



industriales  
etsii

Escuela Técnica  
Superior  
de Ingeniería  
Industrial

# UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Industrial

## Análisis y control de sistemas estocásticos con aplicaciones en tecnologías cuánticas

**TRABAJO FIN DE GRADO**

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS  
INDUSTRIALES

**Autor:** Beka Begiashvili  
**Director:** Javier Molina Vilaplana  
**Codirector:** Juan Ignacio Mulero Martínez

Cartagena, 25 de marzo de 2019



Universidad  
Politécnica  
de Cartagena

# ÍNDICE

OBJETIVOS Y RESUMEN .....	3
CAPÍTULO 1, INTRODUCCIÓN .....	5
Computación cuántica .....	6
Comunicación cuántica .....	7
Simulación cuántica .....	7
CAPÍTULO 2, SISTEMAS CUÁNTICOS LINEALES. MEDIDA SUAVE .....	9
Breve introducción al formalismo cuántico .....	10
Medida suave y POVM'S .....	11
Medida continua de un observable .....	13
Oscilador armónico cuántico .....	16
Introducción al cálculo estocástico .....	17
Proceso de Wiener .....	19
CAPÍTULO 3, CONTROL ÓPTIMO REALIMENTADO .....	20
Control óptimo en variables de estados .....	21
Control lineal cuadrático Gaussiano, LQG .....	23
CAPÍTULO 4, RESULTADOS .....	26
Resolución del sistema cuántico de referencia sin control óptimo .....	28
Resolución del sistema cuántico de referencia con control óptimo .....	30
Variación en la eficiencia de la medida, $\eta$ .....	34
Variación en la fuerza de la medida, $k$ .....	36
Variación en la frecuencia de oscilación, $\omega_0$ .....	38
Variación en la masa de la partícula cuántica, $m$ .....	40
CAPÍTULO 5, DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES .....	43
APÉNDICE .....	45
SDE Toolbox .....	45
Simulación de SDE .....	46
BIBLIOGRAFÍA .....	52

## OBJETIVOS Y RESUMEN

El control es una rama de ingeniería y matemáticas que se aplica al comportamiento de sistemas dinámicos. Trata de obtener una salida en función de la entrada de un sistema. Para conseguir una respuesta del sistema lo más parecido posible a la deseada, se realizan medidas intermedias sobre las salidas y el sistema se retroalimenta para controlar la acción del sistema de control.

Es importante mencionar que, cada vez, se ve aumentada la importancia del desarrollo de tecnologías con dispositivos cuyas leyes vienen dictadas por la mecánica cuántica. Tales como sensores o computadores cuánticos que disminuirían de manera considerable el tiempo de computación. Por este motivo, se exige el desarrollo del control cuántico.

El dominio de las tecnologías cuánticas se divide en cuatro campos destacables[1]: *Comunicación cuántica*, donde los fotones se usan para transmitir datos e información de una manera segura; *Simulación cuántica*, donde un sistema cuántico controlado puede simular el comportamiento de otro sistema cuántico menos accesible; *Computación cuántica*, donde mediante los fenómenos cuánticos se puede conseguir una disminución drástica del tiempo de computación en cálculos numéricos; y *Metrología, sensores cuánticos*, donde la alta sensibilidad de los sistemas cuánticos a las perturbaciones se aprovecha para mejorar la precisión de las medidas de magnitudes físicas. Se podría representar una estructura del desarrollo de las tecnologías cuánticas en diferentes áreas (Figura 0.1).

El desarrollo de las tecnologías cuánticas ha conseguido captar mucha atención en las últimas décadas: algunos gobiernos han empezado a invertir en la investigación, como por ejemplo China, cuya investigación consiste en el lanzamiento de un satélite y la instalación de un enlace de distribución de clave cuántica (QKD<sup>1</sup>) entre Beijing y Shanghái, esto es, una comunicación segura que implementa un protocolo criptográfico envolviendo componentes y fenómenos de la mecánica cuántica o el proyecto “Buque insignia de Tecnologías Cuánticas” que se lleva a cabo por la Comisión Europea que apoya la investigación en la mecánica cuántica y que estima un presupuesto de mil millones de euros. Mientras que otras empresas multinacionales, como IBM, Intel,

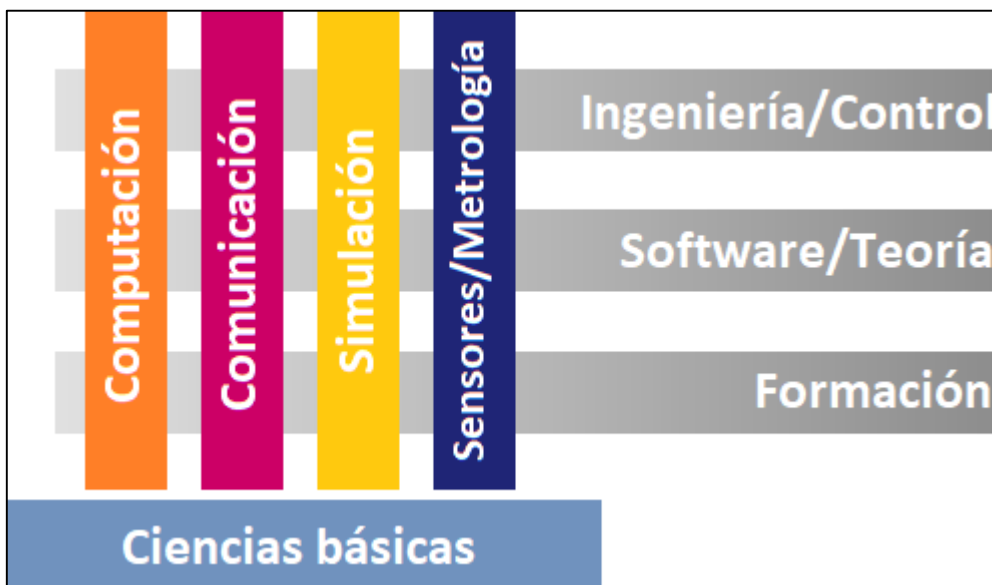


Fig. 0.1. Estructura de los campos de investigación en tecnologías cuánticas [1]

<sup>1</sup> QKD – Quantum Key Distribution (distribución de clave cuántica)

Google, Toshiba y Microsoft, apuestan por la investigación en los campos de las tecnologías cuánticas como la computación y la comunicación cuántica. Una de las razones por las que esta ciencia consigue avanzar es la existencia de una comunidad global de investigación que comparte los desafíos y las metas en el desarrollo de las tecnologías cuánticas. Esta comunidad realiza un artículo “QT Roadmap”<sup>2</sup> cada año, incluyendo en él, avances, metas, conclusiones, definiciones, etc.

El control cuántico presenta un gran desafío frente al control clásico, y es que cuando se realiza una medida, se introduce sobre el sistema una perturbación aleatoria irreducible. Por lo tanto, las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema son estocásticas y generalmente no lineales, a diferencia de los sistemas clásicos que son descritos por ecuaciones deterministas.

En este trabajo se va a desarrollar una metodología asociada al cálculo numérico para la resolución y simulación del comportamiento de un sistema cuántico que se rige por ecuaciones diferenciales estocásticas (SDE<sup>3</sup>)[2], en este caso mediante Matlab[3]. A continuación, se plantea un protocolo de control óptimo[4] para estos sistemas, y para finalizar, se simula el comportamiento de los mismos con el sistema de control diseñado.

El trabajo se ha estructurado de la siguiente manera:

Tras una breve introducción a los sistemas de control se introduce a nivel básico la teoría de la medida continua en sistemas cuánticos (Cap. 2). Posteriormente se modela un sistema estocástico lineal, análogo a un sistema cuántico lineal, para simular el mismo. Los detalles sobre el sistema y las ecuaciones, como la metodología para su resolución y simulación, vienen explicados en el dicho capítulo. En el capítulo 3 se desarrolla un protocolo de control óptimo para controlar un sistema cuántico lineal. Por último, en el capítulo 4 se simula la dinámica y el control óptimo de un sistema cuántico lineal. La simulación numérica se realiza mediante un software (Matlab en este caso) que permite resolver y simular sistemas que vienen dictados por ecuaciones diferenciales estocásticas. El funcionamiento y los métodos vienen explicados detalladamente en el apéndice.

---

<sup>2</sup> QT Roadmap – Quantum Technologies Roadmap (mapa vial de las tecnologías cuánticas)

<sup>3</sup> SDE – Stochastic Differential Equations (ecuaciones diferenciales estocásticas)

## **CAPÍTULO 1**

### **INTRODUCCIÓN**

Como se ha definido anteriormente, los sistemas cuánticos se caracterizan por su aleatoriedad y ecuaciones no deterministas que los describen. La ciencia que estudia el control y la manipulación de estos sistemas se llama las ciencias de la información cuántica (QIS<sup>4</sup>).

Algunos de los objetivos de las tecnologías cuánticas, del artículo “QT Roadmap 2016”[5], se encuentran a continuación:

### **Computación cuántica**

Un computador cuántico es un dispositivo que aprovecha las leyes de la mecánica cuántica para resolver problemas, es decir, realizar cálculos de manera más eficiente (y con más rapidez) que los computadores clásicos. El objetivo principal en este campo (computación cuántica) es construir dicho dispositivo con qbits<sup>5</sup>. Con este dispositivo sería posible diseñar algoritmos para resolver problemas que no pueden ser resueltos por las limitaciones de la capacidad de los procesadores de los computadores clásicos (hasta los más poderosos).

Ya se ha demostrado que es posible construir tal computador, pues ya existen tecnologías avanzadas en este campo, con las que se han creado unos prototipos y se han demostrado algunos algoritmos cuánticos. Las tecnologías más avanzadas hasta hoy son iones atrapados[6] y qbits superconductores[7]. Con iones atrapados se ha logrado un control de hasta 15 qbits. En qbits superconductores el control no está tan avanzado como en el caso del primero, aunque tiene más posibilidades de desarrollarse. Con ambas tecnologías se han llevado a cabo experimentos sobre la “corrección de errores cuánticos[8]” con éxito.

A pesar de la investigación y esfuerzo dedicado a este campo, el desafío principal sigue siendo construir tal computador, debido a las interacciones indeseadas entre los componentes cuánticos y el medio ambiente, es decir, perturbaciones. De momento no se ha podido alcanzar el nivel de aislamiento requerido para evitar las perturbaciones a una escala de grandes cálculos. Para solucionar el problema se debe aplicar otro tratamiento llamado “corrección de errores cuánticos”.

Algunos objetivos de la investigación en la computación cuántica son:

1. Desarrollo de tecnologías actuales para conocer sus limitaciones y poder abordarlas.
2. Evaluación de las capacidades de diferentes tecnologías y ampliarlas.
3. Optimización de los códigos de corrección de errores cuánticos.
4. Investigación en nuevas formas de la computación cuántica, en particular basados en códigos con capacidad de autocorrección.
5. Desarrollo de nuevos algoritmos cuánticos y búsqueda de nuevos problemas que requieran computadores cuánticos.
6. Desarrollo de la teoría de la complejidad cuántica[9], [10].
7. Construcción de interfaces entre los computadores cuánticos y sistemas de comunicación.
8. Desarrollo de sistemas de comunicación con seguridad suficiente para resistir intentos de descifrado por un computador cuántico.

---

<sup>4</sup> QIS – Quantum Information Science

<sup>5</sup> Qbts – Quantum bits

## **Comunicación cuántica**

Comunicación cuántica implica la transmisión de estados cuánticos de un lugar a otro. La idea general es que los estados cuánticos codifican información cuántica y si se consigue transferir estados cuánticos esto conlleva la transmisión de la información cuántica. La comunicación cuántica abarca aspectos que van desde la física básica hasta aplicaciones prácticas que son relevantes para la sociedad actual. El interés principal de este campo se ha centrado en la distribución de clave cuántica (QKD<sup>6</sup>), como se ha comentado anteriormente, por su aplicación y utilidad tanto en la codificación segura de la información transferida entre dos lugares como en la seguridad de almacenamiento de datos a largo plazo.

En los últimos años, este campo ha experimentado grandes progresos, ya que los sistemas QKD han pasado de ser experimentos a sistemas compactos y mercado comercial en crecimiento. En términos generales, ha habido una explosión en la cantidad de grupos activos en el campo que trabajan en sistemas físicos cada vez más diversos. Las memorias sobre el campo han pasado de ser teoría a demostraciones con experimentos y resultados prometedores para el futuro. Resumiendo, la idea del procesamiento de información cuántica hizo su aparición y ya ha empezado a encontrar aplicaciones experimentales factibles.

La criptografía cuántica se está desarrollando desde los sistemas QKD hacia la administración de la seguridad cuántica a través de redes que se ejecutan en varios lugares del mundo. En la actualidad, los problemas técnicos para implementar transmisiones a lo largo de unos pocos cientos de kilómetros se controlan suficientemente bien. Sin embargo, para transmisiones a larga distancia surgen problemas no triviales. Si la comunicación cuántica se va a convertir en una tecnología establecida que respalda las “cajas” criptográficas conocidas como HSM<sup>7</sup> (ya comercializadas), se deben llenar varias lagunas científicas y tecnológicas.

Algunos de los desafíos más importantes en la investigación en este campo son:

1. Creación de sistemas QKD con mayor robustez y funcionalidad.
2. Aumentar significativamente la eficiencia de las tecnologías: fuentes de fotones, detectores, etc.
3. Producción de sistemas QKD capaces de funcionar a velocidades mayores de 100 Mbps.
4. Creación de una red principal de seguridad que conecte las principales ciudades de Europa.
5. Unificar criptógrafos cuánticos y clásicos para desarrollar nuevos algoritmos, protocolos y aplicaciones, como tarjetas de crédito cuánticas, dinero cuántico y claves cuánticas.

## **Simulación cuántica**

A pesar del esfuerzo y dinero invertido en la investigación, los sistemas cuánticos aún proporcionan algunos de los desafíos más profundos e intrigantes para nuestra comprensión de sistemas de la naturaleza. Algunos sistemas de química cuántica (de un número grande de componentes) ya no pueden abordarse en los computadores clásicos. De manera similar, cuando se trata de predecir las propiedades de un sistema de materia condensada[11] se plantean algunas preguntas abiertas.

---

<sup>6</sup> QKD – Quantum Key Distribution

<sup>7</sup> HSM – Hardware Security Module

En las últimas décadas, los problemas relacionados con el comportamiento de los sistemas cuánticos fueron estudiados con “supercomputadores”. A pesar de los enormes éxitos, existen limitaciones significativas en cuanto a la simulación de la dinámica de los sistemas cuánticos con computadores clásicos. Esto es debido a la capacidad de computación requerida por los sistemas cuánticos y sus propiedades (sean dinámicos o estáticos), que queda fuera del rango de las capacidades hasta para las “supercomputadoras”. Los computadores cuánticos prometen superar estas limitaciones y así poder simular sistemas que con la computación clásica es imposible abordar. Desafortunadamente, en el futuro previsible, es poco probable que estos dispositivos en una escala que sería realmente útil y práctico. Aunque sea posible preparar y controlar grandes conjuntos de átomos aparecen fenómenos que parecen muy desafiantes incluso desde el punto de vista conceptual. Esto obliga a resolver los problemas que están completamente fuera del alcance de las capacidades de la simulación clásica con los experimentos.

La simulación cuántica se basa en una larga tradición de simulación en el ámbito clásico. Incluso los “supercomputadores” tienen sus limitaciones, por esta razón ya en la computación clásica se han creado dispositivos (o simuladores) para un propósito especial. Tales simuladores clásicos son creados para calcular y simular cierta clase restringida de modelos que describen un sistema y son diferentes a los computadores clásicos. Por ejemplo, para simular la aerodinámica de un coche en un túnel de viento, se diseña y se crea un simulador para tal propósito.

La idea de la simulación cuántica es ingeniosa y sencilla a la vez: en lugar de intentar simular el sistema cuántico en un computador clásico, se intenta reproducir intencionalmente el sistema cuántico que se quiere simular en un laboratorio, bajo condiciones que se pueden controlar. Este enfoque permite reproducir sistemas físicos en un entorno donde hay una gran cantidad de formas diferentes de medir el sistema. La simulación cuántica se ha convertido en un campo de investigación floreciente. En este momento, existen muchos sistemas que ya han demostrado su potencial para superar a los computadores clásicos. Estos incluyen, por ejemplo, átomos ultra fríos en celosías ópticas, iones atrapados ultra fríos, circuitos superconductores, etc.



## **CAPÍTULO 2**

### **SISTEMAS CUÁNTICOS LINEALES. MEDIDA SUAVE**

En la formulación matemática rigurosa, desarrollada por Dirac y von Neumann [12], [13], los estados posibles de un sistema cuántico están representados por vectores unitarios (llamados estados) que pertenecen a un Espacio de Hilbert complejo separable (llamado el espacio de estados). La evolución temporal de un estado cuántico queda descrita por la ecuación de Schrödinger, en la que el Hamiltoniano, el operador correspondiente a la energía total del sistema, tiene un papel central.

## **Breve introducción al formalismo cuántico.**

### *Operador densidad*

En mecánica cuántica los observables son operadores  $A$  que actúan sobre vectores en un espacio de Hilbert. Estos vectores  $|\varphi\rangle$  representan al estado cuántico de un sistema, es decir, el conocimiento del observador sobre el mismo. Existe una representación dual basada en el operador densidad que se define como:

$$\rho := |\varphi\rangle\langle\varphi| \quad (2.1)$$

siendo  $|\varphi_\alpha\rangle$  un rango determinado de estados cuánticos, el operador densidad modela el hecho de que no se sabe en qué estado se encuentra el sistema pero se sabe que se encuentra en  $|\varphi_\alpha\rangle$  con una probabilidad  $p_\alpha$ .

$$\rho = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\varphi_{\alpha}\rangle\langle\varphi_{\alpha}| \quad (2.2)$$

Derivando el operador densidad y aplicando la ecuación de Schrödinger  $i\hbar\partial_t|\varphi\rangle = H|\varphi\rangle$ , se puede escribir la ecuación de la variación del operador densidad en el tiempo:

$$\partial_t\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] \quad (2.3)$$

Se conoce ésta como la ecuación de Schrödinger – von Neumann. Mientras el estado de un sistema no se mida, la evolución temporal de su estado viene determinado por ésta, siendo  $H$  el Hamiltoniano del sistema. El uso del operador densidad permite escribir ecuaciones más generales de evolución de sistemas que las de vectores de estado.

### *Valores esperados de un operador*

Cada observable se representa en Mecánica Cuántica mediante un operador lineal autoadjunto que actúa sobre el espacio de Hilbert del sistema físico considerado. Los observables en la mecánica cuántica no conmutan:  $[\hat{X}, \hat{P}] = \hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X} = i\hbar$ .

Se puede predecir valores del operador densidad mediante el cálculo de trazas. La traza de un operador  $A$  es la suma sobre los elementos de la diagonal con respecto a otro conjunto de estados ortonormales  $|\beta\rangle$ :

$$Tr[A] := \sum_{\beta} \langle\beta|A|\beta\rangle \quad (2.4)$$

Una de las propiedades más importantes de la traza de un producto es que la misma es invariante ante la permutación de productos,

$$\text{Tr}[ABC] = \text{Tr}[BCA] = \text{Tr}[CAB] \quad (2.5)$$

Usando esta propiedad, se puede expresar los valores esperados con respecto al estado puro como

$$\langle A \rangle = \langle \varphi | A | \varphi \rangle = \text{Tr}[A\rho] \quad (2.6)$$

## **Medida suave y POVM'S<sup>8</sup>**

Cuando se introduce el concepto de la medida a los alumnos de la mecánica cuántica, se conoce que la medida simplemente “sucede” instantáneamente. Este intento de descripción es aceptable para una primera aproximación, pero no es suficiente para explicar dos situaciones. Una de ellas es cuando un sistema está bajo una observación y control continuo. Por ejemplo, cuando se ilumina un objeto y se detecta de manera continua el reflejo de la luz con el fin de conocer la traza del objeto. En este caso es necesario saber qué le ocurre al objeto *mientras* se está tomando la medida. Este tipo de medida es lo que se conoce como la *medida cuántica continua*. La otra situación consiste en que nada ocurre instantáneamente, hasta un intento muy corto de medida necesita un determinado tiempo. Si el tiempo de este intento no es pequeño comparado con la dinámica del sistema que está siendo medido, entonces es importante conocer tanto la dinámica de la obtención de la información por el observador como los efectos que produce la medida sobre el sistema cuántico[14].

Generalmente, el único tipo de medida que se estudia es uno en el que el sistema se proyecta en uno de los estados propios de un observable dado. Si estos estados propios son  $\{|n\rangle: n = 1, \dots, n_{MAX}\}$ , y el estado del sistema es  $|\varphi\rangle = \sum_{\alpha} C_n |n\rangle$ , la probabilidad de que el sistema esté proyectado en  $|n\rangle$  es  $|C_n|^2$ . Estos tipos de medidas, conocidos como medidas de von Neumann, representan una clase específica de todas las medidas posibles que se pueden tomar en sistemas cuánticos. Aunque, todas éstas se pueden derivar de las de von Neumann.

Una razón por la que se debe considerar una clase más grande de medidas es que se pueden definir medidas que extraen información parcial sobre un observable. En cambio, una medida de von Neumann proporciona información completa, es decir, después de realizar la medida se sabe exactamente el valor del observable, ya que el sistema es proyectado en un estado propio. Sin embargo, naturalmente, existen muchas medidas que, aunque reduzcan en promedio las incertidumbres con respecto al observable, no las eliminan por completo.

En una medida cuántica, el resultado siempre es alguno de los autovalores del observable  $X$ , como se observa en la figura 2.1.

$$X \equiv \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

---

<sup>8</sup> POVM'S – Positive Operator-Valued Measure

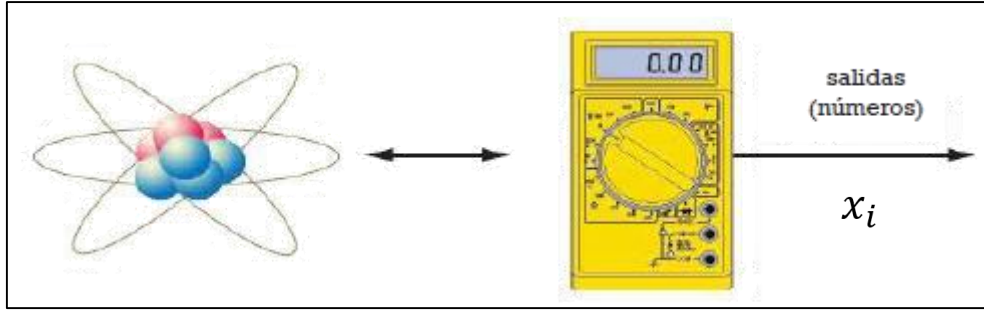


Fig. 2.1. Obtención del resultado de una medida de un observable  $X$

Si el resultado de la medida es  $x_i$ , entonces el estado inicial  $\rho$  cambia, como se observa en la figura 2.2. En primer lugar, vale la pena señalar que una medida de von Neumann se puede describir mediante el uso de un conjunto de operadores proyección  $\{P_n = |n\rangle\langle n|\}$ . Cada uno de estos operadores describe qué sucede en uno de los posibles resultados de la medida: si el estado inicial del sistema es  $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ , entonces el resultado  $n$ -ésimo del estado final viene dado por:

$$\rho_f = |n\rangle\langle n| = \frac{P_n \rho P_n}{Tr[P_n \rho P_n]} \quad (2.7)$$

y este resultado se obtiene por la probabilidad

$$P(n) = Tr[P_n \rho P_n] = C_n \quad (2.8)$$

donde  $C_n$  define la superposición del estado inicial  $|\varphi\rangle$  mencionado anteriormente.

Resulta que cada una de las posibles medidas se puede describir de manera similar generalizando el conjunto de operadores. Se coge un conjunto de  $m_{max}$  operadores  $\Omega_m$ , con la única restricción de que  $\sum_{m=1}^{m_{max}} \Omega_m^\dagger \Omega_m = I$ , donde  $I$  es el operador identidad. Entonces, en principio, es posible diseñar una medida que tenga  $N$  posibles resultados,

$$\rho_f = \frac{\Omega_m \rho \Omega_m^\dagger}{Tr[\Omega_m \rho \Omega_m^\dagger]} \quad (2.9)$$

Con

$$P(m) = Tr[\Omega_m \rho \Omega_m^\dagger] \quad (2.10)$$

Siendo la probabilidad de obtener el resultado  $m$ -ésimo.

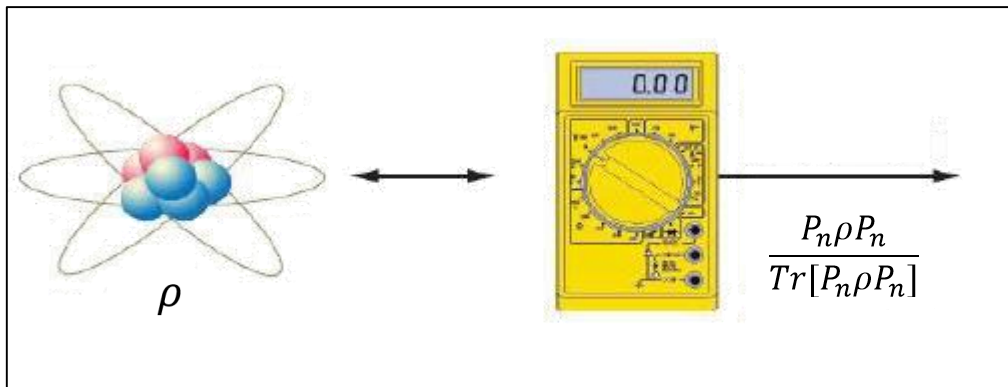


Fig. 2.2. Cambio del estado inicial  $\rho$  del sistema cuántico

Cada una de estas medidas más generales puede implementarse realizando una interacción unitaria entre el sistema y un sistema auxiliar, y luego realizando una medida de von Neumann en el sistema auxiliar. Por lo tanto, todas las medidas posibles pueden derivarse de los postulados básicos de la evolución unitaria y la medida de von Neumann[15].

Estas medidas “generalizadas” son conocidas como “POVM’S”. Nótese que la probabilidad de obtener un resultado dentro del rango  $[a, b]$  es

$$P(m \in [a, b]) = \sum_{m=a}^b \text{Tr}[\Omega_m \rho \Omega_m^\dagger] = \text{Tr} \left[ \sum_{m=a}^b \Omega_m^\dagger \Omega_m \rho \right] \quad (2.11)$$

El operador positivo  $M = \sum_{m=a}^b \Omega_m^\dagger \Omega_m$  determina la probabilidad de que  $m$  se encuentre en el subconjunto  $[a, b]$  dentro de su rango.

De esta forma, el formalismo asocia un operador positivo a cada subconjunto del rango de  $m$  y, por lo tanto, es una medida positiva del operador.

Si se pone esto en práctica para describir una medida que proporciona información parcial sobre un observable, en lugar de que los operadores de medida  $\Omega_m$  sean proyectores en un solo estado propio, se eligen como una suma ponderada de proyectores en los estados propios  $|n\rangle$ , presentando cada uno diferentes picos. Asumiendo, por simplicidad, que los estados propios  $n$  de lo observado  $N$  toman valores enteros, se puede elegir:

$$\Omega_m = \frac{1}{N} \sum_n e^{-\frac{k(n-m)^2}{4}} |n\rangle \langle n| \quad (2.12)$$

Donde  $N$  es una constante elegida de forma que  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Omega_m^\dagger \Omega_m = I$ . De esta forma se ha construido una medida que proporciona información parcial sobre un observable  $N$ . Esto se ilustra con más claridad estudiando el caso en el cual se carece de cualquier información sobre el sistema al comenzar. Después de realizar la medida y obteniendo el resultado  $m$ , el estado del sistema es

$$\rho_f = \frac{\Omega_m \rho \Omega_m^\dagger}{\text{Tr}[\Omega_m \rho \Omega_m^\dagger]} = \frac{1}{N} \sum_n e^{-\frac{k(n-m)^2}{2}} |n\rangle \langle n| \quad (2.13)$$

El estado final alcanza el punto máximo sobre el estado propio  $m$ , pero presenta un ancho de  $1/\sqrt{k}$ . Por tanto, cuanto mayor sea  $k$ , menor será la incertidumbre final con respecto al valor de lo observable. Medidas para las cuales  $k$  es grande, se les denominan medidas fuertes. En cambio, medidas para las cuales  $k$  es pequeño, se les denominan medidas débiles. Éstas últimas son las que interesan para introducir la medida continua en el siguiente apartado.

## **Medida continua de un observable**

Una medida continua es aquella en la que la información sobre un sistema es extraída continuamente. Otra forma de explicar esto sería que cuando se está tomando tal medida, al tender a cero el tiempo de duración de la medida, la cantidad de información también lo hace. Para realizar una medida continua, se divide el tiempo en intervalos de tiempo  $\Delta t$  y se realiza una medida suave (débil) en cada uno de ellos. Para que la medida sea continua, la fuerza de la medida será proporcional al intervalo de tiempo (infinitesimalmente pequeño).

Siendo  $X$  un observable, es decir, una magnitud a medir, escribiremos los estados propios del observable como  $|x\rangle$ . Ahora se divide el tiempo en intervalos de  $\Delta t$ . En cada intervalo de tiempo se harán medidas por operadores descritos como

$$A(\alpha) = \left(\frac{4k\Delta t}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2k\Delta t(x-\alpha)^2} |x\rangle\langle x| dx \quad (2.14)$$

Cada operador  $A(\alpha)$  es una suma ponderada gaussiana de proyectores sobre los estados propios del observable  $X$ . Aquí  $\alpha$  es un índice de continuidad, tal que cada resultado de la medida continua será etiquetado por  $\alpha$ . Si se calcula el valor medio de  $\alpha$  se obtiene el valor esperado de  $X$ , siendo  $P(\alpha) = Tr[A(\alpha)^\dagger A(\alpha)|\varphi\rangle\langle\varphi|]$ :

$$\langle\alpha\rangle = \int \alpha P(\alpha) d\alpha = \int \alpha Tr[A(\alpha)^\dagger A(\alpha)|\varphi\rangle\langle\varphi|] d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x |\varphi(x)|^2 dx = \langle X \rangle \quad (2.15)$$

Entonces se obtiene la densidad probabilidad  $P(\alpha)$  del resultado  $\alpha$  de la medida:

$$P(\alpha) = Tr[A(\alpha)^\dagger A(\alpha)|\varphi\rangle\langle\varphi|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4k\Delta t}{\pi} |\varphi(x)|^2 e^{-4k\Delta t(x-\alpha)^2} dx \quad (2.16)$$

Si el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es suficientemente pequeño, entonces el termino Gaussiano es mucho más grande que  $\varphi(x)$ . Esto significa que se puede aproximar  $|\varphi(x)|^2$  por la función delta, la cual debe estar centrada en la posición esperada  $\langle X \rangle$  tal que  $\langle\alpha\rangle = \langle X \rangle$  como se ha calculado anteriormente. Entonces se tiene:

$$P(\alpha) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4k\Delta t}{\pi} \delta(x - \langle X \rangle) e^{-4k\Delta t(x-\alpha)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4k\Delta t}{\pi} e^{-4k\Delta t(x-\alpha)^2} dx \quad (2.17)$$

Se puede escribir  $\alpha$  como una cantidad estocástica:

$$\alpha_s = \langle X \rangle + \frac{\Delta W}{\sqrt{8k\Delta t}}, \quad (2.18)$$

donde  $\Delta W$  es una variable aleatoria gaussiana de media cero y varianza  $\Delta t$ .

Si se hace una secuencia de estas medidas y se toma el límite  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $\Delta t \rightarrow dt$ ) se obtiene una medida continua. A medida que se toma este límite, más y más medidas se hacen en un intervalo finito de tiempo, pero cada una es cada vez más débil (suave). La naturaleza de las medidas por su aleatoriedad introduce una ecuación estocástica de movimiento. Se puede derivar esta ecuación estocástica para un sistema cuando se realiza una medida suave, calculando el cambio que sufre el estado cuántico a causa de una simple medida suave en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Realizando los cálculos cuando se realiza la medida representada por el operador  $A(\alpha)$  en cada intervalo de tiempo, queda:

$$|\varphi(t + \Delta t)\rangle \propto \{1 - 2k\Delta t X^2 + X[4k\langle X \rangle \Delta t + \sqrt{2k}\Delta W + kX(\Delta W)^2]\} |\varphi(t)\rangle \quad (2.19)$$

Si se toma el límite  $\Delta t \rightarrow 0$  resulta ser que  $(\Delta W)^2 \rightarrow dt$ , además,  $\Delta W \rightarrow dW$  y también  $\Delta t \rightarrow dt$ , aparte, normalizando  $|\varphi(t + \Delta t)\rangle$  queda:

$$d|\varphi\rangle = \{-k(X - \langle X \rangle)^2 dt + \sqrt{2k}(X - \langle X \rangle)dW\}|\varphi(t)\rangle \quad (2.20)$$

Esta ecuación describe la evolución del estado de un sistema en un intervalo de tiempo  $dt$  y generalmente se conoce como la *ecuación estocástica de Schrödinger*. El observador obtiene un resultado de medida en tal intervalo:

$$dy = \langle X \rangle dt + \frac{dW}{\sqrt{8k}} \quad (2.21)$$

El resultado de la medida da el valor esperado  $\langle X \rangle$  más un componente aleatorio debido al ancho de  $P(\alpha)$ , y se escribe como diferencial ya que corresponde a la información obtenida en un intervalo  $dt$ . Integrar este resultado es equivalente a resolver la ecuación estocástica de Schrödinger.

La evolución del estado  $|\varphi\rangle$  es aleatoria y  $|\varphi(t)\rangle$  se conoce como *traza cuántica*. Al conjunto de resultados de la medida  $dy(t)$  se le denomina *registro de medida*. Se puede expresar la ecuación estocástica de Schrödinger en términos del operador densidad  $\rho$  en lugar del estado cuántico  $|\varphi\rangle$ . Definiendo  $\rho(t + dt) \equiv \rho(t) + d\rho$ , se tiene:

$$\begin{aligned} d\rho &= (d|\varphi\rangle)\langle\varphi| + |\varphi\rangle(d\langle\varphi|) + (d|\varphi\rangle)(d\langle\varphi|) \\ &= -k[X[X, \rho]]dt + \sqrt{2k}(X\rho + \rho X - 2\langle X \rangle\rho)dW \end{aligned} \quad (2.22)$$

A esta ecuación se le denomina *ecuación maestra estocástica*. Esta ecuación define una traza cuántica  $\rho(t)$  y fue obtenida por primera vez por Belavkin. Nótese que esta ecuación contiene también la evolución Hamiltoniana. Se observa en la ecuación la parte estocástica de la evolución.

El operador densidad en un instante  $t$  proporciona información sobre el estado de conocimiento del sistema. Dada esta información, Belavkin obtuvo el registro de la medida  $y(t)$  hasta el instante  $t$ . Aunque el observador tenga acceso a  $dy$ , no lo tiene a  $dW$ . Por este motivo, Belavkin, para calcular  $\rho(t)$ , tuvo que calcular  $dW$  en cada intervalo de tiempo, junto con el valor esperado de  $X$  en el instante anterior:

$$dW = \sqrt{8k}(dy - \langle X \rangle dt) \quad (2.23)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación maestra, se puede escribir la evolución del sistema directamente en términos del registro de la medida, lo cual sería lo más natural desde el punto de vista del observador.

$$d\rho = -k[X[X, \rho]]dt + 4k(X\rho + \rho X - 2\langle X \rangle\rho)(dy - \langle X \rangle dt) \quad (2.24)$$

En algunos casos es posible resolver la ecuación maestra estocástica analíticamente, pero en la mayoría de los casos es necesario resolver ésta por métodos numéricos. La manera más simple de hacer esto es escogiendo pequeños intervalos de tiempo  $\Delta t$ , y usando generador de un número aleatorio para seleccionar un nuevo  $\Delta W$  en cada intervalo de tiempo. A continuación, usando  $\Delta t$  y  $\Delta W$  en cada intervalo de tiempo se calcula  $\Delta\rho$  y se añade al estado  $\rho$  actual. De esta manera, se genera una traza específica para un sistema. Cada posible secuencia de  $dW$  genera una traza diferente, y la probabilidad de obtener una traza dada es la probabilidad de que el generador de

números aleatorios genere la secuencia de  $dW$  correspondiente. La secuencia de  $dW$  también se le denomina como *ruido*.

Si el observador realiza una medida continua, pero desecha los resultados de la medida, debe realizar el promedio de los diferentes resultados. Debido a que  $\rho$  y  $dW$  son estadísticamente independientes, todos los términos proporcionales a  $\rho dW$  se anulan. Por tanto, la ecuación queda:

$$\frac{d\rho}{dt} = -k[X[X, \rho]] \quad (2.25)$$

Donde en este caso el operador densidad representa el promedio de todos los posibles resultados.

Jacobs, en [14], después de explicar la solución de la ecuación maestra e introducir algunos nuevos conceptos, como la ineficiencia de la medida, llega al siguiente desarrollo de la ecuación maestra:

$$d\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] dt + \mathcal{D}[c]\rho dt + \sqrt{\eta}\mathcal{K}[c]\rho dW \quad (2.26)$$

Donde  $\eta$  es la eficiencia de la detección del canal de medida. Ocurre la ineficiencia de detección ya que no siempre es posible detectar la señal completa. Los términos  $\mathcal{K}[c]\rho$  (es decir, los términos de ruido) representan la ganancia de información debida al proceso de medida. Los términos  $\mathcal{D}[c]\rho$  representan la perturbación en el estado del sistema debido a la medida.

Para un operador arbitrario  $A$ , se puede usar la ecuación maestra y  $d\langle A \rangle = Tr[Ad\rho]$  con el fin de obtener la siguiente ecuación de movimiento para los valores esperados de  $\langle A \rangle$ :

$$d\langle A \rangle = -\frac{i}{\hbar}[A, H] dt + \langle c^\dagger A c - \frac{1}{2}(c^\dagger c A + A c^\dagger c) \rangle dt + \sqrt{\eta} \langle c^\dagger A + A c - \langle A \rangle \langle c + c^\dagger \rangle \rangle dW \quad (2.27)$$

## **Oscilador armónico cuántico**

El oscilador armónico revierte cierto interés en tecnologías cuánticas, para el estudio de oscilaciones en trampas de iones, que son de fundamental importancia en tecnologías cuánticas como la computación cuántica[16].

Se consideran ahora los efectos de medida en valores esperados de dos casos: una medida de posición, correspondiente a un operador observable, y un operador antihermitiano, correspondiente a un proceso de amortiguación de energía. Para la simplicidad se asume el sistema de un oscilador armónico de forma:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 X^2 \quad (2.28)$$

Se consideran 5 variables para describir el comportamiento del sistema tras la realización de la medida: valores esperados de la posición y momento,  $\langle X \rangle$  y  $\langle P \rangle$ , las varianzas correspondientes,  $V_X$  y  $V_P$ , y la covarianza  $C_{XP}$ . Estas variables son arbitrarias gaussianas.

En el caso de la medida de la posición de la forma  $c = \sqrt{2k}X$ :



$$d\langle A \rangle = -\frac{i}{\hbar} [A, H] dt - k \langle [X[X, A]] \rangle dt + \sqrt{2\eta k} [\langle [X, A]_+ \rangle - 2\langle X \rangle \langle A \rangle] dW \quad (2.29)$$

Usando esto para calcular el cúmulo de las ecuaciones de movimiento, el sistema se describe con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} d\langle X \rangle &= \frac{1}{m} \langle P \rangle dt + \sqrt{8\eta k} V_X dW \\ d\langle P \rangle &= -m\omega_0^2 \langle X \rangle dt + \sqrt{8\eta k} C_{XP} dW \\ \partial_t V_X &= \frac{2}{m} C_{XP} - 8\eta k V_X^2 \\ \partial_t V_P &= -2m\omega_0^2 C_{XP} + 2\hbar^2 k - 8\eta k C_{XP}^2 \\ \partial_t C_{XP} &= \frac{1}{m} V_P - m\omega_0^2 V_X - 8\eta k V_X C_{XP} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Siendo el sistema de ecuaciones (2.30) el que describe un sistema cuántico lineal simple como un oscilador armónico.

El sistema propuesto (2.30) se puede expresar de la siguiente forma en espacio de estados:

$$dx = Ax dt + G dw \quad (2.31)$$

donde:

$$x = \begin{pmatrix} \langle X \rangle \\ \langle P \rangle \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$$G = \begin{pmatrix} \sqrt{8\eta k} V_X \\ \sqrt{8\eta k} C_{XP} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Siendo el oscilador armónico cuántico un sistema lineal y siendo el ruido introducido por la medida Gaussiano, en los próximos capítulos se va a proceder a diseñar un control óptimo como el control lineal cuadrático resolviendo la ecuación de Riccati mediante Matlab. A continuación, se va a simular tanto el comportamiento del sistema sin control como con el control diseñado. Para finalizar se van a discutir los resultados.

## **Introducción al cálculo estocástico**

Para resolver el sistema de ecuaciones estocásticas propuesto (2.34) hace falta introducir el cálculo que se implementa en el Toolbox de Matlab utilizado (véase el apéndice).

Existen varios métodos para el cálculo de ecuaciones estocásticas, pero aquí se introduce el de Itô, debido a que es el más utilizado en el cálculo de sistemas cuánticos con ruido y es el que utiliza el Toolbox mencionado.

Una ecuación diferencial determinista (no estocástica) tiene la siguiente forma:

$$dy = \alpha dt \quad (2.35)$$

La regla básica en el cálculo determinista es que  $(dt)^2 = 0$ . Para ver qué significa esto, se calcula  $dz$  para la variable  $z = e^y$  en términos de  $dy$ .

$$dz = e^{y+dy} - e^y = z(e^{\alpha dt} - 1) \quad (2.36)$$

Desarrollando la exponencial:

$$e^{\alpha dt} = 1 + \alpha dt + \frac{(\alpha dt)^2}{2!} + \frac{(\alpha dt)^3}{3!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha dt)^n}{n!} \quad (2.37)$$

Sacando factor común  $(\alpha dt)^2$ :

$$e^{\alpha dt} = 1 + \alpha dt + (\alpha dt)^2 * \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\alpha dt)^{n-2}}{n!} \quad (2.38)$$

Aplicando la regla básica  $(dt)^2 = 0$ , resulta:

$$dz = z \alpha dt \quad (2.39)$$

Se obtiene lo mismo calculando  $\frac{dz}{dy}$  mediante la regla de la cadena y multiplicar por  $dy$ . Esto significa que el cálculo considera los valores de las funciones en intervalos de tiempos muy pequeños  $\Delta t$ . En límites infinitesimos los términos cuadráticos y de mayor orden en  $\Delta t$  son despreciables.

En el cálculo de Itô existe otro elemento diferencial  $dW$ , que representa ruido blanco. La regla básica del cálculo de Itô es que  $dW^2 = dt$ , mientras que  $dt^2 = dt dW = 0$ . Entonces se cuenta el incremento  $dW$  como  $\sqrt{dt}$  en los desarrollos en serie de las funciones de  $dt$  y  $dW$ . Como ejemplo, se considera la ecuación diferencial estocástica:

$$dy = \alpha dt + \beta dW \quad (2.40)$$

Se obtiene la ecuación diferencial correspondiente para  $z = e^y$  desarrollando en serie  $e^{dy}$  hasta el segundo término en  $dy$ :

$$dz = d^y(e^{dy} - 1) = z \left( dy + \frac{(dy)^2}{2} \right) \quad (2.41)$$

Sustituyendo  $dy$ , resulta:

$$dz = z \left( (\alpha dt + \beta dW) + \frac{(\alpha^2 dt^2 + 2\alpha\beta dt dW + \beta^2 dW^2)}{2} \right) \quad (2.42)$$

dónde si se aplican las reglas básicas del cálculo de Itô, se eliminan los términos de  $dt^2$  y  $dt dW$ . Entonces resulta:

$$dz = z \left( \alpha + \frac{\beta^2}{2} \right) dt + z\beta dW \quad (2.43)$$

### Proceso de Wiener

Para entender por qué funciona esto, hay que definir el proceso de Wiener  $W(t)$  como un camino aleatorio ideal. Siendo un camino aleatorio simétrico,  $W(t)$  es una distribución normal, de media cero y varianza  $t$ . Entonces la densidad de probabilidad de  $W(t)$  sería:

$$P(W, t) = \frac{1}{\sqrt{W\pi t}} e^{-\frac{W^2}{2t}} \quad (2.44)$$

Obviamente,  $W(t)$  es continua pero deja de serlo cuando la función no es derivable. Se define como el incremento de Wiener como:

$$\Delta W(t) := W(t + \Delta t) - W(t) \quad (2.45)$$

correspondiente a un incremento de tiempo  $\Delta t$ . De nuevo,  $\Delta W$  es una distribución normal de media cero y varianza  $\Delta t$ . Combinando el proceso de Wiener con las reglas básicas de Itô, se obtiene la solución  $y(t)$  de la ecuación (2.40):

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \alpha \Delta t + \beta \Delta W(t) \quad (2.46)$$

Más información sobre la obtención de la solución se encuentra en[14].

Las ecuaciones estocásticas (2.30) se van a resolver y simular, para visualizar como afecta la medida a la dinámica del oscilador armónico cuántico, mediante el Toolbox anteriormente mencionado, el cual utiliza el cálculo estocástico de Itô y Stratonovich. En este caso se ha optado por el cálculo de Itô, ya que es el cálculo que se introduce en el artículo[14].

## **CAPÍTULO 3**

### **CONTROL ÓPTIMO REALIMENTADO**

Dentro de lo que abarca el control óptimo en la teoría de control, el control lineal cuadrático Gaussiano, o mejor conocido como control LQG<sup>9</sup> es uno de los más fundamentales. Se trata de controlar sistemas lineales que son perturbados por ruido blanco Gaussiano y su función de coste es cuadrática.

Los resultados de las medidas se usan por parte de un controlador para generar las señales de control, tal y como se observa en la figura 3.1.

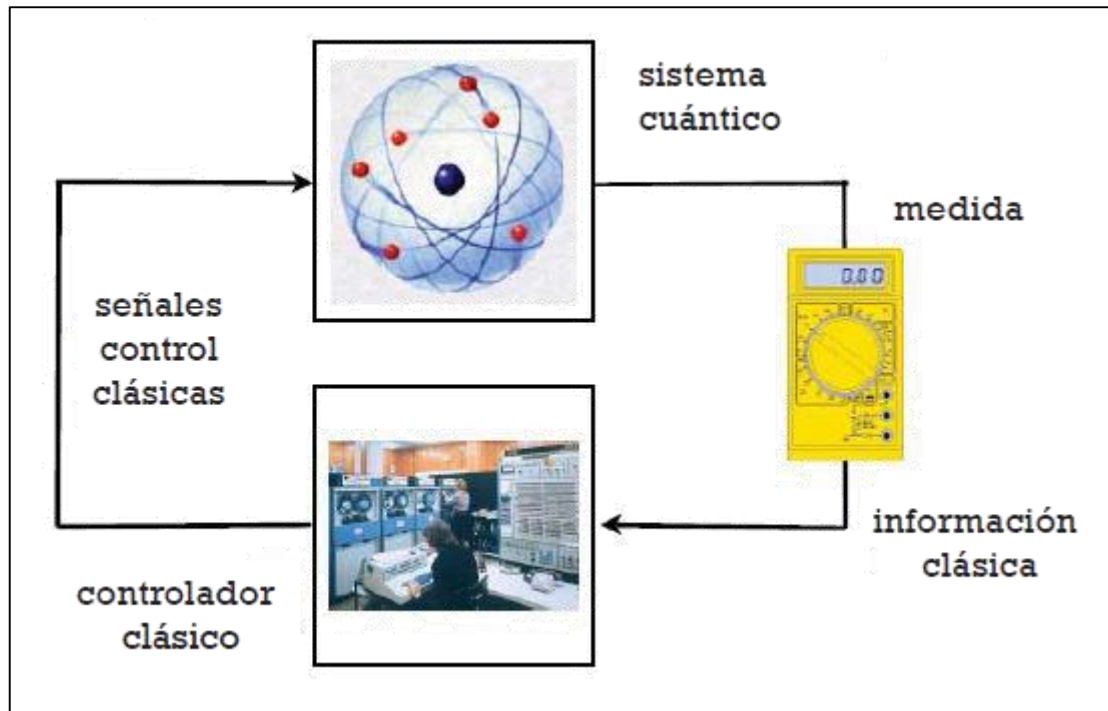


Fig. 3.1. Esquema control cuántico realimentado

### Control óptimo en variables de estados

El propósito del diseño de un sistema de control es obtener un sistema que proporcione el comportamiento deseado. Los sistemas que se ajustan para obtener una función mínima de coste se conocen como *sistemas de control óptimos*.

Se define la función de coste de un sistema de control, expresado en variables de estado como:

$$J = \int_0^{t_f} g(x, u, t) dt \quad (3.1)$$

Siendo  $x$  el vector de estado,  $u$  el vector de control y  $t_f$  el tiempo final. El sistema de control se puede representar por la ecuación diferencial vectorial:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.2)$$

La señal de control  $u$  depende de las medidas realizadas sobre las variables de estado:

<sup>9</sup> LQG – Linear-Quadratic-Gaussian

$$u_i = -k_i x_i \quad (3.3)$$

La señal de control puede depender también de dos variables de estado, por ejemplo:

$$u_1 = -k_1(x_1 + x_2), \quad u_2 = -k_2(x_2 + x_3), \quad \dots \quad (3.4)$$

La elección de las señales de control depende del comportamiento real deseado y de la complejidad de la estructura de la realimentación permisible. Normalmente se limita por variables de estado sobre las que se puedan realizar medidas. En forma matricial, la función de realimentación sería:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & \dots & k_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Sustituyendo la ecuación (3.5) en la (3.2), se obtiene:

$$\dot{x} = Ax - BKx = Hx \quad (3.6)$$

Donde  $H$  tiene dimensiones  $n \times n$  y es el resultado de la suma de  $A$  y  $-BK$ . Definiendo la función de coste del cuadrado del error para una sola variable de estado  $x_1$  como:

$$J = \int_0^{t_f} [x_1(t)]^2 dt \quad (3.7)$$

Una función de coste en términos de dos variables de estado sería:

$$J = \int_0^{t_f} (x_1^2 + x_2^2) dt \quad (3.8)$$

Entonces se define la función de coste de forma general para un vector de estado como:

$$J = \int_0^{t_f} (x^T x) dt \quad (3.9)$$

Donde  $x^T x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$

A continuación, se postula la existencia de una diferencial exacta para obtener el valor mínimo de  $J$ :

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) = -x^T x \quad (3.10)$$

Donde se tiene que determinar  $P$ , y por simplicidad, ésta será simétrica. Si se deriva la primera parte de la igualdad en la ecuación (3.10), se obtiene:

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (3.11)$$

Sustituyendo (3.6) en (3.11) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) = (Hx)^T P x + x^T P (Hx) = x^T H^T P x + x^T P H x = x^T (H^T P + P H) x \quad (3.12)$$

Si se impone la condición  $(H^T P + P H) = -I$ , entonces la ecuación (3.12) será:

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) = -x^T x \quad (3.13)$$

Si se sustituye la ecuación (3.13) en (3.9) tendiendo el tiempo a infinito, se obtiene:

$$J = \int_0^{\infty} -\frac{d}{dt}(x^T P x) dt = -x^T P x \Big|_0^{\infty} = x^T(0) P x(0) \quad (3.14)$$

Siendo el sistema estable en  $t = \infty$ , se obtiene  $x(\infty) = 0$ . Entonces para minimizar la función de coste se van a considerar las siguientes ecuaciones:

$$J = \int_0^{\infty} x^T x dt = x^T(0) P x(0) \quad (3.15)$$

$$(H^T P + P H) = -I \quad (3.16)$$

Los pasos a seguir serían:

1. Determinar la matriz  $P$  que satisfaga la ecuación (3.16).
2. Minimizar  $J$  determinando el mínimo de la ecuación (3.15), ajustando parámetros del sistema.

## **Control lineal cuadrático Gaussiano, LQG**

Si el sistema al que se va a aplicar el control óptimo, además de ser lineal y tener la función de coste cuadrática, se caracteriza por un ruido Gaussiano, el control se llamará LQG. La solución es única y constituye una ley de control de realimentación dinámico lineal que se calcula y es fácil de implementar. El controlador LQG también es fundamental para el control óptimo de los sistemas no lineales perturbados. se aplica tanto a los sistemas lineales invariantes en el tiempo, así como sistemas de variables en el tiempo lineales.

El sistema tendrá la siguiente forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw \quad (3.17)$$

Para el sistema estudiado (2.34):

$$x = \begin{pmatrix} \langle X \rangle \\ \langle P \rangle \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{21} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

La matriz de controlabilidad será:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B}|\mathbf{A}\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B_{21}}{m} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Para que el sistema sea controlable, la matriz de controlabilidad  $\mathbf{C}$  tiene que ser de rango completo, es decir su rango tiene que ser de 2. Esto se cumple siempre que el parámetro  $m$  no sea infinito, ya que se va a escoger  $B_{21} = 1$ .

En el caso del oscilador armónico cuántico, se le puede tratar como un sistema clásico con un ruido Gaussiano, por tanto, se puede aplicar dicho control. En el caso del control LQG, la ecuación a resolver se resume en la ecuación de Riccati en estacionario[17]:

$$-\frac{d}{dt}\Omega_t = \mathbf{A}^T\Omega_t + \Omega_t\mathbf{A} - \Omega_t\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{A} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

La cual se resuelve con el comando “care”<sup>10</sup> mediante Matlab (véase en el apéndice su implementación en el código) y devuelve la matriz de ganancia  $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T\Omega_t$  según [17], ésta se sustituye en la definición de la señal de control:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (3.23)$$

Siendo  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  por simplicidad, el comando “care” tiene como entrada la matriz  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , y  $\mathbf{Q}$ . La matriz de ganancia que devuelve  $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}^T\Omega_t\mathbf{E} + \mathbf{S}^T)$ , se resume en  $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T\Omega_t$  ya que  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ , y  $\mathbf{E} = \mathbf{I}$  por defecto, si éstos se omiten. La ecuación (3.23) incita a pensar que el control va a actuar directamente sobre todos los observables. Pero en principio va a interesar actuar directamente sobre el momento del sistema  $\langle P \rangle$ , por lo tanto, se escoge  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{u} &= -\begin{pmatrix} 0 \\ B_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle X \rangle \\ \langle P \rangle \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ B_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle X \rangle \\ \langle P \rangle \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 \\ B_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{21}\Omega_{21} & B_{21}\Omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle X \rangle \\ \langle P \rangle \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21}^2\Omega_{21} & B_{21}^2\Omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle X \rangle \\ \langle P \rangle \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 \\ B_{21}^2\Omega_{21}\langle X \rangle + B_{21}^2\Omega_{22}\langle P \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Habiendo resuelto la ecuación de Riccati (3.23), el sistema de ecuaciones (2.34) se quedará de la siguiente forma:

$$d\langle X \rangle = \frac{1}{m}\langle P \rangle dt + \sqrt{8\eta k}V_X dW$$

<sup>10</sup> care - Continuous-time algebraic Riccati equation



$$\begin{aligned}
d\langle P \rangle &= -m\omega_0^2 \langle X \rangle dt + U dt + \sqrt{8\eta k} C_{XP} dW \\
\partial_t V_X &= \frac{2}{m} C_{XP} - 8\eta k V_X^2 \\
\partial_t V_P &= -2m\omega_0^2 C_{XP} + 2\hbar^2 k - 8\eta k C_{XP}^2 \\
\partial_t C_{XP} &= \frac{1}{m} V_P - m\omega_0^2 V_X - 8\eta k V_X C_{XP}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Donde  $U = B_{21}^2 \Omega_{21} \langle X \rangle + B_{21}^2 \Omega_{22} \langle P \rangle$ .

El sistema estocástico diseñado se resuelve en el siguiente capítulo mediante el Toolbox de Matlab, al igual que el sistema sin controlad, para así observar el comportamiento del sistema cuando se aplica el control cuadrático lineal con ruido Gaussiano (LQG).

## **CAPÍTULO 4**

### **RESULTADOS**

A continuación, se van a simular diferentes sistemas, el comportamiento del sistema sin aplicar ningún control, posteriormente con el control descrito en el capítulo anterior, se va a hacer la transformada de Fourier de la señal de control para observar cómo sería la señal ideal para conseguir controlar un sistema cuántico lineal como el oscilador cuántico. Se van a variar los parámetros del sistema cuántico propuesto para ver como esto afecta a los resultados, y al final se va a simular el sistema con un control que se pueda conseguir en un laboratorio, es decir, con varias señales sinusoidales, escogiendo las amplitudes y las frecuencias de la señal ideal de control.

Para simular el comportamiento de un sistema cuántico lineal, se resuelve el sistema de ecuaciones (2.30).

A continuación, se aplica el control óptimo explicado en el capítulo anterior y el sistema de ecuaciones que se resuelve es (3.24).

Para finalizar se representa la transformada de Fourier de la señal de control óptimo  $U$ .

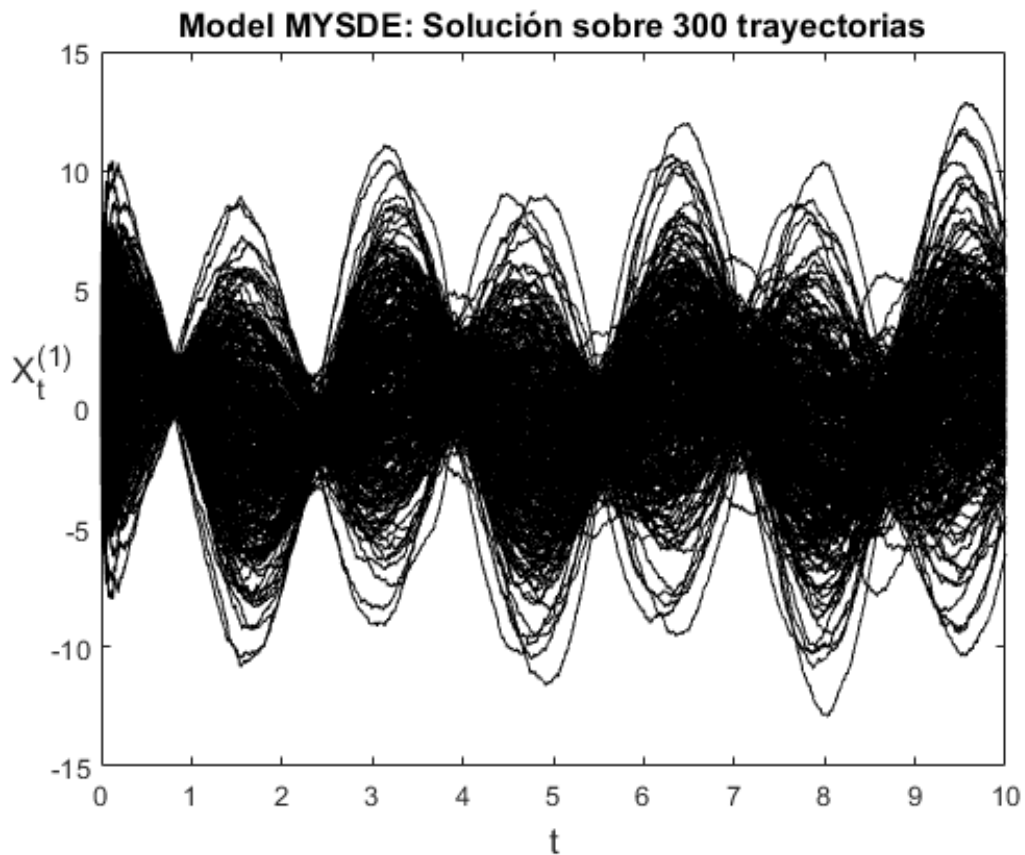
Con el fin de poder discutir sobre los resultados y comparar varias situaciones, se va a simular una variedad de sistemas. Se van a cambiar parámetros como la frecuencia de oscilación  $\omega_0$ , o la masa de la partícula cuántica  $m$ , la eficiencia de la medida  $\eta$ , que variará entre 0 y 1, o la fuerza de la medida  $k$ .

Para todas las variaciones y posibles sistemas que se van a simular, se va a escoger un sistema cuántico de referencia con el que se van a comparar los resultados, este sistema de referencia va a ser:

$m$	1
$\eta$	0,7
$k$	1
$\omega_0$	2

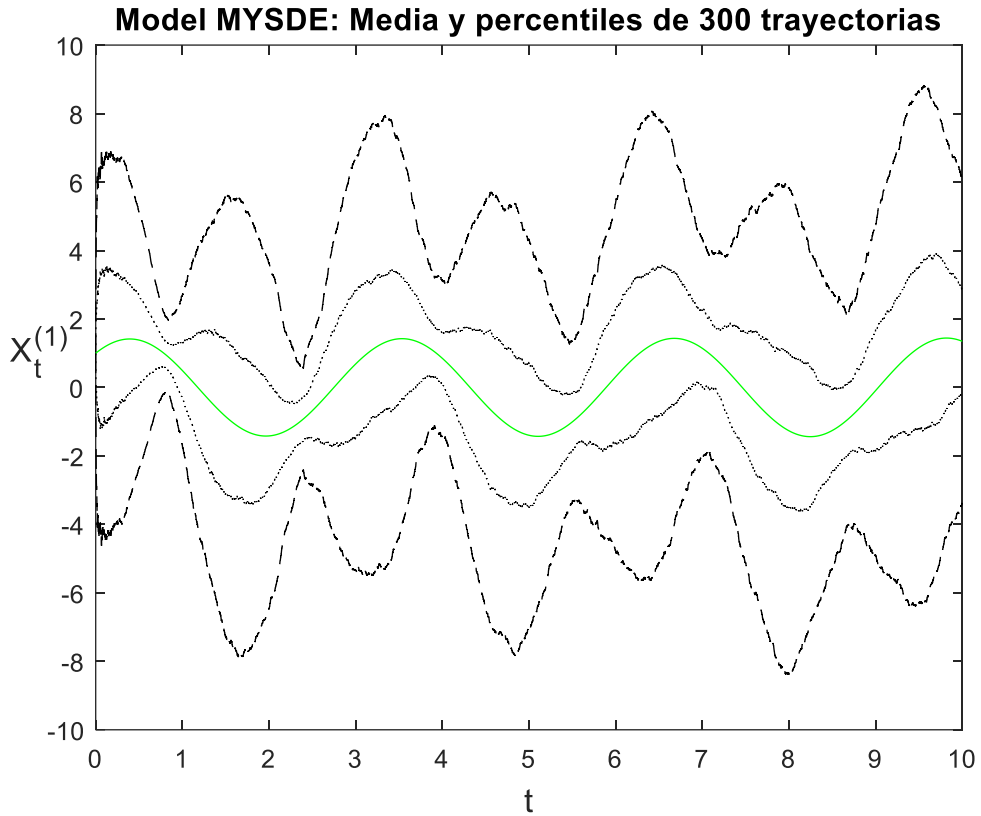
Cada una de las simulaciones contendrá 300 trazas para robustecer resultados estadísticos. Se harán las simulaciones de 10 unidades de tiempo con un intervalo de 0,001 unidades para mayor precisión en el cálculo numérico. Se va a observar la posición como estado del sistema, ya que el comportamiento del momento es idéntico y las conclusiones serán las mismas.

## Resolución del sistema cuántico de referencia sin control óptimo



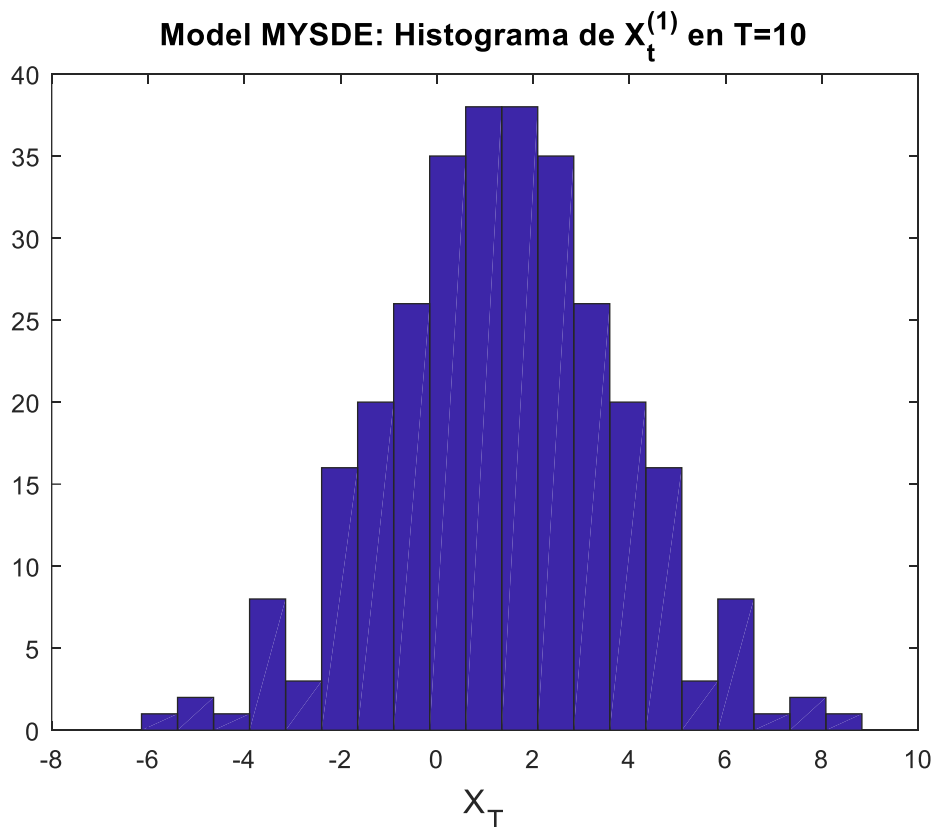
*Gráfica 4.1. 300 trayectorias del sistema de referencia sin controlar*

Se observa en la gráfica 4.1 que las 300 trayectorias del estado posición del sistema presentan un comportamiento estocástico, tal y como se preveía. A continuación, se harán simulaciones para observar datos estadísticos de la dinámica del sistema.



Gráfica 4.2. Media y percentiles de las 300 trayectorias del sistema de referencia sin controlar

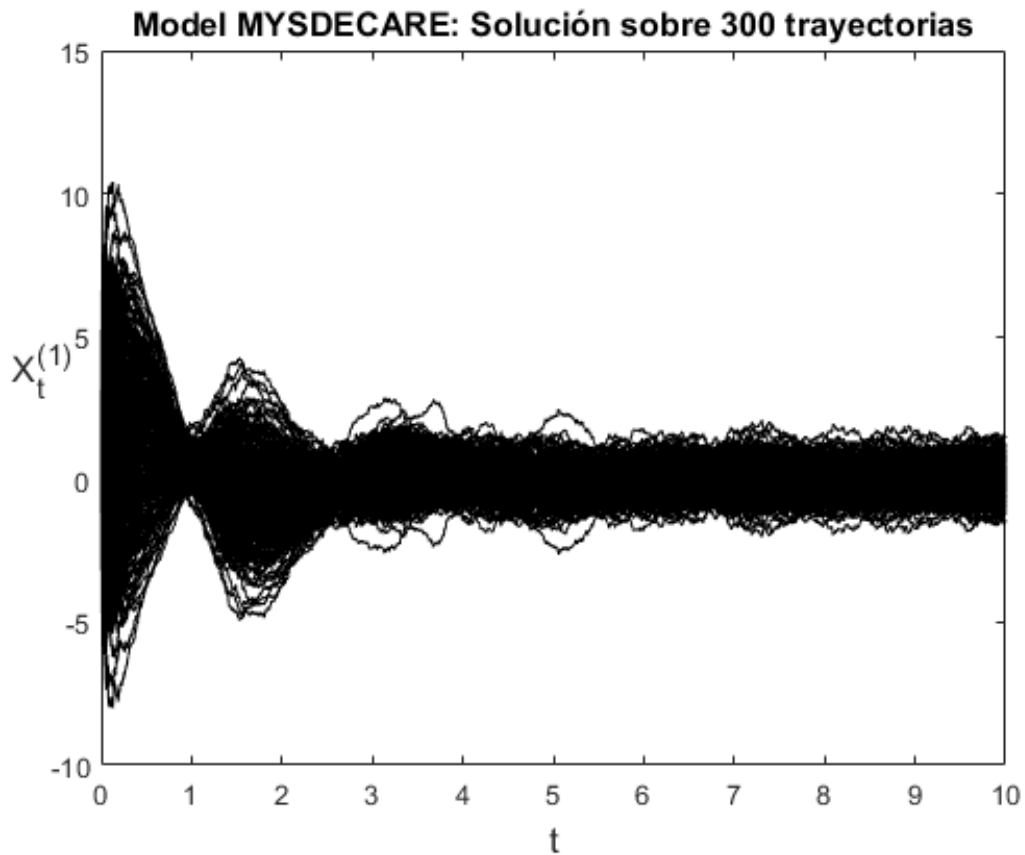
En la gráfica 4.2 se observa la media del estado de posición, y efectivamente, se confirma mediante la simulación que se trata de un oscilador armónico.



Gráfica 4.3. Histograma en  $T=10$  del sistema de referencia sin controlar

Se observan en la gráfica 4.1 todas las trazas, en este caso 300, pero para analizar resultados es más cómodo fijarse en la gráfica 4.2, donde se muestran tanto la media como los demás percentiles más importantes para cada iteración. La gráfica proporciona una amplitud de oscilación de posición de 1,4423. Por último, se aprecia en la gráfica 4.3 el histograma de los resultados en el último instante del tiempo, en el cual se ve claramente la tendencia hacia la distribución normal del resultado.

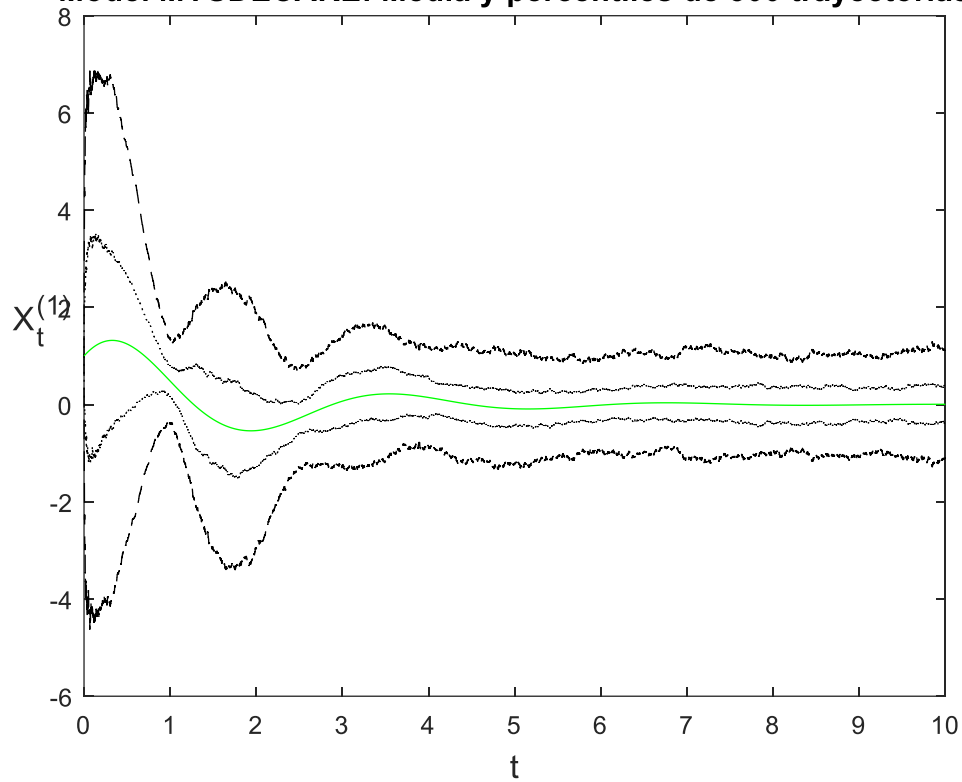
### **Resolución del sistema cuántico de referencia con control óptimo**



Gráfica 4.4. 300 trayectorias del sistema de referencia con el control

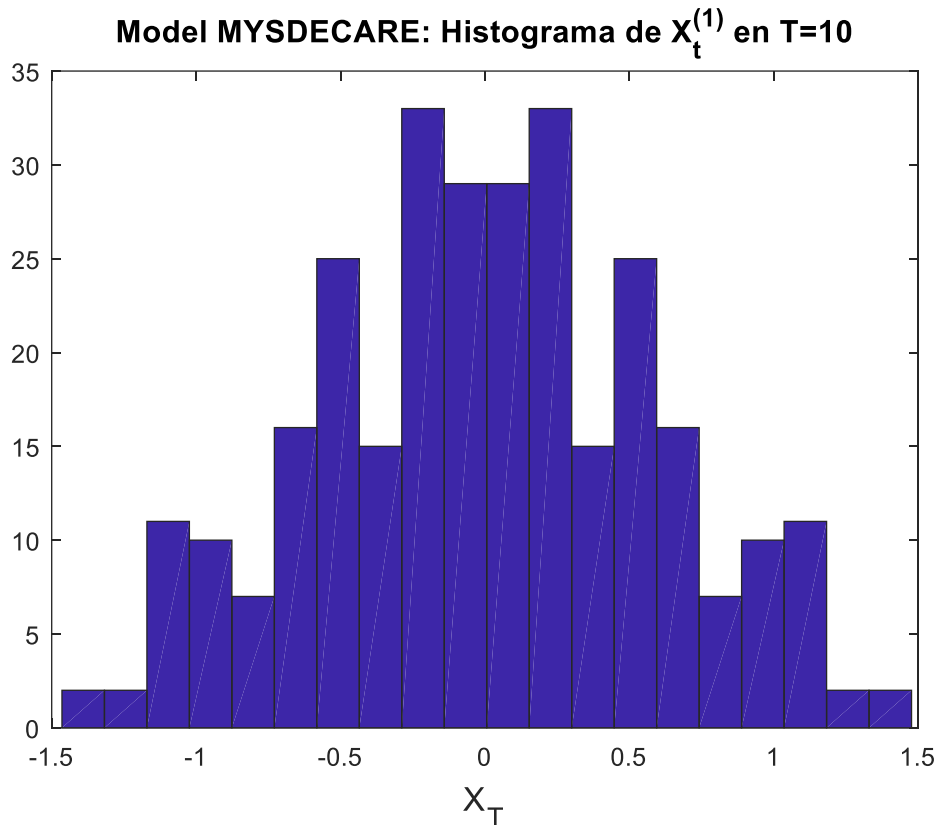
Como se observa en la gráfica 4.4, aunque el conjunto de las soluciones se haya estabilizado, el comportamiento estocástico se mantiene en la evolución del estado.

### Model MYSDECARE: Media y percentiles de 300 trayectorias



Gráfica 4.5. Media y cuartiles del sistema de referencia con el control

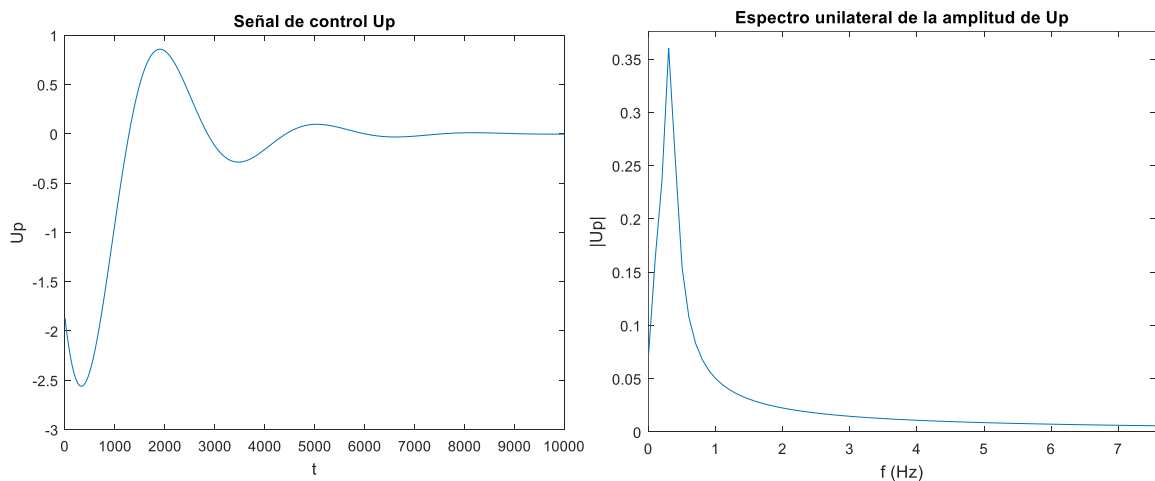
Al aplicar el control óptimo sobre el sistema propuesto, se observa en la gráfica 4.5 que la señal de la posición se amortigua y se estabiliza rápidamente con un sobre-pico de 1,321 unidades.



Gráfica 4.6. Histograma en  $T=10$  del sistema de referencia con el control

En el histograma de la gráfica 4.6 se puede apreciar cómo la varianza de la posición disminuye considerablemente con respecto al histograma de la señal sin controlar.

Señal de control óptimo  $U$ :



Gráfica 4.7. Señal de control del sistema de referencia y su transformada de Fourier

En la gráfica 4.7 se representa la señal de control para controlar el sistema cuántico lineal propuesto (de referencia) y su transformada de Fourier. Se aprecia una clara dominancia de la frecuencia de 0,41 con amplitud de 0,36.

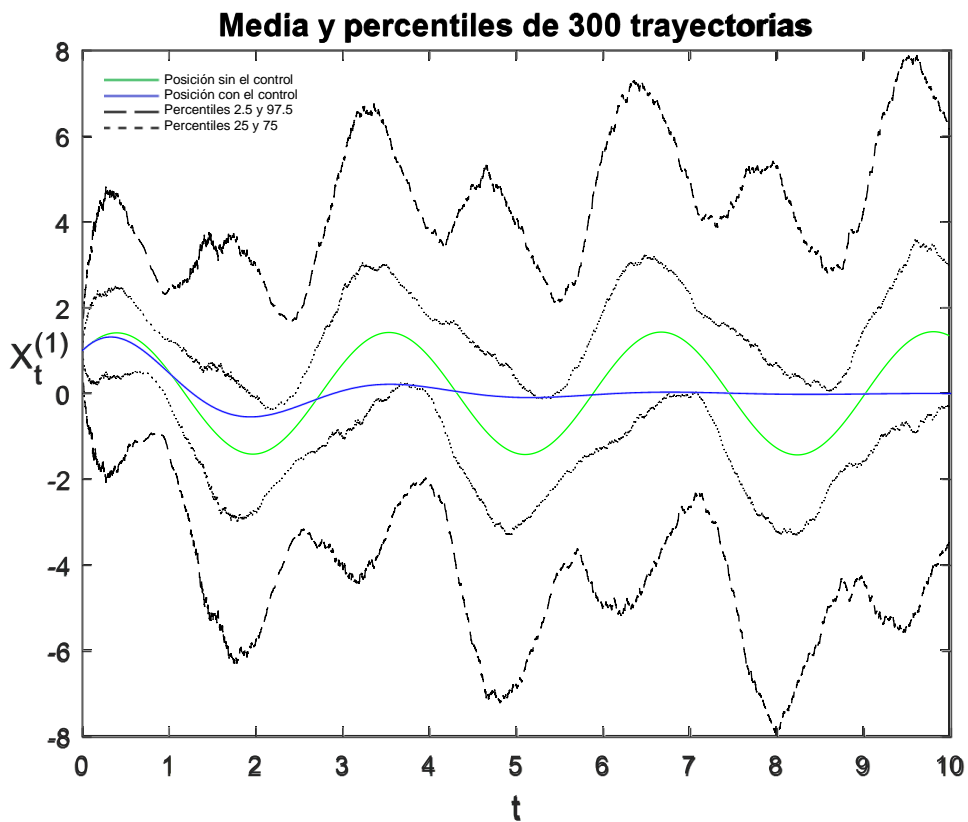


A continuación, para reducir el contenido y facilitar la interpretación de los datos, se van a omitir las simulaciones del momento, ya que presentan las mismas variaciones y observaciones que las señales de posición. Se van a omitir también las señales de las demás tres variables del sistema de ecuaciones, que son la varianza de la posición, la varianza del momento y la covarianza, ya que éstos no presentan parte estocástica y todas las trazas coinciden.

## Variación en la eficiencia de la medida, $\eta$

La simulación comparativa en este apartado será disminuyendo la eficiencia de la medida drásticamente.

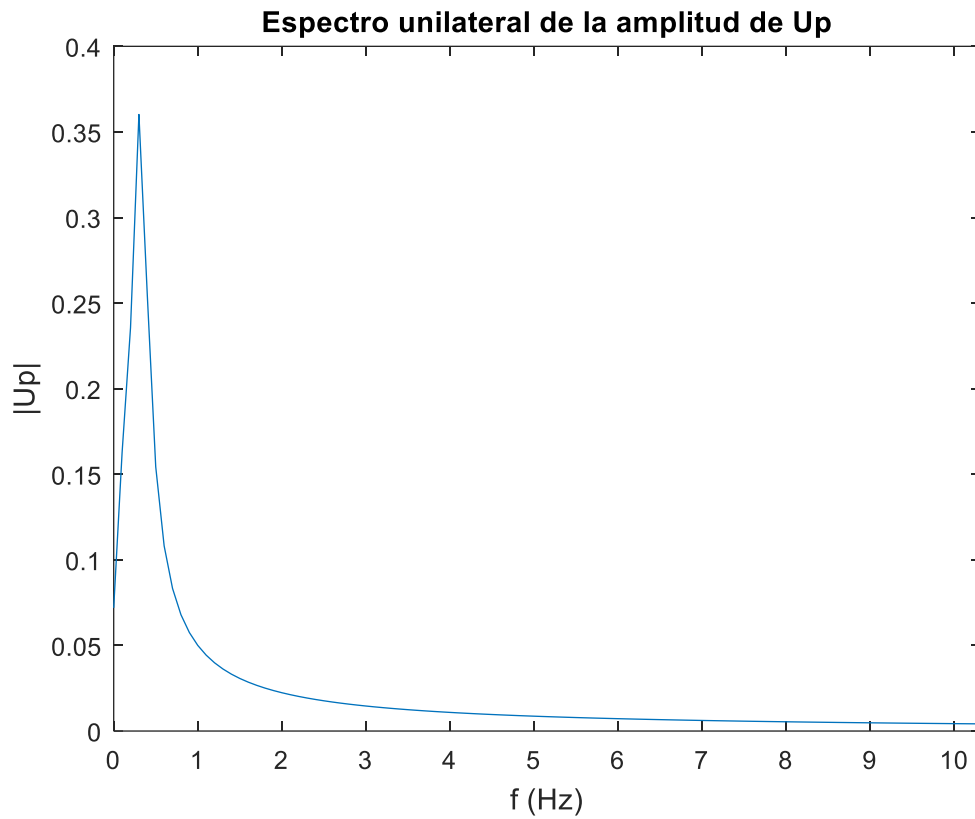
Referencia		→	Actual	
$m$	1		$m$	1
$\eta$	0,7		$\eta$	0,02
$k$	1		$k$	1
$\omega_0$	2		$\omega_0$	2



Gráfica 4.8. Señal sin y con control del sistema con  $\eta = 0.02$

Se observa en la gráfica 4.8 que, cuando disminuye la eficiencia de la medida, la oscilación de la posición es idéntica, aunque varía el rango intercuartílico, debido a que la medida no es tan exacta. La simulación contiene 300 trazas, la cual robustece los datos obtenidos, y aunque las medidas hayan sido más difusas, la media se mantiene.

Señal de control óptimo  $U_D$ :



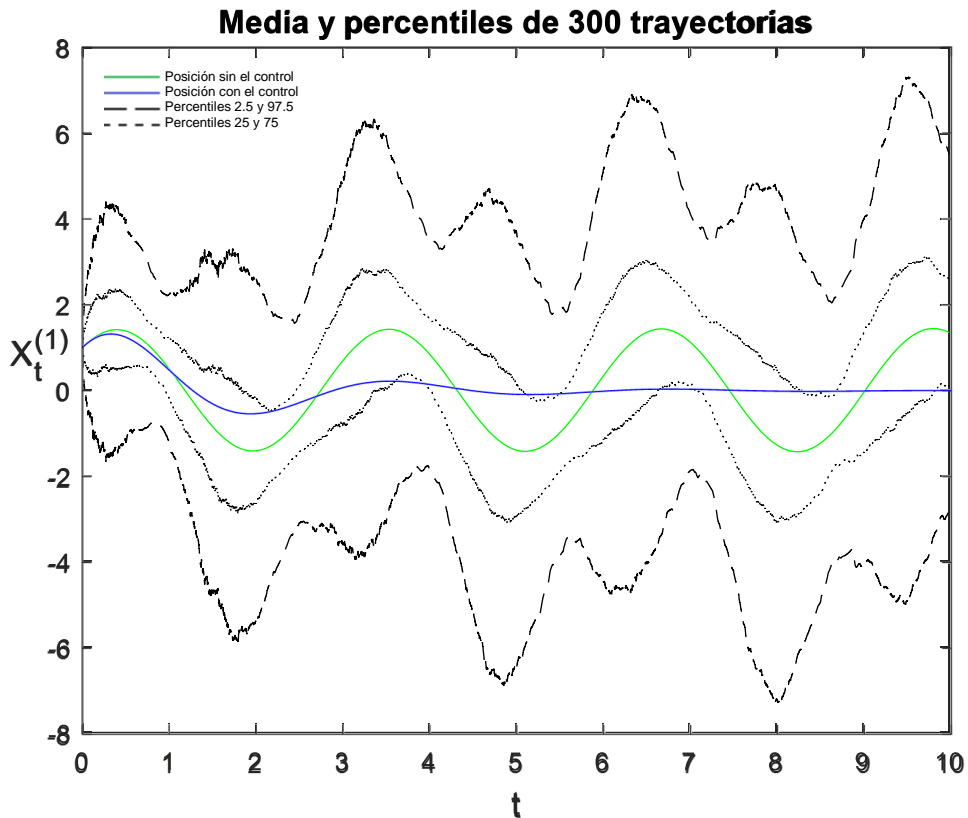
Gráfica 4.9. Transformada de Fourier de la señal de control del sistema con  $\eta = 0.02$

Habiendo disminuido la eficiencia de la medida, la señal de control óptimo se mantiene idéntica, tal y como se observa en la gráfica 4.9.

## Variación en la fuerza de la medida, $k$

La variación que se va a realizar en el sistema significa que se va a simular una medida bastante más suave que en el sistema de referencia.

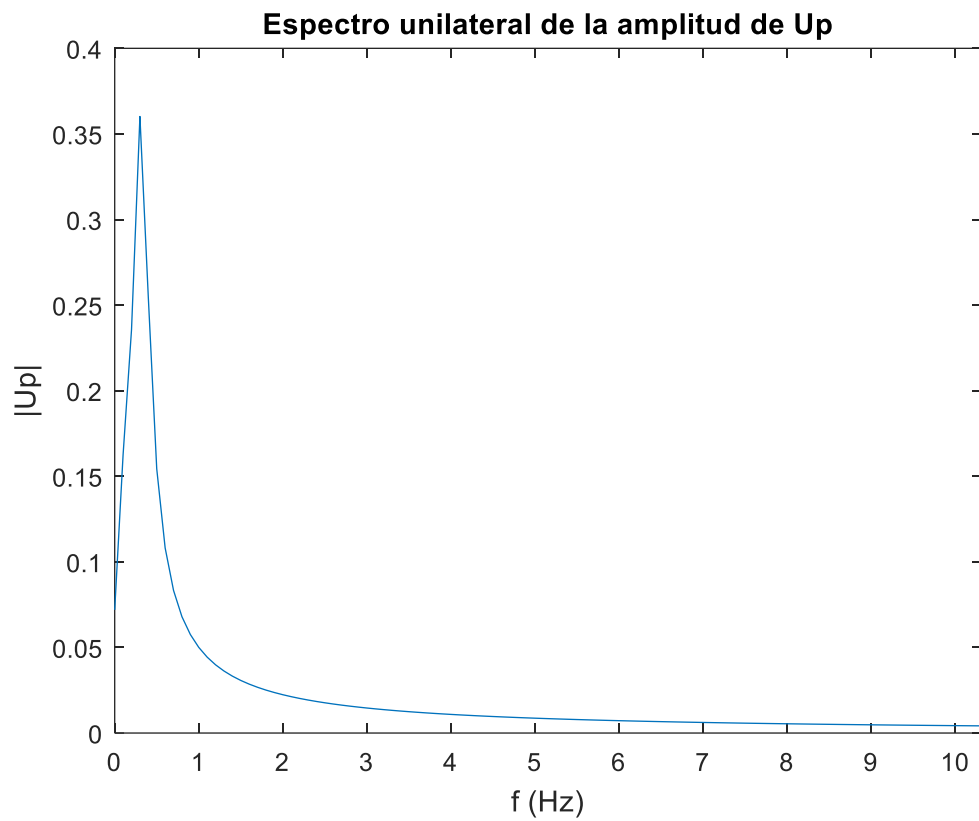
Referencia		→	Actual	
$m$	1		$m$	1
$\eta$	0,7		$\eta$	0,7
$k$	1		$k$	0,02
$\omega_0$	2		$\omega_0$	2



Gráfica 4.10. Señal sin y con control del sistema con  $k = 0.02$

Se observa en la gráfica 4.10 que el rango intercuartílico presenta mayor difusión al principio, debido a que la medida es muy suave y la cantidad de información que se obtiene es muy pequeña, aunque los valores esperados son idénticos ya que este coeficiente, al igual que la eficiencia de la medida, influye solamente en el ruido introducido a la hora de realizar la medida, y los valores esperados se mantienen.

Señal de control óptimo  $U_D$ :



Gráfica 4.11. Transformada de Fourier de la señal de control del sistema con  $k = 0.02$

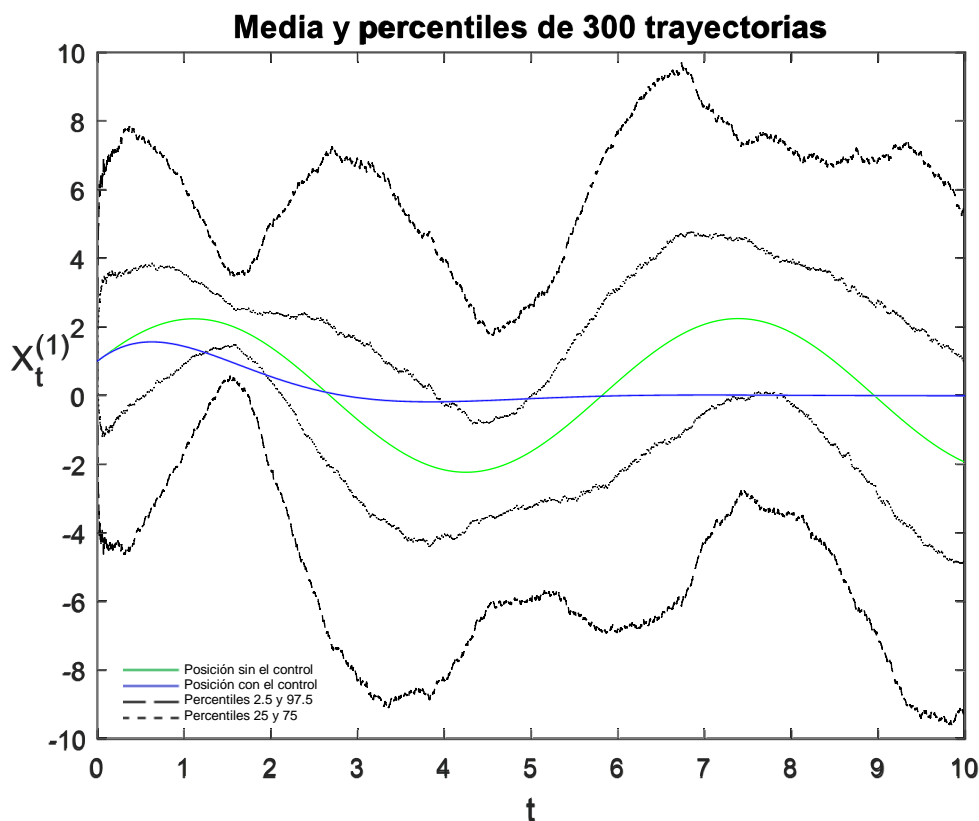
De nuevo, en la señal de control no se observa ninguna variación debido a que el sistema no ha sufrido ninguna variación.

## Variación en la frecuencia de oscilación, $\omega_0$

En este apartado se empiezan a variar parámetros del sistema cuántico en sí, es decir, se esperan variaciones en los valores esperados, a diferencia de los apartados anteriores, en los que se han modificado solamente coeficientes que influían en el ruido introducido por la medida.

En este caso se va a disminuir la frecuencia del oscilador armónico.

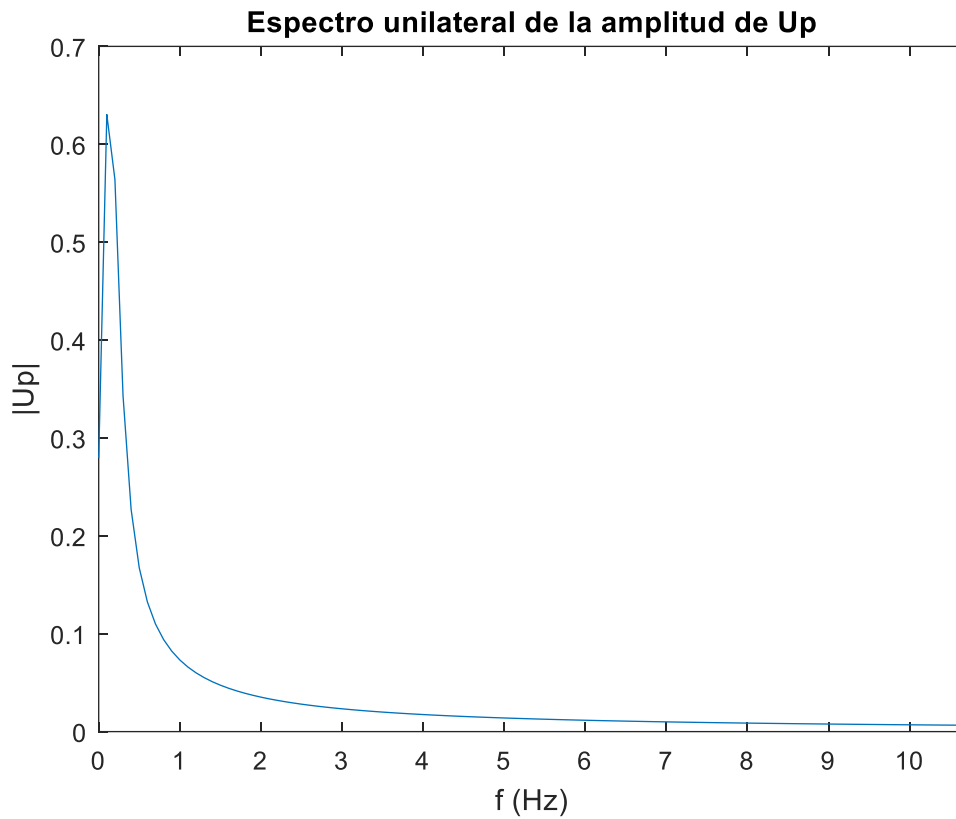
Referencia		→	Actual	
$m$	1		$m$	1
$\eta$	0,7		$\eta$	0,7
$k$	1		$k$	1
$\omega_0$	2		$\omega_0$	1



Gráfica 4.12. Señal sin y con control del sistema con  $\omega_0 = 1$

Como era de esperar, la frecuencia de oscilación de la posición ha disminuido por la mitad. Se observa en la gráfica 4.12 mayor amplitud de oscilación en la señal sin controlar, mayor sobre-pico en la señal controlada, aunque ésta se estabiliza antes. Esta vez los valores esperados se han modificado, debido a que se ha modificado un parámetro del sistema.

Señal de control óptimo  $U_p$ :



Gráfica 4.13. Transformada de Fourier de la señal de control del sistema con  $\omega_0 = 1$

La señal de control óptimo ha sufrido una variación, aunque mantiene la forma. Esta variación es debida a que se ha modificado un parámetro del sistema cuántico, por tanto, la señal de control requerida es diferente, aunque no menos compleja. Se aprecia en la gráfica 4.13 que, al disminuir la frecuencia de oscilación del sistema, se necesita una señal de control más fuerte.

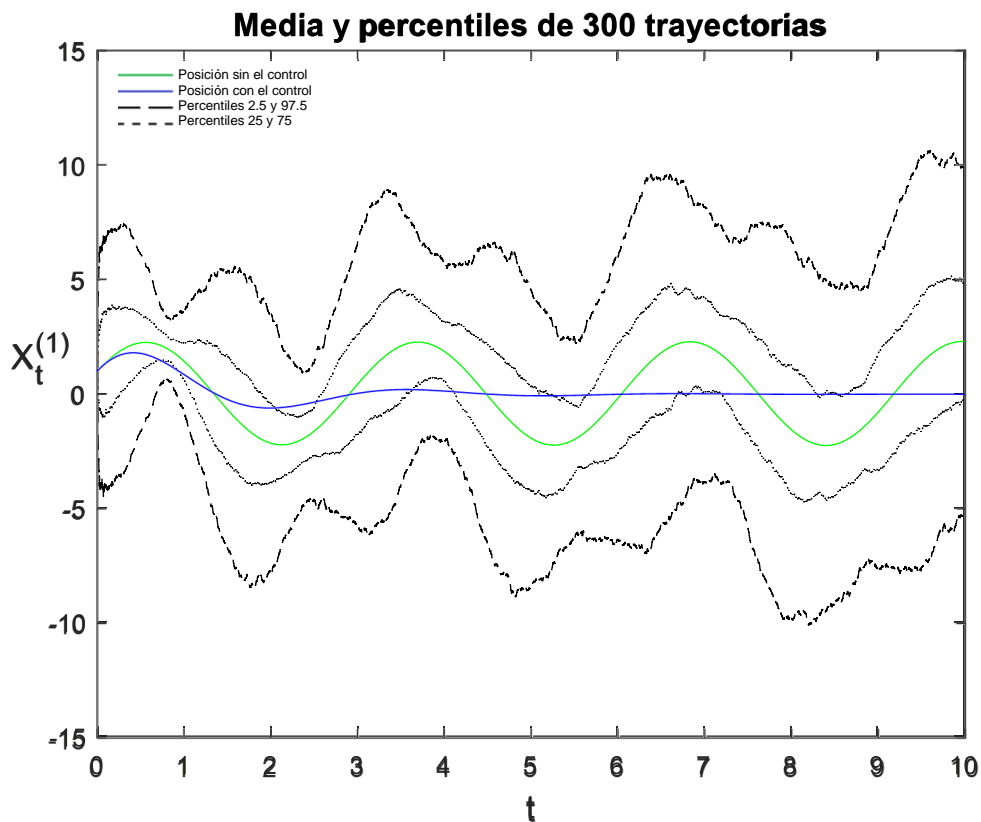
## Variación en la masa de la partícula cuántica, $m$

En este apartado se va a variar otro parámetro del sistema cuántico, por tanto, se esperan variaciones en los valores esperados. En este caso disminuye la masa de la partícula cuántica por la mitad.

Referencia	
$m$	1
$\eta$	0,7
$k$	1
$\omega_0$	2

➔

Actual	
$m$	0,5
$\eta$	0,7
$k$	1
$\omega_0$	2

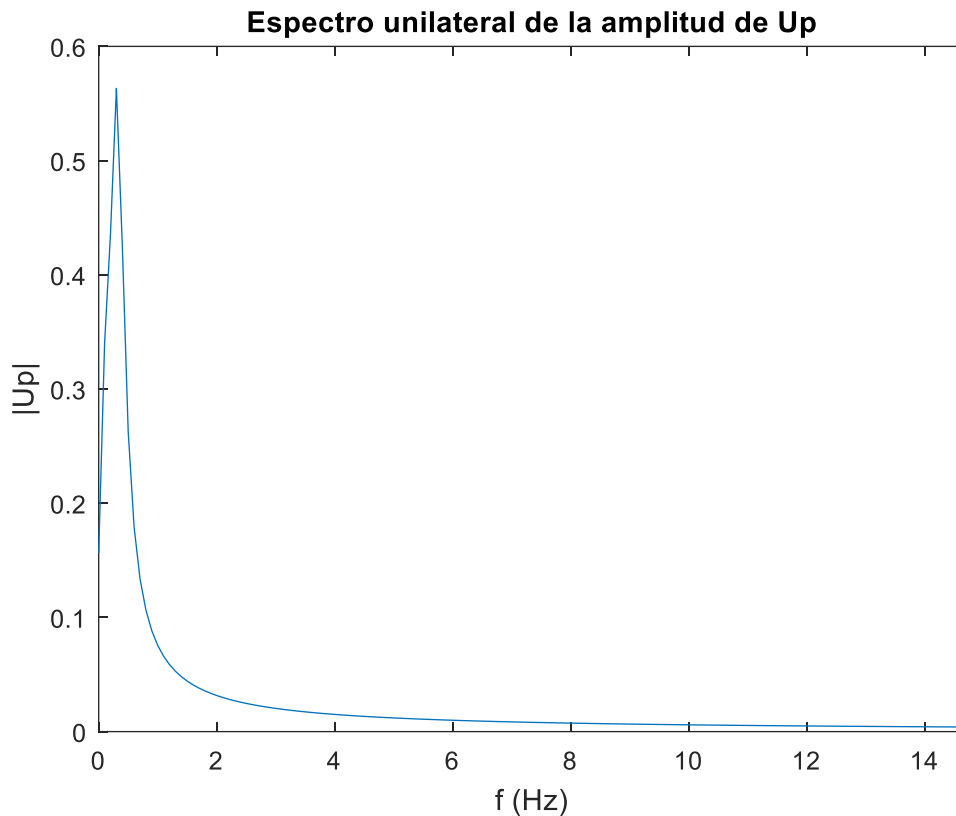


Gráfica 4.14. Señal sin y con control del sistema con  $m = 0.5$

Al disminuir la masa de la partícula cuántica, se observa en la gráfica 4.14 un aumento en la amplitud de oscilación de la posición (2,9 unidades), también se aprecia que la señal de la posición controlada presenta un sobre-pico mayor (1,9 unidades), aunque tarda menos en estabilizarse (4,5 unidades, 5 en el sistema de referencia).



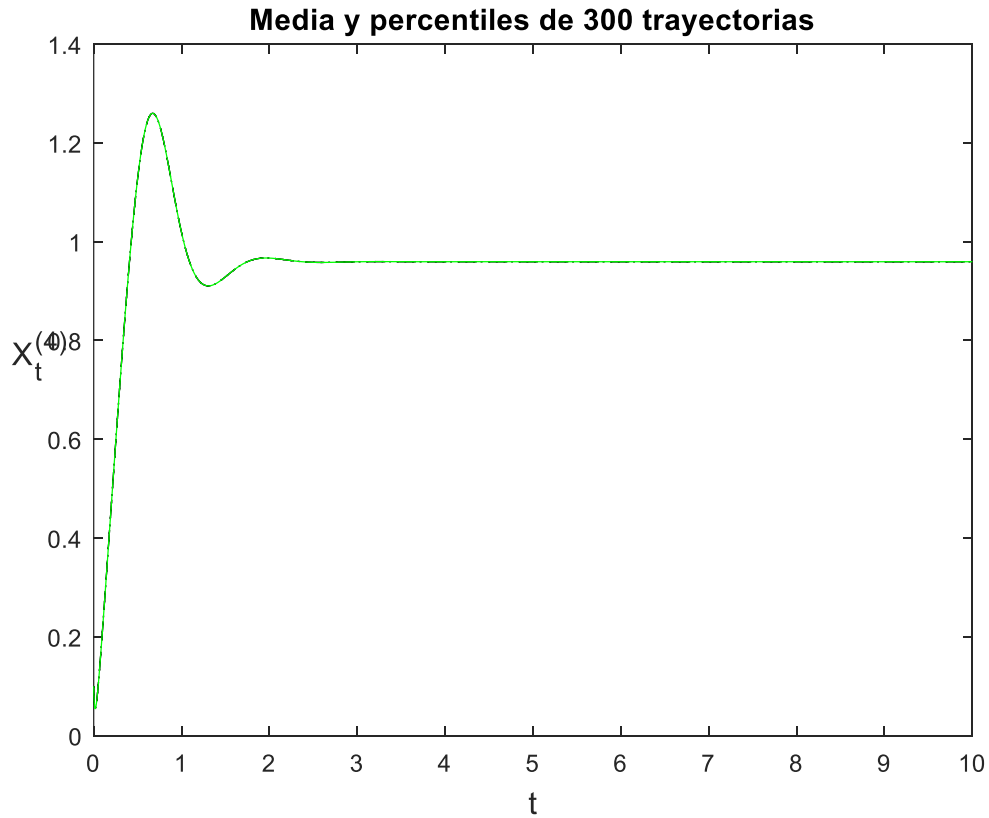
Señal de control óptimo  $U_D$ :



Gráfica 4.15. Transformada de Fourier de la señal de control del sistema con  $m = 0.5$

Se observa que, al variar la masa, la señal controlada ha sufrido cambios en el tiempo de la estabilización. Además, la variación de la masa ha influido en la señal de control, al disminuir la masa ha aumentado la amplitud de la señal de control. Se concluye, además, que al disminuir la masa de la partícula cuántica aumenta la amplitud de oscilación de la posición.

También es importante observar el comportamiento de las señales de las varianzas, es predecible que va a ser determinista, ya que las ecuaciones que las definen, carecen de parte estocástica.



Gráfica 4.16. Varianza de posición del sistema

Tal y como se esperaba, se observa en la gráfica 4.16 que la varianza de la posición carece de parte estocástica, y se estabiliza muy rápido en torno a 0,95 unidades, por ello Jacobs, en [14] habla de la posibilidad de aproximar los valores de las varianzas a una constante. Se han omitido estas simulaciones debido a que siempre tienen el comportamiento descrito.

## **CAPÍTULO 5**

### **DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES**

El objetivo de este trabajo ha sido iniciar un proyecto de investigación asociado a la resolución numérica y simulación del comportamiento de sistemas estocásticos y control óptimo aplicado, con potenciales aplicaciones en tecnologías cuánticas. Se ha llevado a cabo mediante el uso de un Toolbox de Matlab[18].

Antes de poder abordar el problema propuesto, se ha introducido brevemente tanto los fenómenos cuánticos y la medida sobre sistemas cuánticos como el cálculo estocástico. A continuación, se ha introducido el control óptimo cuadrático y se ha adaptado el Toolbox mencionado a las ecuaciones estocásticas de interés.

Se ha escogido el sistema cuántico lineal más simple, el oscilador armónico cuántico, y se ha simulado su comportamiento ante la medida, los resultados corroboran la estocasticidad del sistema cuántico, existente por el ruido inevitable introducido mediante la realización de la medida sobre el mismo. Siendo el sistema cuántico lineal con ruido Gaussiano, se ha diseñado control óptimo cuadrático. A continuación, se ha tratado el sistema como un sistema clásico lineal con ruido Gaussiano y se ha aplicado el control LQG (control lineal cuadrático Gaussiano), descrito en el apartado correspondiente. Esto se ha reducido en la resolución de la ecuación de Riccati, la cual proporciona la ganancia de la señal de control  $K = B^T \Omega_t$  en estacionario, mediante la cual se controla el sistema propuesto. El parámetro del sistema sobre el que se actúa con la señal de control es el momento  $\langle P \rangle$ . Se escoge como el observable del sistema la posición  $\langle X \rangle$  y se aprecia en las gráficas el efecto de dicho control. El sistema se estabiliza tal y como se esperaba.

A continuación, se han variado los parámetros del sistema de ecuaciones para observar la dinámica del sistema. Variando los parámetros de la medida como la eficiencia y la fuerza de la medida,  $\eta$  y  $k$  respectivamente, no se ha observado variación alguna en la dinámica del sistema sino en la difusión de los resultados. Es decir, esto ha afectado a la incertidumbre del estado del observable, ya que son parámetros que describen la medida y no el sistema. Cuando se ha reducido la eficiencia de la medida, se observa en la gráfica 4.8 que los rangos de los percentiles presentan mayor difusividad, debido a que se obtiene menor información en cada medida. Cuando se ha variado la fuerza de la medida, al disminuir ésta, también se ha observado mayor difusión en los percentiles debido a que al ser la medida suave, se obtiene menor información. Seguidamente se ha variado la masa  $m$  y la frecuencia de oscilación  $\omega_0$  del sistema. Al disminuir la frecuencia de oscilación, se observa mayor amplitud de la misma, mayor sobre-pico en la señal controlada y una señal de control más fuerte. Cuando se ha disminuido la masa del sistema, al igual que el en caso de la frecuencia, se ha observado en la gráfica 4.14 una mayor amplitud de oscilación, mayor sobre-pico en la señal controlada y menor tiempo de estabilización.

El siguiente objetivo de esta investigación sería intentar controlar el sistema propuesto mediante una combinación de varias señales sinusoidales, con amplitudes y frecuencias observadas en la transformada de Fourier de la señal de control ideal que se ha obtenido en este trabajo.

Cabe mencionar que el Toolbox de Matlab utilizado en este trabajo permite crear modelos propios, para resolver sistemas de ecuaciones estocásticas diferentes, aunque éstas sean no lineales.

## APÉNDICE

Para resolver y simular las ecuaciones diferenciales estocásticas se utiliza un Toolbox de Matlab diseñado para trabajar con dichas ecuaciones. Aunque cabe destacar que se han realizado los cambios necesarios para adaptar dicho Toolbox al sistema que se quiere estudiar. En apartados siguientes se detallarán dichos cambios.

### SDE Toolbox

Para empezar a trabajar con SDE Toolbox[18], en primer lugar, es necesario descargarlo desde la página web <http://sdetoolbox.sourceforge.net>, extraer el archivo .zip en una ubicación reconocible por Matlab y escoger la carpeta extraída en la opción *set path*.

La librería de este Toolbox presenta varios modelos de ecuaciones diferenciales estocásticas para trabajar con ello y se recogen en la imagen A.1:

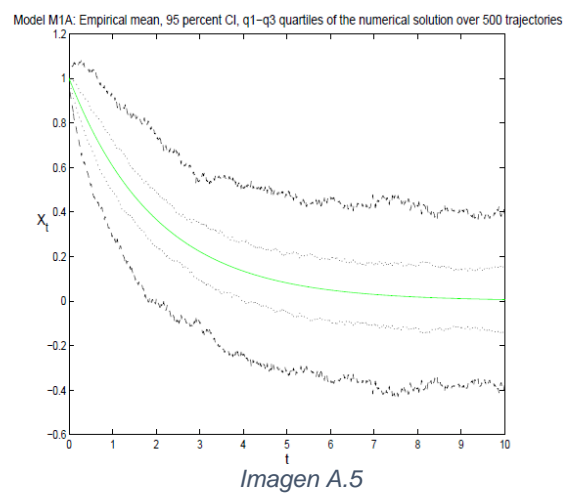
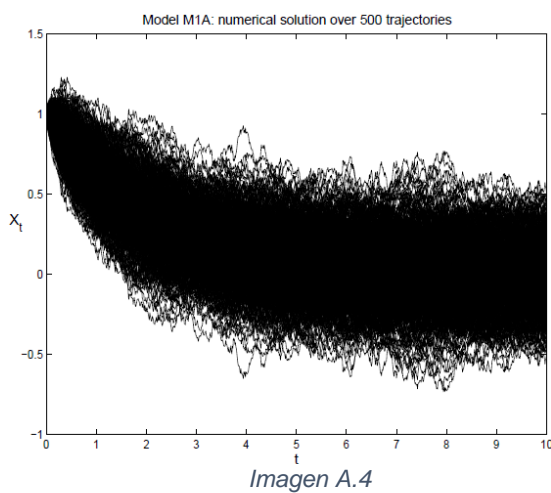
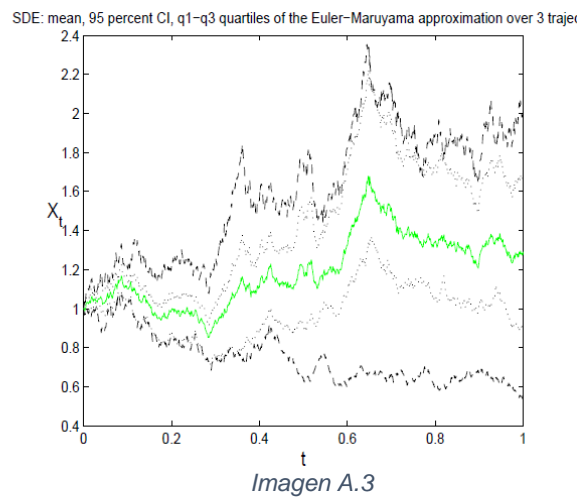
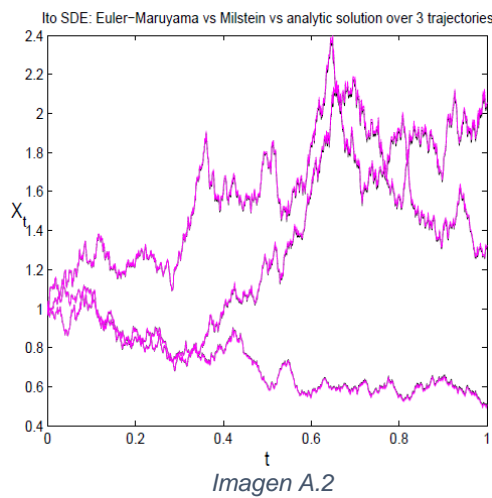
Model name	Definition
M1a	$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t$
M1b	$dX_t = -aX_t dt + \sigma \circ dW_t$
M2a	$dX_t = (aX_t + b)dt + \sigma dW_t$
M2b	$dX_t = (aX_t + b)dt + \sigma \circ dW_t$
M3a	$dX_t = (a - \sigma^2/2)dt + \sigma dW_t$
M3b	$dX_t = (a - \sigma^2/2)dt + \sigma \circ dW_t$
M4a	$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t$
M4b	$dX_t = (aX_t - 1/2b^2 X_t)dt + bX_t \circ dW_t$
M5a	$dX_t = (aX_t + c)dt + (bX_t + d)dW_t$
M5b	$dX_t = [(a - 1/2b)X_t + c - 1/2bd]dt + (bX_t + d) \circ dW_t$
M6a	$dX_t = [1/2a(a - 1)X_t^{1-2/a}]dt + aX_t^{1-1/a} dW_t$
M6b	$dX_t = [aX_t^{1-1/a}] \circ dW_t$
M7a	$dX_t = [-1/2a^2 X_t]dt + a\sqrt{1 - X_t^2} dW_t$
M7b	$dX_t = a\sqrt{1 - X_t^2} \circ dW_t$
M8a	$dX_t = [a^2 X_t(1 + X_t^2)]dt + a(1 + X_t^2)dW_t$
M8b	$dX_t = a(1 + X_t^2) \circ dW_t$
M9a	$dX_t^1 = [\beta_{11}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 - \beta_{11}X_t^1 - \beta_{12}X_t^2]dt + \sigma_1 dW_t^1$ $dX_t^2 = [\beta_{21}\alpha_1 + \beta_{22}\alpha_2 - \beta_{21}X_t^1 - \beta_{22}X_t^2]dt + \sigma_2 dW_t^2$
M9b	$dX_t^1 = [\beta_{11}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 - \beta_{11}X_t^1 - \beta_{12}X_t^2]dt + \sigma_1 \circ dW_t^1$ $dX_t^2 = [\beta_{21}\alpha_1 + \beta_{22}\alpha_2 - \beta_{21}X_t^1 - \beta_{22}X_t^2]dt + \sigma_2 \circ dW_t^2$
M10a	$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$
M10b	$dX_t = [a(b - X_t) - \sigma^2/4]dt + \sigma\sqrt{X_t} \circ dW_t$

Imagen A.1

El subíndice “a” indica que el método de integración de las ecuaciones estocásticas utilizado para su resolución es Itô[19] y, al contrario, el subíndice “b” indica que el método es de Stratonovich[20]. En este trabajo se va a enfocar la integración estocástica mediante la metodología de cálculo de Itô.

Dentro de cada método de cálculo, se puede elegir el método numérico para calcular la integral, Euler-Maruyama o Milstein. Estos métodos matemáticos están explicados en detalle en el manual que adjunta el autor del Toolbox[18]. Los dos métodos proporcionan una solución que difiere de la solución analítica con un error mínimo, como se demuestra con el modelo “demo” que proporciona el Toolbox utilizado. Dicho “demo” consiste en resolver una ecuación (conociendo la solución analítica) mediante el método de Euler-Maruyama y Milstein. Seguidamente se observa en la imagen A.2 la comparación entre las soluciones proporcionadas por estos métodos (líneas de color negro) y la solución analítica (línea de color rosa). Como se observa, apenas se puede apreciar las diferencias.

También se aprecia en la imagen A.3 que a partir de todas las trazas (3 en este caso) se calcula la solución media (línea de color verde), el intervalo que recoge los datos entre los percentiles de 2,5 y 97,5, y el primero y el tercer cuartil para cada instante. Cuantas más trazas se proporcionen, más estable será la solución media, como se observa en la imagen A.4 y 1.5, donde se proporcionan 500 trazas para la misma



ecuación.

Aparte de los resultados mostrados, dicho Toolbox proporciona más datos, como el histograma, datos estadísticos, etc.; y no serán de interés en este trabajo.

### Simulación de SDE

Para resolver uno de los modelos presentados en la imagen A.1 se ejecuta el archivo `SDE_library_run.m`. A continuación, el programa pide una serie de parámetros:

1. “Do you want to estimate parameters from data [Y/N]?”<sup>11</sup> Si se desea estimar los parámetros, se escribe Y, y se especifica el archivo de datos con la extensión .dat. En este trabajo los parámetros no serán estimados y se escogerá N;
2. Introducir el nombre del modelo deseado según la imagen A.1;
3. Los valores de los parámetros que intervienen en las ecuaciones;
4. Las condiciones iniciales de X (X0);
5. El número de las trazas a simular;
6. Los valores del tiempo inicial y final, T0 y T;
7. El intervalo de tiempo, h, utilizado para el cálculo numérico donde se tiene que cumplir  $0 < h \ll T$ ;
8. El método de integración: EM (Euler-Maruyama) o Mil (Milstein). En caso de la ecuación diferencial estocástica de Stratonovich se aplica el método de Milstein automáticamente;

A continuación, se muestra un ejemplo de resolución y simulación de uno de los modelos (con una variable) presentados por el autor del Toolbox.

### Ejemplo 1

En este ejemplo se escoge el modelo M4a de la imagen A.1:

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t \quad (1)$$

Donde a los parámetros “a” y “b” se les da valores de 0.1 y 0.2 respectivamente. Condición inicial,  $X_0 = 5$ . Número de trazas 15. Tiempo inicial 0 y final 5. Intervalo de tiempo,  $h = 0.01$ . Método numérico EM (Euler – Maruyama). Se simula y se obtiene la siguiente solución:

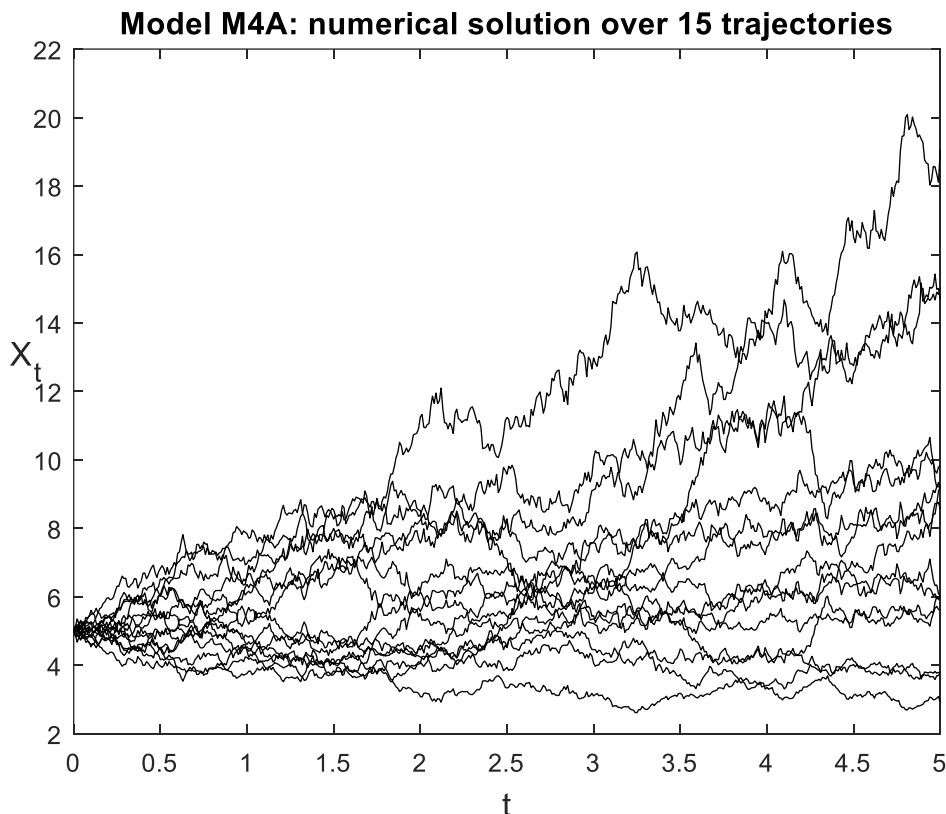


Imagen A.6

<sup>11</sup> Traducción: ¿Desea estimar los parámetros de data [SI/NO]?

Empirical mean, 95 percent CI, q1-q3 quartiles of the numerical solution over

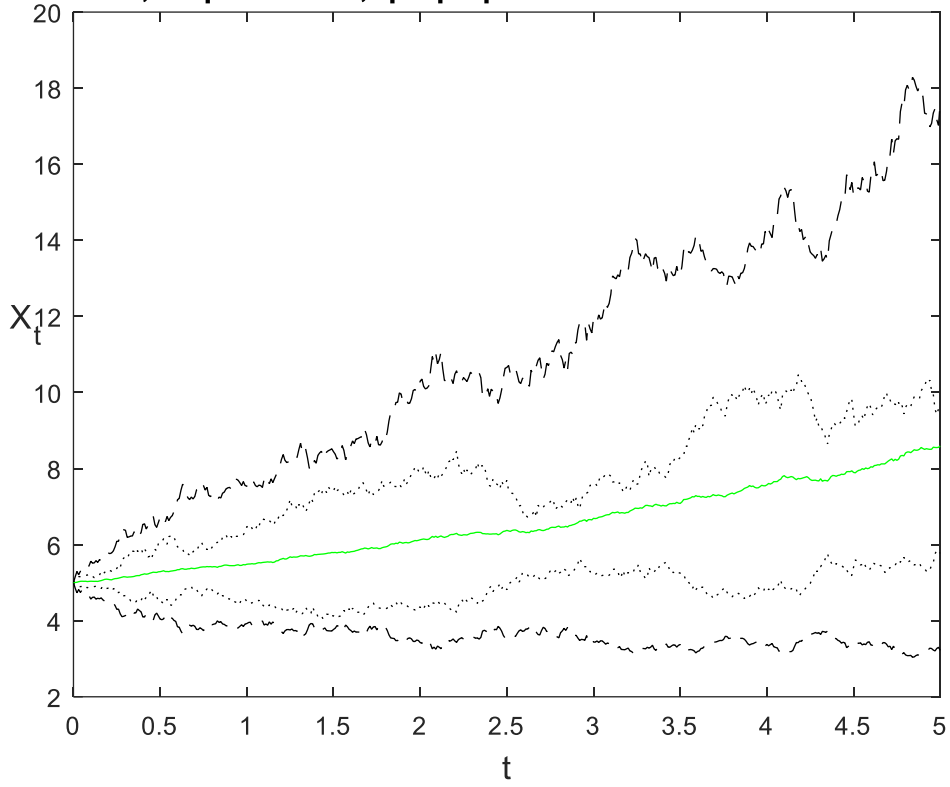


Imagen A.7

Model M4A: histogram of  $X_t$  at end-time T=5

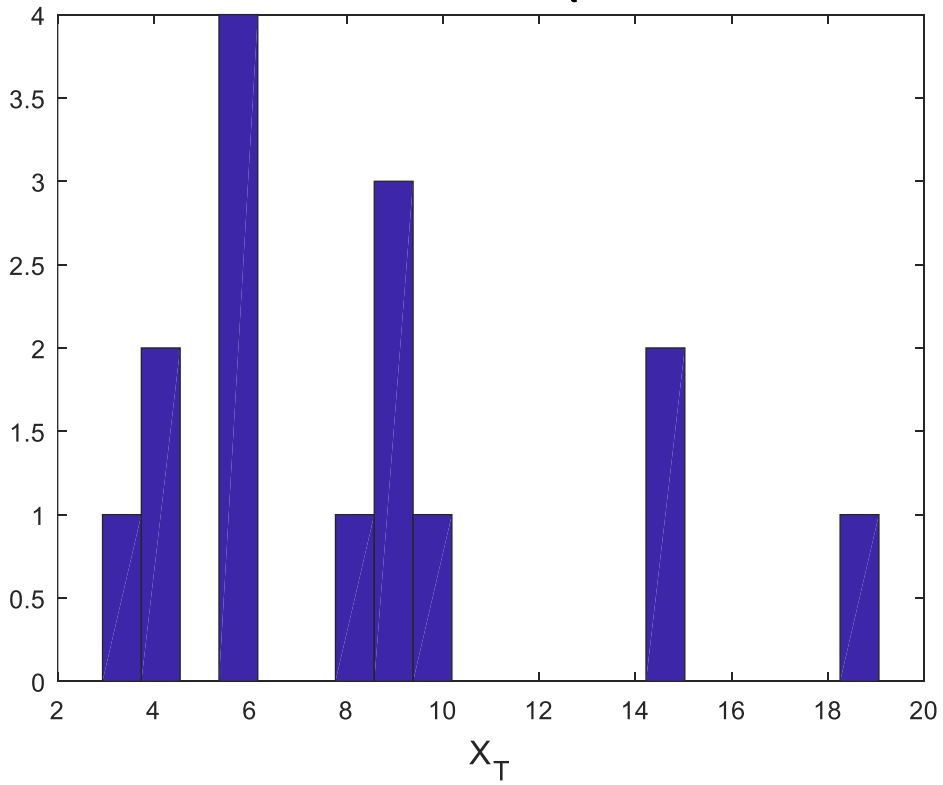


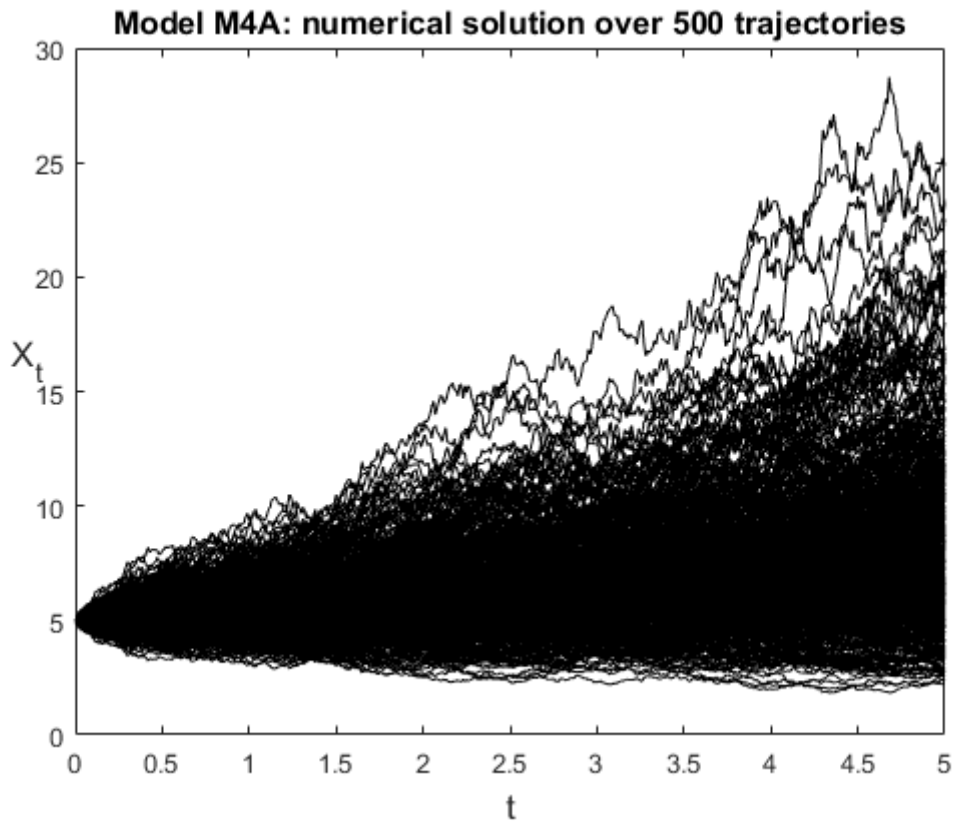
Imagen A.8



Se observa en la imagen A.6 el comportamiento estocástico de la ecuación diferencial (1) en cada traza de la solución. En la imagen A.7 se muestra la solución media de las trazas (línea verde), el primer y el tercer cuartil de las soluciones, y los percentiles 2,5 y 97,5. En la imagen A.8 se aprecia el histograma de la variable en la última iteración del cálculo numérico.

### Ejemplo 2

Para apreciar la influencia de mayor número de trazas se va a realizar un segundo ejemplo con los mismos parámetros. Solamente se cambia el número de trazas de 15 a 500. Las soluciones se representan en las siguientes imágenes.



*Imagen A.9*

empirical mean, 95 percent CI, q1-q3 quartiles of the numerical solution over

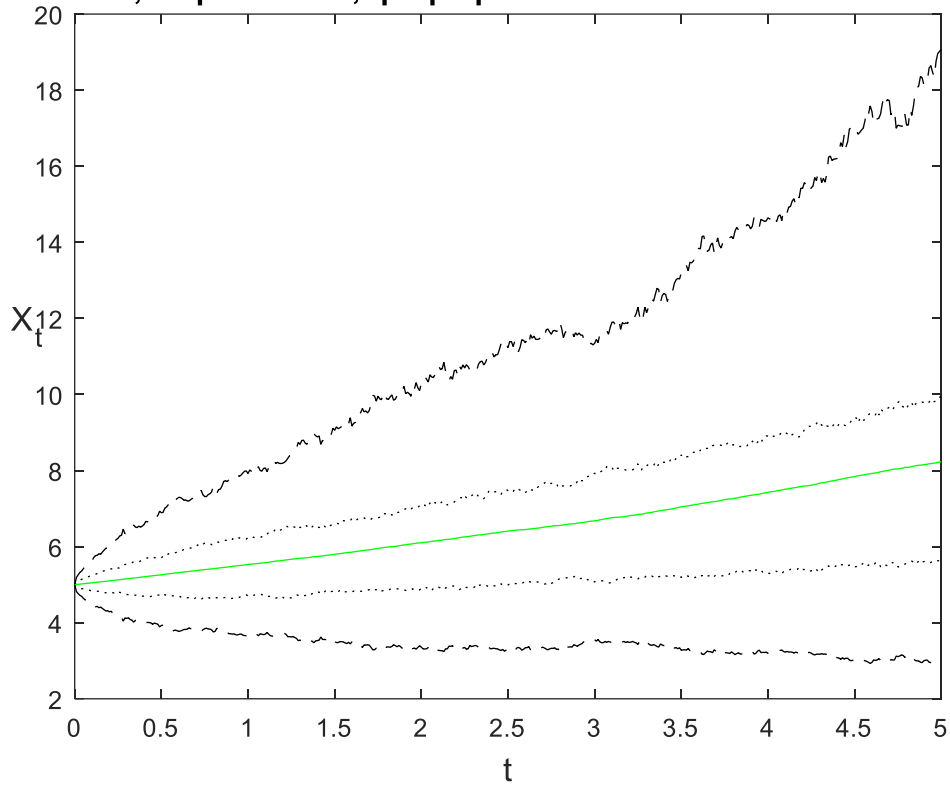


Imagen A.10

Model M4A: histogram of  $X_t$  at end-time T=5

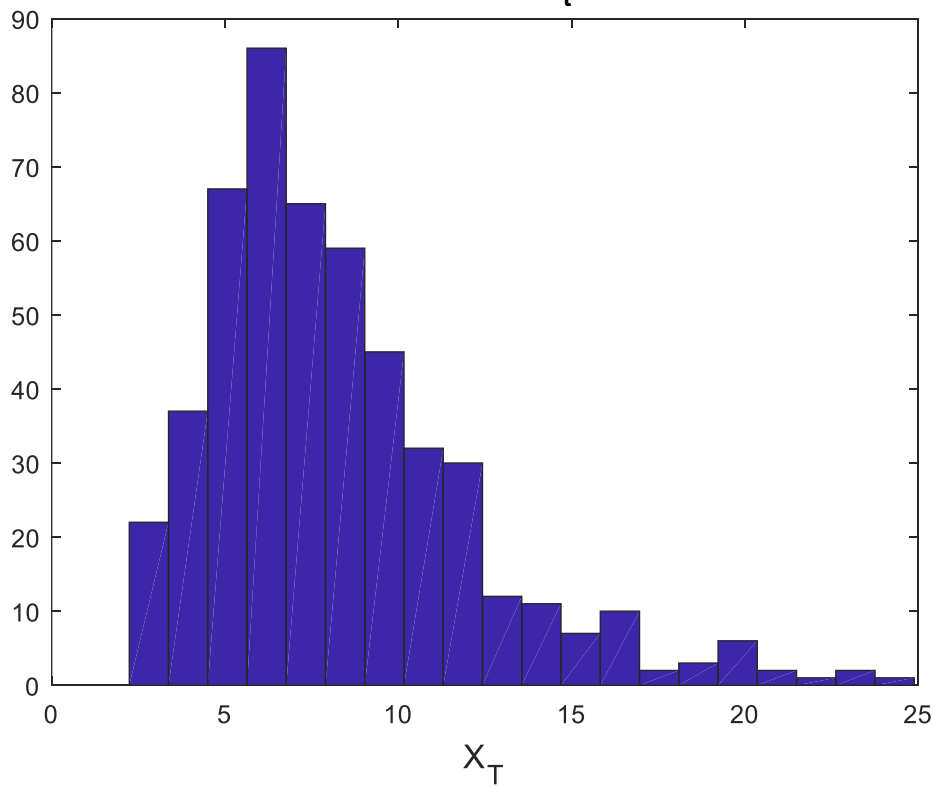


Imagen A.11

Se aprecia en la imagen A.10 la solución media con mayor precisión, ya que se dispone de mayor número de trazas. En la imagen A.11 se observa mejor que en el ejemplo anterior la tendencia hacia una distribución.

El procedimiento de la resolución de los modelos con dos variables (imagen A.1, modelo M9a) es idéntico, pues se van a omitir estos ejemplos.

El comando “*care*” se utiliza para resolver la ecuación de Riccati en estacionario, ecuación (3.22), y se implementa en el código una vez que se elige el modelo de ecuaciones que se van a resolver (el del sistema controlado en este caso). En el archivo *SDE\_library\_setup.m* primero se define el sistema,  $A$ , y  $B$ , y a continuación se calcula la matriz de ganancias  $K$  con el comando “*care*”.

#### *Crear modelo SDE*

La gran ventaja de dicho Toolbox es que permite crear modelos propios, y es donde se va a aprovechar esta herramienta, para adecuarla al sistema de interés, simularlo y posteriormente diseñar el control óptimo.

Para la resolución de la dinámica libre del sistema se ha creado un modelo propio llamado *mysde* que resuelve el sistema de ecuaciones (2.30).

Para la resolución del sistema controlado mediante LQG, se ha creado un modelo llamado *mysdecare* y resuelve el sistema de ecuaciones (3.24).

Los parámetros del sistema se modifican en el archivo *SDE\_library\_setup.m* en el apartado del modelo correspondiente.

Los detalles para la realización de un modelo propio vienen explicados en el manual del autor del Toolbox.

Para introducir ecuaciones deterministas en el modelo creado, se han escogido los coeficientes de difusión de las mismas como nulos.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- [1] A. Acín *et al.*, “The European Quantum Technologies Roadmap,” pp. 1–30, 2017.
- [2] L. L. C. Evans, “An introduction to stochastic differential equations,” *Differ. Equations*, vol. 14, no. 2, pp. 181–188, 1983.
- [3] Mathworks, “Matlab.” [Online]. Available: <https://es.mathworks.com/products/Matlab.html>.
- [4] L. C. Evans, “An introduction to mathematical optimal control theory,” *Univ. California, Dep. Math.*, p. 126, 2005.
- [5] “Quantum Technologies Roadmap,” 2016. [Online]. Available: <http://qeuropa.eu/h2020/qtflagship/roadmap2016>.
- [6] J. J. García-Ripoll, “Computación cuántica con iones atrapados,” vol. 2, no. 9, pp. 1–3.
- [7] N. Materise, “An Introduction to Superconducting Qubits and Circuit Quantum Electrodynamics,” pp. 1–8, 2017.
- [8] S. J. Devitt, K. Nemoto, and W. J. Munro, “Quantum Error Correction for Beginners,” pp. 1–41, 2009.
- [9] R. Cleve, “An Introduction to Quantum Complexity Theory,” 1999.
- [10] R. Van Leeuwen, “Introduction to Many-body Theory,” 2014.
- [11] J. Tuorila, “Condensed Matter Physics,” 2012.
- [12] J. von Neumann, “Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica,” 1991.
- [13] P. A. M. Dirac, *PRINCIPLES OF QUANTUM MECHANICS*. Oxford University Press, 1930.
- [14] K. Jacobs and D. A. Steck, “A straightforward introduction to continuous quantum measurement,” *Contemp. Phys.*, vol. 47, no. 5, pp. 279–303, 2006.
- [15] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.
- [16] J. I. Cirac and P. Zoller, “Quantum computations with cold trapped ions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, 1995.
- [17] S. C. Edwards and V. P. Belavkin, “Optimal Quantum Filtering and Quantum Feedback Control,” vol. 2, pp. 1–14, 2005.
- [18] U. Picchini, “SDE Toolbox,” 2007. [Online]. Available: <http://sdetoolbox.sourceforge.net/#Download>.
- [19] L. Rinc, “Construyendo la integral estocástica de Itô.” [Online]. Available: <http://www.dynamics.unam.edu/lars/pub/ede.pdf>.
- [20] S. Integrals, “Stratonovich’s Theory,” 2002. [Online]. Available: <http://www-math.mit.edu/~dws/ito/ito8.pdf>.