



industriales
etsii

Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

ENTROPÍA DE PERMUTACIÓN FRACCIONAL EN SERIES TEMPORALES

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL

Autor: Jorge Martínez Reyes

Director: José Salvador Cánovas Peña



Universidad
Politécnica
de Cartagena

Cartagena, 25 de agosto de 2021

A mis padres.

ÍNDICE

Índice de tablas.....	4
Índice de figuras.....	5
1. INTRODUCCIÓN A LAS SERIES TEMPORALES.....	7
1.1. Ejemplos.....	7
1.2. Clasificación.....	9
1.3. Análisis.....	10
1.4. Modelos lineales y no lineales.....	11
2. PERMUTACIONES Y ENTROPÍA.....	13
2.1. Permutaciones en una serie temporal.....	13
2.2. Entropía de permutación.....	15
2.3. Funciones de entropía.....	15
3. APLICACIÓN DE FUNCIONES DE ENTROPÍA EN LA DETECCIÓN DE CAMBIOS ESTRUCTURALES EN SERIES TEMPORALES.....	19
3.1. Datos simulados.....	21
Ejemplo 1.....	22
Ejemplo 2.....	26
Ejemplo 3.....	30
Ejemplo 4.....	34
Ejemplo 5.....	38
Ejemplo 6.....	42
4. ANÁLISIS DE DATOS REALES.....	47
4.1. Tipo de cambio entre el oro y el dólar estadounidense.....	47
4.2. Electrocardiograma con taquiarritmia.....	51
4.3. Electrocardiograma con arritmia débil.....	54
4.4. Índice de producción industrial (IPI) de energía en España.....	59
4.5. Nuevos casos diarios de COVID-19 en España.....	63
4.6. Pacientes hospitalizados por COVID-19 por mil habitantes en España.....	68
5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	73
BIBLIOGRAFÍA.....	74
ANEJO I: Código utilizado en Matlab.....	75

Índice de tablas

<i>Tabla 1. Ejemplo de serie no lineal.</i>	11
<i>Tabla 2. Parámetros para el cálculo de permutaciones.</i>	20
<i>Tabla 3. Parámetros seleccionados para el análisis del ejemplo 1.</i>	22
<i>Tabla 4. Parámetros estadísticos del ejemplo 1.</i>	24
<i>Tabla 5. Parámetros seleccionados para el análisis del ejemplo 2.</i>	27
<i>Tabla 6. Parámetros estadísticos del ejemplo 2.</i>	28
<i>Tabla 7. Parámetros seleccionados para el análisis del ejemplo 3.</i>	30
<i>Tabla 8. Parámetros estadísticos del ejemplo 3.</i>	32
<i>Tabla 9. Parámetros seleccionados para el análisis del ejemplo 4.</i>	35
<i>Tabla 10. Parámetros estadísticos del ejemplo 4.</i>	36
<i>Tabla 11. Parámetros seleccionados para el análisis del ejemplo 5.</i>	39
<i>Tabla 12. Parámetros estadísticos del ejemplo 5.</i>	40
<i>Tabla 13. Parámetros seleccionados para el análisis del ejemplo 6.</i>	42
<i>Tabla 14. Parámetros estadísticos del ejemplo 6.</i>	45
<i>Tabla 15. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 1.</i>	47
<i>Tabla 16. Parámetros estadísticos del caso real 1.</i>	50
<i>Tabla 17. Parámetros estadísticos del caso real 1 (serie estacionaria).</i>	50
<i>Tabla 18. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 2.</i>	51
<i>Tabla 19. Parámetros estadísticos del caso real 2.</i>	53
<i>Tabla 20. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 3 (a).</i>	54
<i>Tabla 21. Parámetros estadísticos del caso real 3 (a).</i>	56
<i>Tabla 22. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 3 (b).</i>	56
<i>Tabla 23. Parámetros estadísticos del caso real 3 (b).</i>	58
<i>Tabla 24. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 4.</i>	59
<i>Tabla 25. Parámetros estadísticos del caso real 4.</i>	62
<i>Tabla 26. Parámetros estadísticos del caso real 4 (serie estacionaria).</i>	62
<i>Tabla 27. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 5 (a).</i>	63
<i>Tabla 28. Parámetros estadísticos del caso real 5 (a).</i>	65
<i>Tabla 29. Parámetros estadísticos del caso real 5 (a) (serie estacionaria).</i>	65
<i>Tabla 30. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 5 (b).</i>	66
<i>Tabla 31. Parámetros estadísticos del caso real 5 (b).</i>	67
<i>Tabla 32. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 6 (a).</i>	68
<i>Tabla 33. Parámetros estadísticos del caso real 6 (a).</i>	70
<i>Tabla 34. Parámetros estadísticos del caso real 6 (a) (serie estacionaria).</i>	70
<i>Tabla 35. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 6 (b).</i>	70
<i>Tabla 36. Parámetros estadísticos del caso real 6 (b).</i>	72

Índice de figuras

Figura 1. Temperatura media en Madrid de 1997 a 2005.....	8
Figura 2. Pasajeros de avión mensuales en vuelos internacionales.	8
Figura 3. Tasa de paro trimestral en la Región de Murcia de 2002 a 2021. Fuente: INE.	8
Figura 4. Índice de precios de consumo (IPC) en España de 2002 a 2021. Fuente: INE.	9
Figura 5. Serie temporal de un mercado de valores.	9
Figura 6. Serie heterocedástica (izq.) y homocedástica (der.).	10
Figura 7. Serie estacionaria.	10
Figura 8. Gráfica de serie no lineal.	12
Figura 9. Esquema de la simulación en el cálculo de permutaciones.	20
Figura 10. Resultados gráficos del ejemplo 1.	23
Figura 11. Resultados gráficos del ejemplo 2.	27
Figura 12. Resultados gráficos del ejemplo 3.	31
Figura 13. Resultados gráficos del ejemplo 4.	35
Figura 14. Resultados gráficos del ejemplo 5.	39
Figura 15. Resultados gráficos del ejemplo 6.	44
Figura 16. Resultados gráficos del caso real 1.....	48
Figura 17. Resultados gráficos del caso real 1 (serie estacionaria).	49
Figura 18. Resultados gráficos del caso real 2.....	52
Figura 19. Señal ECG en bruto con arritmia débil.....	54
Figura 20. Resultados gráficos del caso real 3 (a).	55
Figura 21. Resultados gráficos del caso real 3 (b).	57
Figura 22. Resultados gráficos del caso real 4.....	60
Figura 23. Resultados gráficos del caso real 4 (serie estacionaria).	61
Figura 24. Resultados gráficos del caso real 5 (a).	63
Figura 25. Resultados gráficos del caso real 5 (a) (serie estacionaria).	64
Figura 26. Resultados gráficos del caso real 5 (b).	66
Figura 27. Resultados gráficos del caso real 6 (a).	68
Figura 28. Resultados gráficos del caso real 6 (a) (serie estacionaria).	69
Figura 29. Resultados gráficos del caso real 6 (b).	71

1. INTRODUCCIÓN A LAS SERIES TEMPORALES

Cuando tratamos de entender y analizar el mundo exterior, frecuentemente realizamos mediciones secuenciales en el tiempo de una variable. Frecuentemente, los valores futuros dependen de los presentes, de forma determinista o con una componente estocástica más o menos importante. Dicha dependencia posibilita la predicción de valores futuros sobre la variable, salvo que el fenómeno sea totalmente aleatorio.

Una serie temporal es una colección de observaciones de una variable realizadas de forma secuencial en el tiempo. Los valores de la serie temporal van ligados a un instante de tiempo, por lo que el orden es de una importancia capital a la hora de analizar el conjunto de datos. Variar el orden supone modificar la información contenida en la serie temporal [9] [6].

De forma matemática, la serie temporal se define como una realización de N variables ordenadas en el tiempo. Cada dato representa una observación de la variable X_t , vinculada con el estado t .

($x_t: t = 1, \dots, N$), donde X_t es la observación t de la serie y N es el número de observaciones de la serie completa

1.1. Ejemplos.

Las series temporales se encuentran principalmente en contextos financieros, empresariales, físicos, matemáticos o biológicos. Entre las series temporales más comunes destaca la evolución del paro laboral en un país, el precio de las acciones de una empresa, la temperatura global del planeta o el índice de natalidad.

A continuación, se incluyen algunos ejemplos de series temporales, identificando ciertas características propias.

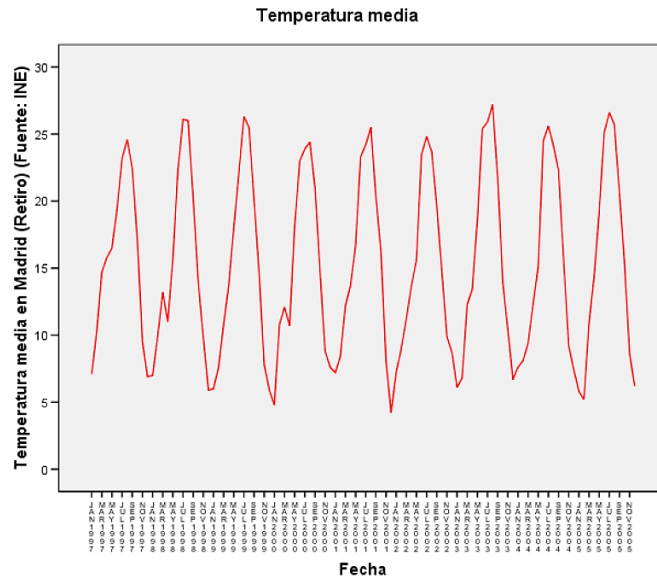


Figura 1. Temperatura media en Madrid de 1997 a 2005.

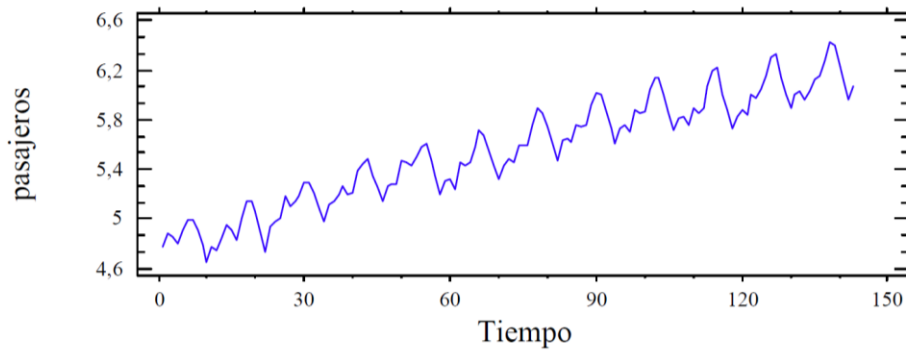


Figura 2. Pasajeros de avión mensuales en vuelos internacionales.

En la figura 1 se observa la temperatura media en la ciudad de Madrid durante 8 años. Se observa una tendencia constante y una periodicidad anual. Sin embargo, en la figura 2 se observa una tendencia claramente creciente y lineal, con una periodicidad anual.

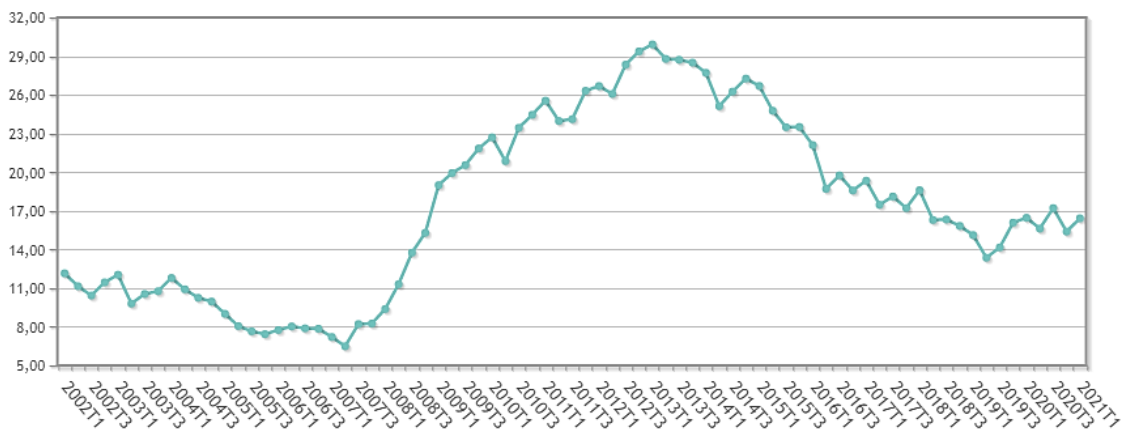


Figura 3. Tasa de paro trimestral en la Región de Murcia de 2002 a 2021. Fuente: INE.

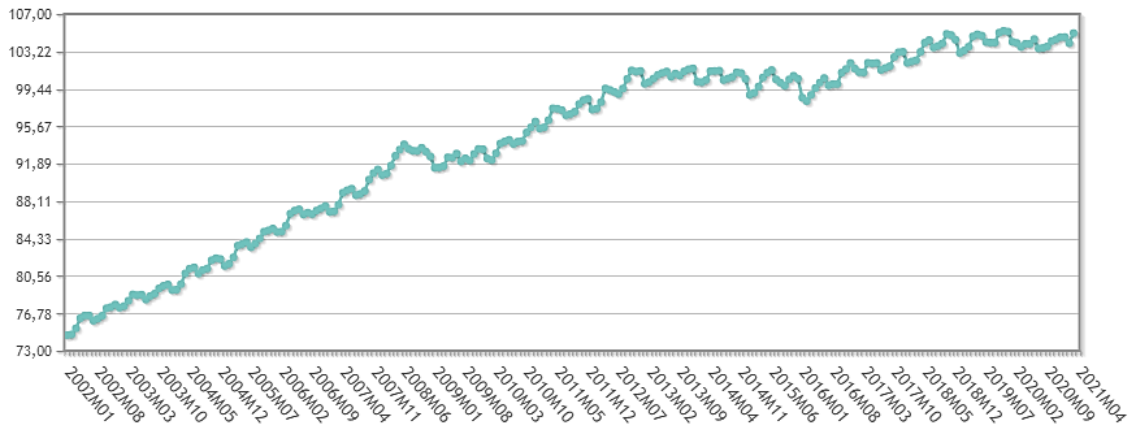


Figura 4. Índice de precios de consumo (IPC) en España de 2002 a 2021. Fuente: INE.

En las figuras 3 y 4 observamos un ejemplo de parámetro social y otro de parámetro económico-social. En el segundo se observa una clara tendencia ascendente.

1.2. Clasificación.

Las series temporales se pueden clasificar atendiendo a varios aspectos [9]. Por ejemplo:

- Según el carácter aleatorio que posean se clasifican en series deterministas o estocásticas. En el primer caso, el comportamiento futuro de la serie está completamente determinado. Sin embargo, en el segundo caso, no se puede predecir el valor futuro con exactitud o incluso puede llegar a ser impredecible si tenemos una componente aleatoria con mucho peso.

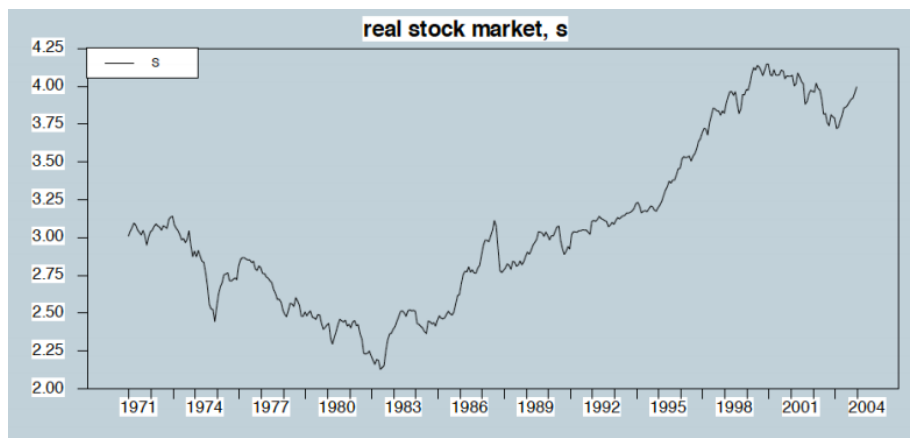


Figura 5. Serie temporal de un mercado de valores.

En la figura 5 se observa una serie temporal con un gran carácter estocástico.

- Según la variabilidad que presentan se clasifican en series homocedásticas o heterocedásticas. En el primer tipo, la dispersión de los datos es constante, lo que se traduce en una varianza constante. Las series heterocedásticas presentan una dispersión variable a lo largo del tiempo.

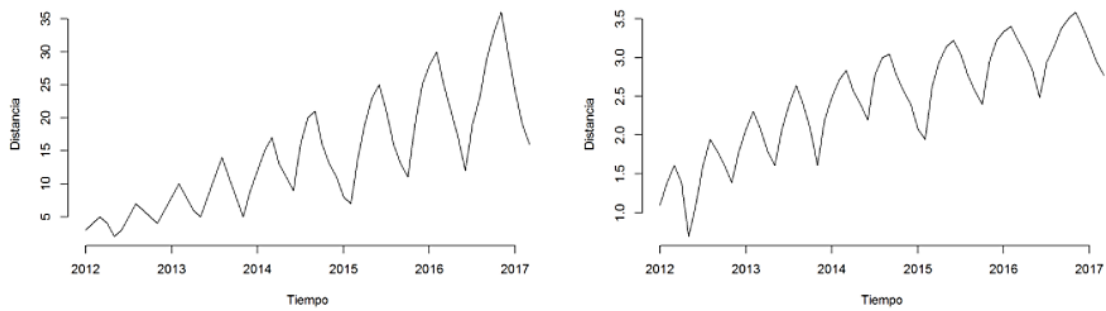


Figura 6. Serie heterocedástica (izq.) y homocedástica (der.).

En la figura 6 se aprecia claramente una varianza no constante en la serie de la izquierda y una varianza constante en el caso de la derecha.

- Según la variación de la media y la varianza a lo largo del tiempo, podemos distinguir entre series estacionarias y no estacionarias. En el primer caso, tanto la media como la variabilidad son constantes a lo largo del tiempo. Si alguno de los dos parámetros varía con el tiempo, la serie es no estacionaria.

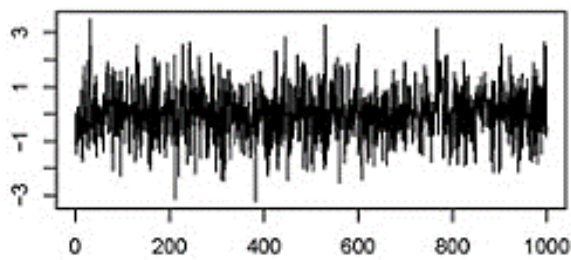


Figura 7. Serie estacionaria.

En la figura 7 se muestra una serie estacionaria, donde no se distingue variación ni en la media ni en la varianza.

1.3. Análisis.

El análisis de las series temporales persigue varios objetivos [3]. De forma general, la estadística entiende las series como un proceso con componentes estocástica y determinista. Una de las características principales de las series temporales es que sus valores presentes y futuros son dependientes de los pasados. El objetivo fundamental del análisis es hallar la ley de probabilidad que gobierna la serie temporal y que explica dicha dependencia. Teniendo como objetivo:

- Comprender la dinámica interna de la serie.
- Predecir eventos futuros.
- Tener la capacidad para intervenir sobre ciertos procesos.

El primer paso para estudiar una serie temporal es representarla gráficamente y considerar las medidas descriptivas básicas. El estudio descriptivo se basa en obtener las componentes de la serie temporal [4]. Las componentes que se consideran de forma general son:

- *Tendencia.* Se define como un cambio a largo plazo que se produce en relación al nivel medio o el cambio a largo plazo de la media.
- *Estacionalidad.* Es la componente periódica de la serie.
- *Aleatoriedad.* Una vez eliminadas las componentes anteriores, persisten unos valores aleatorios. Se estudia su comportamiento y se aplica un modelo probabilístico que los describa.

1.4. Modelos lineales y no lineales.

En cuanto a las técnicas más desarrolladas para el modelado y predicción de series temporales destacan los modelos lineales y no lineales [16]. Dentro de los modelos lineales, los más populares son los modelos autorregresivos de media móvil (ARMA). Los modelos lineales son los más fáciles de utilizar y proporcionan buenos resultados en muchas aplicaciones. Una serie temporal x_t es lineal si se puede denotar como sigue:

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i}$$

Donde μ y ψ_i son número reales con $\psi_0 = 1$ y $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$.

No obstante, las series temporales empíricas o experimentales suelen tener un carácter no lineal, generalmente las que observan o miden un parámetro del mundo real. Es en estos casos donde los modelos no lineales proporcionan una exactitud mayor, útil en numerosos casos. A continuación, se muestra un ejemplo de serie temporal no lineal:

$$X_t = \frac{2X_{t-1}}{1 + 0,8X_{t-1}^2}$$

Para $X_0 = 0,1$ obtenemos la siguiente serie temporal:

Tabla 1. Ejemplo de serie no lineal.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Xt	0,100	0,198	0,385	0,688	0,998	1,111	1,118	1,118	1,118	1,118	1,118	1,118	1,118	1,118	1,118	1,118	1,118	1,118	1,118	1,118	1,118	1,118

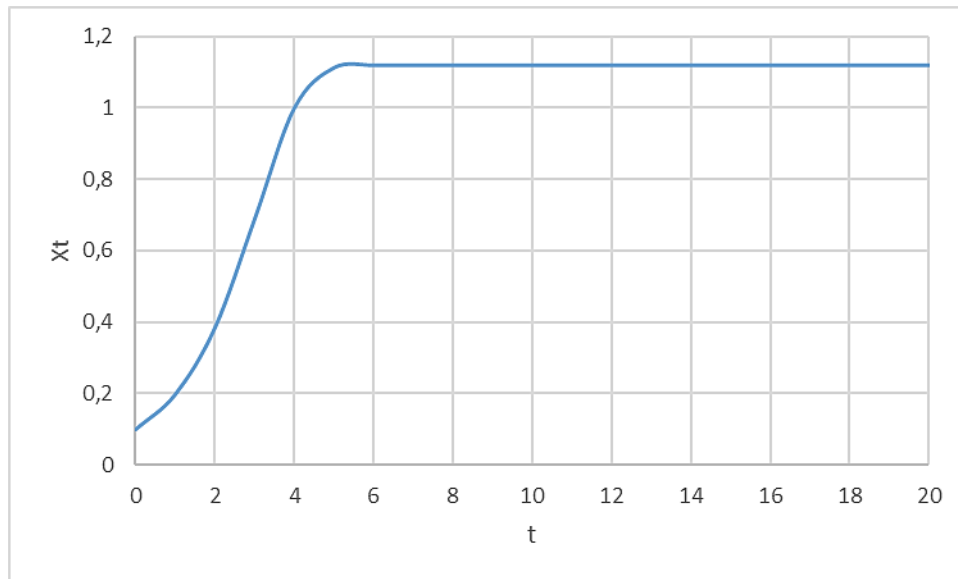


Figura 8. Gráfica de serie no lineal.

Una vez introducidos varios conceptos sobre series temporales, veamos de que forma concreta vamos a estudiarlas en el siguiente capítulo de este proyecto.

2. PERMUTACIONES Y ENTROPÍA

El análisis de series temporales incluye el estudio de cambios estructurales obtenidos a partir de una medida de la complejidad de la serie. Las modificaciones estructurales en una serie temporal aparecen como consecuencia de un cambio, reflejado en la variable que se está midiendo u observando. Se puede decir que los cambios estructurales responden a una perturbación profunda en el sistema [16]. Estas variaciones son comunes en señales eléctricas del campo de la medicina, señales acústicas o datos económicos. Como se ha visto anteriormente, los valores futuros de la serie temporal dependen de los valores pasados, por lo que la búsqueda de estos fenómenos presenta gran importancia. Su detección nos permite localizar variaciones en la estructura global de un sistema, realizar actuaciones para prevenir situaciones indeseadas o simplemente mejorar la compresión del conjunto.

2.1. Permutaciones en una serie temporal.

Debido a su naturaleza, algunos cambios estructurales no son fácilmente detectables con la representación gráfica de la serie temporal, sino que su búsqueda requiere del tratamiento de los datos numéricos. Es difícil analizar los valores en bruto de la serie temporal, por lo que es necesario un método de codificación que extraiga la información precisa. En este caso, la información a extraer va encaminada hacia la medida de la complejidad de la serie. Uno de los métodos más sencillos y que es válido para todo tipo de series temporales (caóticas, deterministas, con ruido...) es mediante las permutaciones [1]. A continuación, se explica dicho método de forma precisa [7].

Definición 1. Sea $(x_n)_{n=1}^T, T \in \mathbb{N}$ una serie temporal, donde $x_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \{1, \dots, T\}$. Dentro de la serie completa seleccionamos una ventana deslizante dada por

$$x_m(l) = (x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+m-1})$$

para $1 \leq l \leq T - m + 1$, donde m es un número natural fijado.

El parámetro m marca el tamaño de la ventana deslizante y se denomina *dimensión de embedding*. La ventana, como su denominación indica, recorre toda la serie temporal. El salto entre una ventana y la siguiente se puede realizar con o sin solapamiento, esto es, utilizando valores de la serie de la anterior ventana o no. La variable i da cuenta del solapamiento, indicando el número de posiciones que avanza la ventana siguiente. A continuación, se obtienen las permutaciones en cada una de estas ventanas como sigue.

Definición 2. Sea $m \in \mathbb{N}$ un número natural fijado y $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in S_m$ una permutación. La ventana deslizante

$$x_m(l) = (x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+m-1})$$

se dice que es de tipo π si es la única permutación que cumple las siguientes condiciones:

1. $x_{l+i_1} \leq x_{l+i_2} \leq \dots \leq x_{l+i_m}$
2. $i_{s-1} \leq i_s$ if $x_{l+i_{s-1}} = x_{l+i_s}$

Sea S_m el conjunto de permutaciones de longitud m . El número de permutaciones viene dado por $|S_m| = m!$.

Definición 3. Sea $(x_n)_{n=1}^T, m \in \mathbb{N}$ y $\pi \in S_m$, entonces la *frecuencia relativa* de la permutación π se define como

$$p(\pi) = \frac{|\{j: x_m(j), \text{ es de tipo } \pi, j = 1, 2, \dots, T - m + 1\}|}{T - m + 1}$$

es decir, el número de veces que la permutación se repite entre el total de permutaciones halladas. La suma de las frecuencias relativas de todas las permutaciones es igual a 1.

Una permutación $\pi \in S_m$ tal que $p(\pi) > 0$ se denomina *permutación admisible* de orden m . $A_m \subset S_m$ es el conjunto de permutaciones admisibles. El número de permutaciones admisibles se denota por $NAP(m)$.

Ejemplo aclaratorio. A continuación, se incluye un caso simple de cálculo de permutaciones y su periodicidad. Tomamos la siguiente serie temporal:

$$(0.1, 0.3, 0.05, 0.4)$$

Sea $V_m(j)$ la ventana extraída de longitud m comenzando en la posición j .

Para $m = 2$ y $i = 2$:

$$V_2(1) = (0.1, 0.3) \rightarrow \pi = (1,2)$$

$$V_2(3) = (0.05, 0.4) \rightarrow \pi = (1,2)$$

$$p(1,2) = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$p(2,1) = \frac{0+0}{2} = 0$$

Para $m = 3$ y $i = 1$:

$$V_3(1) = (0.1, 0.3, 0.05) \rightarrow \pi = (2,3,1)$$

$$V_3(2) = (0.3, 0.05, 0.4) \rightarrow \pi = (2,1,3)$$

$$p(2,3,1) = p(2,1,3) = \frac{1}{2}$$

$$p(1,2,3) = p(1,3,2) = p(3,1,2) = p(3,2,1) = 0$$

2.2. Entropía de permutación.

La entropía de un sistema es la tasa de generación de nueva información o, equivalentemente, destrucción de vieja información. La entropía es una medida de la rapidez con la que información relacionada con el estado actual del sistema se convierte en irrelevante [12].

Dada una serie temporal $x_n, 1 \leq n \leq T$, la *entropía de permutación de Shannon* se define como sigue [6]:

$$H^S(x_n, m) = - \sum_{\pi \in A_m} p(\pi) \log p(\pi)$$

Ecuación 1

La entropía de permutación de Shannon debe su nombre a Claude Shannon, que introdujo la noción como una medida de la información. Matemáticamente, si tenemos probabilidades p_1, \dots, p_k , la entropía de Shannon es $H^S(p_1, \dots, p_k) = - \sum_{i=1}^k p_i \log p_i$. En la entropía de permutación, p_i son las frecuencias relativas de cada permutación.

Además, se cumple que $H^S(p_1, \dots, p_k) \leq \log k$ y el valor $\log k$ se alcanza cuando $p_i = \frac{1}{k}$, para $i = 1, 2, \dots, k$.

La entropía también mide lo caótico o determinista de un suceso. Por ejemplo, la serie temporal cuyos valores son todos iguales tendrá entropía nula. Por otro lado, un fenómeno de sucesos equiprobables (tirar una moneda al aire), tendrá entropía máxima.

2.3. Funciones de entropía.

En las últimas tres décadas, ha habido gran interés en generalizar la entropía de Shannon (Ecuación 1), así como investigar las consecuencias de aplicar estas nuevas expresiones a los campos de la física. Según [18], la entropía de Shannon puede escribirse como:

$$\left[-\frac{d}{d\alpha} \right] h(\alpha) \Big|_{\alpha=1} = -\sum_i p_i \log p_i := H^S(p_1, \dots, p_k)$$

Con $h(\alpha) \equiv \sum_i p_i^\alpha$, según [10].

Si sustituimos el término derivativo por la q-derivada de Jackson [5]:

$$D_{\alpha;q}^{(J)} f(x) = \frac{F(qx) - f(x)}{qx - x}$$

Nos queda la expresión de la **entropía de Tsallis** [10] [19]:

$$\left[D_{\alpha;q}^{(J)} \right] h(\alpha) \Big|_{\alpha=1} = \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1} := H_q^T(p_1, \dots, p_k)$$

Ecuación 2

Nótese que para el límite $q \rightarrow 1$ se tiene la expresión general de Shannon.

También aparece la **entropía de Rènyi** [17]:

$$H_r^R(p_1, \dots, p_k) = \frac{\log(\sum_{\pi \in A_m} p(\pi)^r)}{r}$$

Ecuación 3

En 2001, **Akimoto y Suzuki** [10] proponen una función uniparamétrica como sigue:

$$H_q^{AK}(p_1, \dots, p_k) = -\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{i=1}^n \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} e^{x \log p_i}$$

llegando finalmente a la siguiente expresión:

$$H_\alpha^{AK}(p_1, \dots, p_k) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha - 1}{\Gamma(2 - \alpha)} F_1^1(1, 1 - \alpha, \log p_i) \quad \text{para } 0 < \alpha < 1$$

Ecuación 4

donde $\Gamma(2 - \alpha)$ es la función gamma con parámetro $2 - \alpha$, y $F_1^1(1, 1 - \alpha, \log p_i)$ es la función hipergeométrica confluyente de primer tipo. También se cumple que el límite $\alpha \rightarrow 1$ coincide con la entropía de Shannon.

La función gamma se define para $x > 0$ por la siguiente integral [2]:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Ecuación 5

La función hipergeométrica confluyente de primer tipo se define como sigue [13]:

$$F_1^1(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a z^n}{b n!}$$

Ecuación 6

En 2009, **Ubriaco** propone la función [11]:

$$H_{\alpha}^U(p_1, \dots, p_k) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\tau \log p_i}}{(x - \tau)^{\alpha}} d\tau$$

Obteniendo:

$$H_{\alpha}^U(p_1, \dots, p_k) = \sum_{i=1}^n p_i (-\log p_i)^{\alpha} \quad \text{para } 0 < \alpha < 1$$

Ecuación 7

En 2014, Radhakrishnan y otros introducen la siguiente función biparamétrica [15]:

$$H_{q,\alpha}^{RCJ}(p_1, \dots, p_k) = \sum_{i=1}^n p_i^q (-\log p_i)^{\alpha} \quad \text{para } q, \alpha > 0$$

Tomando $\alpha = 1$ llegamos a la expresión de **Wang**:

$$H_q^W(p_1, \dots, p_k) = \sum_{i=1}^n p_i^q (-\log p_i) \quad \text{para } q > 0$$

Ecuación 8

También en 2014, **Machado** obtiene la siguiente expresión para la entropía [8]:

$$H_{\alpha}^M(p_1, \dots, p_k) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{p_i^{-\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)} \log p_i + \tilde{\psi} \right)$$

Ecuación 9

Donde $\tilde{\psi} = \psi(1) - \psi(1 - \alpha)$. El operador ψ representa la función digamma.

La función digamma se define como la primera derivada del logaritmo natural de la función gamma (5), para $x > 0$:

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Ecuación 10

Finalmente, en 2019, **Ferreira y Machado** introducen [14]:

$$H_{\alpha}^{FM}(p_1, \dots, p_k) = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\Gamma(1 - \log p_i)}{\Gamma(1 - \alpha - \log p_i)} \quad \text{para } 0 < \alpha \leq 1$$

Ecuación 11

Todas estas expresiones se utilizan, a continuación, para probar la detección de cambios estructurales en series temporales.

3. APLICACIÓN DE FUNCIONES DE ENTROPÍA EN LA DETECCIÓN DE CAMBIOS ESTRUCTURALES EN SERIES TEMPORALES

Como se ha visto en los apartados 2.2 y 2.3, dadas las frecuencias relativas de cada una de las permutaciones, las funciones de entropía nos ofrecen un valor del desorden de la serie temporal. Sin embargo, para poder detectar un cambio estructural o interno, es preciso obtener numerosos valores de entropía a lo largo de la serie completa. Por ello, es necesario dividir inicialmente la serie en intervalos más reducidos, a los que denominaremos ventanas exteriores.

Se elabora un código en el software Matlab que recorre la totalidad de la serie temporal según el procedimiento descrito en el apartado 2.1 y en el párrafo anterior. A continuación, se describe en detalle.

En primer lugar, se establece un valor para la dimensión de embedding, es decir, el parámetro m . De esta forma, queda fijado el tamaño de las ventanas interiores. La longitud de las ventanas exteriores también se establece según el parámetro $k = 5m!$, según [7].

Comenzando por el primer valor de la serie, se extrae un vector de longitud k , al que podemos denominar ventana exterior. A su vez, de dicho vector se vuelve a extraer otro de tamaño m , al que podemos denominar ventana interior. Sobre este último vector se calculan las permutaciones asociadas. La ventana interior avanza según el parámetro de solapamiento i , que indica el número de posiciones que avanza dentro de la ventana exterior. Si $i = 1$ se dice que tenemos solapamiento total y si $i = m$ no existe solapamiento. El análisis de cada ventana exterior termina cuando no es posible extraer una ventana interior de tamaño m .

En dicho punto, se está en condiciones de calcular las periodicidades de cada permutación y obtener un valor de entropía. A continuación, la ventana exterior avanza sobre la serie completa. El avance de esta ventana está marcado por el parámetro de solapamiento exterior s , de igual forma que el parámetro i en la ventana interior. El cálculo finaliza cuando se ha evaluado la serie temporal completa. Obtenemos un vector de valores de entropía de tamaño igual al número de ventanas exteriores evaluadas.

En la siguiente tabla y figura se muestran los parámetros que intervienen y cómo afectan al conjunto de la serie temporal.

Tabla 2. Parámetros para el cálculo de permutaciones.

T	Tamaño de la serie
k	Tamaño de la ventana exterior
s	Solapamiento externo. $s \in [1, k]$, donde 1 es solapamiento total y k sin solapamiento.
m	Dimensión incrustada. Tamaño de ventana interior, donde se evalúan las permutaciones.
i	Solapamiento interno. $i \in [1, m]$, donde 1 es solapamiento total y m sin solapamiento.
$p(\pi)$	Frecuencia de cada permutación.

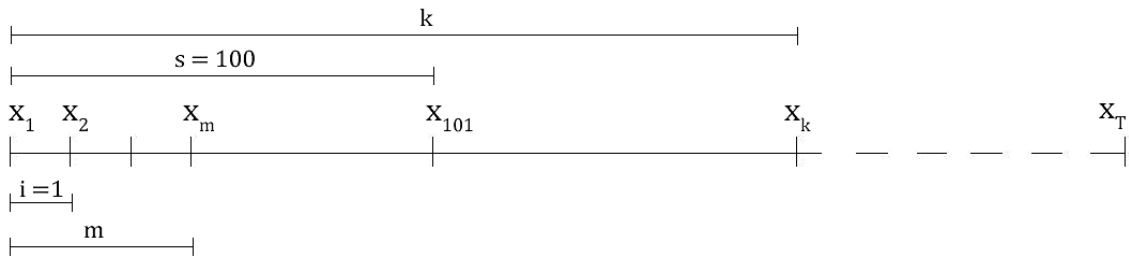


Figura 9. Esquema de la simulación en el cálculo de permutaciones.

Ejemplo aclaratorio. Se incluye un caso trivial de ejemplo para ilustrar mejor el cálculo de las permutaciones y su periodicidad.

Tomamos $T = 15, m = 2, k = 10, s = 2, i = 1$ con la serie:

$$(0.8, 0.03, 0.2, 0.15, 0.9, 0.5, 0.24, 0.5, 0.6, 0.1, 0.45, 0.3, 0.05, 0.8, 0.74)$$

Sea $B_k(j)$ la ventana exterior de tamaño k y con inicio en la posición j de la serie. Las ventanas exteriores de la serie resultan:

$$B_{10}(1) = (0.8, 0.03, 0.2, 0.15, 0.9, 0.5, 0.24, 0.5, 0.6, 0.1)$$

$$B_{10}(3) = (0.2, 0.15, 0.9, 0.5, 0.24, 0.5, 0.6, 0.1, 0.45, 0.3)$$

$$B_{10}(5) = (0.9, 0.5, 0.24, 0.5, 0.6, 0.1, 0.45, 0.3, 0.05, 0.8)$$

El conjunto de permutaciones posibles es $\{(1,2), (2,1)\}$. Las periodicidades de cada permutación para $B_{10}(1)$ son:

$$p(1,2) = \frac{4}{9}$$

$$p(2,1) = \frac{5}{9}$$

Una vez finalizada la simulación, se normaliza la entropía dividiendo el vector completo entre el valor máximo. Esos valores de entropía son los utilizados posteriormente para detectar posibles cambios estructurales en la serie temporal.

El objetivo es calcular la entropía con distintas funciones y evaluar el nivel de detección de cada una de ellas. Para realizar esa valoración de la forma más objetiva posible, se calculan tres parámetros estadísticos sobre la entropía normalizada:

- *Salto*. Se calcula con la diferencia de los valores máximo y mínimo de entropía normalizada. Un salto mayor se traducirá en una mayor detectabilidad del cambio estructural de la serie.
- *Media aritmética*. Se obtiene sumando todos los valores de entropía normalizada y dividiendo entre el número de valores.
- *Coefficiente de variación*. Se obtiene dividiendo la desviación típica de los valores de entropía normalizada entre la media aritmética. Junto con la media, da cuenta de la variabilidad de los datos.

3.1. Datos simulados.

Seguidamente, se simulan series temporales con el objetivo de evaluar la respuesta que ofrece cada una de las funciones de entropía expuestas en 2.3. Se realizan en total seis ejemplos. Las series simuladas están formadas por un conjunto de valores aleatorios y otro conjunto determinista. Los distintos casos se diferencian en la zona de transición de los valores aleatorios a los deterministas: los primeros presentan una transición brusca, mientras que los últimos se caracterizan por una más progresiva.

Cada función de entropía se estudia cubriendo un rango de valores en su parámetro característico. De esa forma, podemos valorar el valor de dicho parámetro que mejor refleja el cambio en la entropía de la serie.

Consideremos la serie temporal $(x_n)_{n=1}^T$ generada por el siguiente patrón:

$$x_{n+1} = \chi_{[0, \frac{T}{2})} f_1(x_n) + \chi_{[\frac{T}{2}, T]} f_2(x_n)$$

donde

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 1

$$T = 1200$$

$$f_1(x) = 4x(1 - x), \text{ con condición inicial } x_1 = 0,45.$$

$$f_2 = \epsilon, \text{ donde } \epsilon \text{ representa una distribución uniforme aleatoria dentro del intervalo } [0,1].$$

En la siguiente tabla se muestran los parámetros de simulación del código para este ejemplo.

Tabla 3. Parámetros seleccionados para el análisis del ejemplo 1.

<i>m</i>	4
<i>k</i>	120
<i>s</i>	10
<i>i</i>	1

En la siguiente figura se muestran los resultados gráficos de la simulación. Los valores de los parámetros escogidos para la representación gráfica corresponden a aquellos que ofrecen mejores resultados, atendiendo a los parámetros estadísticos que se exponen más adelante.

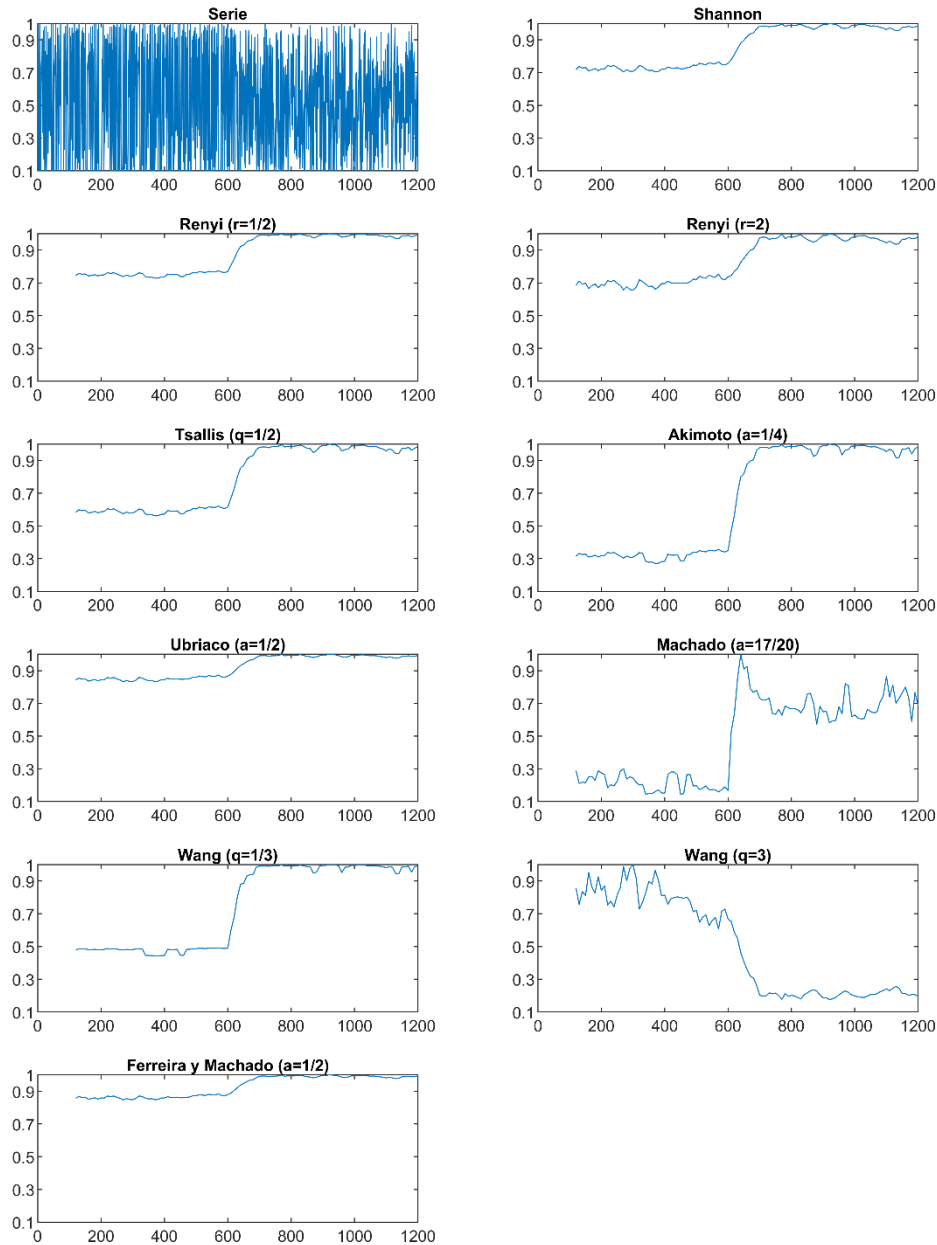


Figura 10. Resultados gráficos del ejemplo 1.

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 4$, $k = 120$, $s = 10$, $i = 1$.

Gráficamente, se observa que el cambio estructural de la serie es detectado de forma notable por la práctica totalidad de las funciones de entropía. Las funciones de Ubriaco y Ferreira y Machado son las que presentan el salto más débil. Akimoto y Machado son las que obtienen el salto mayor, sin embargo, la última presenta una variabilidad mayor en las dos partes de la serie que no tienen cambios.

Cabe destacar la transición de una parte de la serie con valores ordenados y con entropía menor a una situación totalmente aleatoria con entropía mayor. Todas las funciones reflejan el cambio de esta forma salvo la función de Wang con parámetro mayor a la unidad, que invierte el sentido. Probablemente se trate de un defecto en la definición de dicha función de entropía, puesto que en [15] se especifica el siguiente rango para el parámetro: $q > 0$.

A continuación, se incluyen las tablas correspondientes a los parámetros estadísticos para cada valor de parámetro evaluado en las respectivas funciones de entropía.

Tabla 4. Parámetros estadísticos del ejemplo 1.

RENYI				WANG			
r	Salto	CV	Media	q	Salto	CV	Media
1000	NaN	NaN	NaN	1000	NaN	NaN	NaN
100	0,488713	0,195820	0,749472	100	1,000000	9,415191	0,010177
25	0,477699	0,194491	0,763568	25	1,000000	4,108592	0,030080
10	0,451918	0,190511	0,789305	10	0,999985	2,049277	0,088849
9	0,446817	0,189579	0,793462	9	0,999940	1,842571	0,103849
8	0,441816	0,188350	0,796412	8	0,999767	1,635907	0,124222
7	0,435436	0,186694	0,799860	7	0,999108	1,436889	0,152498
6	0,427584	0,184405	0,803334	6	0,996597	1,250744	0,192626
5	0,416560	0,181163	0,808311	5	0,986975	1,071889	0,251301
4	0,400780	0,176454	0,815526	4	0,950818	0,872198	0,341768
3	0,378183	0,169445	0,825323	3	0,824337	0,600886	0,493997
2	0,344284	0,158834	0,839496	2	0,441059	0,234682	0,763750
1,667	0,329922	0,154211	0,845780	1,667	0,215658	0,103064	0,890429
1,333	0,314290	0,148950	0,853051	1,333	0,074473	0,025490	0,972947
1,176	0,305989	0,146245	0,856859	1,176	0,189999	0,082082	0,915116
1	NaN	NaN	NaN	1	0,295883	0,143025	0,861468
0,850	0,288612	0,140145	0,865675	0,850	0,372559	0,191806	0,824350
0,750	0,283667	0,138156	0,868635	0,750	0,416836	0,222622	0,803525
0,600	0,276132	0,135077	0,873321	0,600	0,475004	0,266142	0,777716
0,500	0,271050	0,132967	0,876615	0,500	0,508914	0,293307	0,763927
0,333	0,262727	0,129367	0,882415	0,333	0,557379	0,335290	0,746705
0,250	0,258541	0,127537	0,885463	0,250	0,578297	0,354774	0,740717
0,200	0,255987	0,126433	0,887340	0,200	0,592471	0,366000	0,736431
0,167	0,254267	0,125695	0,888611	0,167	0,603357	0,373298	0,730617
0,143	0,253031	0,125167	0,889529	0,143	0,611160	0,378421	0,726240
0,125	0,252100	0,124771	0,890223	0,125	0,616953	0,382215	0,722955
0,111	0,251373	0,124463	0,890765	0,111	0,621420	0,385138	0,720398
0,100	0,250790	0,124216	0,891202	0,100	0,624968	0,387459	0,718352
0,040	0,247618	0,122884	0,893587	0,040	0,643750	0,399734	0,707283
0,010	0,246018	0,122219	0,894799	0,010	0,652906	0,405712	0,701734
0,001	0,245537	0,122020	0,895165	0,001	0,655622	0,407486	0,700068

TSALLIS			
<i>q</i>	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,338341	0,169405	0,840837
0,750	0,367108	0,188273	0,827085
0,600	0,410169	0,218139	0,807048
0,500	0,438386	0,238839	0,794434
0,333	0,484034	0,274144	0,775458
0,250	0,505815	0,291934	0,767198
0,200	0,518438	0,302587	0,762703
0,167	0,526655	0,309668	0,759914
0,143	0,532425	0,314710	0,758027
0,125	0,536697	0,318483	0,756672
0,111	0,539986	0,321410	0,755654
0,100	0,542596	0,323748	0,754863
0,040	0,556358	0,336298	0,750954
0,010	0,563026	0,342520	0,749239
0,001	0,564999	0,344379	0,748756

AKIMOTO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,391240	0,205277	0,818176
0,750	0,430988	0,233148	0,800201
0,600	0,481448	0,270088	0,777392
0,500	0,517802	0,297768	0,760911
0,333	0,615213	0,377275	0,716474
0,250	0,729017	0,482954	0,664305
0,200	0,882853	0,655037	0,593657
0,167	1,111233	1,002110	0,488696
0,143	1,491804	2,096362	0,313731
0,125	2,259188	-25,463770	-0,039125
0,111	4,626676	-1,809474	-1,127811
0,100	0,990534	0,939799	0,464970
0,040	0,229035	0,115408	0,876237
0,010	0,047434	0,021503	0,974363
0,001	0,004513	0,001998	0,997561

UBRIACO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,261351	0,123099	0,878379
0,750	0,236694	0,109503	0,890332
0,600	0,197010	0,088647	0,909339
0,500	0,168631	0,074443	0,922765
0,333	0,117629	0,050247	0,946565
0,250	0,090270	0,037912	0,959168
0,200	0,073225	0,030437	0,966964
0,167	0,061590	0,025424	0,972262
0,143	0,053144	0,021828	0,976096
0,125	0,046735	0,019123	0,978999
0,111	0,041704	0,017014	0,981274
0,100	0,037651	0,015324	0,983104
0,040	0,015318	0,006155	0,993149
0,010	0,003862	0,001542	0,998275
0,001	0,000387	0,000154	0,999827

MACHADO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,854950	0,532199	0,481699
0,750	0,840212	0,520745	0,505487
0,600	0,809465	0,499039	0,548716
0,500	0,785248	0,483952	0,580058
0,333	0,739677	0,458600	0,634448
0,250	0,716249	0,445885	0,658773
0,200	0,704383	0,438248	0,667318
0,167	0,696402	0,433155	0,672931
0,143	0,690672	0,429517	0,676895
0,125	0,686361	0,426788	0,679844
0,111	0,683001	0,424666	0,682122
0,100	0,680309	0,422968	0,683935
0,040	0,665711	0,413798	0,693581
0,010	0,658375	0,409212	0,698316
0,001	0,656169	0,407836	0,699726

FERREIRA Y MACHADO			
α	Salto	CV	Media
0,850	0,254155	0,119308	0,881676
0,750	0,225797	0,103973	0,895279
0,600	0,182442	0,081658	0,915861
0,500	0,153013	0,067225	0,929693
0,333	0,103069	0,043927	0,952927
0,250	0,077690	0,032620	0,964623
0,200	0,062336	0,025942	0,971665
0,167	0,052048	0,021534	0,976369
0,143	0,044675	0,018406	0,979733
0,125	0,039131	0,016071	0,982259
0,111	0,034811	0,014262	0,984226
0,100	0,031350	0,012819	0,985799
0,040	0,012583	0,005092	0,994312
0,010	0,003151	0,001269	0,998577
0,001	0,000315	0,000127	0,999858

Se observa que salvo las funciones de Tsallis y Akimoto, en todas aumenta el salto al aumentar el valor del parámetro. Se alcanzan valores de salto reseñables en Akimoto y Machado con valores de parámetro igual a 0,25 y 0,75, respectivamente. En esos casos, los conjuntos de CV y media muestran una menor variabilidad en Machado. Es importante que un salto alto vaya acompañado de una variabilidad de los datos no excesiva. De esta forma, el cambio estructural se reflejará de forma más clara. La función de Wang (para $q = 3, 4$) presenta un salto aún mayor que Machado con una variabilidad similar.

Destacar la discontinuidad de las funciones de Renyi y Wang para $r = 1000$ y $q = 1000$. Para $r = 1$ tenemos la entropía de Shannon.

Ejemplo 2

$$T = 6000$$

$$f_1(x) = 0,5x + \epsilon, \text{ con condición inicial } x_1 = 0,45.$$

$$f_2 = \epsilon, \text{ donde } \epsilon \text{ representa una distribución normal con media cero y varianza 1.}$$

En la siguiente tabla se muestran los parámetros seleccionados para el análisis del código para este ejemplo.

Tabla 5. Parámetros seleccionados para el análisis del ejemplo 2.

m	5
k	600
s	100
i	1

En la siguiente figura se muestran los resultados gráficos de la simulación.

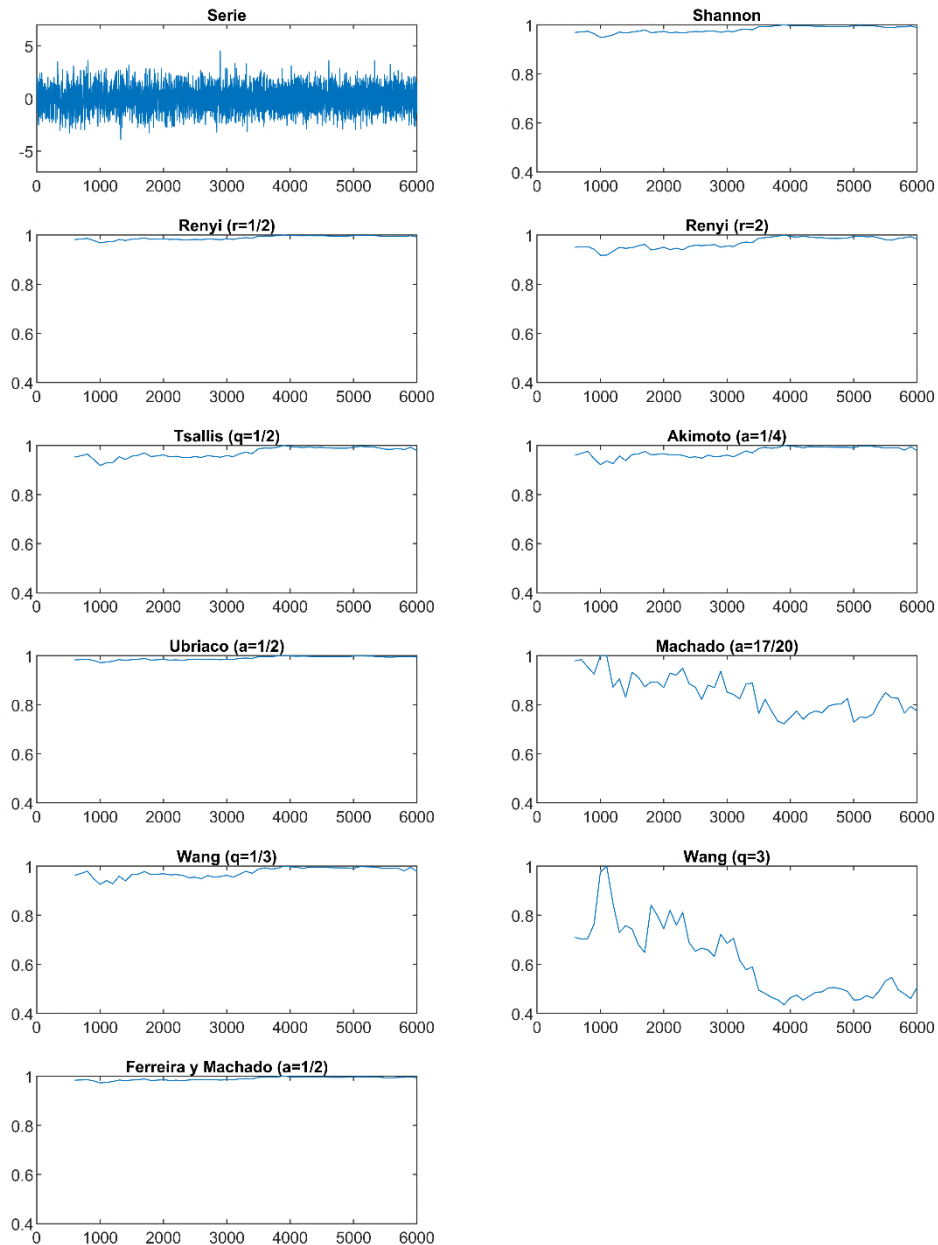


Figura 11. Resultados gráficos del ejemplo 2.

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 5$, $k = 600$, $s = 100$, $i = 1$.

En este caso, el cambio estructural es más complicado de detectar. Es lógico, puesto que la primera parte de la serie ya contiene una componente aleatoria. Shannon, Renyi (con $r = 1/2$), Ubriaco y Ferreira y Machado no detectan prácticamente el cambio. Renyi (con $r = 2$), Tsallis, Akimoto y Wang ($q = 1/3$) lo detectan muy débil. Finalmente, se aprecia un salto notable pero poco nítido en Machado y Wang (con $q = 3$), a pesar de que se invierte el sentido del salto respecto a las otras funciones.

A continuación, se incluyen las tablas correspondientes a los parámetros estadísticos para cada valor de parámetro evaluado en las respectivas funciones de entropía.

Tabla 6. Parámetros estadísticos del ejemplo 2.

RENYI				WANG			
r	Salto	CV	Media	q	Salto	CV	Media
1000	NaN	NaN	NaN	1000	NaN	NaN	NaN
100	0,203762	0,062534	0,914681	100	1,000000	7,412696	0,018190
25	0,201966	0,060973	0,913695	25	1,000000	4,809944	0,028695
10	0,178459	0,055534	0,925424	10	0,998887	2,002482	0,103766
9	0,172500	0,054229	0,928314	9	0,997066	1,776907	0,125563
8	0,166840	0,052532	0,931848	8	0,992891	1,534754	0,143637
7	0,160517	0,050294	0,936150	7	0,982766	1,275341	0,171626
6	0,152682	0,047318	0,940571	6	0,959523	1,002290	0,217485
5	0,142742	0,043349	0,944998	5	0,906507	0,725741	0,294132
4	0,128442	0,038112	0,950962	4	0,789971	0,463333	0,420775
3	0,108568	0,031391	0,958785	3	0,565060	0,238090	0,613885
2	0,082267	0,023139	0,968779	2	0,235985	0,072907	0,847921
1,667	0,073197	0,020063	0,972654	1,667	0,123108	0,034539	0,921393
1,333	0,063015	0,016834	0,976830	1,333	0,021810	0,005577	0,986261
1,176	0,057807	0,015264	0,978906	1,176	0,017747	0,004702	0,993667
1	NaN	NaN	NaN	1	0,051620	0,013462	0,981330
0,850	0,046087	0,011905	0,983467	0,850	0,071313	0,018607	0,974256
0,750	0,042261	0,010856	0,984932	0,750	0,079820	0,020839	0,971313
0,600	0,036327	0,009271	0,987189	0,600	0,085581	0,022383	0,969635
0,500	0,032248	0,008212	0,988735	0,500	0,084670	0,022230	0,970402
0,333	0,025255	0,006458	0,991384	0,333	0,074408	0,020029	0,975202
0,250	0,021679	0,005597	0,992743	0,250	0,067541	0,018184	0,979333
0,200	0,019511	0,005091	0,993568	0,200	0,063885	0,016942	0,982391
0,167	0,018058	0,004761	0,994123	0,167	0,061043	0,016103	0,984678
0,143	0,017016	0,004528	0,994521	0,143	0,061615	0,015519	0,983498
0,125	0,016348	0,004357	0,994821	0,125	0,062405	0,015101	0,982189
0,111	0,015929	0,004225	0,995055	0,111	0,063013	0,014793	0,981152
0,100	0,015594	0,004121	0,995243	0,100	0,063495	0,014560	0,980310
0,040	0,013774	0,003581	0,996262	0,040	0,066034	0,013615	0,975579
0,010	0,012860	0,003330	0,996775	0,010	0,067261	0,013427	0,973102
0,001	0,012585	0,003257	0,996930	0,001	0,067624	0,013418	0,972345

TSALLIS			
<i>q</i>	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,063315	0,016511	0,977115
0,750	0,070337	0,018344	0,974628
0,600	0,078386	0,020453	0,971909
0,500	0,081327	0,021241	0,971076
0,333	0,080436	0,021137	0,972037
0,250	0,076766	0,020351	0,973829
0,200	0,073408	0,019646	0,975376
0,167	0,070663	0,019085	0,976615
0,143	0,068446	0,018643	0,977605
0,125	0,067096	0,018291	0,978406
0,111	0,066384	0,018006	0,979064
0,100	0,065778	0,017772	0,979614
0,040	0,061934	0,016437	0,982932
0,010	0,059643	0,015749	0,984821
0,001	0,058907	0,015544	0,985418

AKIMOTO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,065614	0,017205	0,977317
0,750	0,068530	0,018061	0,976523
0,600	0,070998	0,018812	0,975878
0,500	0,072313	0,019217	0,975528
0,333	0,075184	0,020070	0,974692
0,250	0,077906	0,020848	0,973835
0,200	0,080770	0,021655	0,972908
0,167	0,083838	0,022515	0,971902
0,143	0,087145	0,023439	0,970811
0,125	0,090725	0,024439	0,969625
0,111	0,094612	0,025526	0,968333
0,100	0,098849	0,026714	0,966924
0,040	0,302103	0,087895	0,899049
0,010	0,031486	0,008416	0,979029
0,001	0,002269	0,000595	0,998488

UBRIACO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,045074	0,011740	0,983707
0,750	0,040482	0,010534	0,985373
0,600	0,033246	0,008638	0,987997
0,500	0,028187	0,007316	0,989828
0,333	0,019333	0,005008	0,993030
0,250	0,014704	0,003805	0,994702
0,200	0,011862	0,003068	0,995727
0,167	0,009940	0,002570	0,996420
0,143	0,008554	0,002211	0,996920
0,125	0,007507	0,001940	0,997297
0,111	0,006688	0,001728	0,997592
0,100	0,006031	0,001558	0,997829
0,040	0,002436	0,000629	0,999123
0,010	0,000612	0,000158	0,999780
0,001	0,000061	0,000016	0,999978

MACHADO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,277248	0,089719	0,844213
0,750	0,241363	0,076307	0,863781
0,600	0,186839	0,057404	0,893791
0,500	0,151524	0,045959	0,913658
0,333	0,102670	0,029550	0,940244
0,250	0,082755	0,022942	0,949871
0,200	0,078514	0,019644	0,954718
0,167	0,075976	0,017778	0,957853
0,143	0,074183	0,016628	0,960042
0,125	0,072850	0,015875	0,961656
0,111	0,071821	0,015356	0,962894
0,100	0,071236	0,014984	0,963873
0,040	0,069123	0,013667	0,968997
0,010	0,068033	0,013437	0,971455
0,001	0,067701	0,013419	0,972180

FERREIRA Y MACHADO			
α	Salto	CV	Media
0,850	0,044296	0,011534	0,983988
0,750	0,039315	0,010226	0,985794
0,600	0,031712	0,008234	0,988549
0,500	0,026562	0,006888	0,990413
0,333	0,017848	0,004619	0,993563
0,250	0,013436	0,003473	0,995156
0,200	0,010771	0,002783	0,996118
0,167	0,008989	0,002321	0,996761
0,143	0,007712	0,001991	0,997221
0,125	0,006753	0,001743	0,997567
0,111	0,006006	0,001550	0,997836
0,100	0,005408	0,001395	0,998052
0,040	0,002168	0,000559	0,999219
0,010	0,000543	0,000140	0,999805
0,001	0,000054	0,000014	0,999980

Se observa que los valores de salto son menores que en el ejemplo 1, en general. El salto más alto se da en Wang con $q = 3$ o 4 , con un conjunto de CV y media que refleja una variabilidad algo menor que en el caso anterior. Machado con $\alpha = 0,85$ y Renyi con $r = 100$ alcanzan valores de salto en torno a $0,2$ con una variabilidad baja, por debajo de $0,1$. En este caso, Akimoto se queda en un valor de salto inferior a Machado, salvo para $\alpha = 0,04$, donde consigue un salto de $0,3$.

Ejemplo 3

$$T = 6000$$

$$f_1(x) = 0,9x + 0,5\epsilon, \text{ con condición inicial } x_1 = 0,45.$$

$$f_2 = 0,1x + \epsilon, \text{ donde } \epsilon \text{ representa una distribución normal con media cero y varianza } 1.$$

En la siguiente tabla se muestran los parámetros seleccionados para el análisis del código para este ejemplo.

Tabla 7. Parámetros seleccionados para el análisis del ejemplo 3.

m	5
k	600
s	100
i	1

En la siguiente figura se muestran los resultados gráficos de la simulación.

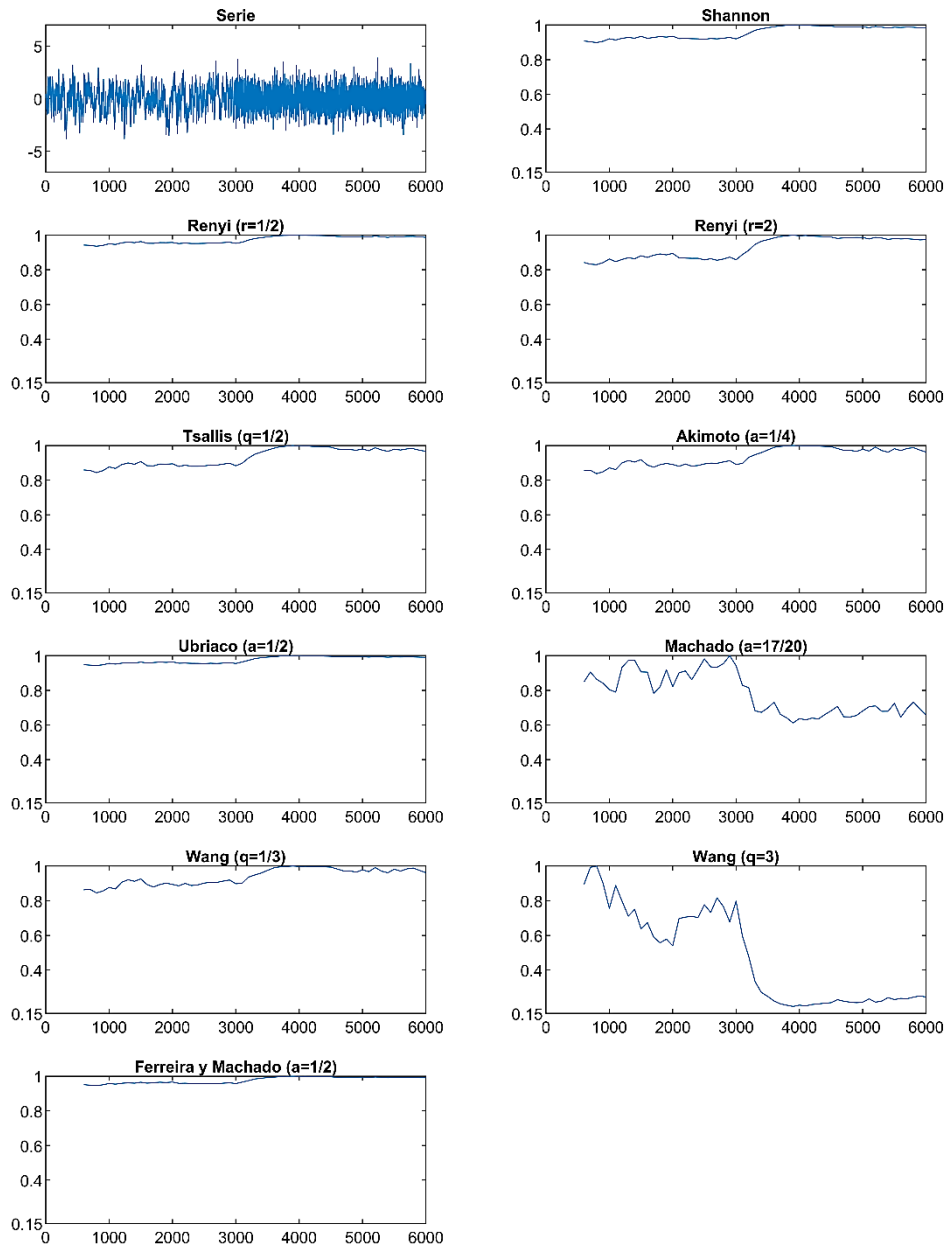


Figura 12. Resultados gráficos del ejemplo 3.

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 5$, $k = 600$, $s = 100$, $i = 1$.

La representación gráfica muestra un cambio estructural mejor detectado que en el ejemplo 2, pero aún muy lejos de la claridad conseguida en el ejemplo 1. La función de Wang (con $q = 3$) es la que mejor muestra el cambio estructural en la serie, seguida de Machado. En ambas se invierte el sentido del salto, lo que puede tratarse de un error en la definición de la función.

Las funciones de Renyi ($r = 2$), Tsallis, Akimoto y Wang ($q = 1/3$) representan un cambio claro, pero con un salto medio o débil.

Seguidamente, se incluyen las tablas correspondientes a los parámetros estadísticos para cada valor de parámetro evaluado en las respectivas funciones de entropía.

Tabla 8. Parámetros estadísticos del ejemplo 3.

RENYI				WANG			
r	Salto	CV	Media	q	Salto	CV	Media
1000	NaN	NaN	NaN	1000	NaN	NaN	NaN
100	0,332948	0,154067	0,842137	100	1,000000	4,819554	0,039194
25	0,330389	0,151498	0,842545	25	1,000000	3,162618	0,066284
10	0,313441	0,141069	0,853409	10	0,999993	1,808770	0,130330
9	0,309597	0,138633	0,855759	9	0,999972	1,683313	0,142967
8	0,304540	0,135459	0,858784	8	0,999878	1,556512	0,158870
7	0,297678	0,131234	0,862784	7	0,999462	1,428207	0,179538
6	0,288036	0,125472	0,868224	6	0,997596	1,294173	0,207861
5	0,273961	0,117418	0,875840	5	0,989213	1,137650	0,250498
4	0,252594	0,105892	0,886788	4	0,952548	0,914682	0,325150
3	0,219270	0,089182	0,902788	3	0,810538	0,573523	0,473428
2	0,170163	0,065617	0,925829	2	0,411630	0,188388	0,756545
1,667	0,149178	0,056267	0,935247	1,667	0,221017	0,087600	0,873361
1,333	0,126211	0,046404	0,945445	1,333	0,034313	0,011881	0,981767
1,176	0,114874	0,041657	0,950474	1,176	0,040510	0,014368	0,983417
1	NaN	NaN	NaN	1	0,101842	0,036290	0,956276
0,850	0,090619	0,031742	0,961307	0,850	0,136667	0,048754	0,940974
0,750	0,083100	0,028734	0,964701	0,750	0,151984	0,053956	0,934510
0,600	0,071820	0,024284	0,969838	0,600	0,164014	0,057225	0,930237
0,500	0,064328	0,021374	0,973285	0,500	0,165080	0,056501	0,930967
0,333	0,051951	0,016666	0,979051	0,333	0,154858	0,050542	0,938604
0,250	0,045835	0,014399	0,981936	0,250	0,144138	0,045627	0,945507
0,200	0,042194	0,013074	0,983666	0,200	0,135889	0,042204	0,950666
0,167	0,039781	0,012208	0,984818	0,167	0,129622	0,039783	0,954540
0,143	0,038063	0,011599	0,985641	0,143	0,126019	0,038013	0,956152
0,125	0,036779	0,011147	0,986257	0,125	0,123482	0,036678	0,957076
0,111	0,035783	0,010800	0,986736	0,111	0,121425	0,035641	0,957825
0,100	0,034987	0,010525	0,987120	0,100	0,119727	0,034817	0,958444
0,040	0,030716	0,009080	0,989186	0,040	0,109751	0,030617	0,962078
0,010	0,028596	0,008388	0,990218	0,010	0,104258	0,028832	0,964078
0,001	0,027962	0,008186	0,990527	0,001	0,102545	0,028362	0,964702

TSALLIS			
<i>q</i>	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,122530	0,043705	0,947157
0,750	0,135000	0,048067	0,941759
0,600	0,149871	0,052931	0,935652
0,500	0,156225	0,054618	0,933449
0,333	0,158693	0,053948	0,934124
0,250	0,155549	0,051818	0,936842
0,200	0,152131	0,049957	0,939316
0,167	0,149187	0,048480	0,941335
0,143	0,146751	0,047314	0,942963
0,125	0,144738	0,046381	0,944288
0,111	0,143062	0,045622	0,945380
0,100	0,141650	0,044994	0,946294
0,040	0,132924	0,041327	0,951849
0,010	0,127850	0,039346	0,955029
0,001	0,126233	0,038737	0,956036

AKIMOTO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,133360	0,045050	0,945253
0,750	0,140264	0,047004	0,942934
0,600	0,146359	0,048736	0,940941
0,500	0,149642	0,049700	0,939857
0,333	0,156440	0,051847	0,937464
0,250	0,162506	0,053887	0,935189
0,200	0,168722	0,056033	0,932798
0,167	0,175296	0,058339	0,930238
0,143	0,182333	0,060834	0,927479
0,125	0,189919	0,063548	0,924495
0,111	0,198136	0,066514	0,921254
0,100	0,207078	0,069769	0,917722
0,040	0,635107	0,262265	0,748001
0,010	0,063821	0,020493	0,961485
0,001	0,004749	0,001470	0,997134

UBRIACO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,089594	0,031788	0,961632
0,750	0,080884	0,028607	0,965425
0,600	0,066964	0,023561	0,971457
0,500	0,057092	0,020013	0,975713
0,333	0,039538	0,013766	0,983240
0,250	0,030223	0,010484	0,987212
0,200	0,024456	0,008464	0,989664
0,167	0,020536	0,007097	0,991327
0,143	0,017698	0,006109	0,992530
0,125	0,015549	0,005363	0,993439
0,111	0,013865	0,004779	0,994152
0,100	0,012510	0,004310	0,994725
0,040	0,005073	0,001743	0,997864
0,010	0,001277	0,000438	0,999463
0,001	0,000128	0,000044	0,999946

MACHADO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,388412	0,155054	0,780149
0,750	0,343388	0,132546	0,802836
0,600	0,272869	0,099721	0,838187
0,500	0,225145	0,079213	0,862026
0,333	0,157186	0,049216	0,901080
0,250	0,126301	0,037395	0,919788
0,200	0,112871	0,031942	0,930608
0,167	0,108587	0,029212	0,937621
0,143	0,105598	0,027776	0,942525
0,125	0,103397	0,027000	0,946141
0,111	0,102493	0,026579	0,948916
0,100	0,101997	0,026355	0,951113
0,040	0,099336	0,026778	0,962601
0,010	0,100489	0,027854	0,965451
0,001	0,102168	0,028264	0,964840

FERREIRA Y MACHADO			
α	Salto	CV	Media
0,850	0,088021	0,031208	0,962302
0,750	0,078499	0,027733	0,966436
0,600	0,063774	0,022406	0,972801
0,500	0,053673	0,018785	0,977148
0,333	0,036355	0,012639	0,984566
0,250	0,027476	0,009519	0,988352
0,200	0,022080	0,007634	0,990648
0,167	0,018455	0,006371	0,992188
0,143	0,015852	0,005467	0,993292
0,125	0,013892	0,004788	0,994123
0,111	0,012364	0,004258	0,994771
0,100	0,011138	0,003834	0,995290
0,040	0,004479	0,001538	0,998108
0,010	0,001123	0,000385	0,999526
0,001	0,000112	0,000039	0,999953

En cuanto a la evolución de los parámetros estadísticos, se da una situación similar a la del ejemplo 2. Wang (con $q = 2$ o 3) obtiene el mayor salto, con una variabilidad similar a la del primer ejemplo. Machado con $\alpha = 0,85$ y Renyi con $r = 100$ alcanzan valores de salto sensiblemente mayores que el ejemplo anterior, entre 0,33 y 0,4, con una variabilidad ligeramente superior. Akimoto vuelve a estar en valores de salto inferiores, salvo para $\alpha = 0,04$, donde consigue un salto superior a 0,6 con una variabilidad aceptable.

A continuación, consideremos la serie temporal $(x_n)_{n=1}^T$ generada por el siguiente patrón, donde la transición la realizamos progresivamente:

$$x_{n+1} = \left(1 - \cos^2\left(1 - \frac{2n\pi}{T}\right)\right) f_1(x_n) + \cos^2\left(1 - \frac{2n\pi}{T}\right) f_2(x_n)$$

Con dicha serie repetimos los ejemplos 1 y 3.

Ejemplo 4

$$T = 1200$$

$f_1(x) = 4x(1 - x)$, con condición inicial $x_1 = 0,45$.

$f_2 = \epsilon$, donde ϵ representa una distribución uniforme aleatoria dentro del intervalo $[0,1]$.

En la siguiente tabla se muestran los parámetros seleccionados para el análisis del código para este ejemplo.

Tabla 9. Parámetros seleccionados para el análisis del ejemplo 4.

m	4
k	120
s	10
i	1

En la siguiente figura se muestran los resultados gráficos de la simulación.

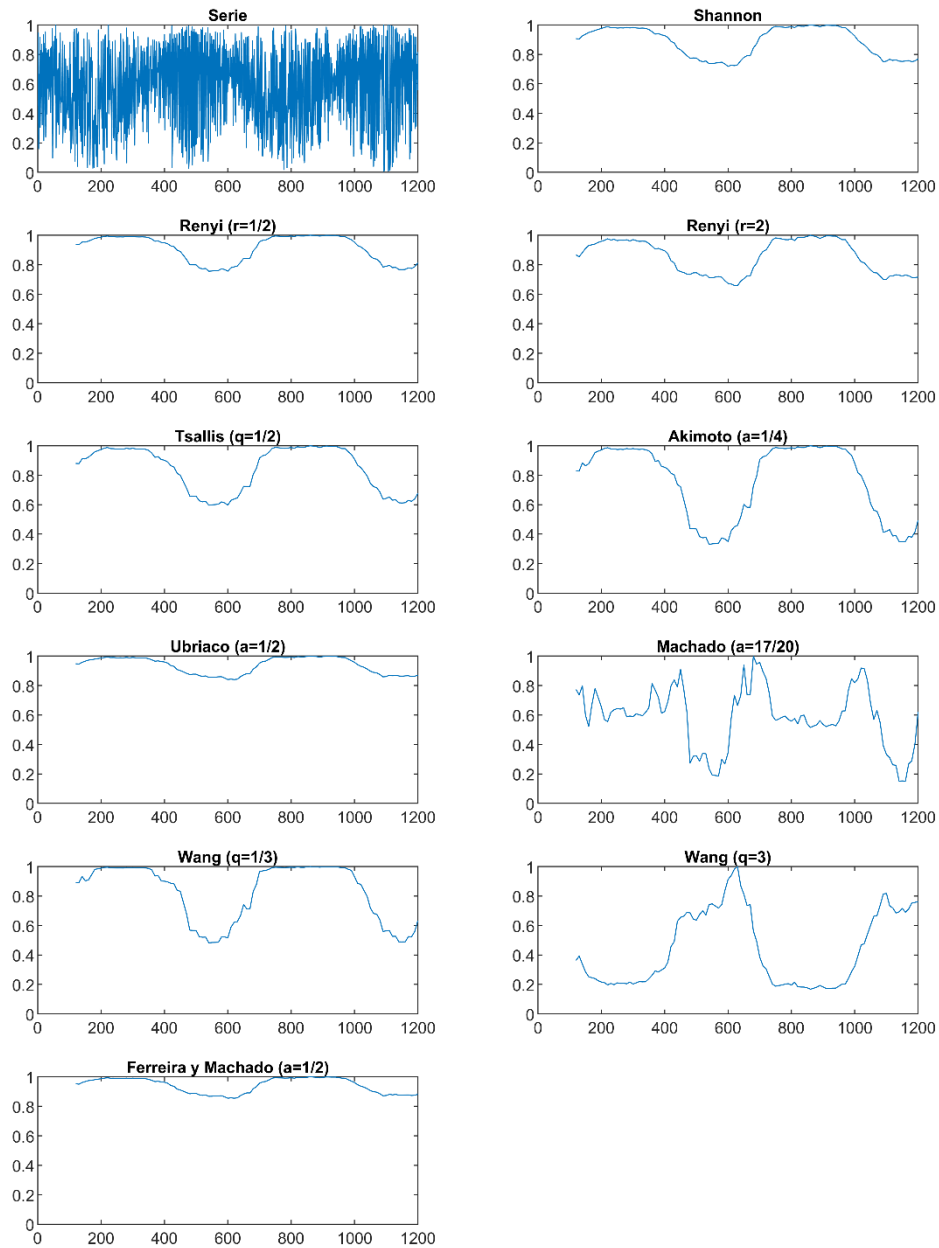


Figura 13. Resultados gráficos del ejemplo 4.

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 4$, $k = 120$, $s = 10$, $i = 1$.

En este caso, la serie se compone de las mismas funciones, pero la transición obedece a una función senoidal. El cambio estructural se detecta notablemente en todas las funciones. Ubriaco y Ferreira y Machado son las funciones que lo representan de forma más débil. Por otro lado, Akimoto, Wang ($q = 3$) y Machado son las que representan el cambio con mayor claridad. Todo esto coincide con lo comentado en el ejemplo 1.

Seguidamente, se incluyen las tablas correspondientes a los parámetros estadísticos para cada valor de parámetro evaluado en las respectivas funciones de entropía.

Tabla 10. Parámetros estadísticos del ejemplo 4.

RENYI				WANG			
r	Salto	CV	Media	q	Salto	CV	Media
1000	NaN	NaN	NaN	1000	NaN	NaN	NaN
100	0,465932	0,187911	0,778233	100	1,000000	10,425281	0,009187
25	0,465028	0,185199	0,775900	25	1,000000	5,529609	0,017919
10	0,449795	0,177284	0,785950	10	0,999991	2,020696	0,072550
9	0,446012	0,175614	0,788846	9	0,999961	1,839257	0,085270
8	0,441182	0,173512	0,792530	8	0,999840	1,661695	0,101991
7	0,434922	0,170824	0,797237	7	0,999337	1,486405	0,124745
6	0,426666	0,167322	0,803297	6	0,997256	1,308886	0,157141
5	0,415543	0,162666	0,811184	5	0,988771	1,116482	0,206231
4	0,400135	0,156324	0,821622	4	0,955325	0,882531	0,287455
3	0,377771	0,147389	0,835827	3	0,832088	0,575478	0,437875
2	0,341683	0,134101	0,856127	2	0,443789	0,208092	0,732416
1,667	0,324871	0,128166	0,864987	1,667	0,214785	0,088576	0,875336
1,333	0,304366	0,121207	0,875327	1,333	0,077455	0,021603	0,976680
1,176	0,292259	0,117536	0,880803	1,176	0,184696	0,066719	0,929277
1	NaN	NaN	NaN	1	0,281493	0,113093	0,887495
0,850	0,271491	0,109064	0,893665	0,850	0,350134	0,147930	0,860821
0,750	0,264217	0,106261	0,898039	0,750	0,387576	0,168648	0,847315
0,600	0,252344	0,101913	0,905009	0,600	0,439229	0,195859	0,833284
0,500	0,244134	0,098945	0,909935	0,500	0,471800	0,211435	0,828047
0,333	0,236504	0,093951	0,918644	0,333	0,517267	0,233073	0,826731
0,250	0,232330	0,091467	0,923228	0,250	0,536114	0,242055	0,829648
0,200	0,229698	0,089992	0,926050	0,200	0,549951	0,246934	0,828110
0,167	0,227888	0,089018	0,927961	0,167	0,563686	0,249996	0,820774
0,143	0,226566	0,088327	0,929339	0,143	0,573366	0,252099	0,815487
0,125	0,225559	0,087813	0,930381	0,125	0,580554	0,253634	0,811497
0,111	0,224766	0,087414	0,931195	0,111	0,586100	0,254803	0,808380
0,100	0,224125	0,087097	0,931850	0,100	0,590509	0,255725	0,805879
0,040	0,220569	0,085407	0,935424	0,040	0,613879	0,260509	0,792262
0,010	0,218728	0,084578	0,937237	0,010	0,625278	0,262801	0,785394
0,001	0,218167	0,084332	0,937784	0,001	0,628660	0,263478	0,783328

TSALLIS			
<i>q</i>	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,319834	0,132155	0,872454
0,750	0,344925	0,145298	0,863008
0,600	0,380773	0,165176	0,850421
0,500	0,403365	0,178228	0,843516
0,333	0,447401	0,198983	0,835575
0,250	0,467951	0,208674	0,833640
0,200	0,479711	0,214222	0,833230
0,167	0,487292	0,217802	0,833293
0,143	0,492574	0,220300	0,833509
0,125	0,496460	0,222141	0,833768
0,111	0,499437	0,223553	0,834028
0,100	0,501789	0,224671	0,834274
0,040	0,514029	0,230519	0,836194
0,010	0,519846	0,233327	0,837544
0,001	0,521551	0,234154	0,838001

AKIMOTO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,360086	0,154518	0,860990
0,750	0,392933	0,172758	0,849918
0,600	0,440434	0,196683	0,835532
0,500	0,474435	0,214473	0,824745
0,333	0,564358	0,264693	0,794363
0,250	0,668485	0,328608	0,757763
0,200	0,808561	0,425433	0,707885
0,167	1,015516	0,596741	0,633812
0,143	1,358054	0,989915	0,510935
0,125	2,040334	2,857376	0,265932
0,111	4,077592	-3,259011	-0,465960
0,100	777,6663	-1,040193	-278,4230
0,040	0,216202	0,093483	0,861251
0,010	0,044088	0,016896	0,971684
0,001	0,004179	0,001561	0,997315

UBRIACO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,248330	0,097932	0,900916
0,750	0,224655	0,087465	0,910481
0,600	0,186640	0,071227	0,925800
0,500	0,159819	0,060047	0,936687
0,333	0,111906	0,040791	0,956093
0,250	0,086025	0,030875	0,966412
0,200	0,069848	0,024834	0,972809
0,167	0,058786	0,020769	0,977161
0,143	0,050747	0,017848	0,980312
0,125	0,044640	0,015646	0,982700
0,111	0,039845	0,013928	0,984571
0,100	0,035979	0,012550	0,986077
0,040	0,014652	0,005052	0,994351
0,010	0,003696	0,001267	0,998578
0,001	0,000371	0,000127	0,999857

MACHADO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,849040	0,347054	0,586409
0,750	0,831084	0,332498	0,615512
0,600	0,796975	0,311224	0,657008
0,500	0,773161	0,299431	0,677634
0,333	0,728866	0,284135	0,713223
0,250	0,705001	0,278118	0,731122
0,200	0,690259	0,274881	0,741779
0,167	0,680283	0,272844	0,748825
0,143	0,673095	0,271437	0,753823
0,125	0,667671	0,270405	0,757551
0,111	0,663435	0,269615	0,760437
0,100	0,660036	0,268989	0,762738
0,040	0,641523	0,265693	0,775026
0,010	0,632169	0,264085	0,781088
0,001	0,629349	0,263606	0,782897

FERREIRA Y MACHADO			
α	Salto	CV	Media
0,850	0,241590	0,095009	0,903588
0,750	0,214480	0,083167	0,914501
0,600	0,173102	0,065733	0,931118
0,500	0,145066	0,054333	0,942347
0,333	0,098050	0,035730	0,961303
0,250	0,074034	0,026614	0,970884
0,200	0,059461	0,021203	0,976664
0,167	0,049679	0,017620	0,980530
0,143	0,042660	0,015073	0,983297
0,125	0,037379	0,013170	0,985376
0,111	0,033261	0,011693	0,986994
0,100	0,029960	0,010514	0,988290
0,040	0,012038	0,004185	0,995306
0,010	0,003016	0,001044	0,998825
0,001	0,000302	0,000104	0,999883

Los parámetros estadísticos también reflejan la similitud con el ejemplo 1. Wang (con $q = 3$ o 4) es la función que mayor salto alcanza, con valores que se aproximan a la unidad, pero con conjuntos de CV y media que muestran una variabilidad no muy baja, en torno a 0,25. Machado y Akimoto son las dos funciones que mejor combinación de salto, CV y media ofrecen. Machado (con $\alpha = 0,85$) ofrece un salto de 0,85 con CV inferior a 0,35 y media cercana a 0,6. Por otro lado, Akimoto (con $\alpha = 0,25$) alcanza un salto de 0,67 con CV inferior a 0,33 y media de 0,76.

Destacar que se obtiene un valor erróneo en Akimoto con parámetro cercano a 0,1, valor cercano al salto reseñable que se alcanzaba en los ejemplos anteriores.

Ejemplo 5

$$T = 6000$$

$$f_1(x) = 0,9x + 0,5\epsilon, \text{ con condición inicial } x_1 = 0,45.$$

$$f_2 = 0,1x + \epsilon, \text{ donde } \epsilon \text{ representa una distribución normal con media cero y varianza 1.}$$

En la siguiente tabla se muestran los parámetros seleccionados para el análisis del código para este ejemplo.

Tabla 11. Parámetros seleccionados para el análisis del ejemplo 5.

m	5
k	600
s	100
i	1

En la siguiente figura se muestran los resultados gráficos de la simulación.

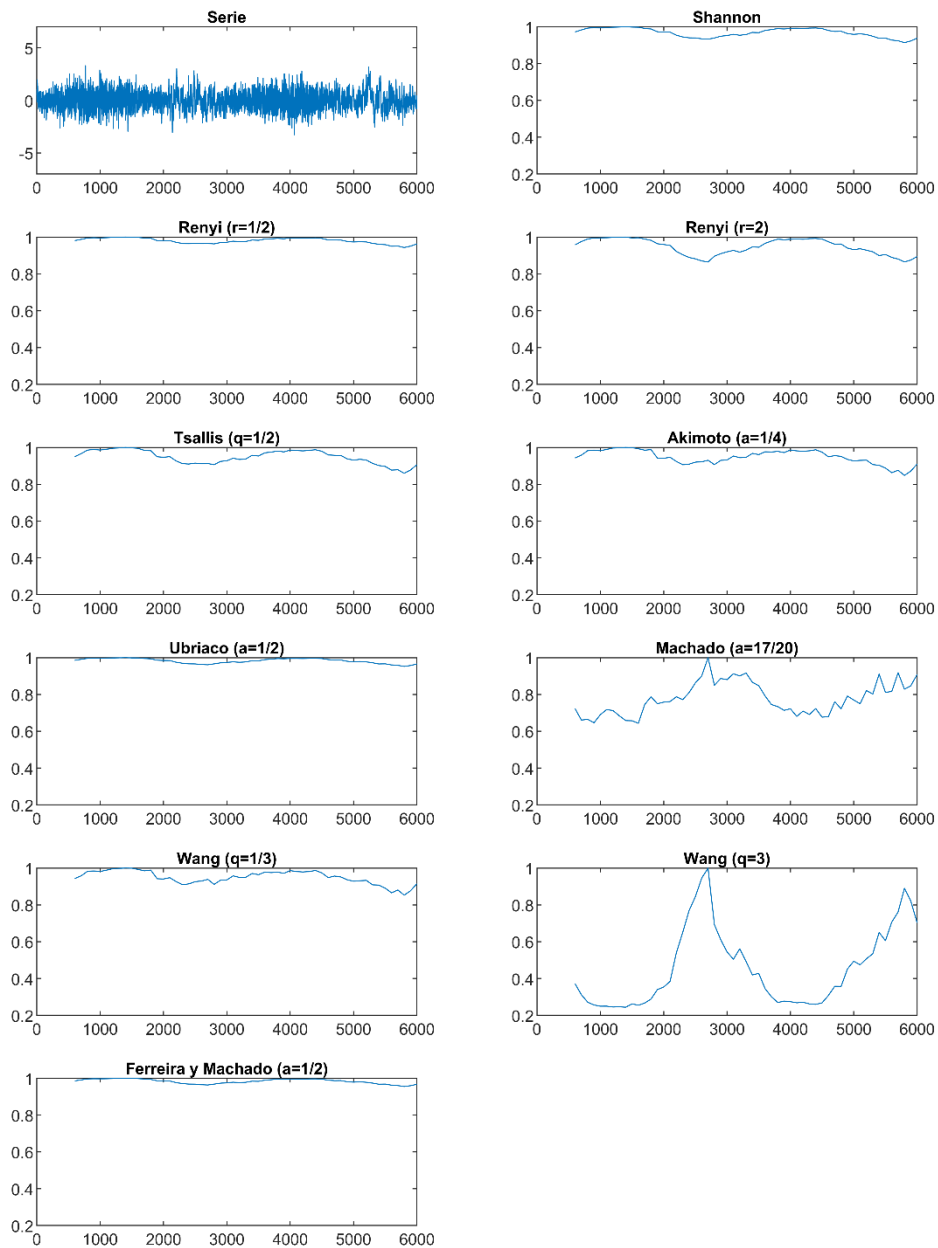


Figura 14. Resultados gráficos del ejemplo 5.

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 5$, $k = 600$, $s = 100$, $i = 1$.

En este caso, la detectabilidad del cambio estructural disminuye con respecto al ejemplo 4. Es prácticamente indetectable en Renyi ($r = 1/2$), Ubriaco y Ferreira y Machado. Renyi ($r = 2$), Tsallis, Akimoto y Wang ($q = 1/3$) lo representan de forma poco pronunciada, de igual forma que en los ejemplos 2 y 3. Finalmente, Wang ($q = 3$) y Machado muestran el cambio de forma significativa, aunque se invierten los valores de entropía.

Seguidamente, se incluyen las tablas correspondientes a los parámetros estadísticos para cada valor de parámetro evaluado en las respectivas funciones de entropía.

Tabla 12. Parámetros estadísticos del ejemplo 5.

RENYI				WANG			
r	Salto	CV	Media	q	Salto	CV	Media
1000	NaN	NaN	NaN	1000	NaN	NaN	NaN
100	0,330678	0,114866	0,848440	100	1,000000	6,907455	0,019549
25	0,323259	0,113106	0,855886	25	1,000000	4,968759	0,030849
10	0,301396	0,105963	0,873592	10	0,999988	2,957899	0,066142
9	0,296754	0,104075	0,877112	9	0,999950	2,702214	0,073033
8	0,291446	0,101539	0,881490	8	0,999797	2,419583	0,081820
7	0,284078	0,098067	0,887005	7	0,999154	2,105277	0,095332
6	0,273465	0,093234	0,894039	6	0,996416	1,751692	0,117898
5	0,257528	0,086419	0,903101	5	0,984648	1,349138	0,160321
4	0,232596	0,076756	0,914830	4	0,935316	0,901166	0,251336
3	0,192920	0,063219	0,929884	3	0,756053	0,462760	0,454953
2	0,135822	0,045382	0,946712	2	0,348629	0,134339	0,777402
1,667	0,120709	0,038727	0,953277	1,667	0,187697	0,061665	0,882226
1,333	0,104261	0,031924	0,960280	1,333	0,031985	0,008719	0,980620
1,176	0,096006	0,028713	0,963717	1,176	0,031722	0,009756	0,988504
1	NaN	NaN	NaN	1	0,086359	0,025118	0,967686
0,850	0,077893	0,022094	0,971139	0,850	0,119132	0,034086	0,955341
0,750	0,072135	0,020101	0,973480	0,750	0,134515	0,038011	0,949773
0,600	0,063363	0,017163	0,977045	0,600	0,148407	0,040933	0,945385
0,500	0,057450	0,015248	0,979455	0,500	0,151758	0,041013	0,945119
0,333	0,047543	0,012167	0,983522	0,333	0,147110	0,038228	0,949505
0,250	0,042589	0,010696	0,985577	0,250	0,140038	0,035760	0,954026
0,200	0,039625	0,009843	0,986815	0,200	0,134277	0,034072	0,957506
0,167	0,037654	0,009289	0,987642	0,167	0,129905	0,032912	0,960038
0,143	0,036249	0,008902	0,988234	0,143	0,127374	0,032086	0,961013
0,125	0,035198	0,008617	0,988678	0,125	0,125874	0,031479	0,961212
0,111	0,034381	0,008398	0,989024	0,111	0,124647	0,031018	0,961378
0,100	0,033728	0,008225	0,989301	0,100	0,123626	0,030660	0,961519
0,040	0,030217	0,007328	0,990797	0,040	0,118571	0,028963	0,961270
0,010	0,028472	0,006907	0,991547	0,010	0,119229	0,028340	0,957371
0,001	0,027950	0,006784	0,991771	0,001	0,119923	0,028192	0,955628

TSALLIS			
<i>q</i>	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,105661	0,030426	0,960389
0,750	0,117735	0,033621	0,955912
0,600	0,133007	0,037369	0,950518
0,500	0,140377	0,038888	0,948233
0,333	0,146009	0,039242	0,947581
0,250	0,145187	0,038324	0,949014
0,200	0,143417	0,037433	0,950504
0,167	0,141683	0,036709	0,951773
0,143	0,140167	0,036132	0,952818
0,125	0,138876	0,035671	0,953680
0,111	0,137781	0,035295	0,954397
0,100	0,136846	0,034986	0,955000
0,040	0,130888	0,033198	0,958722
0,010	0,127326	0,032258	0,960884
0,001	0,126180	0,031974	0,961572

AKIMOTO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,120980	0,032482	0,957019
0,750	0,128683	0,034230	0,954716
0,600	0,135499	0,035805	0,952718
0,500	0,139090	0,036662	0,951660
0,333	0,146136	0,038443	0,949484
0,250	0,152120	0,040032	0,947536
0,200	0,158131	0,041665	0,945532
0,167	0,164431	0,043399	0,943409
0,143	0,171144	0,045262	0,941132
0,125	0,178361	0,047281	0,938676
0,111	0,186168	0,049481	0,936012
0,100	0,194657	0,051890	0,933111
0,040	0,604921	0,189722	0,792414
0,010	0,059875	0,015484	0,960659
0,001	0,004447	0,001108	0,997078

UBRIACO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,075604	0,021982	0,971754
0,750	0,068030	0,019772	0,974612
0,600	0,056041	0,016273	0,979123
0,500	0,047619	0,013816	0,982283
0,333	0,032788	0,009498	0,987828
0,250	0,024991	0,007233	0,990733
0,200	0,020187	0,005839	0,992520
0,167	0,016931	0,004895	0,993729
0,143	0,014579	0,004214	0,994602
0,125	0,012801	0,003699	0,995262
0,111	0,011409	0,003296	0,995778
0,100	0,010290	0,002972	0,996193
0,040	0,004164	0,001202	0,998461
0,010	0,001047	0,000302	0,999613
0,001	0,000105	0,000030	0,999961

MACHADO			
α	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
0,850	0,356750	0,112347	0,777735
0,750	0,318067	0,096841	0,797888
0,600	0,259436	0,074517	0,829713
0,500	0,223437	0,060864	0,851502
0,333	0,166922	0,041728	0,887917
0,250	0,141624	0,034681	0,905759
0,200	0,136958	0,031546	0,916225
0,167	0,133778	0,029970	0,923075
0,143	0,131476	0,029107	0,927897
0,125	0,129734	0,028603	0,931472
0,111	0,128369	0,028295	0,934227
0,100	0,127273	0,028100	0,936415
0,040	0,122822	0,027787	0,947970
0,010	0,120711	0,028041	0,953584
0,001	0,120071	0,028162	0,955249

FERREIRA Y MACHADO			
α	Salto	CV	Media
0,850	0,074281	0,021584	0,972246
0,750	0,066038	0,019173	0,975352
0,600	0,053402	0,015483	0,980099
0,500	0,044808	0,012977	0,983320
0,333	0,030200	0,008728	0,988778
0,250	0,022768	0,006573	0,991547
0,200	0,018271	0,005271	0,993221
0,167	0,015256	0,004399	0,994341
0,143	0,013095	0,003775	0,995144
0,125	0,011471	0,003306	0,995747
0,111	0,010204	0,002940	0,996217
0,100	0,009190	0,002648	0,996594
0,040	0,003689	0,001062	0,998634
0,010	0,000924	0,000266	0,999658
0,001	0,000092	0,000027	0,999966

En lo relativo a los parámetros estadísticos de este caso, Machado da buen resultado con α próximo a 1: ofrece un salto de 0,35 con una variabilidad baja (CV de 0,11 y media de 0,77). Renyi con $r = 100$ ofrece un resultado similar. Akimoto da un salto próximo a 0,2 con α cercano a 0,1 y un salto de 0,6 con $\alpha = 0,04$, y una variabilidad reducida en ambos casos.

Ubriaco y Ferreira y Machado reflejan un salto mínimo para todo el rango de su parámetro. Por último, Wang ofrece el salto mayor para $q = 2$ o 3 , con una variabilidad próxima a la ofrecida en otros ejemplos para este caso.

Ejemplo 6

$$T = 100000$$

$$f_1(x) = g^4(x), \text{ donde } g(x) = 4x(1 - x) \text{ y } x_1 = 0,45.$$

$$f_2 = \epsilon, \text{ donde } \epsilon \text{ representa una distribución uniforme aleatoria dentro del intervalo } [0,1].$$

En la siguiente tabla se muestran los parámetros seleccionados para el análisis del código para este ejemplo.

Tabla 13. Parámetros seleccionados para el análisis del ejemplo 6.

m	7
k	25200
s	1000
i	1

En la siguiente figura se muestran los resultados gráficos de la simulación.

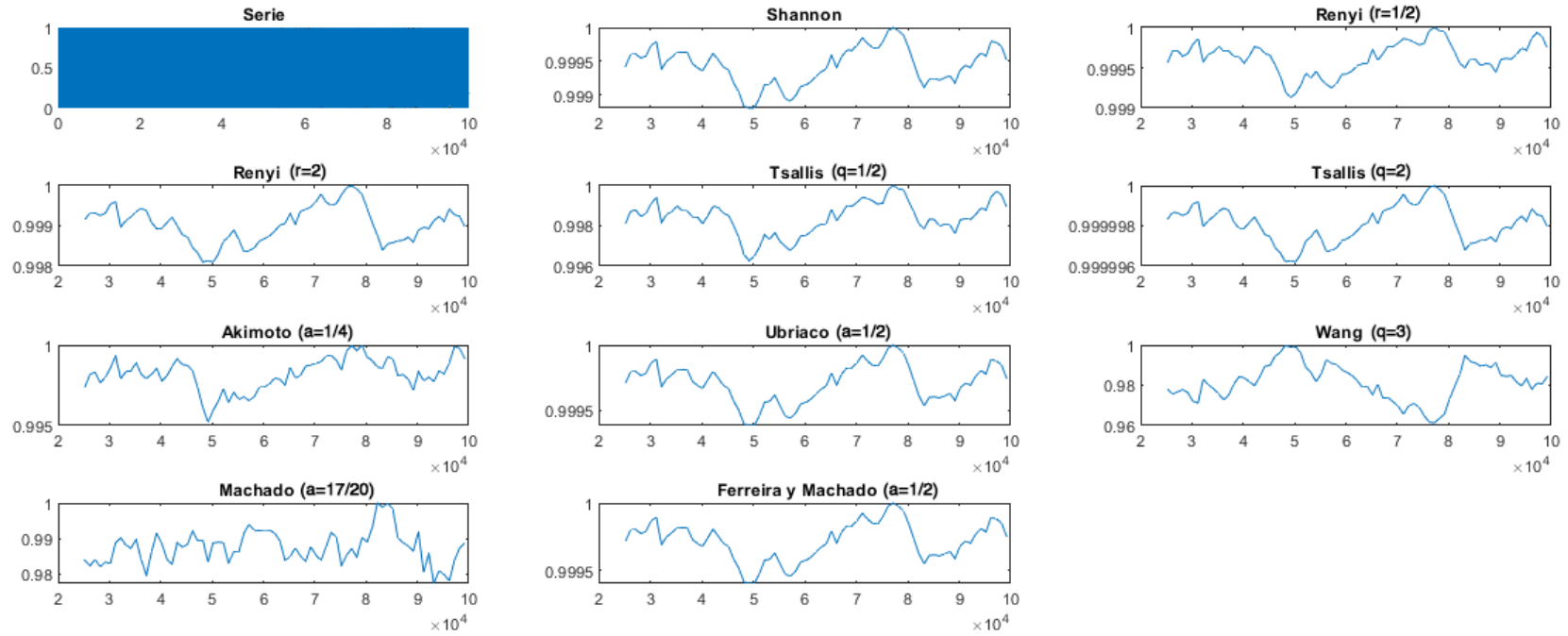


Figura 15. Resultados gráficos del ejemplo 6.

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 7$, $k = 25200$, $s = 1000$, $i = 1$.

Este ejemplo se realiza con el objetivo de llevar al extremo el nivel de detección de cambios estructurales. Se realiza un caso en el que la longitud de permutación imposibilita la observación del cambio [7]. Según la figura anterior, se observa que el cambio estructural no es detectado.

Seguidamente, se muestra la tabla de los parámetros estadísticos relativos a este ejemplo. En este caso, debido al tiempo de simulación, sólo se eligen ciertos valores de los parámetros de las funciones de entropía. Se toman aquellos que mejores resultados dan en los ejemplos anteriores. Esta simulación tardó un total de 22 horas en ejecutarse.

Tabla 14. Parámetros estadísticos del ejemplo 6.

	<i>Parámetro</i>	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
Shannon	-	0,001188	0,000286	0,999440
Renyi	0,5	0,000870	0,000195	0,999630
Renyi	2	0,001906	0,000457	0,999040
Tsallis	0,5	0,003731	0,000839	0,998400
Tsallis	2	0,000004	0,000001	1,000000
Akimoto	0,25	0,004790	0,000992	0,998190
Ubriaco	0,5	0,000616	0,000148	0,999710
Wang	3	0,038657	0,009295	0,981380
Machado	0,85	0,022764	0,004765	0,987470
Ferreira y Machado	0,5	0,000597	0,000144	0,999720

Los parámetros estadísticos confirman la indetectabilidad del cambio. El salto es mínimo en todos los casos. Las funciones de Wang y Machado presentan un salto superior al resto.

4. ANÁLISIS DE DATOS REALES

A continuación, se aplica la simulación a series temporales del mundo real. Se pretende estudiar la idoneidad de cada función de entropía en la detección de cambios estructurales dentro de sistemas reales. Se tratan ejemplos de varios ámbitos en los que se aplican las series temporales como la economía o ciencias de la salud.

4.1. Tipo de cambio entre el oro y el dólar estadounidense.

Se obtienen el dato diario del tipo de cambio desde 1979 hasta 2009 (www.bankofengland.co.uk). Se simula dos veces, la primera con el tipo de cambio de forma directa y la segunda con la variación de dicho parámetro, es decir, calculando $y_n = x_n - x_{n-1}$. De esa forma, la serie temporal se hace estacionaria. Se estudia el nivel de detección de cambios estructurales para los dos casos, realizando la comparación entre las funciones de entropía calculadas en [7] y las que se introducen nuevas en este trabajo.

Los parámetros seleccionados para el análisis son los siguientes:

Tabla 15. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 1.

T	7601
m	4
k	120
s	10
i	1

En la siguiente figura se muestran los resultados gráficos de la simulación.

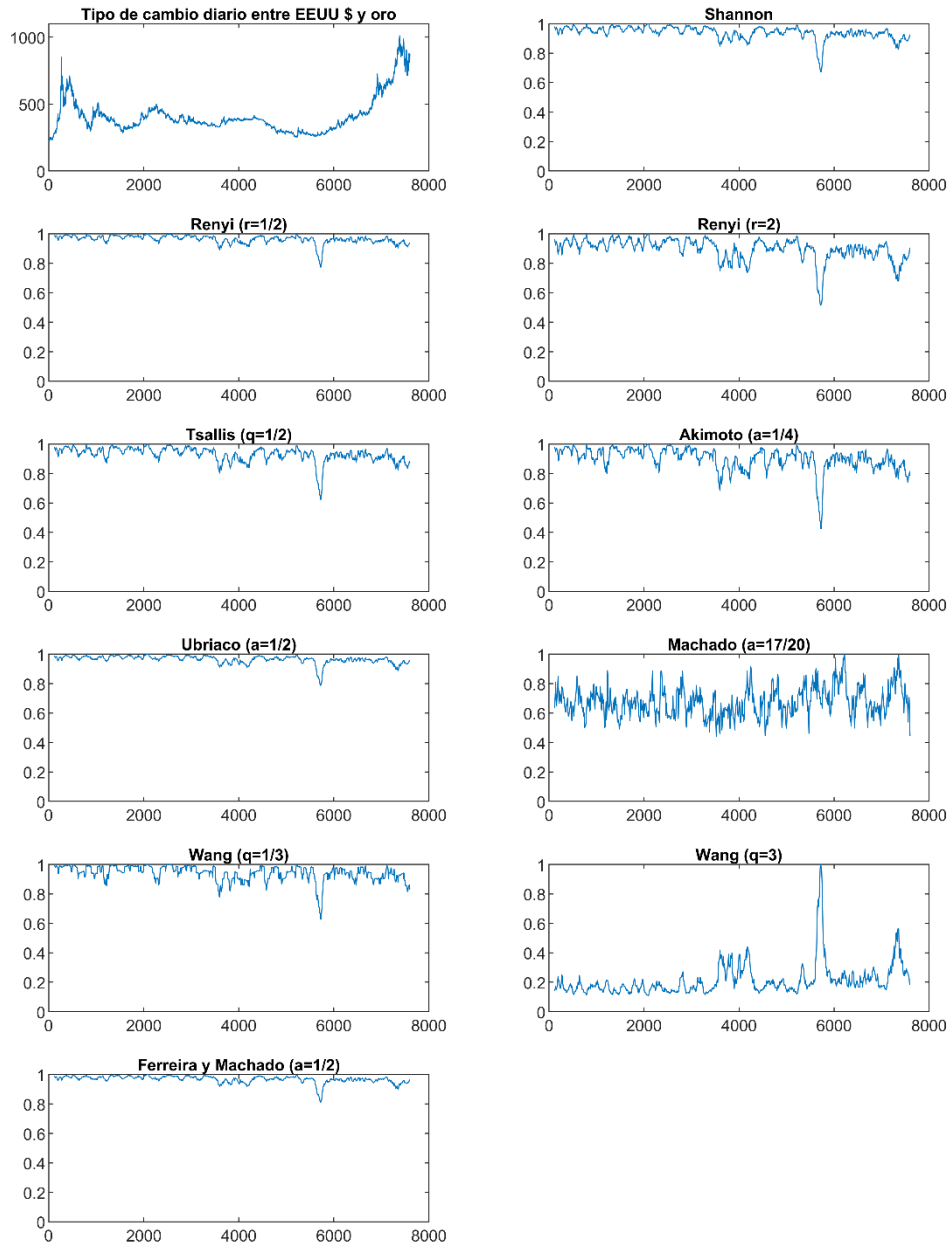


Figura 16. Resultados gráficos del caso real 1.

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 4$, $k = 120$, $s = 10$, $i = 1$.

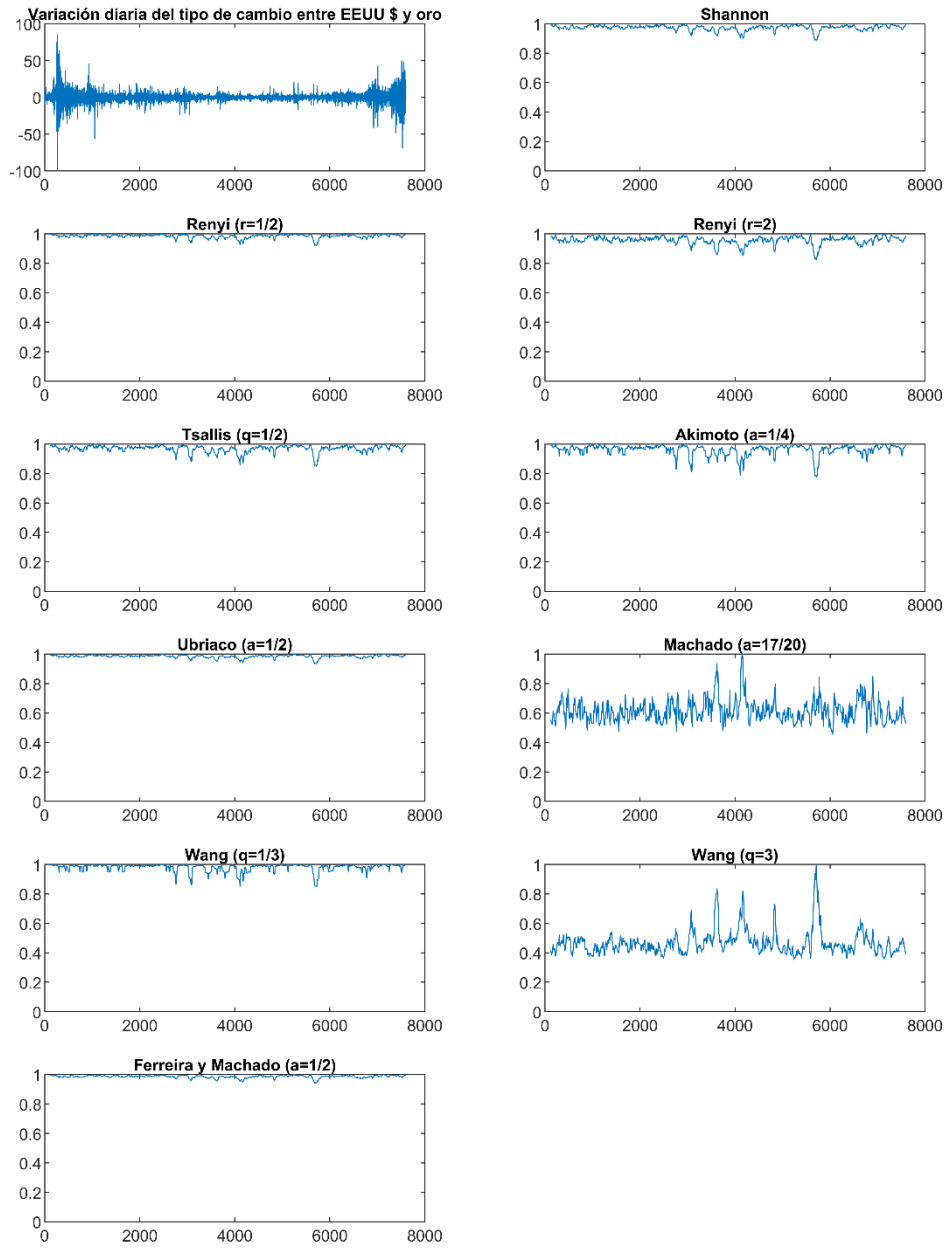


Figura 17. Resultados gráficos del caso real 1 (serie estacionaria).
 Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 4$, $k = 120$, $s = 10$, $i = 1$.

Comparando las dos simulaciones, se observa que los cambios estructurales se detectan en el mismo punto. Sin embargo, el salto es de mayor amplitud en la primera simulación, con la serie temporal inicial.

En cuanto a las funciones, se obtiene el mismo resultado que en [7]. De las funciones de entropía que se introducen nuevas, se obtienen mejores resultados con Akimoto y Wang, esta última invertida. Los saltos de Wang y Akimoto mejoran los de Shannon, Renyi y Tsallis.

El cambio estructural más importante se da en torno al valor 5700, que se corresponde con la crisis de septiembre de 2001, lo que conlleva un posterior aumento continuo del tipo de cambio.

El siguiente cambio estructural detectado en amplitud se da en torno al valor 4000. Coincide con el año 1990, y se debe a la recesión sufrida ese año.

En la siguiente tabla se incluyen los parámetros estadísticos para cada simulación.

Tabla 16. Parámetros estadísticos del caso real 1.

	<i>Parámetro</i>	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
Shannon	-	0,328250	0,045489	0,940450
Renyi	0,5	0,225990	0,028967	0,963040
Renyi	2	0,485470	0,081613	0,896240
Tsallis	0,5	0,376380	0,053044	0,930090
Tsallis	0	0,575480	0,084515	0,901300
Akimoto	0,50	0,212340	0,028077	0,964860
Ubriaco	0,333	0,371940	0,055700	0,940890
Wang	3	0,890020	0,522420	0,213620
Machado	0,85	0,561080	0,148170	0,678200
Ferreira y Machado	0,5	0,188070	0,024931	0,968280

Tabla 17. Parámetros estadísticos del caso real 1 (serie estacionaria).

	<i>Parámetro</i>	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
Shannon	-	0,113680	0,018464	0,973420
Renyi	0,5	0,080672	0,012811	0,984100
Renyi	2	0,177060	0,028368	0,956300
Tsallis	0,5	0,150760	0,024730	0,968990
Tsallis	0	0,222700	0,037455	0,961060
Akimoto	0,50	0,064715	0,010268	0,984980
Ubriaco	0,333	0,150330	0,026711	0,979500
Wang	3	0,645920	0,184100	0,468610
Machado	0,85	0,544560	0,124070	0,613750
Ferreira y Machado	0,5	0,058871	0,009342	0,986310

4.2. Electrocardiograma con taquiarritmia.

Se simulan 15.000 datos de una señal ECG en milivoltios, de un sujeto con episodios de taquiarritmia ventricular sostenida ([PhysioNet - CU Ventricular Tachyarrhythmia Database](#)). Los valores corresponden a un minuto de medición.

La taquiarritmia ventricular es un trastorno del ritmo cardíaco con frecuencia de latido superior a 100 latidos por minuto. En la señal ECG es perfectamente visible el cambio entre el latido normal y el período del trastorno.

Los parámetros seleccionados para el análisis son los siguientes:

Tabla 18. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 2.

T	15000
m	5
k	600
s	100
i	1

En la siguiente figura se muestran los resultados gráficos de la simulación.

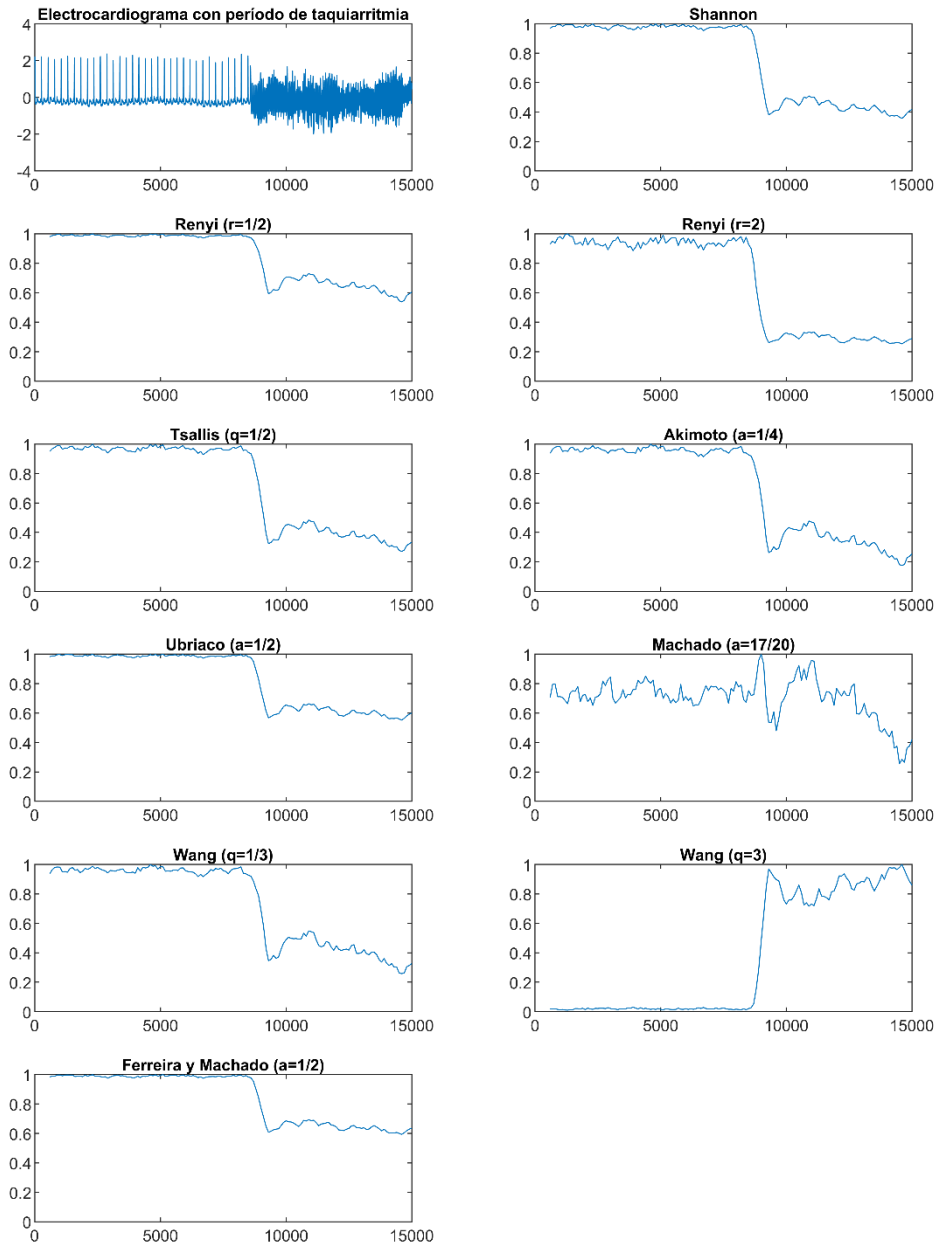


Figura 18. Resultados gráficos del caso real 2.

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 5$, $k = 600$, $s = 100$, $i = 1$.

El cambio estructural se detecta claramente, salvo en Machado. Nuevamente, el mayor salto se alcanza en Wang y Akimoto.

En la siguiente tabla se incluyen los parámetros estadísticos obtenidos.

Tabla 19. Parámetros estadísticos del caso real 2.

	<i>Parámetro</i>	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
Shannon	-	0,643480	0,358660	0,749310
Renyi	0,5	0,461900	0,201650	0,844170
Renyi	2	0,746130	0,483760	0,664200
Tsallis	0,5	0,729160	0,401750	0,720990
Tsallis	0,25	0,823680	0,444020	0,697300
Akimoto	0,5	0,448050	0,226590	0,827750
Ubriaco	0,333	0,741170	0,372830	0,730360
Wang	3	0,990100	11,151000	0,371230
Machado	0,85	0,744540	0,190420	0,703170
Ferreira y Machado	0,5	0,406760	0,202070	0,843180

4.3. Electrocardiograma con arritmia débil.

Nuevamente, se simulan 21.600 datos de señal ECG en milivoltios. Se trata de un sujeto con arritmia débil ([PhysioNet - MI-BIH Arrhythmia Database](#)). Los datos comprenden un minuto de medición.

En este caso, el cambio es mucho menos evidente que en el ejemplo anterior. En la siguiente figura se observa la descompensación en el ritmo cardíaco sobre los datos en bruto de la señal ECG. Se aprecia que la distancia entre las líneas verticales azules no es constante en algunos puntos (en rojo). Comprobemos si las funciones de entropía detectan los cambios.

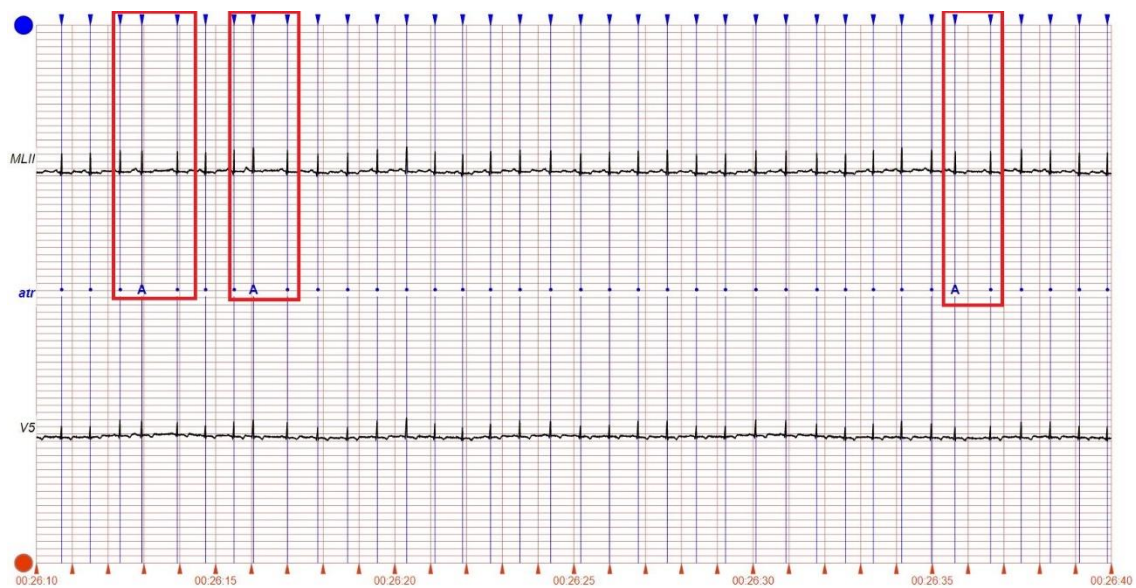


Figura 19. Señal ECG en bruto con arritmia débil.

Las tres descompensaciones corresponden a los instantes 26' 13", 26' 16" y 26' 36", que se relacionan con los valores de la serie 4800, 5900 y 13000, respectivamente.

Los parámetros seleccionados para el análisis son los siguientes:

Tabla 20. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 3 (a).

T	21600
m	5
k	600
s	100
i	1

En la siguiente figura se muestran los resultados gráficos de la simulación.

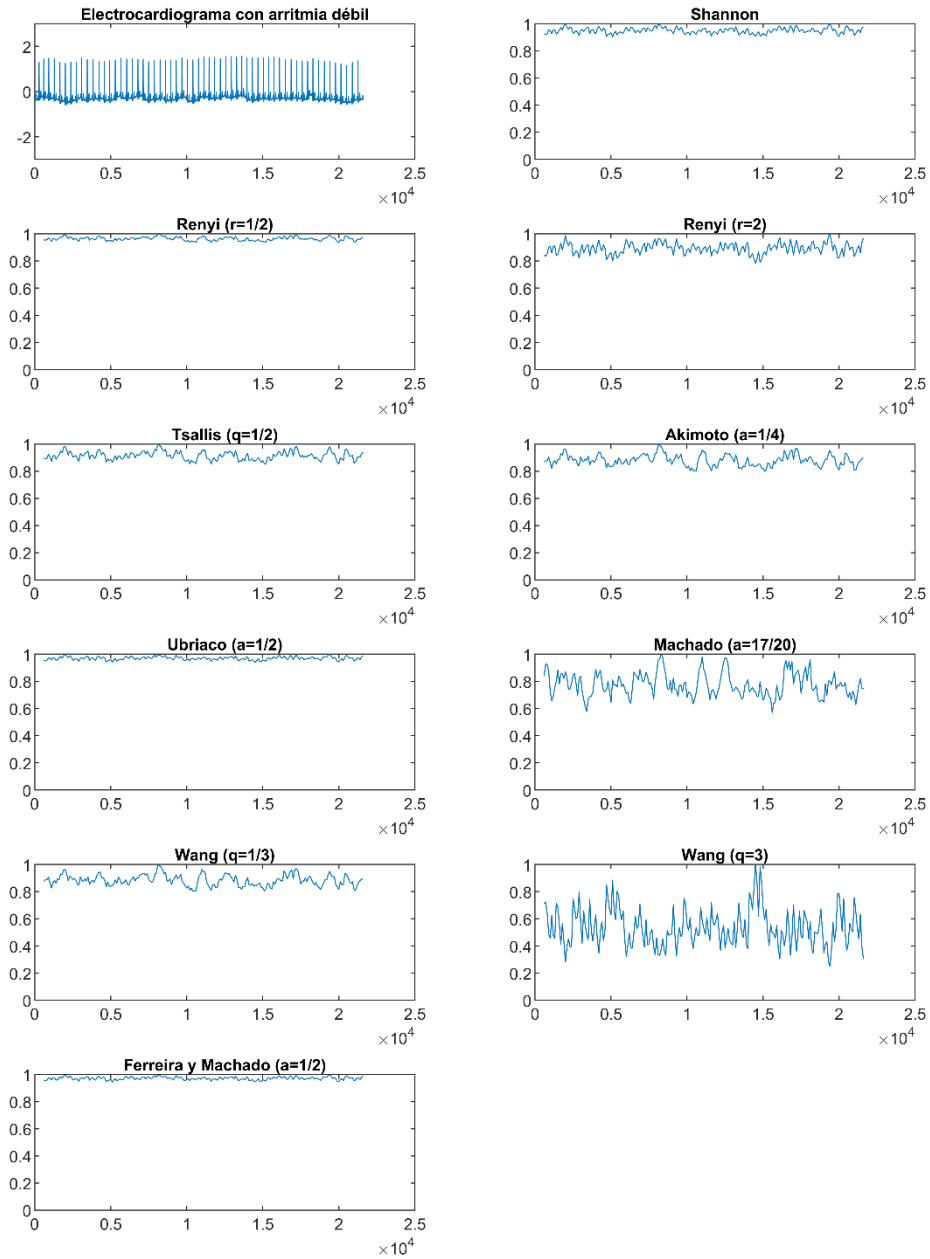


Figura 20. Resultados gráficos del caso real 3 (a).

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 5$, $k = 600$, $s = 100$, $i = 1$.

Los cambios estructurales detectados son bastante menos evidentes que en el caso de taquiarritmia. Las funciones de Shannon, Renyi, Ubricaco y Ferreira y Machado no detectan prácticamente nada. La función de Wang (con $q=3$) presenta muchos picos irregulares y ofrece una interpretación confusa. Wang (con $q=1/3$), Akimoto y Machado son las que sí evidencian algunos cambios estructurales, siendo esta última la que mayores saltos alcanza.

En general, se observa que algunas funciones de entropía si que detectan, aunque de forma débil, estas variaciones débiles en el ritmo cardíaco. Machado representa un salto en torno al valor 13000, que puede estar relacionado con una de las asimetrías vistas en la Figura 19.

En la siguiente tabla se incluyen los parámetros estadísticos de la simulación.

Tabla 21. Parámetros estadísticos del caso real 3 (a).

	<i>Parámetro</i>	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
Shannon	-	0,097812	0,021681	0,949050
Renyi	0,5	0,064617	0,014006	0,963700
Renyi	2	0,215520	0,045443	0,892110
Tsallis	0,5	0,148320	0,033642	0,914570
Tsallis	0,25	0,200070	0,047124	0,880300
Akimoto	0,5	0,060003	0,012748	0,969510
Ubriaco	0,333	0,197480	0,045967	0,883460
Wang	3	0,752260	0,259960	0,533820
Machado	0,85	0,429650	0,111620	0,775690
Ferreira y Machado	0,5	0,055269	0,011725	0,971850

Se vuelve a realizar la simulación un parámetro de embedding mayor ($m = 6$), para comprobar si mejora o no la detección. A continuación, se muestran los resultados.

Tabla 22. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 3 (b).

<i>T</i>	21600
<i>m</i>	6
<i>k</i>	3600
<i>s</i>	100
<i>i</i>	1

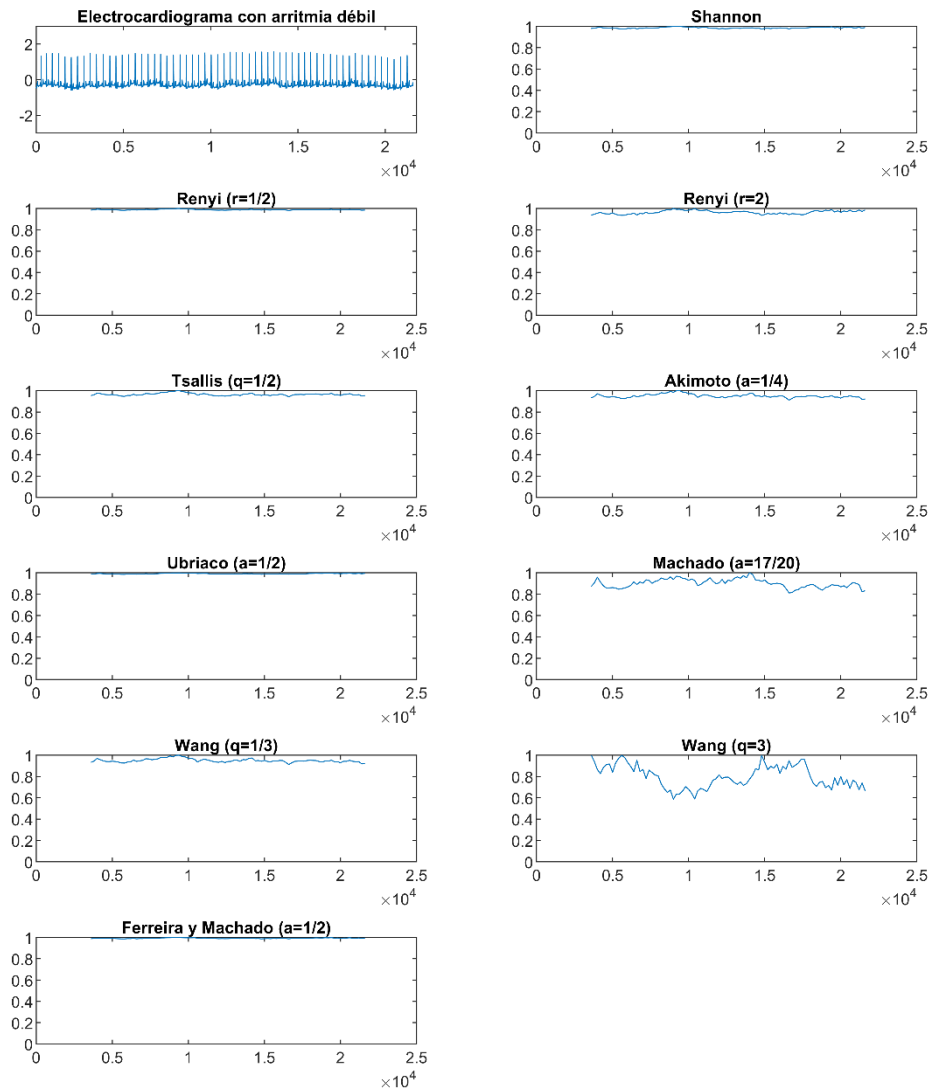


Figura 21. Resultados gráficos del caso real 3 (b).

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 6$, $k = 3600$, $s = 100$, $i = 1$.

Todas las gráficas se suavizan en gran medida. La única función que parece detectar algo es Wang. Sin embargo, ningún pico coincide con las tres asimetrías localizadas en los datos en bruto (Figura 19. Señal ECG en bruto con arritmia débil. Figura 19).

Tabla 23. Parámetros estadísticos del caso real 3 (b).

	<i>Parámetro</i>	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
Shannon	-	0,025508	0,005840	0,985410
Renyi	0,5	0,019427	0,003888	0,988410
Renyi	2	0,065175	0,016834	0,964250
Tsallis	0,5	0,057997	0,011880	0,965060
Tsallis	0,25	0,088469	0,018302	0,950340
Akimoto	0,5	0,014567	0,003420	0,991930
Ubriaco	0,333	0,087104	0,018019	0,950370
Wang	3	0,412390	0,131690	0,799320
Machado	0,85	0,188060	0,045124	0,901840
Ferreira y Machado	0,5	0,013723	0,003213	0,992380

4.4. Índice de producción industrial (IPI) de energía en España.

La siguiente simulación de casos reales trata sobre el índice de producción industrial de energía en nuestro país. El IPI es un indicador coyuntural que mide la evolución mensual de la actividad productiva de las ramas industriales. Mide la evolución conjunta de la cantidad y de la calidad, eliminando la influencia de los precios. Para su obtención se realiza una encuesta continua de periodicidad mensual que investiga todos los meses más de 11.500 establecimientos.

Se utilizan 352 valores mensuales del IPI energético en España ([INE - Índice de Producción Industrial](#)), desde enero de 1992 a abril de 2021. De igual forma que en apartados anteriores, se realizan dos simulaciones: una con los datos en bruto y otra haciendo la serie estacionaria.

Los parámetros seleccionados para el análisis utilizados son los siguientes:

Tabla 24. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 4.

T	352
m	3
k	30
s	1
i	1

A continuación, se muestran los resultados gráficos de ambas simulaciones.

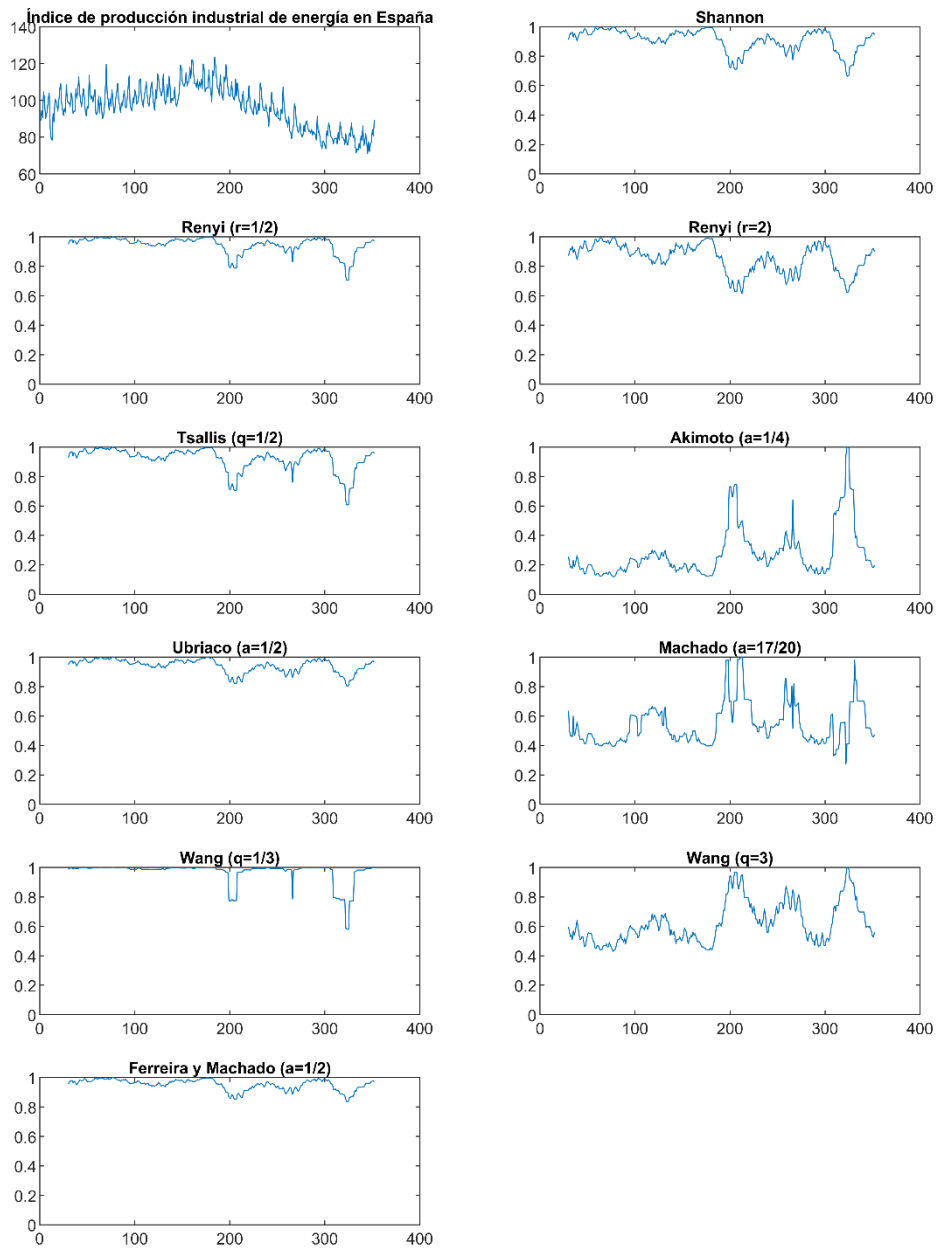


Figura 22. Resultados gráficos del caso real 4.

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 3$, $k = 30$, $s = 1$, $i = 1$.

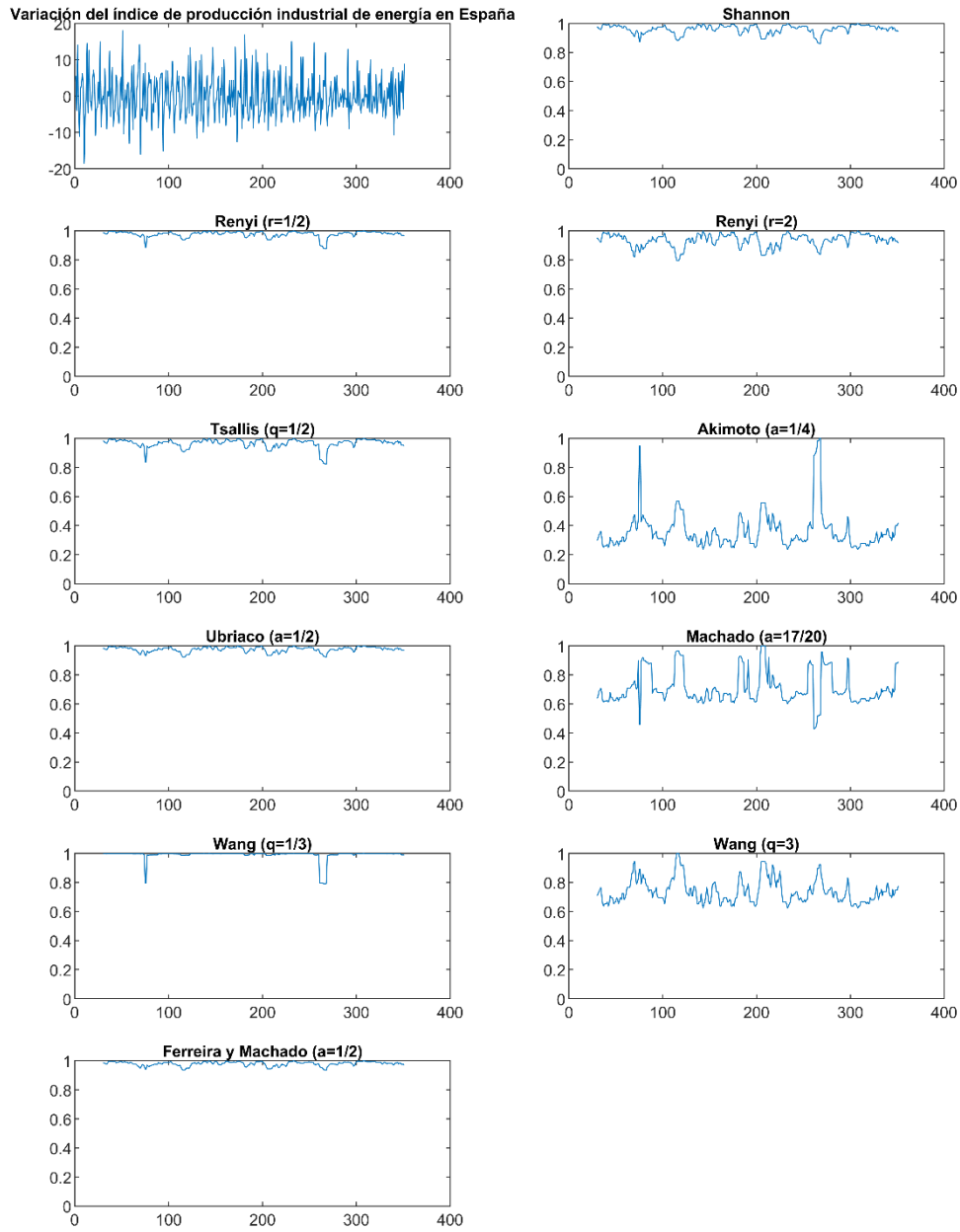


Figura 23. Resultados gráficos del caso real 4 (serie estacionaria).

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 3$, $k = 30$, $s = 1$, $i = 1$.

Cabe destacar que las funciones de Akimoto, Wang y Machado invierten los valores de entropía con respecto a las demás. En el caso de Akimoto, esto se produce porque los valores iniciales de entropía salen negativos y al normalizar se invierten. En Wang y Machado la entropía inicial sale positiva, y la inversión se debe a las razones vistas en el apartado 3.1.

No obstante, comparando ambas simulaciones se observa que la serie estacionaria ofrece datos confusos. Sin embargo, la primera simulación arroja tres cambios estructurales claramente detectados por todas las funciones. Akimoto es la función que mayores saltos alcanza.

Los cambios se dan en los valores 200, 270 y 320, que se corresponden con enero de 2009, junio de 2014 y agosto de 2018. El primer cambio detectado se corresponde con el inicio de la crisis económica de 2010, la tasa de paro comenzó a ascender exponencialmente en el año 2008. Este punto supone un cambio de tendencia en el IPI energético, que comienza a descender. El tercer cambio se debe a otro nuevo cambio de tendencia, en el cual el índice interrumpe su descenso. El segundo cambio detectado, el más débil de los tres, puede deberse a la recuperación económica de la crisis, cuyos resultados comenzaron a ser notables en el año 2014.

Seguidamente, se incluyen los parámetros estadísticos para las dos simulaciones.

Tabla 25. Parámetros estadísticos del caso real 4.

	Parámetro	Salto	CV	Media
Shannon	-	0,335780	0,080914	0,909250
Renyi	0,5	0,295410	0,059099	0,945130
Renyi	2	0,380490	0,111790	0,856760
Tsallis	0,5	0,392800	0,083411	0,920920
Tsallis	0,25	0,882480	0,601860	0,276620
Akimoto	0,5	0,196290	0,047780	0,942730
Ubriaco	0,333	0,419710	0,076287	0,968830
Wang	3	0,570320	0,222590	0,623200
Machado	0,85	0,726760	0,255050	0,539570
Ferreira y Machado	0,5	0,164710	0,039361	0,952370

Tabla 26. Parámetros estadísticos del caso real 4 (serie estacionaria).

	Parámetro	Salto	CV	Media
Shannon	-	0,139710	0,030407	0,961080
Renyi	0,5	0,123370	0,021880	0,977490
Renyi	2	0,203590	0,047405	0,935140
Tsallis	0,5	0,176630	0,032028	0,966600
Tsallis	0,25	0,764830	0,357990	0,360540
Akimoto	0,5	0,076651	0,018117	0,975920
Ubriaco	0,333	0,207750	0,035619	0,989520
Wang	3	0,376890	0,111160	0,739640
Machado	0,85	0,572400	0,158620	0,706390
Ferreira y Machado	0,5	0,065181	0,015081	0,979860

4.5. Nuevos casos diarios de COVID-19 en España.

Debido a la situación sanitaria mundial que atravesamos, también se analiza la serie temporal de casos confirmados diarios del virus Covid-19. Se extraen 526 datos diarios de España ([Johns Hopkins - Coronavirus](#)), desde febrero de 2020 a junio de 2021. Para suavizar los grandes picos y los valores negativos debidos al reajuste de los casos, se aplica una media móvil de 5 días. Se estudia tanto la serie de valores diarios como los valores de la variación (serie estacionaria).

Los parámetros seleccionados para el análisis son los siguientes:

Tabla 27. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 5 (a).

T	509
m	3
k	30
s	1
i	1

A continuación, se muestran los resultados gráficos de la simulación.

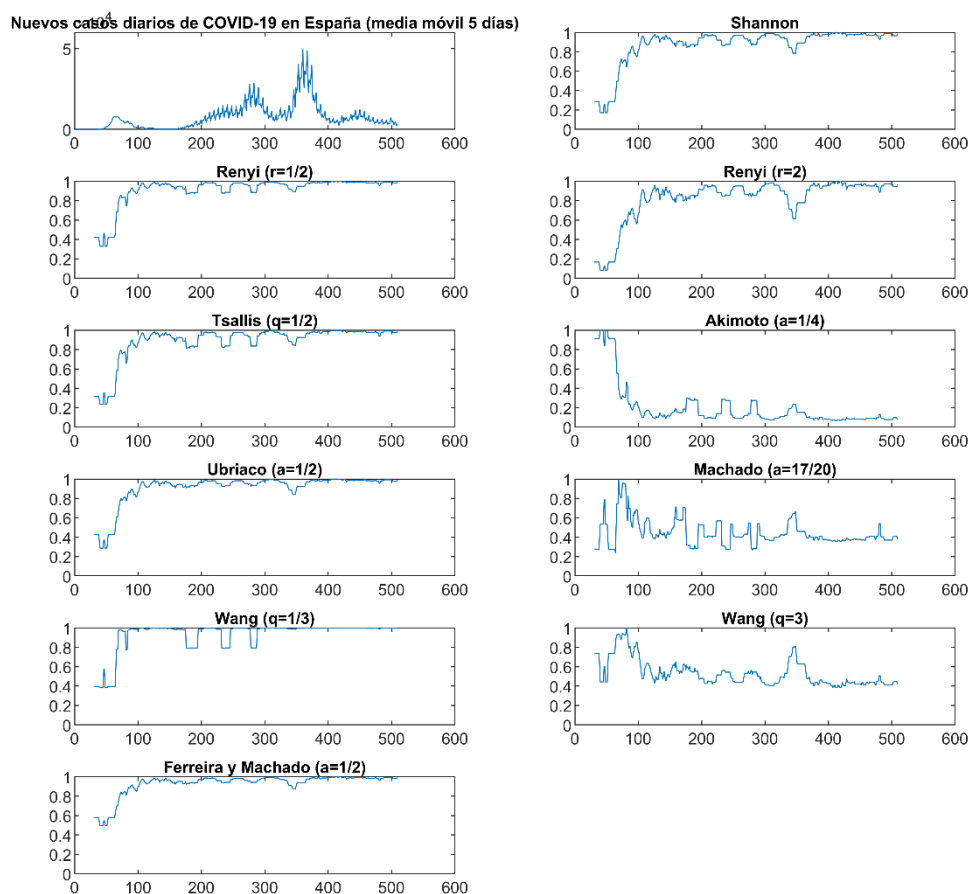


Figura 24. Resultados gráficos del caso real 5 (a).

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 3$, $k = 30$, $s = 1$, $i = 1$.

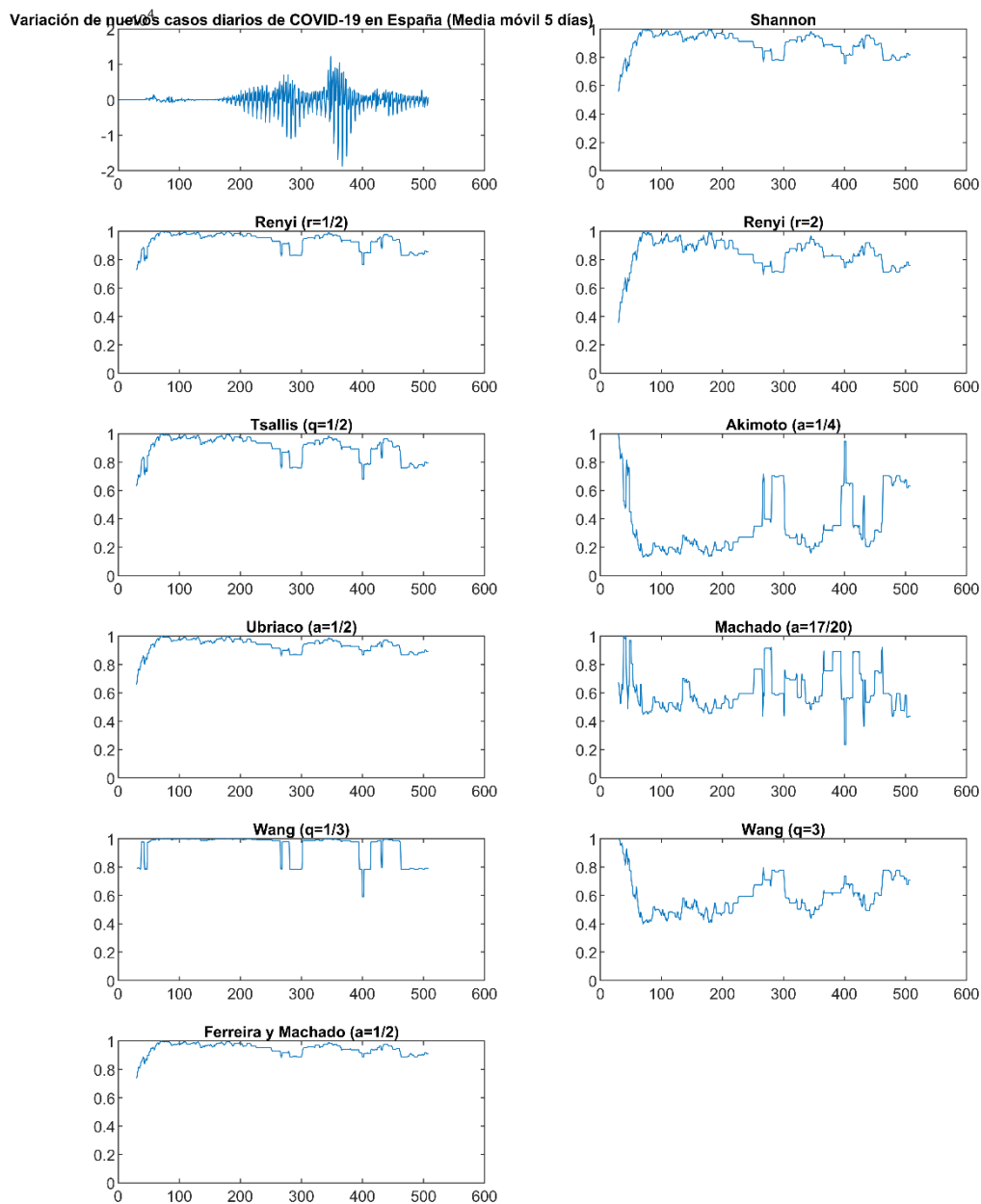


Figura 25. Resultados gráficos del caso real 5 (a) (serie estacionaria).

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 3$, $k = 30$, $s = 1$, $i = 1$.

En la simulación de la serie estacionaria se alcanzan valores de salto más grandes. Sin embargo, detecta el cambio estructural con cierto retraso respecto de la simulación con la serie normal. Además, de los cuatro cambios, sólo detecta realmente los dos últimos.

Nos fijamos en la primera simulación (Figura 24). Se detectan cuatro cambios estructurales. La primera ola de la pandemia (marzo y abril de 2020) pasa desapercibida. En parte se debe a la incapacidad de realizar tests y detectar positivos en ese momento. En general, sólo se testaban las personas que ingresaban graves en hospital.

Los tres primeros cambios se deben a la segunda ola, tras el verano de 2020. Coinciden con los puntos de crecimiento, estabilización (junto con el segundo crecimiento) y descenso del número de casos. El cuarto y último cambio detectado se debe al aumento exponencial de casos en enero de 2021, la peor ola en lo que llevamos de pandemia.

Las funciones de Renyi (con $r=2$) y Wang (con $q=3$) son los que mayor salto alcanzan.

Los parámetros estadísticos para esta simulación son los siguientes.

Tabla 28. Parámetros estadísticos del caso real 5 (a).

	Parámetro	Salto	CV	Media
Shannon	-	0,827560	0,220680	0,873500
Renyi	0,5	0,670860	0,168740	0,913050
Renyi	2	0,917770	0,274220	0,821970
Tsallis	0,5	0,763110	0,203440	0,886610
Tsallis	0,25	0,932050	1,107000	0,200750
Akimoto	0,5	0,712460	0,175680	0,907840
Ubriaco	0,333	0,616660	0,173990	0,929360
Wang	3	0,615470	0,253990	0,531080
Machado	0,85	0,763600	0,293910	0,443810
Ferreira y Machado	0,5	0,502210	0,124690	0,928670

Tabla 29. Parámetros estadísticos del caso real 5 (a) (serie estacionaria).

	Parámetro	Salto	CV	Media
Shannon	-	0,443410	0,083411	0,896150
Renyi	0,5	0,274160	0,063006	0,932480
Renyi	2	0,644300	0,114980	0,844540
Tsallis	0,5	0,367880	0,090149	0,903010
Tsallis	0,25	0,870740	0,572780	0,349770
Akimoto	0,5	0,342500	0,050881	0,935550
Ubriaco	0,333	0,409540	0,093589	0,945600
Wang	3	0,601030	0,205320	0,592280
Machado	0,85	0,764910	0,225280	0,610330
Ferreira y Machado	0,5	0,264640	0,041135	0,946330

Se vuelve a realizar la simulación un parámetro de embedding mayor ($m = 4$), para analizar cómo afecta a la detección de los cambios. A continuación, se muestran los resultados.

Tabla 30. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 5 (b).

T	509
m	4
k	120
s	1
i	1

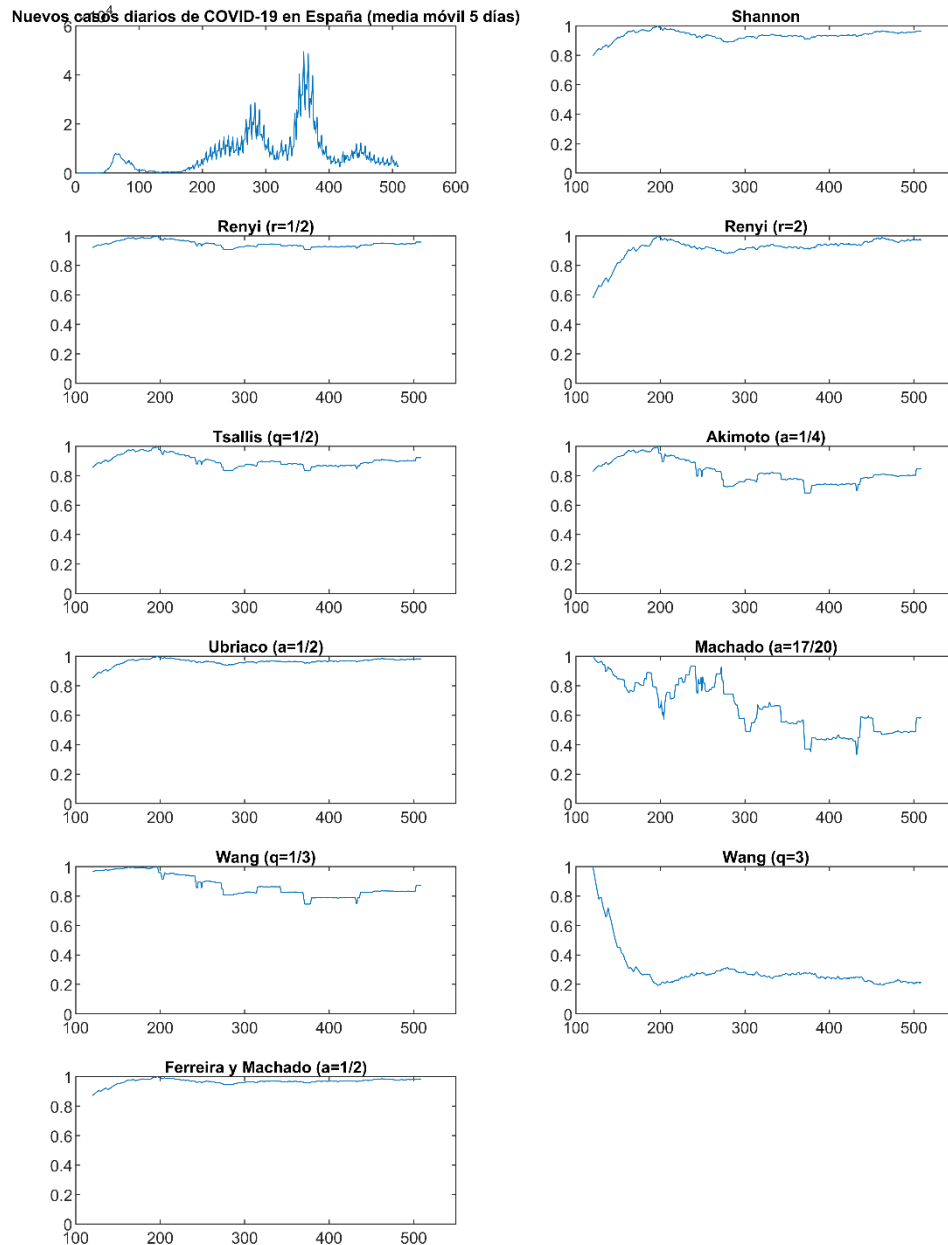


Figura 26. Resultados gráficos del caso real 5 (b).

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 4$, $k = 120$, $s = 1$, $i = 1$.

Salvo en Machado, la detección es nula. Esa función detecta las subidas y bajadas de la segunda y tercera ola. No obstante con $m=3$ los cambios se detectan con mayor claridad.

Tabla 31. Parámetros estadísticos del caso real 5 (b).

	<i>Parámetro</i>	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
Shannon	-	0,204160	0,033582	0,935140
Renyi	0,5	0,092588	0,022795	0,946330
Renyi	2	0,421060	0,079360	0,916900
Tsallis	0,5	0,166620	0,042962	0,901250
Tsallis	0,25	0,319250	0,095563	0,826100
Akimoto	0,5	0,147970	0,023083	0,963940
Ubriaco	0,333	0,254600	0,084485	0,873060
Wang	3	0,806600	0,457930	0,291580
Machado	0,85	0,668310	0,265170	0,649260
Ferreira y Machado	0,5	0,128020	0,019991	0,967550

4.6. Pacientes hospitalizados por COVID-19 por mil habitantes en España.

Se realiza el análisis del número de hospitalizados por el virus Covid-19 en España, en tanto por mil. Se extraen 190 datos, desde agosto de 2020 a mayo de 2021 ([Our World in Data - Spain](#)).

Además de la serie en bruto, también se realiza la simulación de la serie estacionaria. Los parámetros seleccionados para el análisis son los siguientes:

Tabla 32. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 6 (a).

T	190
m	3
k	30
s	1
i	1

Los resultados gráficos se muestran a continuación.

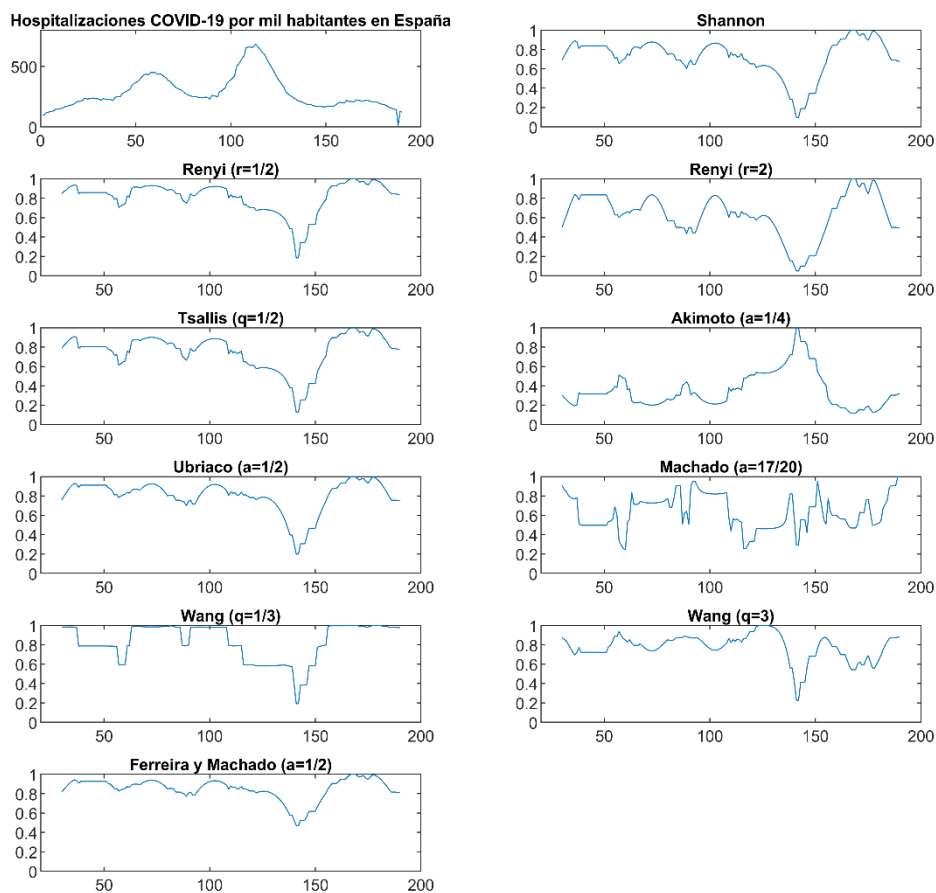


Figura 27. Resultados gráficos del caso real 6 (a).

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 3$, $k = 30$, $s = 1$, $i = 1$.

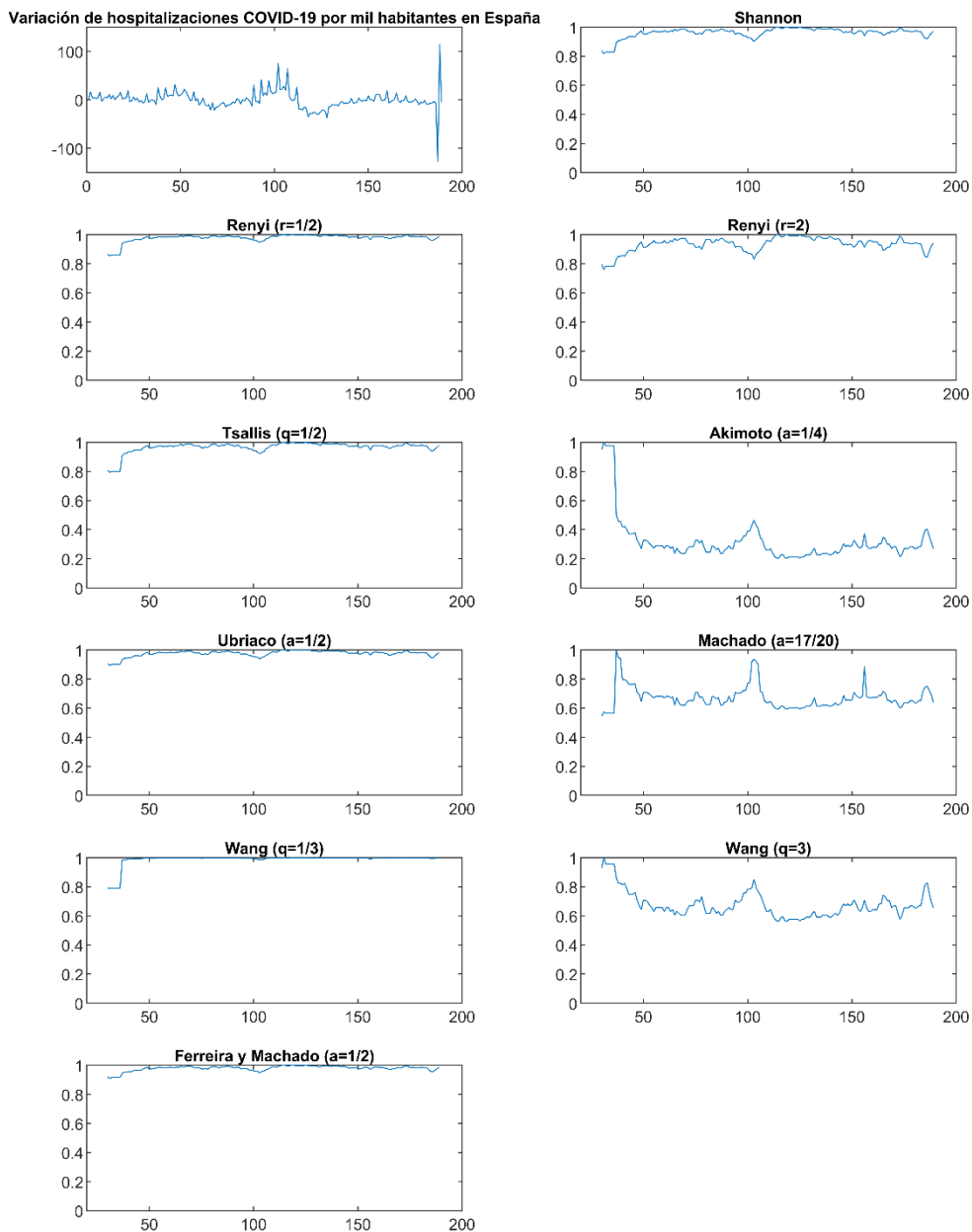


Figura 28. Resultados gráficos del caso real 6 (a) (serie estacionaria).

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 3$, $k = 30$, $s = 1$, $i = 1$.

Atendiendo a la Figura 27, todas las funciones salvo Machado, detectan claramente tres cambios estructurales. Los dos primeros se deben al ascenso y el descenso de hospitalizaciones durante la segunda ola, en otoño de 2020. El tercer cambio estructural detectado es el de mayor magnitud, y coincide con la estabilización de las hospitalizaciones tras el descenso de la tercera ola, al principio de la primavera de 2021.

En cuanto a la serie estacionaria (Figura 28), los cambios detectados son menores en magnitud, comparados con la serie inicial. En torno al valor 100 se detecta el valle entre la segunda y la tercera ola de la pandemia, con Akimoto, Machado y Wang.

Renyi (con $r=2$), Tsallis y Akimoto son las funciones que mejor detectan los cambios en este caso.

Los parámetros estadísticos de esta simulación son los siguientes.

Tabla 33. Parámetros estadísticos del caso real 6 (a).

	Parámetro	Salto	CV	Media
Shannon	-	0,904880	0,261820	0,726530
Renyi	0,5	0,815210	0,196750	0,812130
Renyi	2	0,950770	0,342930	0,634570
Tsallis	0,5	0,873290	0,243070	0,754670
Tsallis	0,25	0,881860	0,527670	0,353470
Akimoto	0,5	0,800680	0,203890	0,800560
Ubriaco	0,333	0,807590	0,229730	0,833430
Wang	3	0,773440	0,175760	0,775790
Machado	0,85	0,755790	0,280530	0,631760
Ferreira y Machado	0,5	0,529080	0,132210	0,849140

Tabla 34. Parámetros estadísticos del caso real 6 (a) (serie estacionaria).

	Parámetro	Salto	CV	Media
Shannon	-	0,182150	0,037476	0,961170
Renyi	0,5	0,144660	0,028475	0,977540
Renyi	2	0,238810	0,053536	0,933220
Tsallis	0,5	0,205320	0,041025	0,966860
Tsallis	0,25	0,796240	0,478400	0,319280
Akimoto	0,5	0,107300	0,021860	0,975670
Ubriaco	0,333	0,208750	0,042792	0,988030
Wang	3	0,435680	0,131910	0,676930
Machado	0,85	0,454670	0,115270	0,671450
Ferreira y Machado	0,5	0,090134	0,018292	0,979680

Se vuelve a realizar la simulación un parámetro de embedding mayor ($m = 4$), para analizar cómo afecta a la detección de los cambios. A continuación, se muestran los resultados.

Tabla 35. Parámetros seleccionados para el análisis del caso real 6 (b).

T	190
m	4
k	120
s	1
i	1

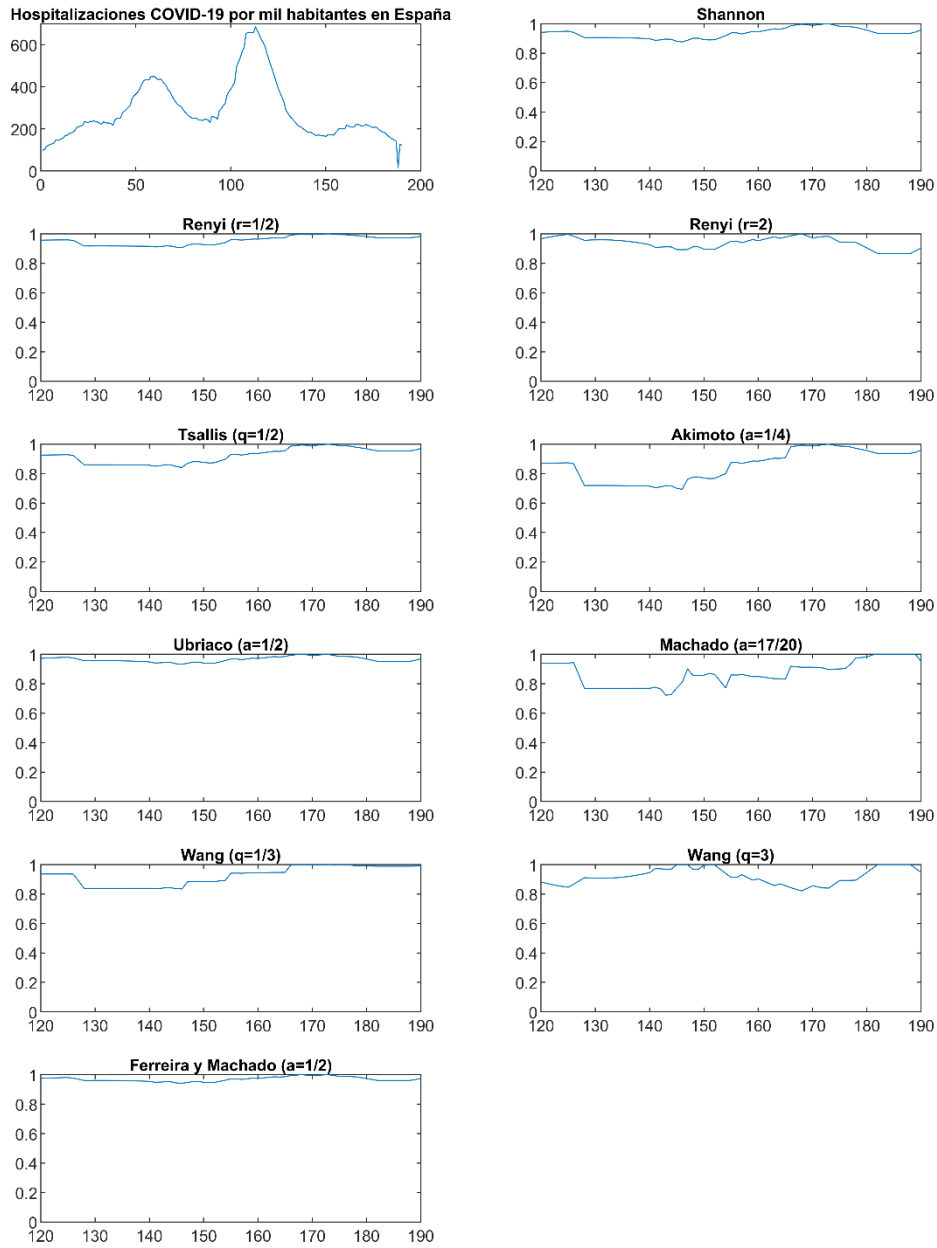


Figura 29. Resultados gráficos del caso real 6 (b).

Los parámetros seleccionados para el análisis son: $m = 4$, $k = 120$, $s = 1$, $i = 1$.

En este caso, al aumentar el parámetro de embedding, la detección es prácticamente nula.

Tabla 36. Parámetros estadísticos del caso real 6 (b).

	<i>Parámetro</i>	<i>Salto</i>	<i>CV</i>	<i>Media</i>
Shannon	-	0,122830	0,036926	0,935780
Renyi	0,5	0,093734	0,031692	0,954480
Renyi	2	0,133610	0,041503	0,938670
Tsallis	0,5	0,157750	0,055194	0,921970
Tsallis	0,25	0,306350	0,123220	0,854060
Akimoto	0,5	0,066100	0,018699	0,965210
Ubriaco	0,333	0,165220	0,068194	0,925430
Wang	3	0,178210	0,058713	0,920010
Machado	0,85	0,277850	0,094731	0,872090
Ferreira y Machado	0,5	0,057241	0,016166	0,970020

5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

Para concluir este trabajo, se puede decir que se han alcanzado los objetivos que se inicialmente se plantearon. El primero de ellos, comparar el nivel de detección de cambios estructurales de las nuevas funciones de entropía fraccional con las funciones clásicas de Shannon, Rènyi y Tsallis. En segundo lugar, ampliar la gama de series reales analizadas. A continuación, se comenta el proceso de realización del proyecto.

En primer lugar, se llevó a cabo un estudio y comprensión de la herramienta matemática que nos sirve de ayuda: las permutaciones. Seguidamente, se enlazó ese eslabón con la obtención de unos valores de entropía que nos permitieran analizar el nivel de complejidad de una serie temporal a lo largo del tiempo.

Uno de los puntos fundamentales en este trabajo fue la recolección de las nuevas funciones de entropía fraccional. Para ello se recurrió a un análisis bibliográfico, estudiando los nuevos avances en dicho campo matemático. Una vez encontradas las funciones de entropía a aplicar, comenzó la tarea de confeccionar el código que recorriera la serie y proporcionara todos los resultados deseados.

Centrémonos en las conclusiones científicas. En cuanto a la comparativa de las nuevas funciones de entropía, cabe destacar el buen nivel de detección que ofrece la función de Akimoto para valores cercanos a 0,5. La Figura 16 muestra perfectamente la comparativa de Akimoto con respecto a las funciones clásicas. Akimoto obtiene mejor resultado que Rènyi o Tsallis. La Figura 18 lo vuelve a confirmar. No obstante, queda por estudiar en futuros trabajos la inversión de los valores de entropía en esta función cuando se estudian series con pocos valores (Figura 24 y Figura 27). Las funciones de Machado y Wang también ofrecen buenos valores de salto en ciertos casos, pero en otros tantos ofrecen resultados confusos (Figura 16 para Machado y Figura 20 para Wang). Ferreira y Machado y Ubriaco no ofrecen resultados sobresalientes en ningún caso.

Con respecto al análisis de las series estacionarias, en general muestran peor resultado que la serie original. En algún caso se observa un retardo en la detección de los cambios estructurales con respecto a la serie inicial (Figura 25).

Finalmente, los casos reales analizados representan de forma fiel la aplicación práctica que esta metodología pudiera tener en el mundo que nos rodea. El caso de la taquiarritmia es detectado de forma satisfactoria (Electrocardiograma con taquiarritmia.). El ejemplo de la arritmia débil ha llevado la simulación hasta el límite de detección (4.3). Además, también se han analizado parámetros económicos como el Índice de Producción Industrial en España (4.4), detectando claramente la crisis sufrida en torno al año 2010. Por último, se han estudiado parámetros de actualidad con la pandemia del Covid-19 que aún sufrimos.

Por todo ello, este trabajo ha resultado fructífero tanto en el ámbito académico como de investigación científica.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Bandt y B. Pompe, «Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, n.o 17, p. 174102, abr. 2002.
- [2] Cody, J., «An Overview of Software Development for Special Functions», *Lecture Notes in Mathematics*, 506, Numerical Analysis Dundee, G. A. Watson (ed.), Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [3] E. Box, G. M. Jenkins, G. C. Reinsel, y G. M. Ljung, «Time series analysis: forecasting and control», John Wiley & Sons, 2015.
- [4] Esparza Catalán, «Series Temporales», CSIC.
- [5] H. Jackson, «XI. —On q-Functions and a certain Difference Operator», *Earth Environ. Sci. Trans. R. Soc. Edinb.*, vol. 46, n.o 2, pp. 253-281, ed 1909.
- [6] J. S. Cánovas Peña y M. Muñoz Guillermo, «Detección de cambios estructurales en series temporales mediante funciones de entropía», 2016.
- [7] J. S. Cánovas, G. García-Clemente, y M. Muñoz-Guillermo, «Comparing permutation entropy functions to detect structural changes in time series», *Phys. Stat. Mech. Its Appl.*, vol. 507, pp. 153-174, oct. 2018.
- [8] J. T. Machado, «Fractional Order Generalized Information», *Entropy*, vol. 16, n.o 4, Art. n.o 4, abr. 2014.
- [9] J.M. Marín Diazaraque, «Estadística Descriptiva: Series Temporales».
- [10] M. Akimoto y A. Suzuki, «Proposition of a New Class of Entropy», *J. Korean Phys. Soc.*, vol. 38, n.o 5, p. 460, may 2001.
- [11] M. R. Ubriaco, «Entropies based on fractional calculus», *Phys. Lett. A*, vol. 373, n.o 30, pp. 2516-2519, jul. 2009.
- [12] M. Small, «Applied nonlinear time series analysis: applications in physics, physiology and finance», vol. 52. World Scientific, 2005.
- [13] Oberhettinger, F. «Hypergeometric Functions. Handbook of Mathematical Functions with Formulas», Graphs, and Mathematical Tables. (M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds.). New York: Dover, 1972.
- [14] R. A. C. Ferreira y J. Tenreiro Machado, «An Entropy Formulation Based on the Generalized Liouville Fractional Derivative», *Entropy*, vol. 21, n.o 7, Art. n.o 7, jul. 2019.
- [15] R. Chandrashekar, C. Ravikumar, y J. Segar, «A Fractional entropy in Fractal phase space: properties and characterization», *ArXiv13012779 Cond-Mat*, mar. 2013.
- [16] R. S. Tsay y R. Chen, «Nonlinear time series analysis», vol. 891, John Wiley & Sons, 2018.
- [17] Rényi, «Probability Theory», Norh-Holland, Amsterdam, 1970.
- [18] S. Abe, «Nonextensive statistical mechanics of q-bosons based on the q-deformed entropy», *Phys. Lett. A*, vol. 244, n.o 4, pp. 229-236, jul. 1998.
- [19] Tsallis, «Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics», *J. Stat. Phys.*, vol. 52, n.o 1, pp. 479-487, jul. 1988.

ANEJO I: Código utilizado en Matlab

```
clc
clearvars

% PARÁMETROS FUNCIONES

r_Renyi_1 = 1/2;
r_Renyi_2 = 2;
q_Tsallis_1 = 1/2;
%q_Tsallis_2 = 2;
a_Akimoto_1 = 1/4;
a_Ubriaco_1 = 1/2;
q_Wang_1 = 1/3;
q_Wang_2 = 3;
a_Machado_1 = 17/20;
a_FeMa_1 = 1/2;

% Importación serie de referencia

serie = importval('nasdaq_return.xlsx');
serie=serie.';

%parametros1 = importval('Valores_parametros_1.xlsx');
%parametros2 = importval('Valores_parametros_2.xlsx');

%for a=1:length(parametros2)
%    a
%    r_Renyi_1 = parametros2(a);

% PARÁMETROS SIMULACIÓN

T = length(serie); % Total datos
l_serie = T/2; % Frontera serie-ruido
m = 4;
ka = 5*factorial(m);
ov1 = 10; % Equivale a s. Overlapping externo. Va de 1 (ov total) a ka
(sin ov)
ov2 = 1; % Equivale a i. Overlapping interno. Va de 1 (ov total) a m
(sin ov)

q=1;
contador=0;
while (q+ka-1) <= T

    clearvars conteo;
    contador=contador+1;

    % CREACIÓN VENTANA
    for p=0:(ka-1)
        ventana(p+1)=serie(q+p);
    end
    q=q+ov1;
    % Matriz conjuntos por filas
    k=1;
    i=1;
    while (i+m-1) <= ka
        for j=0:(m-1)
            conjuntos(k,j+1)=ventana(i+j);
```

```

end
k=k+1;
i=i+ov2;
end

% Matriz ordenada por filas y los índices
[ordenada,indices]=sort(conjuntos,2);

% Rastreo y conteo de permutaciones

for k=1:length(indices(:,1))
disp(q)
%disp(k)
repetido=0;
% Compruebo si ya está evaluada la permutación
for j=1:k-1
if indices(k,)==indices(j,:)
repetido=1;
end
end
% Si no está, la añado y cuento
if repetido==0
if k==1
o=1;
else
o=o+1;
end
permutaciones(o,:)=indices(k,:);
conteo(o)=1;
for j=k+1:length(indices(:,1))
if permutaciones(o,)==indices(j,:);
conteo(o)=conteo(o)+1;
end
end
end
end

conteo=conteo.';
admisibles=length(conteo);
periodicidad=conteo/length(indices(:,1)); %En tanto por uno

% Cálculo entropía
sum=0; sum1=0; sum2=0; sum3=0; sum4=0; sum5=0; sum6=0; sum7=0;
sum8=0; sum9=0; sum10=0;
for k=1:admisibles
sum=sum+periodicidad(k)*log(periodicidad(k)); % Shannon
sum1=sum1+(periodicidad(k)^r_Renyi_1); % Renyi 1
sum2=sum2+(periodicidad(k)^r_Renyi_2); % Renyi 2
sum3=sum3+(periodicidad(k)*(((1/periodicidad(k))^(1-
q_Tsallis_1))-1)/(1-q_Tsallis_1))); % Tsallis 1
%sum4=sum4+(periodicidad(k)*(((1/periodicidad(k))^(1-
q_Tsallis_2))-1)/(1-q_Tsallis_2))); % Tsallis 2
sum5=sum5+(((a_Akimoto_1-1)/gamma(2-
a_Akimoto_1))*hypergeom(1,1-a_Akimoto_1,log(periodicidad(k)))); %
Akimoto 1
sum6=sum6+periodicidad(k)*((-
log(periodicidad(k))^(a_Ubriaco_1)); % Ubriaco 1
sum7=sum7+(periodicidad(k)^q_Wang_1)*(-
1)*(log(periodicidad(k))); % Wang 1
sum8=sum8+(periodicidad(k)^q_Wang_2)*(-
1)*(log(periodicidad(k))); % Wang 2

```

```

        sum9=sum9+(-((periodicidad(k)^(-
a_Machado_1))*log(periodicidad(k))/gamma(1+a_Machado_1))+psi(1)-
psi(1-a_Machado_1)); % Machado 1
        sum10=sum10+(periodicidad(k)*gamma(1-
log(periodicidad(k))/gamma(1-a_FeMa_1-log(periodicidad(k)))); %
Ferreira - Machado 1
    end
    Hb_shannon(contador) = -sum;
    Hb_renyi_1(contador) = log(sum1)/(1-r_Renyi_1);
    Hb_renyi_2(contador) = log(sum2)/(1-r_Renyi_2);
    Hb_tsallis_1(contador) = sum3;
    %Hb_tsallis_2(contador) = sum4;
    Hb_akimoto_1(contador) = sum5;
    Hb_ubriaco_1(contador) = sum6;
    Hb_wang_1(contador) = sum7;
    Hb_wang_2(contador) = sum8;
    Hb_machado_1(contador) = sum9;
    Hb_fema_1(contador) = sum10;

    lab(contador)=ka+ov1*(contador-1); % Para eje x gráficas

end

%Transposición a vectores columna y normalizo entropías
H_shannon=Hb_shannon./max(Hb_shannon);
H_renyi_1=Hb_renyi_1./max(Hb_renyi_1);
H_renyi_2=Hb_renyi_2./max(Hb_renyi_2);
H_tsallis_1=Hb_tsallis_1./max(Hb_tsallis_1);
%H_tsallis_2=Hb_tsallis_2./max(Hb_tsallis_2);
if(max(Hb_akimoto_1)>0)
    H_akimoto_1=Hb_akimoto_1./max(Hb_akimoto_1);
else
    H_akimoto_1=Hb_akimoto_1./min(Hb_akimoto_1);
end
H_ubriaco_1=Hb_ubriaco_1./max(Hb_ubriaco_1);
H_wang_1=Hb_wang_1./max(Hb_wang_1);
H_wang_2=Hb_wang_2./max(Hb_wang_2);
H_machado_1=Hb_machado_1./max(Hb_machado_1);
H_fema_1=Hb_fema_1./max(Hb_fema_1);

%CÁLCULO PARÁMETROS ESTADÍSTICOS (matriz est)
est(1,2)="r,q";
est(1,3)="Jump";
est(1,4)="CV";
est(1,5)="Mean";

est(2,1)="Shannon";
est(2,2)="-";
est(2,3)=max(H_shannon)-min(H_shannon);
est(2,4)=std(H_shannon)/mean(H_shannon);
est(2,5)=mean(H_shannon);

est(3,1)="Renyi 1";
est(3,2)=r_Renyi_1;
est(3,3)=max(H_renyi_1)-min(H_renyi_1);
est(3,4)=std(H_renyi_1)/mean(H_renyi_1);
est(3,5)=mean(H_renyi_1);

est(4,1)="Renyi 2";
est(4,2)=r_Renyi_2;
est(4,3)=max(H_renyi_2)-min(H_renyi_2);

```

```

est(4,4)=std(H_renyi_2)/mean(H_renyi_2);
est(4,5)=mean(H_renyi_2);

est(5,1)="Tsallis 1";
est(5,2)=q_Tsallis_1;
est(5,3)=max(H_tsallis_1)-min(H_tsallis_1);
est(5,4)=std(H_tsallis_1)/mean(H_tsallis_1);
est(5,5)=mean(H_tsallis_1);

est(6,1)="Akimoto 1";
est(6,2)=a_Akimoto_1;
est(6,3)=max(H_akimoto_1)-min(H_akimoto_1);
est(6,4)=std(H_akimoto_1)/mean(H_akimoto_1);
est(6,5)=mean(H_akimoto_1);

est(7,1)="Ubriaco 1";
est(7,2)=a_Ubriaco_1;
est(7,3)=max(H_ubriaco_1)-min(H_ubriaco_1);
est(7,4)=std(H_ubriaco_1)/mean(H_ubriaco_1);
est(7,5)=mean(H_ubriaco_1);

est(8,1)="Wang 1";
est(8,2)=q_Wang_1;
est(8,3)=max(H_wang_1)-min(H_wang_1);
est(8,4)=std(H_wang_1)/mean(H_wang_1);
est(8,5)=mean(H_wang_1);

est(9,1)="Wang 2";
est(9,2)=q_Wang_2;
est(9,3)=max(H_wang_2)-min(H_wang_2);
est(9,4)=std(H_wang_2)/mean(H_wang_2);
est(9,5)=mean(H_wang_2);

est(10,1)="Machado 1";
est(10,2)=a_Machado_1;
est(10,3)=max(H_machado_1)-min(H_machado_1);
est(10,4)=std(H_machado_1)/mean(H_machado_1);
est(10,5)=mean(H_machado_1);

est(11,1)="Ferreira y Machado 1";
est(11,2)=a_FeMa_1;
est(11,3)=max(H_fema_1)-min(H_fema_1);
est(11,4)=std(H_fema_1)/mean(H_fema_1);
est(11,5)=mean(H_fema_1);

%recogida(a,1)=max(H_renyi_1)-min(H_renyi_1);
%recogida(a,2)=std(H_renyi_1)/mean(H_renyi_1);
%recogida(a,3)=mean(H_renyi_1);
%recogida

%GRÁFICAS
%%

ylim1 = 0.5;
ylim2 = 1;
ticks=[0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1];

subplot(6,2,1)
plot(serie)
title('Variación del índice NASDAQ')

```

```

ylim([-500000000 500000000]);
%yticks(ticks)

subplot(6,2,2)
plot(lab,H_shannon)
title('Shannon')
ylim([ylim1 ylim2]);
yticks(ticks)

subplot(6,2,3)
plot(lab,H_renyi_1)
title('Renyi (r=1/2)')
ylim([ylim1 ylim2]);
yticks(ticks)

subplot(6,2,4)
plot(lab,H_renyi_2)
title('Renyi (r=2)')
ylim([ylim1 ylim2]);
yticks(ticks)

subplot(6,2,5)
plot(lab,H_tsallis_1)
title('Tsallis (q=1/2)')
ylim([ylim1 ylim2]);
yticks(ticks)

%subplot(5,3,6)
%plot(lab,H_tsallis_2)
%title('Tsallis 2')

subplot(6,2,6)
plot(lab,H_akimoto_1)
title('Akimoto (a=1/4)')
ylim([ylim1 ylim2]);
yticks(ticks)

%subplot(6,2,6)
%plot(lab,H_akimoto_1)
%title('Akimoto (a=1/4) (sin normalizar)')
%ylim([-0.5 0]);
%yticks([-0.5 -0.3 -0.1 0])

subplot(6,2,7)
plot(lab,H_ubriaco_1)
title('Ubriaco (a=1/2)')
ylim([ylim1 ylim2]);
yticks(ticks)

subplot(6,2,8)
plot(lab,H_machado_1)
title('Machado (a=17/20)')
ylim([ylim1 ylim2]);
yticks(ticks)

subplot(6,2,9)
plot(lab,H_wang_1)
title('Wang (q=1/3)')
ylim([ylim1 ylim2]);
yticks(ticks)

```

```
subplot(6,2,10)
plot(lab,H_wang_2)
title('Wang (q=3)')
ylim([ylim1 ylim2]);
yticks(ticks)
```

```
subplot(6,2,11)
plot(lab,H_fema_1)
title('Ferreira y Machado (a=1/2)')
ylim([ylim1 ylim2]);
yticks(ticks)
```