



Universidad  
Politécnica  
de Cartagena

# **UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA**

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

## **SIMULACIÓN NUMÉRICA DE ALGUNOS MODELOS DE TURBULENCIA CON APLICACIONES A LA AERODINÁMICA DE VEHÍCULOS.**

### **TRABAJO FIN DE GRADO**

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

Autor: Cristóbal Sánchez Martínez

Director: Francisco Periago Esparza

Codirector: Juan Pedro Solano Fernández

Cartagena, Julio de 2020

# ÍNDICE

1. PREFACIO.....	2
1.1 ORIGEN Y MOTIVACIÓN DEL PROYECTO.....	2
1.2 OBJETIVOS DEL PROYECTO.....	2
2. INTRODUCCIÓN A LA AERODINÁMICA.....	3
2.1 Concepto de aerodinámica .....	3
2.2 Principio de conservación de la masa. Ecuación de continuidad en forma integral y diferencial.....	3
2.3 Ecuación de cantidad de movimiento.....	4
2.4 Principio de Bernoulli .....	4
2.5 Flujos viscosos, capa límite y desprendimiento de la capa límite.....	6
2.6 Semejanza física y números adimensionales .....	8
2.7 Fuerzas aerodinámicas, momento generado y centro de presiones.....	8
2.8 Perfiles aerodinámicos .....	11
2.8.1 Perfiles NACA.....	12
3. TURBULENCIA.....	13
3.1 Concepto de turbulencia .....	13
3.2 Transición de flujo laminar a turbulento.....	13
3.3 Ecuaciones de la capa límite turbulenta .....	14
3.4 Ecuaciones generales de Reynolds del flujo turbulento .....	15
3.5 Modelos de turbulencia .....	17
3.4.1 Modelo $k - \varepsilon$ .....	18
3.4.2 Modelo Spalart-Allmaras.....	21
3.4.3 Modelo $k - \omega$ .....	22
4. MÉTODOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN AERODINÁMICA .....	24
4.1 Método de elementos finitos.....	24
4.2 Método de elementos finitos aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes.....	27
4.3 Método de volúmenes finitos .....	34
5. ANÁLISIS COMPUTACIONAL DE FLUIDOS.....	37
5.1 Preprocesado .....	37
5.1.1 Definición de la geometría .....	37
5.1.2 Generación de la malla.....	38
5.1.3 Calidad de malla .....	40

5.1.4 Fenómenos físicos que deben ser modelados, propiedades del fluido y condiciones de contorno.....	43
5.1.5 Modelado cerca de la pared.....	43
5.2 Proceso (solver).....	45
5.3 Postprocesado.....	47
6. RESULTADOS NUMÉRICOS E INTERPRETACIONES FÍSICAS.....	48
6.1 Resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes con el método de elementos finitos mediante FreeFem .....	48
6.2 Simulación de un perfil sustentador a través del software ANSYS .....	55
7. LA AERODINÁMICA EN LA FÓRMULA 1 .....	71
7.1 BREVE HISTORIA DE LA AERODINÁMICA EN LA F1.....	71
7.2 ELEMENTOS AERODINÁMICOS DE UN FÓRMULA 1 .....	73
7.2.1 Alerón delantero .....	73
7.2.2 Pontones .....	74
7.2.3 Fondo plano.....	76
7.2.4 Difusor .....	77
7.2.5 Alerón trasero .....	79
8. CONCLUSIONES .....	83
9. BIBLIOGRAFÍA .....	84
ANEXOS .....	86
Anexo A. Código FreeFem .....	86
Anexo B. Código Matlab.....	89

# 1. PREFACIO

## 1.1 ORIGEN Y MOTIVACIÓN DEL PROYECTO

El trabajo surge por la inquietud de comprender el comportamiento del flujo de aire a través de los perfiles aerodinámicos, así como el interés de conocer los métodos matemáticos que hay detrás de ello.

Este interés nació hace muchos años a través de la Fórmula 1, la aerodinámica y las matemáticas que rodeaban esta competición tan mediática.

La motivación del proyecto reside en la posibilidad de acercarnos al trabajo realizado por algunos de estos ingenieros, a través del empleo de diferentes softwares y la obtención de resultados a través de una geometría consistente en un perfil aerodinámico en 2D, es decir, la sección transversal del ala de un avión, un álabo o un alerón de un Fórmula 1, por ejemplo.

## 1.2 OBJETIVOS DEL PROYECTO

Los objetivos del proyecto son diversos e incumben principalmente a dos ramas como son las matemáticas y la aerodinámica.

Podemos resumir los principales objetivos del proyecto en:

1. Conocimiento y comprensión de los principales métodos matemáticos para la resolución de problemas aplicados a la ingeniería y más concretamente a la aerodinámica.
2. Conocimiento y comprensión de los distintos modelos de turbulencia utilizados para el cierre del sistema de ecuaciones de Reynolds.
3. Uso de diferentes softwares de simulación numérica, para una vez aprendido el manejo del programa, resolver los problemas propuestos: Geometría, configuración, creación de mallado, resolución numérica e interpretación de los resultados. También se pretende obtener resultados coherentes con la simulación realizada, así como similares a los resultados teóricos.
4. Comprensión del flujo de aire a través de perfiles aerodinámicos. Para lo cual estudiaremos las principales ecuaciones y principios que modelan la aerodinámica.

## 2. INTRODUCCIÓN A LA AERODINÁMICA

Comenzaremos estudiando en profundidad la física del problema, para ello definiremos la aerodinámica, la rama en la que nos vamos a centrar en el proyecto, para posteriormente deducir las ecuaciones y principios que la modelan.

### 2.1 Concepto de aerodinámica

La aerodinámica es la rama de la mecánica de fluidos que estudia las acciones que aparecen sobre los cuerpos cuando existe un movimiento relativo entre éstos y el fluido que los rodea.

### 2.2 Principio de conservación de la masa. Ecuación de continuidad en forma integral y diferencial

El requerimiento de conservación de la masa de un fluido impone ciertas restricciones al campo de velocidades, que por tanto no puede ser cualquiera. Estas restricciones cinemáticas estarán ligadas a la distribución de masa, y por tanto al campo de densidades.

El principio de conservación de la masa implica que la masa de un volumen fluido (sistema cerrado) no varía con el tiempo,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho(\vec{x}, t) dV = 0$$

A través de la ecuación de transporte de Reynolds podemos generalizar la ecuación anterior para volúmenes de control (sistemas abiertos),

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho(\vec{x}, t) dV + \int_{S_c(t)} \rho(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS = 0,$$

que nos indica que la variación en la unidad de tiempo de la masa contenida en un volumen de control se debe al flujo convectivo de masa a través de sus paredes. Ésta representa la ecuación de continuidad en forma integral.

Si el volumen de control es fijo respecto al sistema de referencia, la ecuación anterior puede escribirse en la forma,

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_0} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0.$$

Si aplicamos el teorema de Gauss-Ostrogradsky,

$$\int_{V_0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \quad \forall V_0$$

Esto sólo es posible si,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0,$$

que es la ecuación de conservación de la masa (o ecuación de continuidad) en forma diferencial.

Si particularizamos para el caso de fluidos incompresibles, que es nuestro caso de estudio, la ecuación de continuidad en forma integral toma la forma,

$$\frac{dV_c}{dt} + \int_{S_c(t)} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS = 0$$

Y en forma diferencial,

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$\vec{v}$  denota en todo momento la velocidad del fluido.

BIBLIOGRAFIA: LIBRO DE MECANICA DE FLUIDOS

## 2.3 Ecuación de cantidad de movimiento

Planteando la segunda ley de Newton a una porción de fluido (un volumen fluido), la variación de cantidad de movimiento del mismo es igual a la suma de las fuerzas sobre el mismo: integral de las fuerzas de superficie e integral de las fuerzas másicas:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \vec{v} dV = \int_{S_f} \tau \vec{n} dS + \int_{V_f} \rho \vec{f}_m dV.$$

Si aplicamos esta ley a un volumen de control  $V_c(t)$  limitado por la superficie de control  $S_c(t)$ , y descomponemos el tensor de esfuerzos en presión y tensor de esfuerzos de deformación, obtenemos la ecuación integral de cantidad de movimiento:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \vec{v} dV + \int_{S_c(t)} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS = - \int_{S_c(t)} p \vec{n} dS + \int_{S_c(t)} \tau' \vec{n} dS + \int_{V_c(t)} \rho \vec{f}_m dV.$$

Si elegimos un volumen de control fijo  $V_0$ ,

$$\int_{V_0} \frac{d\rho \vec{v}}{dt} dV + \int_{S_0} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \int_{S_0} p \vec{n} dS + \int_{S_0} \tau' \vec{n} dS + \int_{V_0} \rho \vec{f}_m dV.$$

Aplicando Gauss y teniendo en cuenta que el volumen puede ser cualquiera, además de utilizar la ecuación de continuidad para simplificar, obtenemos la ecuación diferencial de cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[ \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \tau' + \rho \vec{f}_m.$$

Esta ecuación puede interpretarse como la segunda ley de Newton para una partícula fluida. La densidad es la masa por unidad de volumen, y multiplicada por la aceleración de la partícula, es igual a la suma de las resultantes de las fuerzas que actúan sobre la partícula.

## 2.4 Principio de Bernoulli

Los perfiles aerodinámicos basan su funcionamiento en la manera en la que el flujo de aire los rodea.

La ecuación de Bernoulli fue formulada en 1738, aunque la deducción completa se debe a Leonhard Euler, en 1755. Usualmente la ecuación de Bernoulli se aplica a lo largo de una línea de corriente en un flujo no viscoso, como veremos a continuación.

Si en un flujo se tienen valores característicos de longitud  $L$ , velocidad  $U$  de tiempo  $t_0$ , de densidad  $\rho$  y de fuerza másica  $f_c$ , la ecuación de cantidad de movimiento tendrá por órdenes de magnitud de sus términos

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \left[ \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau}' + \rho \vec{f}_m$$

Si dividimos por el término convectivo, tendremos una relación entre términos que respectivamente son:

$$St, 1, \frac{\Delta L P}{\rho U^2}, \frac{1}{Re} \text{ y } \frac{1}{Fr}.$$

Si los valores característicos del problema son tales que  $Re \gg 1$ , o  $ReSt \gg 1$ , se puede despreciar el término viscoso, obteniendo la ecuación de cantidad de movimiento de Euler en la forma

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{f}_m,$$

o expresada de la siguiente forma

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}_m.$$

Multiplicando escalarmente por el vector unitario tangente a la línea de corriente, resulta

$$\vec{n}_l \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + \vec{f}_m \cdot \vec{n}_l.$$

La fuerza másica deriva de un potencial a excepción de la fuerza de Coriolis y del término de la aceleración de inercia que procede de la derivada de la velocidad angular del sistema de referencia:

$$\vec{f}_m = -\nabla U_p - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{x}$$

Si la velocidad angular es constante, y teniendo en cuenta que la componente de la fuerza másica según la línea de corriente no incluye a la fuerza de Coriolis por ser perpendicular a la velocidad local, resultará

$$\vec{f}_m \cdot \vec{n}_l = -\frac{\partial U_p}{\partial l}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de cantidad de movimiento e introduciendo la función de barotropía  $d\omega = \frac{dp}{\rho}$  llegamos a la forma general de la ecuación de Euler-Bernoulli

$$\frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial l} (v^2 + \omega + U_p) = 0.$$

Para un líquido con densidad constante, la función de barotropía es  $\omega = \frac{p}{\rho}$ . Por tanto, la ecuación anterior se expresa en la forma

$$\frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U_p \right) = 0.$$

Para un gas, si el movimiento es homeentrópico, la función de barotropía vendrá dada por

$$\omega = h - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}.$$

Despreciando el término de fuerzas másicas, la relación de Euler-Bernoulli toma la forma

$$\frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{v^2}{2} + h \right) = 0.$$

Si además el movimiento es casi-estacionario y el término de aceleración local es despreciable frente al convectivo, podemos integrar las ecuaciones anteriores a lo largo de una línea de corriente. Para líquidos,

$$\left[ \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + U_p \right]_1 = \left[ \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + U_p \right]_2,$$

donde  $v$  es en este caso el módulo de la velocidad.

y para gases,

$$\left[ \frac{p}{\rho} + h \right]_1 = \left[ \frac{p}{\rho} + h \right]_2.$$

Esta ecuación es de suma importancia para el desarrollo de nuestro proyecto, pues permite entender el comportamiento de un flujo a través de un perfil aerodinámico, para poder conocer de antemano cómo serán cualitativamente los resultados.

## 2.5 Flujos viscosos, capa límite y desprendimiento de la capa límite

Las fuerzas viscosas son las responsables de fenómenos como la generación de sustentación, la resistencia de fricción, así como el desprendimiento de la capa límite.

Cuando se considera un flujo real, que incluye el efecto de los esfuerzos viscosos alrededor de un cuerpo, se puede observar como las líneas de corriente presentan simetría respecto al eje horizontal, mientras que respecto al eje vertical se observa una diferencia entre la zona corriente arriba y la zona corriente abajo del cuerpo. Esta falta de simetría respecto al eje vertical implica que la distribución de presiones en la zona trasera sea diferente a la de la zona delantera. La resultante aerodinámica, que se obtiene por integración de la distribución de presiones, no es nula, y aparece una fuerza de resistencia sobre el cuerpo, que estudiaremos más adelante. La forma del flujo real es consecuencia de las fuerzas viscosas en la cercanía de la pared.

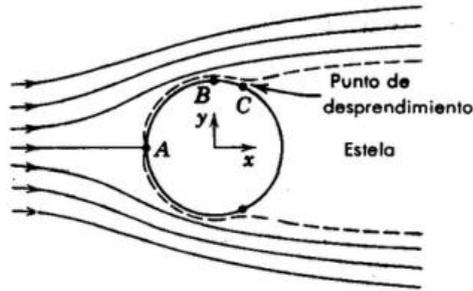


Figura 2. 1. Flujo real y desprendimiento.

En 1904 Ludwig Prandtl planteó su teoría de la capa límite, según la cual incluso para Reynolds muy elevados, el campo fluido puede dividirse en dos regiones;

- Campo fluido exterior, donde la viscosidad es despreciable y el fluido puede considerarse ideal.
- Capa límite delgada, cerca de las superficies sólidas donde la viscosidad es importante y obliga a que se cumpla la condición de adherencia.

En el movimiento alrededor de un cuerpo a altos números de Reynolds, podemos identificar una zona pegada al cuerpo de espesor mucho menor que éste, cuyo análisis será esencial para caracterizar el flujo.

En una capa límite con gradiente de presiones  $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ , el perfil de velocidades se va modificando al frenarse por el efecto del campo de presiones y la tangente puede llegar a anularse (y por ello el esfuerzo viscoso). Se dice que se ha producido el desprendimiento de la capa límite, llegando a producirse incluso recirculaciones.

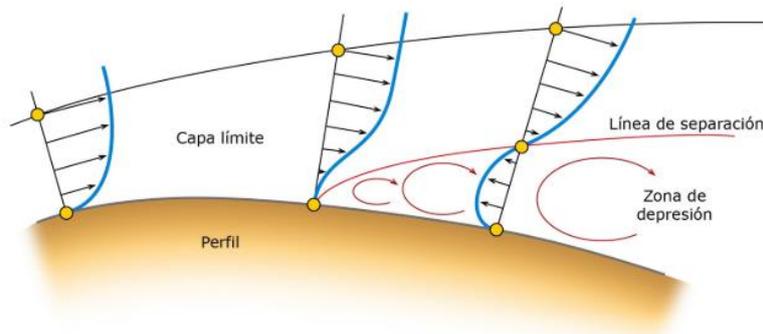


Figura 2. 2. Campo de velocidad en la zona de separación.

La condición de desprendimiento es por tanto  $\tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

La existencia de desprendimiento se detecta porque el coeficiente de fricción tiende a cero. En las zonas desprendidas se producen torbellinos que disipan mucha energía y producen una estela ancha. Por tanto, la separación puede alterar el tipo de flujo detrás del cuerpo.

La capa límite turbulenta tiene una gran ventaja, y es que permite que parte de la energía cinética de la zona exterior se transmita al interior, estimulando el avance de las zonas de menor

velocidad, por tanto, el desprendimiento ocurrirá más tarde, retrasando la entrada en pérdida y la disminución de eficiencia.

La capa límite y su transición, tendrá una gran importancia y será necesario que podamos capturarla con detalle para garantizar unos buenos resultados, ya que en esta región ocurren fenómenos muy importantes y los resultados son muy sensibles a ellos.

## 2.6 Semejanza física y números adimensionales

En un modelo físico se dice que las condiciones de flujo son similares a las de la realidad, cuando el modelo tiene una forma similar (semejanza geométrica), el flujo se mueve de un modo similar (semejanza cinética) y las fuerzas existentes en ambos casos también son similares (semejanza dinámica).

Si en dos o más fenómenos físicos geoméricamente semejantes que dependen de  $n$  valores característicos, adimensionalizamos las variables, los parámetros, las coordenadas, el tiempo y las condiciones iniciales y de contorno, el problema a resolver queda planteado de forma única y común, y por lo tanto la solución adimensional será idéntica en ambos casos.

La condición necesaria y suficiente para que entre esos fenómenos físicos haya semejanza física es que las ecuaciones diferenciales que los definen y las condiciones iniciales y de contorno, todo ello en forma adimensional, más los  $n-k$  parámetros adimensionales independientes sean idénticos entre sí.

Los números adimensionales más empleados en el ámbito de la aerodinámica son el número de Reynolds y el número de Mach.

Definimos el número de Reynolds como  $Re = \frac{\rho \cdot v \cdot L}{\mu}$  siendo  $\rho$  la densidad del fluido,  $v$  la velocidad del mismo,  $\mu$  la viscosidad dinámica y  $L$  la longitud característica. Expresa la relación entre el término convectivo y el viscoso. Este número nos indica si un flujo es laminar o turbulento. Es seguramente el número adimensional más importante y utilizado para fijar el tipo de movimiento que se produce.

El número de Mach se define como  $M = \frac{v}{a}$  siendo  $v$  la velocidad del flujo y  $a$  la velocidad del sonido. Como parámetro global nos indica de alguna forma la relación entre la energía cinética y la energía térmica en un movimiento.

Si  $M < 0.3$  el movimiento se puede considerar como incompresible, y los cambios de densidad producidos por los efectos dinámicos son despreciables.

## 2.7 Fuerzas aerodinámicas, momento generado y centro de presiones

El estudio del movimiento turbulento alrededor de un cuerpo, tiene como conclusión más importante la obtención de la resistencia y sustentación que sobre el mismo ejerce el fluido.

Cuando un cuerpo sólido se mueve en el seno de un fluido, el campo de presiones y esfuerzos de fricción viscosa sobre su superficie que se genera por el movimiento relativo produce una fuerza.

La fuerza, por ser vector, se puede descomponer según direcciones perpendiculares, de la siguiente forma:

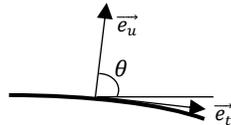
$$\vec{F} = D \cdot \vec{i} + L \cdot \vec{j}$$

Definiremos por  $\vec{e}_u$  el vector unitario normal a la superficie y  $\vec{e}_t$  el vector unitario tangente a la superficie.

Por tanto, se pueden definir ambos vectores de la siguiente manera:

$$\vec{e}_u = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$$

$$\vec{e}_t = (\text{sen } \theta, -\cos \theta),$$



donde  $\theta$  es el ángulo formado por el vector velocidad y el vector normal a la superficie.

Por lo que la fuerza resultante viene dada por

$$\vec{F} = - \int p \vec{e}_u d\sigma + \int \tau \vec{e}_t d\sigma$$

$$\vec{F} = - \int p \cdot (\cos \theta, \text{sen } \theta) d\sigma + \int \tau \cdot (\text{sen } \theta, -\cos \theta) d\sigma$$

La resistencia o *drag* es la componente paralela a la dirección del flujo, por lo que nos quedaríamos con la componente horizontal

$$D = - \int p \cdot \cos \theta d\sigma + \int \tau \cdot \text{sen } \theta d\sigma$$

Por lo tanto, la resistencia tiene dos contribuciones, la del término de presión y la de fricción. La resistencia de fricción es una función importante de la viscosidad, se considera independiente de la rugosidad de la superficie en flujo laminar, pero es una función importante de la rugosidad en flujo turbulento. La resistencia de presión es proporcional al área frontal y a la diferencia entre las presiones, siendo pequeña en perfiles aerodinámicos y dominante en cuerpos romos.

La sustentación o *lift* es la componente de la fuerza perpendicular a dicha dirección incidente

$$L = - \int p \cdot \text{sen } \theta d\sigma - \int \tau \cdot \cos \theta d\sigma$$

La fuerza de sustentación aparece cuando el aire tiene que recorrer de forma distinta un perfil por la parte superior e inferior. Por ser diferente la trayectoria de las líneas de corriente, la velocidad a la que se recorre es también distinta, generando un gradiente de presiones según el principio de Bernoulli.

En perfiles aerodinámicos la contribución viscosa es muy inferior a la de presión, por lo tanto, la forma del cuerpo es la influencia principal en la sustentación. Además, la elevación es

prácticamente independiente de la rugosidad, puesto que ésta afecta al esfuerzo cortante en la pared, no a la presión.

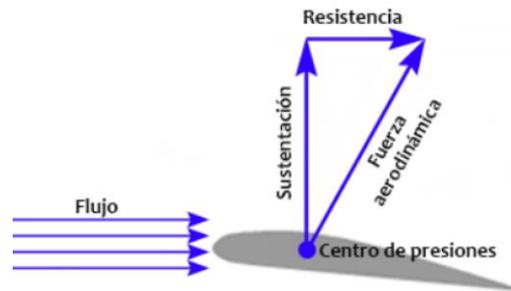


Figura 2. 3 Fuerzas implicadas en un perfil aerodinámico.

Para la aplicación de estos conceptos, es especialmente útil utilizar análisis dimensional y semejanza física. Definimos pues el coeficiente de resistencia y el coeficiente de sustentación, respectivamente

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A}$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 A}$$

$\rho$  = Densidad del aire.

$A$  = Área en planta (también puede definirse a través del área frontal).

$U$  = Velocidad del flujo en la entrada.

$L$  = Longitud característica.

Más adelante veremos cómo adimensionalizaremos las fuerzas de arrastre y sustentación.

El concepto de centro de presiones es muy importante, puesto que de él depende lo equilibrado que está un perfil aerodinámico.

Para un perfil aerodinámico bidimensional, el centro de presiones es el punto en el que el momento aerodinámico generado es nulo, de modo que se puede suponer que las fuerzas se aplican en dicho punto.

El centro de presiones es útil para calcular momentos: sólo conociendo su posición en función del ángulo de ataque y la sustentación desarrollada en función del ángulo de ataque, es sencillo calcular el momento generado.

## 2.8 Perfiles aerodinámicos

Como hemos mencionado, uno de nuestros objetivos consiste en el estudio de la resistencia y sustentación en perfiles aerodinámicos, por ello vamos a estudiar las características de dichos perfiles.

Un perfil aerodinámico consiste en una superficie que al desplazarse a través de un fluido es capaz de generar sustentación, presentando al mismo tiempo una resistencia pequeña.

En la siguiente figura, se definen cada uno de los elementos de los que consta un perfil aerodinámico y se explica el significado de los mismos.

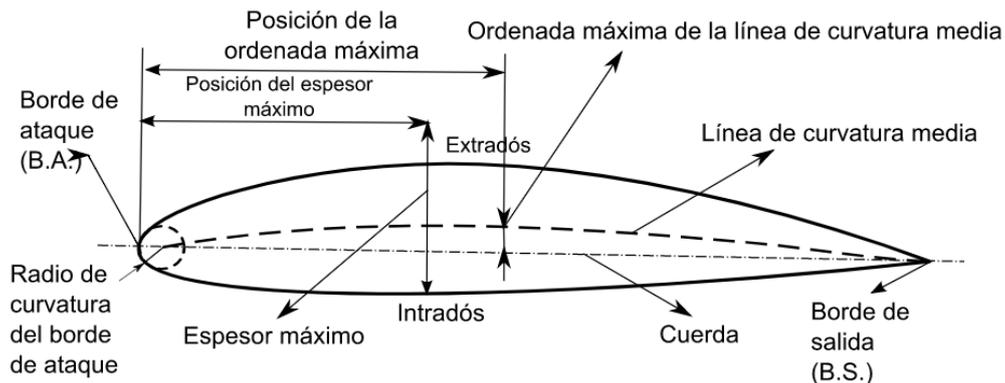


Figura 2. 4. Elementos de un perfil aerodinámico.

- **Cuerda:** Consiste en la línea recta imaginaria que une el borde de ataque de un perfil alar con el borde de salida. Se considera la longitud característica del perfil.
- **Borde de ataque:** Es el borde delantero del perfil, es decir, la parte de éste que primero entra en contacto con el flujo.
- **Borde de salida:** Es la parte posterior del perfil, es decir, el punto en el que el aire del extradós y del intradós confluyen.
- **Extradós:** Parte superior del perfil.
- **Intradós:** Parte inferior del perfil.
- **Línea de curvatura media:** Es una línea equidistante entre el extradós y el intradós. Define la curvatura del perfil aerodinámico y se pueden distinguir 3 casos:
  - Si cae por debajo de la cuerda, el perfil tiene curvatura negativa.
  - Si cae por encima de la cuerda, el perfil tiene curvatura positiva.
  - Si cae por encima y por debajo de la curva, el perfil posee doble curvatura.
- **Ordenada máxima de la línea de curvatura media:** Como vemos en la figura, consiste en la máxima distancia entre la cuerda y la línea de curvatura media. El valor de su ordenada y la posición de ésta, se expresa en porcentaje de la longitud de la cuerda.
- **Esesor:** El esesor máximo del perfil y su situación en éste se expresan como un porcentaje de la cuerda, dependiendo de éste se pueden distinguir entre perfiles delgados y perfiles gruesos.
- **Ángulo de ataque:** Consiste en el ángulo formado entre la cuerda y la dirección del flujo.
- **Radio de curvatura del borde de ataque:** Se trata del radio del círculo tangente al extradós e intradós, con centro situado en el origen de la línea de curvatura media.

### **2.8.1 Perfiles NACA**

La selección del perfil es uno de los puntos clave del proyecto. Existen diferentes series de perfiles normalizados, pero de la serie NACA es de la que se posee una mayor información para poder comparar posteriormente nuestros resultados.

Los perfiles NACA deben su nombre a la agencia que los creó (National Advisory Committee for Aeronautics) cuyo objetivo era fomentar las investigaciones aeronáuticas. Existen diferentes series dentro de los perfiles NACA:

1. Serie 4 dígitos.
2. Serie 5 dígitos.
3. Modificaciones.
4. Series 1.
5. Series 6.
6. Series 7.
7. Series 8.

Centraremos nuestro estudio en la serie de cuatro dígitos pues son los más comunes.

- El primer dígito representa la curvatura máxima como porcentaje de la cuerda.
- El segundo dígito representa la distancia de máxima curvatura desde el borde de ataque en 1/10 del porcentaje de la cuerda
- Los dos últimos dígitos representan el máximo espesor como porcentaje de la cuerda.

Una vez vistos estos conceptos generales de mecánica de fluidos, que representan una de las bases de nuestro proyecto, nos adentramos en la turbulencia.

## 3. TURBULENCIA

### 3.1 Concepto de turbulencia

Hay dificultades para definir con precisión el concepto de turbulencia. Es más fácil reconocerla por sus propiedades. Si un flujo las presenta, diremos que es turbulento, y si carece de alguna de ellas no lo será.

En experimentos como el llevado a cabo por Osborne Reynolds en 1883, en flujo laminar las variables fluidas toman una velocidad en cada posición y tiempo de forma determinística, y existen como tales hasta cierto valor del número de Reynolds. Por encima de este valor se pierde la estabilidad de la solución obtenida y el tipo de movimiento cambia a uno nuevo denominado turbulento, con características aleatorias y de irregularidad, donde deja de ser válido todo lo anterior.

Una medición de velocidad puntual podría exhibir la forma que se muestra en la siguiente figura,

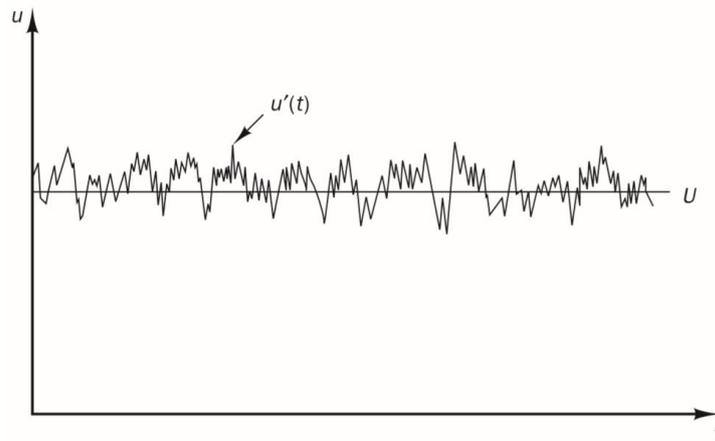


Figura 3. 1. Velocidad puntual en flujo turbulento.

Dentro de esta irregularidad, encontramos que la velocidad se puede descomponer en un valor medio constante  $U$  con una componente fluctuante  $u'(t)$  superpuesta sobre él:

$$u(t) = U + u'(t)$$

Esto se denomina la descomposición de Reynolds. Un flujo turbulento ahora puede caracterizarse en términos de los valores medios de las propiedades de flujo y algunas propiedades estadísticas de sus fluctuaciones.

### 3.2 Transición de flujo laminar a turbulento

El primer punto donde ocurre la inestabilidad es siempre aguas arriba del punto de transición al flujo totalmente turbulento. La distancia entre el punto de inestabilidad donde el número de Reynolds es igual a  $Re_{x,crit}$  y el punto de transición  $Re_{x,tr}$  depende del grado de amplificación de las perturbaciones. El punto de inestabilidad y el inicio del proceso de transición se pueden predecir con la teoría lineal de la inestabilidad hidrodinámica. Sin embargo, no existe una teoría exhaustiva sobre el camino que conduce desde la inestabilidad inicial hasta los flujos totalmente turbulentos.

Hay una serie de características comunes en todos los procesos de transición: Amplificación de perturbaciones inicialmente pequeñas, desarrollo de áreas con estructura rotacionales concentradas, formación de movimientos intensos a pequeña escala y finalmente el crecimiento de estas áreas de movimientos a pequeña escala a flujos completamente turbulentos. La transición a la turbulencia se ve fuertemente afectada por factores como el gradiente de presión, niveles de perturbación, rugosidad de la pared y la transferencia de calor.

### 3.3 Ecuaciones de la capa límite turbulenta

En los flujos turbulentos en presencia de paredes, como nuestro caso de estudio, no se pueden despreciar desde el principio los términos viscosos asociados al movimiento medio. La condición de adherencia que iguala la velocidad del fluido a la de la pared sólida hace que la viscosidad sea relevante si nos acercamos lo suficiente al sólido, aunque el número de Reynolds sea muy alto.

Planteamos las ecuaciones de capa límite turbulenta, para un flujo incompresible y con geometría bidimensional.

Con la aproximación de capa límite,

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow v \ll u$$

siendo  $u$  la componente horizontal de la velocidad y  $v$  la componente vertical.

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Ecuación de cantidad de movimiento:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\overline{v'^2} \right).$$

La ecuación transversal integrada proporciona la relación

$$p + \rho \overline{v'^2} = p_e(x),$$

por lo que el gradiente longitudinal de presión es igual al que existe en el exterior de la capa límite, donde el flujo es ideal y, por tanto, se puede expresar en función de la derivada del campo externo de velocidades

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x} \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x} = -U_e \frac{dU_e}{dx}.$$

La ecuación de cantidad de movimiento longitudinal se puede escribir en la forma

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right).$$

Se pueden plantear varios modelos para resolver el conjunto de ecuaciones anterior. En el análisis de la capa límite turbulenta según el modelo multicapa de Von Karman se distinguen varias zonas:

- Región exterior: Constituye la mayor parte de la capa límite, en ella la viscosidad es despreciable frente a los esfuerzos turbulentos y frente a los términos convectivos.

$$y \approx \delta \rightarrow u = U_e + u^* \frac{1}{k} \ln \left( \frac{y}{\delta} \right) + f \left( \frac{dU_e}{dx} \right).$$

donde  $k$  representa la energía cinética turbulenta.

- Región interior: Cerca de la pared, cuando la viscosidad tiene importancia, donde los esfuerzos viscosos no son despreciables. Dentro de ésta, muy cerca de la pared la viscosidad llega a ser dominante, pues las fluctuaciones turbulentas tienden a anularse. Esta será la subcapa viscosa. El resto de la región interior se denomina subcapa intermedia o logarítmica.

- Subcapa intermedia o logarítmica:

$$\delta_v < y \ll \delta \rightarrow \frac{u}{u^*} = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{u^* y}{\vartheta} \right) + C.$$

- Subcapa viscosa:

$$y \approx \delta_v = \frac{\vartheta}{u^*} \rightarrow \frac{u}{u^*} = \frac{y}{\frac{\vartheta}{u^*}}.$$

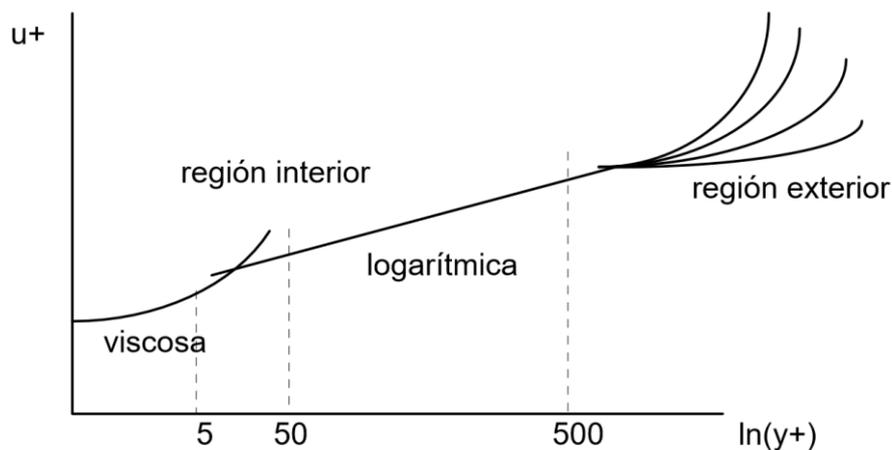


Figura 3. 2. Campo de velocidad en las distintas regiones de la capa límite turbulenta.

La complejidad de estos perfiles en la capa límite turbulenta hace que para muchos análisis sea más fácil tomar una expresión aproximada del tipo

$$\frac{u}{U_e} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/n},$$

donde  $n = 5$  para  $Re = 10^5$  y  $n = 10$  para  $Re = 10^9$ . Aunque lo más habitual es tomar  $n = 7$ .

### 3.4 Ecuaciones generales de Reynolds del flujo turbulento

Aunque existen otros métodos numéricos como la resolución directa de las ecuaciones de Navier-Stokes (DNS: Direct Numerical Simulation) o como la gran simulación de remolinos (LES:

Large Eddy Simulation) que estudia los remolinos más grandes, rechazando los más pequeños, para la mayoría de propósitos de la ingeniería, no es necesario resolver los detalles de las fluctuaciones turbulentas, siendo más que suficiente la información sobre las propiedades promediadas en el tiempo. Por tanto, la gran mayoría de los cálculos de flujo turbulento se han realizado con procedimientos basados en las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds (RANS).

Se pueden aplicar las técnicas de promediado a las ecuaciones generales de Navier-Stokes para generar unas ecuaciones en valores medios, llamadas ecuaciones de Reynolds.

Como sabemos, las variables en cada punto de un flujo turbulento son aleatorias. Pero si las condiciones de contorno son estacionarias, se puede esperar que el valor medio también lo sea.

Para calcular el valor medio de cualquier magnitud definimos

$$\bar{\phi}(\bar{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \phi(\bar{x}, t) dt,$$

con  $t_0 \gg T \gg t_{turb}$  y siendo  $t_0$  el tiempo característico de variación de las condiciones generales del problema y  $t_{turb}$  el tiempo característico de las fluctuaciones turbulentas.

El valor instantáneo puede entonces descomponerse en el valor medio y la fluctuación respecto a él

$$\phi(\bar{x}, t) = \bar{\phi}(\bar{x}, t) + \phi'(\bar{x}, t).$$

Obtendremos estas ecuaciones para un fluido incompresible de viscosidad constante. Las ecuaciones de Navier-Stokes en este caso son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0, \\ \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla(\vec{v}\vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla \cdot \vec{v} + \vec{f}_m. \end{aligned}$$

Excluimos la ecuación de la energía por no tener relevancia en nuestro caso de estudio.

Con

$$\tau'_{ij} = 2\mu\gamma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \text{ y } \phi_v = \tau'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} \text{ (en coordenadas cartesianas)}$$

Si descomponemos las variables en valores medios y las fluctuaciones turbulentas

$$\vec{v} = \vec{U} + \vec{u}'; \quad p = \bar{p} + p'.$$

Promediando el conjunto de la ecuación, tan solo se mantienen los términos donde aparecen fluctuaciones multiplicadas por otras fluctuaciones, esto es debido a que el promedio del producto de una variable ya promediada por una variable que fluctúa, se anula.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{U} + \vec{u}') &= 0 \rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{u}' = 0, \end{cases} \\ \frac{d\vec{U}}{dt} + \nabla(\vec{U}\vec{U} + \overline{\vec{u}'\vec{u}'}) &= -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla \cdot \vec{U} + \vec{f}_m. \end{aligned}$$

La forma común de escribir estas ecuaciones del movimiento medio turbulento es pasando las fluctuaciones a los segundos términos y quitando por sobreentendida la raya de promediado en la presión, obteniendo

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0,$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + \nabla(\vec{U}\vec{U}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla \cdot \vec{U} - \nabla(\overline{u'u'}) + \vec{f}_m.$$

Tenemos así un sistema de 4 ecuaciones (la de cantidad de movimiento es vectorial) y como incógnitas aparecen las 4 variables de siempre:  $\vec{U}$  y  $p$  más una nueva variable generada por las fluctuaciones turbulentas y que no podemos poner en función de las anteriores:

Tensor de esfuerzos turbulentos aparentes de Reynolds:  $\overline{u'u'}$ .

Por tanto, las ecuaciones de Reynolds no se pueden resolver por sí mismas, planteándose lo que se conoce como *problema de cierre de la turbulencia*.

### 3.5 Modelos de turbulencia

Para poder calcular el flujo turbulento con las ecuaciones RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes), es necesario desarrollar modelos de turbulencia para predecir los esfuerzos de Reynolds y cerrar el sistema de ecuaciones de flujo medio. Para que un modelo de turbulencia sea útil en un código CFD, debe tener una amplia aplicabilidad, ser preciso, simple y económico de ejecutar. Los modelos de turbulencia RANS más comunes se clasifican en función del número de ecuaciones de transporte adicionales que deben resolverse junto con las ecuaciones de flujo RANS:

Número de ecuaciones de transporte extra	Nombre
0	Modelo de longitud de mezcla
1	Modelo Spalart-Allmaras
2	Modelo k-ε
2	Modelo k-ω
7	Modelo de Reynolds

Tabla 3.1 Modelos de turbulencia según número de ecuaciones adicionales.

Los modelos más actuales utilizan las ideas de las teorías más clásicas para el cierre de la ecuación de cantidad de movimiento. Vemos estas teorías a continuación.

Boussinesq en 1877 propuso expresar los esfuerzos turbulentos de modo análogo a los viscosos mediante una cierta “viscosidad” turbulenta en la forma

$$-\rho\overline{u_i'u_j'} = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$$

donde  $k$  es la energía cinética turbulenta,  $U_i$  la velocidad en  $x_i$  y  $U_j$  la componente de la velocidad en  $x_j$ .

Por otra parte, Prandtl en 1925 y siguiendo las ideas de la Teoría Cinética de Gases definió la longitud de mezcla como el recorrido medio que hacen las partículas del flujo cuando

transportan una determinada cantidad (de movimiento, energía térmica, etc). Así, la velocidad característica o velocidad de agitación sería

$$U_m \approx C' l_m \left| \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right|,$$

de modo que

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} \propto \rho l_m^2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left| \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right|.$$

La turbulencia es una función del flujo, y si la turbulencia cambia, es necesario tenerlo en cuenta variando  $l_m$ .

### 3.4.1 Modelo $k - \varepsilon$

El modelo  $k - \varepsilon$  se centra en los mecanismos que afectan a la energía cinética turbulenta. Se requieren algunas definiciones preliminares. La energía cinética instantánea de un flujo turbulento  $k(t)$  es la suma de la energía cinética media  $K = \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2)$  y la energía cinética turbulenta  $k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ :

$$k(t) = K + k$$

Hemos denotado por  $U, V$  y  $W$  las 3 componentes de la velocidad.

Para los posteriores desarrollos, utilizaremos la tasa de deformación y las tensiones turbulentas. Para facilitar los cálculos posteriores, es común escribir sus componentes en forma de tensor:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \text{ y } \tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}.$$

De la misma forma,  $s_{ij}(t) = S_{ij} + s_{ij}'$

Los elementos de la matriz están dados por:

$$s_{xx}(t) = S_{xx} + s'_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x},$$

$$s_{xy}(t) = S_{xy} + s'_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right)$$

De la misma forma se desarrollan el resto de términos.

- **Ecuación de gobierno para la energía cinética del flujo medio  $K$**

Esta ecuación se obtiene multiplicando la ecuación de Reynolds en componente  $x$  por  $U$ , la ecuación en  $y$  por  $V$ , y la ecuación en  $z$  por  $W$ . Después, aplicando una gran cantidad de álgebra, se puede demostrar que la ecuación promediada que rige la energía cinética media del flujo es la siguiente (Tennekes y Lumley, 1972):

$$\frac{d(\rho K)}{dt} + \nabla \cdot (\rho K U) = \nabla \cdot (-pU + 2\mu U S_{ij} - \rho U \overline{u_i' u_j'}) - 2\mu S_{ij} \cdot S_{ij} + \rho \overline{u_i' u_j'} \cdot S_{ij},$$

(1)      (2)      (3)      (4)      (5)      (6)      (7)

donde el significado físico de cada término es:

- (1) Cambio de energía media  $K$ .
- (2) Transporte de  $K$  por convección.
- (3) Transporte de  $K$  por presión.
- (4) Transporte de  $K$  por esfuerzos viscosos.
- (5) Transporte de  $K$  por esfuerzos de Reynolds.
- (6) Disipación viscosa de  $K$ .
- (7) Destrucción de  $K$  por producción de turbulencia.

Los efectos de las tensiones viscosas se han dividido en dos partes a través del término (4) y (6). Los dos términos que contienen los esfuerzos de Reynolds  $\overline{\rho u'_i u'_j}$  explican los efectos de la turbulencia. En flujos con altos Reynolds, los términos turbulentos (5) y (7) son siempre mucho más grandes que sus homólogos viscosos (4) y (6).

- **Ecuación de gobierno para energía cinética turbulenta  $k$**

Si multiplicamos las ecuaciones de Navier-Stokes en  $x, y, z$  por sus respectivas componentes de velocidad fluctuante (componente  $x$  multiplicada por  $u'$ , etc) y la suma de todos los resultados, seguido de una repetición de este proceso en las ecuaciones promediadas de Reynolds, la resta de las dos ecuaciones restantes y una reordenación muy sustancial, arroja la ecuación para la energía cinética turbulenta  $k$  (Tennekes y Lumley, 1972):

$$\frac{d(\rho k)}{dt} + \nabla \cdot (\rho k U) = \nabla \cdot \left( \overline{-p' u'} + 2\overline{\mu s'_{ij}} - \rho \frac{1}{2} \overline{u'_i \cdot u'_i u'_j} \right) - 2\overline{\mu s'_{ij} \cdot s'_{ij}} - \overline{\rho u'_i u'_j} \cdot S_{ij}$$

(1)            (2)            (3)            (4)            (5)            (6)            (7)

El término  $-\overline{\rho u'_i u'_j}$  es igual en magnitud en ambas ecuaciones, pero con signos opuestos. Este término es normalmente positivo si el término principal de  $S_{ij}$  en dicho flujo y el gradiente de velocidad medio  $\frac{\partial U}{\partial y}$  son positivos. Por lo tanto, en la ecuación de  $k$  representa un término de producción y en la ecuación de  $K$  sin embargo, se destruye la energía cinética del flujo medio. Esto expresa matemáticamente la conversión de energía cinética media en energía cinética turbulenta.

La disipación por unidad de volumen (6) se escribe normalmente como el producto de la densidad  $\rho$  y la disipación de la energía cinética por unidad de masa  $\varepsilon$ , entonces

$$\varepsilon = 2\nu \overline{s'_{ij} \cdot s'_{ij}}$$

Esta cantidad es de vital importancia en el estudio de la dinámica de la turbulencia. Es el término de destrucción en la ecuación de la energía cinética turbulenta, de un orden de magnitud similar al término de producción y nunca despreciable.

- **Ecuaciones finales del modelo**

Es posible desarrollar ecuaciones de transporte similares para todas las demás cantidades de turbulencia, incluida  $\varepsilon$ . La ecuación  $\varepsilon$  exacta contiene, sin embargo, muchos términos

desconocidos e inconmensurables. El modelo estándar  $k - \varepsilon$  (Launder y Spalding, 1974) tiene dos ecuaciones, una para  $k$  y otra para  $\varepsilon$ . Utilizamos  $k$  y  $\varepsilon$  para definir la escala de velocidad  $\vartheta$  y la escala de longitud  $l$  que representa la turbulencia a gran escala, de la manera siguiente:

$$\vartheta = k^{1/2}; l = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon},$$

Aplicando análisis dimensional, podemos poner la viscosidad turbulenta de la siguiente forma:

$$\mu_t = C_\mu \rho \vartheta l = \frac{\rho C_\mu k^2}{\varepsilon},$$

donde  $C_\mu$  es una constante adimensional.

El modelo estándar utiliza las siguientes ecuaciones para  $k$  y  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho k)}{dt} + \nabla \cdot (\rho k U) &= \nabla \cdot \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + 2\mu S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \varepsilon \\ \frac{d(\rho \varepsilon)}{dt} + \nabla \cdot (\rho \varepsilon U) &= \nabla \cdot \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned}$$

(1)      (2)      (3)      (4)      (5)

- (1) Cambio en  $k$  o  $\varepsilon$ .
- (2) Transporte de  $k$  o  $\varepsilon$  por convección.
- (3) Transporte de  $k$  o  $\varepsilon$  por difusión.
- (4) Producción de  $k$  o  $\varepsilon$ .
- (5) Destrucción de  $k$  o  $\varepsilon$ .

Estas ecuaciones contienen cinco constantes que son ajustables. Los modelos estándar emplean valores para las constantes a los que se llega mediante el ajuste integral de datos para una amplia gama de flujos turbulentos:

$$C_\mu = 0.09 \quad \sigma_k = 1 \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad C_{1\varepsilon} = 1.44 \quad C_{2\varepsilon} = 1.92.$$

Los números de Prandtl  $\sigma_k$  y  $\sigma_\varepsilon$  conectan las difusividades de  $k$  y  $\varepsilon$  a la viscosidad turbulenta  $\mu_t$ . El término de presión (3) de la ecuación  $k$  exacta no se puede medir directamente. La producción y destrucción de energía cinética turbulenta están estrechamente ligadas. La disipación  $\varepsilon$  es grande cuando la producción de  $k$  es grande. Para calcular las tensiones de Reynolds, usamos la relación de Boussinesq:

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}.$$

A elevados números de Reynolds, como es nuestro caso de estudio, el modelo  $k - \varepsilon$  evita la necesidad de integrar las ecuaciones a través de la pared haciendo uso del comportamiento universal de los flujos cercanos a la pared. Si  $y$  es la dirección normal a la pared sólida, la velocidad media en  $30 < y_p^+ < 500$  satisface la ley logarítmica que estudiamos cuando analizamos las ecuaciones de la capa límite turbulenta. Utilizando estos supuestos y la fórmula de la viscosidad turbulenta, podemos desarrollar las siguientes funciones de pared, que relacionan el esfuerzo cortante de la pared (a través de  $u_\tau$ ) con la velocidad media, la energía cinética turbulenta y la disipación:

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey_P^+), \quad k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}$$

donde  $\kappa$  es la constante de Von Karman,  $\kappa = 0.41$ , y el parámetro de rugosidad de la pared  $E = 9.8$  para paredes lisas.

Las aplicaciones aerodinámicas involucran geometrías complejas y fenómenos muy complejos a diferentes escalas de longitud, inducidos por la geometría. En la mayor parte del flujo, la viscosidad será irrelevante, pero la estructura del flujo exterior se ve afectada por el desarrollo de capas límites en las que la viscosidad sí es relevante. De forma que los efectos locales a pequeña escala pueden influir en el estado de todo el campo fluido. Leschziner (en Peyret and Krause, 2000) resume los problemas en este contexto:

- El modelo  $k - \varepsilon$  predice niveles excesivos de tensión cortante turbulenta, principalmente en presencia de gradientes adversos de presión.
- Niveles excesivos de turbulencia en regiones de estancamiento.

En tales flujos complejos se espera que RSM (Reynolds Stress Model) sea significativamente mejor, pero el coste computacional de este método impide su aplicación de forma rutinaria. Se han realizado grandes esfuerzos para desarrollar métodos más económicos para aplicaciones aeroespaciales. Los discutimos a continuación.

### 3.4.2 Modelo Spalart-Allmaras

El modelo de Spalart-Allmaras implica una ecuación de transporte para el parámetro de viscosidad cinemática turbulenta  $\tilde{\nu}$  y una especificación de una escala de longitud a través de una fórmula algebraica. Nos proporciona cálculos económicos de capas límite en aerodinámica externa (Spalart y Allmaras, 1992). La viscosidad turbulenta dinámica  $\mu_t$  está relacionada con  $\tilde{\nu}$  por

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1},$$

$f_{v1}$  es una función de amortiguación en la pared que tiende a la unidad para elevados números de Reynolds, en este caso el parámetro de viscosidad cinemática turbulenta  $\tilde{\nu}$  coincide con la viscosidad cinemática turbulenta  $\nu_t$ . En la pared  $f_{v1}$  tiende a 0.

Para este modelo, las tensiones de Reynolds se calculan con

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} = \rho \tilde{\nu} f_{v1} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = 2\mu_t S_{ij}.$$

La ecuación de transporte para  $\tilde{\nu}$  es la siguiente:

$$\frac{d(\rho \tilde{\nu})}{dt} + \nabla \cdot (\rho \tilde{\nu} U) = \frac{1}{\sigma_\nu} \nabla \cdot \left[ (\mu + \rho \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu} + C_{b2} \rho \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right] + C_{b1} \rho \tilde{\nu} \tilde{\Omega} - C_{w1} \rho \left( \frac{\tilde{\nu}}{\kappa y} \right)^2 f_w$$

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5)$$

- (1) Cambio en el parámetro de viscosidad  $\tilde{\nu}$ .
- (2) Transporte de  $\tilde{\nu}$  por convección.
- (3) Transporte de  $\tilde{\nu}$  por difusión turbulenta.
- (4) Producción de  $\tilde{\nu}$ .
- (5) Destrucción de  $\tilde{\nu}$ .

En la ecuación de transporte, la tasa de producción de  $\tilde{\omega}$  está relacionada con la vorticidad media local de la siguiente manera:

$$\tilde{\Omega} = \Omega + \frac{\tilde{v}}{(\kappa y)^2} f_{v2},$$

donde  $\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$  es la vorticidad media, y

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \text{ es el tensor de vorticidad media.}$$

Las funciones  $f_{v2}$  y  $f_w$  son también funciones de amortiguación en la pared.

En el modelo  $k - \varepsilon$  la escala de longitud se encuentra combinando las dos cantidades transportadas  $k$  y  $\varepsilon$ :  $l = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ . En un modelo de turbulencia de una ecuación, la escala de longitud no puede calcularse, pero debe especificarse para determinar la tasa de disipación de la cantidad de turbulencia transportada. La inspección del término (5) en la ecuación de transporte revela que  $\kappa y$  (con  $y$  siendo la distancia a las paredes sólidas) se ha utilizado como la escala de longitud.

Las constantes del modelo son las siguientes:

$$\sigma_v = \frac{2}{3} \quad \kappa = 0.4187 \quad C_{b1} = 0.1355 \quad C_{b2} = 0.622 \quad C_{w1} = C_{b1} + \frac{\kappa^2(1 + C_{b2})}{\sigma_v}.$$

Estas constantes del modelo y otras tres ocultas en las funciones de pared se ajustaron para flujos aerodinámicos externos, y se ha demostrado que el modelo ofrece un buen rendimiento para capas límites con gradientes adversos de presión, que son importantes para predecir los flujos estancados.

### 3.4.3 Modelo $k - \omega$

En el modelo  $k - \varepsilon$  la viscosidad turbulenta cinemática  $\nu_t$  se expresa como producto de una escala de velocidad  $\vartheta$  y una escala de longitud  $l$ . La disipación de energía cinética turbulenta  $\varepsilon$  no es la única variable de escala de longitud posible. De hecho, muchos otros modelos de dos ecuaciones han sido postulados. La alternativa más destacada es el modelo  $k - \omega$  propuesto por Wilcox (1988, 1993a, b, 1994) que utiliza la frecuencia de turbulencia  $\omega = \varepsilon/k$  (dimensiones  $s^{-1}$ ) como segunda variable. Utilizando esta variable, la escala de longitud es  $l = \sqrt{k}/\omega$ . La viscosidad turbulenta está dada por

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega}$$

Los esfuerzos de Reynolds son medidos en los modelos de dos ecuaciones con la expresión de Boussinesq:

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

La ecuación de transporte para  $k$  y  $\omega$  para flujos turbulentos con altos números de Reynolds es la siguiente:

$$\frac{d(\rho k)}{dt} + \nabla \cdot (\rho k U) = \nabla \cdot \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + P_k - \beta^* \rho k \delta_{ij},$$

donde

$$P_k = \left( 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right)$$

es la tasa de producción de energía cinética turbulenta y

$$\frac{d(\rho \omega)}{dt} + \nabla \cdot (\rho \omega U) = \nabla \cdot \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \nabla \omega \right) + \gamma_1 \left( 2\rho S_{ij} - \frac{2}{3} \rho \omega \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) - \beta_1 \rho \omega^2.$$

Cada uno de los términos significa lo mismo que en el modelo Spalart-Allmaras pero cambiando  $\tilde{u}$  por  $k$  y  $\omega$ .

Las constantes del modelo:

$$\sigma_k = 2.0 \quad \sigma_\omega = 2.0 \quad \gamma_1 = 0.553 \quad \beta_1 = 0.075 \quad \beta^* = 0.09.$$

Este modelo inicialmente atrajo la atención porque la integración en la pared no requiere de funciones de amortiguación en aplicaciones de bajo número de Reynolds. El valor de la energía cinética turbulenta es 0 en la pared. La frecuencia  $\omega$  tiende a infinito en la pared, pero podemos especificar un valor muy grande en la pared o, siguiendo a Wilcox (1998), aplicar una variación hiperbólica  $\omega_p = 6\nu/(\beta_1 y_p^2)$  en puntos cercanos a la pared. La experiencia práctica nos ha enseñado que los resultados no dependen demasiado de estos detalles del tratamiento.

En los límites de entrada, los valores de  $k$  y  $\omega$  deben ser especificados, y en los límites de salida se utilizan las condiciones habituales de gradiente 0. La condición de contorno para la corriente libre donde  $k \rightarrow 0$  y  $\omega \rightarrow 0$ , es la más problemática. La expresión para  $\mu_t$  nos muestra que la viscosidad turbulenta es indeterminada o infinita cuando  $\omega \rightarrow 0$  por lo que debe especificarse un pequeño valor distinto de 0 para  $\omega$ . Desafortunadamente los resultados con este modelo tienden a depender del valor asumido de  $\omega$  para el flujo libre (Menter, 1992a), que es un grave problema en la aerodinámica externa y en aplicaciones aeroespaciales donde las condiciones de contorno de flujo libre se utilizan rutinariamente.

## 4. MÉTODOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN AERODINÁMICA

Con el objetivo que nos propusimos de conocer los métodos matemáticos empleados en la resolución de problemas de aerodinámica, comenzaremos estudiando éstos para ejemplos sencillos, para así poder asentar sus aspectos más importantes y concluiremos con problemas reales de una mayor complejidad, basándonos en las bases establecidas en los problemas sencillos previos.

### 4.1 Método de elementos finitos

Para la explicación del método vamos a considerar un caso muy sencillo en 1D, la extensión a nuestro problema la haremos más adelante.

Consideraremos el modelo de la ecuación de difusión en 1D, que viene dado por:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = f(x), \text{ en } [0, L],$$

con las siguientes condiciones de contorno homogéneas:

$$u(0) = u(L) = 0.$$

Con el objetivo de simplificar los cálculos posteriores supondremos que la función  $k(x)$  es constante de valor 1 y que la función  $f$  es una delta de Dirac con signo negativo localizada en el punto medio de la barra. Además, supondremos que la longitud de ella es la unidad:

$$k = 1, \quad f = -\delta_{0.5}, \quad L = 1.$$

La idea fundamental del método de elementos finitos consiste en reescribir el modelo matemático de una forma distinta. El modelo matemático normalmente proviene de principios de conservación, escritos de una forma puntual, a diferencia del método de los volúmenes finitos.

#### (1) FORMULACIÓN VARIACIONAL

El método de elementos finitos se basa en el principio de los trabajos virtuales. Por lo tanto, transformaremos la ecuación de partida en otra ecuación diferente que refleje dicho principio. Para ello multiplicaremos la ecuación por una función  $v$  que supondremos es derivable y cumple las condiciones de contorno:

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)v = -\delta_{0.5} \cdot v$$

A continuación, integramos a ambos lados de la igualdad:

$$-\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)v dx = -v(0.5),$$

Recordar que la delta de Dirac actuando sobre una función continua es igual al valor de la función en el punto en el que esté localizada la delta.

En el término de la izquierda, realizamos una integración por partes:

$$-\int_0^1 \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right) v \, dx = -\frac{du}{dx} v \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} v \, dx ,$$

El primer término es nulo puesto que  $v(0) = v(1) = 0$ .

Esta es precisamente la formulación variacional. Nuestro problema consiste en encontrar una función  $u$  derivable con  $u(0) = u(1) = 0$ , tal que

$$\int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} v \, dx = -v(0.5) \quad \text{para toda } v \text{ derivable y } v(0) = v(1) = 0.$$

Esto refleja el principio de los trabajos virtuales, pues nos indica que el trabajo realizado por una fuente externa es igual al trabajo interno.

Denotamos por  $H_0^1(0,1)$  el espacio de las posibles soluciones del problema variacional. Es decir, el conjunto de funciones  $u: [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}$  que son derivables y que se anulan en 0 y en 1.

## (2) DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA VARIACIONAL

Comenzamos con el proceso de discretización. Lo que aproximaremos será el espacio en el que se encuentran las soluciones en lugar de aproximar la derivada a través de un cociente incremental, como se suele hacer en el método de volúmenes finitos.

Dividimos el intervalo  $(0,1)$  en una serie de subintervalos equiespaciados, cada uno de los puntos se llamará nodo:

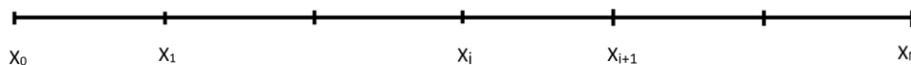


Figura 4. 1. División del intervalo por nodos.

$$x_{i+1} - x_i = h$$

Aproximamos el espacio  $H_0^1(0,1)$  por  $H_h = \{u_h: [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}, u_h \text{ derivable}, u_h(0) = u_h(1) = 0 \text{ y } u_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ es un segmento de recta}\}$ .

Estos tipos de elementos finitos son los llamados elementos de Lagrange P1.

Es obvio que los grados de libertad del espacio son los nodos interiores, ya que conociendo el valor de la función  $u$  en cada uno de ellos, ésta se encontrará perfectamente definida en el dominio. De forma matemática, el espacio vectorial  $H_h$  tiene dimensión finita.

Dentro de este espacio vectorial, las siguientes funciones son una base, es decir, son funciones que localizan el valor de  $u$  en los nodos, las llamadas funciones de forma:

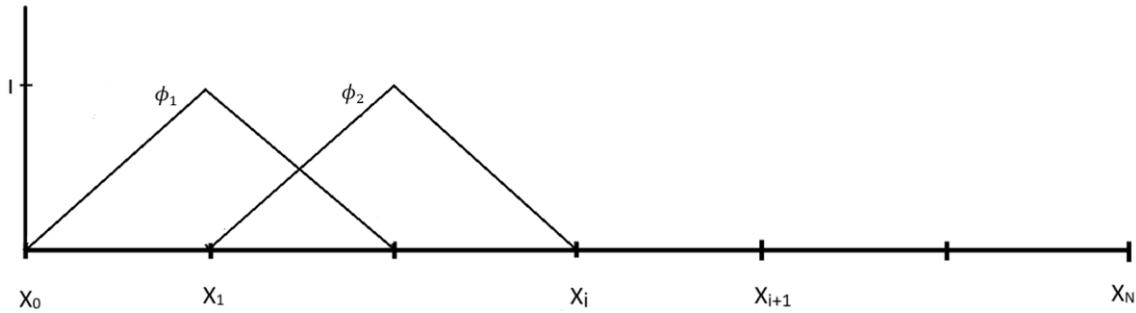


Figura 4. 2. Funciones de forma en el intervalo.

Por ser las funciones de forma una base del espacio vectorial  $H_h$ , se puede escribir

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u_h^i \phi_i(x),$$

donde  $u_h^i$  son las incógnitas que tratamos de calcular.

En el problema variacional sustituimos  $u$  por  $u_h$  y  $v$  por  $\phi_j$ . Nos queda:

$$\int_0^1 \sum_{i=1} u_h^i \frac{d\phi_i}{dx} \cdot \frac{d\phi_j}{dx} dx = -\phi_j(0.5),$$

$$\sum_{i=1} u_h^i \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx} \cdot \frac{d\phi_j}{dx} dx = -\phi_j(0.5)$$

$$KU = b$$

Las componentes de la matriz de rigidez  $K$  se obtienen de forma inmediata estudiando la pendiente de las funciones de forma, de tal manera que llegamos a:

$$K = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Que, como veremos, coincide con la matriz obtenida con el método de volúmenes finitos aplicado al mismo problema.

Hemos tomado  $h = 0.1$ .

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En resumen, nos queda:

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \\ u^6 \\ u^7 \\ u^8 \\ u^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 4.2 Método de elementos finitos aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes

El problema consiste en encontrar el campo de velocidades  $u = (u_1, u_2)$  y la presión  $p$  de un fluido que se mueve en una región espacial  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . El caso tridimensional, es conceptualmente igual. Para simplificar, estudiamos el caso 2D.

Las ecuaciones de Navier-Stokes que modelan este fenómeno son:

$$\left\{ \begin{array}{l} (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{en } \Omega \\ + \text{condiciones de contorno sobre } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Nos enfrentamos a un problema de gran complejidad, cuya dificultad máxima aparece por la naturaleza de sus ecuaciones, que hemos deducido en los apartados previos.

Respecto a la ecuación de cantidad de movimiento, en su deducción llegamos hasta la expresión

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[ \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \tau' + \rho \vec{f}_m$$

Sin embargo, esta ecuación como podemos ver todavía no tiene la forma de la de nuestro problema, para ello, debemos hacer lo siguiente:

- Poner el término  $\nabla \cdot \tau'$  en función de la velocidad:

$$\nabla \cdot \tau' = -\nabla \times (\mu \nabla \times \vec{v}) + \nabla \cdot (\mu \nabla \cdot \vec{v}).$$

Y esta expresión precisamente es la expresión general de la Laplaciana, por tanto:

$$\nabla \cdot \tau' = \mu \Delta \vec{v}$$

- Para el término convectivo aplicamos la siguiente igualdad vectorial:

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

En la ecuación de cantidad de movimiento realizamos las siguientes simplificaciones:

1. Las fuerzas másicas para nuestro caso son despreciables, pues consideramos que el campo gravitatorio no tiene influencia. Además, el sistema de referencia es inercial, ya que estará fijo.
2. Se trata de un caso estacionario y dividiendo por la densidad se obtiene finalmente

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{0}$$

Se han quitado los vectores por comodidad, pero la velocidad es obviamente vectorial.

Tenemos que destacar que estas ecuaciones se refieren a un flujo viscoso en régimen laminar, no siendo aplicables a un flujo turbulento. Sin embargo, las ideas fundamentales son las mismas.

Nos quedaría ver las condiciones de contorno, antes de empezar a aplicar el MEF.

En las ecuaciones de la dinámica de fluidos, la imposición de condiciones de contorno es algo más delicada que en otro tipo de problemas, debido fundamentalmente a dos razones:

- En los dominios de simulación numérica habitualmente aparecen fronteras artificiales (esto es, fronteras originadas por la limitación del dominio sobre el que se llevará a cabo la resolución, que no se corresponden con la frontera del recinto donde se encuentra el fluido)
- En los flujos con viscosidad no muy elevada (números de Reynolds no muy reducidos) aparecerán capas límite asociadas al carácter convectivo de las ecuaciones.

Cuando el fluido se extiende hasta un hipotético infinito, debemos conocer la velocidad y la presión en el infinito. Fijaremos la velocidad en la entrada y esta será nuestra primera condición de contorno.

En un contorno sólido impermeable, se debe cumplir la condición de adherencia: la velocidad es igual a la del sólido en contacto, por lo que si lo que consideramos que se mueve es el flujo, dejando parado el perfil, la segunda condición de contorno será la velocidad nula sobre las paredes del perfil.

Una vez que hemos visto de dónde vienen las ecuaciones y sus condiciones de contorno nos introducimos entonces en la aplicación del método de elementos finitos.

### (1) FORMULACIÓN VARIACIONAL

El método de elementos finitos se basa en el principio de los trabajos virtuales. La idea es entonces que los trabajos virtuales globales de las fuerzas externas e internas sean nulos. Por lo tanto, transformaremos la ecuación de partida en otra ecuación diferente que refleje dicho principio. Para ello multiplicaremos la primera ecuación por  $v = (v_1, v_2)$  y la segunda por  $q$ :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla p \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$q \nabla \cdot u = 0$$

Se integra en  $\Omega$  ambas ecuaciones y se aplica la fórmula de integración por partes (o fórmula de Green) en los términos de viscosidad  $\nu \Delta u \cdot v$  y de presión  $\nabla p \cdot v$ . Suponemos que la función test  $v = (v_1, v_2)$  se anula en la frontera del dominio. Nos queda:

$$\int_{\Omega} [(u \cdot \nabla)u \cdot v + \nu \Delta u : \nabla v - p \nabla \cdot v] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot u d\Omega = 0$$

La obtención de los términos que se han integrado por partes se ha realizado de la siguiente forma:

- **Término de viscosidad**

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\nu \Delta u \cdot v d\Omega &= -\nu \int_{\Omega} (\Delta u_1 \cdot v_1 + \Delta u_2 \cdot v_2) d\Omega = \\ &= -\nu \int_{\text{frontera}} \nabla u_1 \cdot v_1 dS + \nu \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\Omega - \nu \int_{\text{frontera}} \nabla u_2 \cdot v_2 dS \\ &+ \nu \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 d\Omega = \nu \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\Omega + \nu \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \nu \nabla u : \nabla v d\Omega \end{aligned}$$

- **Término de presión**

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot v d\Omega = \int_{\text{front}} v \cdot p dS - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v d\Omega$$

Finalmente, se restan las dos ecuaciones y queda:

$$\int_{\Omega} [(u \cdot \nabla)u \cdot v + \nu \Delta u : \nabla v - p \nabla \cdot v - q \nabla \cdot u] d\Omega = 0$$

**Dificultades:**

- (1) El problema original está mal planteado en la presión. Es decir, si  $(u, p)$  es solución de (NS), entonces  $(u, p + c)$ , con  $c$  constante, también es solución.

Esto se puede solucionar de varias formas. Una de ellas es añadiendo a (NS) un “término de estabilización” en la presión. Por ejemplo, en la segunda ecuación:

$$\nabla \cdot u + \epsilon p = 0,$$

con  $\epsilon \ll 1$ . Por ejemplo  $\epsilon = 10^{-8}$ .

La formulación variacional estabilizada queda:

$$\int_{\Omega} \left[ (u \cdot \nabla)u \cdot v + \nu \Delta u : \nabla v - \frac{1}{\rho} p \nabla \cdot v - q \nabla \cdot u - \epsilon p q \right] d\Omega = 0$$

(2) La segunda dificultad reside en la no linealidad del término convectivo  $(u \cdot \nabla)u$ .

Hay varios métodos para tratar con esta no linealidad, quizás el método estándar sea el método de Newton.

Recordemos el método de Newton para ecuaciones algebraicas:

Sea  $F: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  derivable. El objetivo es encontrar  $x^* \in \mathfrak{R}$  tal que  $F(x^*) = 0$

El algoritmo de Newton es:

(a) Inicialización: Tomar  $x^0 \in \mathfrak{R}$

(b) Iteración hasta convergencia

$$x^{n+1} = x^n - \frac{F(x^n)}{F'(x^n)}$$

(c) Criterio de parada: Hay varios, por ejemplo

$$|F(x^n)| \leq \text{tolerancia}$$

¿Cómo extendemos esto a Navier-Stokes?

Nuestra función  $F$  ahora está definida en un espacio de funciones que llamamos  $V$ , es decir,

$$F: V \rightarrow V$$

Por ejemplo,

$V = \{(u, p), u_1, u_2, p: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}, \text{ derivables y cumpliendo las condiciones de contorno}\}$

$$F: (u, p) \rightarrow F(u, p) \in V$$

¿Qué significa que  $F(u, p) = 0$ ? Significa que si multiplicamos por  $(v, q) \in V$  e integramos, el resultado es 0. Es algo así como decir que un vector en  $\mathfrak{R}^n$  vale 0 si su producto escalar por cualquier otro vector vale 0, es decir,

$$(u, p) = (0, 0) \iff (u, p) \cdot (v, q) = 0 \quad \forall (v, q)$$

Esto que acabamos de explicar es el por qué el MEF se aplica de esta forma, multiplicando por unas funciones test y luego integrando.

Eso es justo la formulación variacional:

$$F(u, p) = \int_{\Omega} [(u \cdot \nabla)u \cdot v + \nu \nabla u : \nabla v - p \nabla \cdot v - q \nabla \cdot u - \epsilon p q] d\Omega$$

$$\forall (v, q)$$

El algoritmo de Newton queda:

1) Tomar un  $(u^0, p^0)$  inicial.

2) Iteración hasta la convergencia:

$$(u^{n+1}, p^{n+1}) = (u^n, p^n) - \frac{F(u^n, p^n)}{DF(u^n, p^n)}$$

3) Criterio de parada: El que sea.

$$|F(u^n, p^n)| \leq \textit{tolerancia}$$

Fijémonos que la derivada de F, ahora es un gradiente ya que F está definida en un espacio de funciones.

Hemos de entender bien el término

$$\frac{F(u^n, p^n)}{DF(u^n, p^n)}$$

Si denotamos

$$(\delta u^n, \delta p^n) = \frac{F(u^n, p^n)}{DF(u^n, p^n)}$$

Entonces,

$$DF(u^n, p^n)(\delta u^n, \delta p^n) = F(u^n, p^n)$$

Como  $(u^n, p^n)$  son conocidos de la iteración anterior, la incógnita es  $(\delta u^n, \delta p^n)$ . La pregunta es ¿qué significa y cómo se calcula  $DF(u^n, p^n)(\delta u^n, \delta p^n)$ ?

Recordemos la definición de derivada direccional de una función de varias variables:

Sea  $F: V \rightarrow V, V \in \mathfrak{R}$

La derivada direccional de F en el punto  $(u^n, p^n)$  y en la dirección  $(\delta u^n, \delta p^n)$  se define como

$$DF_{(\delta u^n, \delta p^n)}(u^n, p^n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(u^n + \varepsilon \delta u^n, p^n + \varepsilon \delta p^n) - F(u^n, p^n)}{\varepsilon}$$

Ahora bien, hemos dicho que  $(\delta u^n, \delta p^n)$  es la dirección, pero ¿por qué es la dirección? Si volvemos a la expresión del algoritmo de Newton podemos ver como nuestro objetivo es obtener  $(u^{n+1}, p^{n+1})$  a partir de  $(u^n, p^n)$  y para ello nos tendremos que mover en una dirección, la cual vendrá impuesta por el término restante  $\frac{F(u^n, p^n)}{DF(u^n, p^n)}$ .

Aplicando la regla de la cadena, podemos ver que esta derivada direccional se calcula multiplicando escalarmente el gradiente de F con la dirección  $(\delta u^n, \delta p^n)$ , es decir,

$$DF_{(\delta u^n, \delta p^n)}(u^n, p^n) = DF(u^n, p^n) \cdot (\delta u^n, \delta p^n)$$

Podemos ver que, para este caso, la derivada direccional coincide con la función.

Por tanto, nos queda

$$\begin{aligned}
DF(u^n, p^n) \cdot (\delta u^n, \delta p^n) &= \\
&= \int_{\Omega} [((\delta u^n \cdot \nabla)u^n + (u^n \cdot \nabla)\delta u^n) \cdot v + \nu \nabla \delta u : \nabla v - \delta p^n \nabla \cdot v - q \nabla \cdot \delta u^n \\
&\quad - \epsilon \delta p^n q] d\Omega
\end{aligned}$$

Quedando el problema linealizado, ya que  $(u^n, p^n)$  se conocen de la iteración anterior y las incógnitas son  $(\delta u^n, \delta p^n)$  que no se multiplican entre sí.

En resumen, en cada iteración del algoritmo de Newton hemos de resolver el problema de elementos finitos lineal

$$DF(u^n, p^n)(\delta u^n, \delta p^n) = F(u^n, p^n)$$

En las incógnitas  $(\delta u^n, \delta p^n)$  y luego actualizar la solución según:

$$(u^{n+1}, p^{n+1}) = (u^n, p^n) - (\delta u^n, \delta p^n).$$

- (3)** La última dificultad consiste en la convergencia del MEF. ¿Qué espacios de elementos finitos elegimos para la velocidad y la presión? La convergencia del MEF está asegurada si los espacios  $U_h$  para la velocidad y  $P_h$  para la presión cumplen la llamada Levy-Babuska-Brezzi (LBB condition)

$$\sup_{p \in P_h} \frac{\int_{\Omega} (u \nabla p) d\Omega}{\left( \int_{\Omega} p^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}} \geq \beta \left( \int_{\Omega} \|u\|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in U_h.$$

Hay varios espacios de elementos finitos que cumplen esta condición, por ejemplo, Lagrange P2 para la velocidad y Lagrange P1 para la presión.

La forma en la que se trabaja para resolver este tipo de problemas es cogiendo un espacio para la velocidad, otro para la presión y ver si la solución es estable, es decir, ver si se cumple la condición LBB. Existen numerosos tipos de elementos para tratar este problema, si vamos a bibliografía especializada podemos ver el elemento de Taylor-Hood enriquecido, en el que se añade una burbuja cúbica a una expresión cuadrática a trozos de la velocidad, mientras que la presión se aproxima por funciones lineales a trozos. Precisamente nosotros estamos utilizando estos elementos, pero sin la burbuja, lo que se conoce como elemento de Taylor-Hood que también es estable. Existen otros como "el elemento P2-P0 o "El elemento de Crouzeix-Raviart.

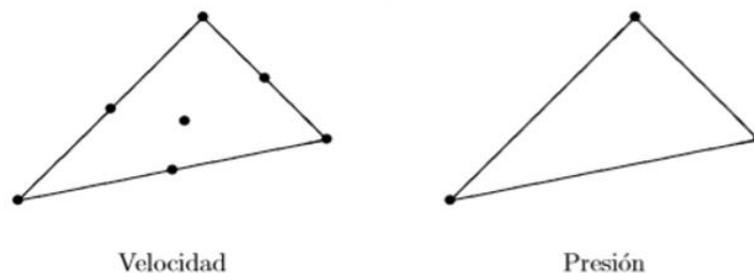


Figura 4. 3. Elementos P1 y P2.

Para la presión, elementos P1 significa que en ese triángulo que vemos, la función de forma tiene que ser un trozo de plano. ¿Cómo se determina un plano? Pues si conocemos 3 puntos el plano queda definido, que son los 3 nodos que vemos. Un plano es algo del tipo  $A_0 \cdot x + A_1 \cdot y + A_2$  teniendo 3 grados de libertad.

Si tenemos una parábola, que son los elementos P2, tendríamos  $A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot y + A_3 \cdot x^2 + A_4 \cdot y^2 + A_5 \cdot x \cdot y$ , por eso necesitaríamos 6 puntos que son los que se ven en el dibujo. El del centro sería la burbuja, una variante del nuestro.

Con el proceso de discretización lo que aproximaremos será el espacio en el que se encuentran las soluciones. En el método de volúmenes finitos, que estudiaremos a continuación se aproxima la derivada a través de un cociente incremental.

Denotamos por  $V$  el espacio de las posibles soluciones del problema variacional.

$$V = \{(u, p), u_1, u_2, p: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}, \text{ derivables y cumpliendo las condiciones de contorno}\}$$

Podemos elegir de forma adecuada espacios de elementos finitos  $V_h$  para aproximar la velocidad y por ejemplo  $Q_h$  para la presión.

Dentro de estos espacios, las funciones de forma  $\phi_i$  son una base de  $V_h$  y las funciones de forma  $\varphi_i$ , una base de  $Q_h$ , esto significa que se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\delta u_1^n(x, y) = \sum_{i=1}^N \delta u_1^i \phi_i(x, y)$$

$$\delta u_2^n(x, y) = \sum_{i=1}^N \delta u_2^i \phi_i(x, y)$$

$$\delta p^n(x, y) = \sum_{i=1}^N \delta p^i \varphi_i(x, y)$$

Donde  $\phi_i(x, y)$  es un polinomio de grado 2 en cada elemento y  $\varphi_i(x, y)$  es un polinomio de grado 1 en cada elemento.

En el problema linealizado se sustituyen estas expresiones y se pone  $v = (\phi_j, \phi_j)$ ,  $q = \varphi_j$  para obtener la matriz de rigidez.

El término independiente procede de las condiciones de contorno que han de ser no nulas.

El problema linealizado queda en la forma

$$KU = F$$

Hemos empleado FreeFem, un software libre, enfocado en resolver ecuaciones diferenciales parciales usando el método de elementos finitos, para resolver el problema que acabamos de exponer en una geometría que consiste en un perfil aerodinámico. El código y su explicación se recoge en el Anexo A. Los resultados los veremos en un apartado posterior.

### 4.3 Método de volúmenes finitos

El método de volúmenes finitos permite discretizar y resolver de forma numérica ecuaciones diferenciales. Es un método alternativo al de los elementos finitos. El método impone conservación de forma natural, permite una gran flexibilidad geométrica, resuelve las ecuaciones de forma integral y emplea una discretización muy intuitiva.

En esta sección, presentaremos las ideas fundamentales del Método de Volúmenes Finitos a través de un modelo sencillo en dimensión 1.

Consideraremos el modelo de la ecuación de difusión en 1D, que viene dado por:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = f(x) \quad \text{en } [0, L]$$

Con las siguientes condiciones de contorno homogéneas:

$$u(0) = u(L) = 0$$

Se trata de un modelo matemático para varios fenómenos físicos como la transmisión de calor en estado estacionario, apareciendo entonces el concepto de flujo de calor:

$$q = -k(x)\frac{du}{dx}$$

que representa la ley de Fourier, y nos indica que el flujo de calor es proporcional al gradiente de la temperatura.

Con el objetivo de simplificar los cálculos posteriores supondremos que la función  $k(x)$  es constante de valor 1 y que la función  $f$  es una delta de Dirac con signo negativo localizada en el punto medio de la barra. Además, supondremos que la longitud de ella es la unidad:

$$k = 1, \quad f = -\delta_{0.5}, \quad L = 1$$

El primer paso en el método de volúmenes finitos consiste en la realización de un mallado del dominio en el cual está planteado la ecuación, seleccionando un conjunto de nodos equiespaciados. Una novedad importante en el método es que vamos a distinguir entre dos tipos diferentes de nodos, como vemos en la siguiente figura:

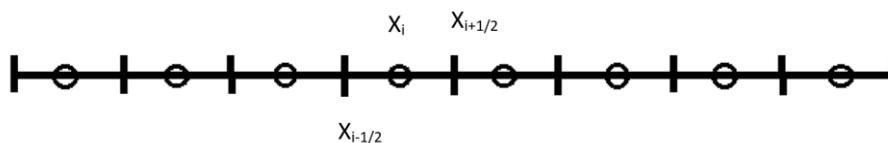


Figura 4. 4. División del intervalo por nodos.

Cada una de las divisiones anteriores es lo que llamaremos volumen finito.

$$\text{Celda } i\text{-ésima: } c_i = \left[ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right]$$

Seleccionamos en el punto medio de cada celda un nodo, en concreto, el que se encuentra en el centro de la celda  $c_i$  será el nodo  $x_i$ .

Introducimos el concepto de volumen de la celda:

Volumen de  $c_i$ :  $h = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$

Nodos:  $x_i, 1 \leq i \leq N$

El objetivo que nos fijamos es aproximar la solución  $u(x)$  en los nodos  $x_i$ .

Denotamos  $u_i \approx u(x_i)$

Veamos a ver cómo se procede en el método. El principio básico consiste en integrar la ecuación diferencial en cada uno de los volúmenes, en cada una de las celdas. Esta es la gran diferencia respecto al método de los elementos finitos.

$$\int_{c_i} -\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) dx = - \int_{c_i} \delta_{0.5}(x) dx$$

Por definición de la delta de Dirac, la única celda que da un valor no nulo en el término de la derecha anterior es la celda que contiene al punto  $x=0.5$ . Por tanto, el vector de la derecha es de la forma  $b_h = [0, 0, 0, \dots, -1, 0, \dots 0]$ .

En el término de la izquierda, realizamos la integral:

$$\int_{c_i} -\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} -\frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right) dx = \frac{du}{dx} \left( x = x_{i-\frac{1}{2}} \right) - \frac{du}{dx} \left( x = x_{i+\frac{1}{2}} \right)$$

La dificultad fundamental consiste en aproximar el flujo  $-\frac{du}{dx}$  en los puntos intermedios  $x_{i+\frac{1}{2}}$ .

Dicha aproximación se denomina "flujo numérico".

Existen varias formas de realizarlo, lo habitual es usar un esquema centrado, cambiando la derivada por un cociente incremental:

$$\frac{du}{dx} \left( x = x_{i+\frac{1}{2}} \right) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

De la misma forma:

$$\frac{du}{dx} \left( x = x_{i-\frac{1}{2}} \right) \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} -\frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right) dx &= \frac{du}{dx} \left( x = x_{i-\frac{1}{2}} \right) - \frac{du}{dx} \left( x = x_{i+\frac{1}{2}} \right) \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = \\ &= \frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h} \end{aligned}$$

Aplicamos a continuación las condiciones de contorno. El problema reside en que estamos calculando la solución en los puntos centrales de cada celda y las condiciones de contorno están en los extremos de la primera y última celda, que no forman parte del proceso de discretización.

Se añaden dos nodos fantasmas (“ghost”) fuera del dominio  $[0, L]$ . Uno situado a la izquierda de  $x = 0$ , que llamaremos  $x_0$ , a la misma distancia de  $x_{\frac{1}{2}}$  que  $x_1$ . El segundo nodo estará a la derecha del dominio y se denominará  $x_{N+1}$ .

Sobre estos nodos fantasmas se impondrán las condiciones de contorno, de modo que se cumple que  $u_0 = 0, u_{N+1} = 0$ .

Esto nos permite aproximar el flujo numérico y llegar a la solución.

En resumen, extrapolando al conjunto de celdas, nos queda el sistema lineal:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(-u_0 + 2u_1 - u_2) &= 0 \quad \text{en } i = 1 \\ \frac{1}{h}(-u_1 + 2u_2 - u_3) &= 0 \quad \text{en } i = 2 \\ &\dots \\ \frac{1}{h}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) &= 0 \quad \text{en } 0.5 \\ \frac{1}{h}(-u_{N-1} + 2u_N - u_{N+1}) &= 0 \quad \text{en } i = N \end{aligned}$$

Si lo planteamos en forma matricial, podemos ver que el sistema que se obtiene es el mismo que el obtenido con el método de elementos finitos usando elementos de Lagrange P1, es decir, funciones lineales en cada elemento y con valor 1 en cada uno de los nodos del mallado de elementos finitos. Esto no significa que siempre se obtenga el mismo sistema con volúmenes finitos que con elementos finitos, pero pone de manifiesto que en determinadas situaciones ambos esquemas coinciden.

En conclusión, las ideas clave del método son las siguientes:

1. División del dominio en celdas o volúmenes, de ahí su nombre.
2. Los grados de libertad se fijan en el centro de cada celda, aunque existen otras variantes en las que se centran en los extremos de las celdas.
3. La ecuación diferencial se integra en cada celda.
4. Aproximación del flujo a través de un esquema numérico, con el objetivo de llegar a un sistema discreto.

## 5. ANÁLISIS COMPUTACIONAL DE FLUIDOS

La dinámica computacional de fluidos (CFD) es el análisis de sistemas que involucran flujo de fluido, transferencia de calor y fenómenos asociados mediante simulación basada en la computadora. La técnica es muy poderosa y abarca una amplia gama de áreas de aplicación industrial y no industrial. Algunos ejemplos son:

- Aerodinámica de aviones y vehículos.
- Hidrodinámica de barcos.
- Ingeniería biomédica.

Solo hemos mencionado 3, pero en realidad hay infinidad de aplicaciones.

La principal razón por la cual CFD se ha podido quedar atrás en el pasado es por su tremenda complejidad, que impide una descripción de los flujos de fluidos económica y suficientemente completa al mismo tiempo. La disponibilidad de hardware informático de alto rendimiento y la introducción de interfaces fáciles de usar, han llevado a un reciente aumento de interés, y CFD ha entrado en la comunidad industrial más amplia desde la década de 1990.

En nuestro proyecto, nos centraremos en su aplicación a la aerodinámica utilizando el software Ansys, más concretamente estudiando un perfil aerodinámico NACA en 2D. Para ello, Ansys resolverá las ecuaciones RANS estudiadas anteriormente, a través de la aplicación del modelo de turbulencia seleccionado, con el método de volúmenes finitos que hemos explicado.

Las etapas de este análisis se pueden dividir en 3: preprocesado, procesado y postprocesado.

### 5.1 Preprocesado

Las actividades que llevaremos a cabo en la etapa de preprocesamiento son:

#### 5.1.1 Definición de la geometría

El perfil aerodinámico en el que centraremos nuestro estudio será el perfil NACA 4412, pues es un perfil muy utilizado en rotores eólicos, alas y en la aerodinámica en general. La obtención del perfil se ha realizado a través del programa airfoiltools, que nos proporciona las coordenadas de los puntos del perfil además de otra información sobre el mismo. Se han utilizado 100 puntos para definir dicho perfil. Se ha exportado a DesignModeler, dentro de Ansys, las coordenadas y se han unido en él estos puntos para la obtención del perfil, resultando:

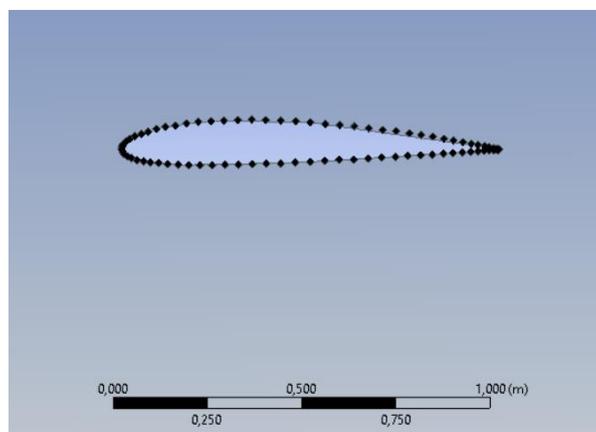


Figura 5. 1. Perfil NACA 4412 generado a partir de 100 puntos.

En otros softwares no comerciales, hubiera sido necesario la introducción de las ecuaciones paramétricas que definen el perfil y que se pueden encontrar en bibliografía especializada.

El volumen de control también se ha realizado a través de Ansys DesignModeler. Se tratará de una semicircunferencia y un rectángulo, recomendado para este tipo de perfiles en 2D. Según Versteeg & Malalasekera (1995), para la captura de una larga estela se recomienda una distancia de salida de 10 veces la longitud de cuerda, que en nuestro caso es de 1 metro. También se recomienda para las paredes una distancia de 3 veces la cuerda. Esto es debido a la posible interacción del flujo con las paredes.

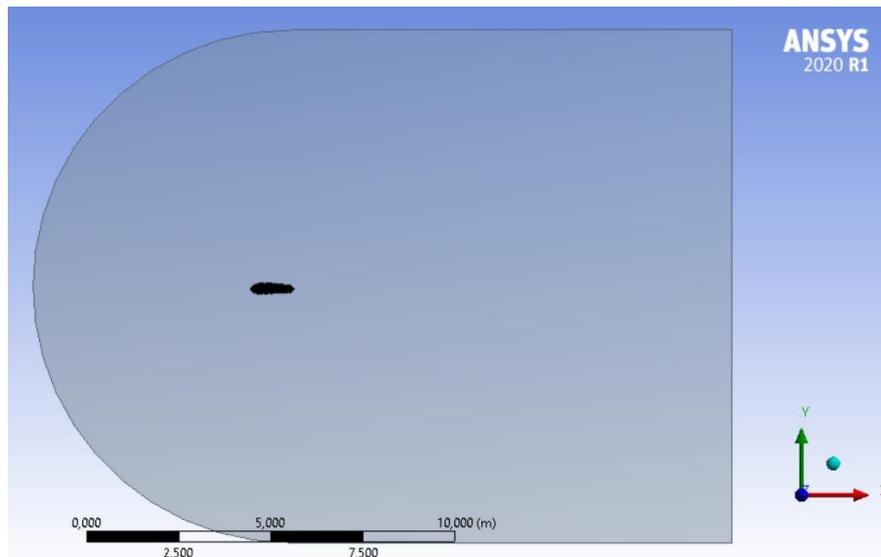


Figura 5. 2. Volumen de control por el que circula el fluido.

Para asegurarnos de que los resultados son independientes del volumen de control, hemos realizado diferentes simulaciones hasta llegar a la convergencia, y el volumen de control será la menor dimensión con la que no varíen los resultados, con el objetivo de ahorrar costes computacionales.

### 5.1.2 Generación de la malla

Consiste en la subdivisión del dominio en un número de subdominios más pequeños y no superpuestos. Se trata de un apartado crítico para la obtención de resultados fiables, es por ello que estudiaremos en profundidad la forma de realizarla y de medir su calidad.

La solución al problema se define en los nodos dentro de cada celda, por lo tanto, la precisión depende del número de celdas. Sin embargo, el coste computacional aumenta también con el número de celdas. En el presente, el diseño de la malla depende de las habilidades del usuario para diseñar una solución de compromiso entre la precisión deseada y el coste computacional.

En nuestro caso, se tratará de una malla híbrida tipo C-Grid, pues dispondrá de elementos cuadriláteros en la capa límite del perfil y elementos triangulares en el resto del mallado.

Las funciones de mallado que se han empleado son las siguientes:

- All Triangles Method: Método de mallado triangular, apropiado para superficies.
- Edge Sizing: Nos permite restringir el tamaño de las celdas en torno al perfil. Será un parámetro variable en el mallado y se elegirá el mayor tamaño de celda a partir del cual

los resultados no presentan variación para así optimizar la relación precisión-coste computacional, también se debe asegurar que para dicho tamaño de celda, la calidad de malla es la adecuada. Veremos esto más adelante.

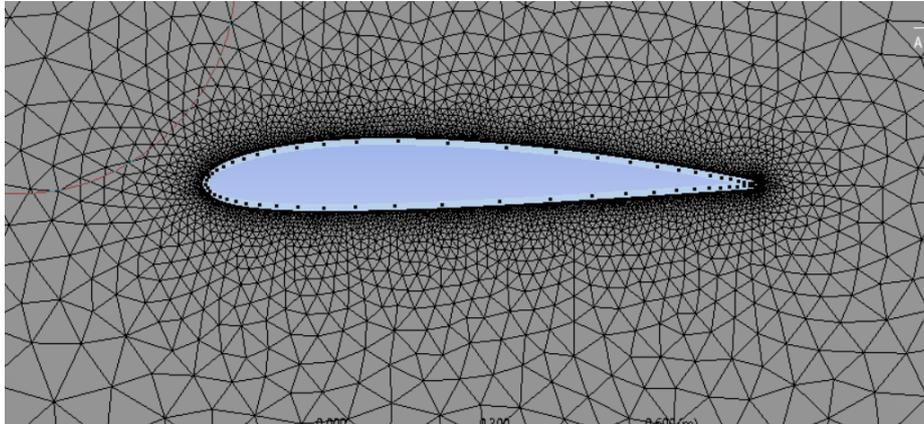


Figura 5. 3. Mallado del perfil.

Se puede apreciar en la figura anterior la función mencionada, pues vemos como las celdas cercanas a la capa límite tienen un tamaño muy pequeño.

- Inflation: Nos permite crear la primera capa del mallado para así capturar la capa límite, es decir, tiene en cuenta los efectos viscosos que en ella se producen. Se pueden elegir el número de capas y el "Growth Rate". El tamaño de la primera capa, que denominaremos  $\Delta s$ , se determina en función del número de Reynolds de la siguiente forma:

$$\Delta s = \frac{y^+ \mu}{U_{fric} \rho}$$

$$U_{fric} = \sqrt{\frac{\tau_{wall}}{\rho}}$$

$$\tau_{wall} = \frac{C_f \rho U_\infty^2}{2}$$

$$C_f = \frac{0.026}{Re^{1/7}}$$

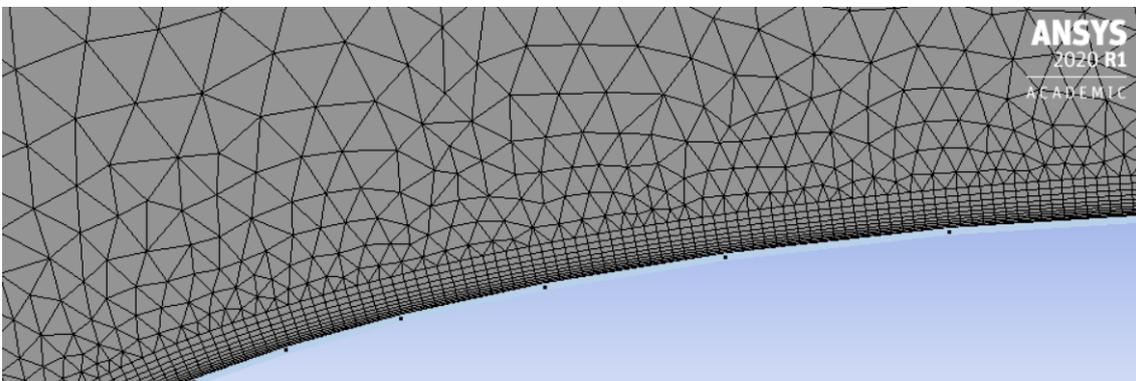


Figura 5. 4. Técnica Inflation en la proximidad del perfil.

En esta figura se puede observar claramente la función "Inflation", creada para una velocidad de flujo de 30 m/s.

$y^+$  dependerá del modelo de turbulencia seleccionado, para cada uno de ellos, Ansys nos recomienda un valor de  $y^+$ .

### 5.1.3 Calidad de malla

La resolución adecuada de la malla para flujos turbulentos es muy importante. Debido a la fuerte interacción del flujo medio y la turbulencia, los resultados numéricos para los flujos turbulentos tienden a ser más susceptibles a la distribución de elementos de malla que los de los flujos laminares. En la región cercana a la pared, se requieren diferentes resoluciones de malla según el modelo de pared cercana que se utilice.

Por tanto, la calidad de la malla juega un papel importante en la precisión y estabilidad del cálculo numérico. Independientemente del tipo de malla utilizada en su dominio, es esencial verificar la calidad de la malla.

Estudiaremos los parámetros más utilizados para medir la calidad de malla.

- **Ortogonalidad**

Un indicador importante de la calidad de la malla que ANSYS Fluent le permite verificar es una cantidad denominada ortogonalidad. La calidad ortogonal mínima para todos los tipos de celdas debe ser mayor que 0.01, con un valor promedio significativamente mayor.

Veamos la forma que tiene Ansys de calcular este parámetro:

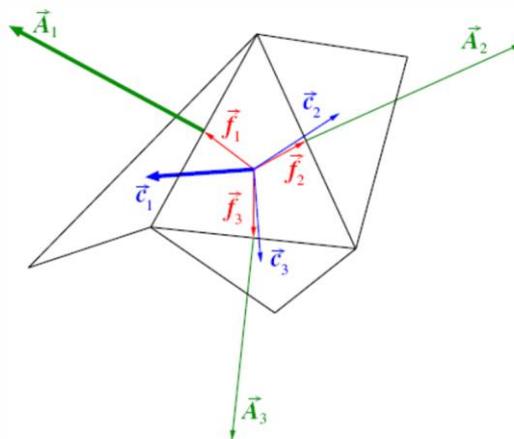


Figura 5. 5. Vectores que definen la ortogonalidad de una malla.

$A_i$  es el vector normal de la cara.  $C_i$  es el vector que va desde el centroide de la cara estudiada hasta el centroide de la cara adyacente.  $F_i$  es el vector que va desde el centro de la celda hasta el punto medio de cada cara.

Se calculan los cosenos del ángulo entre  $A_i$  y  $C_i$  y entre  $A_i$  y  $F_i$ . El valor de coseno calculado más pequeño es la ortogonalidad de la celda.

Por tanto, es un parámetro que nos mide cómo está situada una celda respecto a sus adyacentes.

Es obvio que los mayores problemas de ortogonalidad los vamos a tener en el borde de ataque y en el de salida, ya que la geometría forma ahí ángulos muy cerrados y a la malla le cuesta adaptarse a ellos.

Los resultados de la primera medición de este parámetro, fueron los siguientes:

Mesh Metric	Orthogonal Quality
<input type="checkbox"/> Min	1,1492e-003
<input type="checkbox"/> Max	1,
<input type="checkbox"/> Average	0,95783
<input type="checkbox"/> Standard Deviation	0,12605

Figura 5. 6. Medición calidad ortogonal.

Aunque el valor medio sea bastante bueno, el valor mínimo se encuentra por debajo de la calidad ortogonal mínima.

Para mejorar la calidad de malla, Ansys nos proporciona múltiples herramientas, pero solo se recomienda el suavizado basado en la calidad; El intercambio de caras y el suavizado basados en la asimetría o un operador laplaciano presentan más limitaciones.

Por tanto, utilizaremos este método. Como parte de él, debemos especificar el porcentaje del número total de celdas.

Este suavizado es similar a cuando se utiliza el mesh/repair-improve/improve como comando de texto. La ventaja de utilizar el cuadro de diálogo en lugar del comando de texto es que puede controlar el porcentaje de las celdas que ANSYS Fluent intenta mejorar.

Por recomendación, introducimos un porcentaje de celdas a mejorar pequeño, para posteriormente ir aumentándolo en posteriores suavizados. El resultado obtenido fue de una ortogonalidad mínima de **0.2456**. Por lo que ahora sí se sitúa por encima del valor mínimo aceptable.

- **Skewness**

Otra de los principales parámetros de calidad para una malla es el llamado *skewness* que podríamos traducir asimetría. Determina cuán cerca del ideal (equilátero o equiangular) está una cara o una celda.

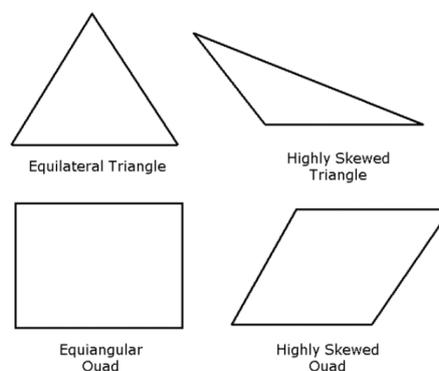


Figura 5. 7. Skweness en dos geometrías.

En el método de desviación del volumen equilátero, se define como

$$skewness = \frac{\text{Tamaño óptimo de celda} - \text{Tamaño de celda}}{\text{Tamaño óptimo de celda}}$$

La siguiente tabla enumera el rango de valores de asimetría y la calidad de celda correspondiente:

Valor de la inclinación	Calidad celular
1	degenerar
0.9 - <1	malo (astilla)
0.75 — 0.9	pobre
0.5 — 0.75	justa
0.25 — 0.5	bueno
> 0 - 0.25	excelente
0	equilátero

Tabla 5. 1. Skewness y calidad de la malla.

En nuestra malla, el valor de Skewness se expone a continuación:

Mesh Metric	Skewness
<input type="checkbox"/> Min	5,2858e-007
<input type="checkbox"/> Max	1,
<input checked="" type="checkbox"/> Average	7,6572e-002
<input type="checkbox"/> Standard Deviation	0,14521

Figura 5. 8. Valor de Skewness en nuestra malla.

El valor medio se encuentra muy cercano a 0, por tanto, nuestra malla tiene una calidad celular excelente.

- **Relación de aspecto**

Otro indicador importante de la calidad de la malla es la relación de aspecto. La relación de aspecto es una medida del estiramiento de una célula. Se calcula como la relación entre el valor máximo y el valor mínimo de cualquiera de las siguientes distancias: las distancias normales entre el centroide de la celda y los centroides de la cara (calculado como un producto de punto del vector de distancia y la cara normal), y las distancias entre el centroide celular y los nodos.

El resultado final de la malla es el siguiente:

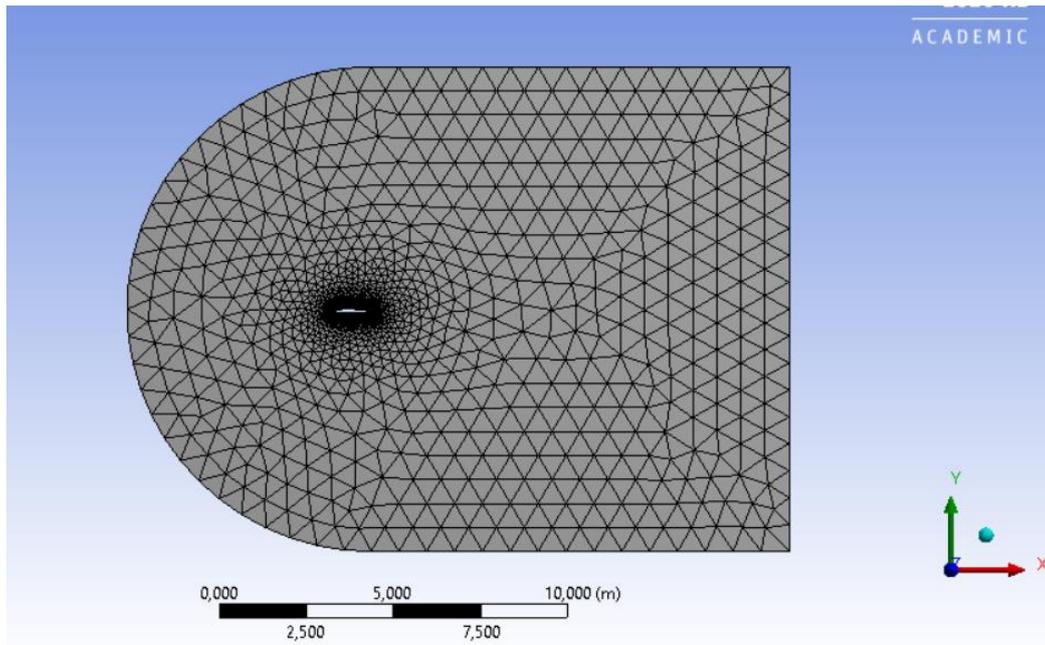


Figura 5. 9. Malla final.

#### 5.1.4 Fenómenos físicos que deben ser modelados, propiedades del fluido y condiciones de contorno

Models	
Energy	Off
Viscous	VARIABLE
Materials	
Air	Density-1,225 kg/m <sup>3</sup>
	Viscosity-1,7894e-05 kg/ms
Boundary Conditions	
Inlet	X-Velocity-VARIABLE
	Y-Velocity-VARIABLE
Outlet	Gauge Pressure-0 Pa

Tabla 5. 2. Modelos empleados, fluido y sus características y condiciones de contorno.

Uno de los objetivos del proyecto es determinar el grado de influencia de los modelos de turbulencia en la solución del problema, por eso se ha puesto como una variable. Otro de los objetivos es ver cómo varían los resultados en función del número de Reynolds y del ángulo de ataque, por lo que la velocidad también será variable. La condición de contorno de la presión que comentamos en teoría viene impuesta corriente abajo del perfil.

La ecuación de la energía esta desacoplada del problema, pues no es nuestro objetivo el estudio de la distribución de temperaturas.

#### 5.1.5 Modelado cerca de la pared

Como hemos visto, los flujos turbulentos se ven significativamente afectados por la presencia de paredes. El campo de velocidad media está afectado a través de la condición de no deslizamiento en la pared. La turbulencia también cambia por la presencia de la pared de manera no trivial. Como ya vimos, muy cerca de la pared, la amortiguación viscosa reduce las

fluctuaciones de velocidades tangenciales. Sin embargo, en la región externa de la capa, la turbulencia aumenta rápidamente por la producción de energía cinética de la turbulencia debido a los fuertes gradientes de velocidad media.

El modelado cerca de la pared tiene un gran impacto en la fidelidad de las soluciones numéricas, pues las paredes son la principal fuente de vorticidad y de turbulencia media. Es la región donde las variables presentan grandes gradientes. Por lo tanto, la representación precisa del flujo en la región cercada a la pared determina predicciones exitosas de flujo turbulento delimitado por la pared.

Tradicionalmente, existen dos enfoques para modelar la región cercana a la pared. En un enfoque, la subcapa viscosa no se resuelve. En cambio, las fórmulas semi-empíricas llamadas funciones de pared se usan como puente entre la región afectada por la viscosidad y la región completamente turbulenta. El uso de estas funciones de pared evita la necesidad de modificar los modelos de turbulencia para tener en cuenta la presencia de la pared.

En el otro enfoque, los modelos de turbulencia se modifican para que la región que está afectada por la viscosidad se resuelva con una malla hasta la pared. Representamos ambos enfoques:

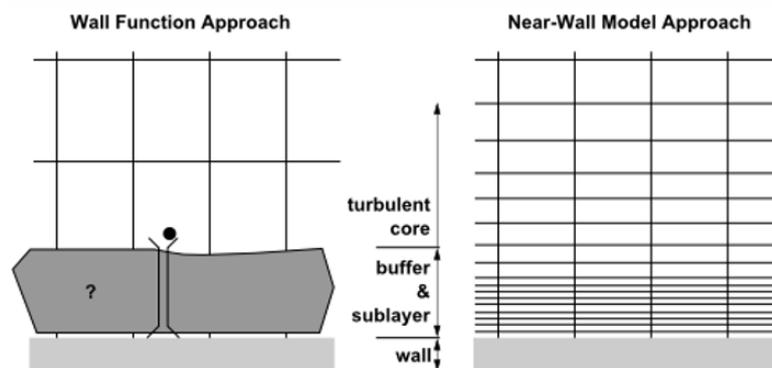


Figura 5. 10. Tratamientos cerca de la pared en Ansys.

El principal problema de las funciones de pared (excepto la función de pared escalable) es que los resultados numéricos se deterioran con el refinamiento de la malla en la dirección normal a la pared. Para valores  $y^+$  menores a 15 se generan grandes errores en el esfuerzo cortante en la pared. Aunque esto era un estándar industrial hasta hace algunos años, aunque actualmente se han tomado medidas permitir un refinamiento de malla consistente sin un deterioro en los resultados. Para el modelo  $k - \varepsilon$ , Menter-Lechner y Enhanced Wall Treatment (EWT) son variaciones que se pueden implementar para evitar el deterioro de los resultados al refinar la malla cerca del perfil. Para el modelo  $k - \omega$  existen formulaciones de pared más avanzadas que tienen el mismo propósito. Para el modelo de Spalart-Allmaras  $y^+$ -insensitive wall treatment es el predeterminado y permite ejecutar el modelo independientemente de  $y^+$ .

La obtención de resultados numéricos de alta calidad solo se obtendrán si la resolución general de la capa límite es suficiente. El número mínimo de celdas para cubrir con precisión la capa límite es de 10, pero son deseables valores de 20. El aumento del coste computacional debido a refinar la malla en la dirección normal a la pared generalmente merece la pena para lograr una mejora de la resolución de la capa límite. En mallas no estructuradas, se recomienda generar capas de prisma cerca de la pared con 10-20 o más capas para una predicción precisa de la capa límite. Además, el grosor de la capa del prisma debe diseñarse para garantizar que al menos 15

nodos cubran la capa límite. Esto lo podemos verificar realizando una simulación y visualizando la viscosidad turbulenta, la cual tiene un máximo en el medio de la capa límite: este máximo da una indicación por tanto del grosor de la capa. Es esencial que la capa del prisma sea más gruesa que la capa límite, pues de lo contrario existe el peligro de que la capa del prisma limite el crecimiento de la capa límite.

Seguiremos las siguientes recomendaciones:

1. En el modelo  $k - \varepsilon$  usar Menter-Lechner ( $ML - \varepsilon$ ) o Enhanced Wall Treatment ( $EWT - \varepsilon$ ).
2. Si las funciones de pared se favorecen con la ecuación de  $\varepsilon$ , se deben usar las funciones de pared escalables.
3. Para los modelos  $\omega$  usar  $y^+$ -insensitive wall treatment.
4. Para el modelo Spalart-Allmaras usar  $y^+$ -insensitive wall treatment.

## 5.2 Proceso (solver)

Nos centraremos en el método de volúmenes finitos, una formulación especial de diferencia finita. Como hemos visto, en resumen, el algoritmo numérico consiste en los siguientes pasos:

- Integración de las ecuaciones que rigen el flujo de fluido en todos los volúmenes de control del dominio
- Discretización: Conversión de las ecuaciones integrales resultantes en un sistema de ecuaciones algebraicas.
- Solución de las ecuaciones algebraicas por un método iterativo.

El primer paso es el que distingue al método del volumen finito de las demás técnicas de CFD. El principio de conservación física constituye uno de los principales atractivos del método del volumen finito. Mostramos a continuación el tipo de solucionador que se utilizará y los parámetros de la solución:

<b>General</b>	
<b>Type</b>	Pressure-Based
<b>Velocity Formulation</b>	Absolute
<b>Time</b>	Steady
<b>2D Space</b>	Planar
<b>Scheme</b>	Pressure-Based
<b>Gradient</b>	Least Squares Cell Based
<b>Pressure</b>	Second order
<b>Momentum</b>	Second Order Upwind
<b>Turbulent Kinetic Energy</b>	Second Order Upwind
<b>Turbulent Dissipation Rate</b>	Second Order Upwind
<b>Solution Controls (primeras iteraciones)</b>	
<b>Pressure</b>	0,2
<b>Momentum</b>	0,3
<b>Density</b>	1
<b>Body Forces</b>	1
<b>Turbulent Kinetic Energy</b>	0.3
<b>Turbulent Dissipation Rate</b>	0.3
<b>Turbulent Viscosity</b>	1
<b>Solution Controls (posteriores iteraciones)</b>	
<b>Pressure</b>	0,2
<b>Momentum</b>	0,5
<b>Density</b>	1
<b>Body Forces</b>	1
<b>Turbulent Kinetic Energy</b>	0.5
<b>Turbulent Dissipation Rate</b>	0.5
<b>Turbulent Viscosity</b>	1

Tabla 1. Solver y Controles de la solución.

El solucionador basado en la presión habilita el algoritmo de solución basado en la presión (predeterminado). Tanto el enfoque basado en la presión como el basado en la densidad se pueden utilizar para una amplia gama de flujos, pero el basado en la presión fue originalmente diseñado para flujos incompresibles, como nuestro caso de estudio.

El algoritmo segregado basado en la presión utiliza un algoritmo de solución donde las ecuaciones de gobierno se resuelven secuencialmente. Cada ecuación de gobierno mientras se resuelve, se desacopla de otras ecuaciones. La convergencia es relativamente lenta, pues las ecuaciones se resuelven de forma desacoplada.

Por su parte, el algoritmo acoplado basado en la presión resuelve un sistema acoplado de ecuaciones que comprende las ecuaciones de momento y de continuidad. Las ecuaciones restantes se resuelven de forma desacoplada como el algoritmo segregado. La convergencia mejora significativamente pues las ecuaciones de impulso y continuidad están estrechamente acopladas.

Respecto a la elección del esquema de discretización, cuando el flujo se alinea con la malla, la discretización de primer orden puede ser aceptable. Sin embargo, cuando el flujo no está alineado con la malla, la discretización de primer orden aumenta el error de discretización numérica. Por lo tanto, para nuestra malla, en la que el flujo nunca está alineado con la malla,

seleccionaremos la discretización de segundo orden, con la que generalmente obtendremos resultados más precisos.

Sin embargo, en algunos casos, es posible que se deba comenzar con el esquema de primer orden y luego cambiar al esquema de segundo orden. Esto suele ocurrir cuando la solución inicial es muy diferente a la solución final esperada.

El esquema de discretización de primer orden fue explicado en el apartado de volúmenes finitos, explicamos a continuación el esquema de segundo orden:

El valor nominal de  $\varphi_f$  se calcula utilizando la siguiente expresión:

$$\varphi_f = \varphi + \nabla\varphi \cdot \vec{r}$$

Donde  $\varphi$  es el valor centrado en la celda y  $\nabla\varphi$  su gradiente en la celda aguas arriba,  $\vec{r}$  es el vector desplazamiento del centroide de la celda. Se requiere la determinación del gradiente  $\nabla\varphi$  en cada celda.

Por último, en el apartado de controles de solución se muestran los factores de relajación de diferentes variables. Debido a la no linealidad de las ecuaciones que resuelve ANSYSFluent, es necesario controlar el cambio de  $\varphi$ . Esto generalmente se logra mediante la relajación de las variables, también conocida como relajación explícita, que reduce el cambio de  $\varphi$  producido durante cada iteración. Se ha demostrado que utilizar en las primeras iteraciones factores de relajación más bajos favorece la convergencia de la solución.

### 5.3 Postprocesado

Los paquetes CFD están equipados con unas herramientas de visualización de datos muy versátiles. Éstas incluyen:

- Gráficos vectoriales.
- Gráficos de líneas y contornos.
- Diagramas de superficie 2D y 3D.
- Seguimiento de partículas.

Tras la obtención y visualización de los resultados, se deben obtener las conclusiones objetivo del problema.

En resumen, al resolver problemas de flujo de fluidos debemos ser conscientes de la complejidad de la física subyacente, por ello, el usuario de un código debe tener habilidades en distintas áreas. Antes de ejecutar una simulación CFD hay una etapa de identificación y formulación del problema del flujo en términos de los fenómenos físicos que deben considerarse. Tomar las decisiones correctas requiere habilidades de modelado ya que necesitamos hacer suposiciones para reducir la complejidad, preservando las características del problema en cuestión. Es la idoneidad de las simplificaciones introducidas en esta etapa lo que gobierna, al menos en parte, la calidad de la información generada por CFD.

## 6. RESULTADOS NUMÉRICOS E INTERPRETACIONES FÍSICAS

Obtendremos los resultados de dos problemas distintos a través de dos softwares diferentes, FreeFem y Ansys.

### 6.1 Resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes con el método de elementos finitos mediante FreeFem

El problema a resolver es el que hemos presentado en el apartado 4.2, para ello, debemos programar en FreeFem pues se trata de un software libre. El código se encuentra expuesto y explicado en el Anexo A.

Los resultados que obtendremos serán:

1. Distribución de presiones.
2. Distribución de velocidades.
3. Cálculo de la resistencia.

Respecto a la geometría que emplearemos, será el perfil NACA 0012, un perfil simétrico, por eso no tiene sentido obtener la sustentación.

La simulación que realizaremos está limitada en torno a  $Re < 400$ , a partir de dicho valor, la solución se hace inestable y no se alcanza el criterio de convergencia impuesto en el método de Newton.

Para el cálculo de la resistencia, al tratarse de un software libre, debemos realizar nosotros un esquema de integración para posteriormente implementarlo en FreeFem. En un software comercial, como el que veremos, esto no sería necesario y nos proporcionaría la resistencia directamente.

La resistencia se calcula a partir de su definición, que dedujimos en el apartado 2.7:

$$D = - \int p \cdot \cos \theta \, d\sigma + \int \tau \cdot \sin \theta \, d\sigma$$

Veamos cómo resolver la expresión anterior:

Como dijimos,  $\theta$  es el ángulo formado por la dirección del flujo y el vector normal en cada punto de la superficie, es decir:

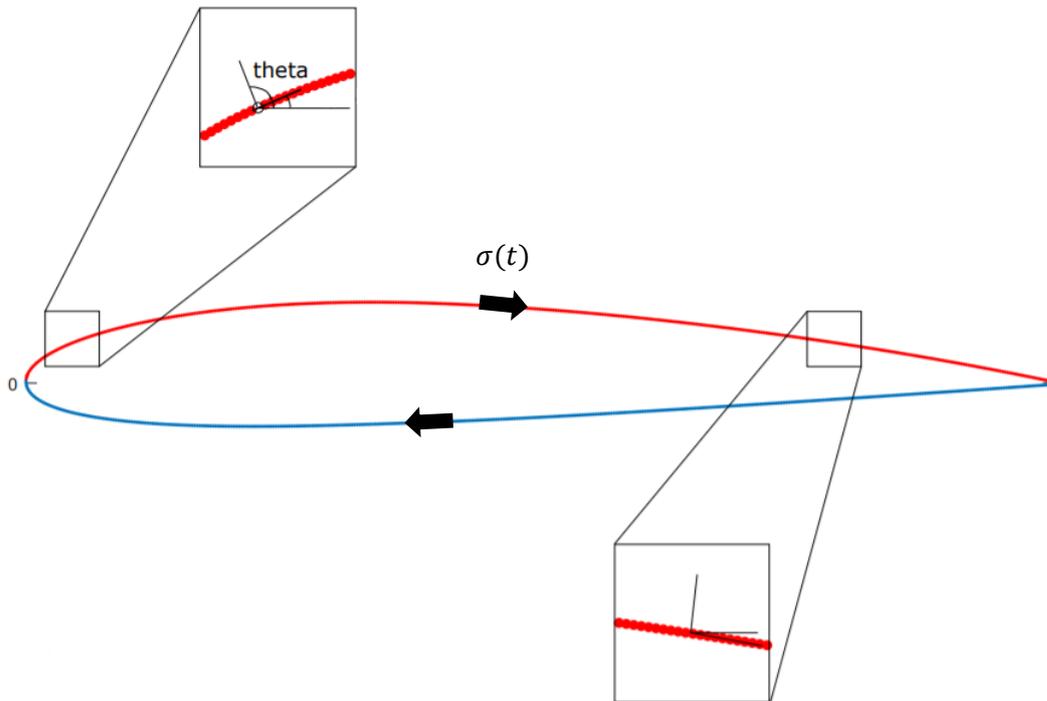


Figura 6. 1. Ángulo  $\theta$  en el perfil aerodinámico.

$$\sigma(t) = NACA_t + NACA_b$$

Desarrollamos el procedimiento para  $NACA_t$ , para la parte inferior del perfil, se desarrolla del mismo modo, pero cambiando la ecuación paramétrica del perfil.

Las ecuaciones que definen  $NACA_t$  son:

$$x(t) = t$$

$$y(t) = 0,17735\sqrt{t} - 0,075597t - 0,212836t^2 + 0,17363t^3 - 0,06254t^4$$

Para determinar  $\theta$ , lo que necesitamos calcular es el vector normal, pues el de velocidad ya es conocido. Aplicando la definición:

$$\vec{n}(x(t), y(t)) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

Podemos ver que realmente hay dos vectores normales, el exterior y el interior, si cambiamos los signos del numerador en la anterior expresión, obtenemos el vector normal en el sentido opuesto.

El vector velocidad es el  $\vec{i} = (1,0)$ .

Si aplicamos la definición de producto escalar:

$$\vec{n} \cdot \vec{i} = \|\vec{n}\| \|\vec{i}\| \cdot \cos(\theta) \rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \frac{dy}{dx}$$

Para el perfil aerodinámico  $x=t$ .

Entonces, el programa nos va a calcular en todos los nodos que mallan el perfil, este coseno, el seno se puede obtener inmediatamente aplicando:

$$\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

Por otra parte, el esfuerzo cortante se puede definir de la siguiente forma:

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)$$

Por tanto, lo que haremos será ir sumando la contribución en cada nodo del cuerpo, obteniendo finalmente la resistencia.

Comenzamos viendo la distribución de velocidades y presiones. Vamos a obtener los resultados para diferentes valores de Re, dentro de las limitaciones del código.

- **Re=50**

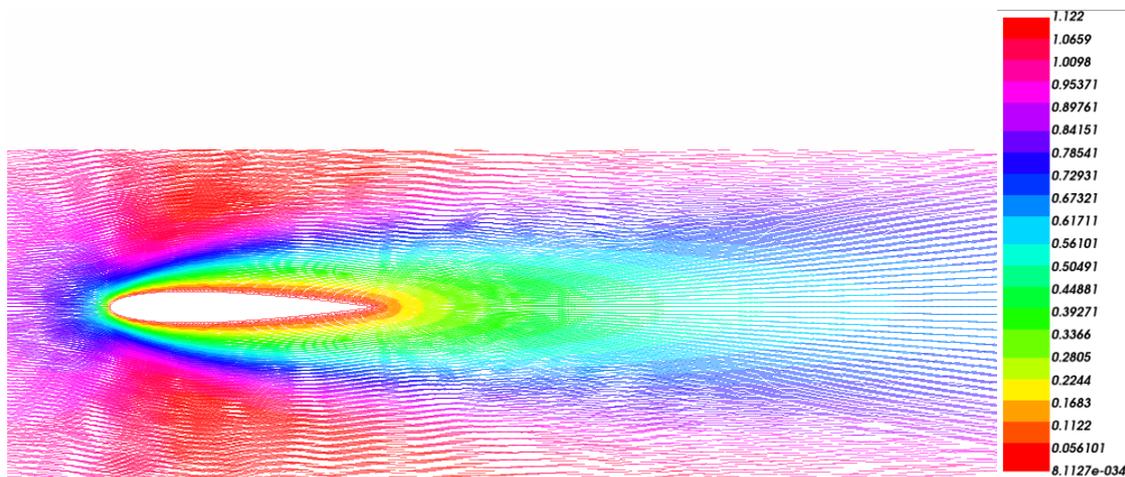


Figura 6. 2. Campo de velocidad para Re=50.

Vemos como se trata de un perfil simétrico en esta distribución de velocidad. Podemos ver como la velocidad lejos del perfil es la exterior impuesta como condición de contorno.

Observamos como justo en el contorno del perfil, la velocidad es nula, cumpliéndose la condición de adherencia. La velocidad va evolucionando a medida que nos alejamos del perfil hasta recuperar su valor exterior. Esto precisamente es el concepto espesor de capa límite, definido como el punto en el que el perfil de velocidades se hace igual a la velocidad exterior, aunque como la velocidad como se puede intuir en la gráfica, tiende al nivel exterior de modo asintótico, por lo que esta simple definición no es válida. Es necesario definir el espesor de la capa límite cuando la velocidad alcance un determinado porcentaje de la del flujo exterior, por ejemplo, un 95%.

Como era de prever, el espesor de la capa límite es muy grande, aumentando a lo largo del perfil. En el borde de ataque es en torno a un 25% de la cuerda, y en el borde de salida representa un elevado porcentaje de ésta, en torno al 75%.

También se puede visualizar perfectamente el efecto Coanda, por el cual una corriente de fluido es atraída por una superficie que se interpone en su trayectoria. Podemos verlo mejor en la siguiente imagen:

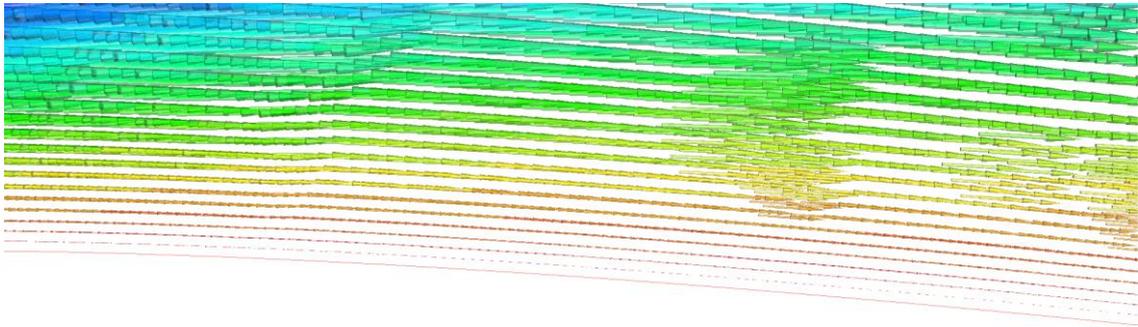


Figura 6. 3. Vectores velocidad cerca del perfil.

Vemos como los vectores velocidad siguen la curvatura del perfil, esto es por lo que los perfiles aerodinámicos tienen esa forma tan peculiar, si un perfil fuera circular, el flujo no seguiría con esta facilidad su curvatura. Detrás de esto, hay numerosos estudios para averiguar a partir de que curvatura el flujo deja de seguir el perfil o como afecta la velocidad o el ángulo de ataque a este efecto Coanda.

A continuación, vemos la distribución de presiones

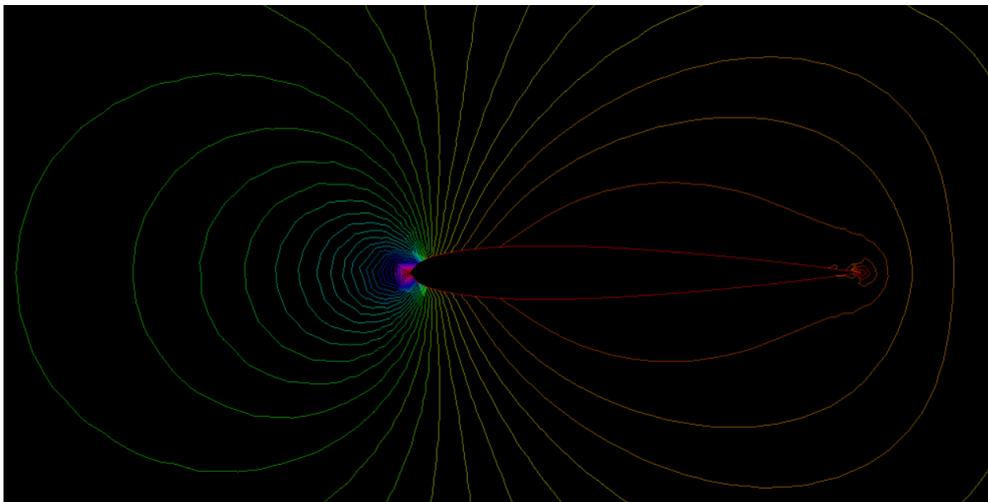


Figura 6. 4. Distribución de presiones para  $Re=50$ .

En la distribución de presiones también se aprecia la simetría del perfil, precisamente esta simetría del campo de presiones es lo que hará que no exista sustentación. El borde de salida también es un punto clave, debido a la unión del flujo que recorre el intradós y el extradós.

Comparamos estos resultados con los obtenidos con otros números de Reynolds:

- **Re=100**

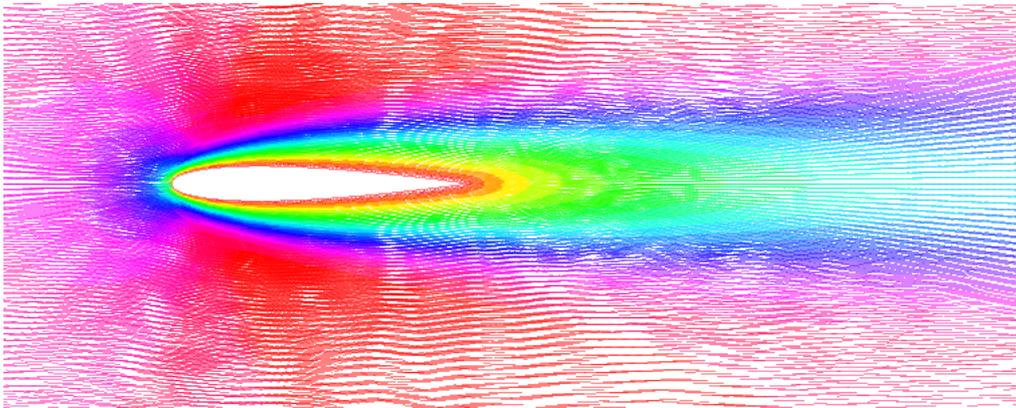


Figura 6. 5. Campo de velocidad para Re=100.

La diferencia más notoria es la reducción del espesor de la capa límite conforme aumentamos el Reynolds, es decir, conforme aumentamos la velocidad. Para ver si esto se corresponde con los resultados teóricos esperados vamos a deducir el espesor de la capa límite:

Partimos de la ecuación de cantidad de movimiento longitudinal:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

En un fluido que tenga densidad y viscosidad  $\rho$  y  $\mu$ , si la velocidad característica del movimiento del fluido respecto del sólido es  $U$  y el tamaño de este es  $L$ ; el espesor de la capa límite  $\delta$  se deduce de igualar el orden de magnitud de los términos viscoso y convectivo.

$$\rho \frac{U^2}{L} \approx \mu \frac{U}{\delta^2} \rightarrow \frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

Vemos que conforme aumenta el  $Re$ , el espesor de la capa límite se hace más pequeño. Por tanto, los resultados de la simulación cumplen con la teoría.

- **Re=200**

Distribución de velocidades:

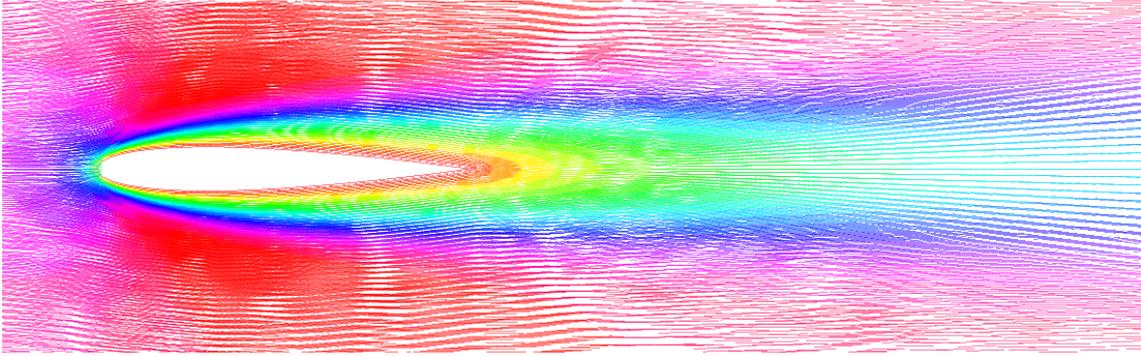


Figura 6. 6. Campo de velocidad para  $Re=200$ .

Ahora sí que se aprecia una disminución evidente del espesor de la capa límite, respecto a la simulación a  $Re=50$ .

Podemos llevar al modelo hasta el límite, es decir, hasta el  $Re$  a partir del cual la solución no sea estable. Eso ocurre si los aumentamos por encima de 400, a partir de ahí el programa no llega al criterio de parada establecido. Podemos ver para este valor de Reynolds la distribución de velocidades:

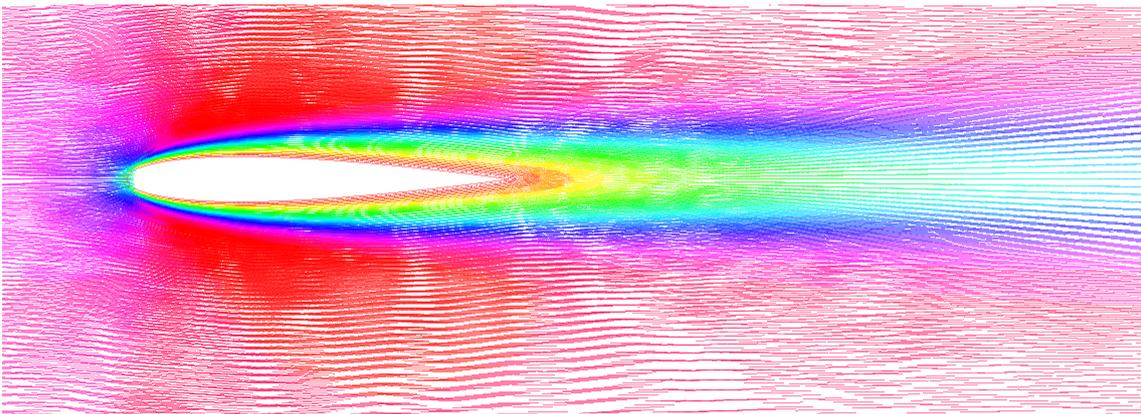


Figura 6. 7. Campo de velocidad para  $Re=400$ .

La reducción del espesor de la capa límite es más que evidente al compararlo con  $Re=50$ .

Por último, presentamos la fuerza de resistencia que hemos obtenido con el esquema de integración. La hemos adimensionalizado con el área en planta, que por ser un perfil 2D coincide con la longitud de la cuerda:

Re	D (N)	Cd
15	0,247	5,49
20	0,267	3,34
25	0,282	2,26
30	0,295	1,64
50	0,333	0,67
100	0,398	0,20
150	0,446	0,10
200	0,486	0,06
250	0,521	0,04

Tabla 6. 1. Coeficiente de resistencia en función del Re.

Lo más conveniente, sería comparar el coeficiente de resistencia con los resultados teóricos para este perfil NACA. Sin embargo, para Reynolds tan bajos, no se proporcionan resultados de resistencia en perfiles, pues no tienen aplicación en ingeniería para estos números de Reynolds tan bajos. Para saber si nuestro código está calculando de forma correcta, comprobaremos si el coeficiente de resistencia se va haciendo independiente del Re conforme aumentamos éste, que es justo lo que se desprende de la tabla anterior.

Nuestro código llega al límite para este valor de  $Re=250$ , si se pudiera seguir aumentando veríamos como el coeficiente de resistencia se hace independiente del Re a partir de un cierto valor de éste, que depende del perfil estudiado.

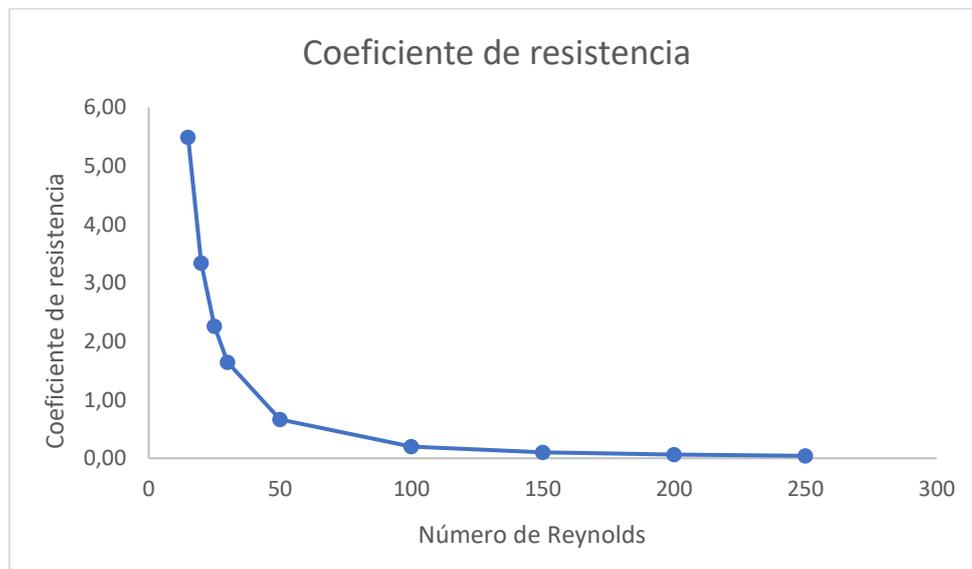


Figura 6. 8. Coeficiente de resistencia en función del número de Reynolds.

Podemos ver la fuerte dependencia que comentábamos antes para Re muy bajos, a partir de ahí se hace más independiente y si siguiéramos aumentando el número de Re el coeficiente de resistencia sería próximo a 0.

Otro resultado que esperamos es la mayor contribución a la resistencia del término de fricción respecto del término de presión, debido a que se trata de un perfil aerodinámico y el esfuerzo cortante es paralelo a la superficie.

Lo comprobamos:

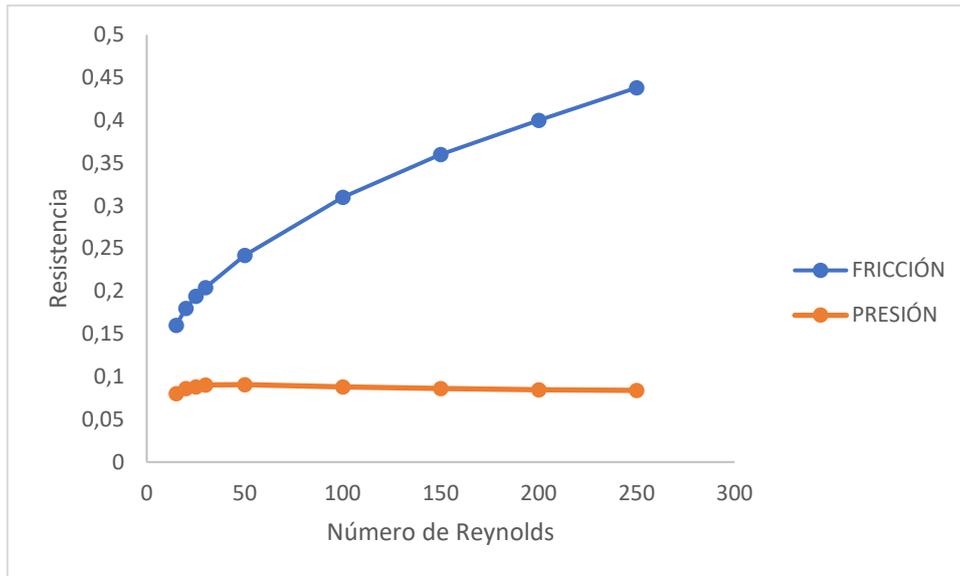


Figura 6. 9. Contribución a la presión de cada término.

Efectivamente observamos como la resistencia de fricción es dominante, como era de esperar en un perfil aerodinámico.

## 6.2 Simulación de un perfil sustentador a través del software ANSYS

Una vez se ha configurado Ansys tal y como hemos visto en el apartado anterior, estamos a disposición de obtener los resultados.

Las conclusiones más importantes en un perfil aerodinámico son como ya estudiamos la resistencia y la sustentación generada. Por ello, el primer resultado que obtendremos será la fuerza de resistencia y sustentación en función del ángulo de ataque. Lo haremos para diferentes números de Reynolds.

Emplearemos para obtener dicho resultado el modelo de turbulencia  $k-\varepsilon$ , pues es el modelo que más comúnmente se emplea. Sin embargo, más adelante observaremos si existen diferencias significativas con otros modelos de turbulencia.

Debemos señalar que Ansys nos proporciona directamente la fuerza de sustentación y de resistencia (lift y drag). Sin embargo, Ansys nos indica que la fuerza de resistencia es una fuerza en el eje x y la fuerza de sustentación en el eje y, y como sabemos cuando el ángulo de ataque no es nulo, estas fuerzas no coinciden con la fuerza de resistencia y sustentación, por lo que tendremos que proyectar los resultados que nos proporciona Ansys de la siguiente manera:

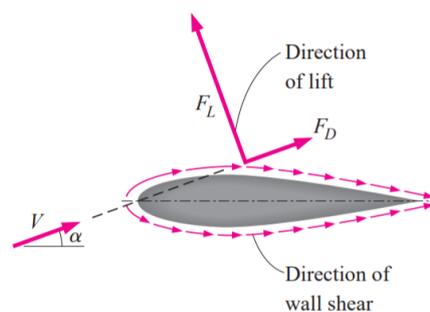


Figura 6. 10. Lift y drag con ángulo de ataque no nulo.

De esta figura se deduce fácilmente las siguientes relaciones:

$$F_L = F_y \cdot \cos \alpha - F_x \cdot \text{sen } \alpha$$

$$F_D = F_x \cdot \cos \alpha + F_y \cdot \text{sen } \alpha$$

donde  $F_x$  y  $F_y$  son los valores proporcionados por Ansys y  $\alpha$  el ángulo de ataque.

A continuación, mostramos las fuerzas obtenidas en la simulación:

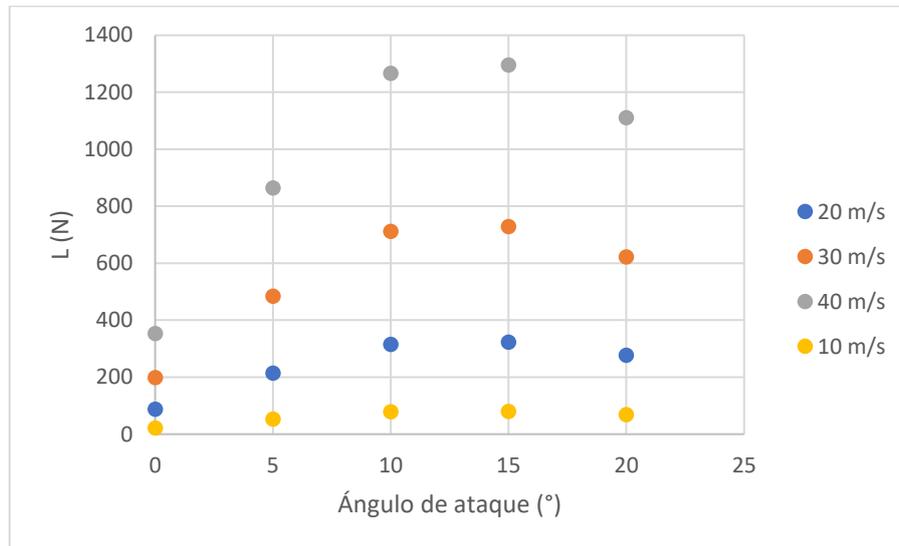


Figura 6. 11. Fuerza de sustentación en función del ángulo de ataque para diferentes Re.

Como era de esperar, la sustentación aumenta al aumentarla velocidad. Observamos también como el perfil entra en pérdida en torno a 15-16 grados. Podemos ver como dicha entrada en pérdida apenas varía con la velocidad, es decir, con el número de Reynolds.

La entrada en pérdida depende de la forma en la que se desarrolla la separación del flujo en función del ángulo de ataque. Dicha separación se produce en el extradós y genera inestabilidades y vibraciones, produciéndose esta fuerte caída de la sustentación.

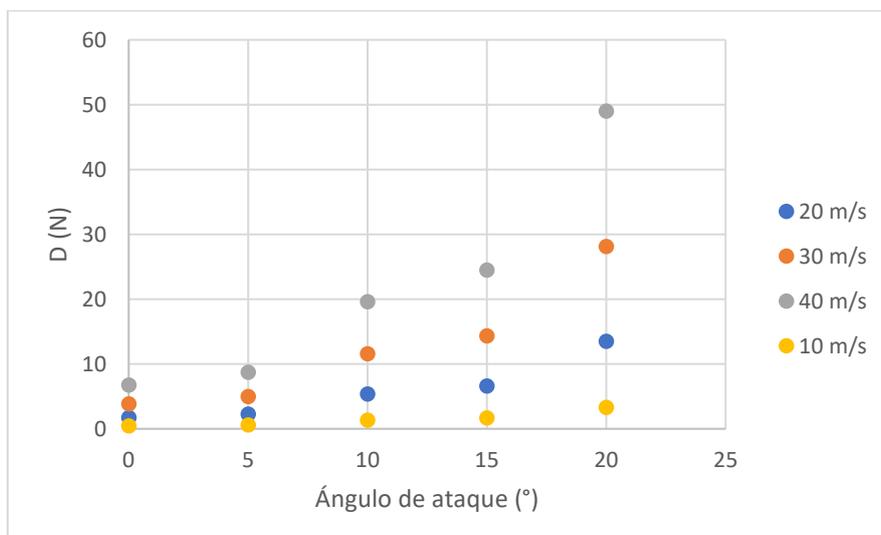


Figura 6. 12. Fuerza de resistencia en función del ángulo de ataque para diferentes Re.

Podemos observar como para ángulos de ataque bajos, la resistencia se mantiene estable, hasta que el perfil entra en pérdida. A partir de ahí, la resistencia aumenta muy rápidamente.

La manera usual de presentar los resultados es de forma adimensional, para así ser válidos para cualquier tamaño de un perfil concreto y propiedades del fluido y del flujo. Adimensionalizaremos las fuerzas igual que hicimos en la simulación anterior, con el área en planta:

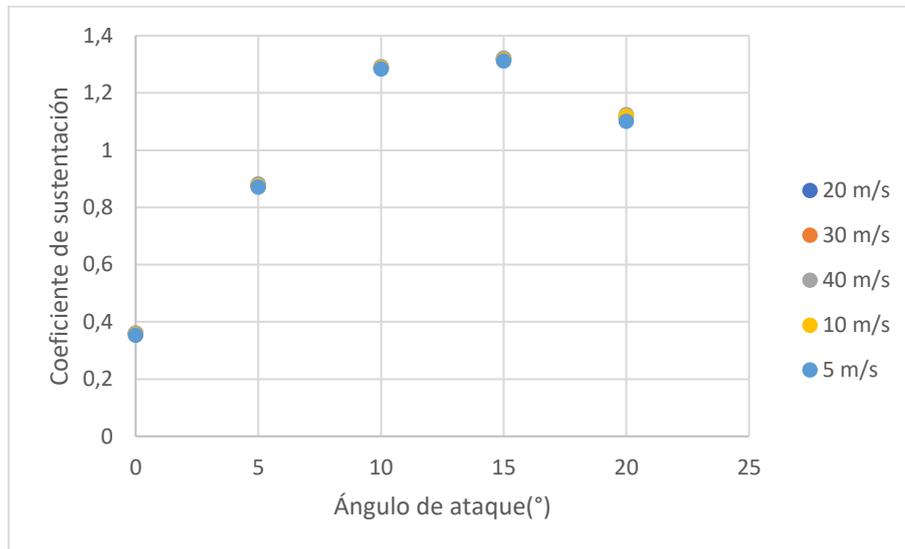


Figura 6. 13. Coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque para distintas velocidades.

Se observa como las curvas para diferentes Reynolds son muy similares hasta el ángulo en el que el perfil entra en pérdida. En este punto se presenta una diferencia mayor del coeficiente de sustentación.

Presentamos también el coeficiente de resistencia en función del ángulo de ataque, realmente esta curva no se suele presentar, sino que el coeficiente de resistencia se suele representar a través de la curva polar que veremos posteriormente:

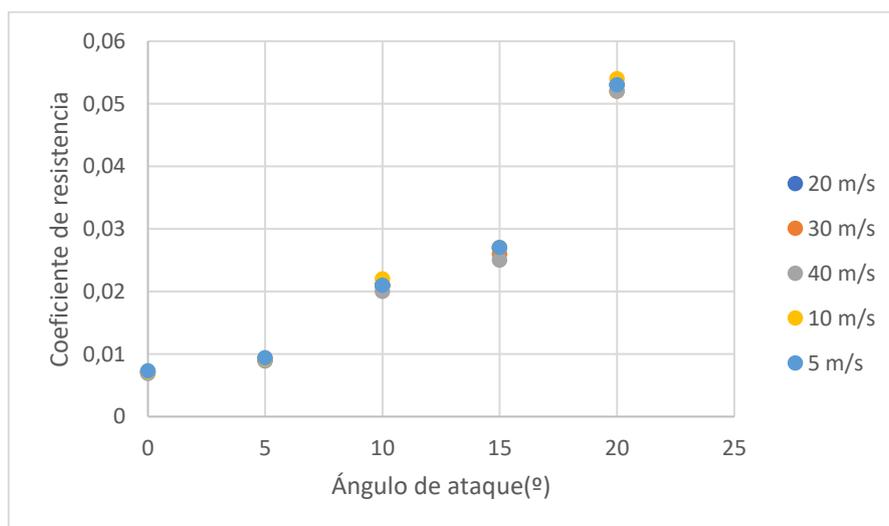


Figura 6. 14. Coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque para distintos Re.

Podemos observar como los resultados son más dispares que en el coeficiente de sustentación. Esta disparidad se acentúa para altos valores del coeficiente de ataque. También se observa como el coeficiente de resistencia crece rápidamente a partir de la entrada en pérdida del perfil, como consecuencia del aumento que ya comentamos en la fuerza de resistencia.

Representamos también la curva polar que expresa el coeficiente de resistencia en función del coeficiente de sustentación:

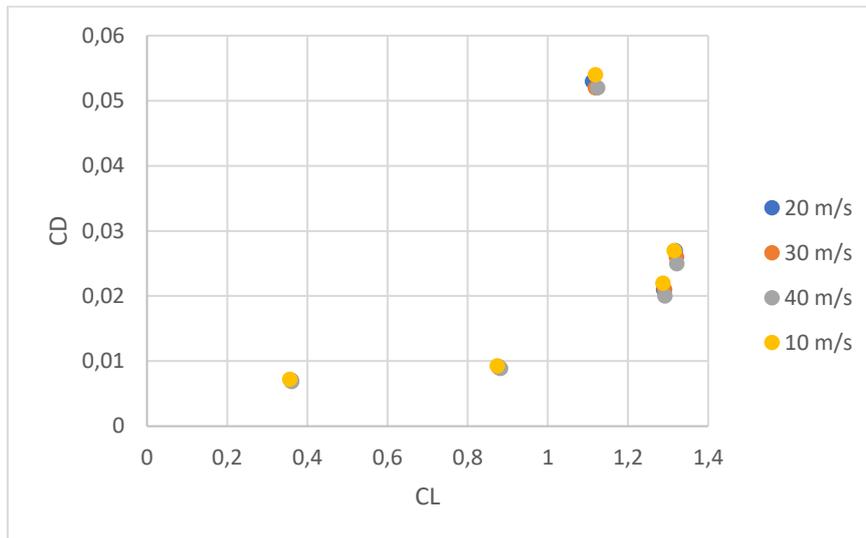


Figura 6. 15. Curva polar para diferentes Re.

Esta curva es realmente una consecuencia de la anterior, podemos observar de nuevo como la mayor diferencia de los resultados ocurre con la entrada en pérdida del perfil, cuando disminuye el coeficiente de sustentación y un fuerte aumento del coeficiente de resistencia.

Aunque hayamos visto como los resultados tienen un gran sentido físico, para poder decir que son resultados de calidad, deben ajustarse a los resultados teóricos del perfil estudiado, obtenidos del ABBOTT & DOENHOFF (1959). En este libro se presentan los coeficientes adimensionales para diferentes números de Reynolds. Para la comparación emplearemos los resultados para un Reynolds de  $3 \cdot 10^6$ , que en nuestro perfil se corresponde con una velocidad de 43,822 m/s:

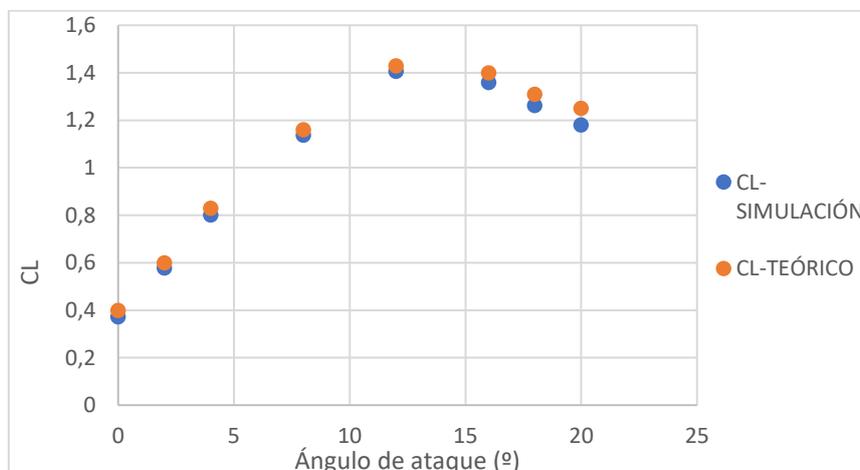


Figura 6. 16. Comparación CL con resultados teóricos.

Se observa como la curva obtenida mediante la simulación se encuentra siempre ligeramente por debajo de la curva teórica. Sin embargo, la tendencia de ambas curvas es la misma, así como el ángulo de ataque a partir del cual se entra en pérdida. Las diferencias más significativas ocurren cuando el perfil se encuentra en pérdida, esto es debido a que cuando ocurre la entrada en pérdida se producen vibraciones que pueden distorsionar los resultados.

Comparamos también con la curva polar teórica, para comparar el coeficiente de resistencia:

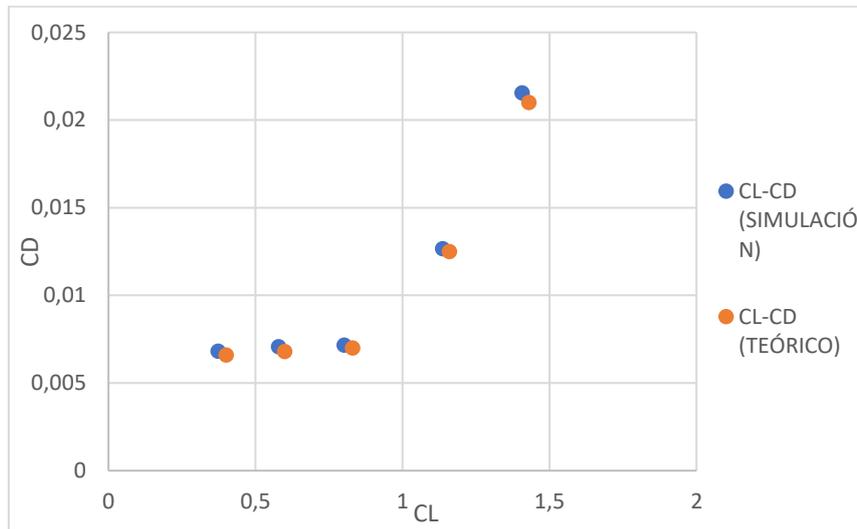


Figura 6. 17. Comparación curva polar con resultados teóricos.

Tras la comparación con los resultados teóricos, podemos concluir que la simulación realizada cumple con el objetivo propuesto de obtener unos resultados coherentes y similares a los teóricos, pues la variación con éstos es apenas del 1-2%. También se esperaba que la mayor diferencia en los resultados fuera cuando el perfil entrara en pérdida, tal y como se ha comprobado.

Con el objetivo de introducirnos en la programación, que nos permite controlar mejor los resultados que se han obtenido, hemos exportado los ficheros de presión y esfuerzo cortante en el perfil, para mediante programación en Matlab, obtener nosotros mismos los coeficientes de resistencia y sustentación. En el Anexo B se muestra y explica el código que ha sido necesario. Realmente, Ansys y otros softwares comerciales tienen tras de sí códigos como el que se muestra. En algunas situaciones, es más interesante utilizar nosotros mismos esta programación, pues en los softwares comerciales no se especifica la forma en que nos da los resultados. Por ejemplo, Ansys llama Lift a la fuerza en el eje y, siendo ambas fuerzas diferentes si el ángulo de ataque no es nulo.

Con Matlab, podemos obtener algunos resultados intermedios de interés, que nos ayudarán a saber si el código está funcionando correctamente. Podemos representar la distribución de presiones:

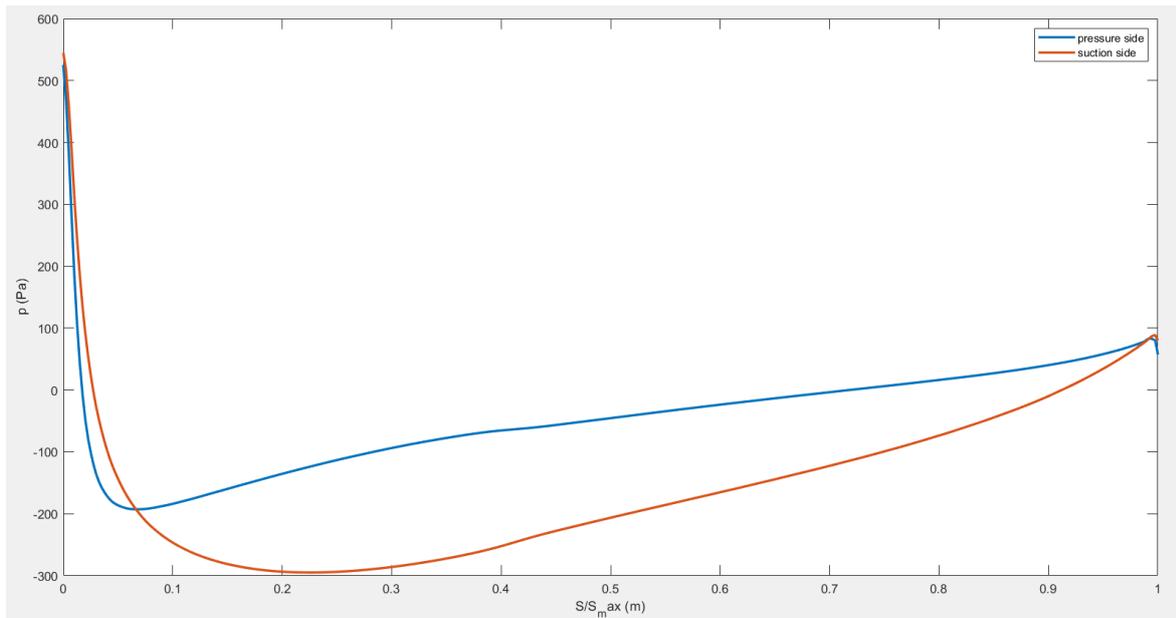


Figura 6. 18. Presión en cada de succión y de presión.

Observamos como en el borde de ataque la presión es muy elevada debida al choque del flujo con el perfil, posteriormente la distribución de presiones se desarrolla como esperábamos, existiendo una evidente diferencia entre la cara de presión y la de succión.

También podemos representar el ángulo  $\theta$  y así comprobar que se está calculando de forma correcta:

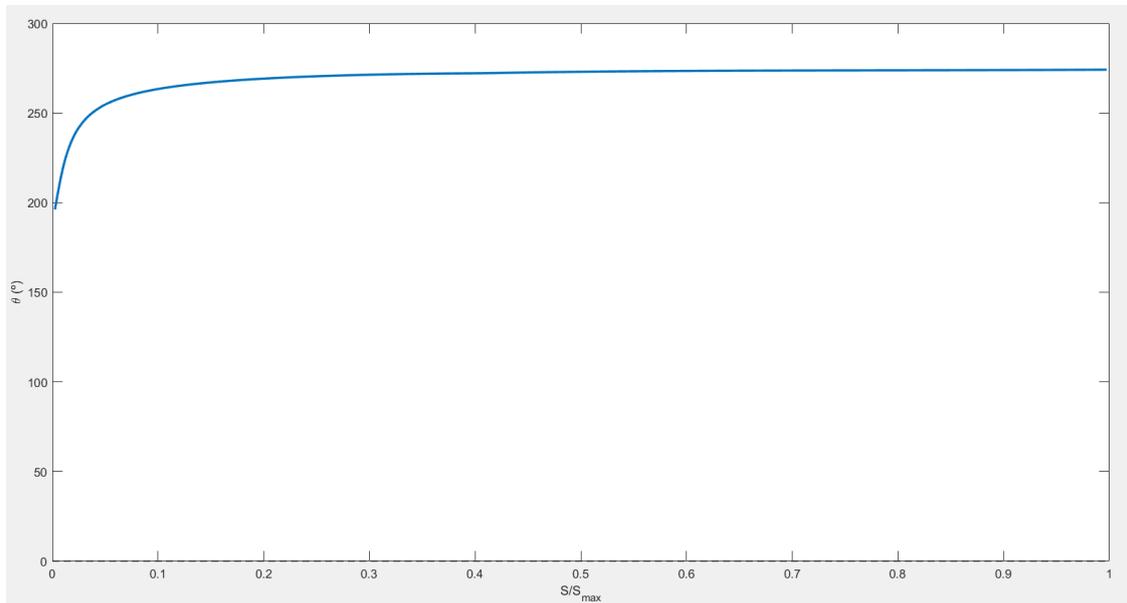


Figura 6. 19. Ángulo  $\theta$  en la cara de presión.

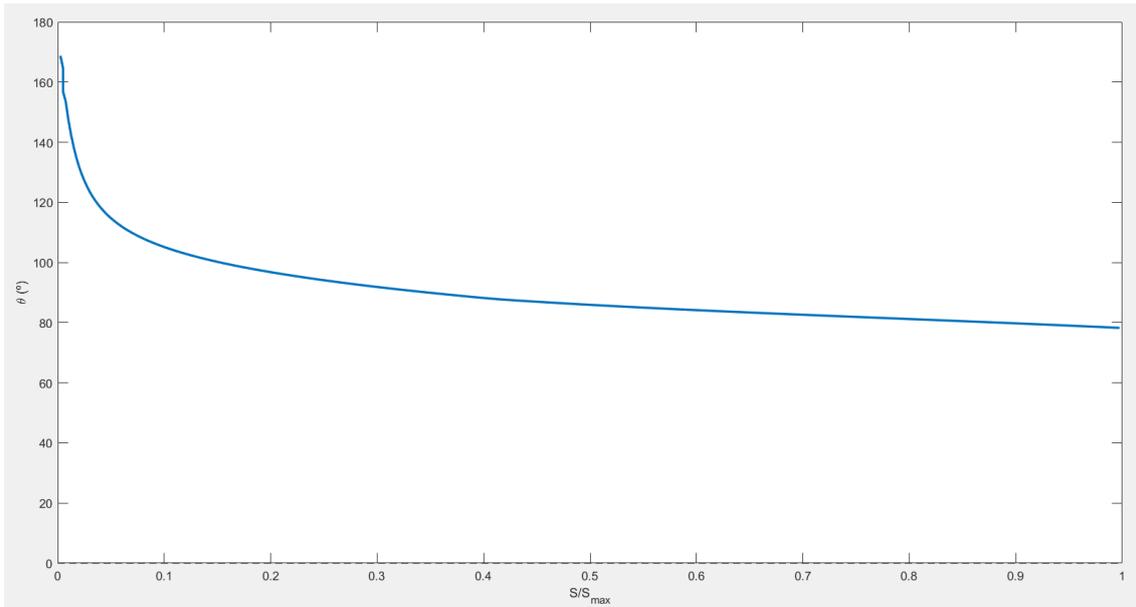


Figura 6. 20. Ángulo  $\theta$  en la cara de succión.

Los resultados finales obtenidos con Matlab se han realizado para un Reynolds de  $3 \cdot 10^6$  y se muestran en la siguiente tabla:

AOA (°)	CL	CD
0	0,369	0,00682
5	0,918	0,00851
10	1,295	0,0182
15	1,383	0,0246
20	1,178	0,053

Tabla 6. 2. Resultados proporcionados por Matlab.

Se han obtenido para menos puntos, pues solo nos interesa comprobar que la curva es la misma o muy similar.

Podemos comparar con los resultados obtenidos en la simulación de Ansys:

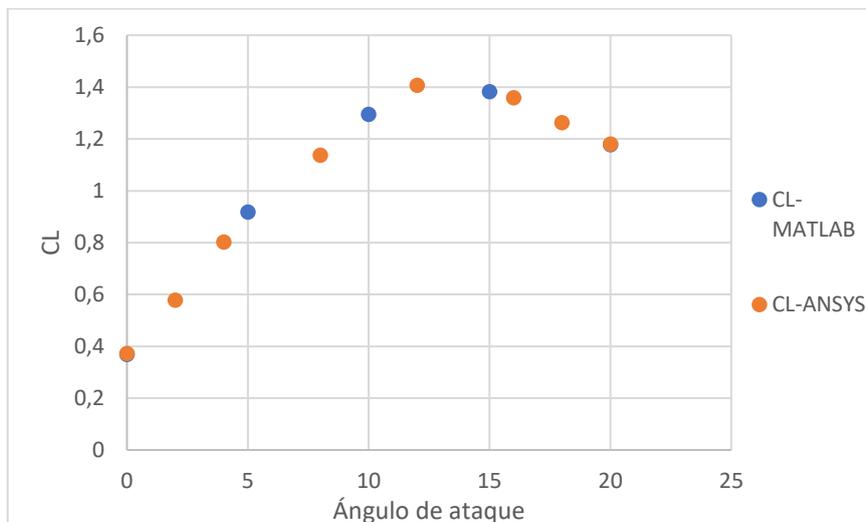


Figura 6. 21. Comparación CL Ansys y Matlab.

Vemos como ambas curvas coinciden, por lo que se puede concluir que el código que hemos programado coincide, o al menos es muy similar, al código existente detrás de Ansys para calcular los resultados.

Comparamos también la curva polar:

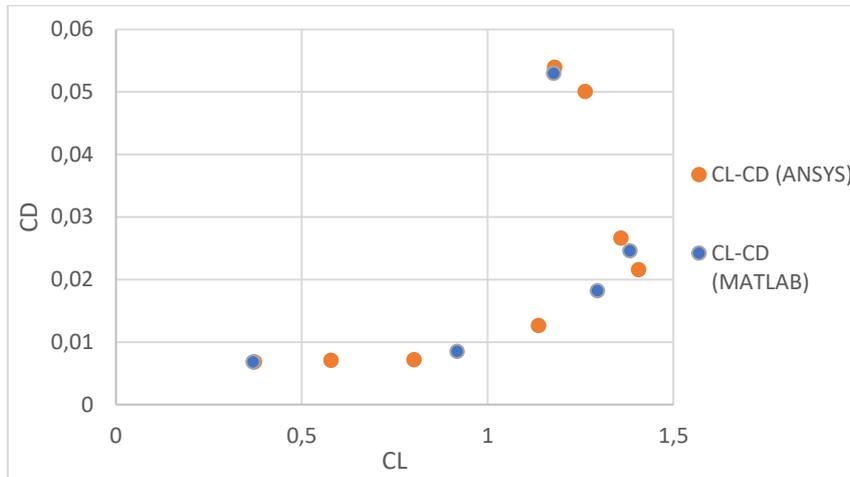


Figura 6. 22. Comparación curva polar Ansys y Matlab.

Otro de los objetivos del proyecto, consiste en estudiar los modelos de turbulencia encargados de cerrar el sistema de ecuaciones RANS. Realizaremos una simulación para  $Re=3 \cdot 10^6$  con los modelos de turbulencia estudiados en la teoría, para poder concluir si existen o no diferencias significativas en los resultados entre los modelos de turbulencia para nuestro caso de estudio.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

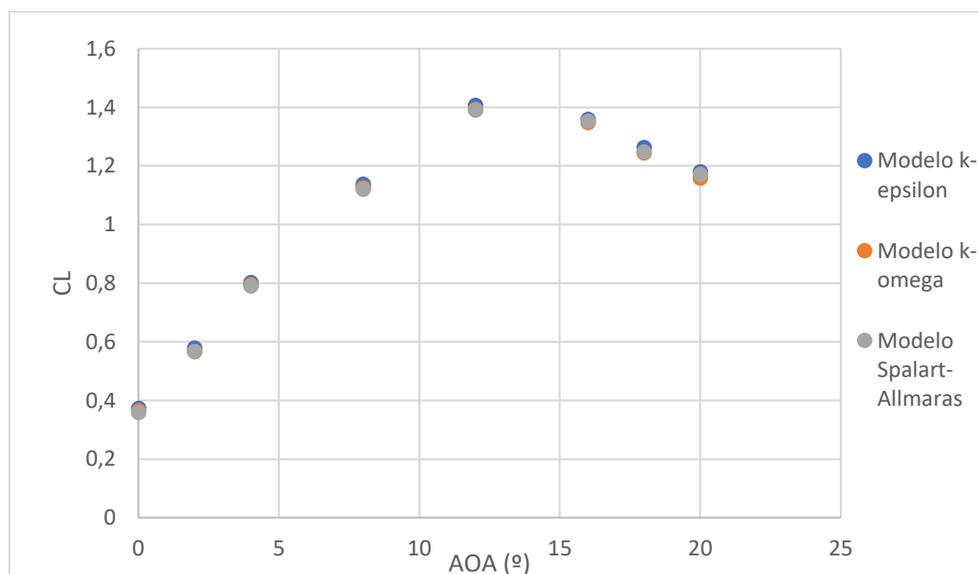


Figura 6. 23. Comparación CL para los 3 modelos de turbulencia estudiados.

A partir de este gráfico, se puede concluir que en el cálculo del coeficiente de sustentación no existen diferencias significativas entre los diferentes modelos de turbulencia estudiados pues los resultados varían como máximo en un 1-2 %.

Representamos también la curva polar para ver las diferencias que presentan los coeficientes de resistencia:

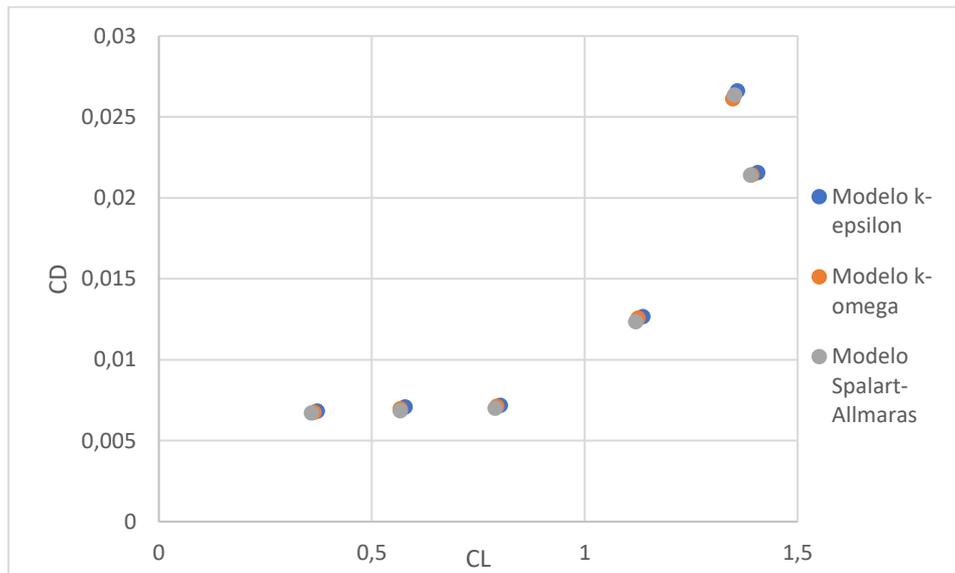


Figura 6. 24. Comparación curva polar entre los 3 modelos de turbulencia estudiados.

De nuevo, las curvas prácticamente se superponen a excepción de elevados ángulos de ataque, en los que el perfil entra en pérdida y las diferencias son mayores. Sin embargo, estas diferencias son como máximo del 1,8 %.

En conclusión, para el problema estudiado, se puede decir que los diferentes modelos de turbulencia estudiados llegan a una misma solución común, sin existir diferencias significativas en los resultados.

A continuación, representamos los gráficos más importantes obtenidos con Ansys. En primer lugar, veremos la evolución de la distribución de velocidad y la distribución de presiones en función de la velocidad de entrada:

- 5 m/s

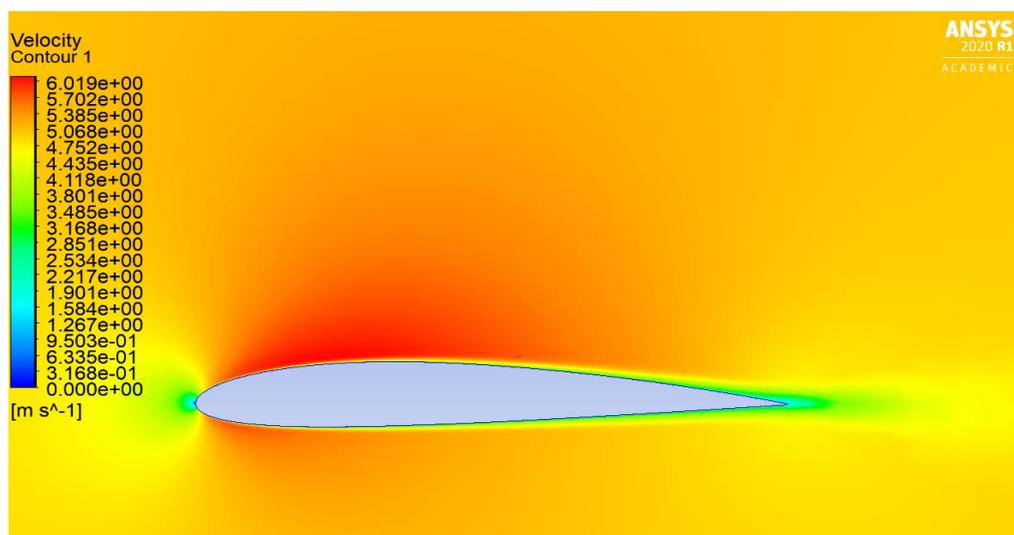


Figura 6. 25. Distribución de velocidad en el perfil para 5 m/s.

- 20 m/s

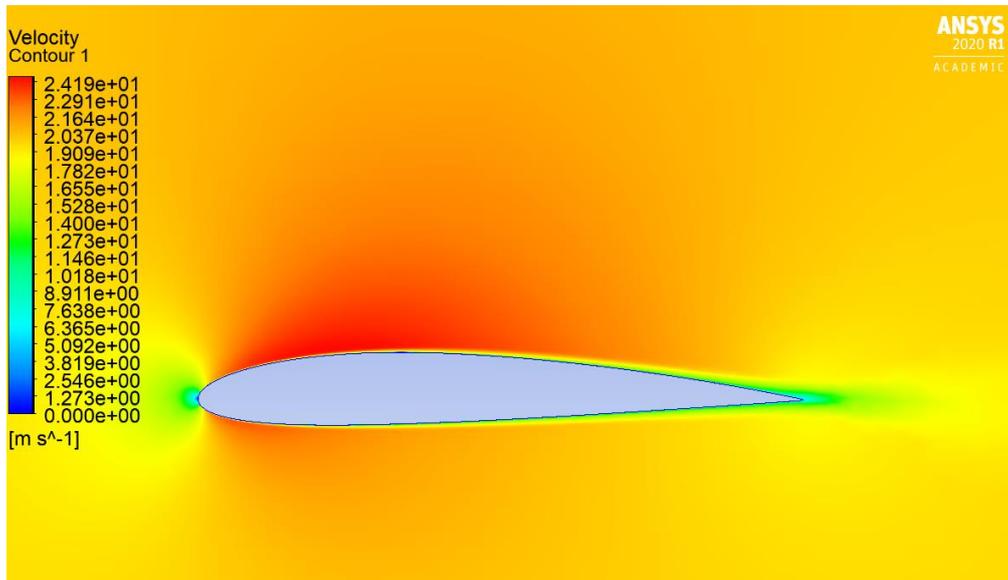


Figura 6. 26. Distribución de velocidad en el perfil para 20 m/s.

- 50 m/s

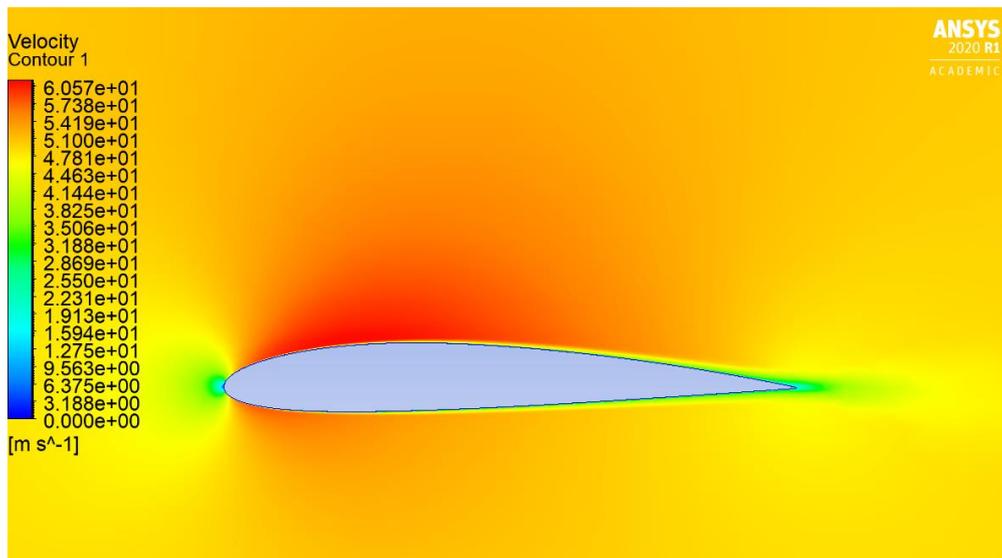


Figura 6. 27. Distribución de velocidad en el perfil para 50 m/s.

Las conclusiones que se pueden obtener a partir de estas distribuciones de velocidad y presión son:

1. Asimetría en el campo de velocidades, que explica la capacidad de generar sustentación que tiene el perfil.
2. Disminución del espesor de la capa límite con el aumento de la velocidad. Resultado que era de esperar tal y como demostramos en la teoría.
3. Si nos fijamos en la barra de unidades, observamos como al aumentar la velocidad, aumenta también la diferencia de velocidad entre el extradós y el intradós, lo que

explica que se produzca un aumento de la sustentación al aumentar el número de Reynolds.

Para los perfiles destinados a generar sustentación, la contribución que tienen los efectos viscosos a la sustentación suele ser insignificante puesto que el esfuerzo cortante en la pared es paralelo a la superficie de los perfiles y, por tanto, casi normal a la dirección de elevación. Por lo tanto, la sustentación se debe completamente a la distribución de presiones.

Por tanto, otro resultado importante se trata de la distribución de presiones, la cual representamos para las mismas velocidades que antes:

- 5 m/s

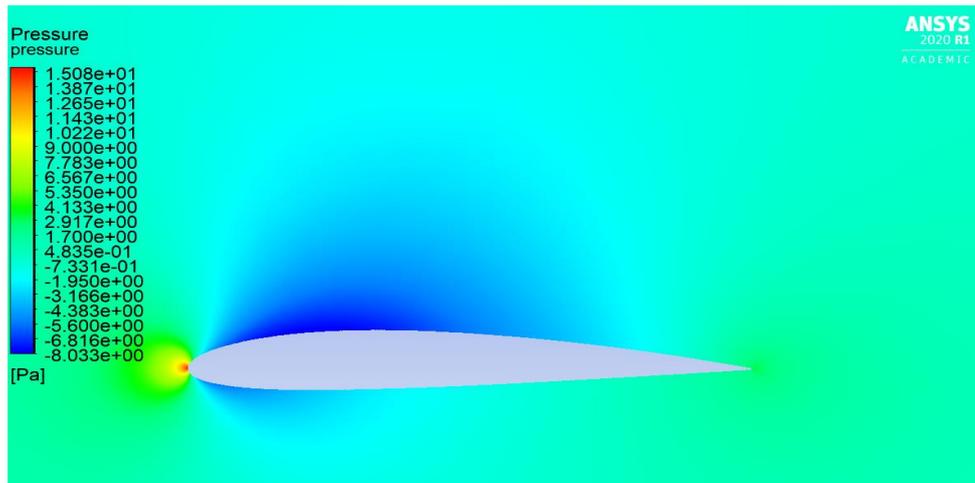


Figura 6. 28. Distribución de presiones para una velocidad de 5 m/s.

- 20 m/s

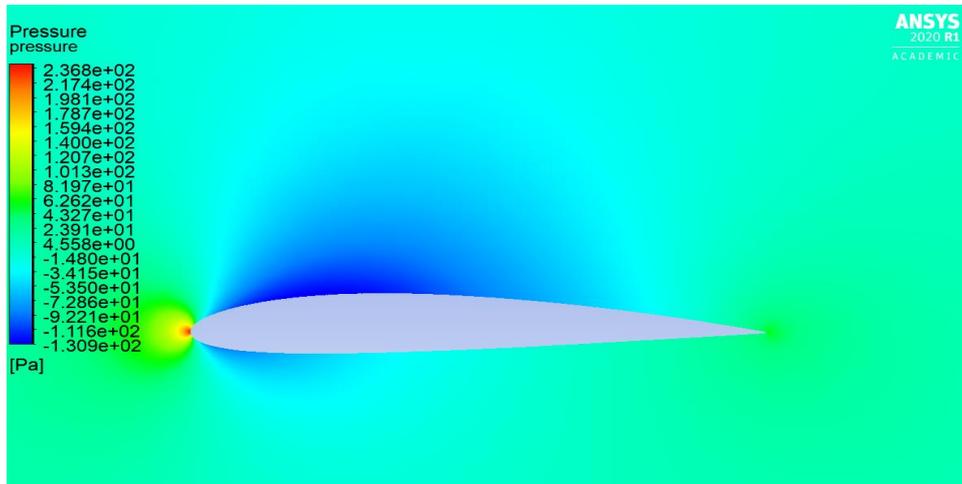


Figura 6. 29. Distribución de presiones para una velocidad de 20 m/s.

- 50 m/s

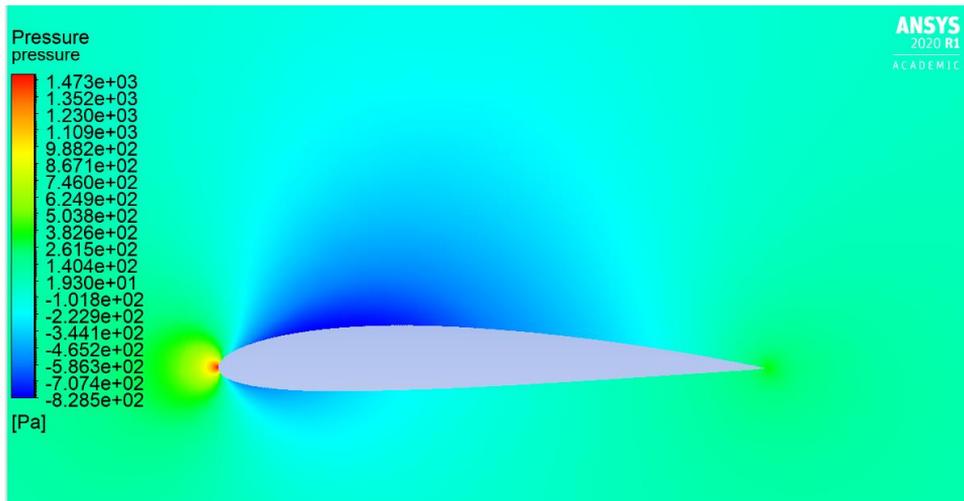


Figura 6. 30. Distribución de presiones para una velocidad de 50 m/s.

Conclusiones:

1. Asimetría del campo de presiones, produciéndose una evidente supresión en el extradós. Esta asimetría explica la sustentación generada.
2. Aumento de la diferencia de presión entre intradós y extradós al aumentar la velocidad. Esto genera un aumento en la sustentación y la resistencia, pues como vimos, ambas fuerzas se calculaban integrando la presión.

Representaremos también la distribución de presiones y de velocidad variando el ángulo de ataque para una velocidad fija.

- Ángulo de ataque de 5°

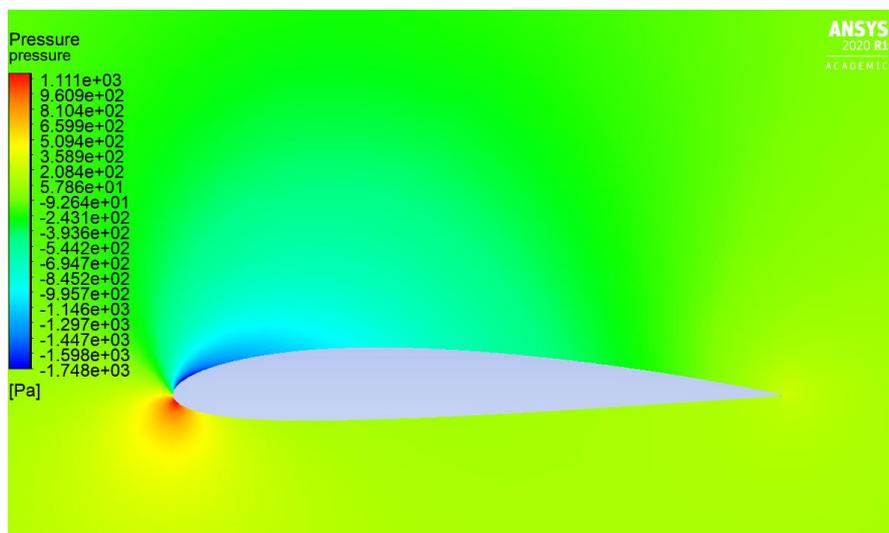


Figura 6. 31. Distribución de presiones con ángulo de ataque de 5 grados.

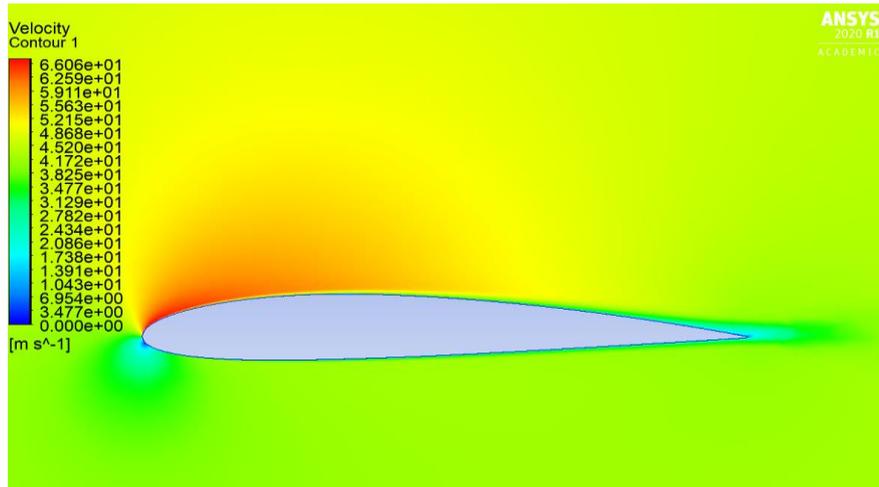


Figura 6. 32. Distribución de velocidad con ángulo de ataque de 5 grados.

- Ángulo de ataque de 10°

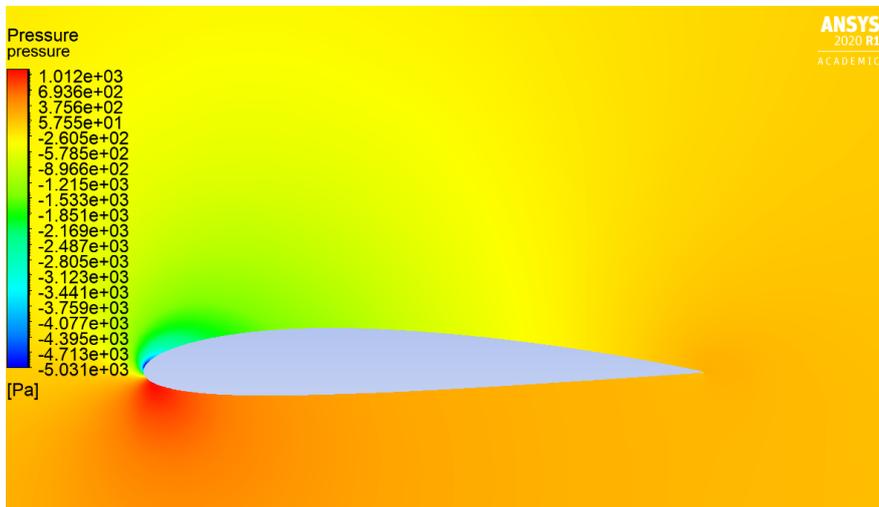


Figura 6. 33. Distribución de presiones con ángulo de ataque de 10 grados.

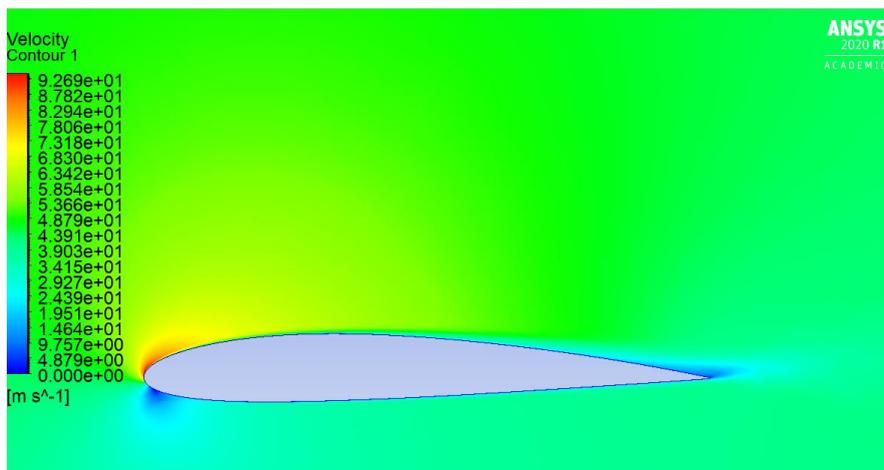


Figura 6. 34. Distribución de velocidad con ángulo de ataque de 10 grados.

- Ángulo de ataque de 14°

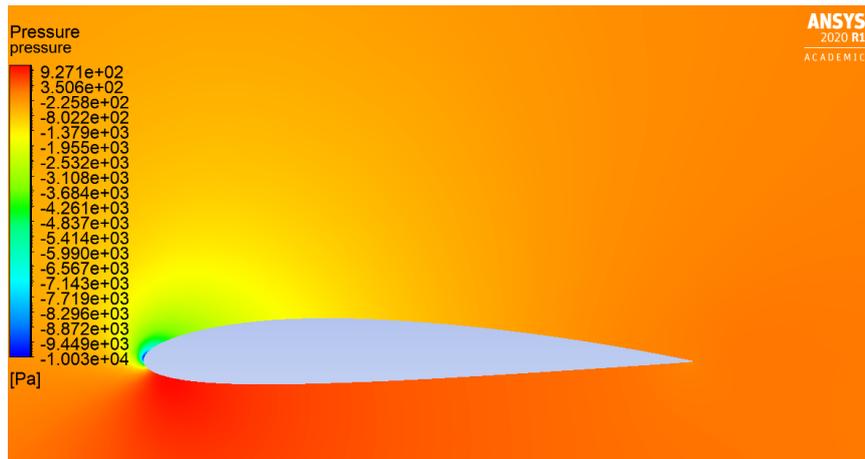


Figura 6. 35. Distribución de presiones con ángulo de ataque de 14 grados.

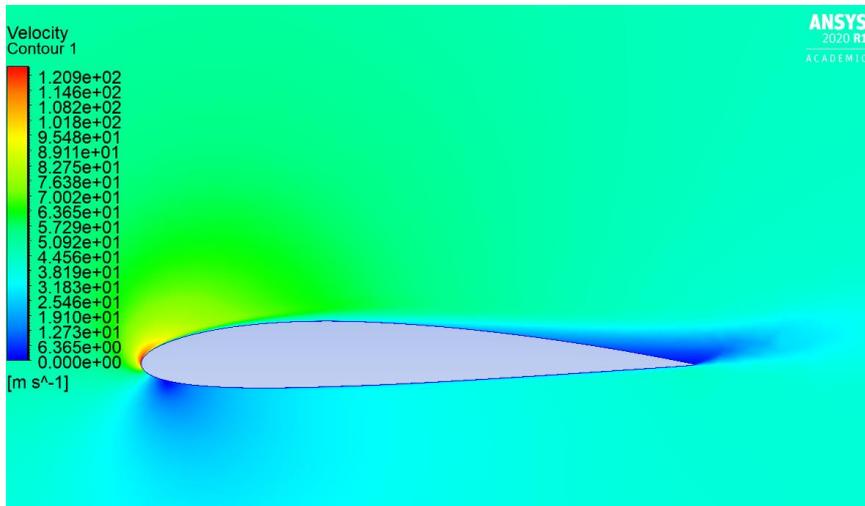


Figura 6. 36. Distribución de velocidad con ángulo de ataque de 14 grados.

- Ángulo de ataque de 20°

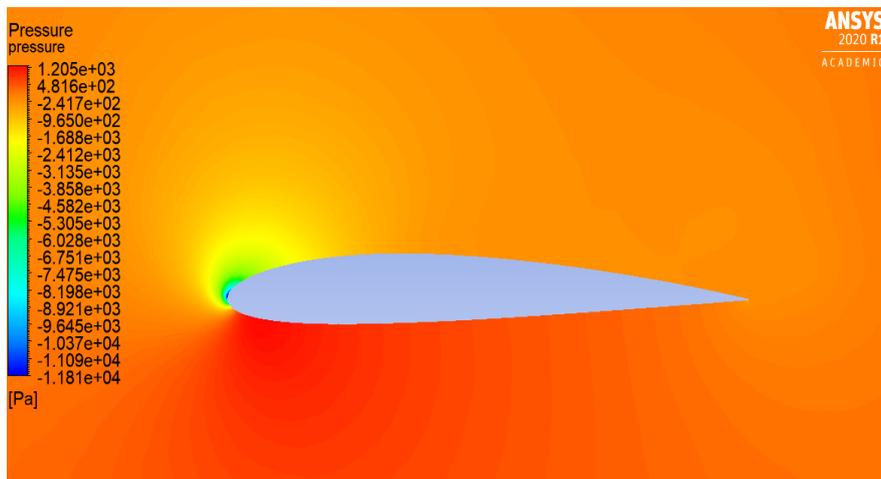


Figura 6. 37. Distribución de presiones con ángulo de ataque de 20 grados.

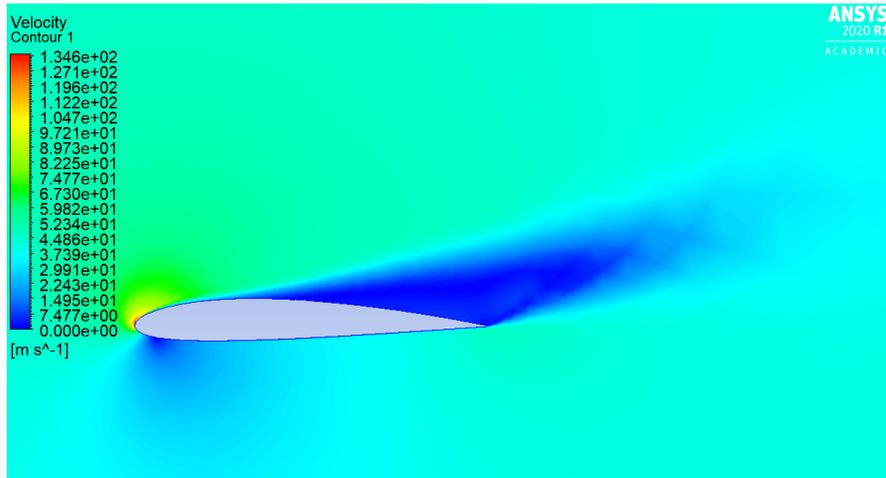


Figura 6. 38. Distribución de velocidad con ángulo de ataque de 20 grados.

Observamos que conforme aumenta el ángulo de ataque, el punto de estancamiento, que es donde se separan las líneas de corriente, se sitúa más abajo, lo que implica que la capa límite tiene que empezar su desarrollo en el intradós.

Para moderados ángulos de ataque la diferencia de presiones entre la cara de presión y la de succión aumenta con el ángulo de ataque, por lo que la sustentación aumentará. Sin embargo, a partir de un cierto ángulo, denominado ángulo de ataque crítico, el perfil entra en pérdida produciendo una disminución significativa de la sustentación. En nuestro caso de estudio, vemos que esta entrada en pérdida ocurrirá entre 14-16 grados.

Visualizando las distribuciones de velocidad, observamos como para bajos ángulos de ataque, la estela que se forma es estrecha pues la separación de la capa límite ocurre al final de perfil. En este caso, la mayor parte de la resistencia se debe a la resistencia de fricción producida por el esfuerzo cortante. A medida que aumentamos el ángulo de ataque, el flujo tiene más dificultades para seguir la curvatura del perfil y la separación de la capa límite se produce antes, generándose una región de muy baja presión en la cara de succión, aumentando la contribución de la resistencia de presión. Es común el uso de ranuras para retrasar la separación de la capa límite del ala, esto se hace permitiendo que el flujo se mueva desde la región de alta presión hacia la región de baja presión.

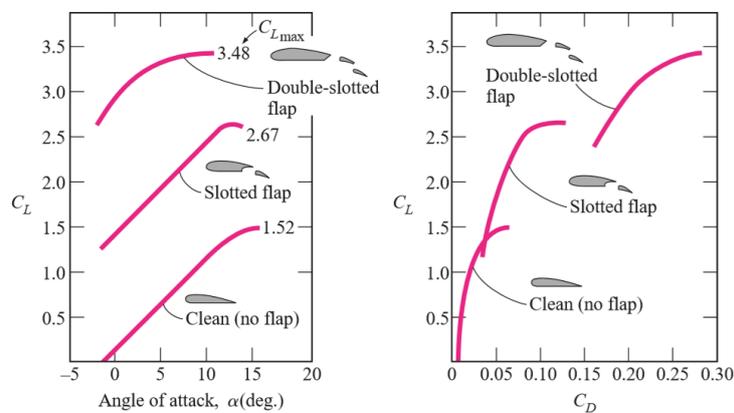


Figura 6. 39. Coeficiente de sustentación y resistencia en perfiles simples y multielemento.

Es interesante visualizar los vectores velocidad cuando el perfil está en pérdida:

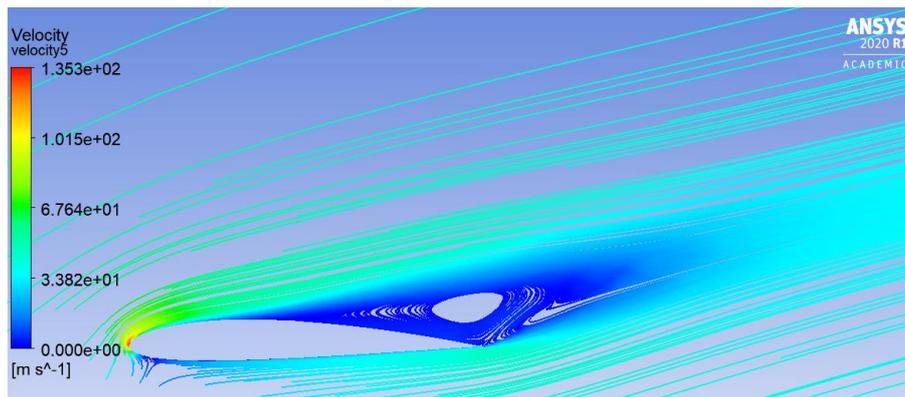


Figura 6. 40. Vectores velocidad de perfil en pérdida.

Podemos ver como la separación tan temprana del flujo genera grandes torbellinos y una recirculación evidente del flujo, que predice una resistencia muy elevada.

Justo antes de entrar en pérdida, la sustentación generada por el perfil es máxima, pero no su eficiencia aerodinámica, ésta, es una medida del rendimiento del perfil y conviene estudiarla en función del ángulo de ataque. Representamos la eficiencia aerodinámica en función del ángulo de ataque para un  $\text{Re}=3 \cdot 10^6$ :

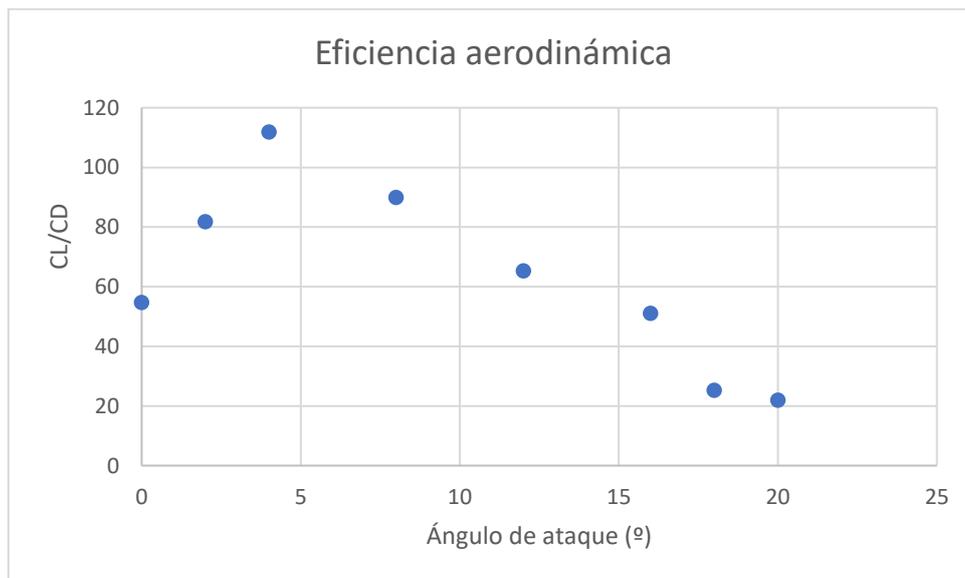


Figura 6. 41. Eficiencia aerodinámica en función del ángulo de ataque.

La máxima eficiencia se alcanza para un ángulo en torno a 4 grados, muy inferior al ángulo de ataque crítico para el cual el perfil entra en pérdida.

## 7. LA AERODINÁMICA EN LA FÓRMULA 1

### 7.1 BREVE HISTORIA DE LA AERODINÁMICA EN LA F1

La aerodinámica ha recorrido un largo camino en los últimos cuarenta años. El primer intento conocido de montar un alerón en un coche de carreras lo llevó a cabo un ingeniero suizo, Michael May, en un Porsche Spyder en el año 1956, sin embargo, los comisarios no permitieron su uso, por lo que nunca llegó a correr.

Durante la década de los 60, un ingeniero/piloto particularmente innovador recordó una vez más (según parece, todo el mundo se había olvidado del primer experimento de May) que las alas mantenían a los aviones mediante la creación de una fuerza de sustentación positiva, por lo menos tan grande como el peso del avión. Entonces, ¿por qué no podían los corredores fijar alerones invertidos a sus coches y crear una fuerza que los empujara contra el suelo más aún? Este ingeniero/piloto era Jim Hall quien apareció con alerones montados en su Chaparral 2E en 1966, y es Hall quien es conocido mundialmente por haber sido el primero en correr con un coche con alerones.

Era el comienzo de una revolución en lo referente a las prestaciones de los coches de carreras e inmediatamente después la Fórmula 1 adoptó la idea.



Figura 7. 1. Chaparral 2E.

El siguiente avance, que provocó, muy probablemente, el mayor salto en las prestaciones, tuvo lugar en los años 70, cuando otro ingeniero, Peter Wright que trabajaba en Lotus a las órdenes de Colin Chapman, impulsor de la aerodinámica en la F1, introdujo el concepto de efecto suelo en la Fórmula 1, con el Lotus 78. El gran paso que dio Wright fue darse cuenta del hecho de que era posible crear una gran cantidad de succión debajo del coche utilizando solamente la velocidad del monoplaza dándole una forma especial al fondo plano del mismo. En pocas palabras, toda la estructura central del coche se convirtió en un ala invertida que generaba baja presión en un área muy grande. Esto permitía unos niveles de apoyo aerodinámico no conocidos hasta ese momento, y por tanto, unas mayores velocidades de paso por curva y un menor tiempo por vuelta. Por otro lado, la introducción de placas verticales en los extremos de los alerones (endplates), provocó que se generasen vórtices aún más fuertes en la estela del vehículo.



Figura 7. 2. Lotus 78.

Pero las autoridades deportivas de repente prohibieron el efecto suelo en la Fórmula 1 y durante este periodo se utilizaron los motores más potentes, es la época conocida como *la era turbo* y la resistencia aerodinámica se volvió algo casi irrelevante cuando los motores superaban las cuatro cifras de potencia.

La Fórmula 1 volvió en 1989 a unos niveles de potencia más modestos. La cuestión de apoyo contra resistencia tuvo que ser reconsiderada. Se llegó a la conclusión de que con el suficiente espacio entre el coche y el suelo, y un morro delantero inclinado, se podía crear una forma de sección Venturi. Se comprobó que era vital que el aire que pasaba por debajo del coche saliera de la forma más eficaz posible por la parte trasera, y los difusores aparecieron para cumplir esa misión.

En la década de los 90 a raíz del fallecimiento de Roland Ratzenberger y Ayrton Senna se incrementaron las medidas de seguridad reduciendo así las velocidades en curva.

A finales de los años 90, se comenzaron a introducir pequeños perfiles aerodinámicos (*winglets*) en varias partes del monoplaça.

Con los años y las disminuciones de los motores de los monoplaças, la aerodinámica comenzó a cobrar más y más importancia, incorporándose novedades como la aleta de tiburón (*sharkfin*).

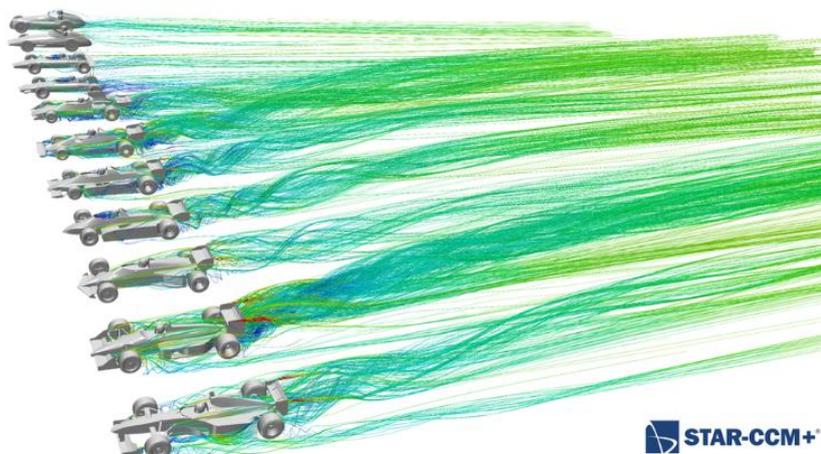


Figura 7. 3. Simulación en CFD de la estela de un F1 a lo largo del tiempo.

En Figura 1.3 podemos observar de forma clara como los primeros coches de fórmula 1 dejaban tras de sí una estela muy laminar y a lo largo de los años esta estela se hace turbulenta, alcanzando su mayor  $Re$  en la temporada 2008 conocida como el barroco de la aerodinámica, cuando los coches se encontraban repletos de apéndices aerodinámicos.

## 7.2 ELEMENTOS AERODINÁMICOS DE UN FÓRMULA 1

Veremos las funciones principales que tiene cada elemento y posteriormente estudiaremos los resultados proporcionados por simulaciones en Ansys, con el objetivo de interpretarlos físicamente y entender el flujo alrededor de cuerpos tridimensionales.

### 7.2.1 Alerón delantero

Su objetivo principal es el de direccionar el flujo de aire alrededor del coche canalizándolo e intentando que éste sea lo más limpio posible. Además, proporciona aproximadamente el 30% de la carga aerodinámica total del coche. La fuerza vertical la genera dividiendo el flujo de aire por un lado a una zona de altas presiones sobre el coche y, por otro lado, una corriente de aire que recorre el fondo plano a bajas presiones.

El conflicto principal a la hora de diseñarlo es buscar una solución de compromiso entre la generación de *downforce* y el desvío de aire a otras partes del coche.

Por norma general, se trata de evitar que el aire se dirija hacia las ruedas, lo que generaría un flujo muy turbulento.

La parte externa del alerón desvía el flujo hacia fuera del monoplace y la parte interna lo hace hacia los pontones. La parte central, se encarga de generar carga aerodinámica. En resumen, el alerón delantero se encarga de ir abriendo con inteligencia el muro de aire.

En Figura 7.4 se puede observar de forma clara las dos partes que acabamos de definir, en color rojo la parte interna con una disposición de los *flaps* que consigue dirigir el flujo de aire hacia el interior del coche (pontones), mientras que en negro observamos la parte externa del alerón con una disposición de los flaps completamente distinta, la cual dirige el flujo hacia el exterior.



Figura 7. 4. Alerón delantero escudería Ferrari.

Podemos visualizar una simulación en Ansys de un alerón delantero:

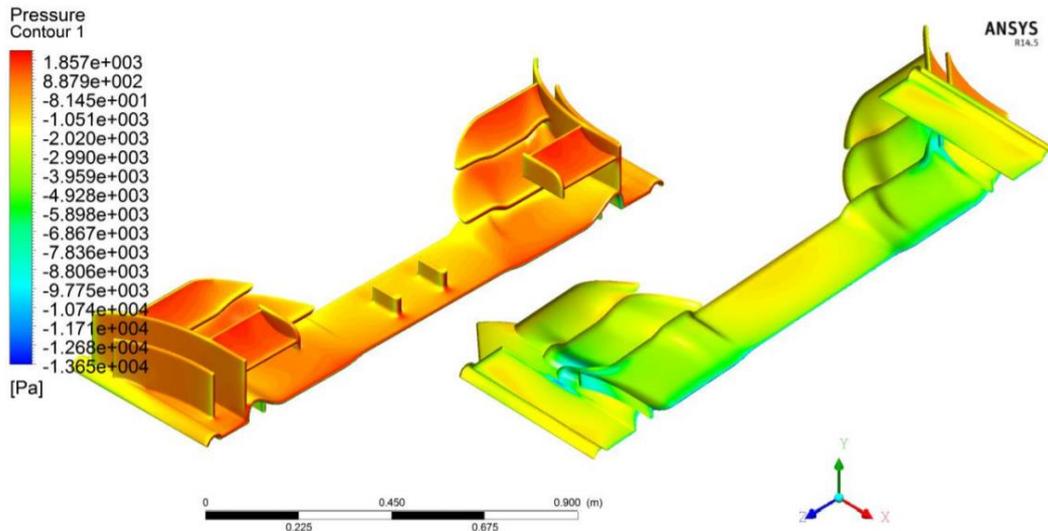


Figura 7. 5. Simulación en Ansys del alerón delantero de un F1.

Podemos ver como se cumple lo que ya vimos en el perfil 2D, una evidente diferencia de presión entre la cara de presión y la de succión, en este caso la cara de presión en la superior pues el objetivo es crear una sustentación negativa.

Podemos visualizar el desprendimiento en la zona de cascadas:

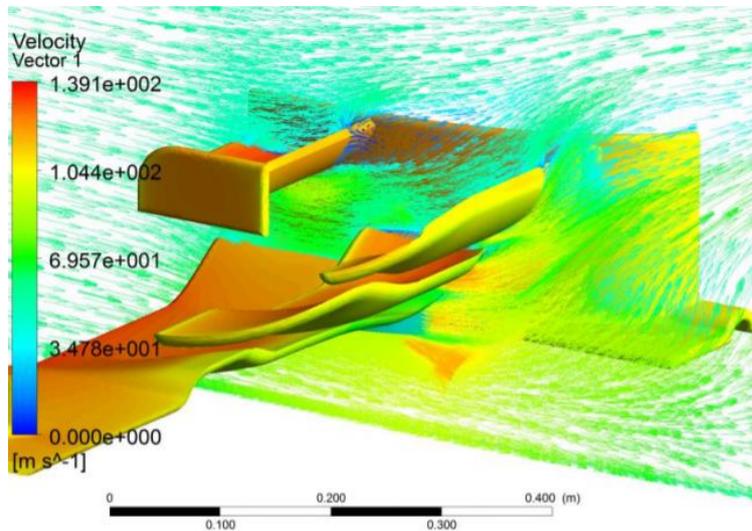


Figura 7. 6. Detalle desprendimiento del flujo.

El ligero desprendimiento es debido a la misma causa que vimos en perfiles 2D, el elevado ángulo de ataque que presentan los flaps. Este desprendimiento podría retrasarse utilizando unos perfiles multielemento. Estos elementos aumentan la resistencia, por lo que tendríamos que buscar una relación que optimice la eficiencia aerodinámica.

### 7.2.2 Pontones

Un pontón es una pieza que se encuentra en el lateral del coche y cuya principal finalidad es la de refrigerar el monoplaza, pues en el interior de éste se encuentran los radiadores encargados de refrigerar los distintos componentes del paquete motor y de la electrónica del vehículo. Es

de interés estudiarlo puesto que su diseño es muy importante para la eficiencia aerodinámica de un F1.

Aunque no generan carga aerodinámica por sí mismos, tienen una gran influencia en el funcionamiento del alerón trasero y del fondo plano. Son los responsables de guiar el aire desde justo detrás del eje delantero hasta el eje trasero.

Como podemos observar en la Figura 7.7, los pontones presentan una superficie curva muy suave con el objetivo de que el aire se mantenga adherido al monoplaza y pase con la menor turbulencia posible, reduciendo el drag de forma y enviando el flujo al alerón trasero, evitando así que se dirija a los neumáticos. Esto es lo que definíamos antes como efecto Coanda y por ello la forma del pontón presenta un gradiente tal que desvíe el aire de manera progresiva.



Figura 7. 7. Pontones W08.

Podemos ver claramente la función de los pontones observando una simulación de la distribución de velocidad en Ansys:

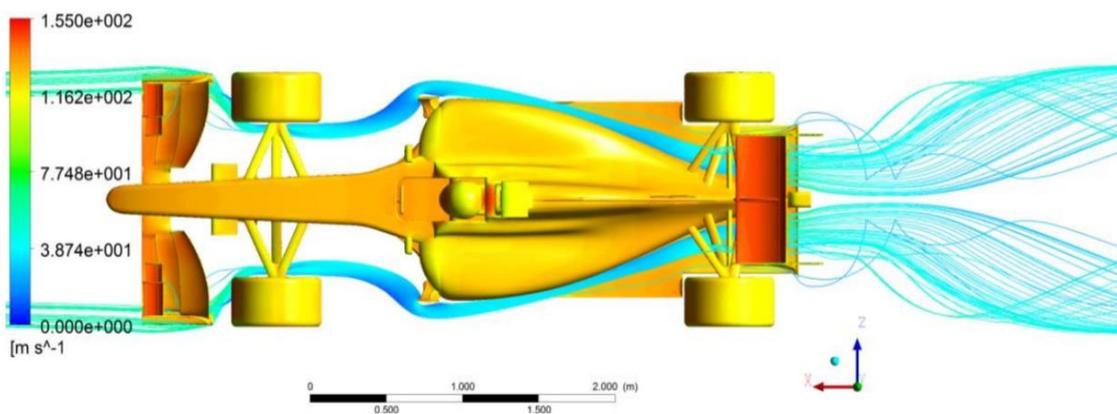


Figura 7. 8. Distribución de velocidad en pontones con simulación en Ansys.

### 7.2.3 Fondo plano

“Es la parte más baja del monoplaza, la parte más cercana al asfalto. El objetivo, en lo que respecta al fondo plano, es hacer que circule la menor cantidad de flujo de aire posible por debajo del vehículo, para que la carga aerodinámica del monoplaza aumente”. (BLANES, 2013)

Esto lo podemos conseguir aplicando diferentes métodos:

- Creación de vórtices por el alerón delantero en un sentido determinado, para extraer aire de debajo del monoplaza.



Figura 7. 9. Vórtice generado por alerón delantero.

Podemos ver en la Figura 7.9 un vórtice real cuyo sentido es tal que permite la extracción de aire del fondo plano.

- Apéndices situados en los pontones con el objetivo de alejar el flujo de aire de la parte baja del coche.
- Labios en extremos del fondo plano para enviar el flujo de aire hacia arriba.

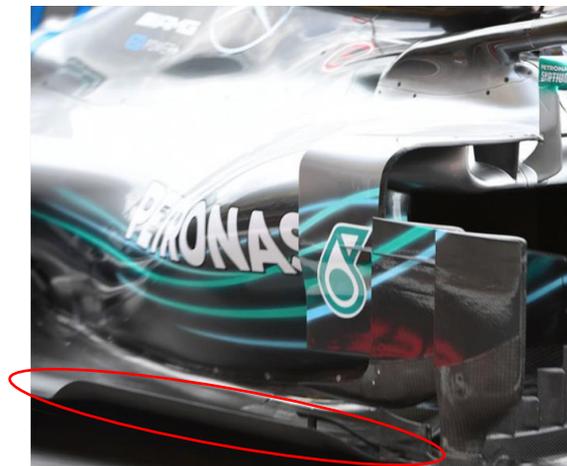


Figura 7. 10. Pontones, bargeboards y extremo del fondo plano.

Podemos observar como a través de una geometría compleja, lo que tratamos de hacer es enviar el flujo hacia el exterior y hacia arriba, es decir, buscamos que se aleje lo máximo posible de la parte inferior.

Un aspecto muy importante de su diseño es la inclinación. El fondo plano se diseña con un pequeño ángulo de inclinación ( $1^{\circ}$ - $2^{\circ}$ ) para optimizar la sustentación negativa o downforce.

### 3.2.4 Difusor

El difusor es la última parte del fondo plano del coche, se encuentra situado en el eje trasero. Lo estudiamos de forma independiente al fondo plano debido a la importancia que tiene en la aerodinámica, suponiendo en torno al 40% del total de carga aerodinámica que puede generar el coche, sin generar prácticamente drag, teniendo así una eficiencia muy elevada.

Las principales funciones del difusor son la extracción del flujo de aire que circula por el fondo plano y la adaptación de dicho flujo al aire exterior.

El difusor aumenta de volumen a lo largo de su longitud, creando un vacío que debe ser ocupado por el aire que está pasando por el fondo plano del coche. El flujo se acelera a través de la garganta del difusor, generando la baja presión deseada. La determinación del ángulo de inclinación es un factor de diseño sumamente importante, puesto que éste debe ser lo suficientemente pequeño para que el flujo quede adherido al difusor y lo suficientemente grande para generar downforce.

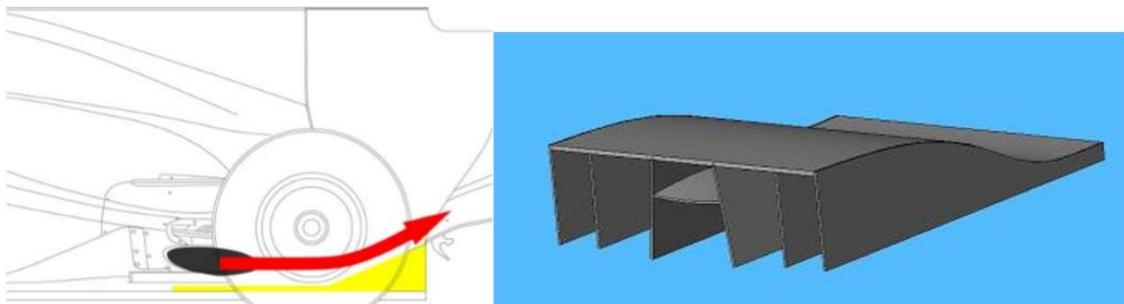


Figura 7. 11. Difusor convencional de un coche F1.

Es interesante visualizar una simulación del fondo plano y el difusor para ver los efectos que acabamos de comentar:

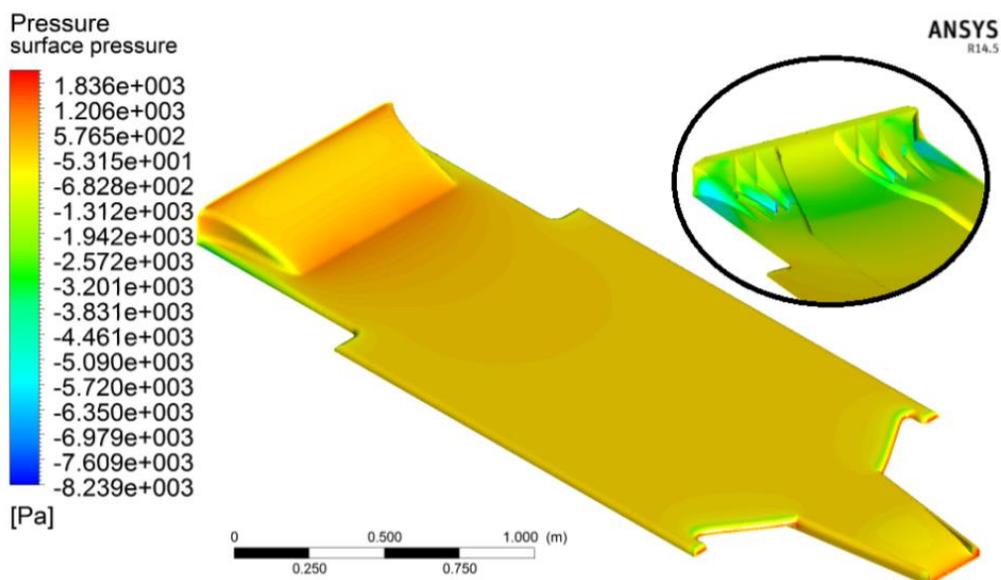


Figura 7. 12. Distribución de presiones en fondo plano y difusor.

Las áreas azules indican la presión más baja. Queda de manifiesto lo que hemos expuesto anteriormente, produciéndose la mínima presión en la garganta del difusor y generándose una gran carga aerodinámica en esta zona.

Para maximizar la generación de carga aerodinámica debemos tratar de desviar la mayor cantidad de aire posible por encima del difusor, esto lo conseguimos entre otras formas dirigiendo el flujo a través de los pontones. Si además conseguimos succionar más flujo de la parte inferior, tendremos una gran ventaja y en este contexto surgieron el doble difusor y el difusor soplado.

El doble difusor presenta unas cavidades con el objetivo de que se introduzca por ellas una parte del flujo de aire circulante por el fondo plano, este flujo alimentaría a un segundo difusor más pequeño en la parte superior del difusor convencional. De esta forma al tener un mayor volumen aumenta la succión del aire de la parte inferior del automóvil y con ello, la carga aerodinámica.

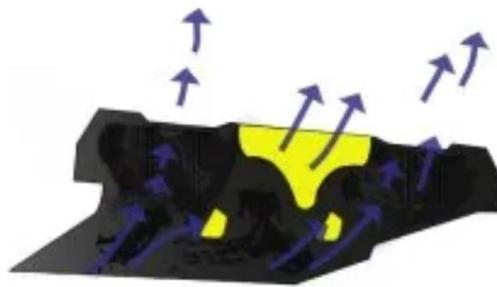


Figura 7. 13. Doble difusor.

El difusor soplado utiliza los gases de escape para generar carga aerodinámica. Adrian Newey, ingeniero de Red Bull, diseñó los conductos de escape de tal forma que los gases se hicieran pasar por encima del difusor (Figura 7.13), así se crearía una mayor diferencia de presión respecto a la parte inferior, generando una mayor carga aerodinámica.

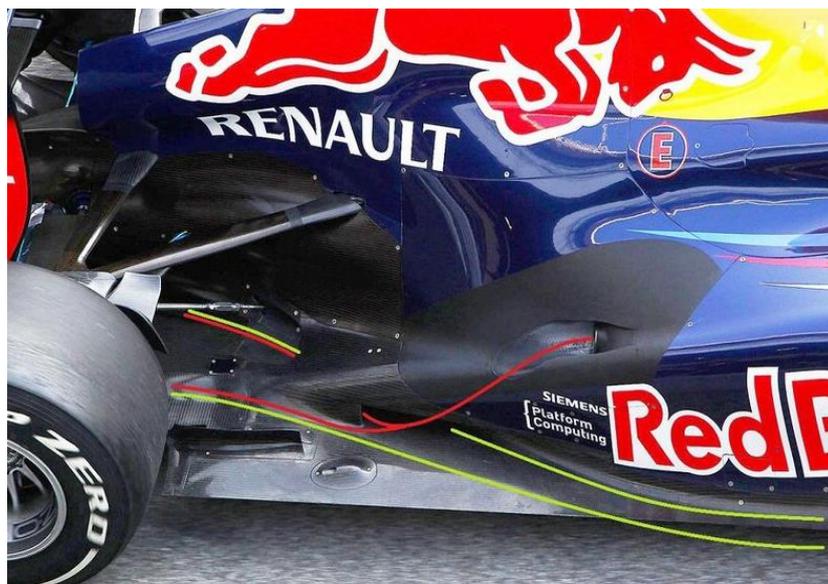


Figura 7. 14. Difusor soplado escudería Red Bull.

Además de las funciones ya comentadas, el difusor provoca una reducción en la eficiencia aerodinámica de un ala situada aguas abajo. Un estudio realizado en la Universidad de Southampton expone la pérdida de eficiencia en función del ángulo de la rampa del difusor y en función de la distancia al ala, lo mostramos a continuación:

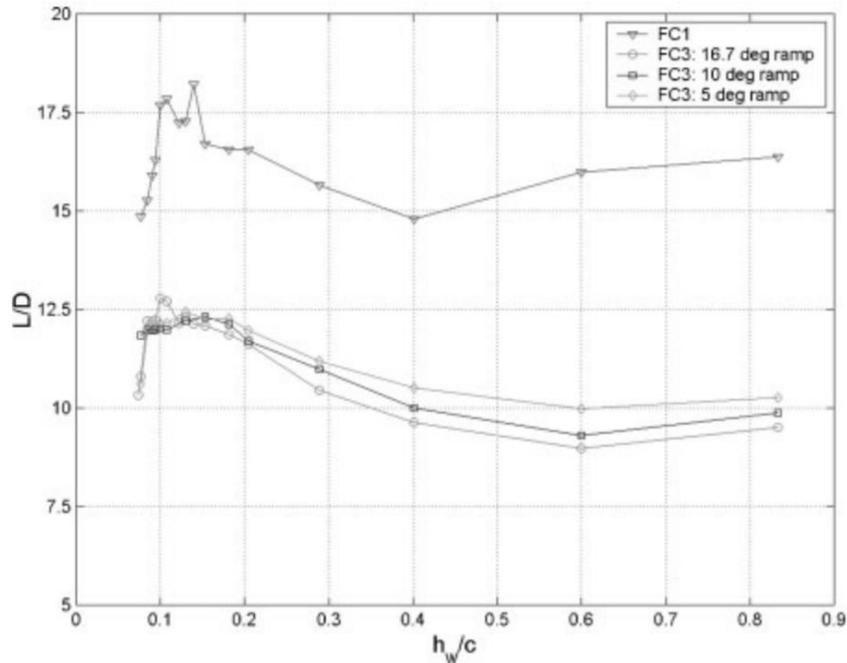


Figura 7. 15. Eficiencia de un ala situada aguas debajo de un difusor, en función del ángulo de rampa del difusor y de la distancia entre ambos cuerpos.

FC1 es el modelo de un ala sin difusor que le preceda. Es obvio la pérdida aerodinámica debida al difusor situado aguas arriba. A partir de una determinada distancia ( $\frac{h_w}{c} \approx 0.2$ ) un aumento del ángulo de rampa del difusor, generaría una disminución en la eficiencia aerodinámica del ala posterior.

### 3.2.5 Alerón trasero

Se trata de un elemento aerodinámico situado en la parte posterior del coche. Su principal función es la generación de carga aerodinámica en la parte trasera, lo que aumentará la tracción y la capacidad de frenado de las ruedas traseras. Representa aproximadamente el 25% del *lift* del automóvil, aunque también genera gran cantidad de resistencia aerodinámica por el área que ocupa.

Un parámetro muy importante es la relación de aspecto (AR), entendida como la relación entre la envergadura del ala y la longitud de cuerda. Un AR alto mejora la eficiencia del perfil como podemos observar en Figura 3.13. Es decir, para un mismo ángulo de ataque, presenta un mayor coeficiente de sustentación.

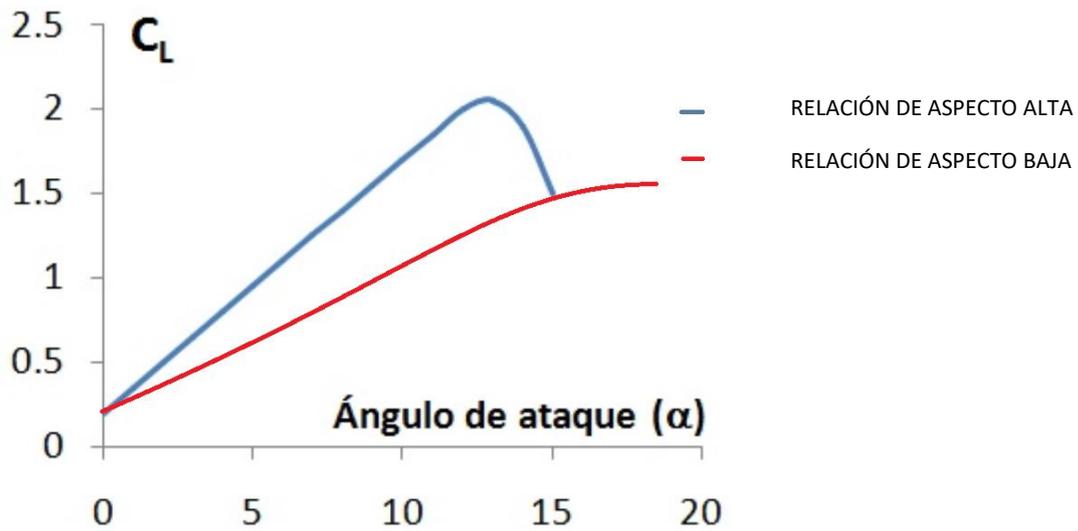


Figura 7. 4. Ángulo de ataque vs coeficiente de sustentación en función de AR.

Podemos hacer una clasificación de los alerones traseros en función del número de elementos: alerones simples y alerones multielemento.



Figura 7. 5. Alerón trasero Lotus 72E.

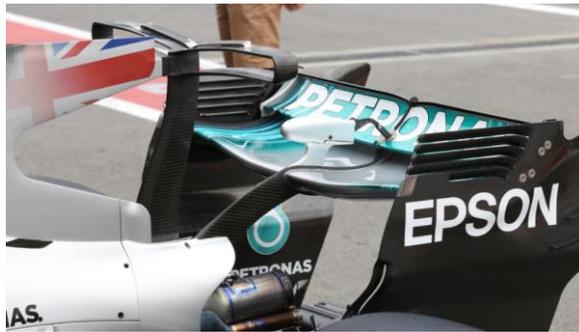


Figura 7. 6. Alerón trasero Mercedes W08.

Como ya vimos en el perfil 2D, en un ala invertida al aumentar el ángulo de ataque, se puede llegar a la separación del flujo que circula por la parte inferior del perfil. Sin embargo, se puede evitar o retrasar esta separación energizando esta parte inferior con el flujo de aire que circula por la parte superior. De esta forma podemos retrasar el desprendimiento de la capa límite, con las ventajas que ello conlleva.

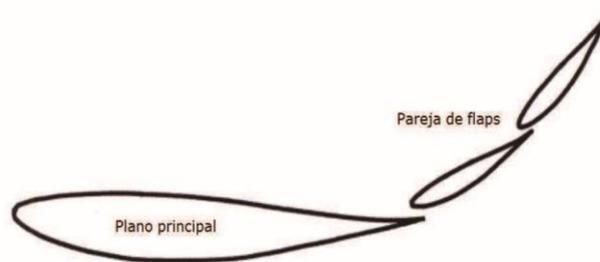


Figura 7. 16. Sección transversal alerón multielemento.

Unos componentes muy importantes del alerón trasero son los llamados *endplates*. Sin estas derivas laterales, el flujo de aire a alta presión de la parte superior trataría de fluir hacia la parte inferior del ala, generando turbulencias y una pérdida sustancial de carga aerodinámica.

Podemos ver la elevada sustentación que genera a través de la siguiente distribución de presiones:

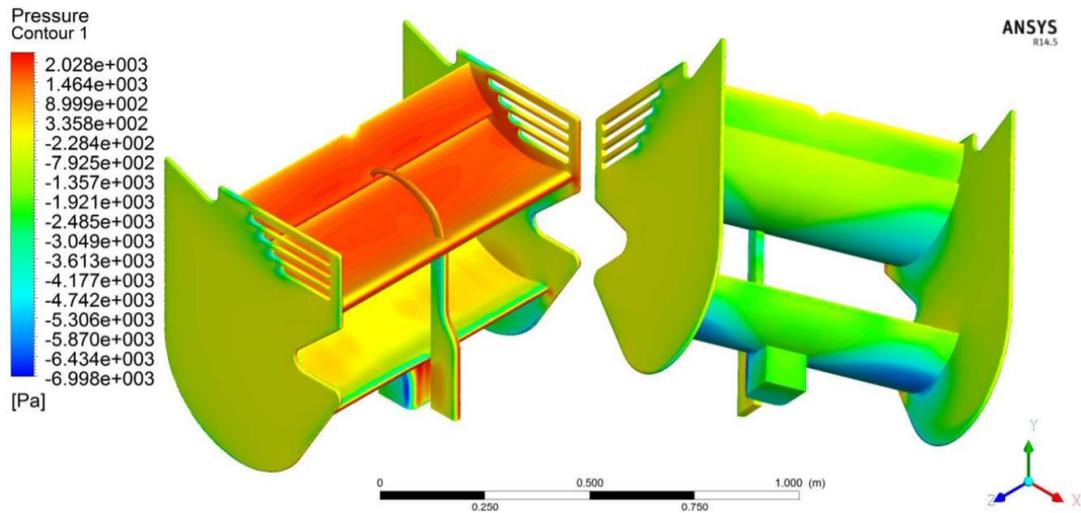


Figura 7. 16. Distribución de presiones en la superficie del alerón trasero.

Observamos la elevada depresión de las caras inferiores, así como la sobrepresión producida en las caras de presión, sobre todo en el ala superior.

Vemos como el elemento de sujeción del alerón reduce la zona de depresión de las caras inferiores, reduciendo la eficiencia aerodinámica.

Si estudiamos la sección transversal del alerón se pueden obtener conclusiones similares a las que obtuvimos en el estudio del perfil 2D:

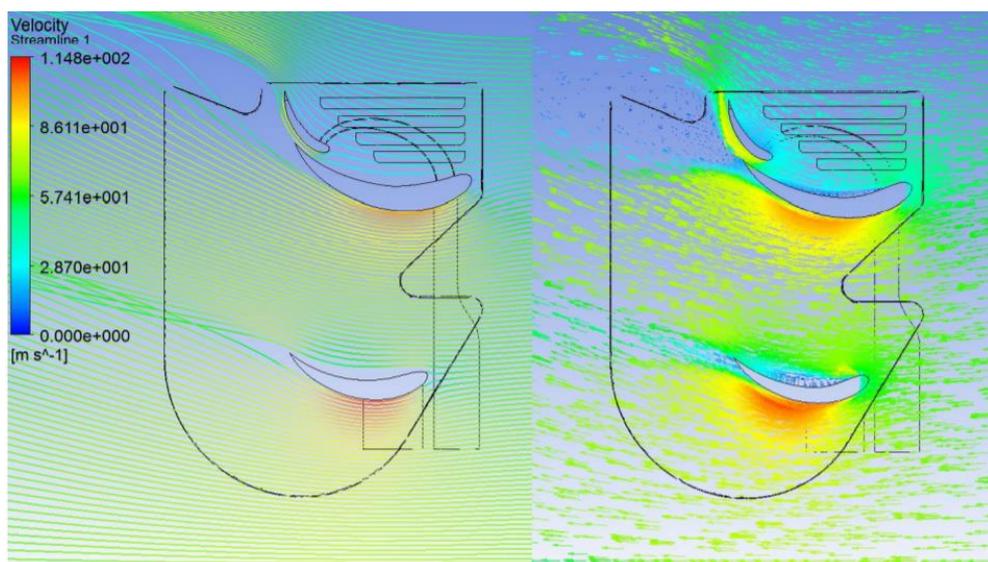


Figura 7. 17. Distribución de velocidad en la sección transversal del alerón.

En las líneas de corriente observamos un desprendimiento en la cara superior del ala inferior, esto provoca una disminución de la sustentación generada, hecho que se podía prever visualizando la Figura 7.16. Para optimizar el ala inferior, se debe modificar el ángulo de ataque para corregir el desprendimiento tan pronunciado en la cara superior.

Observamos también que la estela generada es bastante gruesa, por los desprendimientos de la capa límite, especialmente en el ala superior, pues el ala superior es multielemento precisamente para minimizar este efecto. Esto generará una elevada resistencia, concretamente de presión.

## 8. CONCLUSIONES

Con el fin de cumplir los objetivos marcados al inicio del TFG, en este proyecto se han:

1. Revisado los métodos numéricos básicos para la resolución de problemas aerodinámicos, en concreto el MEF y el MVF. Para ello, hemos comenzado explicando dichos métodos en problemas sencillos, para que así queden claras las ideas generales, para posteriormente aplicarlos a problemas de nuestro interés con la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes en la sección 4.2.
2. Deducido las principales ecuaciones y principios que modelan la aerodinámica, para lo que ha sido esencial los conocimientos obtenidos en las asignaturas mecánica e ingeniería de fluidos.
3. Descrito las ecuaciones que permiten resolver un flujo turbulento, estudiando concretamente 3 modelos de turbulencia:  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$  y Spalart Allmaras. Se ha llegado a la conclusión de que en el problema sencillo de un flujo turbulento a través de un perfil NACA 4412, no se han evidenciado diferencias significativas en los resultados para los modelos estudiados.
4. Empleado el software FreeFem con el fin de entender mejor el funcionamiento del MEF en la sección 4.2, en el que se han obtenido unos buenos resultados, aunque limitados a números de Reynolds bajos. También se ha empleado otro software como Ansys, que utiliza el MVF, obteniendo de nuevo unos muy buenos resultados, al compararlos con los teóricos, y que en este caso no se encuentran limitados por el número de Reynolds. Estos resultados aparecen en la sección 6.2.
5. Finalmente, se resume una de las aplicaciones de los métodos estudiados en este proyecto, como es la aerodinámica en la Fórmula 1. Concretamente, hemos analizado las funciones principales de los elementos aerodinámicos y obtenido conclusiones a partir de simulaciones externas a este proyecto, las cuales no se han realizado en el mismo, por no ser objeto de éste y por el tiempo que llevaría realizar una simulación para una geometría tan compleja.

## 9. BIBLIOGRAFÍA

ABBOTT, I. H. & VON DOENHOFF, A. E. (1959). *Theory of Wing Sections*.

ANDERSON, J.D. (2005). *Fundamentals of aerodynamics*, 5ª edición.

ÇENGEL, Y.A. & CIMBALA, J.M. (2004). *Fluid mechanics. Fundamental and applications*, 2ª edición.

MCBEATH, S. (1997). *Aerodinámica del automóvil de competición*.

MELIGA, P., PUJALS, G. y ÉRIC SERRE (2012). *Sensitivity of 2-D turbulent flow past a D-shaped cylinder using global stability*.

VERSTEEG, H.K. & MALALASEKERA, W. (2007). *An introduction to computational fluid dynamics*, 2ª edición.

VIEDMA ROBLES, A. *Mecánica de fluidos*.

VIEDMA ROBLES, A. *Ingeniería de fluidos*.

WHITE, F.M. (2008). *Mecánica de fluidos*, 6ª edición.

YOUNG, D., MUNSON, B., OKIISHI, T & HUEBSCH, W. (2010). *A brief introduction to fluid mechanics*, 5ª edición.

### Información disponible en la red:

**AERODINÁMICA F1 (2019)**. Recuperado en marzo de 2020, de <https://www.aerodinamicaf1.com/2019/09/historia-de-la-aerodinamica-en-la-f1/>

**ANSYS HELP (2020)**. Recuperado en marzo de 2020, de [https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v201/en/flu\\_ug/flu\\_ug\\_mesh\\_quality.html](https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v201/en/flu_ug/flu_ug_mesh_quality.html)

**ANSYS HELP (2020)**. Recuperado en abril de 2020, de [https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v201/en/flu\\_th/flu\\_th\\_chap\\_turbulence.html](https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v201/en/flu_th/flu_th_chap_turbulence.html)

**CAMÚÑEZ LLANOS, R. (2014)**. Recuperado en abril de 2020, de <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/24755/TFG%20memoria.pdf>

**CARO, A. (2019)**. Recuperado en marzo de 2020, de <https://www.abelcaro.com/f1/aerodinamica/vortices/>

**ESTEBÁN RONCERO, SERGIO (2011)**. Recuperado en febrero de 2020, de [http://www.aero.us.es/adesign/Slides/Extra/Aerodynamics/Tema\\_05.1\\_Extra\\_Introducci%C3%B3n\\_Perfiles\\_NACA.pdf](http://www.aero.us.es/adesign/Slides/Extra/Aerodynamics/Tema_05.1_Extra_Introducci%C3%B3n_Perfiles_NACA.pdf)

- GARCÍA CUEVAS GONZÁLEZ, L.** Recuperado en diciembre de 2019, de <https://m.riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/105209/Garc%c3%ada-Cuevas%3bCarreres%3bTiseira%20-%20Centro%20de%20presiones%2c%20centro%20aerodin%c3%a1mico%20y%20cuerda%20media%20aerodin%c3%a1....pdf?isAllowed=y&sequence=1>
- PITLANE MOTOR (2017).** Recuperado en marzo de 2020, de <http://pitlanemotor.com/2017/04/03/f1-tecnica-aleron-delantero/>
- RACECAR ENGINEERING.** Recuperado en marzo de 2020, de <https://www.racecar-engineering.com/tech-explained/diffusers-engineering-basics-aerodynamics/>
- RODRÍGUEZ, R. (2019).** Recuperado en marzo de 2020, de <https://www.motorpasion.com/formula1/asi-funcionan-cuatro-partes-que-componen-aerodinamica-coche-formula-1>
- SÁNCHEZ FOLCH, N. (2016).** Recuperado en marzo de 2020, de <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/96863/memoria.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- HERRERO PAREDES, R. (2009).** Recuperado en marzo de 2020, de [https://e-archivo.uc3m.es/bitstream/handle/10016/7707/PFC\\_Rodrigo\\_Herrero\\_Paredes.pdf?isAllowed=y&sequence=2](https://e-archivo.uc3m.es/bitstream/handle/10016/7707/PFC_Rodrigo_Herrero_Paredes.pdf?isAllowed=y&sequence=2)
- SALVADOR GARZÓN, E. (2017).** Recuperado en marzo de 2020, de <https://repository.libertadores.edu.co/bitstream/handle/11371/1299/sandovalernesto2017.pdf?isAllowed=y&sequence=1>
- ÁLVAREZ VÁZQUEZ, LJ. (2001).** Recuperado en marzo de 2020, de <http://www.dma.uvigo.es/files/cursos/mef/teoria.pdf>
- VILLAMIZAR HERNÁNDEZ, A (2014).** Recuperado en abril de 2020, de <http://bdigital.unal.edu.co/47755/>
- CLIMENT AGUSTINA, J (2019).** Recuperado en abril de 2020, de [https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/668408/2019\\_Tesis\\_Climent%20Agustina\\_Javier.pdf?isAllowed=y&sequence=1](https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/668408/2019_Tesis_Climent%20Agustina_Javier.pdf?isAllowed=y&sequence=1)
- SOLA MIRALLES, D (2019).** Recuperado en abril de 2020, de <https://riunet.upv.es/handle/10251/128577>
- UNIVERSIDAD TECMILENIO.** Recuperado en abril de 2020, de <https://www.coursehero.com/file/47274617/Fisica3pptx/>

## ANEXOS

### Anexo A. Código FreeFem

```
real R = 3,L=10;
```

Estos valores para el contorno exterior por donde simulamos que circula el fluido no son aleatorios. Se recomienda una distancia de salida de 10 veces la longitud de la cuerda, es decir, de 10 metros. Además, las paredes se recomiendan que estén a una distancia de 3 veces la cuerda. Esto es debido a la interacción del flujo con las paredes que puede provocar la desviación del mismo por la curvatura del perfil.

```
border NACAt (t=0.0,1.0) {x=t; y= 0.17735*sqrt(t) -0.075597*(t) -0.212836*(t)^2 + 0.17363*(t)^3 -0.06254*(t)^4; label=1;};  
border NACAb (t=1.0,0.0) {x=t; y= -(0.17735*sqrt(t) -0.075597*(t) -0.212836*(t)^2 + 0.17363*(t)^3 -0.06254*(t)^4); label=1;};
```

Hemos definido la geometría del perfil que viene dada por las anteriores ecuaciones. Una es para el extradós y otra para el intradós.

```
border ce(t=pi/2,3*pi/2) { x=cos(t)*R;y=sin(t)*R;label=1;}  
border beb(tt=0,1) { real t=tt^1.2; x= t*L; y= -R; label = 1;}  
border beu(tt=1,0) { real t=tt^1.2; x= t*L; y= R; label = 1;}  
border beo(t=-R,R) { x= L; y= t; label = 0;}  
border bei(t=-R/4,R/4) { x= L/2; y= t; label = 0;}
```

Definimos el contorno exterior a través de una semicircunferencia y un rectángulo. Además, hemos añadido una línea vertical a una distancia de R/4 del perfil con el objetivo de refinar la malla detrás del perfil aerodinámico.

```
mesh Th=buildmesh(NACAt(50)+NACAb(50)+ce(30)+beb(20)+beu(20)+beo(10)+bei(10));  
plot(Th);
```

Con este comando construimos la malla y posteriormente la dibujamos. Nótese que el número de nodos lo aumentamos en los límites del perfil, pues es ahí donde nos interesa estudiar la solución, es donde se obtienen los resultados de interés. Lejos de éste podemos obtener la solución en menos puntos y reducir el coste computacional, pues no tiene tanto interés.

```
macro Grad(u1,u2) [ dx(u1),dy(u1), dx(u2),dy(u2)]//  
macro UgradV(u1,u2,v1,v2) [ [u1,u2]'*[dx(v1),dy(v1)] , [u1,u2]'*[dx(v2),dy(v2)] ]//  
macro div(u1,u2) (dx(u1)+dy(u2))//
```

Introducimos unos macros que nos van a simplificar posteriormente el código.

```
fespace Xh(Th, P2); fespace Mh(Th, P1);
Xh u1, u2, v1, v2, du1, du2, u1p, u2p;
Mh p, q, dp, pp;
```

Definimos los espacios en los que se encuentran las soluciones, un espacio de elementos p2 para velocidad y elementos p1 para la presión. Con estos espacios es con los que se discretiza el problema.

```
u1 = ( x^2+y^2 ) > 1.25;
u2=0;
```

Necesitamos unos valores iniciales para comenzar la iteración. Debemos respetar las condiciones de contorno.

```
real nu= 1./50, nufinal=1/200. ,cnu=0.5;
```

```
real eps=1e-6;
```

Nu no será la viscosidad cinemática, sino la viscosidad dinámica dividida por la velocidad.

Hemos fijado también el criterio de parada para el método de Newton.

```
int n;
real err=0;
for( n=0;n< 15;n++) // Newton Loop
{
  solve Oseen([du1, du2, dp], [v1, v2, q]) =
    int2d(Th) ( nu*(Grad(du1, du2)*Grad(v1, v2) )
      + UgradV(du1, du2, u1, u2)*[v1, v2]
      + UgradV(u1, u2, du1, du2)*[v1, v2]
      - div(du1, du2)*q - div(v1, v2)*dp
      - 1e-8*dp*q // stabilization term
    )
    - int2d(Th) ( nu*(Grad(u1, u2)*Grad(v1, v2) )
      + UgradV(u1, u2, u1, u2)*[v1, v2]
      - div(u1, u2)*q - div(v1, v2)*p
      - 1e-8*p*q
    )
    + on(1, du1=0, du2=0)
  ;
}
```

Introducimos el problema linealizado que dedujimos en el apartado 4.2.

```
u1[] -= du1[];
u2[] -= du2[];
p[] -= dp[];
real Lu1=u1[].linfty, Lu2 = u2[].linfty , Lp = p[].linfty;
err= du1[].linfty/Lu1 + du2[].linfty/Lu2 + dp[].linfty/Lp;
```

Actualizamos la solución en cada iteración.

```
cout << n << " err = " << err << " " << eps << " rey =" << 1./nu << endl;
```

Imprimimos por pantalla la iteración en la que nos encontramos, el error y el Re para el que se ha calculado la solución.

```
if(err < eps) break;
  if( n>3 && err > 10.)
}
```

```

if(err < eps)
{
    plot(p,wait=1,cmm=" rey = " + 1./nu , coef=0.3,bb=bb);
    plot([ul,u2],wait=1,cmm=" rey = " + 1./nu , coef=0.3,bb=bb);
    if( nu == nufinal) break;
    if( n < 4) cnu=cnu^1.5;
    nu = max(nufinal, nu* cnu);
    ulp=ul; u2p=u2; pp=p;

```

Cuando se ha alcanzado la convergencia, dibujamos la distribución de presiones y de velocidades. Además, facilitamos la convergencia aumentando gradualmente el Re, consiguiendo también obtener los resultados para diferentes Re en una misma simulación.

```

}
else { // if blowup, increase nu (more simple)
    assert(cnu< 0.95); // final blowup ...
    nu = nu/cnu; // get previous value of viscosity
    cnu= cnu^(1./1.5); // no conv. => change lower
    nu = nu* cnu; // new viscosity
    cout << " restart nu = " << nu << " Rey= "<< 1./nu << " (cnu = " << cnu << " ) \n";
    // restore correct solution ..
    ul=ulp;
    u2=u2p;
    p=pp;
}

```

Si tras estas iteraciones no se ha alcanzado el criterio de parada, disminuimos el número de Reynolds para posteriormente aumentarlo gradualmente hasta restaurar la solución.

```

// top
Mh tau;
tau=(dy(ul)+dx(u2));
real delta=0.00001;
func derinacat= -0.17735*(x+delta)^(-1/2) -0.075597 -0.212836*2*x + 0.17363*3*(x)^2 -0.06254*4*(x)^3;
func coseno=(1+derinacat*derinacat)^(-1/2)*derinacat;
func seno=sqrt(1-coseno*coseno);
real terminopresion=int1d(Th,ll)(p*coseno);
cout << " integral presion = "<< terminopresion << endl;
real terminoviscosidad=int1d(Th,ll)(viscosidad*tau*seno);
cout << " integral viscosidad = " << terminoviscosidad << endl;
real dragt=terminopresion+terminoviscosidad;
cout << " drag = " << dragt << endl;

//bottom
func derinacat2=-(-0.17735*(x+delta)^(-1/2) -0.075597 -0.212836*2*x + 0.17363*3*(x)^2 -0.06254*4*(x)^3);
func coseno2=-((1+derinacat2*derinacat2)^(-1/2)*derinacat2);
func seno2=sqrt(1-coseno2*coseno2);
real terminopresion2=int1d(Th,ll)(p*coseno2);
cout << " integral presion = "<< terminopresion2 << endl;
real terminoviscosidad2=int1d(Th,ll)(viscosidad*tau*seno2);
cout << " integral viscosidad = " << terminoviscosidad2 << endl;
real dragb=terminopresion2+terminoviscosidad2;
cout << " drag = " << dragb << endl;
real dragtotal=dragt+dragb;
cout << " drag = " << dragtotal << endl;

```

Finalmente, programamos el cálculo de la resistencia tal y como hemos explicado.

## Anexo B. Código Matlab

```
4 - rho=1.225; %kg/m3
5 - v=43.822; %m/s
```

Introducimos la densidad del fluido (aire) y su velocidad a la entrada, que será una variable que iremos modificando.

```
7 - a=importdata('wall_shear_ps.txt');
8 - a=a.data;
9 - a=sortrows(a,2);
10 - %
11 - b=importdata('wall_shear_ss.txt');
12 - b=b.data;
13 - b=sortrows(b,2);
14 - %
15 - c=importdata('pressure_ps.txt');
16 - c=c.data;
17 - c=sortrows(c,2);
18 - %
19 - d=importdata('pressure_ss.txt');
20 - d=d.data;
21 - d=sortrows(d,2);
```

Importamos 4 ficheros que hemos generado en Ansys, que corresponden a la presión y el esfuerzo cortante en la cara de presión y de succión. Estos ficheros son una matriz con el nodo, coordenada x, coordenada y, variable estudiada. De estos ficheros escogemos únicamente los datos, descartando el texto y, por último, los ordenamos según su coordenada x, por lo que vendrán ordenados del borde de ataque al de salida.

Como queremos realizar una integral curvilínea, tenemos que recorrer el perfil en un sentido, que será antihorario, por lo que en la cara de succión debemos invertir el orden, con el objetivo de recorrer el perfil de una vez en un único sentido. Lo haremos a través del siguiente algoritmo sencillo:

```
23 - bb=[];
24 - dd=[];
25 - for i=1:length(b)
26 -     k=length(b)-(i+(i-1));
27 -     j=i+k;
28 -     bb(j,:)=b(i,:);
29 -     dd(j,:)=d(i,:);
30 - end
```

A las matrices b y d las renombramos como bb y dd una vez que se han reordenado.

```

32 - for i=1:length(a)
33 -     airfoil(i,1)=i;
34 -     airfoil(i,2:4)=c(i,2:4);
35 -     airfoil(i,5)=a(i,end);
36 -
37 - end
38
39 - for i=length(a)+1:length(a)+length(b)
40 -     j=i-length(a);
41 -     airfoil(i,1)=i;
42 -     airfoil(i,2:4)=dd(j,2:4);
43 -     airfoil(i,5)=bb(j,end);
44 - end
45
46 - x=airfoil(:,2);
47 - y=airfoil(:,3);

```

Creamos una matriz llamada airfoil. La primera columna será un contador para el número total de nodos del perfil, las columnas 2 y 3 serán las coordenadas x e y, la cuarta columna será la presión en el intradós, la quinta columna será el esfuerzo cortante en la cara de presión.

Aumentamos esta matriz con los datos correspondientes al extradós, de la misma forma que antes. Por lo que ahora tendremos una única matriz que tiene todos los datos necesarios para resolver el problema y ordenados convenientemente.

Por comodidad, creamos dos matrices con las coordenadas x e y.

```

49 - S(1)=0;
50 - SP=zeros(size(airfoil,1),1);
51 - SS=zeros(size(airfoil,1),1);
52 - %cálculo área 'ds' y coordenada curvilínea 'S'
53 - for i=2:size(airfoil,1)
54 -     ds(i)=sqrt((x(i)-x(i-1))^2+(y(i)-y(i-1))^2);
55 -     S(i)=S(i-1)+ds(i);
56 -
57 -     if i<size(a,1)+1
58 -         SP(i)=SP(i-1)+ds(i);
59 -     end
60 -
61 -     if i>size(a,1)+1
62 -         SS(i)=SS(i-1)+ds(i);
63 -     end
64 - end
65 - ds(1)=sqrt((x(1)-x(end))^2+(y(1)-y(end))^2);
66 -
67 - Sad=S/S(end);
68 - SPad=SP/SP(size(a,1));
69 - SSad=SS/SS(end);

```

Creamos una coordenada curvilínea, con la que se suelen representar los resultados en álabes. S será la coordenada curvilínea total, SP la coordenada curvilínea en la cara de presión y SS en la cara de succión. Construimos estas coordenadas calculando la distancia entre dos puntos e ir añadiéndola a la coordenada para cada nodo. Además, el diferencial de superficie lo emplearemos posteriormente para integrar. Dependiendo de si nos encontramos en la cara de

presión o en la de succión, construiremos la coordenada curvilínea de izquierda a derecha o de derecha a izquierda.

Por último, adimensionalizamos las coordenadas curvilíneas con sus tamaños totales.

```

70     %cálculo ángulo
71 -   for i=2:length(x)-1
72 -       m=(y(i+1)-y(i-1))/(x(i+1)-x(i-1));
73 -       ang(i)=atan(m);
74 -   end
75
76 -   m=(y(2)-y(end))/(x(2)-x(end));
77 -   ang(1)=atan(m);
78 -   m=(y(1)-y(end-1))/(x(1)-x(end-1));
79 -   ang(end+1)=atan(m);
80
81 -   alpha=ang*180/pi;
82
83
84 -   for i=1:size(a,1)
85 -       theta(i)=alpha(i)-90+360;
86 -   end
87
88 -   for i=size(a,1)+1:length(alpha)
89 -       theta(i)=alpha(i)+90;
90 -   end
91
92 -   theta=theta*pi/180; %rad

```

Para la obtención del ángulo  $\theta$ , obtenemos la pendiente de la recta entre nodos, resultando un ángulo que llamamos alpha. Para poder obtener el ángulo  $\theta$  a partir del obtenido, se debe diferenciar en la cara en la que estamos, pues no se obtiene con la misma expresión.

```

94 -   FL=0;
95 -   FD=0;
96 -   p=airfoil(:,4);
97 -   tau=airfoil(:,5);
98
99
100 -  for j=1:length(theta)
101 -      FL = FL + ( -p(j)*sin(theta(j)) + tau(j)*cos(theta(j)) )*ds(j); % N/m
102 -      FD = FD + ( p(j)*cos(theta(j)) + tau(j)*sin(theta(j)) )*ds(j); % N/m
103 -  end
104
105 -  CL=FL/(0.5*rho*v^2*1)
106 -  CD=FD/(0.5*rho*v^2*1)

```

Por último, integramos para la obtención de la fuerza de sustentación y la fuerza de resistencia y adimensionalizamos estas fuerzas con el área en planta.