsilon_{1T}^*)$, y generar una muestra bootstrap (y_1^*, \dots, y_T^*) a partir de (x_1, \dots, x_T) y $(\varepsilon_{11}^*, \dots, \varepsilon_{1T}^*)$ utilizando el modelo estimado restringido:

$$\Delta y_t = \tilde{\beta}_1 \Delta x_t + \sum_{i=1}^p \tilde{\delta}_i \Delta y_{t-i}^* + \varepsilon_{1t}^*, \quad (3.15)$$

donde $\{y_{1-p}^*, \dots, y_0^*\} = \{y_{1-p}, \dots, y_0\}$. En el modelo (3.15), $\tilde{\beta}_1$ y $\tilde{\delta}_1$ representan las estimaciones restringidas de β_1 y δ_1 bajo la $H_0 : \beta_2 = 0$.

3.3. Tests de cointegración por bootstrap

4. Obtener réplicas por bootstrap del estadístico t_{MCE} , estimando el modelo (3.14) haciendo uso de la muestra bootstrap (y_1^*, \dots, y_T^*) y la muestra (x_1, \dots, x_T) . El estadístico t_{MCE} bootstrap lo representamos así: t_{MCE}^* .
5. Repetir los pasos 2 a 4 un número B de veces, donde B es el número de réplicas bootstrap.
6. Obtener el valor crítico correspondiente al nivel de significación τ (al que denotamos c_τ^*) para el τB -ésimo estadístico de la secuencia ordenada siguiente: $t_{MCE(1)}^* \leq t_{MCE(2)}^* \leq \dots \leq t_{MCE(B)}^*$. Si $t_{MCE} \leq c_\tau^*$, se rechaza la H_0 de no cointegración al nivel de significación τ .

Como hemos comentado anteriormente, Ahlgren (2000) también estudia los efectos de la especificación dinámica en el tamaño y potencia del test de cointegración tipo MCE con valores críticos bootstrap. Los resultados de su estudio de Monte Carlo muestran que el tamaño de este test está muy próximo a su nivel de significación nominal, aunque una especificación del número de retardos, en el MCE, superior al verdadero lleva a una pérdida de potencia del test. Asimismo, una especificación por defecto del número de retardos provoca una distorsión de tamaño. Comparando las propiedades de los estadísticos del contraste de cointegración de tipo MCE por bootstrap con las que se obtienen si se utilizan los valores críticos de Dickey y Fuller (Dickey, 1976; Fuller, 1976; Dickey y Fuller, 1979, 1981), este autor obtiene que el tamaño de este último test es ligeramente más elevado que el tamaño nominal, mientras que el procedimiento bootstrap corrige esta distorsión de tamaño. Sin embargo, la potencia empírica del test de cointe-

gración basado en un MCE por bootstrap es más baja que la potencia del mismo test cuando se utilizan los valores críticos de Dickey-Fuller, aunque la diferencia es pequeña. Por consiguiente, Ahlgren (2000) obtiene que si el MCE incluye un número correcto de retardos, entonces el test de cointegración de tipo MCE por bootstrap tiene buenas propiedades de tamaño y potencia. Sin embargo, estas propiedades se deterioran si no se utiliza un correcto número de retardos en el MCE¹⁹. Por tanto, Ahlgren (2000) concluye que el estadístico de cointegración de tipo MCE no es robusto a la especificación errónea del modelo.

3.4 Test de Cointegración CBB

En un trabajo reciente, Paparoditis y Politis (2001) proponen un contraste de raíces unitarias basado en lo que denominan *continuous-path block bootstrap* (CBB), que es una modificación del algoritmo de remuestreo introducido por Paparoditis y Politis (2000), a su vez basado en el procedimiento bootstrap por bloques de Künsch (1989) y Liu y Singh (1992). Una de las características que hace más atractivo este procedimiento es que permite calcular la función de distribución de un determinado estadístico bajo la H_0 (raíz unitaria) con independencia de que la serie observada sea estacionaria o no. Por tanto, el CBB es un método bootstrap no paramétrico que puede ser aplicado directamente para contrastar la hipótesis de raíz unitaria.

¹⁹Berkowitz y Kilian (2000) analizan la incertidumbre que existe al determinar el número de retardos.

3.4. Test de Cointegración CBB

El test de cointegración que proponemos se basa en el test CBB de raíces unitarias de Paparoditis y Politis (2001). Así, suponiendo que tenemos dos series y_t y x_t y que ambas son procesos $I(1)$, el algoritmo que desarrollamos para contrastar la existencia de un vector de cointegración entre ellas es el siguiente:

1. Estimar por MCO la siguiente regresión:

$$y_t = \beta x_t + u_t$$

y calcular el vector estimado de parámetros de cointegración $\hat{\beta}$, y los residuos \hat{u}_t .

2. Estimar por MCO el parámetro ρ en la siguiente regresión:

$$\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \nu_t,$$

obteniendo el estimador $\hat{\rho}$. El estadístico que consideramos es el siguiente: $T(\hat{\rho} - 1)$.

A continuación implementamos el test de cointegración que contrasta la hipótesis de no cointegración ($H_0 : \rho = 1$), utilizando el método de Paparoditis y Politis (2001), pasos 3 a 6 siguientes.

3. Calcular los residuos centrados:

$$\hat{v}_t = \hat{u}_t - \hat{\rho}_T \hat{u}_{t-1} - \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (\hat{u}_t - \hat{\rho}_T \hat{u}_{t-1})$$

para $t = 2, 3, \dots, T$, donde $\hat{\rho}_T = \hat{\rho}_T(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_T)$ es un estimador consistente de ρ , basado en los datos observados $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_T\}$. Para que sea válido el CBB se requiere que $\hat{\rho}_T$ satisfaga $\hat{\rho}_T = \rho + O_P(T^{-(1+\delta(\rho))/2})$, donde $\delta(\rho) = 1$ si $\rho = 1$, y $\delta(\rho) = 0$ si $\rho \neq 1$. Esta condición la satisface, entre otros estimadores, el que se obtiene por MCO cuando se lleva a cabo la regresión de \hat{u}_t con respecto a \hat{u}_{t-1} .

Posteriormente, generar las pseudo-series \tilde{u}_t :

$$\tilde{u}_t = \begin{cases} \hat{u}_1 & \text{para } t = 1 \\ \hat{u}_1 + \sum_{j=2}^t \hat{v}_j & \text{para } t = 2, \dots, T. \end{cases}$$

4. Elegir el tamaño del bloque b , $0 < b < T$. Sea $k = [(T-1)/b]$, donde $[\cdot]$ denota la parte entera²⁰ y sean i_0, i_1, \dots, i_{k-1} extracciones i.i.d. con distribución uniforme en el conjunto $\{1, 2, \dots, T-b\}$, el CBB desarrollado por Paparoditis y Politis (2001) permite construir pseudo-series $\hat{u}_1^*, \dots, \hat{u}_l^*$, donde $l = kb + 1$.

5. Generar el primer bloque bootstrap para $b+1$ observaciones, considerando $\hat{u}_1^* = \hat{u}_1$ y

²⁰ k puede tener una especificación diferente.

3.4. Test de Cointegración CBB

$$\hat{u}_j^* = \hat{u}_1 + [\tilde{u}_{i_0+j-1} - \tilde{u}_{i_0}] \quad \text{para } j = 2, \dots, b+1.$$

6. Obtener los $(m+1)$ -ésimos bloques bootstrap a partir de los m -ésimos bloques para $m = 1, 2, \dots, k-1$:

$$\hat{u}_{mb+1+j}^* = \hat{u}_{mb+1}^* + [\tilde{u}_{i_m+j} - \tilde{u}_{i_m}], \quad \text{para } j = 1, \dots, b.$$

Las pseudo-series $\hat{u}_1^*, \hat{u}_2^*, \dots, \hat{u}_l^*$, son, por construcción, $I(1)$. Si para cada pseudo-serie calculamos $T(\hat{\rho} - 1)$, obtenemos la función de distribución empírica para este estadístico bajo la H_0 . Sin embargo, esta distribución no sería útil para nuestro propósito, ya que estaríamos comparando la distribución del parámetro autorregresivo estimado para cada pseudo-serie $I(1)$, con el parámetro autorregresivo estimado para la serie de residuos obtenidos por MCO, \hat{u}_t , y no con el obtenido a partir de la "verdadera" serie u_t . Es necesario recordar que si u_t no es estacionario, los residuos u_t están sesgados hacia la estacionariedad en muestras finitas.

El mismo argumento también se utiliza en el contexto del test DFA para explicar porqué no se puede aplicar a la serie de residuos sin corregir previamente los valores críticos. De lo contrario, el tamaño empírico del test sería más elevado que el nivel de significación nominal, es decir, rechazaríamos la H_0 con excesiva frecuencia. Por tanto, con el fin de poder tabular la distribución de un estadístico que se pueda comparar con la del

estadístico original, generada a partir de los residuos \hat{u}_t , tenemos que elaborar una serie diferente de residuos, que presentan el mismo sesgo hacia la estacionariedad cuando la H_0 sea verdadera ($u_t \sim I(1)$). Con este fin, desarrollamos los pasos 7 a 10 siguientes.

7. Construir la pseudo-serie y_t^* , teniendo en cuenta la serie de pseudo-perturbaciones $\{\hat{u}_1^*, \dots, \hat{u}_l^*\}$, utilizando la estimación superconsistente del vector de cointegración obtenido en el paso 1.

$$y_t^* = \hat{\beta}x_t + \hat{u}_t^*, \quad t = 1, \dots, l.$$

Debido a que la serie $\{\hat{u}_1^*, \dots, \hat{u}_l^*\}$ es $I(1)$, las variables y_t^* y x_t no cointegran.

8. Estimar por MCO la relación de cointegración entre y_t^* y x_t , y utilizando el estimador $\hat{\beta}^*$ de esta regresión, calcular los residuos:

$$\hat{u}_t^{**} = y_t^* - \hat{\beta}^*x_t, \quad t = 1, \dots, l.$$

Debido a que \hat{u}_t^{**} es una serie de residuos obtenida por MCO, también está sesgada hacia la estacionariedad en muestras finitas, cuando u_t no es estacionario, aunque la pseudo-perturbación sea $I(1)$.

9. Obtener por MCO la estimación del parámetro ρ^* , que denotamos como $\hat{\rho}^*$, a partir del siguiente modelo:

3.5. Análisis de Monte Carlo

$$\hat{u}_t^{**} = \rho^* \hat{u}_{t-1}^{**} + \varrho_t, \quad t = 1, \dots, l.$$

$\hat{\rho}^*$ es un estimador consistente del verdadero parámetro $\rho^* = 1$, aunque está sesgado a la baja.

10. Repetir los pasos 3 a 9 un número elevado de veces B , y obtener la función de distribución empírica del estadístico $T(\hat{\rho}^* - 1)$. Si $T(\hat{\rho}^* - 1)$ es más pequeño que el cuantil 5% de la distribución de $T(\hat{\rho}^* - 1)$, rechazamos la H_0 de no cointegración al nivel de significación del 5%.

3.5 Análisis de Monte Carlo

En la presente sección comparamos las propiedades de tamaño y potencia de algunos de los principales tests que contrastan la H_0 de no cointegración, como el test DFA aplicado a los residuos de la regresión de cointegración y el test $\lambda_{m\acute{a}x}$ de Johansen, con las del nuevo test de cointegración que desarrollamos en la sección anterior, basado en el contraste de raíces unitarias de Paparoditis y Politis (2001). La falta de normalidad asintótica y el hecho de que la mayoría de los tests de cointegración no son invariantes a H_1 particulares, hacen que sea difícil encontrar en la literatura un test que tenga una elevada potencia bajo todas las alternativas posibles. De ahí que adquiera especial relevancia llevar a cabo un estudio sobre las propiedades de tamaño y potencia de algunos de los tests más utilizados en la literatura, como el que realizamos en la presente sección. Además, debido

a que es posible que la correlación entre las variables independientes y el término de perturbación aleatoria de la regresión de cointegración incida en las propiedades de estos tests, tenemos en cuenta en nuestro análisis de Monte Carlo esta posible correlación.

El p.g.d. que consideramos, al igual que Pesavento (2000), es el siguiente:

$$\begin{aligned}\Delta x_t &= d_{1t} + v_{1t} \\ y_t &= d_{2t} + x_t' \beta + u_t \\ u_t &= \rho u_{t-1} + v_{2t}\end{aligned}\tag{3.16}$$

donde $t = 1, \dots, T$; x_t es un vector $n_1 \times 1$; y_t es un escalar; $d_{1t} = G_1 z_{1t}$ y $d_{2t} = G_2 z_{2t}$; $v_t = [v_{1t}' v_{2t}']'$, $\Phi(L)v_t = \varepsilon_t$, $\varepsilon_t = [\varepsilon_{1t}' \varepsilon_{2t}']'$ es un vector $T \times 1$ de diferencias de martingalas con matriz de varianzas-covarianzas definida positiva Σ , $\Phi(L)$ es un polinomio de retardos invertible de orden conocido particionado de acuerdo con v_t tal que:

$$\Phi(L) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(L) & \phi_{12}(L) \\ \phi_{21}(L) & \phi_{22}(L) \end{bmatrix}.$$

La densidad espectral de v_t en la frecuencia cero (escalado por 2π) es $\Omega = \Phi(1)^{-1} \Sigma \Phi(1)^{-1'}$ donde $\Phi(1) = \sum_i \Phi_i$. Ω puede ser particionado como:

3.5. Análisis de Monte Carlo

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{11}^{1/2} \omega_2 D \\ D' \omega_2 \Omega_{11}^{1/2} & \omega_2^2 \end{bmatrix},$$

donde $D' = [\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n_1}]$ contiene la correlación bivalente a la frecuencia cero de cada elemento de v_{1t} con v_{2t} . Ω_{11} se supone que no es singular²¹. Cuando $\rho < 1$, y_t y x_t están cointegradas. Por tanto, un contraste de ausencia de cointegración implica contrastar la hipótesis $H_0 : \rho = 1$ versus la alternativa $H_0 : \rho < 1$. Bajo el supuesto de que las series x_t e y_t son univariantes e integradas de orden unitario, las hipótesis anteriores son similares a las siguientes, $H_0 : u_t$ es I(1) versus $H_1 : u_t$ es estacionaria²².

Es necesario tener en cuenta que la serie v_{2t} , definida mediante la siguiente expresión:

$$v_{2t} = u_t - \rho u_{t-1}, \quad (3.17)$$

no debe ser considerada como el "modelo" generador de la serie u_t , sino que constituye estrictamente la definición de la serie v_{2t} . La definición (3.17) es muy útil, ya que la serie v_{2t} es siempre estacionaria: bajo la H_0 y/o bajo la H_1 . Nosotros no suponemos que existe un "modelo" para la serie u_t . Sin embargo, sí suponemos que la serie u_t es estacionaria (H_1) y lineal, o no estacionaria, pero su primera diferencia e_t es estacionaria (H_0) y lineal,

²¹Los elementos de x_t no están individualmente cointegrados consigo mismos.

²²A lo largo de la presente Sección y la siguiente se utiliza el término "estacionario" en lugar de la expresión "estrictamente estacionario".

donde $e_t = u_t - u_{t-1}$. Cabe señalar que bajo la H_0 la secuencia v_{2t} , definida en la ecuación (3.17) coincide con e_t .

La mayoría de procedimientos que contrastan la H_0 de raíz unitaria utilizan estimadores del parámetro ρ bajo diferentes especificaciones de la ecuación estimada y utilizan distribuciones límites para obtener las regiones de rechazo (ver Fuller, 1976, o Hamilton, 1994). Además, el análisis llevado a cabo a través de este tipo de contrastes se complica debido al comportamiento estocástico de las magnitudes aleatorias implicadas. Por ejemplo, es bien conocido el hecho de que la distribución límite del estimador que se obtiene por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) al hacer la regresión de u_t con respecto a u_{t-1} no es estándar, incluso en el caso más simple de paseo aleatorio con residuos i.i.d. Además, su distribución asintótica depende de un modelo particular estimado para la serie, dando lugar a diferentes resultados para distintas especificaciones del término determinístico. También es un hecho evidente que la correlación serial del proceso estacionario ε_t afecta a la distribución límite a través de parámetros molestos (difíciles de estimar) como la densidad espectral del proceso al nivel cero. Además, la calidad de la aproximación asintótica también es cuestionada en algunos estudios de simulación donde se halla alguna distorsión de tamaño para algunos tests (ver por ejemplo Schwert, 1989; o DeJong *et al.*, 1992). En estas situaciones, donde la distribución límite del estadístico depende de la dificultad para estimar los parámetros, los métodos de remuestreo ofrecen una alternativa y poderosa vía para estimar el comportamiento muestral del estadístico de interés. Sin embargo, hasta el trabajo de Paparoditis y

3.5. Análisis de Monte Carlo

Politis (2001) no existía ningún método no paramétrico directamente aplicable al caso de raíz unitaria. De ahí la importancia de este método y el que hayamos decidido basarnos en él para proponer el test de cointegración desarrollado en la Sección precedente.

En el presente análisis consideramos el caso más sencillo en el que no tenemos en cuenta términos deterministas, es decir, $z_{1t} = z_{2t} = 0$, y x_t es escalar ($n_1 = 1$). Además, generamos perturbaciones aleatorias a partir de una función de distribución Normal bivalente con media cero y una matriz de varianzas-covarianzas:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \omega_1\omega_2\delta \\ \omega_1\omega_2\delta & \omega_2^2 \end{bmatrix}.$$

Asimismo, consideramos los siguientes valores del coeficiente de correlación entre la variable independiente de la regresión de cointegración (x_t) y el término de perturbación aleatoria (u_t): $\delta = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ para cada uno de los posibles valores del parámetro AR(1) de u_t : $\rho = 1, 0.95, 0.9, 0.85, 0.8$. Debido a que los tests que comparamos en nuestro estudio de simulación son invariantes al valor que puede tomar β , podemos escoger cualquier valor para las varianzas. Nosotros fijamos $\omega_1 = \omega_2 = 0.25$ y $\beta = 1$, como en Pesavento (2000).

Las Tablas 1 y 2 muestran los resultados de tamaño y potencia de los test de cointegración CBB, DFA aplicado a los residuos y $\lambda_{m\acute{a}x}$ de Johansen para los tamaños muestrales $T = 100$ y $T = 50$, respectivamente,

y para los diferentes valores de δ señalados anteriormente. A partir de los resultados expuestos en estas tablas se observa que para valores de δ inferiores o iguales a 0.5, el test CBB es el que mayor potencia presenta. No obstante, la diferencia en términos de potencia es sustancial cuando se consideran diferentes tamaños muestrales, por ejemplo, cuando $\delta = 0.5$, $\rho = 0.8$ y $T = 100$ la potencia del test CBB es de 0.95, mientras que si $T = 50$ la potencia es de 0.53. Asimismo, cuando el coeficiente de correlación δ supera el valor 0.5, el test que mayor potencia presenta es el $\lambda_{m\acute{a}x}$ de Johansen, seguido del CBB, que tiene aún mayor potencia que el DFA y con un valor próximo a la unidad (0.94) si $T = 100$, $\delta = 0.9$ y $\rho = 0.8$. Sin embargo, si $T = 50$, la diferencia entre la potencia del CBB y el DFA con respecto al test $\lambda_{m\acute{a}x}$ de Johansen aumenta considerablemente, ya que si bien la potencia del test $\lambda_{m\acute{a}x}$, para un valor del parámetro $\delta = 0.9$ y $\rho = 0.8$, es de 0.98, el CBB tiene una potencia de 0.48 y el DFA de 0.35. Por tanto, un procedimiento basado en un sistema completo, como es el $\lambda_{m\acute{a}x}$ de Johansen, funciona mejor a medida que incrementa δ , aunque nuestro procedimiento funciona mejor para moderados valores de δ , y siempre tiene mejores propiedades que el test DFA basado en los residuos.

En cuanto al tamaño de los tests, éste es independiente de la existencia o no de correlación entre la variable independiente de la regresión de cointegración y el término de perturbación aleatoria. Además, la diferencia de tamaño de los tres test que hemos considerado en nuestro estudio es prácticamente insignificante.

3.6 Aplicación empírica

En la presente sección realizamos una aplicación empírica del contraste de cointegración CBB, que planteamos en la Sección 4 del presente Capítulo, para tratar de determinar la posible existencia de una relación estable entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en Alemania, España, Francia y Reino Unido. La importancia de hallar una relación de largo plazo entre estas dos series radica en tratar de analizar si se cumple o no el efecto Fisher (ver Sección 2 del Capítulo 2 para más detalles). Así, considerando el argumento de Ferrer (1998), expuesto en la Sección 2 del Capítulo precedente, bajo expectativas racionales, la inflación anticipada se obtiene como el valor esperado de la tasa de inflación condicionada al conjunto de información disponible en el momento presente. La ventaja de la adopción de este enfoque radica en que en el largo plazo, bajo los mecanismos convencionales de formación de expectativas, éstas son correctas y, por consiguiente, la inflación observada se puede utilizar como *proxy* de la inflación esperada. Por tanto, si hallamos una relación de cointegración entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación, podemos decir que se cumple el efecto Fisher.

La fuente de la que proceden los datos que utilizamos, así como el tamaño muestral son los mismos que los descritos en el apartado 5.1 del Capítulo precedente.

Para poder determinar la posible existencia de una relación de cointegración o de equilibrio a largo plazo entre el tipo de interés nominal y la

tasa de inflación, es necesario llevar a cabo un análisis preliminar sobre el p.g.d. de cada una de las series implicadas en dicha relación. Teniendo en cuenta los resultados expuestos en las tablas 1 a 6 del Capítulo anterior, no llegamos a una conclusión evidente acerca de su verdadero p.g.d., por lo que argumentábamos que ambas series no son procesos genuinos estacionarios ni procesos genuinos $I(1)$. En el presente Capítulo, ampliamos este estudio utilizando el test de raíces unitarias CBB desarrollado por Paparoditis y Politis (2001), que permite contrastar la H_0 de raíz unitaria, frente a la alternativa de estacionariedad.

En la Tabla 3 exponemos los resultados de la estimación del estadístico del test de raíces unitarias CBB de Paparoditis y Politis (2001) aplicado al tipo de interés nominal y a la tasa de inflación de Alemania, España, Francia y Reino Unido, así como los valores críticos calculados para el tamaño muestral de cada una de las series. El resultado que obtenemos es el no rechazo de la H_0 de raíz unitaria para todas las series. Por tanto, si tuviéramos en cuenta únicamente el resultado de este test, podríamos suponer que ambas series son procesos $I(1)$.

Partiendo de este supuesto, aplicamos el test de cointegración CBB que desarrollamos en el presente Capítulo, con el fin de tratar de hallar una relación estable entre estas dos series. El resultado que obtenemos (ver Tabla 4) es el rechazo de la H_0 de no cointegración, al nivel de significación del 5%, en Alemania, y, por consiguiente, la existencia de una relación de cointegración entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en este país o el cumplimiento del efecto Fisher. Por el contrario, no rechazamos

3.7. Conclusiones

esta H_0 para el resto de países. Los resultados obtenidos en el presente Capítulo difieren considerablemente de los obtenidos en el Capítulo precedente. Sin embargo, no es extraño que ocurra esto cuando en el presente Capítulo partimos de supuestos distintos, en relación al p.g.d. del tipo de interés nominal y de la tasa de inflación de los cuatro países considerados en nuestro estudio, y utilizamos procedimientos metodológicos diferentes para tratar de hallar una relación estable entre estas dos series.

3.7 Conclusiones

En el presente Capítulo proponemos un nuevo procedimiento para contrastar la H_0 de no cointegración, basado en el test de raíces unitarias desarrollado por Paparoditis y Politis (2001), que utiliza el procedimiento *continuous path block bootstrap* (CBB). Este procedimiento, permite generar pseudo-series raíces unitarias manteniendo la fuerte estructura de dependencia de las series observadas. La comparación de este nuevo test de cointegración con otros tests como el DFA y el de máximo autovalor de Johansen, a través de experimentos de Monte Carlo, pone de manifiesto que, en muestras pequeñas, el test CBB tiene buenas propiedades de tamaño y potencia en relación a los otros dos tests. Asimismo, como cabría esperar, su potencia resulta más elevada cuanto menor es el parámetro autorregresivo de los residuos de la relación de cointegración (ρ) y si no existe correlación entre la variable independiente de la regresión de cointegración y el término de perturbación aleatoria ($\delta = 0$). Por el contrario, si $\delta > 0.5$,

el test $\lambda_{máx}$ de Johansen es el que presenta una mayor potencia. Un resultado muy destacable es que, en cualquier caso, la potencia del test CBB supera a la del test DFA con independencia del tamaño muestral y de los valores de δ y ρ .

Por otra parte, realizamos una aplicación empírica del test de cointegración CBB, desarrollado en el presente Capítulo, con el fin de tratar de hallar una relación estable o de largo plazo entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación en Alemania, España, Francia y Reino Unido. Así, teniendo en cuenta los resultados obtenidos al aplicar el contraste CBB de raíces unitarias, concluimos que ambas series pueden ser procesos integrados de orden unitario y, por tanto, aplicamos el test de cointegración CBB a las mismas. El resultado que obtenemos es que en Alemania sí existe una relación estacionaria entre ambas series. Por tanto, si partimos del supuesto de expectativas racionales que, en el largo plazo y bajo los mecanismos convencionales de formación de expectativas, nos permite utilizar la inflación observada como sustituto de la inflación esperada, podemos decir que se cumple el efecto Fisher en este país. Sin embargo, en Francia, España y Reino Unido, no se cumple el efecto Fisher al no hallar una relación de cointegración entre ambas series.

Bibliografía

- [1] Ahlgren, N. (2000): Bootstrapping the error correction model cointegration test. Working Paper, 428, Department of Finance and Statistics. Swedish School of Economics and Business Administration. Comunicación en el *1st Nordic Econometric Meeting*, 25-27 de junio, 2001, Soenderborg, Dinamarca.
- [2] Banerjee, A., Dolado, J., Hendry, D. F., y Smith, G. W. (1986): Exploring equilibrium relationships in econometrics through static models: Some Monte Carlo evidence. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 48, 253-277.
- [3] Basawa, I. V., Mallik, A. K., McCormick, W. P., Reeves, J. H., Taylor, R. L. (1991a): Bootstrapping unstable first-order autoregressive processes. *The Annals of Statistics*, 19, 1098-1101.
- [4] Basawa, I. V. *et al.* (1991b): Bootstrap test of significance and sequential bootstrap estimation for unstable first order autoregressive processes. Comunicación en *Statistics: Theory&Methods*, 20, 1015-1026.

- [5] Berkowitz, J. y Kilian, L. (2000): Recent developments in bootstrapping time series. *Econometric Reviews*, 19, 1-48.
- [6] Boswijk, H. P. (1994): Testing for an unstable root in conditional and structural error correction models. *Journal of Econometrics*, 63, 37-60.
- [7] Boswijk, H. P. y Frances, P. H. (1992): Dynamic specification and cointegration. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54(3), 369-381.
- [8] Carlstein, E. (1986): The use of subseries values for estimating the variance of a general statistic from a stationary sequence. *Annals of Statistics*, 14, 1171-1179.
- [9] Cheung, Y. W., Lai, K. S. (1993): Finite-samples sizes of Johansen's likelihood ratio tests for cointegration. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 55(2), 313-328.
- [10] Cragg, J. G. y Donald, S. G. (1996): On the asymptotic properties of LDU-based tests of the rank of a matrix. *Journal of the American Statistical Association*, 91(435), 1301-1309.
- [11] Cuthbertson, K., Hall, S. C. y Taylor, M. P. (1992): *Applied Econometric Techniques*. Philip Allan, New York.
- [12] DeJong, D. N., Nankervis, J. C., Savin, N. E. y Whiteman, C. H. (1992): The power problems of unit root tests in time series with autoregressive errors. *Journal of Econometrics*, 53, 323-343.

Bibliografía

- [13] Dickey, D. A. (1976): Estimation and hypothesis testing in nonstationary time series, Ph.D. Dissertation (Iowa State University, Ames, IA).
- [14] Dickey, D. A. y Fuller, W. A. (1979): Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.
- [15] Dickey, D. A. y Fuller, W. A. (1981): Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49, 1057-1072.
- [16] Efron, B. (1979): Bootstrap methods: Another look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, 7, 1-26.
- [17] Efron, B. y Tibshirani, R. (1986): Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals, and other measures of statistical accuracy. *Statistical Science*, 1, 54-77.
- [18] Elliott, G. (1998): On the robustness of cointegration methods when regressors almost have a unit root. *Econometrica*, 66(1), 149-158.
- [19] Engle, R. F. y Granger C. W. J. (1987): Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica*, 55, 251-276.
- [20] Engle, R. F. y Yoo, B. S. (1987): Forecasting and testing in cointegrated systems. *Journal of Econometrics*, 35, 143-159.

- [21] Freedman, D. A. y Peters, S. C. (1984): Bootstrapping a regression equation: Some empirical results. *Journal of the American Statistical Association*, 79, 97-106.
- [22] Fuller, W. A. (1976): *Introduction to statistical time series*. Ed. Wiley. New York.
- [23] Gonzalo, J. (1994): Five alternative methods of estimating long-run equilibrium relationships. *Journal of Econometrics*, 60, 203-233.
- [24] Golub, G. H. y Loan, C. F. V. (1983): *Matrix computation*. North Oxford Academic.
- [25] Granger, C. W. J. (1983): Co-integrated variables and error correction models. UCSD Discussion Paper, 83-13.
- [26] Gregoir, S. y Laroque, G. (1994): Polynomial cointegration: Estimation and test. *Journal of Econometrics*, 63, 183-214.
- [27] Hall, P. y Horowitz, J. L. (1996): Bootstrap critical values for tests based on generalized-method-of-moments estimators. *Econometrica*, 64, p. 891-916.
- [28] Hamilton, J. D. (1994): *Time series analysis*. Princeton University Press, Princeton. New Jersey.
- [29] Hargreaves, C. (1994): A review of methods of estimating cointegrating relationships. En: *Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration*, 87-131, ed. C. Hargreaves. Oxford.

Bibliografía

- [30] Harris, R. I. D. (1995): *Using cointegration analysis in econometric modelling*. Prentice-Hall, London.
- [31] Harris, R. I. D. y Judge, G. (1998): Small sample testing for cointegration using the bootstrap approach. *Economics Letters*, 58, 31-37.
- [32] Hendry, D. F. (1987): *Econometric Methodology: A Personal Perspective*. En *Advances in Econometrics*, Vol. 2. Ed. Bewley, T. Cambridge University Press.
- [33] Hinkley, D. V. (1988): Bootstrap method. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 50, 321-337.
- [34] Hinkley, D. V. (1997): Discussion of Paper by H. Li & G. S. Maddala. *Journal of Econometrics*, 80, 319-323.
- [35] Horowitz, J. L. (1999): The bootstrap. *Handbook of Econometrics*, vol. 5.
- [36] Inder, B. (1993): Estimating long-run relationships in economics. *Journal of Econometrics*, 57, 53-68.
- [37] Jeong, J. y Maddala (1993): A perspective on application of bootstrap methods in econometrics. En *Handbook of Statistics*, Vol. 11, 573-610, eds. Maddala, G. S., Rao, C. R. y Vinod, H.D: Econometrics. North-Holland, Amsterdam.
- [38] Johansen, S. (1988): Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231-254.

- [39] Johansen, S. (1991): Estimation and hypothesis testing of cointegrating vectors in gaussian vector autoregressive models. *Econometrica*, 59, 1551-1580.
- [40] Johansen, S. (1995): Likelihood based inference in cointegrated autoregressive models. Oxford: Oxford University Press.
- [41] Johansen, S. y Juselius, K. (1990): Maximum likelihood estimation and inference on cointegration, with applications to the demand for money. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52, 169-210.
- [42] Johansen, S. y Juselius, K. (1992): Testing structural hypotheses in a multivariate cointegration analysis of the PPP and the UIP for UK. *Journal of Econometrics*, 53, 211-244.
- [43] Kapetanios, G. y Camba-Mendez, G. (1999): A bootstrap test of cointegration rank. Mimeo, 1999.
- [44] Kiviet, J. F. y Phillips, G. D. A. (1992): Exact similar tests for unit roots and cointegration. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, 349-367.
- [45] Kremers, J. J. M., Ericsson, N. R. y Dolado, J. J. (1992): The power of cointegration tests. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, 325-348.
- [46] Künsch, H. R. (1989): The jackknife and the bootstrap for general stationary observations. *The Annals of Statistics*, 17, 1217-1241.

Bibliografía

- [47] Li, Y. (1994): Bootstrapping cointegrating regression. *Economics Letters*, 44, 229-233.
- [48] Li, H. y Maddala, G. S. (1995): *Estimating long-run economic relationships in economics: Some comments and further results*. Department of Economics. The Ohio State University.
- [49] Li, H. y Maddala, G. S. (1996): Bootstrapping time series models. *Econometric Reviews*, 15(2), 115-158.
- [50] Li, H. y Maddala, G. S. (1997): Bootstrapping cointegrating regressions. *Journal of Econometrics*, 80, 297-318.
- [51] Liu, R. Y. y Singh, K. (1992): Moving blocks jackknife and bootstrap capture weak dependence. En *Exploring the Limits of Bootstrap*, 225-248. Eds. R. LePage y L. Billard. Wiley, New York.
- [52] Maddala, G. S. y Kim, I. -M. (1998): Unit roots, cointegration, and structural change. Cambridge: Cambridge University Press.
- [53] Mantalos, P. y Shukur, G. (1998): Size and power of the error correction model cointegration test. A bootstrap approach. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 60, 249-255.
- [54] Osterwald-Lenum, M. (1992): A note with quantiles of the asymptotic distribution of the maximum likelihood cointegration rank test statistics. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54(3), 461-472.

- [55] Paparoditis, E. y Politis, D. (2001): Unit root testing via the continuous-path block bootstrap. Discussion Paper, 6. University of California, San Diego.
- [56] Park, J. Y. (1990): Testing for unit roots and cointegration by variable addition. En *Advances in Econometrics*, Vol. 8, 107-133. T. B. Fomby y G. F. Rhodes (Eds.). JAI Press.
- [57] Park, J. Y. (1992): Canonical cointegration regression. *Econometrica*, 60(1), 119-144.
- [58] Pesavento, E. (2000): Analytical evaluation of the power of tests for the absence of cointegration. Discussion Paper, 24. Department of Economics. University of California. San Diego.
- [59] Peters, S. C. y Freedman, D. A. (1984): Some notes on the bootstrap in regression problems. *Journal of Business and Economic Statistics*, 2, 406-409.
- [60] Phillips, P. C. B. y Hansen, B. E. (1990): Statistical inference in instrumental variable regression with I(1) processes. *Review of Economic Studies*, 57, 99-125.
- [61] Phillips, P. C. B. y Loretan, M. (1991): Estimating long-run economic equilibria. *Review of Economic Studies*, 58, 407-436.
- [62] Phillips, P. C. B. y Ouliaris, S. (1990): Asymptotic properties of residuals based tests for cointegration. *Econometrica*, 58, 165-193.

Bibliografía

- [63] Politis, D. N. y Romano, J. P. (1994): The stationary bootstrap. *Journal of American Statistical Association*, 89, 1303-1313.
- [64] Podivinsky, J. M. (1990): Testing misspecified cointegration relationships. Working Paper, 19.90, Department of Econometrics, Monash University.
- [65] Rayner, R. K. (1991): Resampling methods for tests in regression models with autocorrelated errors. *Economics Letters*, 36, 281-284.
- [66] Reimers, H. E. (1992): Comparison of tests for multivariate cointegration. *Statistical Papers*, 33, 335-359.
- [67] Said, S. E. y Dickey, D. A. (1984): Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order. *Biometrika*, 71, 599-608.
- [68] Saikkonen, P. (1992): Estimation and testing of cointegrated systems by an autoregressive approximation. *Econometric Theory*, 8, 1-27.
- [69] Schwert, G. W. (1989): Tests for unit roots: A Monte Carlo Investigation. *Journal of Business and Economic Statistics*, 7, 147-159.
- [70] Shea, G. S. (1989a): A re-examination of excess rational price approximations and excess volatility in the stock market. En *A Reappraisal of the Efficiency of Financial Markets*. Eds. R. M. C. Guimaraces *et al.* Springer, Berlin.

- [71] Shea, G. S. (1989b): Ex-post rational price approximations and the empirical reliability of the present-value relation. *Journal of Applied Econometrics*, 4, 139-159.
- [72] Snell, A. (1999): Testing for r versus $r - 1$ cointegrating vectors. *Journal of Econometrics*, 88, 151-191.
- [73] Stock, J. H. y Watson, M. W. (1988): A simple estimator of cointegrating vectors in higher order integrated systems. *Econometrica*, 61, 783-820.
- [74] van Giersbergen, N. (1996): Bootstrapping the trace statistic in VAR models: Monte Carlo results and applications. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 58829, 391-408.
- [75] Watson, M. W. (1994): Vector autoregression and cointegration. En *Handbook of Econometrics*, vol. 4. Ed. D. Mc Fadden y R. F. Engle. Amsterdam: North Holland, 2639-2738.

Bibliografía

339

341