
Sistemas y Circuitos

Sistemas y Circuitos

Antonio Martínez González
Elsa Domínguez Tortajada
Alejandro Díaz Morcillo

Profesores del Departamento de Teoría de la Señal y
Radiocomunicaciones de la Universidad Politécnica de Cartagena

SEGUNDA EDICIÓN, 2006



Universidad Politécnica de Cartagena

Todos los nombres propios de programas y equipos hardware que se referencian en este libro son marcas registradas de sus respectivas compañías u organizaciones.

SISTEMAS Y CIRCUITOS

Queda rigurosamente prohibida, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, sin la autorización escrita de los titulares del *Copyright*.

© Antonio Martínez González
Elsa Domínguez Tortajada
Alejandro Díaz Morcillo

Edita: Universidad Politécnica de Cartagena
Primera Edición, Febrero de 2004
Segunda Edición, Febrero de 2007

Diseño de la portada: David Domínguez Tortajada

I.S.B.N.: 84-95781-31-X
Depósito Legal: MU 241-2004

Imprime: MORPI, S.L.

Si desea más ejemplares de este libro contacte con:

Departamento de Tecnologías de la Información y las
Comunicaciones (TIC)
Antiguo Cuartel de Antiguones, Plaza del Hospital 1.
30202-Cartagena (Murcia)
Tel.: +34 968 325 977 – Fax: +34 968 325 973

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Tema 1: Introducción	1
1.1 Sistemas de Unidades	1
1.2 Carga y Corriente Eléctrica	2
1.3 Energía y Potencia de una Corriente Eléctrica	5
1.4 Problemas	6
1.4.1 Enunciados	6
1.4.2 Soluciones	7
Tema 2: Conceptos Básicos de Circuitos	9
2.1 Elementos Activos. Fuentes Dependientes e Independientes	9
2.1.1 Fuente independiente de tensión	9
2.1.2 Fuente independiente de corriente	9
2.1.3 Fuentes dependientes	10
2.2 Elementos Pasivos	10
2.2.1 Ley de Ohm. Resistencia eléctrica	10
2.2.2 Bobina. Inductancia	13
2.2.3 Condensador	15
2.3 Convenio Potencias	17
2.4 Problemas	18
2.4.1 Enunciados	18
2.4.2 Soluciones	19
Tema 3: Métodos de Análisis de Circuitos	21
3.1 Leyes Fundamentales	22
3.1.1 Primera ley de Kirchhoff o Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK)	22
3.1.2 Segunda ley de Kirchhoff o Ley de Tensiones de Kirchhoff (LVK)	23
3.2 Circuitos de una Sola Malla. Elementos en Serie	24
3.3 Circuitos de un Par de Nodos	26
3.4 Asociación de Resistencias	28
3.4.1 Resistencias en serie	28
3.4.2 Resistencias en paralelo	28
3.5 Potencial Absoluto	31
3.6 Método de los Nodos. Análisis por Tensiones	33
3.7 Método de las Mallas. Análisis por Corrientes	36
3.8 Topología de Redes. Análisis General	40
3.8.1 Definiciones básicas	40
3.8.2 Ecuaciones generales de análisis nodal	41
3.8.3 Ecuaciones generales del análisis por mallas	42
3.9 Problemas	43
3.9.1 Enunciados	43
3.9.2 Cuestiones de examen	48
3.9.3 Soluciones	50
Tema 4: Teoremas Fundamentales	53
4.1 Linealidad	53
4.2 Teorema de Superposición	53

4.3	Transformación de Fuentes	56
4.4	Teoremas de Thévenin y Norton	57
4.5	Teorema de la Máxima Transferencia de Potencia	60
4.6	Problemas	62
4.6.1	Enunciados	62
4.6.2	Soluciones	65
Tema 5: Circuitos de Primer Orden		67
5.1	Introducción	67
5.2	Funciones Escalón y Exponencial	67
5.2.1	Función escalón	67
5.2.2	Función exponencial	68
5.3	Asociación de Condensadores y Bobinas	69
5.3.1	Asociación de condensadores	69
5.3.2	Asociación de bobinas	70
5.4	Carga y Descarga de un Condensador	72
5.4.1	Carga del condensador	72
5.4.2	Descarga del condensador	74
5.5	Circuito RL	76
5.5.1	Aplicación de una tensión continua a una bobina	76
5.5.2	Circuito RL sin fuentes	77
5.6	Anexo	78
5.6.1	Bobinas	78
5.6.2	Condensadores	79
5.7	Problemas	79
5.7.1	Enunciados	79
5.7.2	Soluciones	83
Tema 6: Circuitos en Régimen Estacionario Sinusoidal		85
6.1	Introducción	85
6.2	Funciones Sinusoidales	85
6.2.1	Definiciones	85
6.2.2	Representación de las funciones sinusoidales en coordenadas cartesianas	86
6.2.3	Representación vectorial de las funciones sinusoidales	87
6.2.4	Concepto de desfase entre dos funciones sinusoidales	91
6.2.5	Valores medio y eficaz de una función	92
6.3	Análisis de Circuitos Bajo Excitación Sinusoidal	94
6.3.1	Ejemplo. Circuito RL en el dominio del tiempo	94
6.3.2	Relaciones fasoriales para elementos de circuitos	95
6.3.3	Impedancia y admitancia	98
6.3.4	Procedimiento general para el análisis de un circuito en régimen estacionario sinusoidal	99
6.4	Potencia de una Corriente Alterna	103
6.4.1	Potencia absorbida por los elementos pasivos	105
6.4.2	Potencia puesta en juego por los generadores	108
6.4.3	Teorema de la máxima transferencia de potencia	109
6.5	Problemas	111
6.5.1	Enunciados	111
6.5.2	Soluciones	118

Anexo 1: Prerrequisitos.....	121
1. Números complejos.....	123
1.1 Definición	123
1.2 Formas rectangular, exponencial y polar de un número complejo.....	124
1.3 Operaciones con números complejos.....	125
2. Matrices, determinantes y regla de Kramer.....	127
2.1 Adición y sustracción de matrices.....	127
2.2 Multiplicación de una matriz por un escalar.....	128
2.3 Producto de dos matrices entre sí.....	128
2.4 Determinantes.....	129
2.5 Regla de Kramer.....	131
3. Fórmulas trigonométricas.....	132
4. Fórmula de Euler.....	132
Anexo 2: Prácticas.....	135
Práctica 1: Instrumentación.....	137
Práctica 2: Circuitos Resistivos.....	155
Práctica 3: Introducción a PSpice. Circuitos Resistivos.....	165
Práctica 4: Análisis del puente de Wheatstone en PSpice.....	183
Práctica 5: Teoremas 1	195
Práctica 6: Teoremas en PSpice.....	205
Práctica 7: Análisis transitorio en circuitos de primer orden.....	215
Práctica 8: Régimen Estacionario Senoidal	229
Práctica 9: Resolución de problemas de examen mediante PSpice.....	241

PRÓLOGO

Este libro pretende servir de apoyo al estudio de las asignaturas de análisis de circuitos eléctricos, que generalmente se cursan en el primer año de las titulaciones de Ingeniería de Telecomunicación e Ingeniería Técnica de Telecomunicación.

Aunque existen en el mercado excelentes publicaciones sobre análisis de circuitos, con esta obra se ha intentado ajustar los contenidos con el fin de que éstos puedan ser impartidos de un modo claro y sosegado en un cuatrimestre con dos horas semanales de clases teóricas. Se pretende seguir una estructura clara y progresiva que facilite el aprendizaje por parte del alumno o lector, incorporando contenidos teóricos y prácticos para cada uno de los temas planteados. Otros libros quizás no contemplan todas las bases y cuestiones partiendo desde prácticamente un conocimiento nulo acerca de la materia, o son demasiado exhaustivos o extensos para los requisitos que se pretenden cubrir.

En la introducción se presentan conceptos básicos que se utilizarán a lo largo del libro y que requieren una definición y comprensión previa a cualquier otro estudio posterior, tales como unidades, carga, corriente eléctrica, energía o potencia.

En el segundo capítulo se exponen los diferentes elementos que forman parte de un circuito, tales como fuentes, resistencias, condensadores o bobinas. Todos ellos quedan totalmente definidos al explicar sus características y al presentar matemáticamente las expresiones que describen su funcionamiento.

Posteriormente, en el tercer capítulo, se presentan las leyes circuitales más importantes y diferentes métodos de análisis de circuitos que ayudan a resolver fácilmente configuraciones que, en principio, pueden parecer complicadas y que pueden simplificarse. Los problemas planteados en este tema son generalmente de tipo resistivo ya que son los más adecuados para ir familiarizando al alumno con las técnicas expuestas.

El capítulo cuarto está dedicado a los teoremas circuitales fundamentales, tales como el teorema de superposición, los teoremas de Thévenin y Norton y el teorema de máxima transferencia de potencia entre otros, que son herramientas útiles en muchos casos para transformar los circuitos y resolverlos de una forma más sencilla.

En el capítulo cinco, dedicado a los circuitos de primer orden, se estudia el análisis transitorio en circuitos que contienen un único elemento de almacenamiento de energía (condensador o bobina). Se analiza el comportamiento de un circuito en función del tiempo cuando sucede un cambio súbito en él. La respuesta pasará por un periodo de transición antes de estabilizarse y para conocer dicho comportamiento se inicia el capítulo presentando funciones como el escalón o la exponencial. Posteriormente se evalúan los procesos de carga y descarga de un condensador y finalmente se considera el funcionamiento de un circuito formado por una resistencia y una bobina.

El sexto capítulo está enfocado a circuitos en régimen estacionario sinusoidal. En estos circuitos las fuentes de excitación son de naturaleza oscilatoria y se analiza el

comportamiento del circuito ignorando las condiciones iniciales y la respuesta transitoria o natural, que como se especifica en el capítulo anterior, finalmente desaparece. Esta forma de alimentación es particularmente importante en aplicaciones de telecomunicación.

Al final de cada tema se han añadido problemas junto con las soluciones. Éstos constituyen una ayuda para el alumno que comienza a abordar este tipo de análisis, por lo que se anima al lector a realizar todos los ejemplos y cuestiones planteadas para comprender perfectamente los contenidos de la asignatura.

Como anexo, al final del libro se propone un conjunto de prácticas que complementan los contenidos teóricos y que deberían realizarse a lo largo del curso. Para la realización de estas prácticas, el laboratorio debe estar dotado tanto de instrumentación electrónica (generador de funciones, osciloscopio, placas de montaje) como de elementos eléctricos básicos (condensadores, resistencia, etc.). Asimismo, algunas prácticas requieren el empleo de algún software de simulación electrónica. En las que proponemos los autores de este libro se ha empleado el programa comercial *Pspice*. La conjunción de la teoría expuesta en el libro junto con estas sesiones de trabajo en el laboratorio permite una amplia visión del problema y la comparación de resultados teóricos, medidos y simulados.

Confiamos en que el esfuerzo que han supuesto las horas invertidas en la elaboración de este libro se vea recompensado por la ayuda que para los alumnos suponga el disponer de una referencia estructurada con la que seguir la asignatura.

Los autores

Tema 1: Introducción

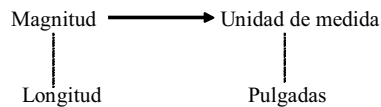
Ingeniería: actividad o profesión en la cual los conocimientos de las ciencias matemáticas, naturales y sociales adquiridos por medio del estudio, la experiencia y la práctica, se aplican juiciosamente con el fin de emplear con eficiencia los materiales y las fuerzas de la naturaleza en beneficio de la sociedad.

Circuito: interconexión de dispositivos eléctricos simples en la que hay por lo menos una trayectoria cerrada a través de la cual puede fluir la corriente.

Sistema: Disposición de componentes interrelacionados para formar un todo.

1.1 Sistemas de Unidades

Toda cantidad medible debe venir determinada tanto por un número como por una unidad.



Sistema Internacional de Unidades (S.I.): Adoptado por el National Bureau of Standards en 1964.

Unidades básicas del S.I.: metro, kilogramo, segundo, amperio, kelvin, candela.

Prefijos estándares que relacionan unidades mayores y menores que la unidad patrón:

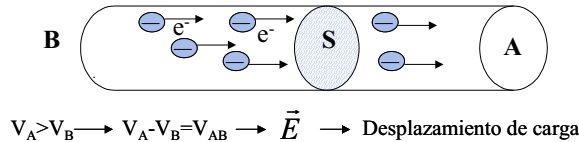
Tera (T)	10^{12}	Deci (d)	10^{-1}
Giga (G)	10^9	Centi (c)	10^{-2}
Mega (M)	10^6	Mili (m)	10^{-3}
Kilo (k)	10^3	Micro (μ)	10^{-6}
Hecto (h)	10^2	Nano (n)	10^{-9}
Deca (da)	10^1	Pico (p)	10^{-12}

1.2 Carga y Corriente Eléctrica

La naturaleza de la carga está basada en conceptos de la teoría atómica. Los electrones se mueven a través del sólido.

Unidades de medida: Culombio (C)

Carga de un electrón: $e = -1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$



Nuestro interés se centra en la carga eléctrica en movimiento, lo que da como resultado una cierta transferencia de energía. Pero sobre todo nos interesa el caso en que tal movimiento se da en una trayectoria cerrada y definida.

Circuito eléctrico: Conducto que facilita la transferencia de carga desde un punto a otro.

Corriente eléctrica: Variación de la carga con respecto al tiempo. Cantidad neta de carga que atraviesa la superficie transversal del conductor por unidad de tiempo.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} ;$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(x) dx$$

La corriente eléctrica representa una medida de la rapidez con que la carga se está moviendo al pasar por un punto dado de referencia en una dirección específica.

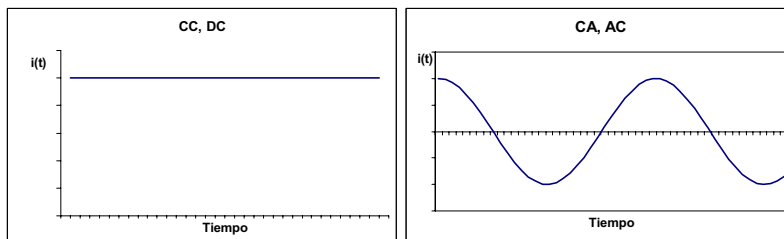
Unidad de medida: Amperio (A). $1 \text{ A} \equiv 1 \text{ C/s} \equiv 6.24 \cdot 10^{18} \text{ e/s}$

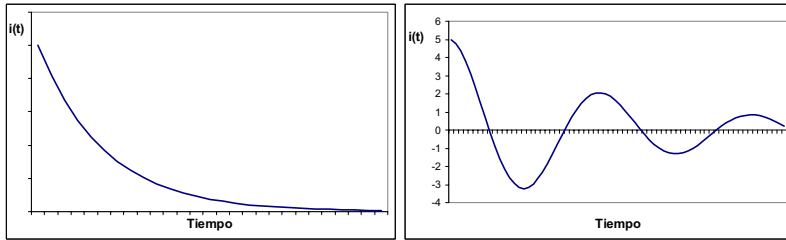
Nomenclatura:

- Letras mayúsculas se corresponden con magnitudes constantes
- Letras minúsculas identifican magnitudes con variación temporal.

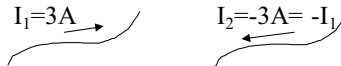
Por ejemplo, $I=5 \text{ A}$, $q(t) = 3 \cdot t$, $i(t) = 2\text{sen}(wt)$

Tipos de corriente: Existen diferentes tipos de corriente según su evolución temporal, como la corriente continua, con variación sinusoidal, la exponencial negativa y la subamortiguada.





La dirección de la corriente se indica con una flecha junto al conductor.



La flecha no indica la dirección del flujo de corriente, sólo es parte de una convención que nos va a permitir hablar acerca de la corriente en el conductor sin ambigüedad. La dirección es una parte fundamental al hablar de una corriente.

Convenio: se asigna como sentido positivo de la corriente aquel en el que se moverían las cargas positivas, es decir, el contrario al movimiento de los electrones. Por tanto, la corriente eléctrica positiva se dirige:

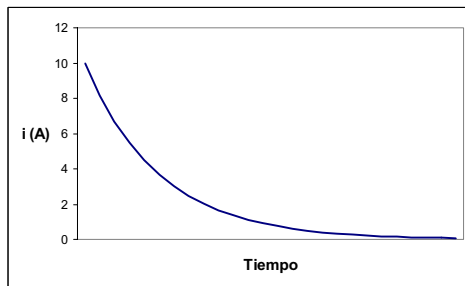
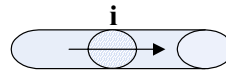
- En el mismo sentido que el campo eléctrico existente en el interior del conductor.
- Desde puntos de mayor potencial hacia puntos de menor potencial.

Ejemplo 1: Hallar la carga que pasa por el conductor, o por la superficie de éste, si la corriente es:

$$i = 0, \quad t < 0$$

$$i = 10 \cdot e^{-2000t} \text{ A}, \quad t > 0$$

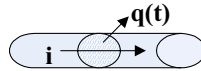
Expresar la carga total en μC .



$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(x) dx = \int_0^t 10 \cdot e^{-2000x} dx = -10 \cdot \frac{1}{2000} \cdot e^{-2000x} \Big|_0^t = -\frac{1}{200} e^{-2000x} \Big|_0^t = -\frac{1}{200} (e^{-2000t} - 1) = \frac{1}{200} (1 - e^{-2000t})$$

$$\text{Carga total } (t \longrightarrow \infty) \quad q(t) \Big|_{t \longrightarrow \infty} = \frac{1}{200} = 5000 \mu\text{C}$$

Ejemplo 2: Dada la expresión para la carga que atraviesa la sección de la figura, encontrar el valor máximo de la corriente.



$$q(t) = \frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) e^{-\alpha t} C$$

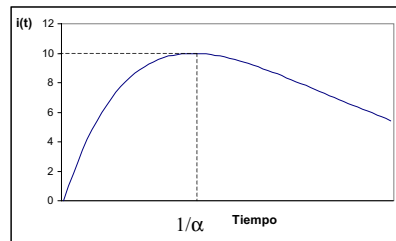
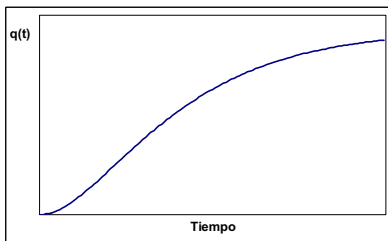
Dato $\alpha = 0.03679s^{-1}$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} + \left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \alpha \cdot e^{-\alpha t} = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} + \left(t + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} = e^{-\alpha t} \left(-\frac{1}{\alpha} + t + \frac{1}{\alpha} \right) = t \cdot e^{-\alpha t}$$

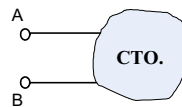
$$\frac{di(t)}{dt} = e^{-\alpha t} + t \cdot e^{-\alpha t} (-\alpha) = e^{-\alpha t} - \alpha \cdot t \cdot e^{-\alpha t} = (1 - \alpha t) e^{-\alpha t}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = 0 \rightarrow \begin{cases} e^{-\alpha t} = 0 \\ 1 - \alpha \cdot t = 0 \rightarrow t = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

$$i\left(t = \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} e^{-1} = \frac{1}{\alpha \cdot e} = 10A$$



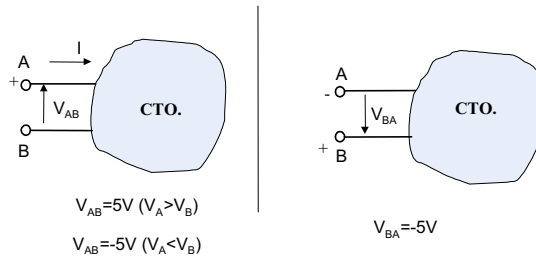
Tensión: es una medida del trabajo requerido para mover la carga eléctrica entre dos puntos de un circuito. La tensión entre los puntos A y B se define como el trabajo requerido para mover una carga positiva de 1 C de un punto al otro a través del circuito.



Unidad: Voltio (V), $1V \equiv 1J/C$

Entre dos puntos de un circuito puede existir una tensión, fluya o no fluya corriente entre ellos. Por ejemplo, una pila tiene una tensión de 1.5 V entre sus terminales aunque no esté conectada a ningún circuito.

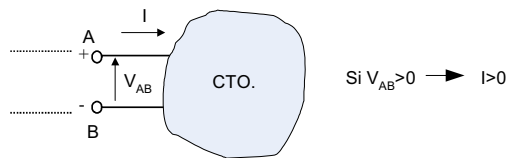
Convenio de signos:



La interpretación en ambos casos es que el potencial en B es negativo con respecto al punto A.

Polaridad de la tensión: se indica mediante un par de signos +/- y una flecha del - al +. Estos signos no indican la polaridad real, son un convenio. La polaridad es una parte fundamental al hablar de una tensión.

Este convenio es importante para evaluar cuándo los elementos de los circuitos absorben o ceden potencia.

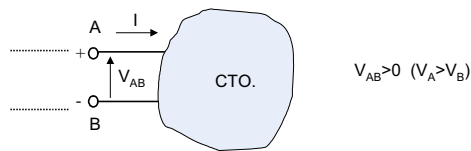


1.3 Energía y Potencia de una Corriente Eléctrica

Para una carga q , la energía potencial en un punto de potencial V es: $W=qV$ (Julios)
 Cuando un diferencial de carga dq se desplaza desde un punto A de mayor potencial a un punto B de menor potencial cede una energía de valor:

$$dW = V_A dq - V_B dq = (V_A - V_B) dq = V_{AB} dq$$

Consideremos el circuito:



Habrá una carga positiva que se desplaza de A a B. La carga cede energía. Esta energía cedida es absorbida por el circuito, y su valor para una carga diferencial será:

$$dW = V_{AB} dq$$

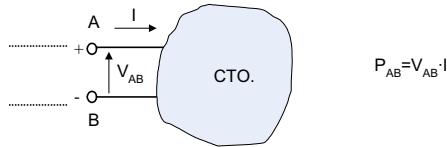
Potencia que absorbe el circuito:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt} V_{AB} = I \cdot V_{AB} \text{ Watios}$$

La potencia puede entenderse como la rapidez a la cual se gasta la energía.

Conclusiones:

- 1.- Cuando una corriente I positiva recorre un circuito desde A hasta B , tal que $V_A > V_B$, el circuito absorbe una potencia de valor $P_{AB} = V_{AB} I$
- 2.- Si la corriente I positiva recorre el circuito de A a B siendo $V_A < V_B$, la potencia absorbida dada por la expresión $P_{AB} = V_{AB} I$ será negativa, lo que indica que el circuito en cuestión entrega potencia.
- 3.- Para encontrar la potencia absorbida por un circuito, se multiplica la intensidad que lo recorre, por la diferencia de potencial (tensión) entre sus terminales, tomada desde el terminal por el que entra la corriente hacia el terminal por el que sale. Si el producto es positivo, el circuito absorbe potencia; en caso contrario la entrega.



1.4 Problemas

1.4.1 Enunciados

P1.1.- La potencia eléctrica consumida en un circuito es de 7,56 kJ/min cuando, a través de él, circula una corriente de 4,5 A. ¿Cuál será la tensión entre los extremos del circuito?

P1.2.- Una típica batería de coche de 12 V está caracterizada por sus amperios-hora. Una batería de 70 Ah tiene una vida de 20 h. Calcular:

- a) Corriente a la que se descarga.
- b) Suponiendo constante la tensión, energía y potencia consumida durante la descarga.
- c) Tiempo de vida si la descarga se produce con una corriente de 7 A.

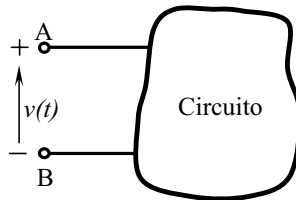
P1.3.- Para $t \geq 0$ $q(t) = (4 \cdot 10^{-4})(1 - e^{-250t})$ C. Obtener la intensidad para $t = 3$ ms.

P1.4.- Cierta elemento de un circuito tiene una corriente y una tensión dadas por:

$$i(t) = 10 \cdot e^{-5000t} \quad v(t) = 50(1 - e^{-5000t})$$

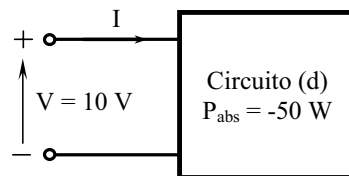
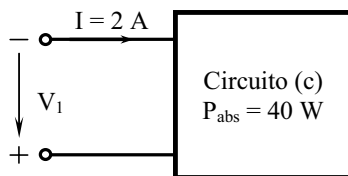
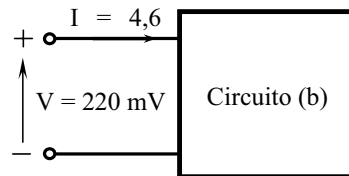
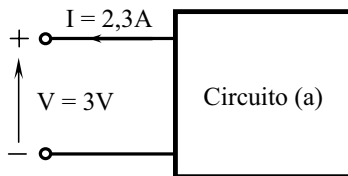
Calcular la energía total transferida para $t \geq 0$.

P1.5.- Para el circuito de la figura determinar la energía que se requiere para mover 3 C desde el terminal B al A en $t = 2$ ms.



$$v(t) = 0,5 + \text{sen}(400t)$$

P1.6.- Calcular la potencia absorbida para cada uno de los circuitos de las figuras (a) y (b). Calcular asimismo las variables desconocidas para las figuras (c) y (d).



1.4.2 Soluciones

P1.1.- $V_{AB} = 28$ V

- P1.2.- a) $I = 3,5$ A
 b) $W = 3,02$ MJ
 c) 10 horas

P1.3.- $i(t=3\text{ms}) = 47,24$ mA

P1.4.- $W = 50$ mJ

P1.5.- $W_{AB} = -3,652$ J

- P1.6.- a) $P_{abs} = -6,9$ W
 b) $P_{abs} = 1,01$ W
 c) $V_I = -20$ V
 d) $I = -5$ A

Tema 2: Conceptos Básicos de Circuitos

Cuando hablemos de elementos de un circuito nos referiremos a elementos simples que no pueden subdividirse en otros elementos más simples.

Elemento simple: modelo matemático de un dispositivo eléctrico de dos terminales que se caracteriza completamente por su relación tensión-corriente y que no puede subdividirse en otros dispositivos de dos terminales.

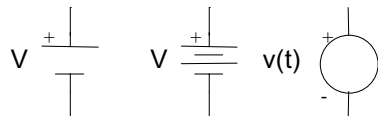
2.1 Elementos Activos. Fuentes Dependientes e Independientes

Elemento activo: aquél que es capaz de generar energía.

2.1.1 Fuente independiente de tensión

La tensión entre sus terminales es completamente independiente de la corriente que circula a través de ella. La fuente de tensión mantiene la tensión entre sus terminales sin importar la corriente que fluya a través de ella.

Representación de una fuente de tensión independiente:

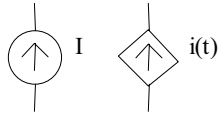


Las dos primeras son fuentes de tensión constante y la última es variable con respecto al tiempo. El signo + indica el extremo de mayor potencial.

2.1.2 Fuente independiente de corriente

Elemento de dos terminales que mantiene una corriente específica a pesar de la tensión que haya entre sus terminales.

Representación de una fuente de corriente independiente:

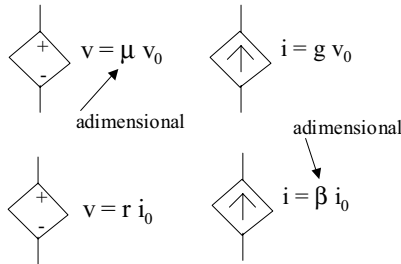


La flecha nos indica la dirección del flujo positivo de corriente.

2.1.3 Fuentes dependientes

Las fuentes dependientes (tensión o intensidad) generan una tensión o corriente que está determinada por otra tensión o corriente en un lugar específico del circuito.

Símbolos:



2.2 Elementos Pasivos

Elemento pasivo: aquél que es incapaz de generar energía. Los elementos pasivos toman energía del circuito para transformarla en otro tipo de energía o almacenarla en forma de campo magnético o eléctrico.

Son elementos pasivos las resistencias, bobinas y condensadores.

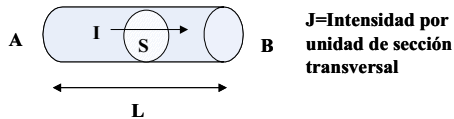
Estos elementos quedan caracterizados por la relación entre la tensión y la corriente en sus terminales.

2.2.1 Ley de Ohm. Resistencia eléctrica

La ley de Ohm establece que la tensión entre los terminales de una resistencia es directamente proporcional a la corriente que fluye a través de ella.

Deducción:

Sea $J = \frac{I}{S}$ la densidad de corriente en un conductor



\vec{J} es vectorial y su vector unitario coincide en cada punto con el vector unitario del campo eléctrico \vec{E} .

Ohm estableció que para muchos materiales (entre ellos casi todos los metales)

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

donde σ es la constante de proporcionalidad, conocida como conductividad, y es una característica propia de cada material. Si σ es grande el material es un buen conductor, si σ es pequeña el material es aislante.

A la inversa de σ se le llama resistividad (ρ): $\rho = \frac{1}{\sigma}$

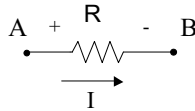
Con esto la ley de Ohm se puede escribir:

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{E} \rightarrow \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{V_{AB}}{L} \rightarrow V_{AB} = \rho \cdot \frac{L}{S} \cdot I$$

A la magnitud $\rho \cdot \frac{L}{S}$ se le denomina resistencia R (del conductor) y, por lo tanto,

$$V_{AB} = R \cdot I \quad \text{y} \quad v(t) = R \cdot i(t)$$

Símbolo:



Unidades: Ohmios (Ω) $1\Omega = 1\text{V/A}$

Conductancia: $G = \frac{1}{R}$ Siemens (S, Ω^{-1}).

Potencia y energía en una resistencia:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = R \cdot i^2(t) \rightarrow dW(t) = R \cdot i^2(t) dt$$

Por lo que, finalmente:

$$W = R \cdot \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2(t) dt$$

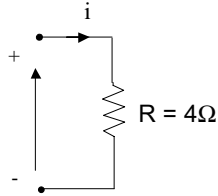
La integral debe extenderse durante todo el tiempo en que esté aplicada la corriente.

Cuando la intensidad es constante $\rightarrow W = R \cdot I^2 \cdot t = \frac{V^2}{R} t$

Ley de Joule: la energía absorbida por una resistencia se transforma en calor.

Ejemplo: Una resistencia $R = 4 \Omega$ es recorrida por una intensidad $i(t) = 2.5\text{sen}(\omega \cdot t)$ A.

Hallar la tensión, potencia y energía en un ciclo. Dato: $\omega = 500 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.



$$v(t) = R \cdot i(t) = 10 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 10 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot 2.5 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) = 25 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)$$

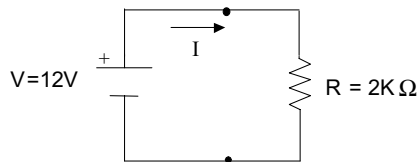
$$W = \int_0^T R \cdot i^2(t) dt = R \int_0^T 6.25 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t) dt = R \cdot 6.25 \int_0^T \text{sen}^2(\omega \cdot t) dt = 25 \int_0^T \text{sen}^2(\omega \cdot t) dt$$

o también

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T p(t) dt = \int_0^T 25 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t) dt = 25 \int_0^T \text{sen}^2(\omega \cdot t) dt = 25 \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \right) dt = \\ &= \frac{25}{2} \int_0^T dt - \frac{25}{2} \int_0^T \cos(2 \cdot \omega \cdot t) dt = \frac{25}{2} t \Big|_0^T - \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \omega} \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t) \Big|_0^T = \frac{25}{2} \cdot T - \frac{25}{4 \cdot \omega} \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot T) = \\ &= \frac{25}{2} T = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{250} = 0.05 \text{ J} \end{aligned}$$

$$W = 50 \text{ mJ}$$

Ejemplo: Corriente Continua. Calcular la potencia absorbida por la resistencia.

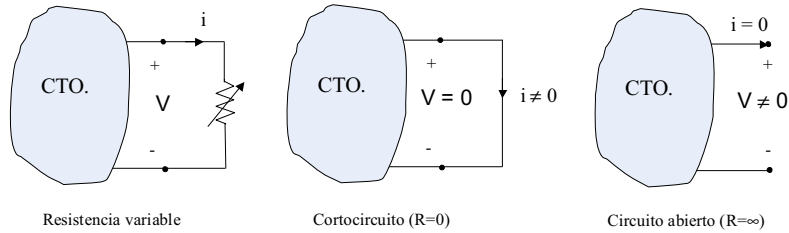


$$I = \frac{V}{R} = \frac{12}{2 \cdot 10^3} = 6 \text{ mA}$$

$$P_{abs} = V \cdot I = 0.072 \text{ W}$$

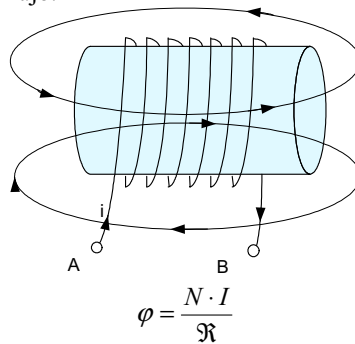
$$P_{abs} = I^2 R = \frac{V^2}{R} = 0.072 \text{ W}$$

Cortocircuito y Circuito Abierto:



2.2.2 Bobina. Inductancia

Componente formado por N espiras conductoras arrolladas sobre un núcleo de material magnético (en ocasiones aire), tal que al circular por ella una corriente i se origina un flujo φ que es directamente proporcional al número de espiras N y a la corriente i que las recorre, e inversamente proporcional a la reluctancia \mathfrak{R} del circuito magnético a través del cual se cierra el flujo.



Reluctancia (\mathfrak{R}): oposición del material magnético a dejar establecerse el flujo en su interior.

Si la corriente aplicada i , es variable en función del tiempo ($i(t)$), el flujo magnético también será variable en el tiempo ($\varphi(t)$).

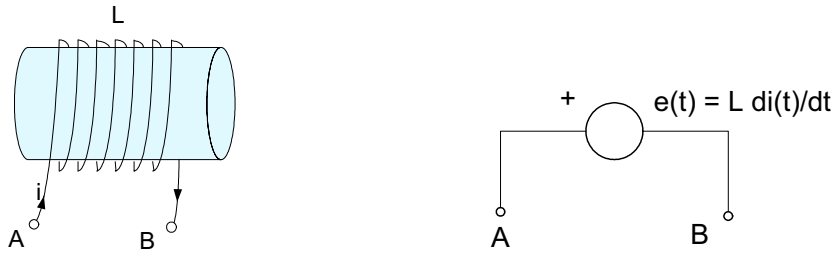
Ley de Faraday: al atravesar una bobina un flujo variable $\varphi(t)$ se induce una f.e.m. $e(t)$

$$e(t) = -N \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{N^2}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

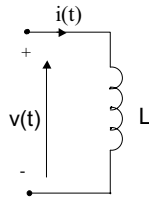
Al término $\frac{N^2}{\mathfrak{R}} \equiv L$ se le conoce como coeficiente de autoinducción. Se mide en Henrys (H), en honor al norteamericano Joseph Henry.

Podemos escribir:

$e(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$, donde el signo menos indica que la f.e.m. se opone a las variaciones de corriente que la origina.



Símbolo y relación tensión-corriente de una bobina:



$$v(t) = -e(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Potencia y energía en una bobina:

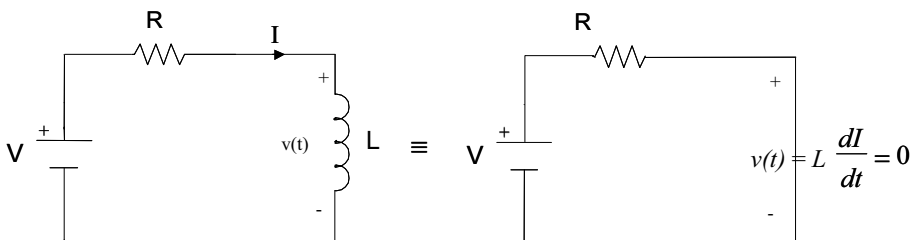
$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = i(t) \cdot L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$dW(t) = p(t)dt = L \cdot i(t) \cdot di(t)$$

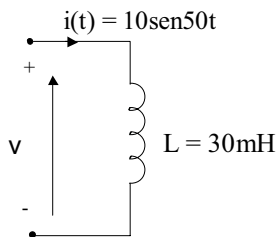
Por tanto, al alcanzar la corriente el valor i , la energía almacenada es:

$$W = L \int i(t) di(t) = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \text{ Julios}$$

Nota: En circuitos de corriente continua una bobina se comporta como un cortocircuito.



Ejemplo: Dada una $L=30$ mH que es recorrida por una $i(t)=10\text{sen}(50t)$ A en el intervalo $0 < t < \frac{\pi}{50}$ s, calcular la tensión, la potencia y la energía en L.



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 10 \cdot L \cdot 50 \cdot \cos(50t)$$

$$v(t) = 15 \cdot \cos(50t)$$

$$p(t) = v(t)i(t) = 15 \cos(50t) \cdot 10 \text{sen}(50t) = 150 \cos(50t) \text{sen}(50t)$$

Sabiendo que $\text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \text{sen}(2\alpha)$

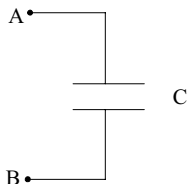
$$p(t) = 75 \cdot \text{sen}(100t) \text{ W.}$$

$$W(t) = \int p(x) dx = 75 \int \text{sen}(100x) dx = 0.75 [-\cos(100x)]_0^t = 0.75 [1 - \cos(100t)] \text{ J.}$$

$$W(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t) = 0.75 [1 - \cos(100t)] \text{ J.}$$

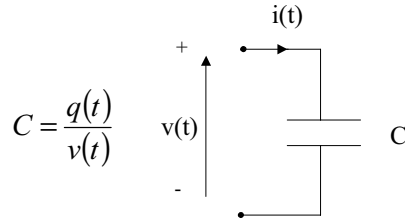
2.2.3 Condensador

Componente simple de dos terminales formado por dos placas conductoras metálicas separadas por un material dieléctrico (en ocasiones aire).



Al aplicar una d.d.p. entre las placas se desprenden electrones de una de ellas y se depositan en la otra de forma que la carga $q(t)$ que en cada instante tiene cada placa es igual pero de signo contrario.

Capacidad (C): relación que existe entre la carga almacenada y la tensión aplicada a las armaduras. En electrostática se demuestra que esta relación es constante. La capacidad es el parámetro que caracteriza a un condensador.



Unidades: Faradio 1F \equiv 1C/V.

Durante el periodo de carga de un condensador se origina una corriente de valor $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$ por lo que el condensador adquiere una carga de $q(t) = \int i(t) dt$.

De la primera expresión obtenemos la relación tensión-corriente:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(x) dx + v(t_0)$$

Energía almacenada en un condensador:

$$dW(t) = dq \cdot v(t)$$

donde

$$v(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Por lo que tendremos,

$$dW(t) = \frac{q(t)}{C} dq$$

Cuando la carga adquirida alcance el valor q, la energía almacenada será:

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q q(t) dq = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \text{ Julios}$$

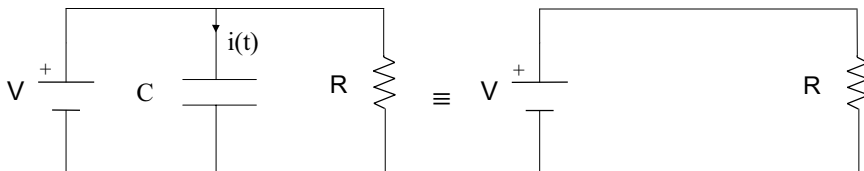
Teniendo en cuenta que:

$$q(t) = C \cdot v(t) \text{ y si } Q = C \cdot V$$

la energía puede expresarse en función de la tensión alcanzada como:

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2 \text{ Julios}$$

Nota: en circuitos de corriente continua, en régimen permanente, un condensador se comporta como un circuito abierto.



$$i(t) = C \frac{dV}{dt} = 0 \text{ en corriente continua.}$$

Esto no quiere decir que el condensador no tenga energía almacenada. De hecho sí que hay una tensión entre sus terminales.

Ejemplo: durante el intervalo $0 < t < 5 \cdot \pi$ ms un condensador con capacidad $C = 20 \mu\text{F}$ tiene una tensión de $v(t) = 50 \cdot \text{sen}(200t)$ V. Calcular la carga, la potencia y la energía. Dibujar W_c tomando $W=0$ en $t=0$.

$$q(t) = C \cdot v(t) = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot \text{sen}(200t) = 1000 \cdot \text{sen}(200t) \mu\text{C}$$

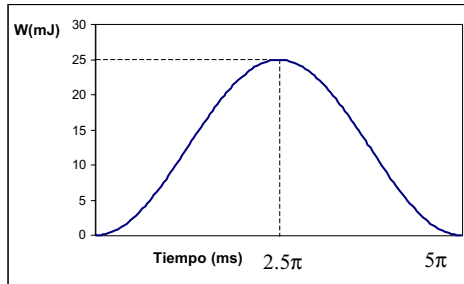
$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = 0.2 \cdot \cos(200t) \text{ A}$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 10 \cdot \cos(200t) \text{sen}(200t) = 5 \cdot \text{sen}(400t)$$

donde se ha utilizado la expresión trigonométrica: $\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \text{sen } 2\alpha$

Por último:

$$W_c = \int_0^{5\pi} 5 \text{sen } 400t dt = 0.0125 \cdot (\cos 400t) \Big|_0^{5\pi} = 12.5(1 - \cos 400t) \text{ mJ.}$$



2.3 Convenio Potencias

Elemento Pasivo (Resistencia, Condensador o Bobina)		Elemento Activo (Fuentes)	
	<ul style="list-style-type: none"> - $v \cdot i > 0 \rightarrow$ absorbe potencia - $v \cdot i < 0 \rightarrow$ entrega potencia 		<ul style="list-style-type: none"> - $v \cdot i > 0 \rightarrow$ absorbe potencia - $v \cdot i < 0 \rightarrow$ entrega potencia

2.4 Problemas

2.4.1 Enunciados

P2.1.- La intensidad que circula por una resistencia de 5Ω aumenta de cero hasta 10 A en 2 ms . Para $t = 2^+$ ms la intensidad es nuevamente cero y se incrementa a 10 A para $t = 4 \text{ ms}$. Esta secuencia se repite cada 2 ms . Se pide:

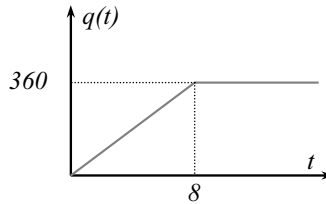
- Dibujar la variación de $v(t)$
- Representar la potencia absorbida por R

P2.2.- Por una bobina de 2 mH circula una intensidad de $i(t) = 5(1 - e^{-5000t}) \text{ A}$. Calcular la tensión y la energía máxima almacenada.

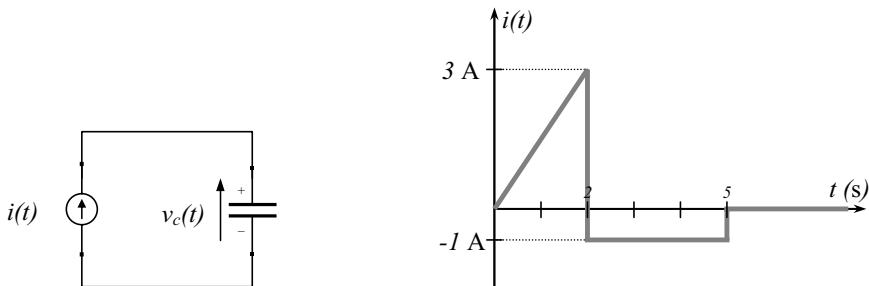
P2.3.- La tensión aplicada a una bobina de 3 mH viene dada por las siguientes características: $0 < t < 2 \text{ ms}$, $V = 15 \text{ V}$; y para $2 < t < 4 \text{ ms}$, $V = -30 \text{ V}$. Obtener la intensidad de corriente correspondiente y dibujar v e i .

P2.4.- La tensión aplicada a un condensador de $60 \mu\text{F}$ viene dada por: $v(t) = 25 \cdot 10^3 t \text{ V}$ en el intervalo $0 < t < 2 \text{ ms}$. Dibujar i , P y W para ese intervalo y calcular W_{\max} .

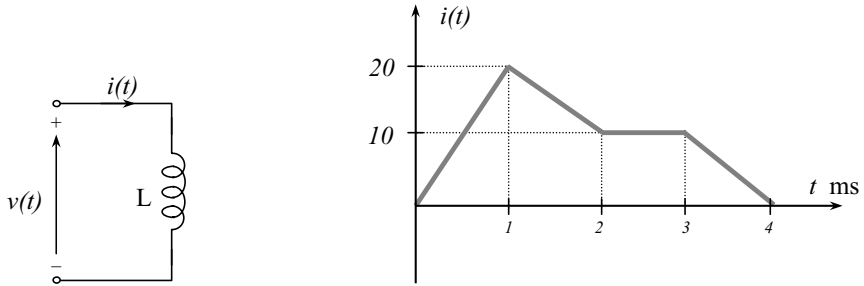
P2.5.- (Junio 2000) Un condensador de $25 \mu\text{F}$ se carga linealmente desde 0 hasta $360 \mu\text{C}$ en 8 ms . Obtener la expresión de la tensión en función del tiempo. Representarla gráficamente. Por último, calcular la tensión máxima V_{\max} y la energía máxima acumulada, W_{\max} .



P2.6.- (Septiembre 2000) A un condensador de 2 F de capacidad se le aplica la señal de la figura como intensidad. Obtenga la respuesta de tensión en el condensador $v_c(t)$.

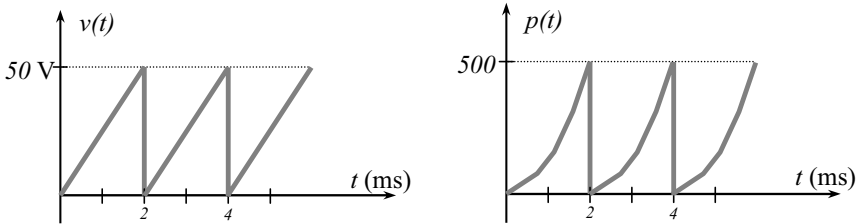


P2.7.- La corriente en una bobina de $L = 5 \text{ mH}$ tiene la forma de onda que se muestra en la figura. Calcule la forma de onda para la tensión en la bobina. Calcule la energía almacenada en el campo magnético de la figura para $t = 1,5 \text{ ms}$.



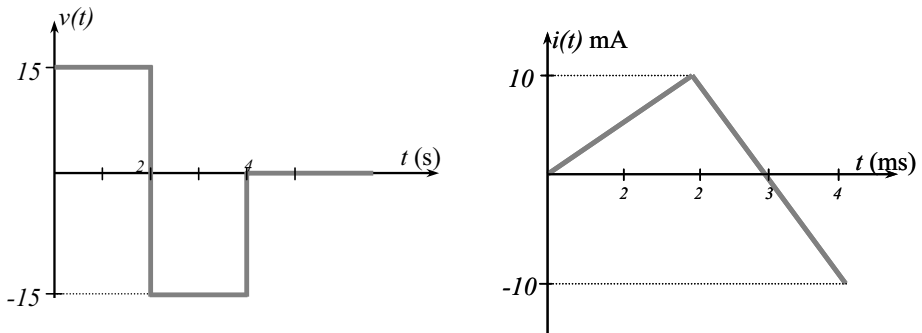
2.4.2 Soluciones

P1.1.-

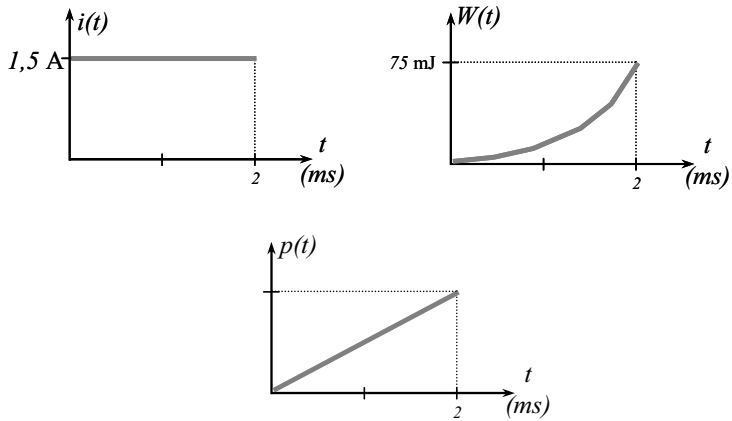


P2.2.- $v(t) = 50e^{-5000t}$ $W_{max} = 25 \text{ mJ}$

P2.3.-



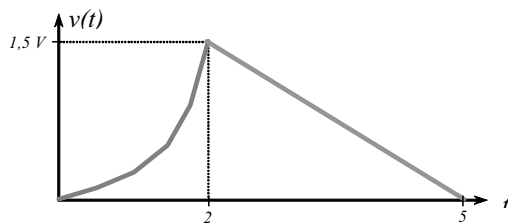
P2.4.-



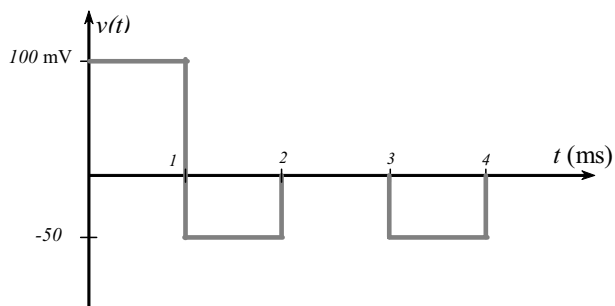
$$W_{max} = 75 \text{ mJ}$$

P2.5.- $v(t) = 1800t \text{ V}$ $W_{max} = 2,59 \text{ mJ}$

P2.6.- $0 < t < 2$: $v_c(t) = \frac{3}{8}t^2 \text{ V}$; $2 < t < 5$: $v_c(t) = \frac{5}{2} - \frac{t}{2}$



P2.7.- $W = 562,5 \text{ nJ}$



Tema 3: Métodos de Análisis de Circuitos

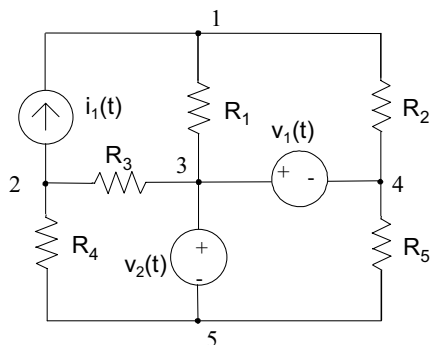
Circuito: un circuito eléctrico o red consiste en una serie de elementos simples interconectados entre sí. En él debe haber al menos una fuente de tensión o intensidad.

En un circuito eléctrico se considera que la conexión entre los distintos elementos se realiza mediante conductores perfectos ($R=0$).

Definiciones útiles

- Nodo o nudo: punto en el cual dos o más elementos tienen una conexión común. Los conductores perfectos que están unidos a él forman parte del nodo.
- Lazo: cualquier trayectoria cerrada a través del circuito en la que ningún nodo se encuentra más de una vez.
- Rama: parte de un circuito que contiene sólo un único elemento y dos nodos, uno en cada uno de sus extremos.

Ejemplo:



Los nodos están numerados del 1 al 5.

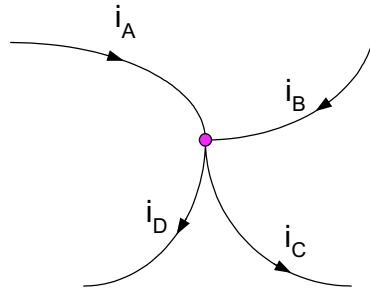
Entre los posibles lazos, podemos citar las formadas por los nodos 1-4-3-1 o por 1-3-5-2-1. Un lazo no válido sería: 1-3-4-5-3-2-1.

Gustav Robert Kirchhoff enunció dos leyes muy simples pero importantes respecto a nodos y mallas en un circuito eléctrico que se describen en el siguiente punto.

3.1 Leyes Fundamentales

3.1.1 Primera ley de Kirchhoff o Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK)

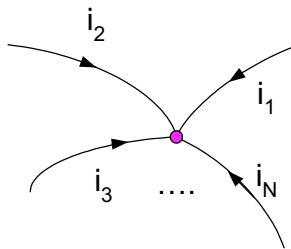
En un nudo, en cualquier instante, la suma de las corrientes entrantes es igual a la suma de las corrientes salientes.



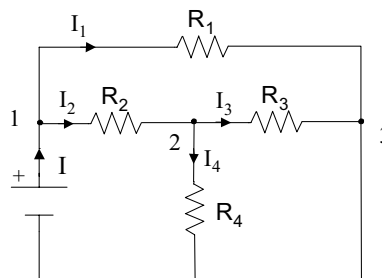
$$i_A + i_B = i_C + i_D \equiv i_A + i_B - i_C - i_D = 0$$

O bien, la suma algebraica de las corrientes que entran en cualquier nodo es nula.

$$\sum_{j=1}^N i_j(t) = 0$$



Ejemplo:



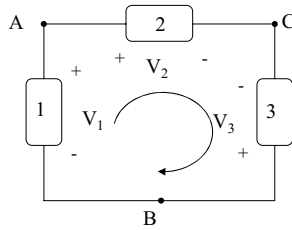
Nodo 1.- $I = I_1 + I_2$

Nodo 2.- $I_2 = I_3 + I_4$

Nodo 3.- $I = I_1 + I_3 + I_4$ (esta última es linealmente dependiente)

3.1.2 Segunda ley de Kirchhoff o Ley de Tensiones de Kirchhoff (LVK)

En cada instante de tiempo la suma algebraica de las tensiones en cada elemento alrededor de cualquier contorno cerrado del circuito ha de ser cero.

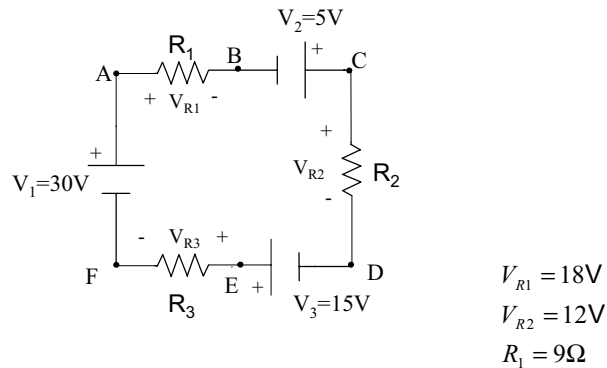


- $v_{AB} = v_{AC} + v_{CB}$
- $v_{AB} = v_1$; $v_{AC} = v_2$; $v_{CB} = -v_{BC} = v_3$
- $v_1 = v_2 - v_3$
- $v_1 - v_2 + v_3 = 0$

Generalizando para una trayectoria cerrada con N elementos tendremos que:

$$\sum_{j=1}^N v_j(t) = 0$$

Ejemplo:



$$\begin{aligned} V_{R1} &= 18\text{V} \\ V_{R2} &= 12\text{V} \\ R_1 &= 9\Omega \end{aligned}$$

¿Cuánto valdrán V_{R3} , R_2 y R_3 ?

$$V_1 - V_{R1} + V_2 - V_{R2} + V_3 - V_{R3} = 0$$

$$50 = V_{R1} + V_{R2} + V_{R3}$$

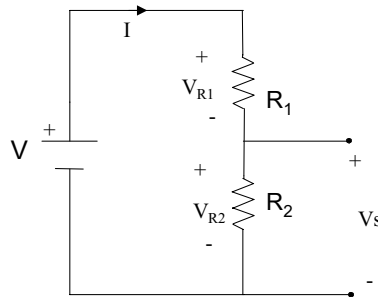
$$V_{R3} = 50 - 18 - 12 = 20\text{V}$$

$$I = \frac{V_{R1}}{R_1} = 2\text{A} \quad ; \quad R_2 = \frac{V_{R2}}{I} = 6\Omega \quad ; \quad R_3 = \frac{V_{R3}}{I} = 10\Omega$$

3.2 Circuitos de una Sola Malla. Elementos en Serie

Los elementos de un circuito que tiene una sola malla conducen la misma corriente, en cuyo caso se dice que están conectados en serie.

Ejemplo: Divisor de tensión: Circuito mediante el que se consigue una tensión de salida inferior a la de entrada en una proporción deseada.



$$\text{LVK: } V - V_{R1} - V_{R2} = 0 \rightarrow V = V_{R1} + V_{R2}$$

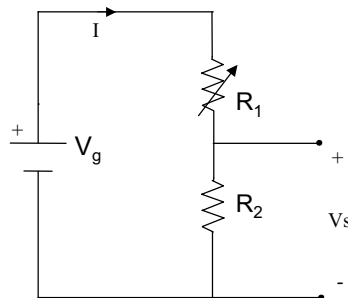
$$\text{Ley de Ohm: } \left. \begin{array}{l} V_{R1} = IR_1 \\ V_{R2} = IR_2 \end{array} \right\} \rightarrow V = I(R_1 + R_2) \rightarrow I = \frac{V}{(R_1 + R_2)}$$

Conocida la corriente, por la ley de Ohm:

$$V_{R1} = R_1 I = \frac{R_1 V}{R_1 + R_2}$$

$$V_{R2} = \frac{R_2 V}{R_1 + R_2} = V_s$$

Ejemplo: Determinar el cambio de la tensión V_s y de la potencia absorbida por R_2 cuando R_1 pasa de $90 \text{ K}\Omega$ a $15 \text{ K}\Omega$.



Datos: $V_g = 9\text{V}$, $R_2 = 30\text{K}\Omega$.

$$V_s = \frac{R_2 V_g}{R_1 + R_2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (R_1 = 90 \text{ K}\Omega) \rightarrow V_s = 2.25 \text{ V} \\ (R_1 = 15 \text{ K}\Omega) \rightarrow V_s = 6 \text{ V} \end{array} \right.$$

Potencia absorbida por R_2 :

$$P = \frac{V_S^2}{R_2} \rightarrow \begin{cases} (R_1 = 90 \text{ K}\Omega) \rightarrow P_{R_2} = 0.169 \text{ mW} \\ (R_1 = 15 \text{ K}\Omega) \rightarrow P_{R_2} = 1.2 \text{ mW} \end{cases}$$

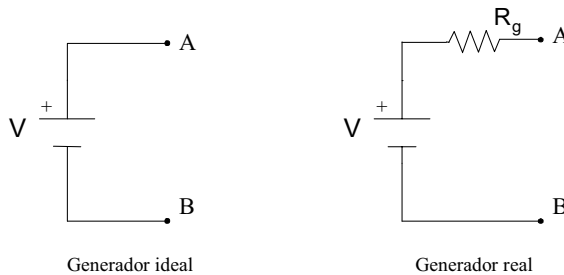
La corriente I en cada caso valdrá:

$$R_1 = 90 \text{ K}\Omega \rightarrow I = \frac{V}{R_1 + R_2} = 75 \mu\text{A} \quad \text{siendo } V = IR_1 + IR_2$$

$$R_1 = 15 \text{ K}\Omega \rightarrow I = 200 \mu\text{A}$$

Rendimiento de un generador:

Los generadores no entregan al circuito exterior toda la potencia que transforman en eléctrica; parte de ella la disipan ellos mismos. Este fenómeno se simula mediante una resistencia R_g que llamaremos resistencia interna del generador.



Cuando circula una corriente I a través del generador:

$$\text{Potencia total} \rightarrow P_t = V \cdot I \quad \text{Potencia disipada por } R_g \rightarrow P_{dis} = R_g \cdot I^2$$

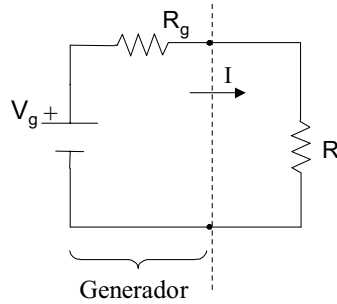
$$\text{Potencia útil o potencia entregada al circuito} \rightarrow P_u = P_t - R_g \cdot I^2$$

$$\text{Rendimiento } \eta(\%) = 100 \cdot \frac{P_u}{P_t} \quad \text{o bien } \eta = 100 \cdot \frac{V - R_g I}{V}$$

Observar que si $R_g = 0$ entonces $\eta = 100\%$.

Si el generador absorbe potencia no tiene sentido hablar de su rendimiento.

El problema de los circuitos electrónicos y de comunicaciones no va a ser conseguir el máximo rendimiento de los generadores. Lo que se busca es la carga óptima que debe ser conectada a un generador para que reciba de éste la **máxima potencia** posible.



$$P_t = V_g I; \quad P_{dis} = R_g I^2$$

Potencia entregada al circuito (en este caso el circuito está formado únicamente por la resistencia R): $P = P_t - P_{dis} = V_g I - R_g I^2$

Potencia absorbida por R : $P_R = RI^2$

Principio de conservación de la energía: $P = P_R$

$$V_g I - R_g I^2 = RI^2 \rightarrow V_g - R_g I = RI \rightarrow I = \frac{V_g}{R_g + R}$$

$$P_R = \frac{V_g^2}{(R_g + R)^2} R$$

que será máximo cuando:

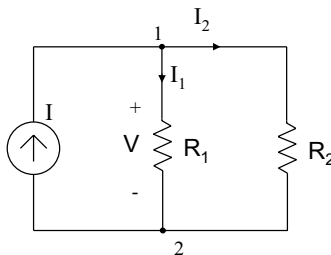
$$\frac{dP_R}{dR} = V_g^2 \left[\frac{(R_g + R)^2 - 2R(R_g + R)}{(R_g + R)^4} \right] = V_g^2 \left[\frac{R_g - R}{(R_g + R)^3} \right] = 0$$

Con lo que $R_g - R = 0 \rightarrow \boxed{R = R_g}$

3.3 Circuitos de un Par de Nodos

Dos elementos que tienen sus dos nodos en común tendrán la misma tensión entre sus terminales. Se dice que los elementos así conectados están en paralelo.

Ejemplo: Divisor de corriente.



$$\text{LCK: } I = I_1 + I_2$$

Ley de Ohm:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = \frac{V}{R_1} \\ I_2 = \frac{V}{R_2} \end{array} \right\} \rightarrow I = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V}{R_p}$$

donde

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

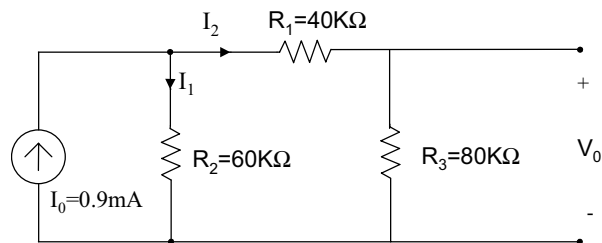
$$V = R_p I = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

La corriente en una rama será mayor cuanto menor sea la resistencia en esa rama.

Ejemplo: Dado el circuito de la figura hallar I_1 , I_2 y V_0 .



Aplicamos las ecuaciones del divisor de intensidad:

$$I_1 = \frac{40 + 80}{60 + 40 + 80} 0.9 \cdot 10^{-3} = 0.6 \text{ mA}$$

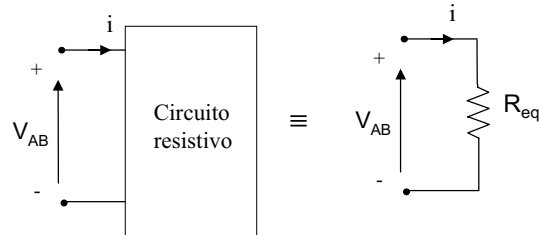
$$I_2 = \frac{60}{60 + 40 + 80} 0.9 \cdot 10^{-3} = 0.3 \text{ mA}$$

Por la ley de Ohm:

$$V_0 = R_3 I_2 = 0.3 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 10^3 = 24 \text{ V}$$

3.4 Asociación de Resistencias

El conjunto de resistencias de una asociación puede sustituirse entre dos puntos A y B por otra equivalente, es decir, tal que al aplicar la misma tensión circule la misma corriente.

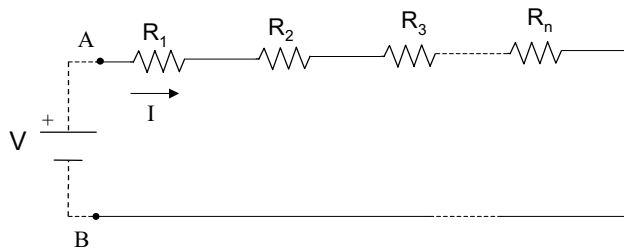


Para hallar la R_{eq} se aplica una V_{AB} entre A y B obteniendo la I que circula entre A y B.

$$\text{Finalmente } R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I}$$

3.4.1 Resistencias en serie

Por todas ellas circula la misma intensidad.



$$\text{LVK: } V = V_{R1} + V_{R2} + \dots + V_{RN} = R_1 I + R_2 I + \dots + R_N I$$

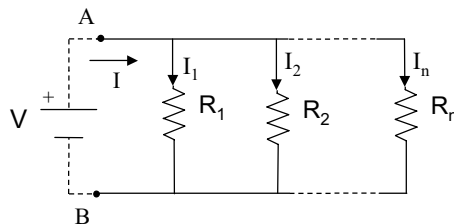
$$V = I(R_1 + R_2 + \dots + R_N)$$

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

R_{eq} es mayor que cualquiera de ellas por separado.

3.4.2 Resistencias en paralelo

La tensión en sus bornes es la misma.



Aplicando la LCK en el nudo A resulta: $I = I_1 + I_2 + \dots + I_N$

Según la ley de Ohm:

$$I_1 = \frac{V}{R_1}; \quad I_2 = \frac{V}{R_2}; \quad \dots; \quad I_N = \frac{V}{R_N}$$

Por tanto tendremos:

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \dots + \frac{V}{R_N} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right)$$

Por consiguiente:

$$\frac{I}{V} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

O lo que es lo mismo:

$$G_{eq} = \sum_{i=1}^N G_i$$

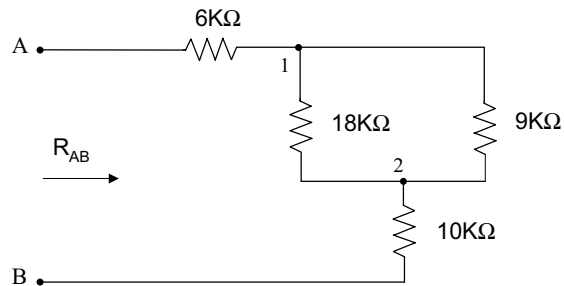
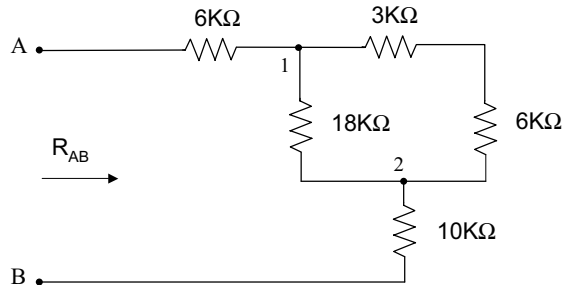
Para el caso particular de dos resistencias en paralelo:

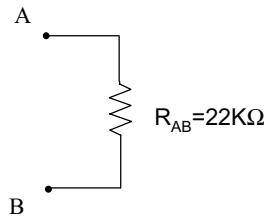
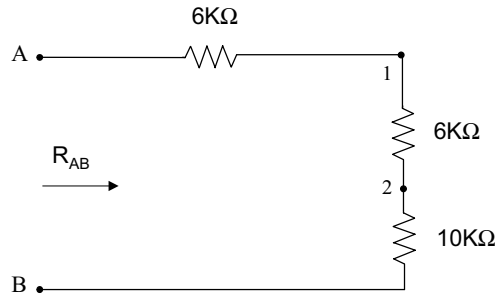
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

En este caso, R_{eq} es menor que cualquiera de ellas por separado.

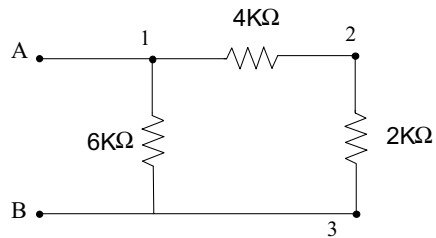
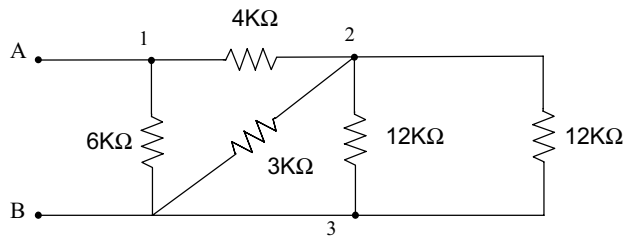
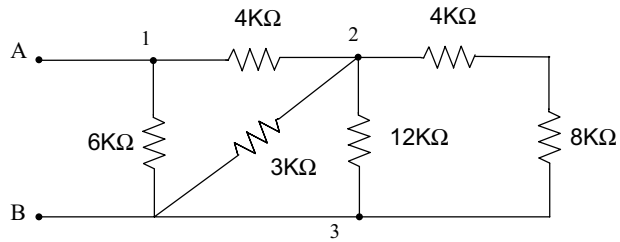
Ejemplos: Hallar la resistencia equivalente entre los terminales A y B:

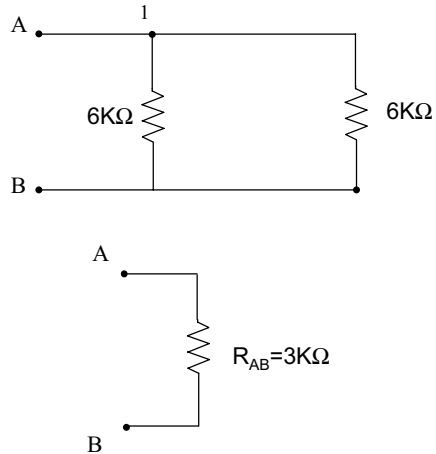
a)





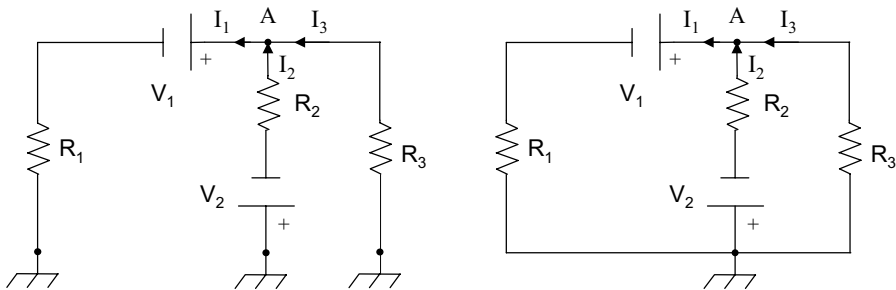
b)





3.5 Potencial Absoluto

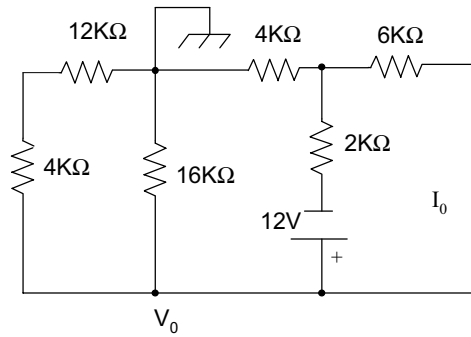
La tensión es una variable que se define entre dos puntos. Si en un circuito tomamos un punto como referencia y le asignamos potencial cero, al calcular la tensión o d.d.p. entre un punto cualquiera de este circuito y el de referencia se obtiene el potencial absoluto. A este punto de referencia se le denomina masa o tierra y se representa con los siguientes símbolos:



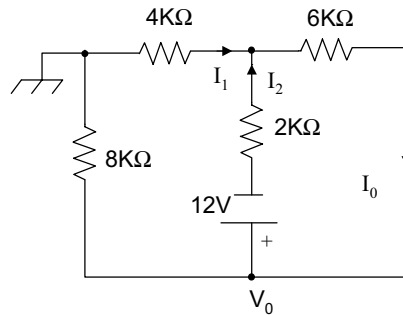
Todos los puntos conectados con el punto de referencia están conectados entre sí.

$$V_A = V_1 + R_1 I_1 = -I_2 R_2 - V_2 = -I_3 R_3$$

Ejemplo: Hallar V_0 (potencial absoluto) e I_0 en el circuito de la figura.



El circuito lo podemos transformar en:



$$I_0 = I_1 + I_2$$

$$12 = -6000I_0 - 2000I_2 \rightarrow 12 = -6000I_1 - 6000I_2 - 2000I_2 \rightarrow 12 = -6000I_1 - 8000I_2$$

$$12 = 8000I_1 + 4000I_1 - 2000I_2 \rightarrow 12 = 12000I_1 - 2000I_2$$

$$\left. \begin{aligned} 12 &= 12000I_1 - 2000I_2 \\ 12 &= -6000I_1 - 8000I_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 36 = -18000I_2$$

$$I_2 = -2 \text{ mA}$$

$$I_1 = \frac{2}{3} \text{ mA} \rightarrow I_0 = -\frac{4}{3} \text{ mA} = -1.33 \text{ mA}$$

$$V_0 = 8000I_1 = 5.33 \text{ V}$$

También:

$$V_0 = V + 2000I_2 - 4000I_1 = 5.33 \text{ V}$$

$$V_0 = -6000I_0 - 4000I_1 = 5.33 \text{ V}$$

3.6 Método de los Nodos. Análisis por Tensiones.

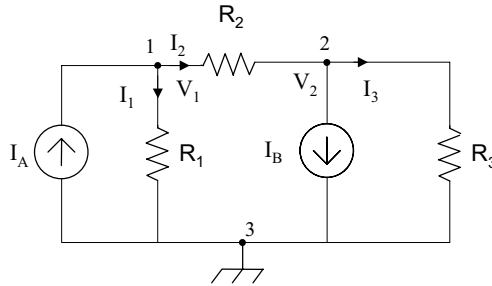
Incógnitas del circuito: tensiones en cada nodo. Uno de ellos será el nodo de referencia o tierra.

Conocidas las tensiones se calculan las corrientes de rama y por último la potencia.

En un circuito de n nodos tendremos:

- número de incógnitas = $n-1$: tensiones en todos los nodos salvo el de referencia.
- número de ecuaciones = $n-1$: aplicación de la LCK a esos nodos.

Caso I: Circuitos que contienen sólo fuentes de corriente independientes.



$$\begin{aligned} I_A &= 1 \text{ mA} \\ I_B &= 4 \text{ mA} \\ R_1 &= 12 \text{ K}\Omega \\ R_2 &= 6 \text{ K}\Omega \\ R_3 &= 6 \text{ K}\Omega \end{aligned}$$

LCK en nodo 1:

$$I_A = I_1 + I_2 \rightarrow -I_A + I_1 + I_2 = 0$$

Usando la ley de Ohm

$$I = GV : I_A = G_1 V_1 + G_2 (V_1 - V_2)$$

o bien:

$$(G_1 + G_2)V_1 - G_2 V_2 = I_A$$

LCK en nodo 2:

$$I_2 = I_B + I_3$$

Con la ley de Ohm:

$$(V_1 - V_2)G_2 = G_3 V_2 + I_B$$

O bien:

$$-G_2 V_1 + (G_2 + G_3)V_2 = -I_B$$

El sistema de ecuaciones resulta ser:

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2)V_1 - G_2 V_2 &= I_A \\ -G_2 V_1 + (G_2 + G_3)V_2 &= -I_B \end{aligned}$$

Matricialmente: $A \cdot v = i$, donde las mayúsculas representan matrices y las minúsculas vectores columna:

$$A = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix}; v = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}; i = \begin{bmatrix} I_A \\ -I_B \end{bmatrix}$$

Así:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_A \\ -I_B \end{bmatrix}$$

Para los datos del problema:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4000} & \frac{-1}{6000} \\ \frac{-1}{6000} & \frac{1}{3000} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ -4 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Aplicando Kramer:

$$\det(A) = \left(\frac{1}{4000} \cdot \frac{1}{3000} - \frac{1}{6000^2} \right) = \frac{1}{18 \cdot 10^6}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10^{-3} & \frac{-1}{6000} \\ -4 \cdot 10^{-3} & \frac{1}{3000} \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\frac{10^{-3}}{3000} - \frac{4 \cdot 10^{-3}}{6000}}{\frac{1}{18 \cdot 10^6}} = -6 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{4000} & 10^{-3} \\ \frac{-1}{6000} & -4 \cdot 10^{-3} \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-\frac{4 \cdot 10^{-3}}{4000} + \frac{10^{-3}}{6000}}{\frac{1}{18 \cdot 10^6}} = -15 \text{ V}$$

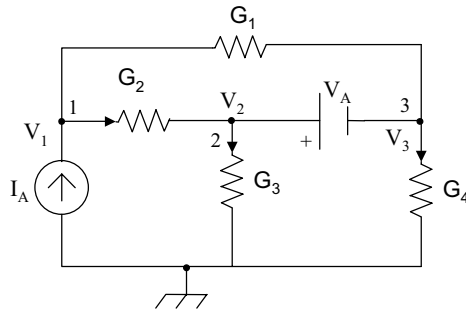
Por lo tanto:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{-6}{12000} = -0.5 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} = \frac{-6 + 15}{6000} = 1.5 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{V_2}{R_3} = \frac{-15}{6000} = -2.5 \text{ mA}$$

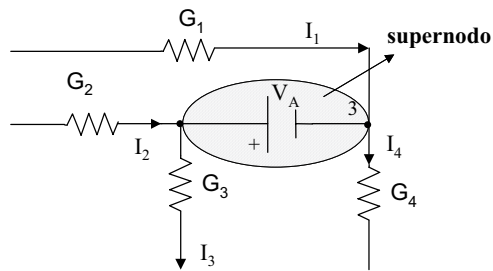
Caso II: Circuitos que contienen fuentes de tensión independientes.



Si conocemos V_2 conocemos V_3 y viceversa ya que $V_2 - V_3 = V_A$

Inconveniente: no conocemos la corriente que atraviesa la fuente de tensión.

Método: encerramos los nodos 2 y 3 en una superficie cerrada que contiene a la fuente de tensión. A esta superficie se le denomina supernodo. A continuación se aplica la LCK a este supernodo como si se tratara de un nodo normal.



LCK en el nodo 1:

$$(V_1 - V_3)G_1 + (V_1 - V_2)G_2 - I_A = 0$$

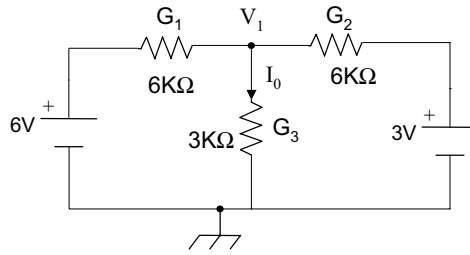
LCK en el supernodo:

$$(V_1 - V_2)G_2 - V_2G_3 + (V_1 - V_3)G_1 - V_3G_4 = 0$$

Ecuación de restricción en el supernodo:

$$V_2 - V_3 = V_A$$

Importante: si la fuente de tensión está conectada al nodo de referencia no siempre es preferible considerarla un supernodo. En este caso la tensión del nodo viene dada por la tensión marcada por la fuente.



LCK: $(6 - V_1)G_1 + (3 - V_1)G_2 - V_1G_3 = 0 \rightarrow V_1$

Resumen del análisis por tensiones (nodos):

1. Representar el circuito en un diagrama simple y claro. Indicar los valores de los elementos y las fuentes.
2. Identificar claramente el nodo de referencia. Escribir las tensiones de nodos $V_1, V_2, V_3, \dots, V_{N-1}$ en los nodos restantes.
3. Si el circuito sólo tiene fuentes de corriente aplicar la LCK a todos los nodos salvo al de referencia.
4. Si el circuito contiene fuentes de tensión formar un supernodo alrededor de cada una.

3.7 Método de las Mallas. Análisis por Corrientes

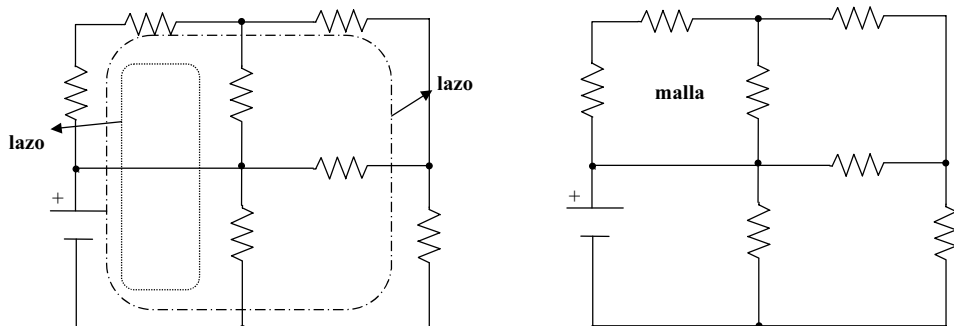
Incógnitas del circuito: corrientes en cada rama.

Conocidas las corrientes, calcularemos las tensiones de nodo y a continuación las potencias.

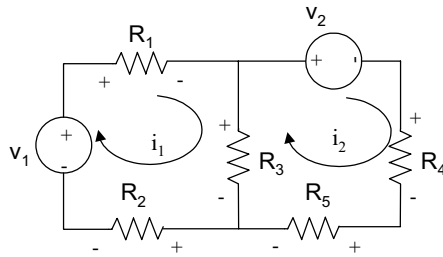
Una malla es una trayectoria cerrada o lazo de un circuito que no contiene ningún otro lazo o trayectoria cerrada dentro de ella.

Si un circuito contiene N mallas necesitaremos N ecuaciones simultáneas e independientes, que surgirán de aplicar la LVK a cada una de las mallas.

Suposición: circuitos planos \rightarrow pueden dibujarse sin que ninguna línea corte a otras.



Caso I: Circuitos que sólo contienen fuentes de tensión independientes.



Definimos un nuevo conjunto de variables: las corrientes de malla.
A través de R_3 :

$$i = i_1 - i_2$$

LVK en la malla 1:

$$\begin{aligned} v_{R1} + v_{R3} + v_{R2} - v_1 &= 0 \\ i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_3 + i_1 R_2 - v_1 &= 0 \\ i_1 (R_1 + R_2 + R_3) - i_2 R_3 &= v_1 \end{aligned}$$

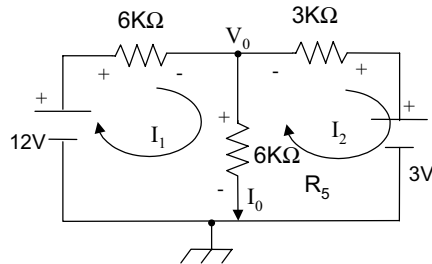
LVK en la malla 2:

$$\begin{aligned} v_2 + v_{R4} + v_{R5} - v_{R3} &= 0 \\ v_2 + i_2 R_4 + i_2 R_5 - (i_1 - i_2) R_3 &= 0 \\ -i_1 R_3 + i_2 (R_3 + R_4 + R_5) &= -v_2 \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Encontrar la corriente I_0 en el circuito de la figura.



Malla 1:

$$6000I_1 + 6000(I_1 - I_2) = 12$$

Malla 2:

$$6000(I_2 - I_1) + 3000I_2 = -3$$

$$\begin{aligned} 12000I_1 - 6000I_2 &= 12 \\ -6000I_1 + 9000I_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 12000 & -6000 \\ -6000 & 9000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 72 \cdot 10^6$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -6000 \\ -3 & 9000 \end{vmatrix}}{72 \cdot 10^6} = 1.25 \text{ mA} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 12000 & 12 \\ -6000 & -3 \end{vmatrix}}{72 \cdot 10^6} = 0.5 \text{ mA}$$

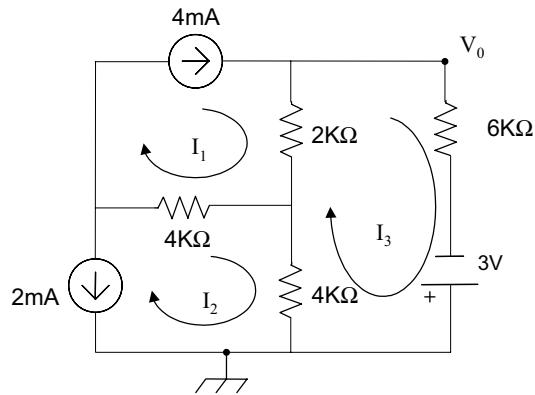
Por tanto:

$$I_0 = I_1 - I_2 = 1.25 - 0.5 = 0.75 \text{ mA}$$

Caso II: Circuitos que contienen fuentes de corriente independientes.

Como en el análisis nodal, la presencia de una fuente de corriente simplifica el análisis por mallas.

Ejemplo: Averiguar el valor de V_0 .



Es inmediato que

$$I_1 = 4 \text{ mA} \text{ e } I_2 = -2 \text{ mA}$$

En la malla 3 tenemos:

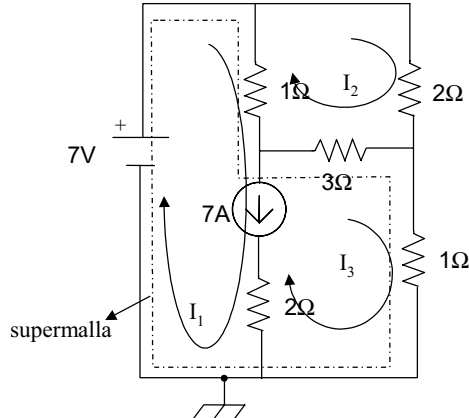
$$4000(I_3 - I_2) + 2000(I_3 - I_1) + 6000I_3 = 3$$

Despejando:

$$I_3 = 0.25 \text{ mA} \quad \text{y} \quad V_0 = 6000I_3 - 3 = -1.5 \text{ V}$$

Importante: si el circuito contiene alguna fuente de corriente que sea común a dos mallas se formará una supermalla con tales mallas. Se aplicará la LVK al lazo mayor de la supermalla y no a las dos mallas que lo forman. Deberá, asimismo, aplicarse la ecuación de restricción de la supermalla.

Ejemplo:



Supermalla:

$$7 = (I_1 - I_2)1 + (I_3 - I_2)3 + I_3 1 \rightarrow 7 = I_1 - 4I_2 + 4I_3$$

Ecuación de restricción de supermalla:

$$I_1 - I_3 = 7$$

Malla 2:

$$\begin{aligned} 1(I_2 - I_1) + 2I_2 + 3(I_2 - I_3) &= 0 \\ -I_1 + 6I_2 - 3I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema tenemos:

$$I_1 = 9\text{A} \quad ; \quad I_2 = 2.5\text{A} \quad ; \quad I_3 = 2\text{A}$$

Resumen del análisis por corrientes (mallas):

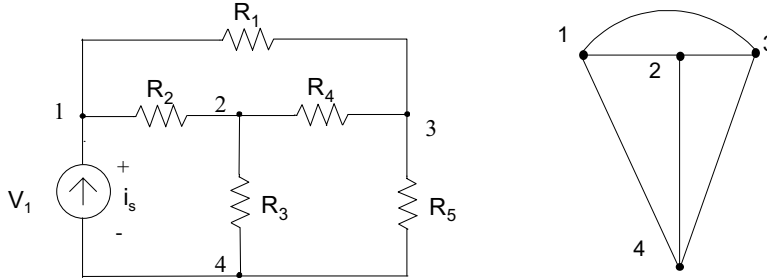
1. El análisis de mallas sólo es aplicable a redes planas.
2. Hacer un diagrama claro y sencillo del circuito. Indicar los valores de todos los elementos y las fuentes.
3. Para un circuito de M mallas definir en cada una de ellas una corriente de malla.
4. Si el circuito sólo contiene fuentes de tensión, aplicar la LVK a cada malla.
5. Si el circuito contiene fuentes de corriente, formar una supermalla por cada una que sea común a dos mallas. Aplicar la LVK al lazo mayor de la supermalla. Añadir la ecuación de restricción de la supermalla.

3.8 Topología de Redes. Análisis General.

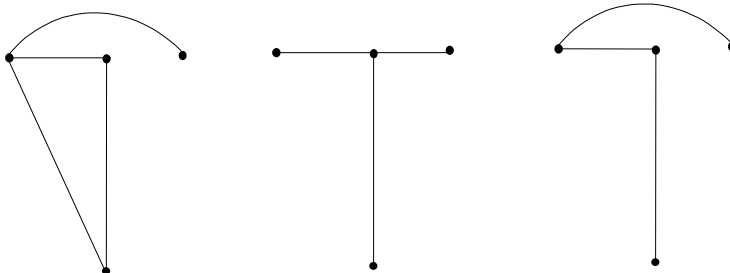
La topología estudia las propiedades relacionadas con la conectividad de los circuitos. El objetivo perseguido es generalizar los métodos de análisis de nodos y mallas.

3.8.1 Definiciones básicas

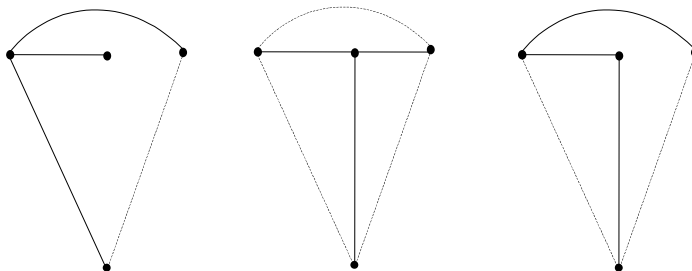
- **Grafo:** dibujo del circuito en que cada rama se representa por un segmento de línea. Si existe una trayectoria desde cualquier nodo hacia todos los otros se dice que el grafo es conexo.



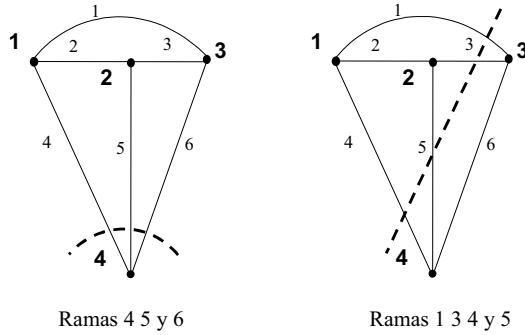
- **Árbol:** Conjunto de ramas que no contiene ningún lazo pero que conecta todos los nodos con cualquier otro nodo no necesariamente de forma directa.



- **Coárbol:** para un árbol concreto se define como el conjunto de ramas del grafo que no forman parte de él (acoplamientos).



- **Acoplamiento o eslabón:** cualquier rama que pertenezca a un árbol.
- **Grupo de corte:** conjunto mínimo de ramas que cuando se cortan dividen al grafo en dos partes separadas.



Dado un grafo que representa a un circuito, se definen:

L= número de acoplamientos

B= número de ramas en el grafo

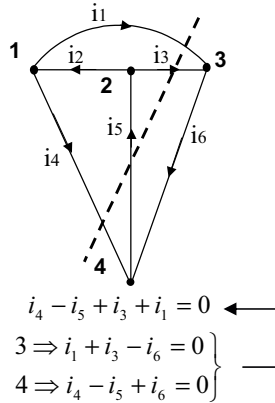
N= número de nodos.

Número de ramas en el árbol $\equiv N-1$

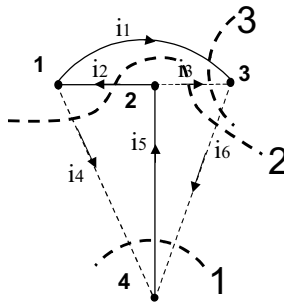
Número de acoplamientos en ese árbol: $L = B - (N - 1) = B - N + 1$

3.8.2 Ecuaciones generales de análisis nodal

- **Ecuación de grupo de corte:** Ecuación resultante de aplicar la LCK para cada parte del circuito dividida por un grupo de corte.



- **Grupo de corte fundamental:** grupos de corte que contienen una sola rama del árbol. Dado un grafo de N nodos hay $N-1$ grupos de corte fundamentales.



Procedimiento general:

1. Identificar claramente el nodo de referencia y asignar una variable de tensión a todos los demás nodos. En total N nodos y $N-1$ incógnitas.
2. Formar un árbol que incluya todas las fuentes de tensión (dependientes e independientes).
3. Para cada fuente de tensión escribir su ecuación de restricción. Si hay M fuentes habrá M ecuaciones.
4. Para cada grupo de corte fundamental que no contenga fuente de tensión escribir su ecuación. Habrá $N-1-M$ ecuaciones nodales linealmente independientes.

3.8.3 Ecuaciones generales del análisis por mallas

- **Mallas fundamentales:** para un árbol dado son aquellas que contienen sólo un acoplamiento.

Puesto que $L = B - N + 1$, éste será el número de mallas fundamentales.

Las ecuaciones resultantes de aplicar la LVK a las mallas fundamentales serán independientes.

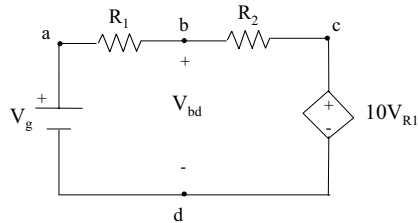
Procedimiento general:

1. Formar un árbol que excluya todas las fuentes de corriente (dependientes e independientes).
2. Asignar a cada malla fundamental una corriente de malla. En total $B - N + 1$ incógnitas.
3. Para cada malla fundamental que contenga una fuente de corriente, escribir su ecuación de restricción. Si hay P fuentes habrá P ecuaciones.
4. Para cada malla fundamental que no contiene fuentes de corriente escribir su ecuación de malla correspondiente. Habrá $B - (N - 1) - P$ ecuaciones de malla linealmente independientes.

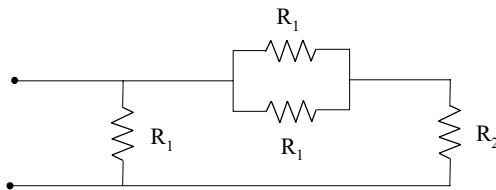
3.9 Problemas

3.9.1 Enunciados

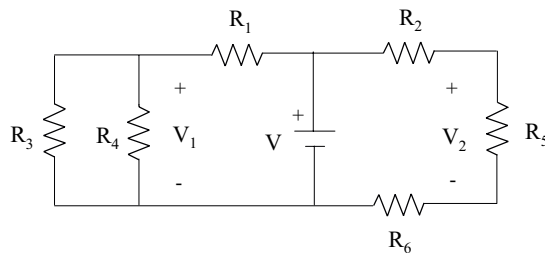
P3.1.- En el circuito de la figura encontrar el valor de V_{bd} . Datos: $V_g = 12V$; $V_{R2} = 1V$



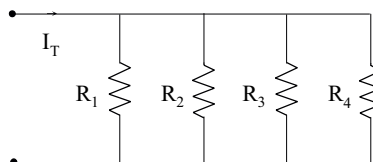
P3.2.- Calcular la resistencia equivalente para el circuito de la figura. Datos: $R_1 = 20 \Omega$; $R_2 = 10 \Omega$.



P3.3.- Calcular V_1 y V_2 en el circuito de la figura. Datos: $V = 105 V$; $R_1 = 74 \Omega$; $R_2 = 16,4 \Omega$; $R_3 = 36 \Omega$; $R_4 = 12 \Omega$; $R_5 = 103,2 \Omega$; $R_6 = 28,7 \Omega$



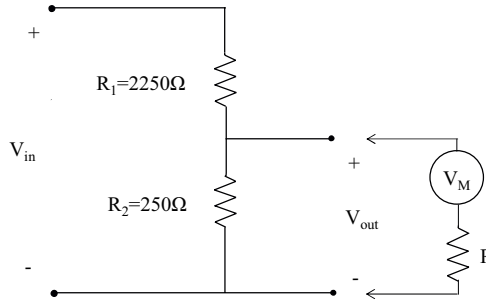
P3.4.- Demostrar que para cuatro resistencias conectadas en paralelo la corriente por cada una de ellas viene dada en función de la corriente total I_T por:



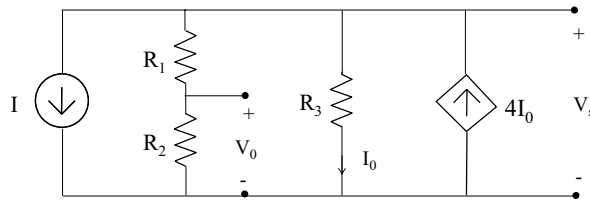
$$I_{R4} = I_T \left(\frac{R'}{R_4 + R'} \right) \text{ siendo } R' = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

P3.5.- El circuito de la figura es un divisor de tensión, también llamado atenuador. Cuando se trata de una resistencia con un contacto deslizante se denomina potenciómetro. Para comprobar el efecto de carga provocado por la resistencia R del voltímetro V_M calcular la relación V_{out}/V_{in} para los siguientes casos:

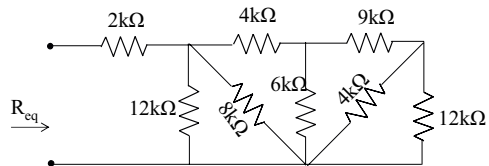
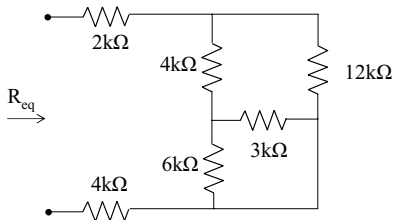
- a) $R = \infty$ b) $R = 1 \text{ M}\Omega$ c) $R = 10 \text{ k}\Omega$ d) $R = 1 \text{ k}\Omega$



P3.6.- Dado el circuito de la figura, que contiene una fuente de corriente controlada por corriente, hallar la tensión V_o . Datos: $I = 10 \text{ mA}$; $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$; $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$.



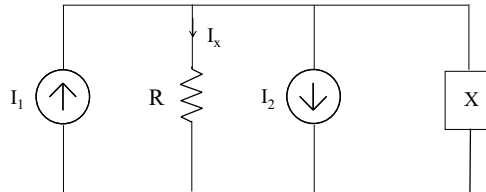
P3.7.- Para los siguientes circuitos encontrar la resistencia equivalente:



P3.8.- Encontrar la potencia absorbida por el elemento X en el circuito de la figura si se trata de:

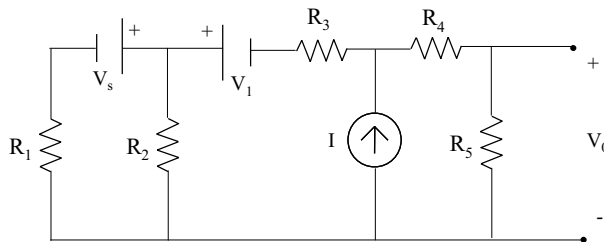
- Resistencia de $4\text{ k}\Omega$.
- Fuente independiente de corriente de 20 mA , con la flecha dirigida hacia abajo.
- Fuente dependiente de corriente de valor $2I_x$ con la flecha dirigida hacia abajo.
- Fuente independiente de tensión de 60 V , con la polaridad positiva hacia arriba.

Datos: $I_1 = 80\text{ mA}$; $R = 1\text{ k}\Omega$; $I_2 = 30\text{ mA}$

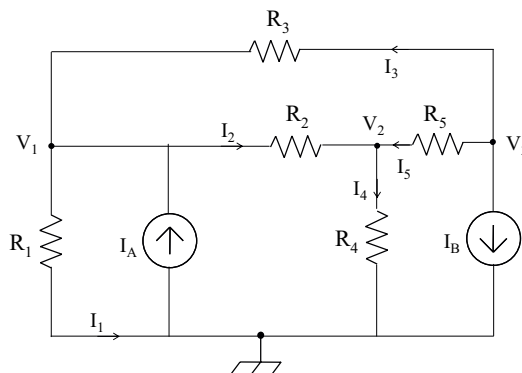


P3.9.- Dado que $V_o = 4\text{ V}$ en el circuito de la figura, encontrar V_s .

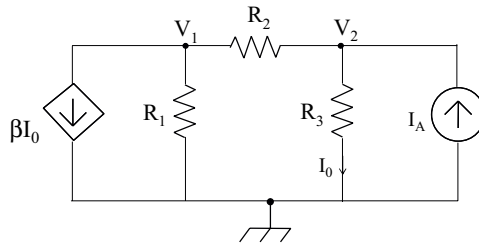
Datos: $V_1 = 6\text{ V}$; $R_1 = 3\text{ k}\Omega$; $R_2 = 12\text{ k}\Omega$; $R_3 = 3\text{ k}\Omega$; $R_4 = 2\text{ k}\Omega$; $R_5 = 1\text{ k}\Omega$; $I = 2\text{ mA}$.



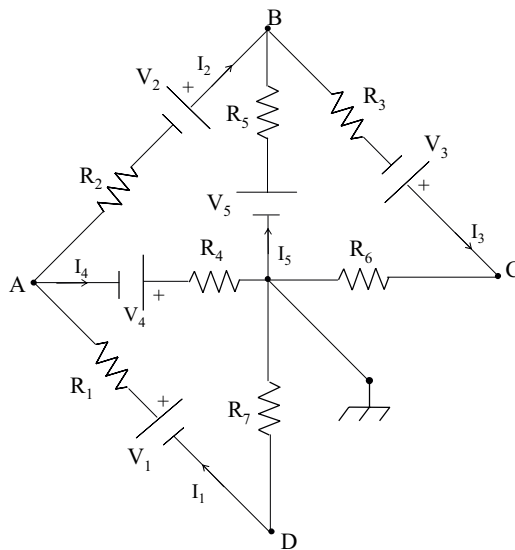
P3.10.-Aplicar el método del análisis nodal para encontrar las tensiones y corrientes en el circuito de la figura. Datos: $I_A = 2\text{ A}$; $I_B = 7\text{ A}$; $R_1 = 1\ \Omega$; $R_2 = 1/2\ \Omega$; $R_3 = 1/3\ \Omega$; $R_4 = 1/4\ \Omega$; $R_5 = 1/5\ \Omega$.



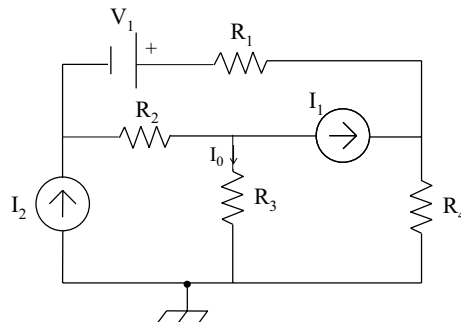
P3.11.-Obtener las tensiones de nodos y las corrientes de rama en el circuito de la figura. Calcular las potencias absorbidas por las resistencias y las entregadas por las fuentes. Datos: $\beta = 2$; $I_A = 2 \text{ mA}$; $R_1 = 12 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 6 \text{ k}\Omega$; $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$.



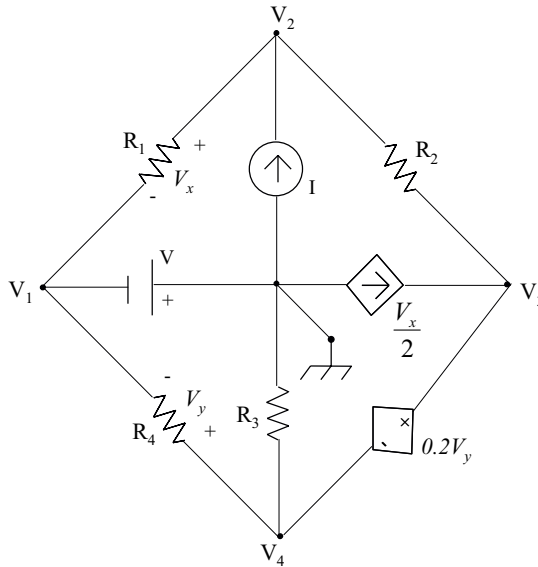
P3.12.-Aplicar el método de las mallas para obtener en el circuito de la figura las corrientes por todas las ramas. Indicar la tensión V_{BD} , V_{AC} y los potenciales V_B y V_A . Datos: $V_1 = V_2 = V_3 = 3 \text{ V}$; $V_4 = V_5 = 5 \text{ V}$; $R_1 = R_2 = 2 \Omega$; $R_3 = R_4 = R_5 = 5 \Omega$; $R_6 = R_7 = 7 \Omega$



P3.13.-Resolver el circuito de la figura mediante el método de las mallas. Dar el valor de I_o y de la potencia disipada, P_{dis} , en R_3 . Datos: $V_1 = 6 \text{ V}$; $I_1 = 4 \text{ mA}$; $I_2 = 2 \text{ mA}$; $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_3 = R_4 = 2 \text{ k}\Omega$.



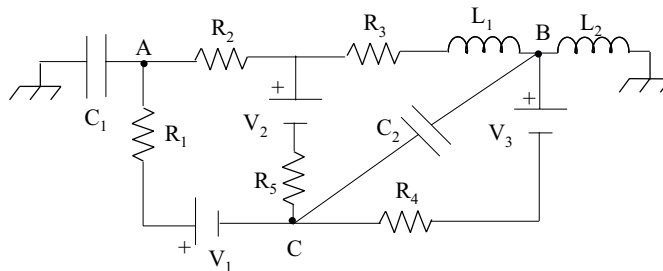
P3.14.-Determinar los valores de las tensiones de nodo respecto al punto de referencia en el circuito de la figura. Datos: $V = 12\text{ V}$; $I = 14\text{ A}$; $R_1 = 0,5\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $R_3 = 1\ \Omega$; $R_4 = 2,5\ \Omega$



P3.15.-En el circuito de la figura determinar:

- Potencia disipada por R_2 y R_5 .
- Potencias puestas en juego por las fuentes V_1 , V_2 y V_3 .
- Potenciales de los puntos A, B y C.
- Energía almacenada por los condensadores y bobinas.

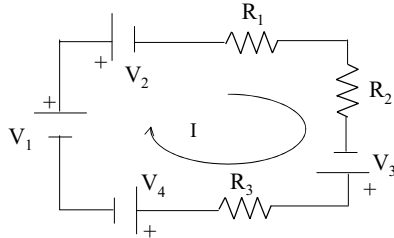
Datos: $V_1 = 4\text{ V}$; $V_2 = 3\text{ V}$; $V_3 = 2\text{ V}$; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\ \Omega$; $L_1 = L_2 = 2\text{ mH}$; $C_1 = C_2 = 2\ \mu\text{F}$



3.9.2 Cuestiones de examen

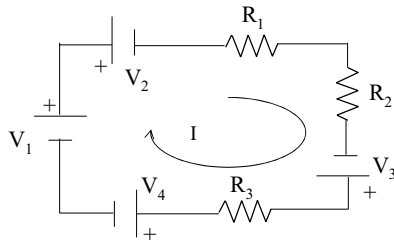
C1.- (Febrero 2000S) ¿Cuánto vale la corriente I en el circuito de la figura?

Datos: $R_1 = 4 \Omega$; $R_2 = 7 \Omega$; $R_3 = 5 \Omega$; $V_1 = 5 \text{ V}$; $V_2 = 5 \text{ V}$; $V_3 = 3 \text{ V}$; $V_4 = 11 \text{ V}$

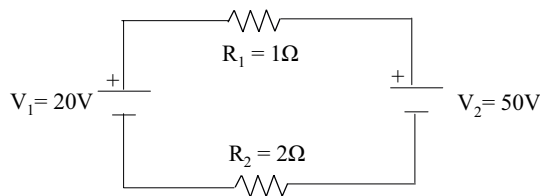


C2.- (Septiembre 2000S) ¿Cuánto vale la corriente I en el circuito de la figura?

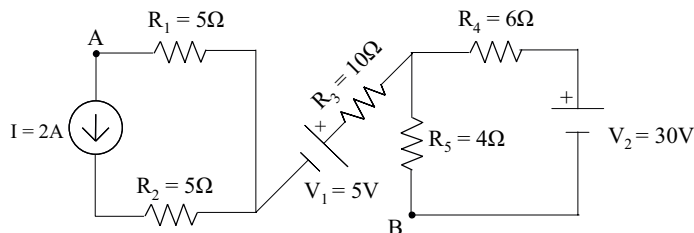
Datos: $R_1 = 4 \Omega$; $R_2 = 7 \Omega$; $R_3 = 5 \Omega$; $V_1 = -5 \text{ V}$; $V_2 = 5 \text{ V}$; $V_3 = 3 \text{ V}$; $V_4 = 11 \text{ V}$



C3.- (Junio 2000T) Calcular las potencias suministradas por las fuentes del circuito de la figura, indicando claramente si cada generador absorbe o entrega potencia. Calcular asimismo la potencia absorbida por cada resistencia.

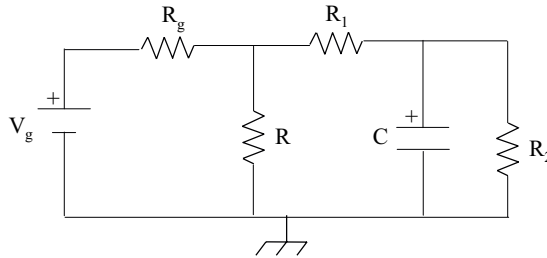


C4 (Junio 2000T) Hallar la tensión entre los puntos A y B del circuito de la figura.

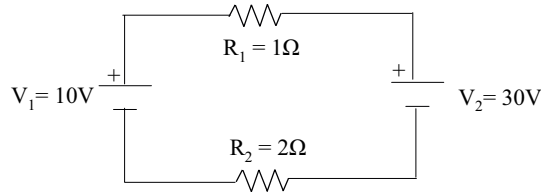


C5 (septiembre 2000S) Determinar el valor de R que haga máxima la transferencia de potencia eléctrica entre el generador y el circuito que alimenta.

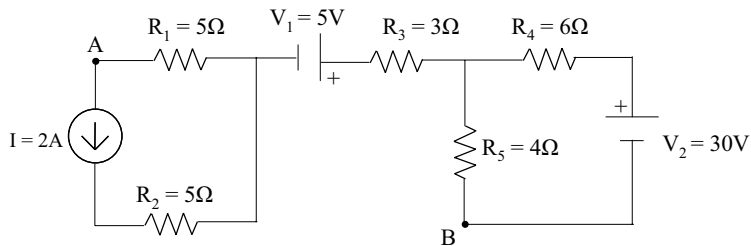
Datos: $R_1 = 3 \Omega$; $R_2 = 1 \Omega$; $R_g = 2 \Omega$; $V_g = 7 \text{ V}$; $C = 10 \mu\text{F}$.



C6 (Septiembre 2000T) Calcular las potencias suministradas por las fuentes del circuito de la figura, indicando claramente si cada generador absorbe o entrega potencia. Calcular asimismo la potencia absorbida por cada resistencia.



C7 (Septiembre 2000T) Hallar la tensión entre los puntos A y B del circuito de la figura.



3.9.3 Soluciones

P3.1.- $V_{bd} = 11 \text{ V}$

P3.2.- $R_{eq} = 10 \Omega$

P3.3.- $V_1 = 11,43 \text{ V}$, $V_2 = 73,1 \text{ V}$

P3.4.- Teórico

P3.5.- a) $\frac{V_{out}}{V_{in}} = 0,1$

b) $\frac{V_{out}}{V_{in}} = 0,1$

c) $\frac{V_{out}}{V_{in}} = 0,098$

d) $\frac{V_{out}}{V_{in}} = 0,082$

P3.6.- $V_0 = 8 \text{ V}$

P3.7.- a) $R_{eq} = 10 \text{ k}\Omega$

b) $R_{eq} = 5 \text{ k}\Omega$

P3.8.- a) $P_{abs} = 0,4 \text{ W}$

b) $P_{abs} = -0,6 \text{ W}$

c) $P_{abs} = -0,56 \text{ W}$

d) $P_{abs} = 0,6 \text{ W}$

P3.9.- $V_s = 36 \text{ V}$

P3.10.- $V_1 = -0,94 \text{ V}$; $V_2 = -1,02 \text{ V}$; $V_3 = -1,86 \text{ V}$

$I_1 = -0,94 \text{ A}$; $I_2 = 0,16 \text{ A}$; $I_3 = -2,76 \text{ A}$; $I_4 = -4,08 \text{ A}$; $I_5 = -4,2 \text{ A}$

P3.11.- $V_1 = -4,8 \text{ V}$; $V_2 = 2,4 \text{ V}$ $I_0 = 0,8 \text{ mA}$; $I_1 = -0,4 \text{ mA}$; $I_2 = -1,2 \text{ mA}$

$P_{R1} = 1,92 \text{ mW}$; $P_{R2} = 8,64 \text{ mW}$; $P_{R3} = 1,92 \text{ mW}$

Fuente indep. $P_{ent} = 4,8 \text{ mW}$

Fuente depend. $P_{ent} = 7,68 \text{ mW}$

P3.12.- $I_1 = 0,5 \text{ A}$; $I_2 = -0,2 \text{ A}$; $I_3 = 0,41 \text{ A}$; $I_4 = 0,7 \text{ A}$; $I_5 = 0,61 \text{ A}$

$V_{BD} = 5,45 \text{ V}$; $V_{AC} = -4,37 \text{ V}$; $V_B = 1,95 \text{ V}$; $V_A = -1,5 \text{ V}$

P3.13.- $I_0 = -4/3 \text{ mA}$; $P_{R3} = 3,5 \text{ mW}$;

P3.14.- $V_1 = -12 \text{ V}$; $V_2 = -4 \text{ V}$; $V_3 = 0 \text{ V}$; $V_4 = -2 \text{ V}$

P3.15.- a) $P_{R2} = 0,25 \text{ W}$; $P_{R5} = 0 \text{ W}$

b) $P_1 = 2 \text{ W}$; $P_2 = 0 \text{ W}$; $P_3 = -1 \text{ W}$

c) $V_A = 1\text{ V}; V_B = 0\text{ V}; V_C = -2,5\text{ V}$

d) $W_{L1} = 0,25\text{ mJ}; W_{L2} = 0\text{ J}; W_{C1} = 1\text{ }\mu\text{J}; W_{C2} = 6,25\text{ }\mu\text{J}$

C1.- $I = -0,5\text{ A}$

C2.- $I = -1,25\text{ A}$

C3.- $P_1 = -200\text{ W}$ (Absorbe potencia); $P_2 = 500\text{ W}$ (Entrega potencia)
 $P_{R1} = 100\text{ W}; P_{R2} = 200\text{ W}$

C4.- $V_{AB} = -3\text{ V}$

C5.- $R = 4\text{ }\Omega$;

C6.- $I = -6,67\text{ A} \rightarrow P_{V1} = -66,7\text{ W}; P_{V2} = 200\text{ W}; P_{R1} = -44,4\text{ W}; P_{R2} = 88,9\text{ W}$

C7.- $V_{AB} = -3\text{ V}$

Tema 4: Teoremas Fundamentales

Objetivo: poder analizar circuitos más complejos mediante la simplificación considerable de la tarea de cálculo.

4.1 Linealidad

Los circuitos que vamos a estudiar son circuitos lineales.

Dado un circuito eléctrico donde $x \equiv$ excitación (generador independiente) e $y = f(x)$ la respuesta (corriente en una rama o tensión en un nodo), será lineal cuando se verifiquen las siguientes propiedades.

- (a) La respuesta total debida a varias excitaciones simultáneas es la suma de las respuestas producidas por cada excitación individual.

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$$

- (b) Al multiplicar la excitación por una constante, la respuesta queda multiplicada por dicha constante.

$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$$

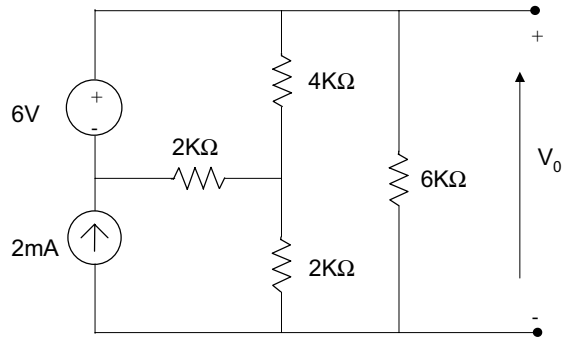
4.2 Teorema de Superposición

En un circuito lineal que contiene múltiples generadores independientes, la corriente o la tensión en cualquier punto del circuito puede calcularse como la suma algebraica de las contribuciones individuales de cada generador actuando por sí solo.

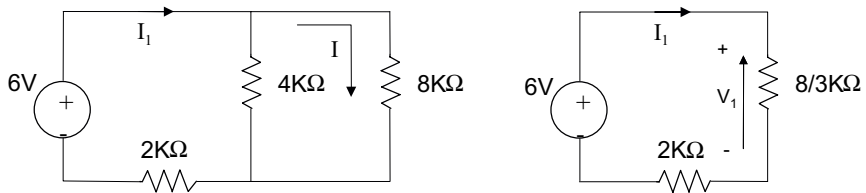
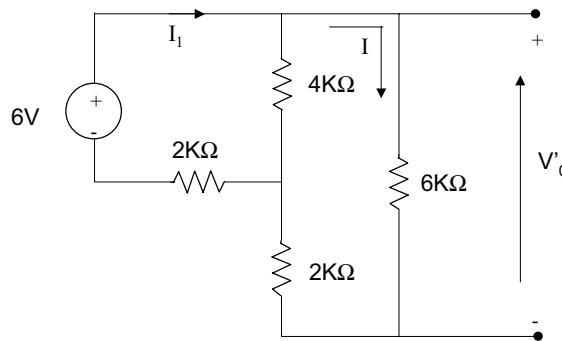
Al aplicar el teorema para que un generador ideal no actúe, se sustituirá:

- por un cortocircuito si es de tensión.
- por un circuito abierto si es de corriente.

Ejemplo:



1. Contribución de la fuente de tensión. Dejamos la fuente de corriente de circuito abierto.

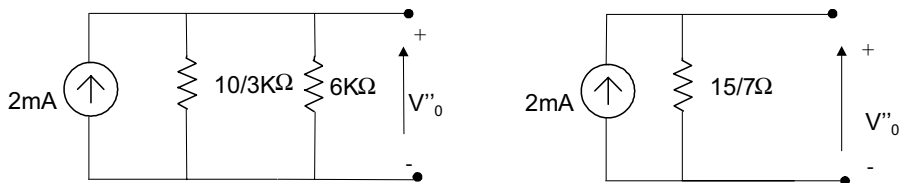
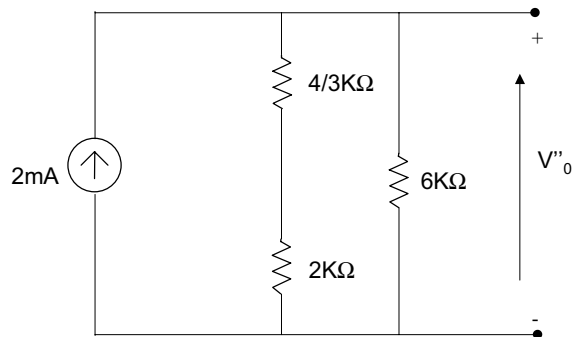
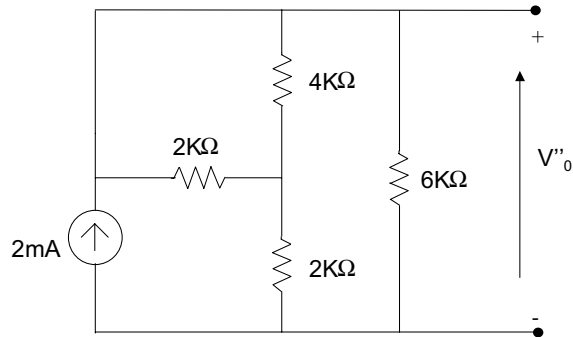


$$I_1 = \frac{6}{2 + \frac{8}{3}} \cdot 10^{-3} = \frac{9}{7} \text{ mA}$$

$$I = I_1 \frac{4}{4 + 8} = \frac{3}{7} \text{ mA}$$

$$V'_0 = I \cdot 6000 = \frac{18}{7} \text{ V}$$

2. Contribución de la fuente de corriente. Dejamos la fuente de tensión en cortocircuito.



$$V''_0 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{15}{7} \cdot 10^3 = \frac{30}{7} \text{ V}$$

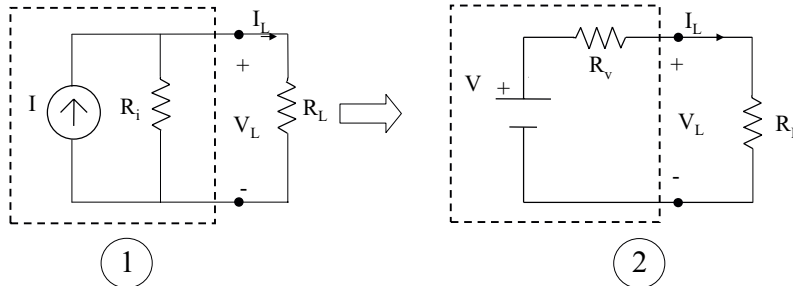
Por tanto:

$$V_0 = V'_0 + V''_0 = \frac{30}{7} + \frac{18}{7} = \frac{48}{7} = 6.86 \text{ V}$$

Importante: La superposición se aplica a corriente y tensión en un circuito lineal, si bien no puede ser usada para determinar la potencia debido a que la potencia es una función no lineal.

4.3 Transformación de Fuentes

Podremos intercambiar una fuente de tensión por una de intensidad y viceversa con tal de que sean equivalentes, es decir, que cada fuente produzca exactamente la misma tensión y corriente para cualquier carga que se conecte entre sus terminales.



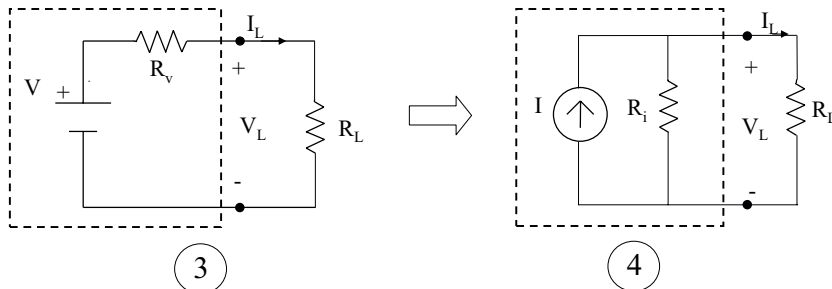
Para obtener el circuito (2) a partir del (1) debemos averiguar el valor de V y de R_v .

$$\text{En (1): } I = I_{R_i} + I_L = \frac{V_L}{R_i} + I_L \xrightarrow{*R_i} R_i I = V_L + I_L R_i \quad (\text{a})$$

$$\text{En (2): } V = R_v I_L + V_L \quad (\text{b})$$

(a) y (b) deben ser equivalentes: $V = R_i I$

$$R_v I_L = R_i I_L \longrightarrow R_v = R_i$$



Para obtener el circuito (4) a partir del (3) debemos averiguar el valor de I y de R_i .

$$\text{En (3): } V = R_v I_L + V_L \xrightarrow{\div R_v} \frac{V}{R_v} = I_L + \frac{V_L}{R_v} \quad (\text{c})$$

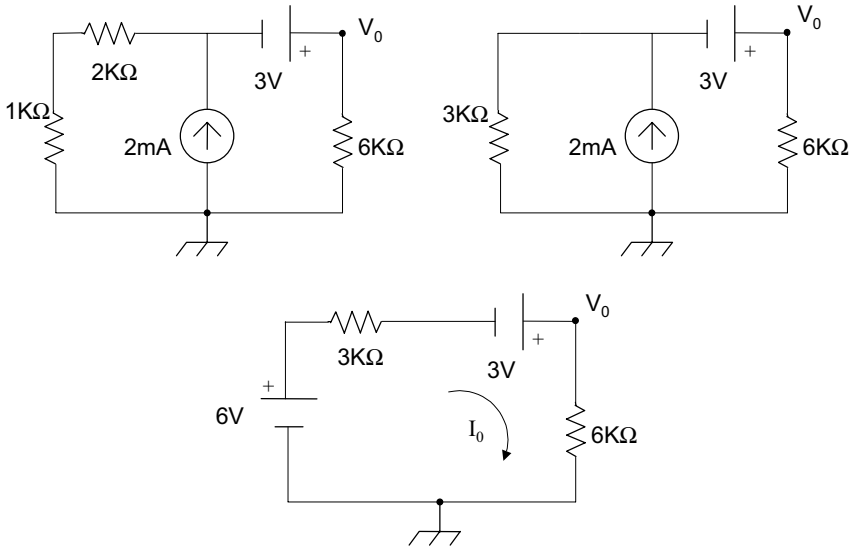
$$\text{En (4): } I = \frac{V_L}{R_i} + I_L \quad (\text{d})$$

(a) y (b) deben ser equivalentes: $I = \frac{V}{R_v}$

$$\frac{V_L}{R_i} = \frac{V_L}{R_v} \longrightarrow R_i = R_v$$

Importante: los dos circuitos equivalentes lo son entre los nodos externos.

Ejemplo: Calcular V_0 aplicando transformación de fuentes.

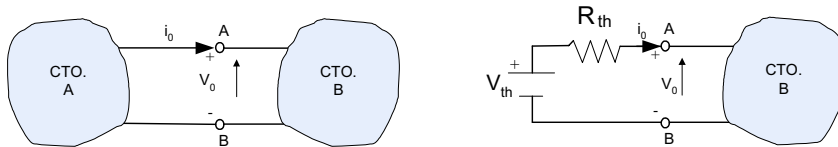


$$6 + 3 = 3000I_0 + 6000I_0 \rightarrow I_0 = \frac{9}{9000} = 1\text{mA}$$

$$V_0 = I_0 \cdot 6000 = 6\text{V}$$

4.4 Teoremas de Thévenin y Norton

- **Teorema de Thévenin:** un circuito formado por generadores (dependientes e independientes) y resistencias puede sustituirse entre dos puntos A y B por un generador de tensión y una resistencia en serie.



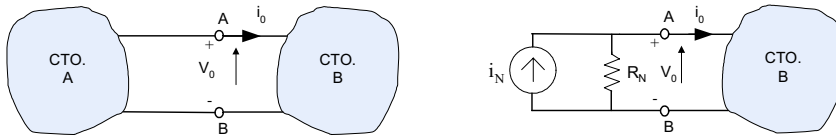
- El valor del generador de tensión se obtiene calculando la tensión existente entre los terminales A y B en circuito abierto.

$$V_{th} = v_{ABca}$$

- El valor de la resistencia R_{th} es el de la resistencia equivalente entre los terminales A y B.

$$R_{th} = R_{eq}$$

- **Teorema de Norton:** es el dual del teorema de Thévenin. Un circuito formado por generadores (dependientes e independientes) y resistencias puede sustituirse entre dos puntos A y B por un generador de corriente i_N en paralelo con una resistencia R_N .



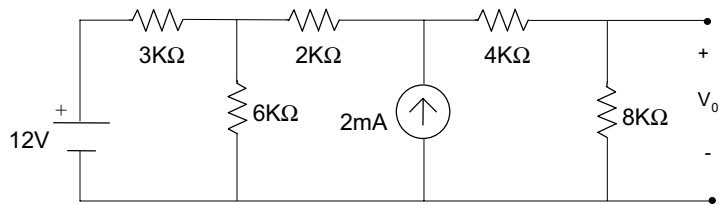
- El valor de i_N se obtiene calculando la corriente que circula por los terminales A y B al cortocircuitarlos.

$$i_N = i_{ABcc}$$

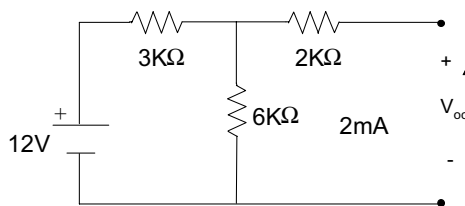
- El valor de R_N es el de la resistencia equivalente entre los terminales A y B.

$$R_N = R_{eq}$$

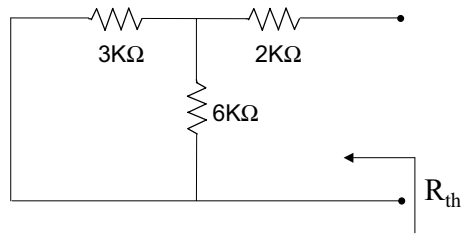
Ejemplo: Dado el circuito de la figura utilizar el teorema de Thévenin para hallar V_0 .



- 1.- Tomamos el circuito de la izquierda de la fuente de corriente.

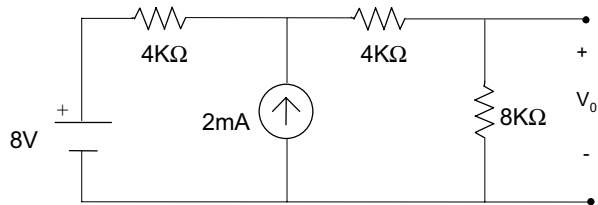


$$V_{oc} = \frac{12}{9K\Omega} \cdot 6K\Omega = 8V$$

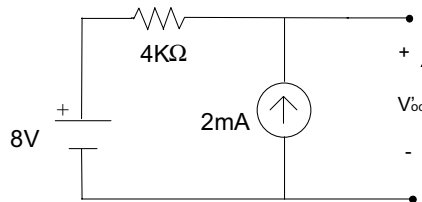


$$R_{th} = 2K\Omega + (6K\Omega // 3K\Omega) = 4K\Omega$$

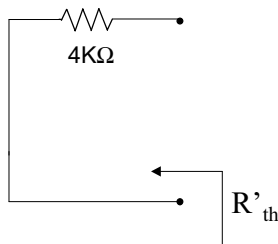
Por tanto:



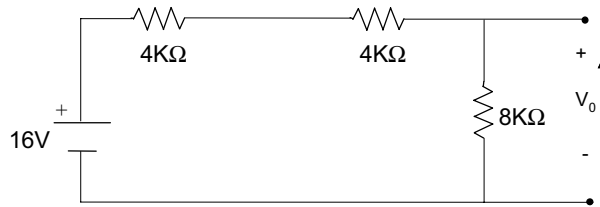
2.- Aplicamos de nuevo el Teorema de Thévenin:



$$8 = -2 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3 + V'_{oc} \rightarrow 8 = -8 + V'_{oc} \rightarrow V'_{oc} = 16V$$



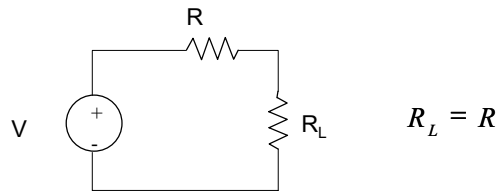
Finalmente:



$$V_0 = \frac{8K\Omega}{16K\Omega} 16 = 8V$$

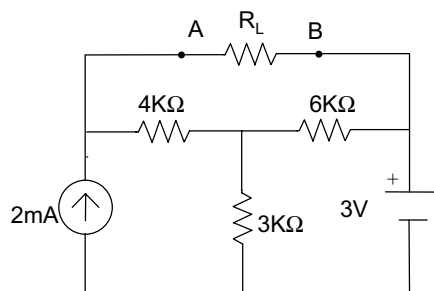
4.5 Teorema de la Máxima Transferencia de Potencia

Para una red simple hemos visto que la máxima potencia transferida tiene lugar cuando:

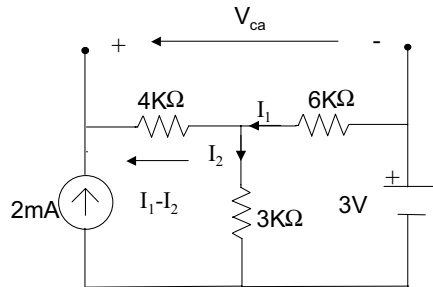


Es importante darse cuenta de que V y R pueden representar el equivalente de Thévenin de cualquier circuito lineal.

Ejemplo: Valor de R_L para que haya máxima transferencia de potencia y potencia máxima que puede transferirse a esa carga.



Hallamos el circuito equivalente de Thévenin entre los puntos A y B.

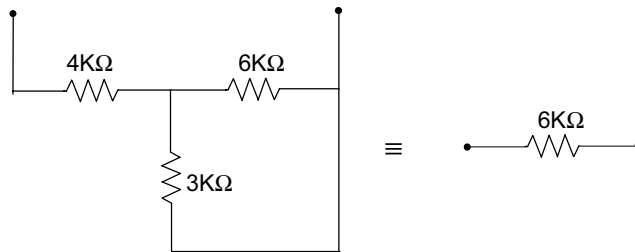


$$3 = 6000I_1 + 3000I_2 \quad \rightarrow \quad 3 = 6000I_1 + 6 + 3000I_1 \quad \rightarrow \quad I_1 = -\frac{1}{3} \text{ mA}$$

$$I_2 = 2 \cdot 10^{-3} + I_1$$

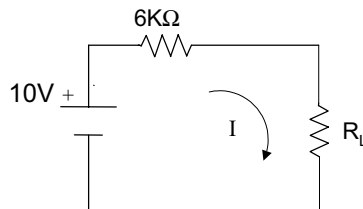
$$V_{ca} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3 + \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^3 = 10 \text{ V}$$

Resistencia equivalente de Thévenin:



$$4\text{K}\Omega + 6\text{K}\Omega // 3\text{K}\Omega$$

Por lo que:



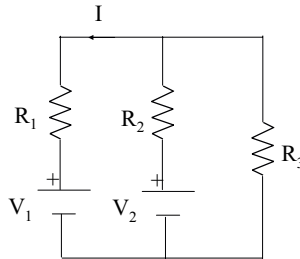
$$R_L = 6\text{K}\Omega$$

$$P_{RL} = V_{RL} \cdot I = I^2 R_L = \left(\frac{10}{12\text{K}\Omega} \right)^2 6000 = 4.17 \text{ mW}$$

4.6 Problemas

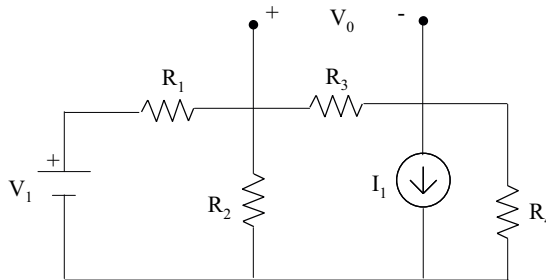
4.6.1 Enunciados

P4.1.- Utilizando superposición calcular la intensidad I debida a cada fuente de tensión por separado. Datos: $R_1 = R_3 = 27 \Omega$; $R_2 = 47 \Omega$; $V_1 = 460 \text{ V}$; $V_2 = 200 \text{ V}$



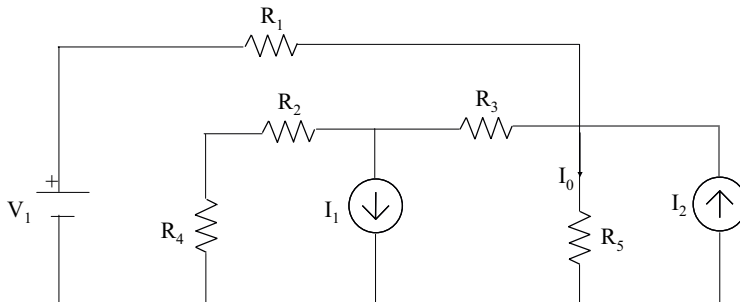
P4.2.- Hallar V_o en el circuito de la figura usando el teorema de superposición.

Datos: $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 6 \text{ k}\Omega$; $R_3 = 8 \text{ k}\Omega$; $R_4 = 2 \text{ k}\Omega$; $V_1 = 12 \text{ V}$; $I_1 = 2 \text{ mA}$.



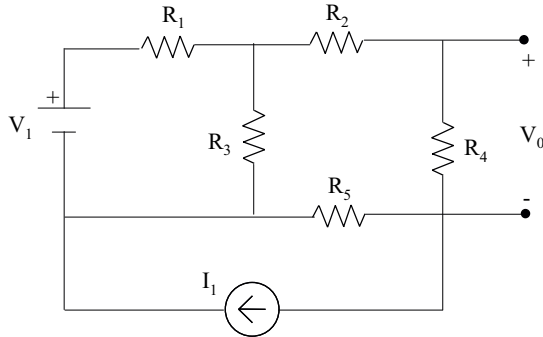
P4.3.- En el circuito dado calcular I_o . Aplicar transformación de fuentes.

Datos: $R_1 = 12 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$; $R_3 = 18 \text{ k}\Omega$; $R_4 = 4 \text{ k}\Omega$; $R_5 = 8 \text{ k}\Omega$; $V_1 = 6 \text{ V}$; $I_1 = I_2 = 2 \text{ mA}$



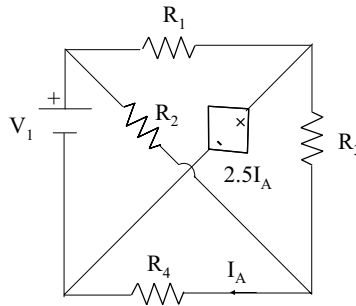
P4.4.- Calcular la tensión V_o en el circuito de la figura. Aplicar el teorema de la transformación de fuentes.

Datos: $R_1 = 6 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$; $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$; $R_4 = 4 \text{ k}\Omega$; $R_5 = 2 \text{ k}\Omega$; $V_1 = 12 \text{ V}$; $I_1 = 2 \text{ mA}$



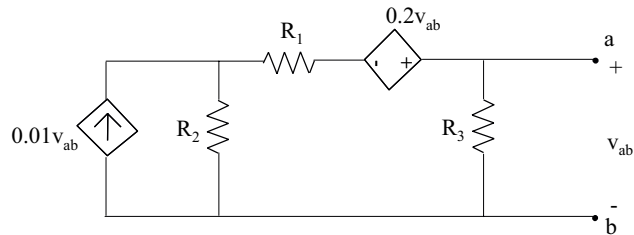
P4.5.- Encontrar la corriente I_A en el circuito de la figura.

Datos: $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $R_3 = 3 \Omega$; $R_4 = 4 \Omega$; $V_1 = 20 \text{ V}$



P4.6.- Para el circuito de dos terminales de la figura, hallar el equivalente de Thevenin.

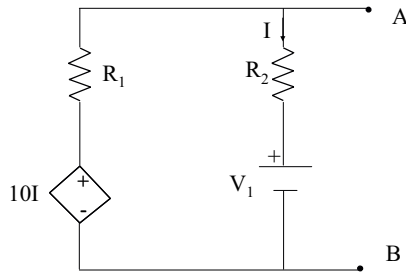
Datos: $R_1 = 50 \Omega$; $R_2 = 200 \Omega$; $R_3 = 100 \Omega$



P4.7.- Dado el circuito de la figura:

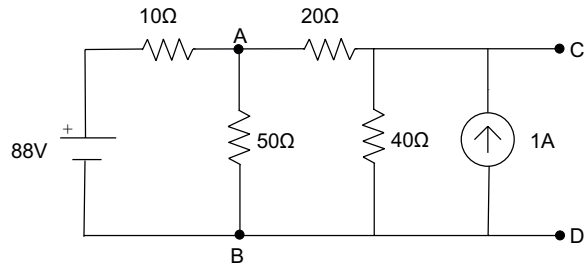
- Calcular el equivalente de Norton entre los puntos A y B.
- Determinar el valor de R_L a conectar entre esos puntos para que se entregue la máxima potencia
- En el caso anterior, ¿Cuál es la tensión en R_L ? ¿Y la potencia?

Datos: $R_1 = 20 \Omega$; $R_2 = 40 \Omega$; $V_1 = 50 \text{ V}$



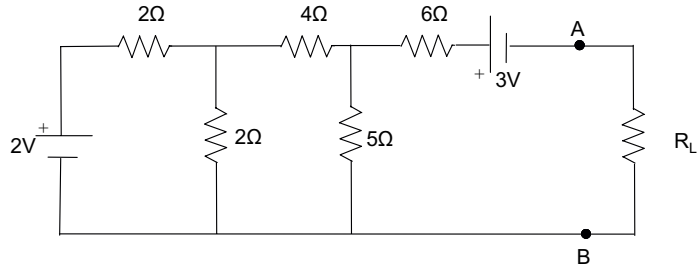
P4.8.- Para el circuito de la figura,

- Hallar el equivalente de Thévenin para la red externa a la resistencia de 50Ω , es decir, entre los terminales A y B.
- Hallar el equivalente de Norton para la red externa a la resistencia de 50Ω , es decir, entre los terminales A y B.
- Comprobar la dualidad entre los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton de los apartados a y b a través del teorema de transformación de fuentes.
- Hallar el equivalente de Thévenin entre los terminales C y D.
- Hallar el equivalente de Norton entre los terminales C y D.
- Comprobar la dualidad entre los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton de los apartados d y e a través del teorema de transformación de fuentes.



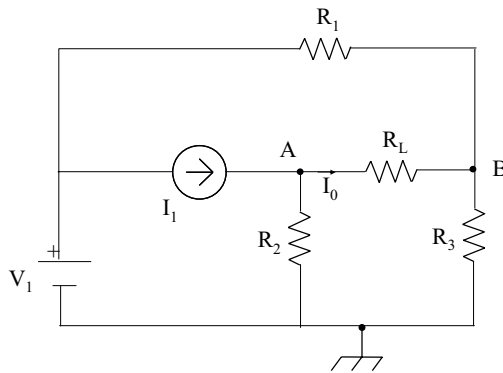
P4.9.- Para el circuito de la figura,

- Hallar el equivalente de Thévenin para la red externa a la resistencia de R_L , es decir, entre los terminales A y B.
- Hallar el equivalente de Norton para la red externa a la resistencia de R_L , es decir, entre los terminales A y B.



P4.10.-Determine I_o en el circuito de la figura haciendo uso del teorema de Thevenin.

Datos: $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$; $R_3 = 4 \text{ k}\Omega$; $R_L = 6 \text{ k}\Omega$; $V_1 = 12 \text{ V}$; $I_1 = 4 \text{ mA}$.



4.6.2 Soluciones

P4.1.- $I = -8,77 \text{ A}$

P4.2.- $V_o = 8 \text{ V}$

P4.3.- $I_o = 1 \text{ mA}$

P4.4.- $V_o = 2 \text{ V}$

P4.5.- $I_A = 2,86 \text{ A}$

P4.6.- $v_{th} = 0 \text{ V}$
 $R_{th} = 192,3 \Omega$

P4.7.- a) $I_N = 0,625 \text{ A}; R_N = 16 \ \Omega$

b) $R_L = 16 \ \Omega$

c) $P_{RL} = 1,56 \text{ W}$

P4.8.- a) $V_{th} = V_{AB} = 81.16 \text{ V}; R_{th} = R_{eq} = 8.57 \ \Omega$

b) $I_{cc} = 9.5 \text{ A}; R_N = R_{th} = R_{eq} = 8.57 \ \Omega$

d) $V_{th} = V_{CD} = 59.5 \text{ V}; R_{th} = R_{eq} = 16.58 \ \Omega$

e) $I_N = I_{cc} = 3.5882 \text{ A}; R_N = R_{th} = R_{eq} = 16.58 \ \Omega$

P4.9.- a) $V_{th} = V_{AB} = -2.5 \text{ V}; R_{th} = R_{eq} = 8.5 \ \Omega$

b) $I_N = I_{cc} = -0.2941 \text{ A}; R_N = R_{eq} = 8.5 \ \Omega$

P4.10.- $I_o = 0.39 \text{ mA}$

Tema 5: Circuitos de Primer Orden

5.1 Introducción

En este capítulo vamos a estudiar el análisis transitorio en circuitos que contienen un único elemento de almacenamiento de energía (condensador o bobina).

Análisis transitorio: estudio del comportamiento de un circuito como función de tiempo después de que se produzca un cambio súbito en él (debido a la apertura y/o cierre de interruptores). La respuesta del circuito a un cambio súbito pasará por un periodo de transición antes de estabilizarse y quedar en lo que llamaremos régimen permanente o estacionario.

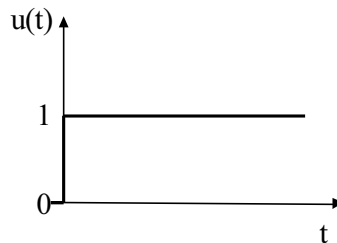
Constante de tiempo de un circuito: parámetro muy importante de un circuito que nos indica lo rápido que responderá ese circuito a los cambios.

5.2 Funciones Escalón y Exponencial

5.2.1 Función escalón

La función escalón unidad se define por:

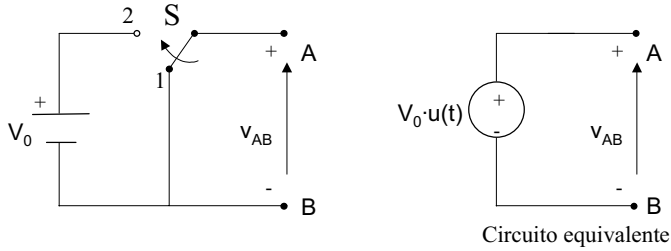
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



No está definida para $t = 0$.

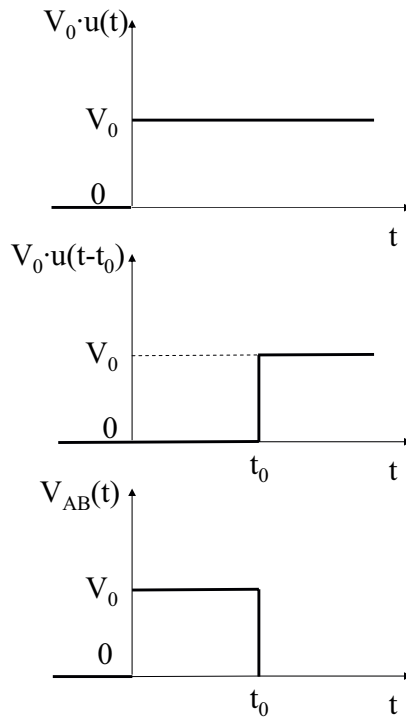
Ejemplo: El interruptor S del circuito de la figura pasa de la posición 1 a la 2 en $t = 0$. Por tanto,

$$v_{AB} = V_0 \cdot u(t)$$



En $t=t_0$ el interruptor S vuelve a la posición 1 y podemos expresar v_{AB} de la forma

$$v_{AB} = V_0 \cdot [u(t) - u(t - t_0)]$$



Esta última función es una **función pulso** de amplitud V_0 y duración t_0 segundos.

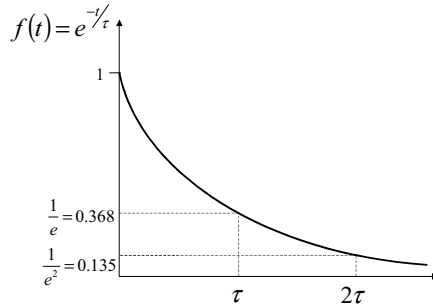
5.2.2 Función exponencial

Se llama función exponencial a la función $f(t) = e^{st}$ siendo $s \in C$, es decir, una constante compleja.

Si $\Re\{s\} < 0$ (negativa) $\rightarrow f(t)$ decreciente

Si $\Re\{s\} > 0$ (positiva) $\rightarrow f(t)$ creciente

Discutiremos la exponencial $f(t) = e^{-at}$ donde $a \in \Re$. La inversa de a tiene dimensiones de tiempo y se denomina constante de tiempo $\left(\tau = \frac{1}{a}\right)$.



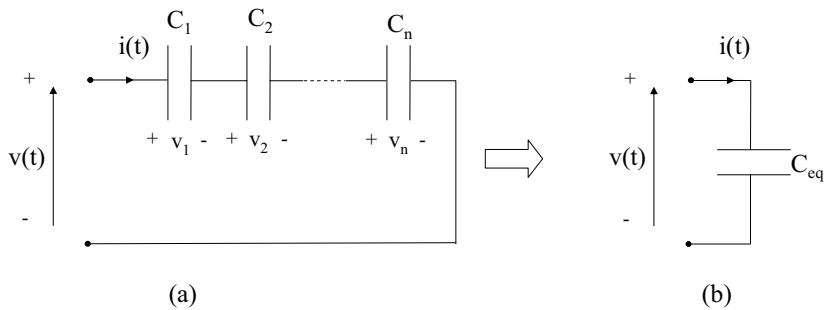
Constante de tiempo: tiempo que tarda la función en decrecer hasta el 36.8% de su valor máximo (para exponenciales decrecientes).

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}$$

5.3 Asociación de Condensadores y Bobinas

5.3.1 Asociación de condensadores

– Condensadores en serie:



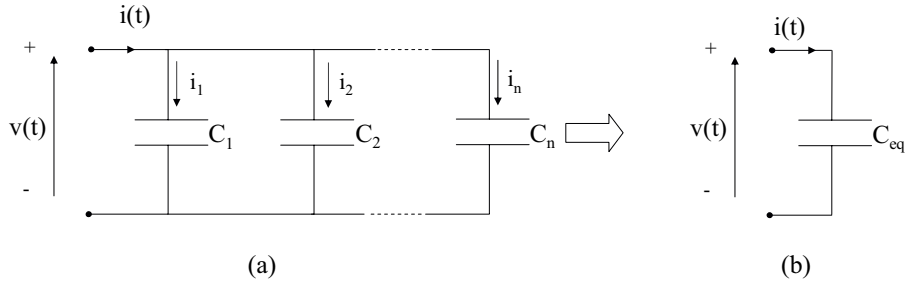
En (a):

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) \\ v_i(t) &= \frac{1}{C_i} \int_0^t i(t) dt + v_i(t_0) \end{aligned} \right\} v(t) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right) \int_0^t i(t) dt + \sum_{i=1}^n v_i(t_0)$$

En (b):
$$v(t) = \frac{1}{C_{eq}} \int_0^t i(t) dt + v(t_0)$$

Por tanto, para que se cumpla la equivalencia:
$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

– **Condensadores en paralelo:**



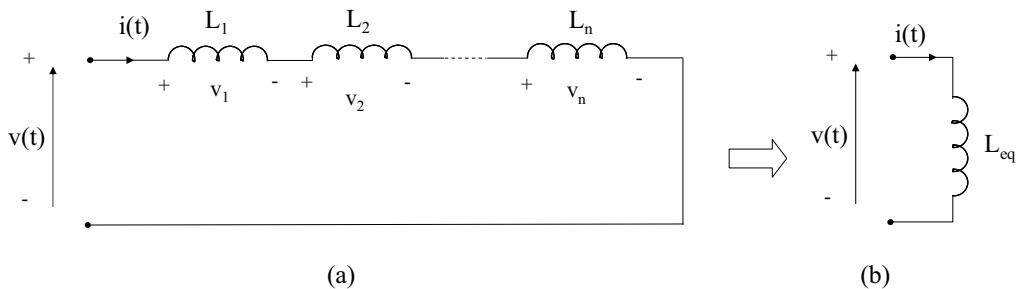
En (a):
$$\left\{ \begin{aligned} i(t) &= i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) = \sum_{i=1}^n i_i(t) \\ i_i(t) &= C_i \frac{dv(t)}{dt} \end{aligned} \right\} i(t) = \left(\sum_{i=1}^n C_i \right) \frac{dv(t)}{dt}$$

En (b):
$$i(t) = C_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$$

Por tanto, para que se cumpla la equivalencia:
$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

5.3.2 Asociación de bobinas

– **Bobinas en serie:**

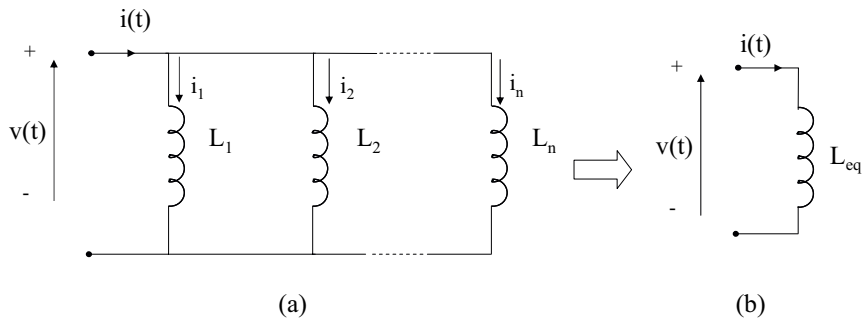


$$\text{En (a): } \left\{ \begin{array}{l} v(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) \\ v_i(t) = L_i \frac{di(t)}{dt} \end{array} \right\} v(t) = \left(\sum_{i=1}^n L_i \right) \frac{di(t)}{dt}$$

$$\text{En (b): } v(t) = L_{eq} \frac{di(t)}{dt}$$

Por tanto, para que se cumpla la equivalencia: $L_{eq} = \sum_{i=1}^n L_i$

– **Bobinas en paralelo:**



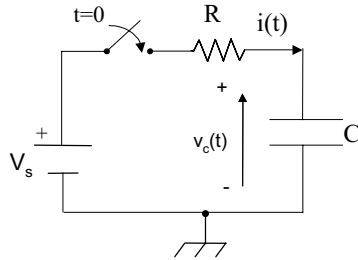
$$\text{En (a): } \left\{ \begin{array}{l} i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) = \sum_{i=1}^n i_i(t) \\ i_i(t) = \frac{1}{L_i} \int_0^t v(t) dt + i_i(t_0) \end{array} \right\} i(t) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i} \right) \int_0^t v(t) dt + \sum_{i=1}^n i_i(t_0)$$

$$\text{En (b): } i(t) = \frac{1}{L_{eq}} \int_0^t v(t) dt + i_i(t_0)$$

Para que se cumpla la equivalencia: $\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}$

5.4 Carga y Descarga de un Condensador

5.4.1 Carga del condensador



Inicialmente

$$Q = 0 \rightarrow V = \frac{Q}{C_q} = 0$$

Por otro lado, la corriente que circula por el circuito es la misma que atraviesa el condensador, y por lo tanto cumple: $i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$

Aplicamos la LVK al circuito ($t > 0$):

$$V_s = i(t)R + v_c(t)$$

$$V_s = R \cdot C \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$$

o bien

$$\boxed{\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{V_s}{RC}}$$

que es una ecuación diferencial de primer orden, donde $v_c(t)$ es la incógnita.

Solución de la ecuación diferencial de primer orden

Teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales:

Si $v(t) = v_p(t)$ es una de las posibles soluciones de la ecuación diferencial y $v(t) = v_h(t)$

es solución de la ecuación homogénea, entonces:

$v_c(t) = v_p(t) + v_h(t)$ es solución de la ecuación original.

$v_p(t) \equiv$ Solución particular. Respuesta forzada.

$v_h(t) \equiv$ Solución homogénea. Respuesta natural.

Solución particular:

Puesto que el lado derecho de la ecuación es una constante, es razonable suponer que

$v_p(t) = K$.

Sustituyendo:

$$0 + \frac{K_1}{RC} = \frac{V_s}{RC} \quad ; \quad K_1 = V_s \quad ; \quad \boxed{v_p(t) = V_s} \rightarrow \text{Respuesta forzada.}$$

Solución homogénea:

$$\begin{aligned} \frac{dv_h(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_h(t) &= 0 \\ \frac{dv_h(t)}{dt} &= -\frac{1}{RC}v_h(t) \\ \frac{dv_h(t)}{v_h(t)} &= -\frac{1}{RC}dt \end{aligned}$$

Integrando ambos términos de la ecuación:

$$\begin{aligned} \int \frac{dv_h(t)}{v_h(t)} &= -\int \frac{1}{RC} dt \\ \ln[v_h(t)] &= -\frac{t}{RC} + K \\ \boxed{v_h(t) = K_2 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}} &\rightarrow \text{Respuesta natural.} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$v(t) = v_p(t) + v_h(t) = V_s + K_2 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

El valor de K_2 viene determinado por la condición inicial en el condensador. Hemos visto que inicialmente:

$$Q = 0 \rightarrow v_c(t=0) = 0V$$

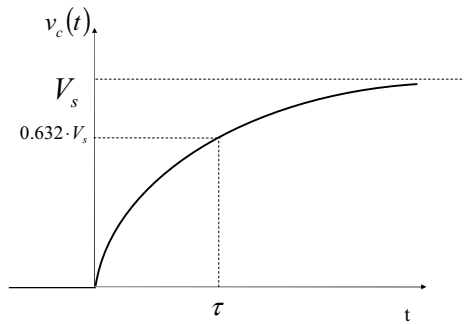
Por tanto, como la tensión en el condensador no puede experimentar saltos bruscos:

$$v_c(t=0^+) = v_c(t=0^-) = 0 = V_s + K_2 \rightarrow K_2 = -V_s$$

Definitivamente:

$$\boxed{v_c(t) = V_s \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)}$$

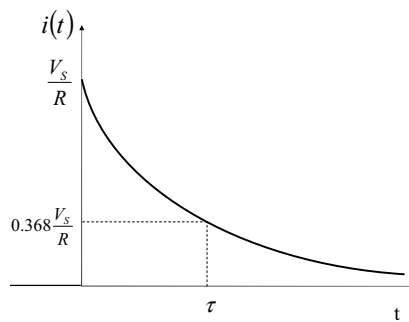
Gráficamente:



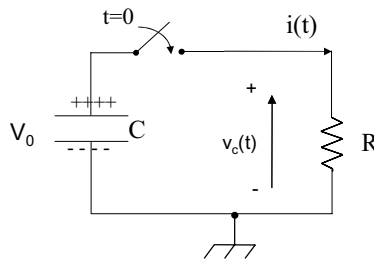
Corriente a través del condensador:

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$i(t) = CV_s \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



5.4.2 Descarga del condensador



Inicialmente ($t < 0$):

$$v_c(t=0) = V_0$$

Para $t > 0$ planteamos la ecuación diferencial:

$$v_c(t) = i(t)R, \text{ con } i(t) = -C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$v_c(t) = -RC \frac{dv_c(t)}{dt} \rightarrow RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = 0$$

$$\boxed{\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = 0}$$

Antes hemos visto que la solución a esta ecuación es:

$$v_c(t) = K \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

Condición inicial para hallar K :

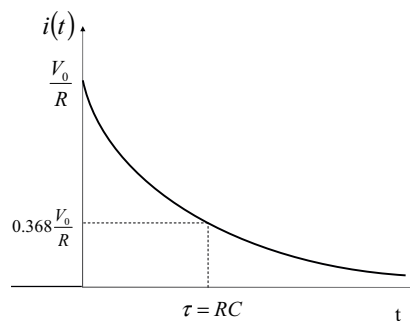
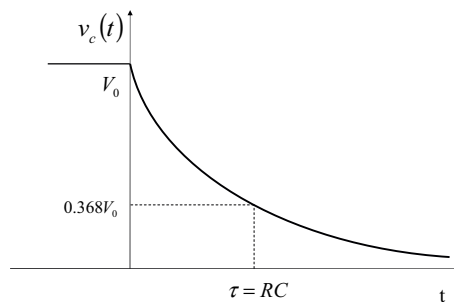
$$v_c(t = 0^+) = v_c(t = 0^-) = V_0 = K \rightarrow K = V_0$$

Por tanto:

$$\boxed{v_c(t) = V_0 \cdot e^{\frac{-t}{RC}}}$$

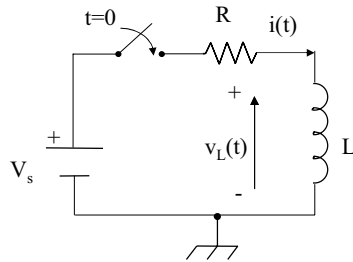
$$\boxed{i(t) = -C \frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{\frac{-t}{RC}}}$$

Cuanto menor es el producto RC antes se descarga el condensador.



5.5 Circuito RL

5.5.1 Aplicación de una tensión continua a una bobina



Planteamos la ecuación diferencial:

$$V_s = i(t)R + v_L(t) \quad \text{con} \quad v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$V_s = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow \text{Incógnita } i(t)$$

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{V_s}{L}}$$

Resolviéndola:

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + K_2 e^{-\frac{R}{L}t}$$

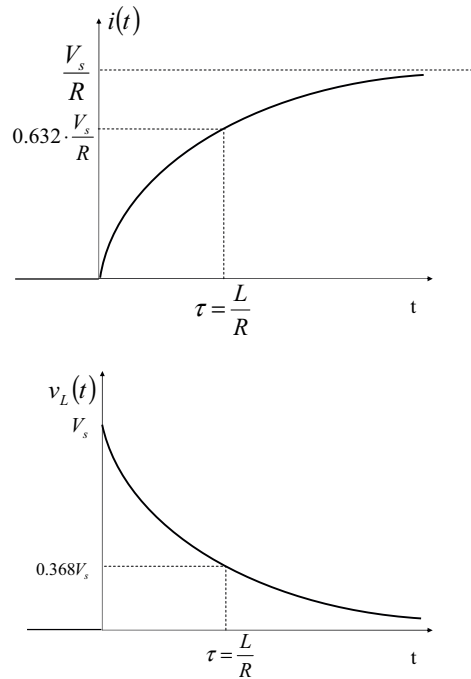
Como la corriente inicial en la bobina es cero y la corriente en la bobina no puede experimentar saltos bruscos:

$$i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0 = \frac{V_s}{R} + K_2 \rightarrow K_2 = -\frac{V_s}{R}$$

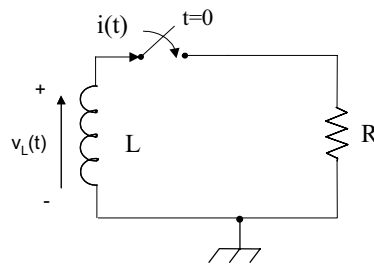
Con lo que:

$$\boxed{i(t) = \frac{V_s}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)}$$

$$\boxed{v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{V_s L}{R} \left(\frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \right) = V_s e^{-\frac{R}{L}t}}$$



5.5.2 Circuito RL sin fuentes



Inicialmente:

$$i(t=0) = I_0$$

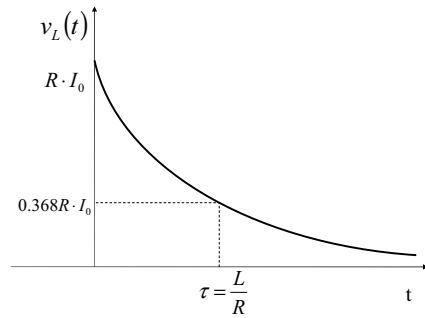
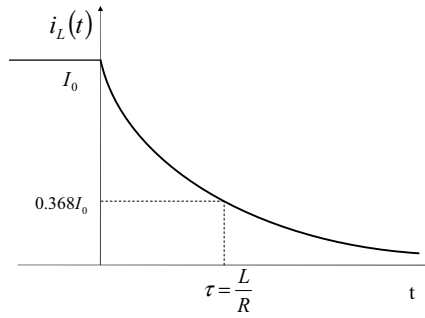
Ecuación diferencial:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0$$

Solución:

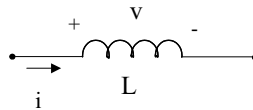
$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$v_L(t) = I_0 R \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$



5.6 Anexo

5.6.1 Bobinas



$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t v(x) dx + i(t_0)$$

$$p = L \cdot i \cdot \frac{di}{dt}$$

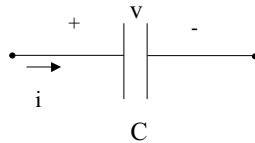
$$w = \frac{1}{2} L \cdot i^2$$

En continua se comporta como cortocircuito

Continuidad en $i \rightarrow i(0^+) = i(0^-)$

v puede ser discontinua

5.6.2 Condensadores



$$v = \frac{1}{C} \int_0^t i(x) dx + v(t_0)$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$p = C \cdot v \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$w = \frac{1}{2} C \cdot v^2$$

En continua se comporta como circuito abierto

Continuidad en v : $\rightarrow v(0^+) = v(0^-)$

i puede ser discontinua

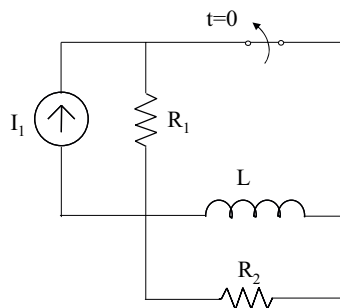
5.7 Problemas

5.7.1 Enunciados

P5.1.- En el circuito de la figura el interruptor ha permanecido cerrado durante un tiempo largo. En $t = 0$ se abre. Se pide:

- Condiciones iniciales. i_L un instante antes de conmutar el interruptor.
- Tensión en la bobina en función del tiempo, $v_L(t)$ tras conmutar el interruptor.
- Energía almacenada en la bobina para $t = 0,4$ s.

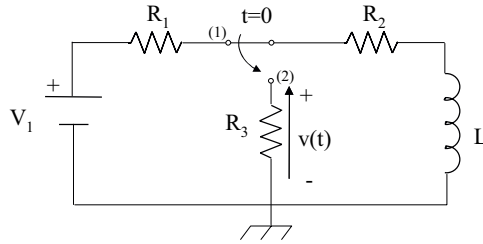
DATOS: $R_1 = 30 \Omega$; $R_2 = 20 \Omega$; $L = 4$ H; $I_1 = 2$ A



P5.2.- En el circuito de la figura el interruptor conmuta de la posición (1) a la (2) tras haber permanecido en la primera durante un tiempo suficientemente largo. Hallar:

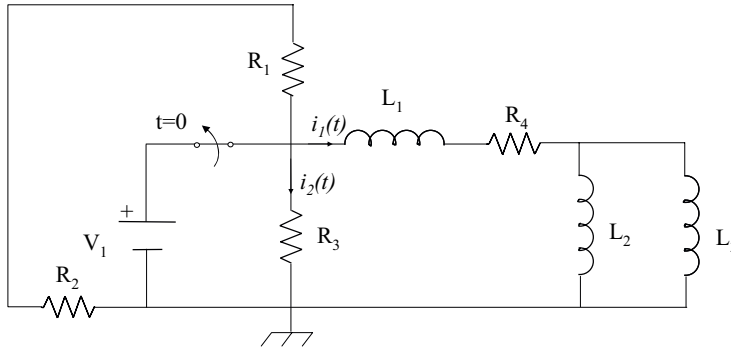
- Corriente I_o que habrá en la bobina justo antes de conmutar.
- Expresión de la tensión en R_3 en función del tiempo, después de la conmutación, $v_3(t)$.
- Potencia total disipada por R_3 en el instante $t = 3\tau$.

DATOS: $V_1 = 40 \text{ V}$; $R_1 = 8 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $R_3 = 12 \Omega$; $L = 3 \text{ H}$



P5.3.- Determinar las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en el circuito de la figura en el que el interruptor se abre para $t = 0$.

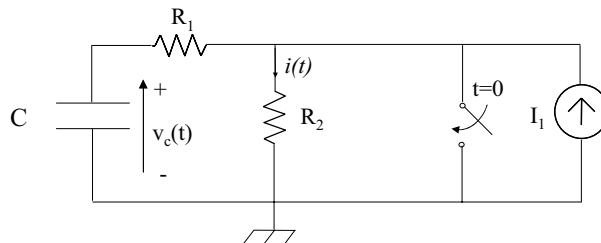
DATOS: $V_1 = 18 \text{ V}$; $R_1 = 60 \Omega$; $R_2 = 120 \Omega$; $R_3 = 90 \Omega$; $R_4 = 50 \Omega$; $L_1 = 1 \text{ mH}$; $L_2 = 2 \text{ mH}$; $L_3 = 3 \text{ mH}$



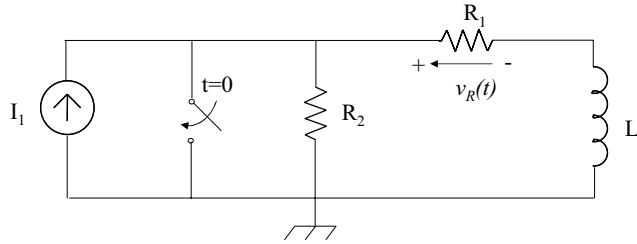
P5.4.- En el circuito de la figura se cierra el interruptor en el instante $t = 0$. Se pide:

- Determinar $v_c(0^+)$, condición inicial en el condensador.
- Hallar $i(0^+)$.
- Calcular $v_c(t)$ tras cerrar el interruptor. Dar el valor de $v_c(2 \text{ ms})$.
- Energía total disipada en R_1 .

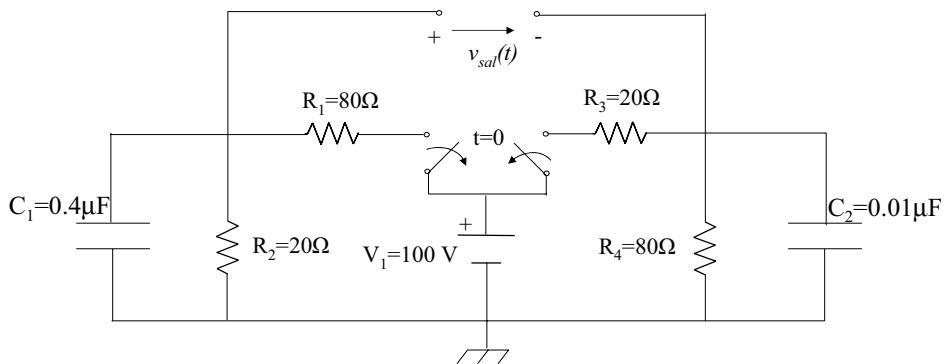
DATOS: $R_1 = 50 \Omega$; $R_2 = 200 \Omega$; $C = 20 \mu\text{F}$; $I_1 = 0,1 \text{ A}$



P5.5.- Seleccione los valores de R_1 y R_2 en el circuito de la figura para que $v_R(0^+) = 10 \text{ V}$ y $v_R(1\text{ms}) = 5 \text{ V}$.
 DATOS: $I_1 = 2 \text{ A}$; $L = 20 \text{ mH}$.

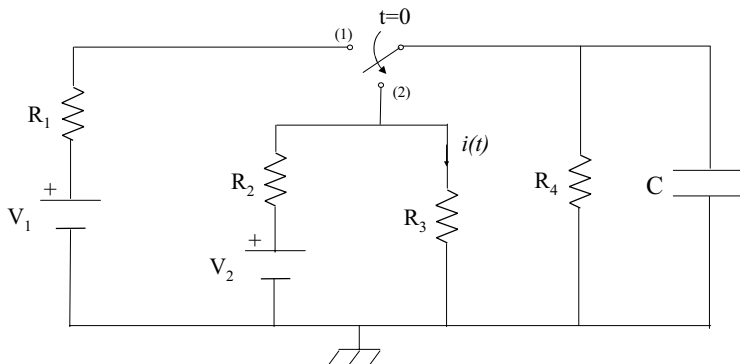


P5.6.- En el circuito de la figura, tras permanecer cerrados durante un largo tiempo se abren simultáneamente ambos interruptores, en $t = 0$. Obtener una expresión para la tensión de salida $v_{sal}(t)$. Dar los valores para $t = 0, 1$ y $5 \mu\text{s}$. ¿ En qué instante de tiempo t_c , $v_{sal} = 0$?



P5.7.- Teniendo en cuenta que en el circuito de la figura el interruptor ha permanecido durante mucho tiempo en la posición (1). En $t = 0$ conmuta a la posición (2). Se pide:
 a) Tensión $v_c(t)$ en el condensador después de la conmutación.
 b) Corriente $i(t)$ en R_3 .

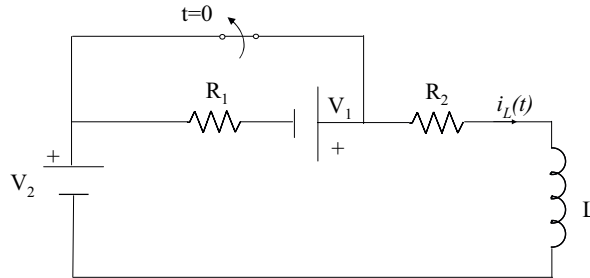
DATOS: $V_1 = 120 \text{ V}$; $V_2 = 50 \text{ V}$; $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 60 \Omega$; $R_3 = 200 \Omega$; $R_4 = 50 \Omega$; $C = 0,05 \text{ F}$



P5.8.- El interruptor que se muestra en la figura ha estado cerrado durante mucho tiempo.

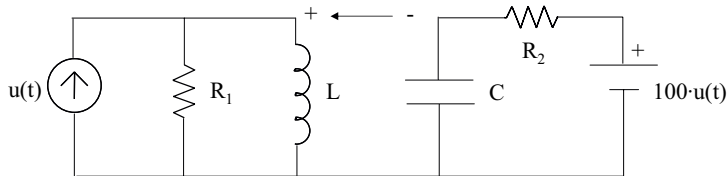
- Encuentre $i_L(t)$ para $t < 0$
- Encuentre $i_L(t)$ para todo t después de abrir el interruptor.

DATOS: $V_1 = 30 \text{ V}$; $V_2 = 10 \text{ V}$; $R_1 = 4 \ \Omega$; $R_2 = 1 \ \Omega$; $L = 0,5 \text{ H}$



P5.9.- Para el circuito de la figura calcular el primer instante después de $t = 0$ en el que $v_x(t) = 0$.

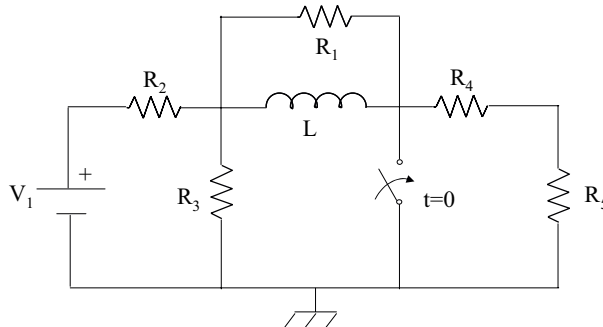
DATOS: $R_1 = 200 \ \Omega$; $R_2 = 100 \ \Omega$; $L = 0,1 \text{ H}$; $C = 10 \ \mu\text{F}$



P5.10.-El circuito que se muestra en la figura ha estado en régimen permanente hasta que se cierra el interruptor en $t = 0$. Se pide:

- Condición inicial $i_L(0^+)$ en la bobina.
- $v_{R2}(t)$ para $t > 0$.
- Energía total transformada en calor por R_3 tras cerrar el interruptor.

DATOS: $V_1 = 24 \text{ V}$; $R_1 = 12 \ \Omega$; $R_2 = 4 \ \Omega$; $R_3 = 6 \ \Omega$; $R_4 = 1 \ \Omega$; $R_5 = 2 \ \Omega$; $L = 4 \text{ H}$



5.7.2 Soluciones

P5.1.- a) $i_L(t=0^-) = 2\text{ A}$
 b) $v_L(t) = 40e^{-5t}$
 c) $W_L = -7,85\text{ J}$

P5.2.- a) $I_o = 4\text{ A}$
 b) $v(t) = -48e^{-4,67t}$
 c) $p(3\tau) = 0,48\text{ W}$

P5.3.- $i_1(t) = 0,36e^{-50000t}$ $i_2(t) = -0,24e^{-50000t}$

P5.4.- a) $v_c(0^+) = 20\text{ V}$
 b) $i(0^+) = 0\text{ A}$
 c) $v_c(t) = 20e^{-1000t}$ $v_c(2\text{ms}) = 2,71\text{ V}$
 d) $W_R = 4\text{ mJ}$

P5.5.- $R_1 = 13,8\ \Omega$; $R_2 = 7,82\ \Omega$

P5.6.- $v_{sal}(t) = 80e^{-125000t} - 20e^{-125000t}$
 $v_{sal}(0) = 60\text{ V}$; $v_{sal}(1\mu\text{s}) = 5,27\text{ V}$; $v_{sal}(5\mu\text{s}) = -10,55\text{ V}$
 $t_c = 1,23\ \mu\text{s}$

P5.7.- a) $v_c(0^-) = 100\text{ V}$; $v_c(t) = 20 + 80e^{-5/6t}$ para $t > 0$
 b) $i(t) = 0,1 + 0,4e^{-5/6t}$

P5.8.- a) $i_L(0^-) = 10\text{ A}$
 b) $i_L(t) = 8 + 2e^{-10t}$

P5.9.- $t \cong 0,63\text{ ms}$

P5.10.- a) $i_L(t=0^+) = 8/3\text{ A}$
 b) $v(t) = 24 - \frac{20}{3}e^{-\frac{t}{2}}$
 c) $W_L = 7,41\text{ J}$

Tema 6: Circuitos en Régimen Estacionario Sinusoidal

6.1 Introducción

Régimen Estacionario Sinusoidal: respuesta forzada de circuitos cuyas funciones de excitación son senoidales. Ignoramos las condiciones iniciales y la respuesta transitoria o natural que, como hemos visto, finalmente desaparece.

Importancia del régimen estacionario sinusoidal: se trata de la forma de onda dominante en la industria de la potencia eléctrica y en telecomunicación. Cualquier señal periódica puede expresarse como una suma de senoidales.

6.2 Funciones Sinusoidales

6.2.1 Definiciones

Dada una función del tiempo $y = f(t)$, se dice que es **periódica**, de periodo T , cuando para todo t se cumple que: $f(t) = f(t + nT)$ donde n es entero.

Un caso particular de las funciones periódicas son las funciones sinusoidales (seno y coseno) cuyas expresiones son:

$$y(t) = A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$y(t) = A_0 \operatorname{cos}(\omega t + \beta)$$

Donde se definen los siguientes parámetros:

- $A_0 \equiv$ Amplitud o valor de pico de la función
- $\omega \equiv$ Pulsación (rad/s)
- $(\omega t + \varphi)$ ó $(\omega t + \beta) \equiv$ Fase instantánea (rad)
- $t \equiv$ variable independiente (s)
- $\varphi, \beta \equiv$ Fases iniciales (rad)

Otros parámetros son:

- Periodo T : tiempo de repetición de las dos funciones senoidales anteriores. Es decir:

$$A_0 \cos(\omega t + \beta) = A_0 \cos[\omega(t+T) + \beta]$$

$$A_0 \cos(\omega t + \beta) = A_0 \cos[\omega t + \beta + 2\pi]$$

$$\omega(t+T) + \beta = \omega t + \beta + 2\pi$$

de donde

$$\omega T = 2\pi \quad \text{y} \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \text{ segundos.}$$

- Frecuencia f : número de veces que se repite la función por unidad de tiempo. Así:

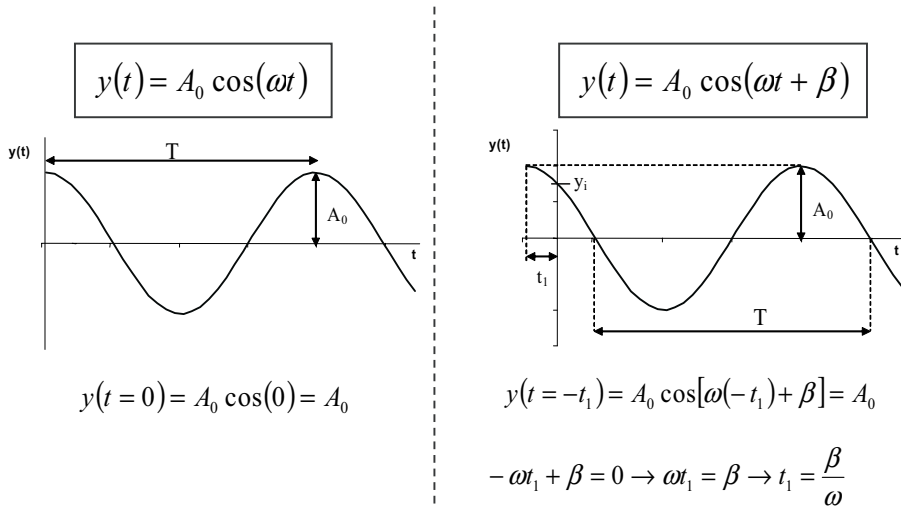
$$f = \frac{1}{T} \text{ ciclos/s o Hertzios.}$$

Por tanto, la pulsación y la frecuencia se relacionan de la forma:

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

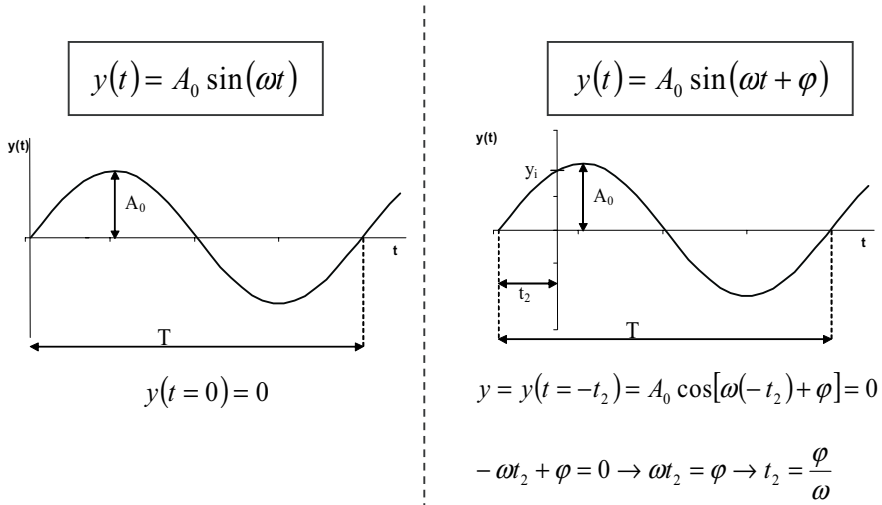
6.2.2 Representación de las funciones sinusoidales en coordenadas cartesianas

Función coseno:



Vemos que la función $y(t) = A_0 \cos(\omega t + \beta)$ está adelantada β radianes, pero queremos saber cuántos segundos son. Para ello observamos el valor en el origen de la función sin desfase. Ese mismo valor debe tener la función en el instante t_1 .

Función seno:



Importante: La función seno es igual a la función coseno desplazando ésta un tiempo $T/4$ en sentido positivo.

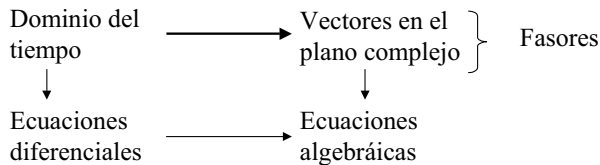
$$y(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi) = A_0 \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$$

$$y(t) = A_0 \cos(\omega t + \beta) = A_0 \sin(\omega t + \beta + \pi/2)$$

6.2.3 Representación vectorial de las funciones sinusoidales

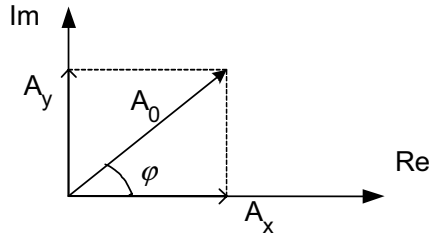
Nos va a ayudar a simplificar en gran medida los cálculos matemáticos para obtener la respuesta de un determinado circuito eléctrico.

En rigor se trata de un cambio de dominio:



Formas de expresar un complejo \vec{A} en el plano:

$$\vec{A} = A_0 \underline{\varphi} \equiv A_0 e^{j\varphi} = A_0 \cos \varphi + jA_0 \sin \varphi = A_x + jA_y$$



De la fórmula de Euler $e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \operatorname{sen} \varphi$ se desprende que:

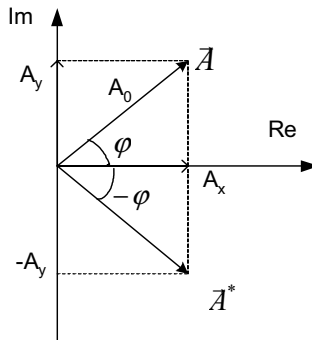
$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

Si tenemos la función $y(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$, podemos escribir:

$$y(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} [A_0 e^{j(\omega t + \varphi)} + A_0 e^{-j(\omega t + \varphi)}] = \frac{1}{2} (A_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} + A_0 e^{-j\omega t} e^{-j\varphi}) = \frac{1}{2} (\vec{A} e^{j\omega t} + \vec{A}^* e^{-j\omega t})$$

siendo:

$$\begin{aligned} \vec{A} &\equiv A_0 \underline{\varphi} \equiv A_0 e^{j\varphi} = A_0 \cos \varphi + j A_0 \operatorname{sen} \varphi = A_x + j A_y \\ \vec{A}^* &\equiv A_0 \underline{-\varphi} \equiv A_0 e^{-j\varphi} = A_0 \cos \varphi - j A_0 \operatorname{sen} \varphi = A_x - j A_y \end{aligned}$$



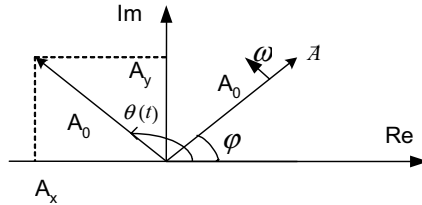
Significado de $\vec{A} e^{j\omega t}$ y $\vec{A}^* e^{-j\omega t}$:

$$\vec{A} e^{j\omega t} = A_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = A_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = A_0 \cos(\omega t + \varphi) + j A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Es un vector cuya fase varía con el tiempo según un movimiento uniforme de velocidad de forma que en todo momento la fase del vector es $\theta(t) = \omega t + \varphi$

Como este vector se encuentra en cada instante en posiciones diferentes es costumbre dibujarlo según su situación inicial, es decir, en $t=0 \rightarrow \theta(t=0) = \varphi$

Su representación será como se muestra, indicando el sentido de giro del mismo y la velocidad de este movimiento (que en la práctica se omite pero se debe tener presente).



Si la fase aumenta con el tiempo, el sentido de giro es levógiro. Al vector así representado se le denomina fasor. Su módulo A_0 y fase φ coinciden con el valor de pico y fase inicial, respectivamente, de la función sinusoidal de partida. Observar que en cualquier instante la proyección sobre ambos ejes coordenados es:

$$A_x \equiv \operatorname{Re}[A_0 e^{j\theta(t)}] \equiv \operatorname{Re}[A_0 e^{j(\omega t + \varphi)}] = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

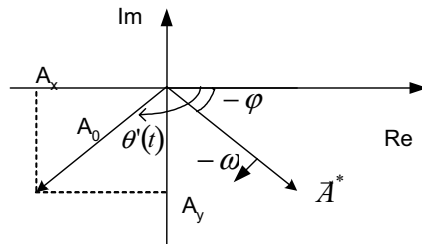
$$A_y \equiv \operatorname{Im}[A_0 e^{j\theta(t)}] \equiv \operatorname{Im}[A_0 e^{j(\omega t + \varphi)}] = A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

El mismo razonamiento es válido para el término $\vec{A}^* e^{-j\omega t}$:

$$\vec{A}^* e^{-j\omega t} = A_0 e^{-j\varphi} e^{-j\omega t} = A_0 e^{-j(\omega t + \varphi)}$$

que representa un vector giratorio cuya fase, en todo momento, vale: $\theta'(t) = -(\omega t + \varphi)$

Representación:



Proyecciones sobre los ejes coordenados:

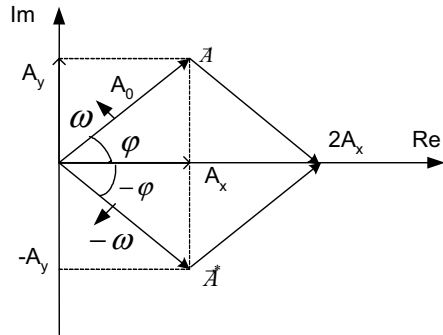
$$A_x \equiv \operatorname{Re}[A_0 e^{j\theta'(t)}] \equiv \operatorname{Re}[A_0 e^{-j(\omega t + \varphi)}] = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$A_y \equiv \operatorname{Im}[A_0 e^{j\theta'(t)}] \equiv \operatorname{Im}[A_0 e^{-j(\omega t + \varphi)}] = -A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Volviendo a la expresión fasorial de $y(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$:

$$y(t) = \frac{1}{2} [\vec{A} e^{j\omega t} + \vec{A}^* e^{-j\omega t}]$$

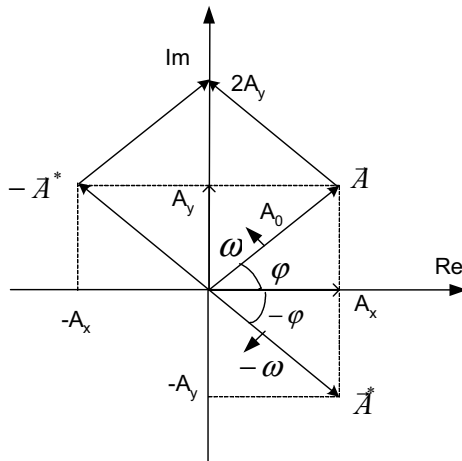
$$y(t) = \operatorname{Re}[\vec{A}^* e^{-j\omega t}] = \operatorname{Re}[\vec{A} e^{j\omega t}] = A_x$$



El mismo análisis se le puede aplicar a la función seno: $y(t) = A_0 \text{sen}(\omega t + \varphi)$

$$y(t) = A_0 \text{sen}(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2j} [A_0 e^{j(\omega t + \varphi)} - A_0 e^{-j(\omega t + \varphi)}] = \frac{1}{2j} (A_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} - A_0 e^{-j\omega t} e^{-j\varphi}) = \frac{1}{2j} (\vec{A} e^{j\omega t} - \vec{A}^* e^{-j\omega t})$$

Por tanto:



Ahora:

$$y(t) \equiv \text{Im}[\vec{A} e^{j\omega t}] \equiv -\text{Im}[\vec{A}^* e^{-j\omega t}]$$

Conclusiones:

Dado un fasor \vec{A} que gira en sentido levógiro con velocidad ω

- 1.- La función coseno es la proyección de \vec{A} sobre el eje real
- 2.- La función seno es la proyección de \vec{A} sobre el eje imaginario.

6.2.4 Concepto de desfase entre dos funciones sinusoidales

Dadas:

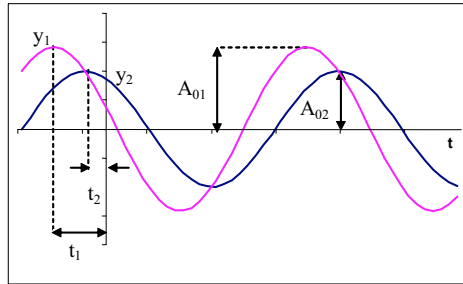
$$y_1(t) = A_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) = A_{01} \cos(\omega(t + t_1))$$

$$y_2(t) = A_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) = A_{02} \cos(\omega(t + t_2))$$

donde:

$$t_1 = \frac{\varphi_1}{\omega} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{\varphi_2}{\omega}$$

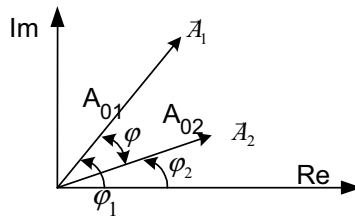
tendremos:



El desfase entre $y_1(t)$ e $y_2(t)$ se define como $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Siempre se debe buscar que $|\varphi_1 - \varphi_2| < \pi$.

Observamos que $t_1 > t_2$, lo que implica $\varphi_1 > \varphi_2$. Si además $\varphi_1 - \varphi_2 < \pi$, se dice que $y_1(t)$ está adelantada con respecto a $y_2(t)$ y la diferencia se denomina desfase entre ambas funciones.

Fasorialmente:



Ejemplo: Para las dos tensiones siguientes determinar la frecuencia y el desfase.

$$v_1(t) = 12 \operatorname{sen}(1000t + 60^\circ)$$

$$v_2(t) = -6 \operatorname{cos}(1000t + 30^\circ)$$

1. Expresamos ambas funciones en términos de la misma función trigonométrica, seno o coseno.

$$v_1(t) = 12 \operatorname{sen}\left(1000t + \frac{\pi}{3}\right)$$

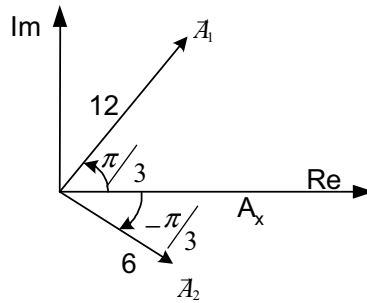
$$v_2(t) = 6 \operatorname{cos}\left(1000t + \frac{\pi}{6} + \pi\right) = 6 \operatorname{cos}\left(1000t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

$$v_2(t) = 6\text{sen}\left(1000t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

$v_1(t)$ está adelantada a $v_2(t)$:

$$\varphi = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = 120^\circ$$

Diagrama de fasores:



Diferencia de tiempo entre ambas señales (paso por cero):

$$t_1 = \frac{\varphi_1}{\omega} ; t_2 = \frac{\varphi_2}{\omega} ;$$

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\omega}$$

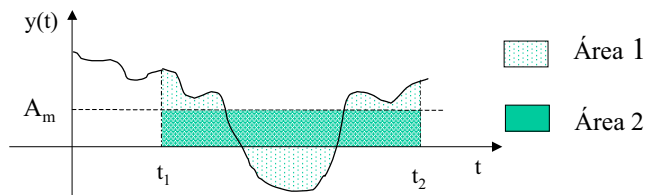
$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{2\pi/3}{1000} = 2.09\text{ms}$$

6.2.5 Valores medio y eficaz de una función

▪ **Valor medio:**

Dada una función $y(t)$ se define su valor medio en el intervalo $t_1 < t < t_2$ como la media de los valores instantáneos que toma la función en dicho intervalo.

$$A_m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} y(t) dt$$



$$\text{Área 1} = \text{Área 2}$$

Para funciones periódicas, en un periodo:

$$A_m = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

Ejemplo: Valor medio de la función sinusoidal $y(t) = A_0 \cos \omega t$

$$A_m = \frac{1}{T} \int_0^T A_0 \cos \omega t dt = \frac{A_0}{T\omega} \operatorname{sen} \omega t \Big|_0^T = \frac{A_0}{T\omega} (\operatorname{sen} 2\pi - \operatorname{sen} 0) = 0$$

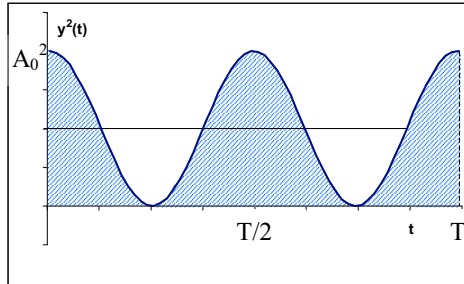
▪ **Valor eficaz (rms: root mean square)**

Dada una función periódica $y(t) = y(t + T)$ se define el valor eficaz al cuadrado, como la media de los cuadrados de los valores instantáneos que toma la función en un periodo T .

$$A_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt}$$

Ejemplo: Función sinusoidal $y(t) = A_0 \cos \omega t$

$$y^2(t) = A_0^2 \cos^2(\omega t) = A_0^2 \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} = \frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2}{2} \cos(2\omega t)$$



$$A_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A_0^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A_0^2}{2} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A_0^2}{2} \cos(2\omega t) dt$$

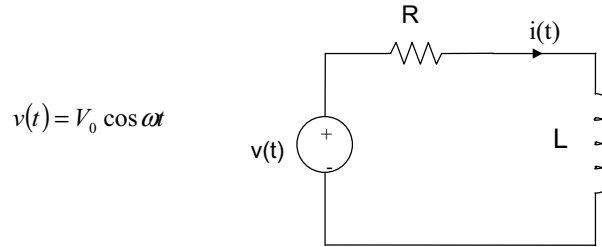
$$A_{ef}^2 = \frac{A_0^2}{2}$$

$$A_{ef} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$$

En ocasiones se emplea este valor en lugar de A_0 .

6.3 Análisis de Circuitos Bajo Excitación Sinusoidal

6.3.1 Ejemplo. Circuito RL en el dominio del tiempo



Vamos a obtener $i(t)$:

LVK:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_0 \cos \omega t$$

Supondremos que

$$i(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

o bien desarrollando el coseno de una suma:

$$i(t) = A \cos \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

Al sustituir en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} L \frac{d}{dt} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) + R(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) &= V_0 \cos \omega t \\ -A_1 \omega L \sin \omega t + A_2 \omega L \cos \omega t + RA_1 \cos \omega t + RA_2 \sin \omega t &= V_0 \cos \omega t \\ (-A_1 \omega L + RA_2) \sin \omega t + (A_1 R + A_2 \omega L) \cos \omega t &= V_0 \cos \omega t \\ -A_1 \omega L + RA_2 &= 0 \\ A_1 R + A_2 \omega L &= V_0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ A_2 &= \frac{\omega L V_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$i(t) = \frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega L V_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t$$

Teniendo presente que hay que reconstruir $i(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

$$A_1 = A \cos \varphi \quad \text{y} \quad -A \sin \varphi = A_2 \rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{-A_2}{A_1}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\omega L}{R}$$

$$\varphi = -\arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Si obtenemos el valor de A :

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2 \rightarrow (A \cos \varphi)^2 + (A \sen \varphi)^2 = A^2 (\cos^2 \varphi + \sen^2 \varphi) = A^2$$

$$A^2 = \frac{R^2 V_0^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \frac{(\omega L)^2 V_0^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} = \frac{V_0^2 (R^2 + \omega^2 L^2)}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} = \frac{V_0^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Por lo que

$$A = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

La expresión final para $i(t)$ es:

$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctg\frac{\omega L}{R}\right)$$

Observar que:

- Si $L=0 \rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t$

Es decir, no hay desfase entre la tensión y la corriente en una resistencia.

- Si $R=0 \rightarrow i(t) = \frac{V_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

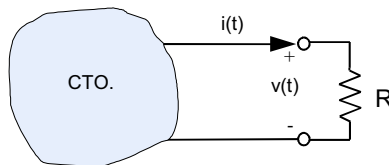
La corriente en una bobina se retrasa 90° con respecto a su tensión.

Conclusión: un circuito excitado por generadores sinusoidales resuelto en el dominio del tiempo, incluso si es un circuito simple, supone una tarea complicada. Vamos a evitar este método de análisis aplicando los conceptos que hemos visto sobre fasores.

6.3.2 Relaciones fasoriales para elementos de circuitos

Vamos a establecer las relaciones fasoriales entre tensión y corriente para los tres elementos pasivos R , L y C .

▪ Resistencia



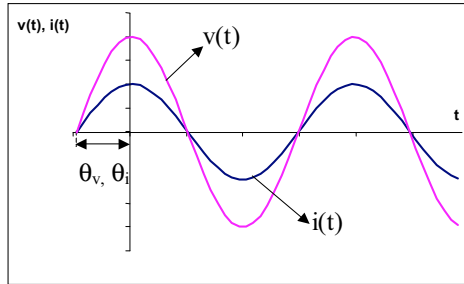
$$v(t) = Ri(t), \text{ que al aplicar una tensión compleja resulta: } V_0 e^{j(\alpha + \theta_v)} = RI_0 e^{j(\alpha + \theta_i)}$$

$$\text{que se reduce a } V_0 e^{j\theta_v} = RI_0 e^{j\theta_i}$$

o bien en forma fasorial $\bar{V} = R\bar{I} \rightarrow \begin{cases} \bar{V} = V_0 e^{j\theta_v} \\ \bar{I} = I_0 e^{j\theta_i} \end{cases}$

Para que la igualdad se cumpla se desprende que $\theta_v = \theta_i$.

Es decir, **en una resistencia la tensión y la corriente están en fase.**



Ejemplo: A una resistencia $R=6\Omega$ se aplica una tensión $v(t) = 24 \cos\left(377t + \frac{5\pi}{12}\right)$.

Vamos a determinar la corriente resultante.

Utilizamos notación fasorial: $V = 24e^{j\frac{5\pi}{12}}$

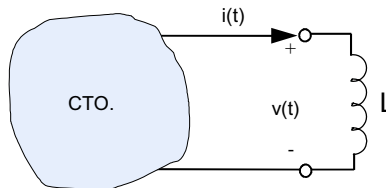
$$I = \frac{V}{R} = \frac{24e^{j\frac{5\pi}{12}}}{6} = 4e^{j\frac{5\pi}{12}}$$

En el dominio del tiempo:

$$i(t) = 4 \cos\left(377t + \frac{5\pi}{12}\right)$$

▪ **Bobina**

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



En el dominio fasorial

$$v(t) = V_0 e^{j(\alpha t + \theta_v)}$$

$$V_0 e^{j(\alpha t + \theta_v)} = L \frac{d}{dt} I_0 e^{j(\alpha t + \theta_i)}$$

que se reduce a

$$V_0 e^{j\theta_v} = j\omega L I_0 e^{j\theta_i}$$

y que en notación fasorial resulta:

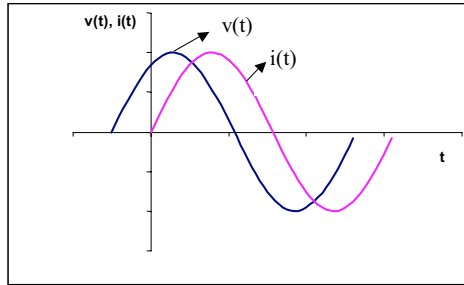
$$\bar{V} = j\omega L \bar{I} \rightarrow \begin{cases} \bar{V} = V_0 e^{j\theta_v} \\ \bar{I} = I_0 e^{j\theta_i} \end{cases}$$

Se puede observar que $j = \sqrt{-1} = e^{j\pi/2}$, con lo que podemos escribir:

$$V_0 e^{j\theta_v} = \omega L I_0 e^{j\theta_i} e^{j\pi/2} = \omega L I_0 e^{j(\theta_i + \pi/2)}$$

de donde se deduce que $\theta_v = \theta_i + \frac{\pi}{2}$ y $\theta_i = \theta_v - \frac{\pi}{2}$

Es decir, **en una bobina la corriente que la atraviesa está retrasada 90° con respecto a la tensión entre sus terminales.**



Ejemplo: A una bobina de autoinducción $L = 20\text{mH}$ se le aplica una tensión $v(t) = 12 \cos(377t + 20^\circ)$.

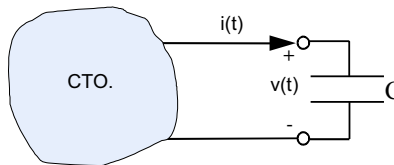
$$I = \frac{V}{j\omega L} = \frac{12e^{-j20^\circ}}{\omega L e^{j90^\circ}} = 1.59e^{-j70^\circ}$$

en el dominio temporal:

$$i(t) = 1.59 \cos(377t - 70^\circ)$$

▪ **Condensador**

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$



Empleando tensión y corriente complejas

$$I_0 e^{j(\omega t + \theta_i)} = C \frac{d}{dt} V_0 e^{j(\omega t + \theta_v)}$$

que se reduce a

$$I_0 e^{j\theta_i} = j\omega C V_0 e^{j\theta_v}$$

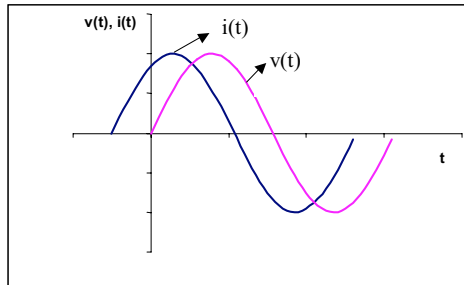
Formalmente:

$$\bar{I} = j\omega C \bar{V}$$

Igual que antes, ahora podemos escribir:

$$I_0 e^{j\theta_i} = \omega C V_0 e^{j(\theta_v + 90^\circ)} ; \theta_i = \theta_v + 90^\circ$$

Es decir, **en un condensador la corriente que circula por él está adelantada 90° con respecto a la tensión en sus terminales.**



Ejemplo: A un condensador de capacidad $C=100\mu\text{F}$ se aplica una tensión $v(t) = 100 \cos(314t + 15^\circ)$

$$I = j\omega C 100 e^{j15^\circ} = 314 \cdot 100 \cdot 10^{-6} e^{j90^\circ} 100 e^{j15^\circ} = 3.14 e^{j105^\circ}$$

$$i(t) = 3.14 \cos(314t + 105^\circ)$$

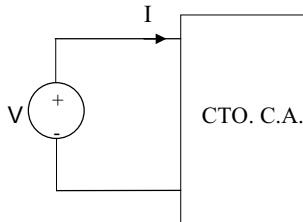
6.3.3 Impedancia y admitancia

Lo que hemos hecho con cada componente pasivo ha sido transformar una ecuación diferencial en el dominio del tiempo en otra algebraica con coeficientes complejos en el dominio de la frecuencia.

Vamos a generalizar este concepto:

- Impedancia Z entre dos terminales es la relación entre la tensión fasorial V y la corriente fasorial I .

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_0 e^{j\theta_v}}{I_0 e^{j\theta_i}} = Z_0 e^{j\theta_z}$$



La impedancia es una magnitud compleja:

$$Z(\omega) = R(\omega) + jX(\omega),$$

$R(\omega)$ componente resistiva o resistencia

$X(\omega)$ componente reactiva o reactancia

Importante: Z es un número complejo, pero no es un fasor. Las unidades de Z son ohmios (Ω).

Impedancia de los elementos pasivos	
Resistencia	$Z_R = R$
Bobina	$Z_L = j\omega L = jX_L$; $X_L = \omega L$
Condensador	$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C$; $X_C = \frac{1}{\omega C}$

- Impedancias equivalentes:
LCK y LVK son válidas en el dominio de la frecuencia. Las impedancias pueden combinarse usando las mismas reglas que hemos establecido para las resistencias.
Si $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ están conectadas en serie:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n$$

Si están conectadas en paralelo:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

- Admitancia Y entre dos terminales se define como la inversa de la impedancia.

$$Y = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z} \text{ (Siemens)}$$

Y es, asimismo, una magnitud compleja:

$$Y = G + jB$$

G se denomina conductancia y B es la susceptancia.

Las reglas para combinar admitancias son las mismas que las que se usan para combinar conductancias en circuitos resistivos.

Dadas $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$

Combinación serie:

$$\frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} + \dots + \frac{1}{Y_n}$$

Combinación paralelo:

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n$$

6.3.4 Procedimiento general para el análisis de un circuito en régimen estacionario sinusoidal

- Si la red tiene varios generadores se expresarán en la misma forma trigonométrica (seno o coseno) para poder representar todos ellos como parte real o imaginaria del correspondiente fasor.
- Se sustituye la expresión temporal de los generadores por su correspondiente fasor \vec{V}_i , y las resistencias, bobinas y condensadores por sus respectivas impedancias complejas.

$$\vec{Z}_R = R ; \vec{Z}_L = jX_L ; \vec{Z}_C = -jX_C$$

- En el circuito resultante, las incógnitas serán los fasores intensidad de rama o tensiones de nudo, cuyo cálculo podrá hacerse mediante los mismos métodos de resolución empleados en el análisis de circuitos en corriente continua.
- Finalmente, la forma instantánea de las incógnitas encontradas en forma fasorial (\vec{I}_i ó \vec{V}_i) se obtendrá haciendo:

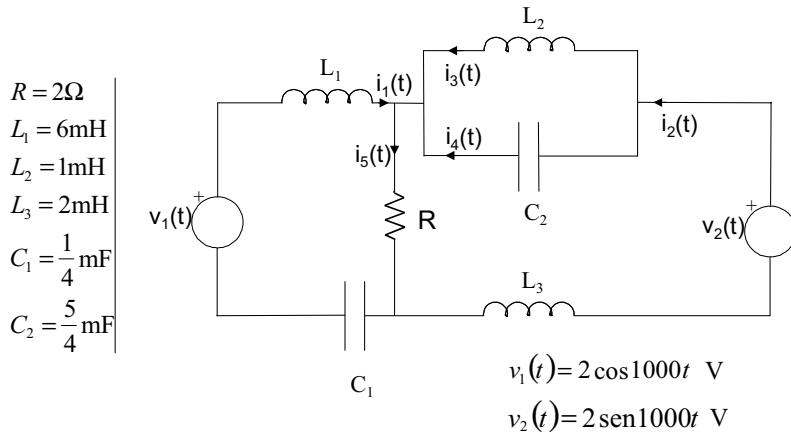
$$i_i(t) \equiv \text{Im} [\vec{I}_i e^{j\omega t}] \equiv I_{0i} \text{sen}(\omega t + \varphi_i)$$

o bien

$$i_i(t) \equiv \text{Re} [\vec{I}_i e^{j\omega t}] \equiv I_{0i} \cos(\omega t + \varphi_i)$$

dependiendo de la forma en que se hayan expresado los generadores del circuito.

Ejemplo: Consideremos el circuito de la figura. Se quiere calcular cada una de las corrientes de rama.



- Todos los generadores en la misma forma trigonométrica. Por ejemplo en coseno:

$$v_1(t) = 2 \cos 1000t$$

$$v_2(t) = 2 \text{sen} 1000t = 2 \cos \left(1000t - \frac{\pi}{2} \right)$$

- Fasores e impedancias:

$$V_1 = 2e^{j0^\circ} = 2$$

$$V_2 = 2e^{-j\frac{\pi}{2}} = -2j$$

$$Z_{L1} = jX_{L1} = j \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 6j\Omega$$

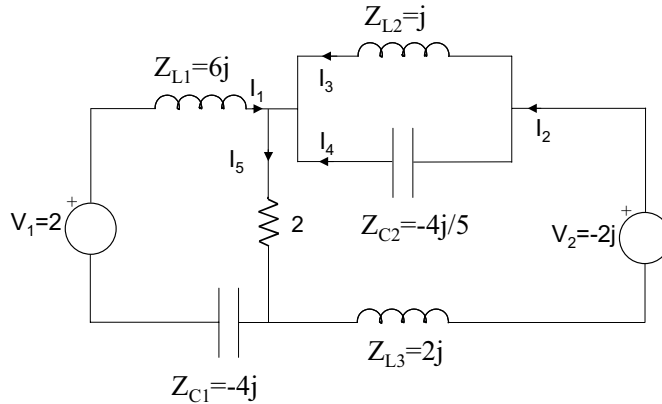
$$Z_{L2} = jX_{L2} = j \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = j\Omega$$

$$Z_{L3} = jX_{L3} = j \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2j\Omega$$

$$Z_{C1} = -jX_{C1} = -j \frac{4}{10^3 \cdot 10^{-3}} = -4j\Omega$$

$$Z_{C2} = -jX_{C2} = -j \frac{4}{10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = -\frac{4}{5} j \Omega$$

En el dominio complejo el circuito será:



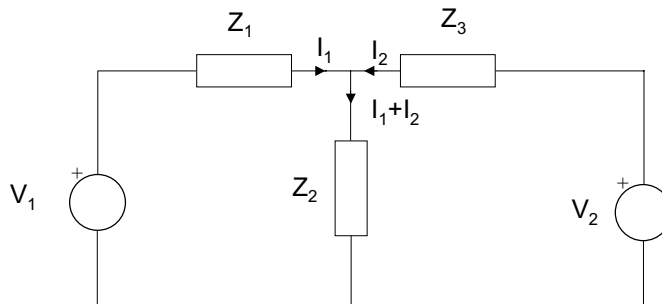
Podemos asociar Z_{L1} y Z_{C1} en serie y Z_{L2} y Z_{C2} en paralelo

$$Z_1 = Z_{C1} + Z_{L1} = 6j - 4j = 2j$$

$$Z_2 = Z_{L2} // Z_{C2} = \frac{j \cdot \left(-\frac{4}{5}j\right)}{j - \frac{4}{5}j} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}j} = -4j$$

$$Z_3 = Z_2 + Z_{L3} = -4j + 2j = -2j$$

Con esto tenemos



3. Resolvemos el circuito

LVK:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= I_1 Z_1 + Z_2 (I_1 + I_2) \\ V_2 &= I_2 Z_3 + Z_2 (I_1 + I_2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V_1 &= (Z_1 + Z_2) I_1 + Z_2 I_2 \\ V_2 &= Z_2 I_1 + (Z_3 + Z_2) I_2 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} 2 &= (2 + 2j)I_1 + 2I_2 \\ -2j &= 2I_1 + (2 - 2j)I_2 \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 + 2j & 2 \\ 2 & 2 - 2j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2j \end{bmatrix}$$

de donde se despejan las corrientes I_1 e I_2 :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2j & 2 - 2j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + 2j & 2 \\ 2 & 2 - 2j \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1 = 1 \cdot e^{j0^\circ}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + 2j & 2 \\ 2 & -2j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + 2j & 2 \\ 2 & 2 - 2j \end{vmatrix}} = \frac{-4j}{4} = -j = 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Además

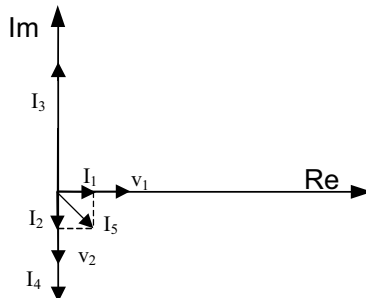
$$I_5 = I_1 + I_2 = 1 - j = \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

mientras que I_3 e I_4 se obtienen mediante:

$$I_4 = I_2 \frac{Z_2}{Z_{C2}} = I_2 \frac{-4j}{-\frac{4}{5}j} = 5I_2 = 5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$I_3 = I_2 \frac{Z_2}{Z_{L2}} = I_2 \frac{-4j}{j} = -4I_2 = -4 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = 4 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Diagrama fasorial:



Las corrientes en el dominio del tiempo son

$$i_1(t) = \operatorname{Re}[I_1 e^{j\omega t}] = \cos 1000t \text{ A}$$

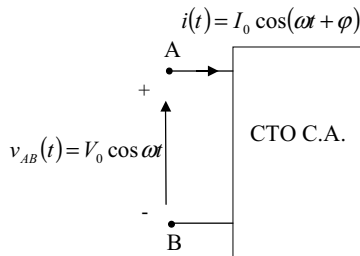
$$i_2(t) = \operatorname{Re}[I_2 e^{j\omega t}] = \cos\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ A}$$

$$i_3(t) = \operatorname{Re}[I_3 e^{j\omega t}] = 4 \cos\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ A}$$

$$i_4(t) = \operatorname{Re}[I_4 e^{j\omega t}] = 5 \cos\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ A}$$

$$i_5(t) = \operatorname{Re}[I_5 e^{j\omega t}] = \sqrt{2} \cdot \cos\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ A}$$

6.4 Potencia de una Corriente Alterna



La potencia absorbida por el circuito es el producto de la intensidad que lo recorre y la diferencia de potencial entre sus terminales, tomada desde aquel por el que entra la intensidad.

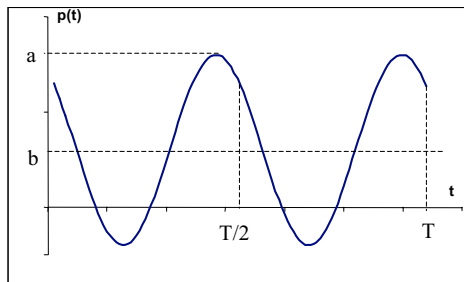
Para tensiones y corrientes sinusoidales será una función del tiempo cuyo valor en cada instante será:

$$p(t) = v_{AB}(t)i(t) = V_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi)$$

que puede escribirse como:

$$p(t) = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \varphi + \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos(2\omega t + \varphi)$$

Gráficamente:



$$\text{donde } a = \frac{1}{2}V_0I_0(1 + \cos\varphi) \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{2}V_0I_0 \cos\varphi$$

En la representación anterior de la potencia se puede observar que dado un periodo T, al doblar la pulsación, se dobla la frecuencia y por ello en el mismo tiempo (T segundos) se recorren dos ciclos completos.

Cuando hablemos de potencia en un circuito de corriente alterna nos referiremos al valor medio de la potencia instantánea, que al ser periódica se determinará durante un periodo.

Así:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{V_0I_0}{2T} \int_0^T [\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)] dt$$

La integral del segundo término es nula: $\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt = 0$

con lo que

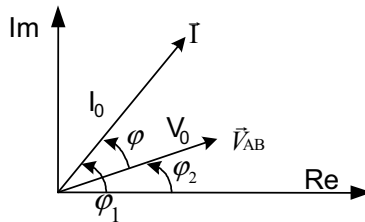
$$P_m = \frac{1}{2}V_0I_0 \cos\varphi = V_{ef}I_{ef} \cos\varphi$$

El valor de P_m y su signo dependen del $\cos\varphi$:

$\cos\varphi \equiv$ Factor de potencia

Si $\cos\varphi < 0$: Potencia absorbida negativa \rightarrow La red entrega potencia al circuito exterior conectado entre los puntos A y B.

Fasorialmente, se puede interpretar la potencia media como el producto escalar de los fasores \vec{V}_{AB} e \vec{I} :



$$P_m = \frac{1}{2}V_0I_0 \cos\varphi$$

Producto escalar:

$$P_m = \frac{1}{2}\vec{V}_{AB} \vec{I}$$

Si

$$\left. \begin{array}{l} \vec{V}_{AB} = a + jb \\ \vec{I} = c + jd \end{array} \right\} P_{abs} = P_m = \frac{1}{2}\vec{V}_{AB} \vec{I} = \frac{1}{2}(ac + db)$$

Definiciones:

$P_m \equiv$ Potencia media \equiv Potencia activa (Wattios):

$$P_{activa} = P_m = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \varphi = V_{ef} I_{ef} \cos \varphi \quad (\text{potencia consumida, real})$$

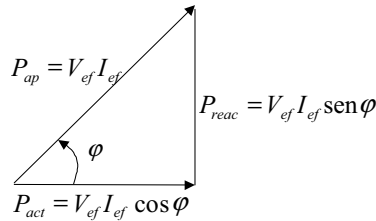
Potencia aparente:

$$P_{aparente} = \frac{1}{2} V_0 I_0 = V_{ef} I_{ef} \quad (\text{V.A., VoltiAmperios}) \quad (\text{potencia total})$$

Potencia reactiva:

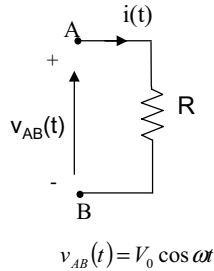
$$P_{reactiva} = \frac{1}{2} V_0 I_0 \sin \varphi = V_{ef} I_{ef} \sin \varphi \quad (\text{V.A.R., VoltiAmperios Reactivos}) \quad (\text{potencia almacenada, imaginaria})$$

Gráficamente:



6.4.1 Potencia absorbida por los elementos pasivos

- **Resistencia**



Entonces:

$$I = \frac{V_{AB}}{Z_R} = \frac{V_0}{R} = \frac{V_0}{R} e^{j0^\circ} = I_0 e^{j0^\circ}$$

En el tiempo:

$$i(t) = \text{Re}[I e^{j\omega t}] = \frac{V_0}{R} \cos \omega t = I_0 \cos \omega t$$

La P_{abs} será:

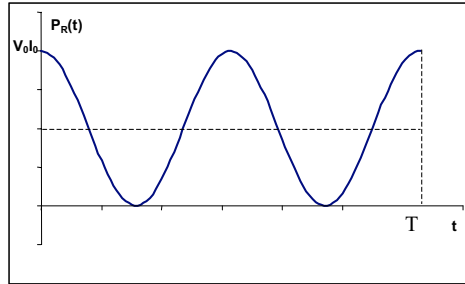
$$P_R = \frac{1}{2} V_{AB} I = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \varphi \quad \text{con } \varphi = 0$$

Por lo tanto:

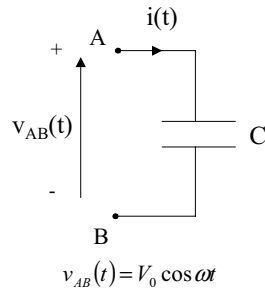
$$P_R = \frac{1}{2} V_0 I_0 = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} = \frac{1}{2} R \cdot I_0^2 = \frac{V_{ef}^2}{R} = R \cdot I_{ef}^2$$

La potencia instantánea será:

$$P_R(t) = \frac{1}{2}V_0I_0 + \frac{1}{2}V_0I_0 \cos 2\omega t$$



▪ **Condensador**



$$I = \frac{V_{AB}}{Z_C} = j\omega C V_0 \equiv \omega C V_0 e^{j\frac{\pi}{2}} = I_0 e^{j\frac{\pi}{2}}$$

De forma instantánea:

$$i(t) = \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

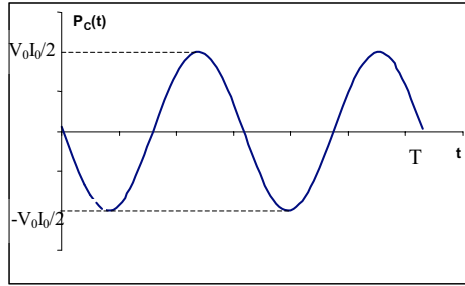
siendo en este caso $\varphi = \frac{\pi}{2}$

y, por tanto, la potencia media absorbida es nula.

$$P_c = \frac{1}{2}V_0I_0 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

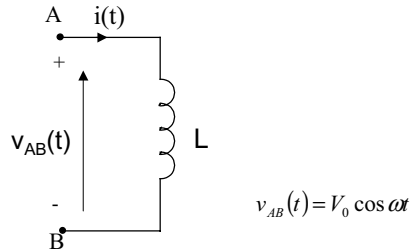
La potencia instantánea resulta ahora:

$$P_c(t) = \frac{1}{2}V_0I_0 \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



Un condensador almacena energía durante unos instantes (potencia positiva) y la cede durante otros (potencia negativa), siendo la potencia media disipada o absorbida igual a cero.

▪ **Bobina**



$$I = \frac{V_{AB}}{Z_L} = \frac{V_0}{j\omega L} \equiv \frac{V_0}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}} = I_0 e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

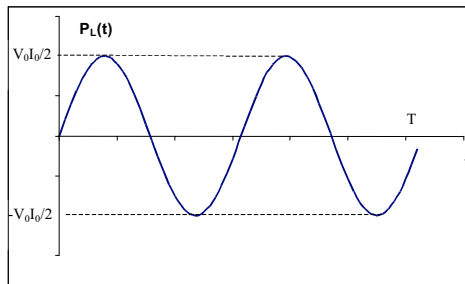
ahora $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

La potencia media:

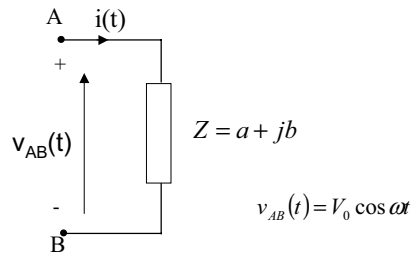
$$P_L = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Y la potencia instantánea:

$$P_L(t) = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



▪ Impedancia



La potencia absorbida por una impedancia genérica será la suma de la disipada en la resistencia equivalente (parte real) más la absorbida por la bobina o condensador que da lugar a su parte imaginaria y que, como hemos visto, es nula. Por tanto para una corriente

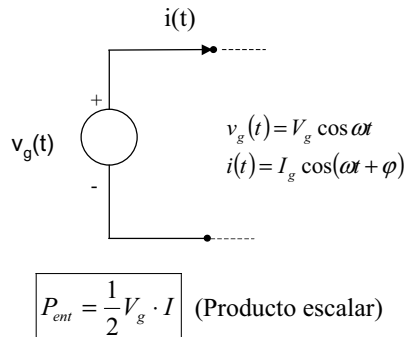
$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

la potencia disipada en una impedancia Z es

$$P_Z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[Z] I_0^2 = \operatorname{Re}[Z] I_{ef}^2 = a I_{ef}^2$$

6.4.2 Potencia puesta en juego por los generadores

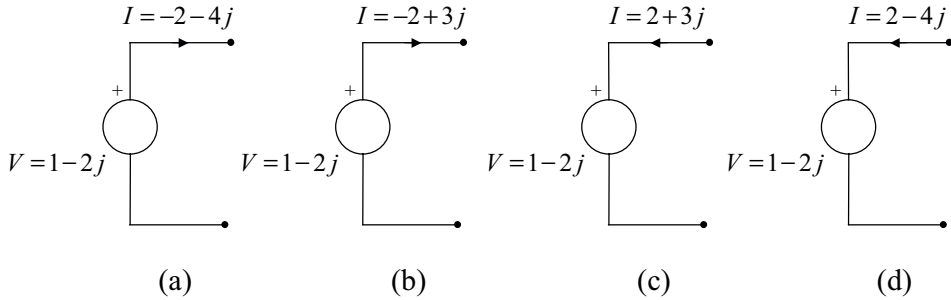
La potencia entregada por un generador se calcula mediante el producto escalar de su tensión por la corriente que lo atraviesa (en sentido de menos a más a través del generador).



Si $P_{ent} > 0 \rightarrow$ el generador entrega potencia

Si $P_{ent} < 0 \rightarrow$ el generador absorbe potencia

Ejemplo:



$$(a) P_{ent} = \frac{1}{2} V \cdot I = \frac{1}{2} (1 - 2j)(-2 - 4j) = \frac{1}{2} (-2 + 8) = 3W$$

$$(b) P_{ent} = \frac{1}{2} V \cdot I = \frac{1}{2} (1 - 2j)(-2 + 3j) = \frac{1}{2} (-2 - 6) = -4W$$

$$(c) P_{ent} = -\frac{1}{2} V \cdot I = -\frac{1}{2} (1 - 2j)(2 + 3j) = -\frac{1}{2} (2 - 6) = 2W$$

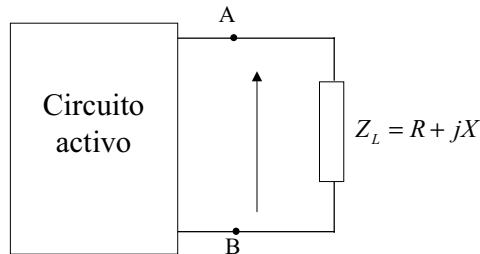
$$(d) P_{ent} = -\frac{1}{2} V \cdot I = -\frac{1}{2} (1 - 2j)(2 - 4j) = -\frac{1}{2} (2 + 8) = -5W$$

(a) y (c) entregan potencia

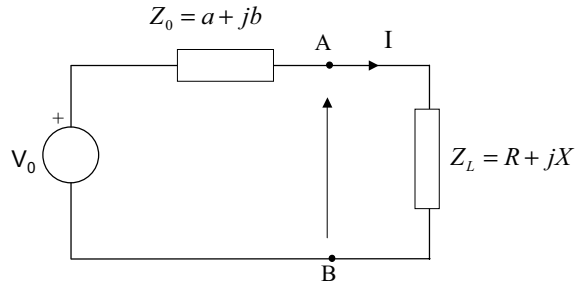
(b) y (d) absorben potencia

6.4.3 Teorema de la máxima transferencia de potencia

Nos permite determinar el valor de la impedancia Z_L , que conectada entre dos terminales A y B de un circuito recibe de éste la máxima potencia disponible.



El circuito activo puede sustituirse entre A y B por su equivalente de Thevenin



Potencia recibida por Z_L :

$$P_{Z_L} = \frac{1}{2} |I|^2 \operatorname{Re}[Z_L] = \frac{|V_0|^2}{2} \frac{R}{(R+a)^2 + (X+b)^2}$$

que será máxima cuando lo sea

$$G(R, X) = \frac{R}{(R+a)^2 + (X+b)^2}$$

o bien cuando sea mínima la función:

$$F(R, X) = \frac{(R+a)^2 + (X+b)^2}{R}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(R, X)}{\partial R} &= \frac{R^2 - a^2 - (X+b)^2}{R^2} = 0 \\ \frac{\partial F(R, X)}{\partial X} &= \frac{2(X+b)}{R} = 0 \end{aligned} \right\}$$

que conducen a

$$2(X+b) = 0 \rightarrow X = -b$$

$$R^2 - a^2 - (X+b)^2 = 0 \rightarrow R = a$$

Por tanto la máxima potencia se consigue cuando las impedancias de generador y carga son conjugadas:

$$\boxed{Z_L = Z_0^*}$$

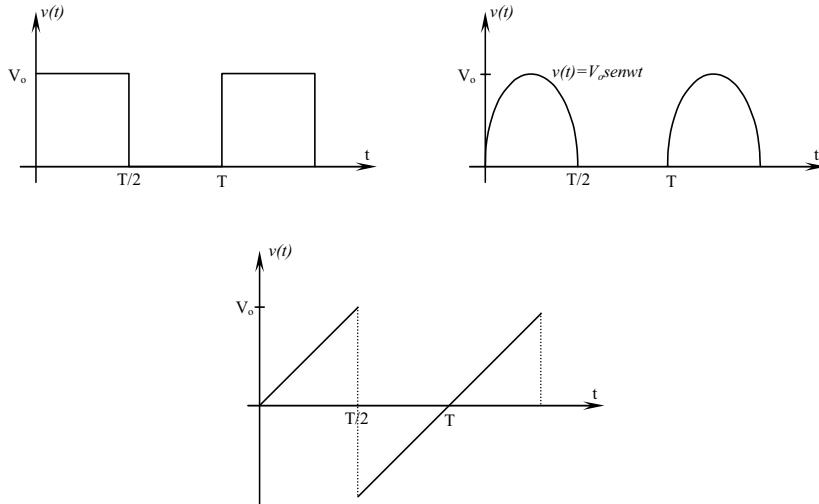
En tal caso se dice que generador y carga están adaptados y la potencia máxima es:

$$\boxed{P_{Z_L \max} = \frac{1}{2} |I|^2 \operatorname{Re}[Z_L] = \frac{|V_0|^2}{8a}}$$

6.5 Problemas

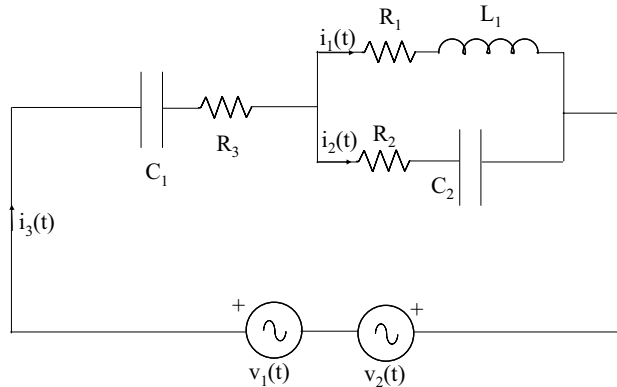
6.5.1 Enunciados

P6.1.- Para las funciones periódicas representadas determinar el valor medio V_m y el valor eficaz V_{ef} .



P6.2.- En el circuito de la figura se pide determinar:

- Expresión instantánea de la corriente por todas las ramas.
- Potencia puesta en juego por los generadores y disipada en las resistencias.



DATOS:

$$v_1(t) = 15 \text{ sen}(10^6 t + \pi/4) \text{ V}; \quad v_2(t) = 10 \text{ cos}(10^6 t + \pi/4) \text{ V}$$

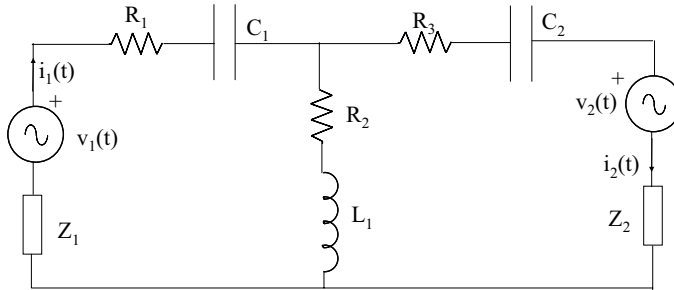
$$R_1 = R_2 = 1 \, \Omega; \quad R_3 = 2 \, \Omega; \quad C_1 = 1/3 \, \mu\text{F}; \quad C_2 = 1 \, \mu\text{F}; \quad L_1 = 1 \, \mu\text{H}$$

P6.3.- Dado el circuito de la figura, se pide:

- Expresión instantánea de la tensión $v_2(t)$.
- Expresión instantánea de la corriente $i_2(t)$.
- Potencias disipadas en R_2 y Z_2 .

DATOS: $v_1(t) = \frac{14}{3} \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{2}\right)$; $i_1(t) = \text{sen}\left(10^6 t + \frac{\pi}{2}\right)$; $C_1 = 1/6 \mu\text{F}$; $C_2 = 1/9 \mu\text{F}$;

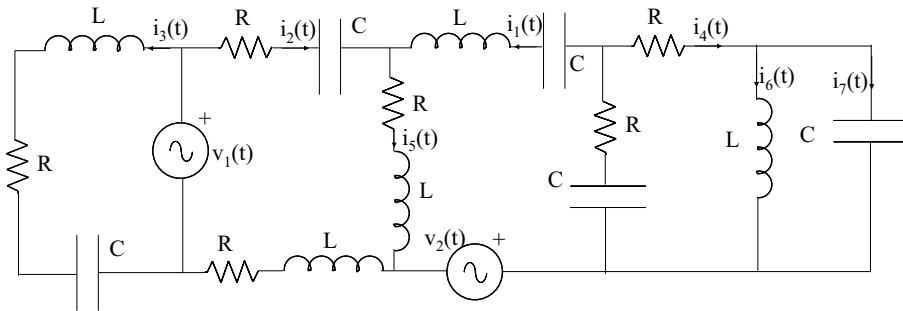
$L_1 = 1 \mu\text{H}$; $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$; $Z_1 = 2 + 6j \Omega$; $Z_2 = 4 + 8j \Omega$



P6.4.- En el circuito que se representa, calcular:

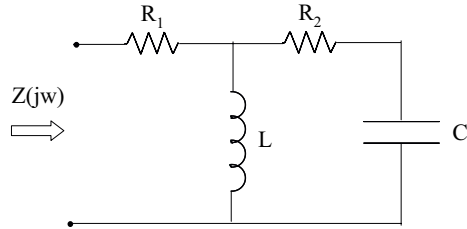
- Las corrientes indicadas
- Comprobar que la suma de las potencias generadas coincide con la de las disipadas

DATOS: $v_1(t) = \sqrt{2} \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{4}\right)$ V; $v_2(t) = \text{sen}\left(10^6 t + \frac{\pi}{2}\right)$ V; $R = 1 \Omega$; $L = 1 \mu\text{H}$; $C = 1 \mu\text{F}$



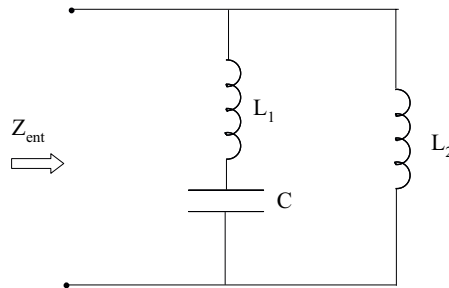
P6.5.- En el circuito de la figura encontrar la impedancia $Z(j\omega)$ en función de la frecuencia. ¿Para qué frecuencia el circuito tendría un comportamiento meramente resistivo? ¿Cuál sería la impedancia a esa frecuencia?

DATOS: $R_1 = 2 \Omega$; $R_2 = 4 \Omega$; $L = 10 \text{ mH}$; $C = 500 \mu\text{F}$



P6.6.- Suponiendo que el circuito de la figura opera en régimen estacionario sinusoidal, determinar las frecuencias críticas, aquellas para las cuales la respuesta del circuito vale cero o infinito, para la impedancia de entrada que se indica en la figura.

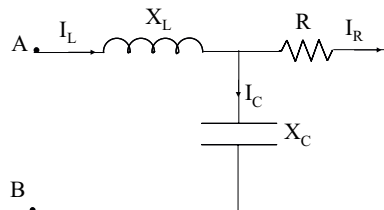
DATOS: $L_1 = 1 \text{ H}$; $L_2 = 3 \text{ H}$; $C = 1 \mu\text{F}$



P6.7.- Al aplicar entre los puntos A y B del circuito de la figura una tensión senoidal de pulsación ω se miden las intensidades $|I_L| = 1 \text{ A}_{\text{ef}}$; $|I_C| = 0,5 \text{ A}_{\text{ef}}$. Se pide:

- Valor de la resistencia R
- Corriente I_R que se medirá y diferencia de potencial V_{AB}
- Tomando V_{AB} como origen de fases dibujar el diagrama fasorial para V_{AB} , V_C , I_L , I_C e I_R .

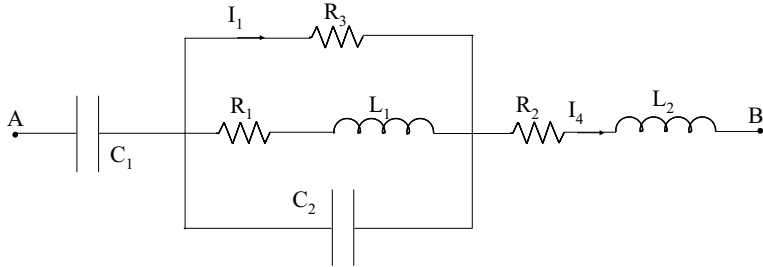
DATOS: $X_L = 0.5 \Omega$; $X_C = 2 \Omega$



P6.8.- En el circuito de la figura en el que se mide una corriente $I_1 = 5 \text{ A}_{\text{ef}}$, calcular:

- Valor eficaz de la corriente I_4 .
- Potencia total consumida por el circuito
- Factor de potencia del circuito.

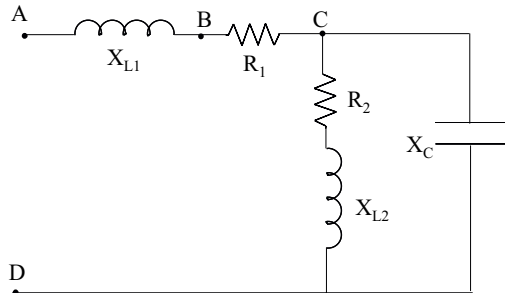
DATOS: $R_1 = 3 \ \Omega$; $R_2 = 1 \ \Omega$; $R_3 = 5 \ \Omega$; $X_{L1} = 4 \ \Omega$; $X_{L2} = 1 \ \Omega$; $X_{C1} = 4 \ \Omega$; $X_{C2} = 5 \ \Omega$



P6.9.- En el circuito de la figura se han medido $V_{AC} = 100 \text{ V}_{\text{ef}}$; $V_{CD} = 100 \text{ V}_{\text{ef}}$. Se pide:

- Valor de la reactancia X_{L1}
- Tensión que se mediría entre los puntos A y D
- Factor de potencia del circuito
- Potencia disipada por cada resistencia

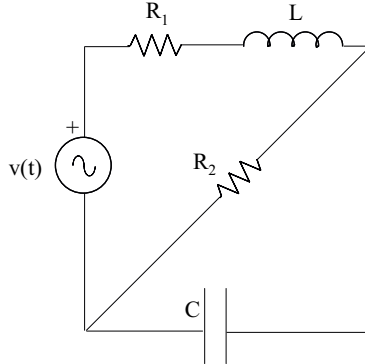
DATOS: $R_1 = 3 \ \Omega$; $R_2 = 4 \ \Omega$; $X_{L2} = 3 \ \Omega$; $X_{C1} = 5 \ \Omega$



P6.10.-En el circuito de la figura se mide con un voltímetro en bornes del condensador $V_C = 100 \text{ V}_{\text{ef}}$. Se sabe que el generador, cuya pulsación es de 50 rad/s está entregando una potencia $P = 3400 \text{ W}$. Se pide:

- Valor de la capacidad C
 - Expresión en módulo y fase de V_g .
- Tomar la tensión en el condensador como origen de fases.

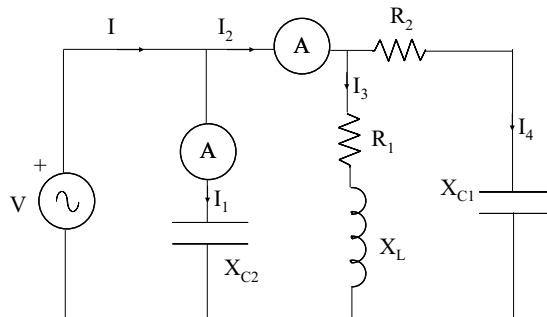
DATOS: $R_1 = 6 \ \Omega$; $R_2 = 10 \ \Omega$; $L = 0,16 \text{ H}$



P6.11.-En el circuito de la figura, los amperímetros de resistencia cero están indicando la misma intensidad, siendo ésta de dos amperios eficaces. Tomando I_2 como origen de fases se pide determinar:

- Intensidades por cada rama
- Reactancia X_{C2}
- Potencia disipada en cada resistencia

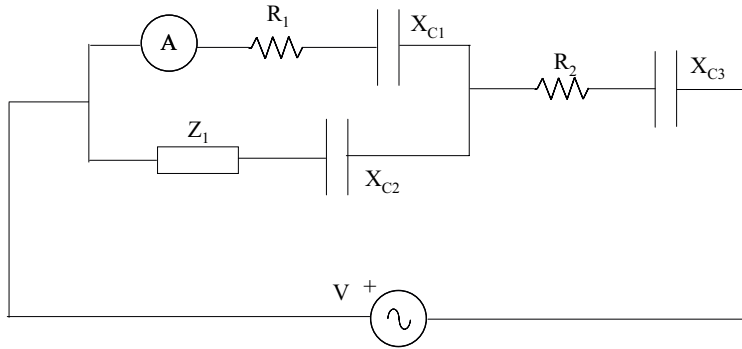
DATOS: $R_2 = R_1 = 1 \ \Omega$; $X_L = X_{C1} = 1 \ \Omega$



P6.12.-En el circuito de la figura, cuando el amperímetro de resistencia cero indica $2 A_{ef}$, la rama de la impedancia Z_1 absorbe $8 W$ con un factor de potencia de $0,8$ (tensión adelantada respecto a la intensidad). Se pide determinar:

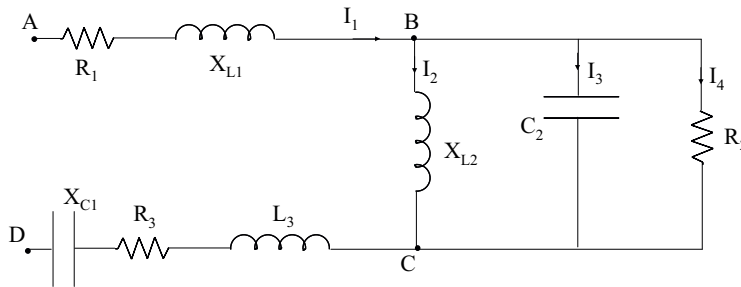
- Expresión compleja de Z_1
- Valor eficaz de la tensión del generador

DATOS: $R_1 = 3 \Omega$; $R_2 = 4 \Omega$; $X_{C1} = X_{C2} = 4 \Omega$; $X_{C3} = 2 \Omega$



P6.13.-En el circuito de la figura, tomando V_{AB} como origen de fases, se pide determinar:

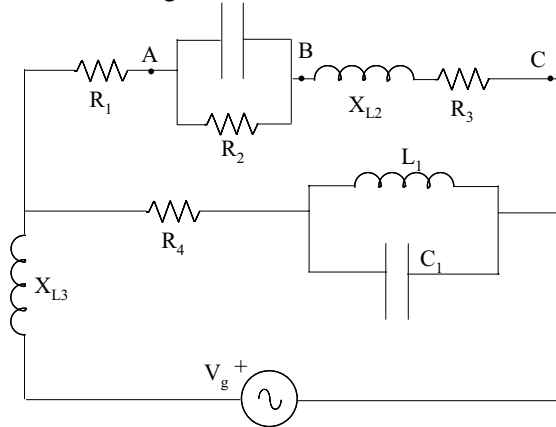
- Pulsación del generador
- Valores R_2 y C_2
- Impedancia total Z_{AD}
- Factor de potencia del circuito
- Corrientes en todas las ramas



DATOS: $V_{AB} = V_{BC} = V_{CD} = 50 V_{ef}$; $I_3 = 5 A_{ef}$; $X_{C1} = 10 \Omega$; $R_1 = 6 \Omega$; $R_3 = 10 \Omega$; $X_{L1} = 8 \Omega$; $X_{L2} = 50 \Omega$; $L_3 = 50 mH$

P6.14.-En el circuito de la figura se han medido las ddp y las corrientes indicadas en el apartado de datos. Sabiendo que la potencia consumida por el circuito es $P = 400 \text{ W}$, se pide:

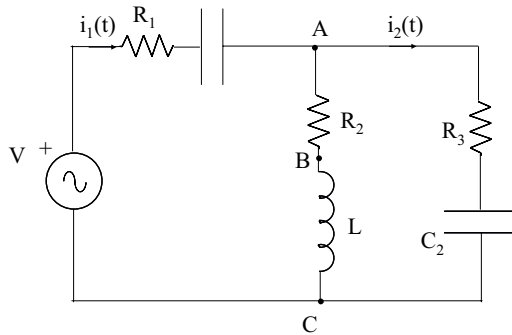
- Valores de R_1 , R_2 y X_{C2}
 - Factor de potencia del circuito conectado al generador.
- Tómese V_{AC} como origen de fases.



DATOS: $V_{AB} = V_{BC} = V_{AC} = 20 \text{ V}_{ef}$; $I_{L1} = I_{C1} = 2 \text{ A}_{ef}$; $R_3 = 1 \Omega$; $R_4 = 2 \Omega$; $X_{L2} = \sqrt{3} \Omega$; $X_{L3} = 4 \Omega$

P6.15.-En el circuito de la figura se pide determinar:

- Valores de L , C_1 y C_2
- Desfase entre la tensión del generador y la corriente que circula por él



DATOS: $v(t) = 4,5\cos(10^6 t)$; $R_1 = 3 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $R_3 = 1 \Omega$; $|V_{AB}| = 1V_{\max}$; $|I_2| = 0,2\sqrt{10}A_{\max}$; $X_L = X_{C2}$

6.5.2 Soluciones

P 6.1

a) $V_m = \frac{V_o}{2}; \quad V_{ef} = \frac{V_o}{\sqrt{2}}$

b) $V_m = \frac{V_o}{\pi}; \quad V_{ef} = \frac{V_o}{2}$

c) $V_m = 0; \quad V_{ef} = \frac{V_o}{\sqrt{3}}$

P 6.2

a) $i_1(t) = 3\cos(10^6 t - 1,37) \text{ A}; \quad i_2(t) = 3\cos(10^6 t + 0,197) \text{ A}$
 $i_3(t) = 4,25\cos(10^6 t - 0,588) \text{ A}$

b) $P_{V1} = 31,25 \text{ W (entregados);} \quad P_{V2} = -4,166 \text{ W (absorbidos)}$
 $P_{R1} = 4,5 \text{ W}; \quad P_{R2} = 4,5 \text{ W}; \quad P_{R3} = 18,054 \text{ W}$

P 6.3

a) $v_2(t) = 24\cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$

b) $i_2(t) = 3,83\cos(10^6 t - 1,527) \text{ A}$

c) $P_{R2} = 7,69 \text{ W}; \quad P_{Z2} = 29,44 \text{ W}$

P 6.4

a) $i_1(t) = \frac{\sqrt{10}}{6}\cos(10^6 t - 0,32) \text{ A}; \quad i_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{6}\cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ A}$

$i_3(t) = \sqrt{2}\cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ A}; \quad i_4(t) = 0; \quad i_5(t) = \frac{2}{3}\cos(10^6 t) \text{ A}$

$i_6(t) = \frac{\sqrt{5}}{3}\cos(10^6 t + 0,46) \text{ A};$

$i_7(t) = \frac{\sqrt{5}}{3}\cos(10^6 t + \pi + 0,46) \text{ A}$

b) $\sum P_v = \sum P_d = \frac{17}{12} \text{ W}$

P 6.5

a) $Z(j377) = 5,1 + j4,9 \Omega$

b) $f = 159,15 \text{ Hz}$

P 6.6

a) $W = 1000 \text{ rad/s}$

b) $W = 500 \text{ rad/s}$

P 6.7

a) $R = 1,154 \Omega$

b) $I_{\text{Ref}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ A}$
 c) $V_{AB} = 0,864 \text{ V}$

P 6.8

a) $I_{4\text{ef}} = 8,06 \text{ A}$
 b) $P = 265 \text{ W}$
 c) $\cos\varphi = 0,77$

P 6.9

a) $X_{L1} = 4,71 \Omega$
 b) $V_{AD} = 148,46 \text{ V}$
 c) $\cos\varphi = 0,964$
 d) $P_{R1} = 960 \text{ W}; \quad P_{R2} = 1600 \text{ W}$

P 6.10

a) $C = 2\sqrt{3} \text{ mF}$
 b) $V_{AB} = 185,24e^{j83,36^\circ} \text{ V}_{\text{ef}}$

P 6.11

a) $I_1 = 2j \text{ A}_{\text{ef}}; \quad I_2 = 2 \text{ A}_{\text{ef}}; \quad I_3 = 1-j \text{ A}_{\text{ef}}; \quad I_4 = 1+j \text{ A}_{\text{ef}}; \quad I = 2+2j \text{ A}_{\text{ef}}$
 b) $X_{C2} = 1 \Omega$
 c) $P_{R1} = P_{R2} = 2 \text{ W}$

P 6.12

a) $Z_I = 8 + 10j \Omega$
 b) $V_{\text{ef}} = 20 \text{ V}$

P 6.13

a) $\omega = 200 \text{ rad/s}$
 b) $R_2 = \frac{50}{3} \Omega; \quad C_2 = 500 \mu\text{F}$
 c) $Z_{AD} = 22 \Omega$
 d) $\cos\varphi = 1$
 e) $I_1 = 5\sqrt{2}e^{-j53,13^\circ} \text{ A} \quad I_2 = \sqrt{2}e^{j163,74^\circ} \text{ A}$
 $I_3 = 5\sqrt{2}e^{-j16,26^\circ} \text{ A} \quad I_4 = 3\sqrt{2}e^{-j106,26^\circ} \text{ A}$

P 6.14

a) $R_1 = 2 \Omega; \quad R_2 = 4 \Omega; \quad X_C = \frac{4}{\sqrt{3}} \Omega$
 b) $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

P 6.15

a) $L = 2 \mu\text{H}; \quad C_1 = 0,262 \mu\text{F}; \quad C_2 = 0,5 \mu\text{F}$
 b) $\varphi_V - \varphi_{I1} = -41,7^\circ$

ANEXO 1:

Prerrequisitos

ANEXO 1: Prerrequisitos de la asignatura

1.- Números complejos

1.1.- Definición

Un *número complejo* z es un número de la forma $a + jb$ donde a y b son números reales y $j = \sqrt{-1}$. Es decir j es un número tal que da solución a la ecuación siguiente:

$$x^2 + 1 = 0$$

y que, por tanto, cumplirá que $j^2 = -1$.

Dado un número complejo representado como $z = a + jb$ utilizaremos la siguiente nomenclatura:

- $Re\{z\} = a$ = parte real de z
- $Im\{z\} = b$ = parte imaginaria de z

1.2.- Formas rectangular, exponencial y polar de un número complejo.

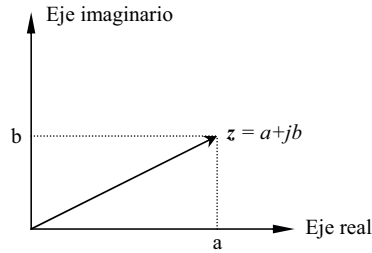


Figura 1. Forma rectangular de un número complejo.

Un número complejo $z = a + jb$ puede representarse en un sistema de coordenadas rectangulares llamado *plano complejo*. El plano complejo tiene un eje real y otro eje imaginario, como se muestra en la figura 1. El número complejo z será un único punto, sobre este plano, de coordenadas a y b .

Hay otras formas de representar los números complejos. Por ejemplo mediante la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto z y el ángulo θ como se muestra en la figura 2.

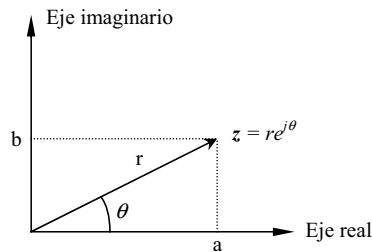


Figura 2. Forma exponencial de un número complejo.

La forma exponencial se escribe como:

$$z = r \cdot e^{j\theta}$$

donde

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Observar además que:

$$a = r \cos \theta \qquad b = r \sin \theta$$

Al número r se le llama también módulo de un número complejo y se denota como $|z|$; mientras que el ángulo θ se denota en ocasiones como $\angle\theta$. Entonces un número complejo puede asimismo representarse en forma polar como:

$$z = r \angle \theta$$

$$z = |z| \angle \theta$$

Ejemplo: Expresar el número complejo $z = 4 + j3$ en las formas exponencial y polar.

$$\text{sol: } z = 5 \cdot e^{j36,9^\circ}; z = 5 \angle 36,9^\circ$$

1.3.- Operaciones con números complejos.

- *Conjugado de un número complejo:*

El conjugado de un número complejo $z = a + jb$ es un número complejo cuya parte real es igual a la parte real de z y cuya parte imaginaria es igual a la parte imaginaria de z cambiada de signo. El conjugado de un número complejo se representa de la forma:

$$z^* = \text{Re}[z] - j \text{Im}[z] = a - jb$$

Por tanto se cumplirán las siguientes relaciones:

$$\text{Re}[z] = \frac{z + z^*}{2} \qquad \text{Im}[z] = \frac{z - z^*}{2} \qquad |z| = \sqrt{z \cdot z^*}$$

La conjugación tiene las siguientes propiedades:

$$(z^*)^* = z$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$$

$$\left(\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \right)^* = \begin{array}{c} z_1^* \\ z_2^* \end{array}$$

- *Suma y resta de números complejos:*

Para sumar dos números complejos hay que sumar las partes real e imaginaria separadamente. Para restar dos números complejos hay que restar las partes real e imaginaria separadamente.

Ejemplo: dado $z_1 = 5 - j2$ y $z_2 = -3 - j8$

$$z_1 + z_2 = (5-3) + j(-2-8) = 2 - j10$$

$$z_2 - z_1 = (-3-5) + j(-8-2) = -8 - j6$$

- *Producto de números complejos*

El producto de números complejos, cuando ambos están en forma exponencial, se realiza siguiendo las reglas de los números exponenciales.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

El producto rectangular puede determinarse tratando los números complejos como binomios. Así:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1 a_2 + jb_1 a_2 + ja_1 b_2 + j^2 b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(b_1 a_2 + a_1 b_2)$$

Ejemplo. Dado $z_1 = 5e^{j\pi/3}$ y $z_2 = 2e^{-j\pi/6}$

$$z_1 \cdot z_2 = 5e^{j\pi/3} \cdot 2e^{-j\pi/6} = 10e^{j\pi/6}$$

Dado $z_1 = 2 + j3$ y $z_2 = -1 - j3$, entonces $z_1 \cdot z_2 = (2+j3)(-1-j3) = 7 - j9$

- *División de números complejos*

Para dividir dos números complejos en forma exponencial, el cociente se obtiene directamente de las leyes de los números exponenciales.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

La división con la forma rectangular se realiza multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \left(\frac{a_2 - jb_2}{a_2 - jb_2} \right) = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(b_1 a_2 - b_2 a_1)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_2^2 + b_2^2}$$

Ejemplos.

Dado $z_1 = 4e^{j\pi/3}$ y $z_2 = 2e^{j\pi/6}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{j\frac{\pi}{3}}}{2e^{j\frac{\pi}{6}}} = 2e^{j\frac{\pi}{6}}$$

dado $z_1 = 4-j5$ y $z_2 = 1+j2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-j5}{1+j2} \left(\frac{1-j2}{1-j2} \right) = -\frac{6}{5} - j\frac{13}{5}$$

2.- Matrices, determinantes y regla de Kramer.

El manejo de matrices de números o funciones es muy frecuente en el análisis de circuitos. Como sabemos, una matriz no es más que una agrupación ordenada de elementos distribuidos en filas y columnas y se representa de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A los términos a_{ij} se les llama elementos de la matriz. En cada uno de ellos el subíndice i indica la fila y el subíndice j indica la columna.

Una matriz de m filas y n columnas se denomina matriz de orden (m,n) o bien matriz de $m \times n$. Cuando el número de filas y el de columnas son iguales se habla de matriz cuadrada de orden n . Las matrices de orden $m \times n$ suelen denotarse con letras mayúsculas. Una matriz que consta de una sola fila o una sola columna se denomina comúnmente vector fila o vector columna. Un vector fila o columna se representa generalmente con letras minúsculas como:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

2.1 Adición y sustracción de matrices

La suma de matrices está definida únicamente para matrices del mismo orden. La suma de dos matrices se obtiene sumando los elementos correspondientes. así dadas dos matrices A y B cuyos elementos son a_{ij} y b_{ij} , entonces:

$$C = A + B$$

tendrá como elementos $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Ejemplo: suma de dos matrices cuadradas de orden 3.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

La suma de matrices es conmutativa y asociativa, es decir:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

La operación de sustracción de dos matrices consiste, de igual forma, en restar los elementos correspondientes.

2.2 Multiplicación de una matriz por un escalar.

Si una matriz A se multiplica por una constante α , cada elemento de la matriz se multiplica por esa constante. Así podemos escribir:

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.3 Producto de dos matrices entre sí.

La multiplicación de matrices se elige de tal forma que contribuya a la solución de ecuaciones lineales simultáneas. La multiplicación de dos matrices A y B exige que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de filas de la matriz B. Por tanto si A es una matriz de orden $m \times n$ y B de orden $n \times q$, la matriz $C = A \cdot B$ será una matriz de orden $m \times q$. Los elementos de un producto se determinan multiplicando la i -ésima fila de A por la i -ésima columna de B y sumando estos productos para obtener el término c_{ij} . Esto es:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{iq}b_{qj} = \sum_{k=1}^q a_{ik}b_{kj}$$

Es importante observar que la multiplicación de matrices no es conmutativa:

$$AB \neq BA$$

y que la multiplicación de una matriz $m \times n$ por un vector columna de orden $n \times 1$ produce un vector columna de orden $m \times 1$. Por ejemplo:

$$x = Ay = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo A es de orden 2×3 , B es de orden 3×1 y C es de orden 2×1 .

Ejemplo:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, el elemento c_{22} se obtiene así: $c_{22} = -1(2) + 2(-2) = -6$.

2.4 Determinantes

El determinante de una matriz cuadrada es un valor numérico que se representa mediante el símbolo Δ y se obtiene de la forma que se indica a continuación:

Matriz cuadrada de orden 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para el caso de matrices de orden 2×2 , el método para obtener Δ ha hecho uso de la regla de la diagonal, que es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Entonces, Δ es la diferencia del producto de los elementos de la diagonal hacia abajo a la derecha menos el producto de los elementos de la diagonal hacia abajo a la izquierda. El valor de un determinante 3×3 es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

En general, puede hallarse el determinante Δ en términos de cofactores y menores. El determinante de una submatriz de A obtenida suprimiendo de A la i -ésima fila y la j -ésima columna se llama menor del elemento a_{ij} y se denota por m_{ij} .

El cofactor c_{ij} es un menor con un signo asociado, como

$$c_{ij} = (-1)^{(i+j)} m_{ij}$$

Ejemplo.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 6 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

El menor del elemento a_{11} es

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

que se obtiene suprimiendo la primera fila y la primera columna. Entonces el cofactor c_{11} es:

$$c_{11} = (-1)^{(1+1)} m_{11} = m_{11}$$

La regla para evaluar el determinante Δ de $n \times n$ es:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij}$$

para un valor determinado de i . Por otra parte se puede obtener Δ utilizando la j -ésima columna, de donde:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} c_{ij}$$

para un determinado valor de j .

Para evaluar el determinante anterior resultará más fácil hacerlo a partir de la primera columna dado que $a_{21} = 0$. Entonces:

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 a_{i1} c_{i1} = a_{11} c_{11} + a_{21} c_{21} + a_{31} c_{31} = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 6(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6(-8) = -54$$

2.5 Regla de Kramer

Un conjunto de ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

puede escribirse en forma matricial:

$$Ax = b$$

La regla de Kramer establece que la solución de la incógnita, x_k , de las ecuaciones simultáneas anteriores es:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

donde Δ es determinante de la matriz A y Δ_k es el determinante de la matriz resultante de sustituir en A la k -ésima columna por el vector columna b .

Ejemplo.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 12 \\ 4x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 6x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

En este caso:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El determinante de A se ha obtenido en el ejemplo anterior. $\Delta = -54$. Si se desea obtener la incógnita x_1 , se tiene:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

Entonces Δ_1 es el determinante de A reemplazando la primera columna por el vector b de forma que:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12(-6) - 1(-1)^3(5) = -67$$

Por tanto se tiene que:

$$x_1 = \frac{-67}{-54} = 1,2407$$

La solución del sistema completo es $x_2 = 2,3148$; $x_3 = 5,1296$

3.- Fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\pi - \alpha)$$

$$\tan(\alpha) = -\tan(\pi - \alpha)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \pm \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(wt + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(wt)$$

$$\cos\left(wt - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(wt)$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

4.- Fórmula de Euler.

La fórmula de Euler es:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$$

Una forma alterna de ésta es:

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j \operatorname{sen}\theta$$

Para deducir la fórmula de Euler, sea:

$$f = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$$

derivando, se obtiene:

$$\frac{df}{d\theta} = -\text{sen } \theta + j \cos \theta = j(\cos \theta + j \text{sen } \theta) = jf$$

para el caso en que $f = e^{j\theta}$

$$\frac{df}{d\theta} = j e^{j\theta} = jf$$

como queríamos demostrar.

De las expresiones anteriores resulta fácil obtener las siguientes relaciones:

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Importante: Considérese un número complejo $z = a + jb$ donde $a = r \cos \theta$ y $b = r \text{sen } \theta$. Por tanto:

$$z = r(\cos \theta + j \text{sen } \theta) = r e^{j\theta}$$

mediante la fórmula de Euler.

ANEXO 2:

Prácticas

Práctica 1. Instrumentación

Esta primera práctica supone una breve introducción de los principales instrumentos de laboratorio con los que el alumno tendrá que enfrentarse a la hora de llevar a cabo la generación o medición de una determinada magnitud eléctrica. Se trata de familiarizarse con el uso de los distintos equipos de laboratorio. Para cada uno de ellos se facilita una breve descripción de sus funciones principales así como de los distintos modos de funcionamiento. El alumno deberá por sí mismo practicar con ellos para adquirir la habilidad necesaria en su manejo.

Leer detenidamente el contenido de la práctica antes de la sesión en el laboratorio, tanto la parte descriptiva de cada uno de los instrumentos como los ejercicios finales que se proponen y que deberán realizarse en el laboratorio. Esto ayudará a una mejor comprensión de la misma y a una mayor capacidad de aprendizaje y obtención de resultados en la sesión práctica.

Al finalizar la sesión práctica el alumno deberá entregar al profesor la hoja de resultados que se adjunta al final de este boletín.

1.- Fuente de alimentación de tensión continua.

En el laboratorio se dispone de la fuente de alimentación PROTEK triple DC power supply 3033B. Se trata de un generador de **tensión y corriente continua** con dos canales de salida. Puede generar valores de tensión de entre 0-30 V con una corriente máxima de 1,5 A.

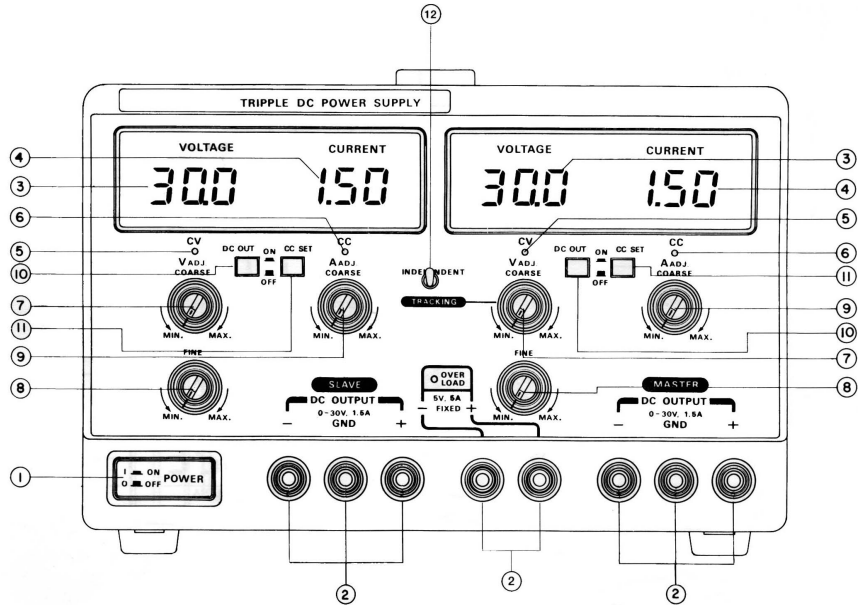


Figura 1. Panel de control frontal de la fuente de alimentación de corriente continua 3033B de Protek

En la figura 1 se muestra el panel de control de la fuente de alimentación de corriente continua. A continuación se explica la función de cada mando de control.

- 1.- **Interruptor de encendido;** on/off.
- 2.- **Terminales de salida.**
 Rojo: polaridad positiva (+).
 Negro: polaridad negativa (-)
 Verde: Tierra.
- 3.- **Indicador digital de tensión.** Indica la tensión que hay en el correspondiente terminal de salida.
- 4.- **Indicador digital de corriente.** Indica la corriente de salida en el correspondiente terminal de salida.
- 5.- **Lámpara CV (Constant Voltage).** Se ilumina (con la fuente de alimentación encendida) cuando ésta se encuentra funcionando como generador de tensión constante.
- 6.- **Lámpara CC (Constant Current).** Se ilumina (con la fuente de alimentación encendida) cuando esta se encuentra funcionando como generador de corriente constante.
- 7.- **Mando giratorio V_{adj} (Coarse).** Ajuste de la tensión de salida.

- 8.- **Mando giratorio V_{adj} (Fine).** Ajuste (de mayor precisión) de la tensión de salida.
- 9.- **Mando giratorio A_{adj} .** Ajuste de la corriente de salida.
- 10.- **Conmutador DC Out.** Activa o desactiva los terminales de salida de corriente continua.
- 11.- **Conmutador CC SET.** Limitación de corriente.
- 12.- **Conmutador de modo de funcionamiento independiente/seguimiento.** Permite conectar en serie las dos salidas. Cuando esto ocurre (modo seguimiento) y dado que el terminal de polaridad negativa de $S_2(-)$ y el terminal de polaridad positiva de $S_1(+)$ quedan conectados internamente, la salida total ha de tomarse entre los terminales $S_2(+)$ y $S_1(-)$.

El valor de la tensión de salida entre los puntos *DC OUTPUT* - + puede ajustarse mediante los controles giratorios V_{adj} *COARSE* y *FINE*. Mientras que el control giratorio A_{adj} sirve para limitar el valor de la corriente de salida que suministrará la fuente de alimentación.

El botón *DC OUT* debe estar pulsado para que se transfiera la tensión a los terminales de salida.

Cada canal cuenta con un doble display que muestra información referente al valor de la tensión y corrientes suministradas por la fuente.

1.1.- Prueba de funcionamiento

- (a) Girar el mando giratorio A_{adj} hasta el tope (en sentido horario).
- (b) Encender la fuente de alimentación. Los displays digitales y la lámpara CV deben iluminarse.
- (c) Girar los controladores de tensión completamente en sentido antihorario para asegurarse de que la salida disminuye hasta 0 voltios. Girar asimismo estos controladores completamente en sentido horario para comprobar que la tensión de salida aumenta hasta su valor máximo.
- (d) Con el conmutador CC SET pulsado, girar el controlador de corriente completamente en sentido antihorario y horario para comprobar que el valor límite de la corriente puede fijarse desde cero hasta el valor máximo.
- (e) Una vez hechas estas comprobaciones la fuente esta lista para su funcionamiento.

1.2. Funcionamiento como Fuente de tensión constante.

Para configurar la fuente de alimentación como fuente de tensión constante se procede de la forma:

- (a) Encender la fuente de alimentación y ajustar el control V_{adj} al valor de tensión de salida deseado. La lámpara CV debería iluminarse.
- (b) Manteniendo presionado el conmutador CC SET, ajustar el control A_{adj} a la máxima corriente de salida deseada (límite de corriente). En tal situación si el circuito conectado exigiera una corriente superior al valor fijado como máximo, la fuente de alimentación cambiará automáticamente de modo de funcionamiento a fuente de corriente constante y la tensión de salida disminuirá proporcionalmente.
- (c) Pulsar el conmutador DC Out para activar la salida de tensión.

1.3. Funcionamiento como Fuente de Corriente constante.

Para configurar la fuente de alimentación como fuente de corriente constante se procede de la forma:

- (a) Ajustar el control A_{adj} completamente en sentido antihorario para asegurarse de que la salida disminuye hasta 0 A. Encender entonces la fuente de alimentación.
- (b) Ajustar el control V_{adj} a la máxima tensión de salida permisible (límite de tensión). En tal situación si el circuito conectado exigiera una tensión superior al valor fijado como máximo, la fuente de alimentación cambiará automáticamente de modo de funcionamiento a fuente de tensión constante y la corriente de salida disminuirá proporcionalmente.
- (c) Ajustar el control A_{adj} al valor deseado para la corriente de salida. Mantener el conmutador CC SET presionado.
- (d) Pulsar el conmutador DC Out para activar la salida de tensión.

1.4. Funcionamiento en modo seguimiento.

Para configurar la fuente de alimentación en modo seguimiento se procede de la forma:

- (a) Pulsar el conmutador *independent/tracking* a la posición tracking (seguimiento).
- (b) Pulsar el conmutador CC SET y ajustar el controlador A_{adj} de cada canal al valor de máxima corriente permitida (límite de corriente) en función de las características del circuito que se conecte.

- (c) Ajustar los controles V_{adj} (*Coarse, fine*) del canal maestro (*Master*) al valor de tensión deseado para la salida. En este caso el controlador de tensión V_{adj} (*Coarse, fine*) del canal esclavo (*slave*) debería estar al máximo valor.
- (d) Conectar el circuito a la fuente de alimentación utilizando el terminal negativo del esclavo y el positivo del maestro.
- (e) Mantener pulsado el conmutador DC Out de ambos canales.

2.- Multímetro Digital.


El multímetro digital disponible en el laboratorio es el TESTER DIGITAL KEYTECH 3900.

Se trata de un multímetro de $3\frac{1}{2}$ dígitos LCD portátil alimentado con una pila de 9 V. Permite la medida de **tensiones e intensidades alternas o continuas, resistencias, diodos, transistores hFe y continuidad eléctrica** mediante una señal audible.

Las características más elementales de este multímetro son:

- Pulsador de puesta en marcha (ON/OFF)
- Conmutador rotativo de 32 posiciones individuales para función y rango.
- Display LCD de alto contraste y numeración de gran tamaño. Lectura hasta 1999.
- Indicación de desbordamiento (el display muestra un '1')
- Indicación de bajo nivel de batería.
- Polaridad automática.
- Velocidad de lectura: 2-3 lecturas por segundo.
- Modo de tensión máximo: 500 V cc/ca rms.
- Prueba de diodos, con 1 mA de corriente fija.
- Prueba de continuidad (audible)
- Prueba de transistores hFe.
- Temperatura para garantizar la precisión: $23^{\circ}\text{C} \pm 5^{\circ}\text{C}$
- Dimensiones 88x172x36 mm.

2.1. Precauciones

- La indicación  junto a los conectores de entrada indica que existe riesgo en caso de que los límites de entrada resulten excedidos.
- El conmutador debe estar en el rango y escala que se desee medir **antes** de conectar la magnitud a medir.
- **Importante**. Girar el conmutador a otras posiciones sin haber desconectado el aparato puede ser peligroso para el equipo y para el propio usuario.

2.2. Medida de Voltios CC (tensión DC)

- 1.- Conectar la punta de prueba negra al conector 'COM' y la roja en el que indica 'V/ Ω '
- 2.- Situar el conmutador en el rango *DCV* (en la escala más alta para comenzar) y conectar los extremos de la punta a la fuente de tensión previamente encendida.

Si en la pantalla aparece solamente un '1' esto nos indica que la tensión es superior al rango que hemos seleccionado y deberemos pasar, por tanto, a otro rango superior.

No aplicar tensiones altas a la entrada. El medidor puede llegar hasta 1000 V pero se trata de tensiones peligrosas.

Al medir tensiones se recomienda estar en un medio aislado de tierra y evitar siempre contactos peligrosos.

2.3. Medida de Voltios CA

El multímetro puede medir corrientes **alternas** par frecuencias de trabajo en el rango de 40 Hz - 500Hz.

- 1.- Conectar la punta de prueba negra al conector 'COM' y la roja en el que indica 'V/ Ω '
- 2.- Situar el conmutador en el rango ACV (en la escala más alta para comenzar) y conectar los extremos de la punta a los puntos del circuito donde se desea medir.

2.4. Medida de resistencias

- 1.- Conectar la punta de prueba negra al conector 'COM' y la roja en el que indica 'V/ Ω '
- 2.- Situar el conmutador en el rango de Ohmios que estime más próximo al valor de las resistencias y con los extremos de las puntas contactar con la resistencia.
 - Si el valor de la resistencia que se mide excede el valor del máximo del rango seleccionado, el display mostrará desbordamiento '1'. Para resistencias superiores a 1 M Ω es aconsejable utilizar el rango más alto.
 - Cuando las puntas de medida no estén conectadas a ningún circuito de medida el display mostrará '1' como señal de circuito abierto.
 - Al medir resistencias en un circuito asegurarse de que no existe tensión en el mismo ni hay ningún condensador cargado.
 - Los rangos de resistencia de este instrumento están protegidos contra una sobretensión (aprox. 500 V) mediante un transistor de protección, excepto para el rango de 200 Ω (250 V).

2.5. Prueba audible de continuidad

1. Conectar la punta de prueba negra al conector 'COM' y la roja en el que indica 'V/Ω'.
2. Sitúe el conmutador en el rango Ω y conectar las puntas a la resistencia o circuito a comprobar.
3. El zumbador se activará si la resistencia es aproximadamente inferior a 30Ω . Si la entrada no está conectada o el circuito está abierto aparecerá el signo '1' de desbordamiento.

3.- Generador de señales.

El generador de señal del laboratorio es el modelo 9205C de PROTEK. Este generador de funciones es capaz de generar una gran variedad de formas de onda. La mejor forma de entender las distintas funciones del instrumento es conectando su salida a un osciloscopio para así poder visualizar en pantalla las diferentes formas de onda generadas y las funciones de los diferentes controles del panel frontal.

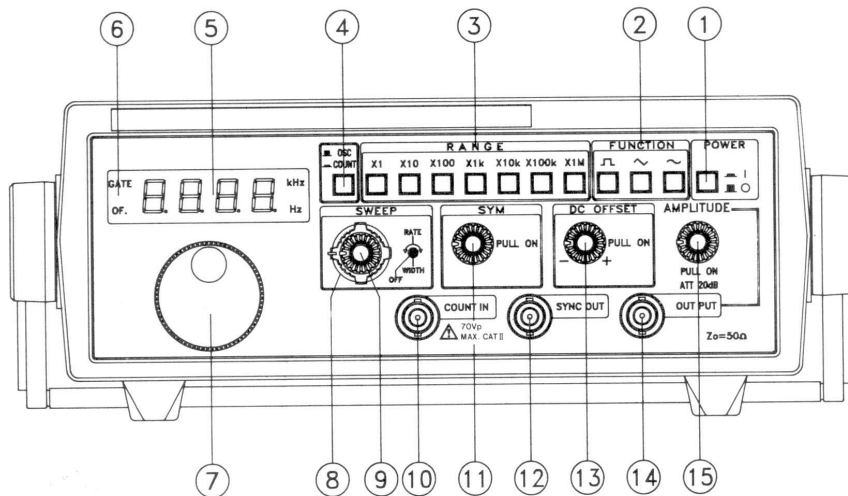


Figura 2. Panel frontal del generador de funciones.

1. **POWER ON/OFF.** Encendido/apagado del instrumento.
2. **FUNCTION SWITCH.** Selecciona la forma de onda generada. Esta puede ser de tipo sinusoidal, cuadrada o triangular.
3. **RANGE SWITCH.** Selecciona el rango de frecuencia.
4. **OSC/COUNT.** Conmuta entre dos modos de funcionamiento diferentes: generador o medidor de frecuencia.

5. **DISPLAY.** Muestra la frecuencia de entrada o salida.
6. **O.F. LED.** Para la frecuencia de entrada indica que el rango de frecuencia seleccionado es insuficiente.
7. **FREQUENCY DIAL.** Controla la frecuencia de salida dentro del rango de frecuencia seleccionado.
8. **SWEEP RATE CONTROL.** Ajusta la tasa de barrido del generador de barrido interno.
9. **SWEEP WIDTH CONTROL.** Ajusta la magnitud del barrido.
10. **COUNT IN.** Conector de entrada de una señal externa, cuando se usa el instrumento como medidor de frecuencias.
11. **SYMMETRY CONTROL.** Ajusta la simetría de la forma de onda de salida desde 1:1 (posición CAL) hasta 4:1
12. **SYNC OUT.** Señal cuadrada de salida útil para sincronizar dispositivos externos.
13. **DC OFFSET CONTROL.** Añade una componente continua, positiva o negativa a la señal de salida.
14. **OUTPUT.** Terminal de salida para todas las funciones principales del generador. 20 Vpp (en circuito abierto), 10 Vpp (50 Ω).
15. **AMPLITUDE CONTROL.** Ajusta la amplitud de salida de la señal generada desde 0 hasta 20 dB. Cuando este control está hacia fuera funciona como atenuador (20dB).

3.1. Operación como generador de funciones.

- 1.- Encender el instrumento.
- 2.- Para asegurarse de que la salida es simétrica y no se ve afectada por el generador de barrido fijar los controles siguientes de la forma:

Sweep width off

Symmetry off

DC offset off

Attenuator (0 dB, pulsado)

- 3.- Seleccionar el rango de frecuencia. Para ello utilizar el rango de frecuencia (*RANGE SWITCH*) y el dial de frecuencia para controlar ésta dentro del rango seleccionado.
- 4.- Seleccionar la forma de onda requerida. Seno, cuadrada o triangular.

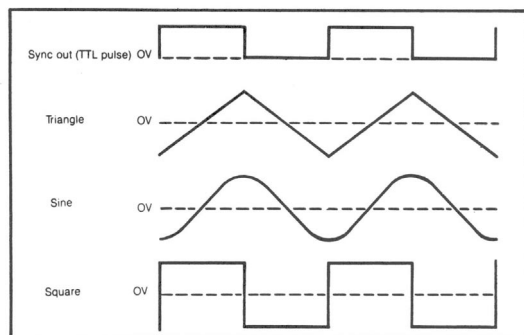


Figura 3. Formas de onda y sus relaciones de fase.

La *figura 3* ilustra las diferentes formas de onda y sus relaciones de fase.

- 5.- Conectar un cable tipo BNC de 50 Ω al punto en que se desea inyectar la señal. En nuestro caso lo conectaremos al osciloscopio, a la entrada tipo BNC del canal I (número 27)
- 6.- Ajustar la salida de 50 Ω a la amplitud deseada con el control de amplitud.
- 7.- Es posible añadir un una componente continua a la señal mediante el uso del control *DC OFFSET*.
- 8.- Una señal cuadrada de amplitud fija esta disponible en la salida de sincronismo (BNC). Esta señal no se ve afectada por los controles de amplitud, atenuación y control de componente continua.

4.- Osciloscopio

Vamos a trabajar en el laboratorio con osciloscopios HAMEG 1004-2A.

Estos osciloscopios son capaces de analizar tensiones continuas y señales periódicas en el rango de frecuencias de hasta al menos 100 MHz (-3dB).

La lectura de señales sinusoidales dentro de los límites de ancho de banda no causa problemas si bien se produce un aumento en el error de medida como consecuencia de la reducción de la ganancia, lo que debe tenerse en cuenta cuando se midan señales de alta frecuencia.. Estos errores comienzan a ser perceptibles a 40 MHz. A 80 MHz la reducción es de aproximadamente un 10% y el valor real de tensión es de un 11% superior.

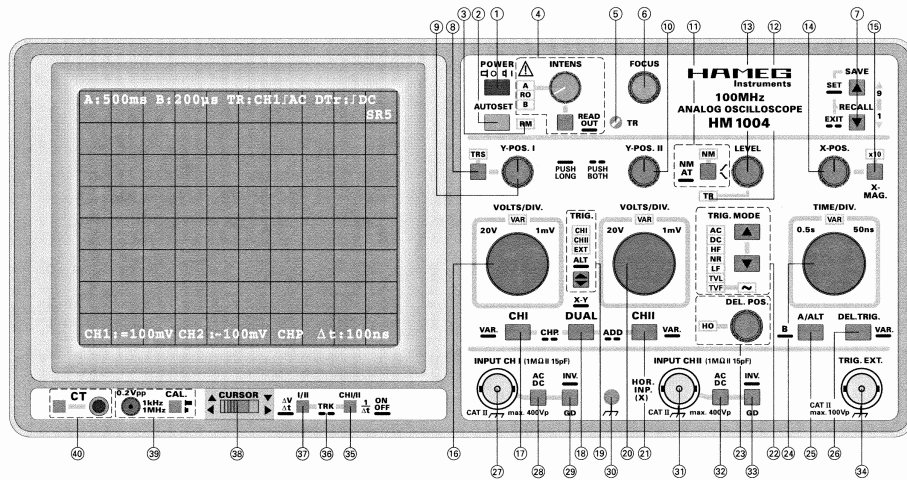


Figura 4. Panel frontal del osciloscopio HAMEG 1004-2A

En la figura 4 se muestra el panel frontal del Osciloscopio HAMEG 1004-2A.

No se pretende en este curso adquirir un conocimiento profundo del funcionamiento de este instrumento. Únicamente se exigirá el conocimiento de tareas elementales como la medida de amplitudes y de tiempo mediante el display del osciloscopio.

El panel frontal del osciloscopio se divide en diferentes secciones.

En la parte superior y justo a la derecha de la pantalla (*CRT, Cathodic Ray Tube*) se localizan los siguientes controles e indicadores:

1.- **POWER**. Botón de encendido/apagado del instrumento.

Una vez se enciende el instrumento se iluminan todos los LED's y comienza una prueba interna automatizada. Durante este proceso el logotipo de HAMEG y la versión del software incluida se visualizan en la pantalla. Una vez finaliza esta operación el osciloscopio queda en su modo normal de funcionamiento.

2.- **AUTO SET**. Al pulsar y soltar este control el Osciloscopio ajusta automáticamente los parámetros de visualización de acuerdo a los valores registrados a su entrada.

4.- **INTENS**. Permite ajustar la intensidad luminosa de la pantalla

6.- **FOCUS**. Permite variar la nitidez de lectura de las trazas sobre la pantalla.

Los controles para los amplificadores verticales, el disparo (*trigger*) y la base de tiempos se sitúan justo debajo de los controles descritos anteriormente.

9.- **Y-POS I**. Controla la la posición vertical de la traza introducida por el canal I del osciloscopio (27). Si no se aplica ninguna señal en la entrada del canal I *INPUT CHI* (27), la posición de la traza vertical representa 0 Voltios.

- 10.- **Y-POS II**. Idem, para el canal II del osciloscopio.
- 14.- **X-POS**. Este control nos permite variar la posición horizontal de la traza representada en la pantalla.
- 16, 20.- **VOLTS/DIV**. Girando en sentido horario aumenta la sensibilidad del osciloscopio. El rango oscila entre 1 mV/div (un milivoltio por cada división de la pantalla) hasta 20 V/div (20 voltios por división).
- 17, 18, 21.- **CHI, CHII y DUAL**. Con estas opciones podremos visualizar en la pantalla el canal I, el canal II, o ambos a la vez si seleccionamos el modo dual.
- 24.- **TIME/DIV**. Establece la base de tiempos del osciloscopio. La base de tiempos se muestra en la pantalla. Puede variar entre 500 ms/div hasta 50 ns/div.

Bajo el conjunto de controles descritos hasta ahora encontramos los conectores BNC y cuatro botones.

- 27 y 31.- **CHI, CHII**. Entradas *BNC* para las señales introducidas al osciloscopio por los dos canales disponibles (Canal I y Canal II).
- 28, 32.- **AC/DC**. Presionando este botón se conmuta de acoplamiento de entrada en alterna o continua.
- 29, 33.- **GD-INV**. La entrada pasa de estar activa a estar inactiva.

Bajo la pantalla del osciloscopio se hallan los controles para la lectura de información.

- 35.- **ON/OFF**. Pulsando y manteniendo el botón pulsado se conmuta entre las líneas de cursor on/off. Estas líneas estarán visibles únicamente cuando el readout esté activado.

4.1. Medidas de amplitud.

En general en la ingeniería electrónica los valores de tensiones alternas normalmente se refieren a valores eficaces (rms, root-mean-square). Sin embargo las magnitudes de señal medidas con osciloscopio son representadas en valores de pico a pico (V_{pp}). Es decir, la diferencia real existente entre los valores máximos positivos y los valores mínimos negativos de la forma de onda de una señal.

Si una forma de onda sinusoidal representada en la pantalla de un osciloscopio quiere expresarse en valores eficaces, el resultado obtenido como valor pico a pico deberá dividirse por $2 \cdot \sqrt{2} = 2,83$.

La relación entre estas magnitudes de tensión puede observarse en la figura 5.

Con la nomenclatura siguiente:

H = Altura de la señal en divisiones.

U = Tensión pico a pico de la señal.

D = Coeficiente de deflexión en volts/div.

El valor buscado puede ser obtenido a partir de las fórmulas:

$$U = D \cdot H \quad H = \frac{U}{D} \quad D = \frac{U}{H}$$

4.2. Medidas de tiempo.

Aplicable, sobre todo, a señales de naturaleza periódica. Dependiendo de la base de tiempos seleccionada (*TIME/DIV*) pueden representarse en la pantalla uno o varios periodos de la señal o únicamente una parte de un periodo.

Con la nomenclatura siguiente:

L = longitud de un periodo de la señal en divisiones de la pantalla.

T = duración en segundos de un periodo de la señal

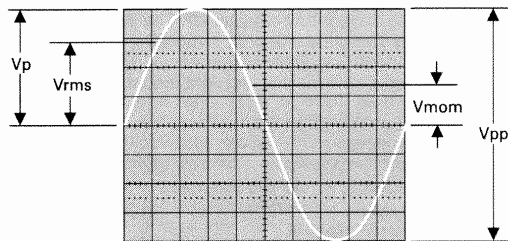


Figura 5. V_{rms} = valor eficaz. V_p = Valor de pico o de cresta.
 V_{pp} = valor de pico a pico. V_{mom} = valor instantáneo

F = frecuencia de la señal. $F=1/T$

T_c = coeficiente de tiempo en ms, us o ns/división.

Las siguientes relaciones se cumplen:

$$T = L \cdot T_c \quad L = \frac{T}{T_c} \quad T_c = \frac{T}{L}$$

$$F = \frac{1}{LT_c} \quad L = \frac{1}{FT_c} \quad T_c = \frac{1}{LF}$$

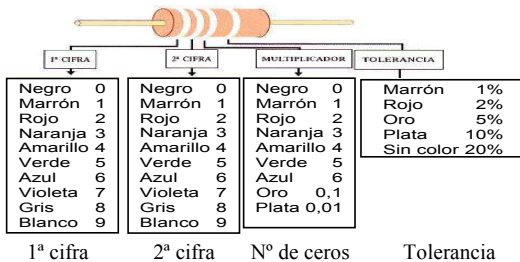
5.- Cálculos prácticos.

5.1. Multímetro y fuente de alimentación.

1. Conectar la fuente de alimentación y ajustar los valores de la tensión de salida a 12,2 V de tensión continua.
2. Seleccionar el rango adecuado en el multímetro para medir valores de **tensión continua** de ese orden de magnitud.
3. Hacer contacto con los conectores en los puntos de salida de la fuente de alimentación. Indicar en la hoja adjunta de resultados la lectura del multímetro.
4. Variar la tensión de salida de acuerdo con la tabla y comprobar los valores leídos en el multímetro.

V _{salida}	V _{multímetro}
12,5	
9	
5	
15	
20	

- 5.- Seleccionar tres resistencias diferentes. Medir con el multímetro el valor de las mismas. Comprobar este resultado con el código de colores adjunto.



Los valores óhmicos de los resistores se suelen representar por medio de unos anillos de color pintados sobre el cuerpo de los mismos. Suelen ser cuatro anillos, y su significado es:

El valor nominal de una resistencia es el que indica su código de colores \pm su tolerancia correspondiente.

De acuerdo con lo anterior rellenar la tabla siguiente.

	Colores	R_{nom}	R_{medido}
R_1			
R_2			
R_3			

5.2. Generador de señales y osciloscopio

De acuerdo con lo explicado anteriormente conectar la salida del generador de señal a la entrada del osciloscopio (canal I).

Generar una señal sinusoidal de 300 Hz y ajustar los rangos vertical y horizontal del osciloscopio hasta obtener en la pantalla uno o dos ciclos completos de la señal. Una forma rápida de realizar este ajuste es pulsando el botón de *AUTO SET*. Ajustar la amplitud de la señal aleatoriamente.

Medir de la forma en que se explicó anteriormente la amplitud y la frecuencia de la señal representada en la pantalla del osciloscopio.

Modificar la forma de onda del generador y la frecuencia de la señal de acuerdo con la siguiente tabla.

Forma de Onda	Frec	Frec _{medida}	Amplitud _{medida}
Sinusoidal	300 Hz		
Cuadrada	700 Hz		
Triangular	12 kHz		

Vamos a utilizar ahora el osciloscopio para tomar medidas un poco más complejas y para visualizar simultáneamente dos señales.

1. En el canal I mantendremos el generador de señales. Ajustar dicho generador hasta conseguir una señal sinusoidal de 20 kHz y 3 V_{pp}. En el osciloscopio ajustar MANUALMENTE la referencia de amplitudes al centro de la pantalla (GD-INV y POS Y I), y la base de tiempos (TIME/DIV) y la resolución (VOLTS/DIV) para que aparezcan en pantalla aproximadamente dos ciclos completos con la máxima amplitud posible. Rellene la siguiente tabla con los datos obtenidos:

Acoplamiento (AC o DC)	Resolución (VOLTS/DIV)	Base tiempos (TIME/DIV)	Nº Div. Hor.. por periodo	Nº Div. Vert. pico a pico.	Frec _{medida}	Amp _{medida}

2. Cambie la señal del generador de funciones a una señal triangular de 1 kHz y 5 V_{pp}. Introduzca a esta señal un desplazamiento, *offset* o componente continua de 1 V (DC OFFSET). Haga de nuevo todos los ajustes necesarios en el osciloscopio para una visualización correcta, de forma similar al caso anterior. Compruebe el mando de acoplamiento (AC/DC).

Vamos a tomar nuevamente medidas de la señal en la pantalla del osciloscopio, pero esta vez lo haremos mediante los *cursores*. Los cursores son dos puntos de referencia que podemos situar en cualquier posición de la pantalla del osciloscopio, haciéndolos coincidir con ciertos puntos de amplitud y/o tiempo de la señal. Una vez hecho esto, el osciloscopio es capaz de proporcionarnos automáticamente medidas más precisas de amplitud y de frecuencia que las que podríamos tomar visualmente. Rellene una tabla similar a la anterior, pero midiendo ahora la frecuencia y la amplitud pico a pico de la señal mediante los cursores. Para ello tendrá que hacer uso de los mandos situados bajo la pantalla del osciloscopio.

Acoplamiento (AC o DC)	Resolución (VOLTS/DIV)	Base tiempos (TIME/DIV)	Nº Div. Hor.. periodo	Nº Div. Vert. pico a pico.	Frec _{medida} (Cursores)	Amp _{medida} (Cursores)

3. Conectar ahora la fuente de alimentación al canal II del osciloscopio. Ajuste la señal de salida de la fuente a 4 V. Vigile que el mando de limitación de corriente no se encuentre al mínimo y gírelo hasta que se apague el LED (lampara) correspondiente. Conmute el osciloscopio al canal II y ajuste los mandos necesarios de dicho canal hasta observar la señal continua. Rellene la tabla siguiente:

Acoplamiento (AC o DC)	Resolución (VOLTS/DIV)	Base tiempos (TIME/DIV)	Nº Div. Hor.. periodo	Nº Div. Vert. pico a pico.	Frec _{medida}	Amp _{medida}

Cambie ahora al modo DUAL y podrá observar en pantalla las señales de ambos canales superpuestas (quizá tendrá que seleccionar el disparo del osciloscopio, TRIGGER, en el canal I y en modo AC). **Note que ambas señales pueden estar en órdenes de escala diferentes, puesto que cada canal de osciloscopio tiene mandos de ajuste independientes.**

HOJA DE ENTREGA DE RESULTADOS. **Práctica 1.**

Grupo: _____ Nombre: _____

Tabla 1. **Tensión nominal con respecto a la tensión medida por el mutímetro.**

V_{salida}	$V_{\text{multímetro}}$
12,5	
9	
5	
15	
20	

Tabla 2. **Resistencias.**

	Colores	R_{nom}	R_{medido}
R_1			
R_2			
R_3			

Tabla 3. **Generador de señales/Osciloscopio**

Forma de Onda	Frec	$Frec_{\text{medida}}$	Amplitud $_{\text{medida}}$
Sinusoidal	300 Hz		
Cuadrada	700 Hz		
Triangular	12 kHz		

Tabla 4. Osciloscopio. Señal sinusoidal.

Acoplamiento (AC o DC)	Resolución (VOLTS/DIV)	Base tiempos (TIME/DIV)	Nº Div. Hor.. periodo	Nº Div. Vert. pp.	Frec _{medida}	Amp _{medida}

Tabla 5. Osciloscopio. Señal triangular.

Acoplamiento (AC o DC)	Resolución (VOLTS/DIV)	Base tiempos (TIME/DIV)	Nº Div. Hor.. periodo	Nº Div. Vert. pp.	Frec _{medida} (Cursores)	Amp _{medida} (Cursores)

Tabla 6. Osciloscopio. Señal continua.

Acoplamiento (AC o DC)	Resolución (VOLTS/DIV)	Base tiempos (TIME/DIV)	Nº Div. Hor.. periodo	Nº Div. Vert. pp.	Frec _{medida}	Amp _{medida}

Práctica 2. Circuitos resistivos

Esta práctica consta de dos partes. La primera de ellas, **que el alumno deberá tener resuelta por escrito antes de comenzar la clase de laboratorio**, se dedicará al análisis teórico de algunos circuitos resistivos sencillos propuestos. La segunda parte de la práctica, que se desarrollará en el laboratorio, trata sobre el montaje y medida de estos circuitos, haciendo uso para ello de los aparatos que se introdujeron en la práctica 1.

Es muy importante leer detenidamente todo el contenido de la práctica antes de acudir a la sesión en el laboratorio, tanto la parte descriptiva como los ejercicios finales que se proponen y que deberán realizarse en el laboratorio.

Al finalizar la sesión práctica el alumno deberá entregar al profesor los ejercicios propuestos como desarrollo teórico junto con la hoja de resultados que se adjunta al final de este boletín.

Se entregará una sola copia por cada puesto de laboratorio, indicando nombres, grupo y puesto (máximo tres personas). Los desarrollos previos son imprescindibles para el resto de tareas a realizar en el laboratorio. Los profesores de la asignatura comprobarán al comienzo de la clase práctica que cada puesto ha realizado el trabajo previo solicitado.

1.- Conceptos básicos.

Fuente de tensión

Como sabemos la fuente de tensión viene caracterizada por el símbolo esquemático de la figura 2.1.

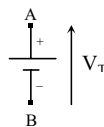


Figura 2.1

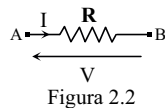
El signo + que aparece en el dibujo es la referencia de polaridad mediante la que convenimos que la tensión en el punto A es mayor que en el punto B cuando V es positiva. Por lo tanto la tensión entre los puntos A y B será:

$$V_{AB} = V$$

con independencia de cualquier otra conexión que pudiera haber entre los puntos A y B . La tensión V es la característica de la fuente y es independiente de la corriente que suministra, dependiendo ésta sí del resto del circuito.

Resistencia eléctrica.

La resistencia eléctrica es la propiedad que poseen algunos materiales para oponerse al paso de la corriente eléctrica y que supone una pérdida de energía en forma de calor. Su valor dependerá de la clase de material, temperatura de funcionamiento y dimensiones físicas del componente. Como sabemos, la unidad de medida es el ohmio (Ω). En la figura 2.2 se representa su símbolo gráfico.



Con las referencias de tensión y corriente indicadas en la figura 2.2 su ecuación de definición es:

$$V = R \cdot I$$

conocida como **Ley de Ohm**. R se expresa en ohmios (Ω) cuando V viene dada en Voltios (V) y la corriente I en Amperios (A).

La conductancia asociada a toda resistencia es $G = \frac{1}{R}$ y se expresa en Siemens (S).

Por ejemplo:

Supongamos que de acuerdo con la figura 2.2. La resistencia tiene un valor $R = 5 \Omega$ siendo la tensión $V_{AB} = 10 \text{ V}$. ¿Cuál sería el valor de la corriente I en este caso? La respuesta es sencilla. Aplicando directamente la Ley de Ohm tendremos que:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

Tomando los mismos valores de R y V ¿Cuál sería el valor de la corriente I para el caso de la figura 2.3?

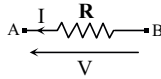


Figura 2.3

Para el caso de la figura 2.3 el resultado físico ha de ser el mismo, pero como la referencia de la corriente es contraria, el valor de la corriente en este caso ha de ser de $-2 A$.

Potenciometro

Un dispositivo de cierta importancia en ingeniería eléctrica es el potenciómetro. Este dispositivo utiliza una división de tensión para medir una fracción deseada de la tensión de entrada. En la figura 2.4 podemos ver el símbolo convencional del potenciómetro, una aplicación ordinaria y la fotografía de un potenciómetro real.

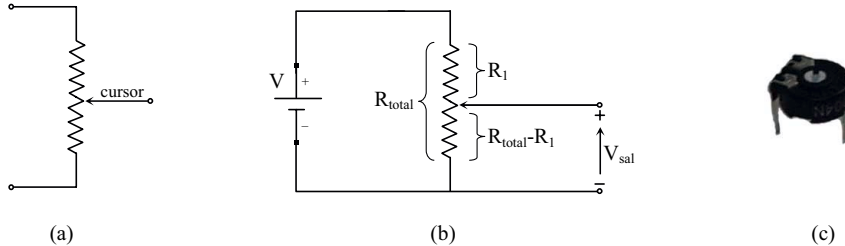


Figura 2.4. Potenciómetro. (a) Símbolo convencional. (b) Aplicación. (c) Potenciómetro real

La tensión V_{sal} se puede variar sin más que hacer girar el botón del potenciómetro que mueve la palanca de contacto. Utilizando la regla del divisor de tensión, podemos encontrar fácilmente que:

$$V_{sal} = V \frac{R_{total} - R_1}{R_{total}}$$

cuando anulamos R_1 moviendo el contacto hacia arriba, obtendremos:

$$V_{sal} = V \frac{R_{total} - 0}{R_{total}} = V$$

si movemos el contacto completamente hacia abajo, llegaremos a hacer R_1 igual a R_{total} , luego:

$$V_{sal} = V \frac{R_{total} - R_{total}}{R_{total}} = 0$$

este es el otro extremo. Podremos variar, por lo tanto la tensión de salida entre el valor V de tensión aplicada y cero. En la posición central de contacto, intuitivamente pensamos que se

tenrá una tensi3n igual a la mitad de la tensi3n aplicada; al comprobarlo obtenemos, como era de esperar:

$$V_{sal} = V \frac{R_{total} - \frac{R_{total}}{2}}{R_{total}} = \frac{V}{2}$$

Las aplicaciones de los potenciómetros son innumerables –mando de volumen acústico, mando de salida de tensi3n, ajuste fino para alineamiento de circuitos, etc...

2.- Estudio te3rico

Ejercicio 1. Circuito en serie.

Como sabemos para una conexi3n en serie de N resistencias, de acuerdo con la figura 2.5, la resistencia equivalente viene dada por la expresi3n:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

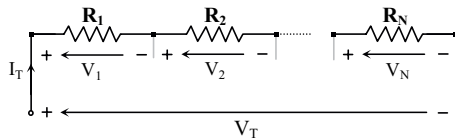


Figura 2.5

Siendo N = 3 y para valores de resistencias de $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 5.6 \text{ k}\Omega$ y $R_3 = 10 \text{ k}\Omega$, obtener te3ricamente los valores que se piden en la siguiente tabla en dos casos: fuente de alimentaci3n de 5 V y 10 V. Rellenar los apartados correspondientes.

		R_{eq}	I_T	V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3	P_T
Estudio te3rico	$V_T = 5 \text{ V}$									
	$V_T = 10 \text{ V}$									
Medidas	$V_T = 5 \text{ V}$									
	$V_T = 10 \text{ V}$									

Ejercicio 2. Circuito en paralelo

Como sabemos para una conexión en paralelo de N resistencias, como muestra la figura 2.6, la resistencia equivalente viene dada por la expresión:

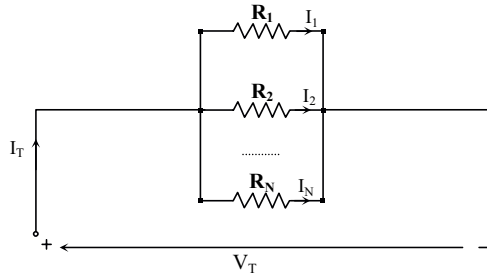


Figura 2.6

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}}$$

De la misma forma que en el ejercicio anterior, para valores de la fuente de tensión de 5 V y 10 V y los mismos valores de resistencias obtener teóricamente los valores que se indican en la tabla 2. Rellenar las casillas correspondientes.

		R_{eq}	V_T	I_T	I_1	I_2	I_3	P_1	P_2	P_3	P_T
Estudio teórico	$V_T=5\text{ V}$		5 V								
	$V_T=10\text{ V}$		10 V								
Medidas	$V_T=5\text{ V}$										
	$V_T=10\text{ V}$										

Ejercicio 3. Circuito mixto. Resolver **teóricamente** la asociación mixta serie-paralelo de la figura 2.7. Rellenar la tabla con los resultados obtenidos. Tomar los valores de R_1 , R_2 y R_3 dados en el ejercicio 1. Tomar $R_4 = 5,6 \text{ k}\Omega$ y $R_5 = 39 \text{ k}\Omega$.

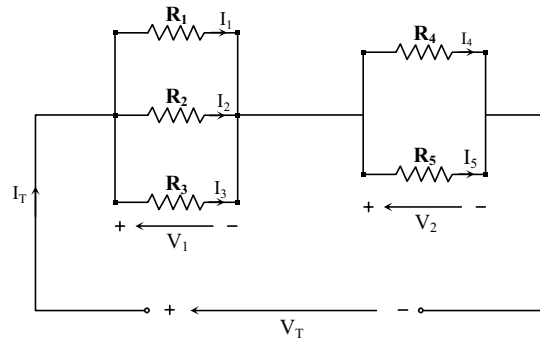


Figura 2.7

		R_{eq}	I_T	I_3	I_4	V_1	V_2	P_T
Estudio teórico	$V_T = 5 \text{ V}$							
	$V_T = 10 \text{ V}$							
Medidas	$V_T = 5 \text{ V}$							
	$V_T = 10 \text{ V}$							

Ejercicio 4. Divisor de tensión.

Cierto dispositivo necesita 6 Voltios para funcionar. Este dispositivo tiene una resistencia de entrada equivalente de $470 \text{ k}\Omega$. Disponemos de un generador de 12 V. Trataremos de diseñar un acoplamiento adecuado que permita funcionar al dispositivo de 6 V. En la figura 2.8 se ilustra el ejercicio.

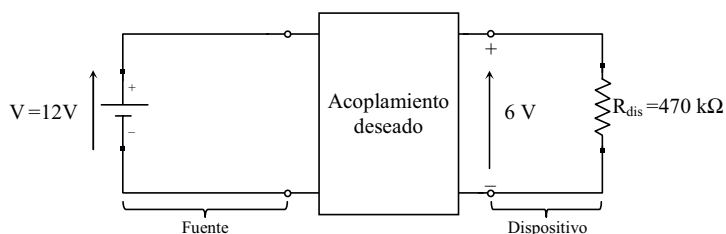
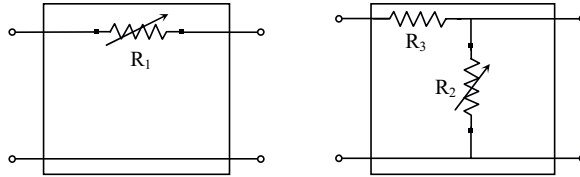


Figura 2.8



Acoplamiento utilizados. (a) Potenciometro en serie. (b) Potenciometro en paralelo

Siendo $R_3 = 330 \text{ k}\Omega$, y teniendo en cuenta que los potenciometros utilizados tienen un valor máximo de $2,4 \text{ M}\Omega$ encontrar a qué porcentaje de su valor máximo deberán situarse los cursores de los potenciometros en cada caso para obtener los 6 V en la carga (dispositivo). ¿Qué valores de R_1 y R_2 proporcionan? Resolver esta parte por escrito.

	Acoplamiento I		Acoplamiento II	
	%	R_{pot}	%	R_{pot}
Teórico				
Medidas				

3.-Desarrollo práctico

Ejercicio 1. Resistencias en serie.

- 1.1.- Montar sobre la placa de pruebas el circuito en serie formado por las tres resistencias de los valores indicados de acuerdo con la figura 2.5.
- 1.2.- Medir con el multímetro el valor de la resistencia total equivalente.
- 1.3.- Aplicar una tensión de 5 V entre los extremos del circuito.
- 1.4.- Medir con el voltímetro los valores de tensión en cada resistencia.
- 1.5.- Rellenar los espacios correspondientes de la tabla 1. Calcular la potencia analíticamente mediante $P = \frac{V^2}{R}$ (medir los valores de R con el multímetro)
- 1.6.- Repetir los cálculos para un valor de 10 V de la fuente de tensión

Ejercicio 2. Resistencias en paralelo.

- 2.1.- Montar sobre la placa de pruebas el circuito en serie formado por las tres resistencias en paralelo de los valores indicados de acuerdo con la figura 2.6.
- 2.2.- Medir con el multímetro el valor de la resistencia total equivalente.

- 2.3.- Aplicar una tensión de 5 V entre los extremos del circuito.
- 2.4.- Medir con el voltímetro el valor de tensión en las resistencias. Calcular analíticamente la corriente en cada resistencia mediante la ley de Ohm.
- 2.5.- Rellenar los espacios correspondientes de la tabla 1. Calcular la potencia analíticamente mediante $P = RI^2$ (medir cada valor de R con el multímetro)
- 2.6.- Repetir los cálculos para un valor de 10 V de la fuente de tensión

Ejercicio 3. Circuito mixto.

- 1.1.- Montar sobre la placa de pruebas el circuito en serie formado por las cinco resistencias de los valores indicados de acuerdo con la figura 2.7.
- 1.3.- Aplicar una tensión de 5 V entre los extremos del circuito.
- 1.4.- Medir con el voltímetro los valores de tensión V_1 y V_2 representados en la figura 2.7.
- 1.5.- Rellenar los espacios correspondientes de la tabla 1. Calcular la corriente en cada resistencia a partir de la ley de Ohm.
- 1.6.- Repetir los cálculos para un valor de 10 V de la fuente de tensión.

Ejercicio 4. Divisor de tensión

- 1.1.- Montar sobre la placa de pruebas el circuito de la figura 2.8, con el acoplamiento 1. Dejar una de las salidas del potenciómetro sin conectar.
- 1.2.- Aplicar una tensión de 12 V entre los extremos del circuito.
- 1.3.- Ajustar el valor de la resistencia del potenciómetro a cero. Conectar el voltímetro a la salida (resistencia de $470\text{ k}\Omega$) y verificar que la tensión en ese caso es de 12 V.
- 1.4.- Ajustar el potenciómetro con un destornillador hasta que la lectura en el voltímetro sea de 6 V. Medir la resistencia que presenta el potenciómetro entre los terminales conectados al circuito.
- 1.5.- Rellenar adecuadamente la tabla 4.
- 1.6.- Repetir los cálculos para el acoplamiento 2.

HOJA DE ENTREGA DE RESULTADOS. **Práctica 2.**

Grupo: _____ Nombre: _____

Tabla 1. Circuito en serie.

		R_{eq}	I_T	V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3	P_T
Estudio teórico	$V_T = 5\text{ V}$									
	$V_T = 10\text{ V}$									
Medidas	$V_T = 5\text{ V}$									
	$V_T = 10\text{ V}$									

Tabla 2. Circuito en paralelo

		R_{eq}	V_T	I_T	I_1	I_2	I_3	P_1	P_2	P_3	P_T
Estudio teórico	$V_T = 5\text{ V}$										
	$V_T = 10\text{ V}$										
Medidas	$V_T = 5\text{ V}$										
	$V_T = 10\text{ V}$										

Tabla 3. Circuito mixto

		R_{eq}	I_T	I_3	I_4	V_1	V_2	P_T
Estudio teórico	$V_T = 5\text{ V}$							
	$V_T = 10\text{ V}$							
Medidas	$V_T = 5\text{ V}$							
	$V_T = 10\text{ V}$							

Tabla 4. Divisor de tensión.

	Acoplamiento I		Acoplamiento II	
	%	R_{pot}	%	R_{pot}
Teórico				
Medidas				

Práctica 3. Introducción a PSpice. Circuitos Resistivos.

Esta práctica consta de dos partes. La primera de ellas, **que el alumno deberá tener resuelta por escrito antes de comenzar la clase de laboratorio**, se dedicará al análisis teórico de unos circuitos propuestos. La segunda parte, que se desarrollará en el laboratorio, trata sobre el análisis y medida de este circuito mediante uno de los programas de simulación informática más extendidos en ingeniería electrónica, PSpice.

Es muy importante leer detenidamente todo el contenido de la práctica antes de acudir a la sesión en el laboratorio, tanto la parte descriptiva como los ejercicios finales que se proponen y que deberán realizarse en el laboratorio.

Al finalizar la sesión práctica el alumno deberá entregar por escrito al profesor los ejercicios propuestos como desarrollo teórico junto con la hoja de resultados que se adjunta al final de este boletín.

Se entregará una sola copia por cada puesto de laboratorio, indicando nombres, grupo y puesto (máximo tres personas). Los desarrollos previos son imprescindibles para el resto de tareas a realizar en el laboratorio. Los profesores de la asignatura comprobarán al comienzo de la clase práctica que cada puesto ha realizado el trabajo previo solicitado.

1.- Introducción.

La simulación de circuitos mediante ordenador es, hoy en día, una tarea que supone un ahorro considerable de tiempo y dinero. La simulación de circuitos computacionalmente nos va a permitir conocer el comportamiento de los circuitos con antelación a su fabricación, nos permitirá modificar el diseño de la estructura y solucionar los posibles errores cometidos en una primera fase, así como depurar nuestro trabajo sin necesidad de efectuar ni construir circuitos reales. Sólo cuando los circuitos han sido completamente verificados y comprobados estaremos en condiciones de pasar a la fase de fabricación.

El formato de diseño de circuitos más extendido en el terreno profesional es PSpice. Hay multitud de programas de diseño gráfico que son compatibles con este formato y

que por tanto permiten el intercambio de información entre unos y otros. PSpice es un Software desarrollado por la marca comercial Orcad. En el laboratorio disponemos de una versión de PSpice para estudiantes. El que se trate de una versión para estudiantes significa que cuenta con algunas limitaciones, es decir, que no nos permitirá hacer la mismas cosas que la versión comercial completa. Sin embargo para los objetivos del presente curso la versión para estudiantes es más que suficiente. Las limitaciones con respecto a la versión completa son¹:

La simulación de circuitos está limitada a circuitos de hasta:

- 64 nodos
- 10 transistores
- 65 dispositivos digitales
- 10 líneas de transmisión
- 4 pares de líneas acopladas

Limitaciones adicionales:

- La librería de muestras incluye 39 componentes analógicos y 134 digitales.
- La generación de señales de estímulo en el PSpice Stimulus Editor queda limitada a ondas senoidales (analog) y relojes (digital).
- La optimización de circuitos mediante el PSpice Optimizer queda limitada a un solo propósito, un parámetro, y una restricción.
- No pueden crearse ficheros de datos con formato CSDF.
- Únicamente pueden mostrarse y analizarse aquellos datos obtenidos mediante una simulación realizada con la versión de PSpice para estudiantes.

Schematics

- En un diseño esquemático pueden colocarse hasta un máximo de 50 componentes.

Capture

- Sólo se han incluido las librerías de PSpice. Las librerías estándar de *Capture* no están incluidas.
- Las opciones de importación, listado de comandos y accesorios no relevantes no están incluidas.
- No puede grabarse un diseño que contenga más de 60 componentes. (Pueden crearse diseños mayores pero no podrán ser guardados).
- No puede grabarse una librería que contenga más de 15 componentes.

¹ No importa que algunos conceptos de los que se listan a continuación no se comprendan de momento. Iremos viendo su significado a medida que nos vaya siendo necesario.

2. Iniciación a PSpice.

Este pequeño manual supone que el alumno ya es familiar con el entorno Microsoft Windows, lo que incluye cómo utilizar los iconos, menús y cajas de diálogo. También supone que el alumno tiene unos conocimientos básicos sobre cómo Windows trabaja con las distintas aplicaciones y ficheros para realizar tareas habituales tales como, iniciar un programa o abrir o guardar un trabajo.

Para nosotros PSpice será un programa de simulación de circuitos que nos permitirá realizar el análisis de circuitos en **corriente continua (DC)**, **corriente alterna (AC)** y **la respuesta transitoria (Transient)**, de forma que podamos conocer la respuesta del circuito ante diferentes entradas.

PSpice cuenta con una gran variedad de componentes o elementos para circuitos que tiene almacenados en librerías internas.

Ficheros necesarios para la simulación

PSpice, para poder llevar a cabo una simulación necesita tener la siguiente información sobre nuestro circuito:

- Los componentes que forman parte de él y la forma en que están conectados.
- Qué queremos analizar.
- Los modelos de simulación que se corresponden con los componentes de nuestro circuito.
- La señal de estímulo que se introduce al circuito.

Esta información la suministran diferentes ficheros de datos. Unos son generados por el módulo de captura (*Capture*) otros proceden de las librerías internas de PSpice y otros pueden estar definidos por el propio usuario.

Tras leer toda la información referente al circuito PSpice comienza la simulación. Como consecuencia de ese proceso de simulación PSpice almacena los resultados en dos tipos de ficheros diferentes: el fichero de datos (*Data file*) y el fichero de salida de PSpice (*PSpice Output file*).

El fichero de datos contiene resultados de la simulación que pueden representarse gráficamente.

El fichero de salida de PSpice es un fichero de texto (ASCII) que contiene:

- Netlist (representación del circuito en modo texto)
- Comandos para el proceso de simulación
- Resultados de la simulación

- Mensajes de error o advertencia que hayan podido surgir durante el proceso de simulación.

3. Ejemplos de iniciación. Estudio teórico.

Previamente a realizar las simulaciones es necesario resolver los circuitos de forma teórica rellenar las tablas que aparecen al final del boletín y entregar la resolución al profesor de prácticas. Dicha resolución debe ser clara y debe indicar todos los pasos seguidos y las operaciones utilizadas. Los circuitos a resolver son:

Circuito 1: Circuito Serie.

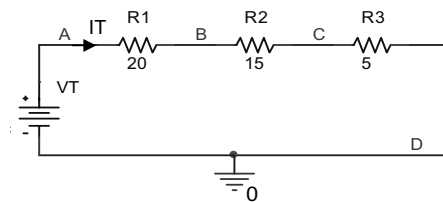


Figura 1. Circuito Serie

Rellenar la Tabla 1 para $V_T = 80V$ y $V_T = 100V$. Las resistencias de la Figura 1 son $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 15\Omega$ y $R_3 = 5\Omega$. Es importante que los valores de cada magnitud vayan acompañados de la unidad de medida correspondiente.

	R_{eq}	I_T	V_A	V_B	V_C	V_{AB}	V_{BC}	V_{CD}
$V_T = 80 V$								
$V_T = 100 V$								

Tabla 1. Resultados obtenidos para el circuito serie

Circuito 2: Circuito Paralelo.

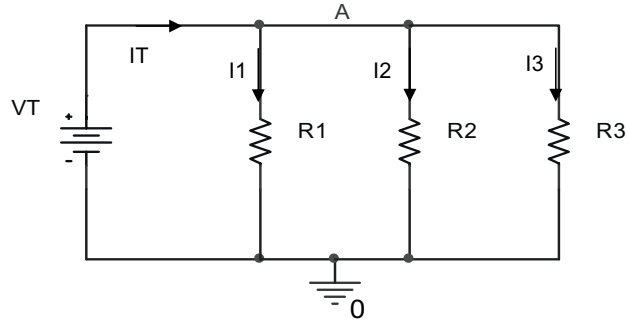


Figura 2. Circuito paralelo

Con $R_1 = 1\text{K}\Omega$, $R_2 = 39\text{K}\Omega$ y $R_3 = 2.2\text{K}\Omega$, rellenar la Tabla 2 para $V_T = 50\text{V}$ y $V_T = 100\text{V}$.

	R_{eq}	I_T	I_1	I_2	I_3	V_A
$V_T = 50\text{V}$						
$V_T = 100\text{V}$						

Tabla 2. Resultados obtenidos para el circuito paralelo

Circuito 3: Circuito Mixto 1.

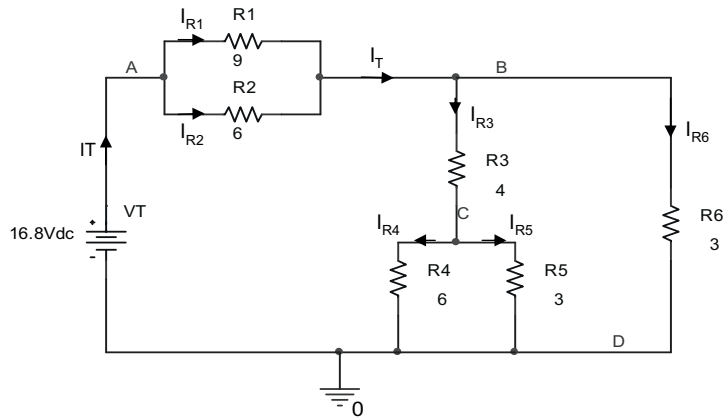


Figura 3. Circuito mixto 1

De nuevo, rellenar los valores que se indican en la Tabla 3. Los valores de las resistencias del circuito están indicados en la Figura 3 y las unidades son Ω .

I_T	I_{R1}	I_{R2}	I_{R3}	I_{R4}	I_{R5}	I_{R6}	R_{eq}	
V_A	V_B	V_C	V_D	V_{AB}	V_{BC}	V_{CD}	V_{BD}	V_{AD}

Tabla 3. Resultados obtenidos para el circuito mixto 1

Circuito 4: Circuito Mixto 2

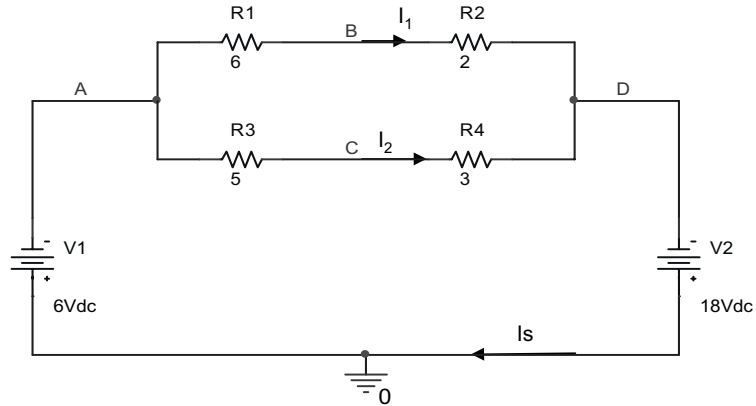


Figura 4. Circuito mixto 2

Rellenar los valores que se indican en la Tabla 4. Los valores de las resistencias del circuito están indicados en la Figura 4 y las unidades son Ω .

I_T		I_1		I_2		I_S		R_{eq}	
V_A	V_B	V_C	V_D	V_{AB}	V_{BC}	V_{CD}	V_{BD}	V_{AD}	

Tabla 4. Resultados obtenidos para el circuito serie

4. Simulación en PSpice.

Los ejemplos que vamos a desarrollar a continuación nos servirán como introducción a los métodos y herramientas utilizados para crear circuitos mediante PSpice, a ejecutar las simulaciones y a analizar los resultados obtenidos.

Circuito Serie

Vamos a describir en primer lugar como utilizar la aplicación *OrCAD Capture* para crear el circuito serie de la Figura 5, siendo $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 15\Omega$ y $R_3 = 5\Omega$. Este circuito es el mismo que teníamos en el estudio teórico en la Figura 1.

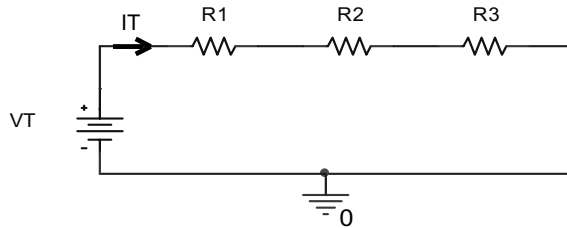


Figura 5. Circuito Serie a simular

Debemos comenzar creando un nuevo Proyecto en PSpice.


- 1 Inicializar la aplicación *Capture* desde el menú de inicio de Windows. Seleccionar *Programas - PSpice Student* y después *Capture Student*. También puede hacerse doble-click sobre el icono correspondiente en el acceso directo. Deberá abrirse una ventana como la que se muestra en la Figura 6.



Figura 6. Ventana de Capture. Versión Student.

- 2 Seleccionar la opción *File/new/project*.
- 3 Aparecerá una caja de dialogo con el nombre de *New Project*. Seleccionar *Analog or Mixed-Signal Circuit Wizard*. Introducir un nombre en la caja de texto rotulada con *Name*, por ejemplo *CtoSerie*.
- 4 En la caja de texto *Browse* pulsar y seleccionar la carpeta donde queráis almacenar todos los ficheros que generará el simulador. Se puede crear una carpeta con vuestro nombre en *c:/Mis Documentos*, para después poderla copiar en un disquete. Una nueva caja de dialogo aparece. Seleccionar la opción *create a blank project* y pulsar OK.


Aparecerá una nueva ventana con el nombre de SCHEMATICS dónde podremos dibujar el circuito que queremos analizar. Vamos a comenzar colocando la **fuerce de tensión continua**. Para ello:

- 1 Seleccionamos esta ventana como la ventana activa haciendo click sobre ella.
- 2 Seleccionamos la opción *Place/Part* que nos muestra la caja de dialogo para seleccionar un componente. Pulsando sobre el icono  de la barra de herramientas de la derecha podemos hacer esto mismo de forma más rápida.
- 3 En primer lugar debemos añadir la librería que contiene los componentes que queremos utilizar.
 - 3.1 Pulsamos *Add library*
 - 3.2 Seleccionamos SOURCE.OLB (librería de PSpice) y pulsamos *abrir*.
- 4 En la línea de texto Part introducir VDC (Voltage Direct Current). Pulsar OK.
- 5 Mover el cursor a la posición de la pantalla donde deba colocarse la fuente de tensión. Pulsar una vez el ratón para colocarla. Si se prefiere podéis hacer un zoom sobre la pantalla mediante las teclas i/o (zoom in/zoom out).
- 6 Pulsar sobre el botón derecho del ratón y seleccionar la opción *End Mode* para dejar la fuente de tensión.

Para colocar las resistencias:

- 1 Seleccionar nuevamente la opción *Place/Part*.
- 2 Añadir la librería donde se encuentra este componente de la misma forma que se hizo en el caso anterior. El nombre de la librería es ANALOG.OLB
- 3 Seguir el mismo procedimiento que en el caso anterior. El nombre del componente en este caso que hay que escribir en la línea de texto Part es R. Deberéis colocar seis resistencias en las posiciones que se indican en la Figura 7. Para girar una resistencia antes de colocarla con el ratón pulsar la tecla R (Rotate)

Para colocar un punto de referencia de tensión cero:

- 1 Pulsar sobre el icono de tierra (GND) en la barra de herramientas .
- 2 Colocar el elemento de tierra '0' de la librería SOURCE.OLB de forma que hasta el momento el aspecto de la pantalla debe ser el que se muestra en la Figura 7.

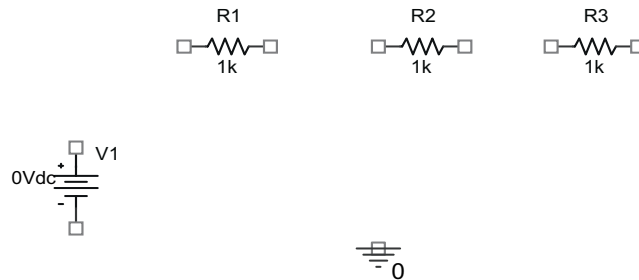



Figura 7. Resultado de colocar los componentes del circuito sobre la ventana de trabajo

Para conectar los componentes mediante cables:

- 1 Seleccionar la opción *Place/wire* o bien pulsar en la herramienta . El cursor cambia a una cruz.
- 2 Pulsar sobre el terminal superior de la fuente V1. Desplazar el cursor hacia arriba, continuar hacia la derecha y soltar el botón del ratón cuando se alcance la resistencia R1 y aparezca un punto rojo.
- 3 Para conectar un componente a un cable comenzar sobre el terminal del componente y dirigirse hacia el cable, cuando el punto rojo aparezca sobre el cable soltar el ratón. Si se está colocando mal el cable aparecerá una señal amarilla y dos puntos rojos.
- 4 Cablear el circuito de la forma en que aparece en la Figura 8. No olvidar conectar el terminal de referencia.

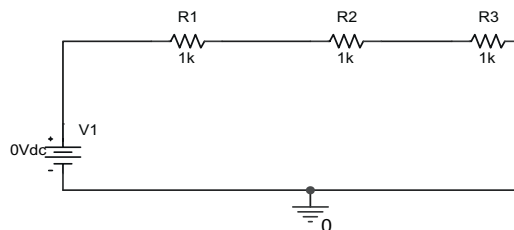



Figura 8. Circuito Serie cableado

- 5 Es posible cambiar el nombre de los componentes pulsando dos veces sobre el texto. Por ejemplo, si se desea modificar el nombre de la fuente V1 por VT, pinchamos, dos veces sobre el texto V1. Se abrirá una caja de diálogo *Display Properties*. En la línea *value* se puede escribir el nuevo nombre VT y pulsar OK. Igualmente se podría cambiar el nombre de cada una de las resistencias. Sin embargo, en esta ocasión no lo modificaremos.

Para cambiar el valor de los componentes procederemos:

- 1 Doble click sobre la etiqueta de la fuente de tensión (0 V) para mostrar la caja de dialogo *Display Properties*
- 2 Introducir el valor adecuado en la línea de texto *Value*.
- 3 Hacer lo mismo con las resistencias hasta que los valores sean $V_T = 80V$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 15\Omega$ y $R_3 = 5\Omega$. La unidad de medida de las resistencias por defecto es Ω y no hace falta indicarlo de ninguna forma. Sin embargo si tuviéramos valores de $k\Omega$ habría que poner junto al valor una 'k', si fueran $M\Omega$, una 'M'...

Podemos colocar nombres a los nodos mediante la opción *Place/net alias* o pulsando sobre el icono . En la caja de dialogo que aparece, teclear el nombre del nodo A y colocarlo sobre él (la esquina inferior izquierda debe contactar con el nodo). Hacer lo mismo con el resto de nodos B, C y D.

El aspecto del circuito debe ser el de la Figura 9.

Una vez hecho todo esto estamos en condiciones de simular el circuito y conocer el valor de las corrientes por cada rama y las tensiones en cada nodo.

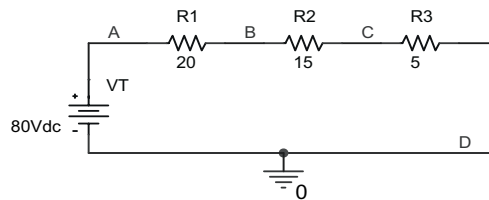





Figura 9. Aspecto final del Circuito Serie con los valores propuestos

Simulación


PSpice nos permite realizar diferentes tipos de simulaciones. La más sencilla de ellas (Bias Point) calcula para un circuito de **corriente continua** los valores de tensiones de nodo y corrientes en cada rama (estos valores son constantes). Es lo que vamos a hacer a continuación.


- 1 Una vez nuestro circuito tenga el aspecto de la Figura 9. Seleccionamos la opción *PSpice/New Simulation Profile* tras lo que se abrirá una caja de dialogo en la que deberemos introducir un nombre para esta simulación (por ejemplo *CtoSerie1*). En la línea *inherit from* dejaremos el valor *none*. Pulsamos *create*.
- 2 Se abre una nueva caja de dialogo titulada *Simulation Settings*. Únicamente elegimos el tipo de análisis que nos interesa de la línea desplegable *Analysis type*. Seleccionamos *Bias Point* y pulsamos *Aceptar*.

- 3 Hasta el momento el programa no ha efectuado ningún cálculo pero está preparado para comenzar a hacerlo en el momento en que activemos la opción *PSpice/run* o bien pulsemos sobre el icono .
- 4 Una vez hecho esto aparecerá una ventana con el título SCHEMATICS-CtoSerie1 en la que podremos seguir la evolución del proceso de simulación. En la parte inferior izquierda de esta ventana podemos seguir el estado de nuestra simulación. Si todo ha ido correctamente en la última línea podremos leer *Simulation Complete*, lo que significa que la simulación se ha completado con éxito.
- 5 Si dentro de esta ventana SCHEMATICS seleccionamos la opción *View/Output file* en la parte principal de la ventana aparece el fichero de texto de salida que genera el proceso de simulación. No vamos a entrar en detalle en el significado de todas las líneas de este fichero, tan solo podéis echar un vistazo a las últimas líneas del mismo en el que aparecen listadas las tensiones y corrientes del circuito tanto para las resistencias como para la fuente. Además también se calcula la potencia total disipada.
- 6 La forma más rápida e intuitiva de obtener los resultados de la simulación *Bias Point* es en la ventana *Orcad Capture* pulsando sobre el icono  para la tensión e  para la corriente, o bien mediante las opciones *PSpice/Bias Point/Enable Bias Voltage Display* para la tensión o *PSpice/Bias Point/Enable Bias Current Display* para la corriente. Si lo hacéis los valores de tensión se muestran directamente sobre cada nodo y los de corriente aparecen también junto a cada componente (junto al nodo por el que entra la corriente).
- 7 Pulsar por tanto sobre esos dos iconos. Cambiar la tensión de entrada a $V_T = 100V$ y volver a simular. Rellenar la Tabla 5.

	R_{eq}	I_T	V_A	V_B	V_C	V_{AB}	V_{BC}	V_{CD}
$V_T=80 V$								
$V_T=100 V$								

Tabla 5. Resultados de la simulación del circuito serie

- 8 Guardar el trabajo realizado hasta ahora pulsando sobre el icono .

El cálculo de la Resistencia Equivalente (R_{eq}) ya se estudió en la práctica 2. Cambiar el circuito de la Figura 9 por uno equivalente donde solamente haya una resistencia, como en la Figura 10. Habrá que calcular el valor de la resistencia equivalente de modo que la I_T del circuito equivalente sea la misma que la I_T del circuito con las tres resistencias. Comprobar que es así repitiendo la simulación construyendo el nuevo circuito de la Figura 10 y seleccionando el icono  para la visualizar solamente la corriente.

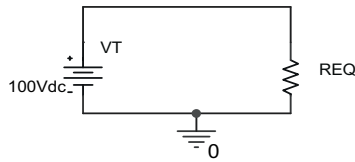


Figura 10. Circuito Serie equivalente.

A continuación, seleccionar la fuente e invertir la polaridad. Para ello es necesario rotarla dos veces quedando el circuito de la Figura 11.

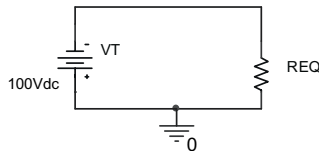


Figura 11. Circuito Serie equivalente con la fuente de tensión con polaridad cambiada.

En esta ocasión, obtenemos el mismo valor de corriente, sin embargo se puede observar que el simulador ha colocado los valores en lugares distintos. PSpice siempre coloca el principio del texto en el lugar de la resistencia por donde entra la corriente. Así en la Figura 12 se muestra el lugar donde se situarán los valores de corriente y el sentido de la corriente al que corresponde.

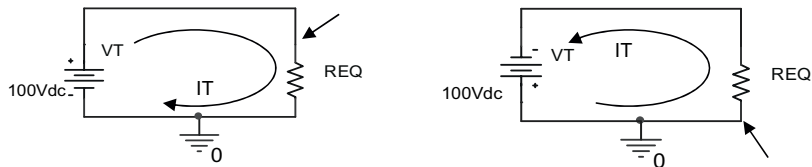


Figura 12. Sentido de la Intensidad en los dos Circuitos Serie.

Así pues, viendo cómo está definido el sentido de la corriente en la Figura 1 (o en la Figura 5), en uno de los dos circuitos, la corriente será negativa. Indicar en cuál de ellos rellenando los valores de la siguiente Tabla 6.

	I_T
Circuito de la Figura 10	
Circuito de la Figura 11	

Tabla 6. Valor de I_T - sentido de la intensidad

Circuito Paralelo

Repetiremos el procedimiento descrito para el Circuito Serie, con el siguiente Circuito Paralelo (Figura 2 o Figura 13). En él, $R_1 = 1\text{K}\Omega$, $R_2 = 39\text{K}\Omega$ y $R_3 = 2.2\text{K}\Omega$, al igual que en el circuito del estudio teórico.

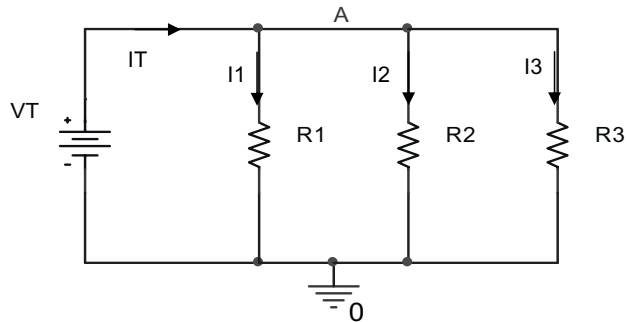


Figura 13. Circuito Paralelo.

Rellenar la Tabla 7 para $V_T = 50\text{V}$ y $V_T = 100\text{V}$.

	R_{eq}	I_T	I_1	I_2	I_3	V_A
$V_T = 50\text{ V}$						
$V_T = 100\text{ V}$						

Tabla 7. Resultados simulados para el circuito paralelo

Circuito Mixto 1

Repetiremos el procedimiento descrito para el Circuito Serie, con el siguiente Circuito Mixto (Figura 3 o Figura 14). En él se indican los valores para cada componente. Completar la Tabla 8 que se presenta a continuación.

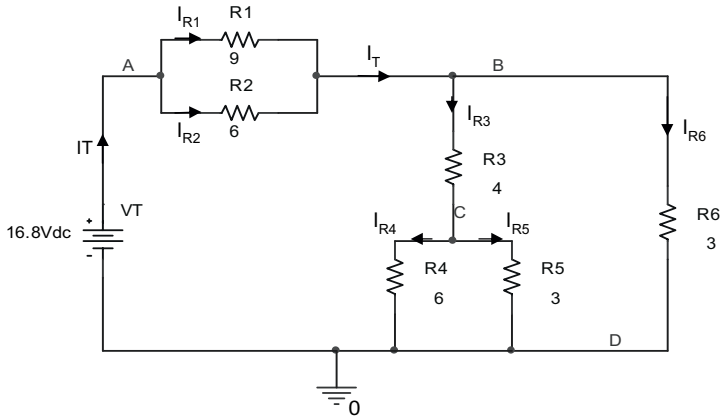




Figura 14. Circuito Mixto 1.

I_T	I_{R1}	I_{R2}	I_{R3}	I_{R4}	I_{R5}	I_{R6}	R_{eq}	
V_A	V_B	V_C	V_D	V_{AB}	V_{BC}	V_{CD}	V_{BD}	V_{AD}

Tabla 8. Resultados de la simulación del Circuito Mixto 1.

Si al pulsar sobre  no se obtienen los valores de V_A , V_B , V_C y V_D es posible utilizar las sondas de tensión  y se podrá leer el resultado en la ventana SCHEMATIC en una gráfica donde los colores nos ayudarán a identificar cada una de la tensiones.

Circuito Mixto 2

Repetiremos el procedimiento descrito para el Circuito Serie, con el siguiente Circuito Mixto (Figura 4 o Figura 15). En él se indican los valores para cada componente. Rellenar la Tabla 9 que se presenta a continuación.

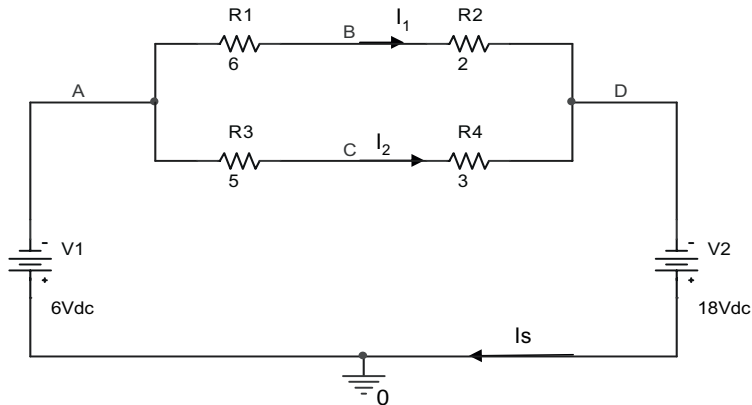


Figura 15. Circuito Mixto 2.

I_T		I_1		I_2		I_S		R_{eq}	
V_A	V_B	V_C	V_D	V_{AB}	V_{BC}	V_{CD}	V_{BD}	V_{AD}	

Tabla 9. Resultados simulados para el Circuito Mixto 2.

HOJA DE ENTREGA DE RESULTADOS. **Práctica 3.**

Grupo: _____ Nombre: _____

ATENCIÓN: Indicar las unidades de cada magnitud.

ESTUDIO TEÓRICO

Además de rellenar las tablas que se presentan a continuación es necesario entregar la resolución de cada uno de los circuitos indicando claramente las operaciones realizadas.

Tabla1: Circuito Serie.

	R_{eq}	I_T	V_A	V_B	V_C	V_{AB}	V_{BC}	V_{CD}
$V_T = 80 \text{ V}$								
$V_T = 100 \text{ V}$								

Tabla 2: Circuito Paralelo.

	R_{eq}	I_T	I_1	I_2	I_3	V_A
$V_T = 50 \text{ V}$						
$V_T = 100 \text{ V}$						

Tabla 3: Circuito Mixto 1.

I_T	I_{R1}	I_{R2}	I_{R3}	I_{R4}	I_{R5}	I_{R6}	R_{eq}	
V_A	V_B	V_C	V_D	V_{AB}	V_{BC}	V_{CD}	V_{BD}	V_{AD}

Tabla 4: Circuito Mixto 2.

I_T		I_1		I_2		I_s		R_{eq}	
V_A	V_B	V_C	V_D	V_{AB}	V_{BC}	V_{CD}	V_{BD}	V_{AD}	

SIMULACIÓN EN PSPICE

Tabla 5: Circuito Serie.

	R_{eq}	I_T	V_A	V_B	V_C	V_{AB}	V_{BC}	V_{CD}
$V_T = 80 \text{ V}$								
$V_T = 100 \text{ V}$								

Tabla 6: Circuito Serie.

	I_T
Circuito de la Figura 10	
Circuito de la Figura 11	

Tabla 7: Circuito Paralelo.

	R_{eq}	I_T	I_1	I_2	I_3	V_A
$V_T = 50 \text{ V}$						
$V_T = 100 \text{ V}$						

Tabla 8: Circuito Mixto 1.

I_T	I_{R1}	I_{R2}	I_{R3}	I_{R4}	I_{R5}	I_{R6}	R_{eq}	
V_A	V_B	V_C	V_D	V_{AB}	V_{BC}	V_{CD}	V_{BD}	V_{AD}

Tabla 9: Circuito Mixto 2.

I_T		I_1		I_2		I_s		R_{eq}	
V_A	V_B	V_C	V_D	V_{AB}	V_{BC}	V_{CD}	V_{BD}	V_{AD}	

Práctica 4. Análisis del puente de Wheatstone en PSpice.

Esta práctica consta de dos partes. La primera de ellas, **que el alumno deberá tener resuelta por escrito antes de comenzar la clase de laboratorio**, se dedicará al análisis teórico de un circuito propuesto, el puente de Wheatstone, que tiene multitud de aplicaciones electrónicas. La segunda parte, que se desarrollará en el laboratorio, trata sobre el análisis y medida de este circuito mediante PSpice.

Es muy importante leer detenidamente todo el contenido de la práctica antes de acudir a la sesión en el laboratorio, tanto la parte descriptiva como los ejercicios finales que se proponen y que deberán realizarse en el laboratorio.

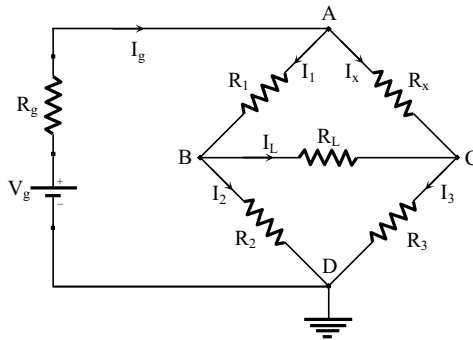
Al finalizar la sesión práctica el alumno deberá entregar por escrito al profesor los ejercicios propuestos como desarrollo teórico junto con la hoja de resultados que se adjunta al final de este boletín.

Se entregará una sola copia por cada puesto de laboratorio, indicando nombres, grupo y puesto (máximo tres personas). Los desarrollos previos son imprescindibles para el resto de tareas a realizar en el laboratorio. Los profesores de la asignatura comprobarán al comienzo de la clase práctica que cada puesto ha realizado el trabajo previo solicitado.

1. Ejemplo. El puente de WheatStone

El ejemplo que vamos a desarrollar a continuación nos servirá como introducción a los métodos y herramientas utilizados para crear circuitos mediante PSpice, a ejecutar las simulaciones y a analizar los resultados obtenidos.

3.1. Estudio previo



DATOS

$V_g = 15 \text{ V}$
$R_g = 1 \ \Omega$
$R_1 = 2 \ \Omega$
$R_2 = 2 \ \Omega$
$R_3 = 2 \ \Omega$
$R_L = 4 \ \Omega$

Figura 1. Puente de Wheatstone.

El puente de Wheatstone está formado por cuatro resistencias (R_1 , R_2 , R_3 y R_x) dispuestas tal y como muestra la figura 2. Variando una de las resistencias (R_1 , R_2 o R_3) y para una R_x desconocida se puede conseguir que la corriente que circula por la resistencia de carga R_L sea nula. Cuando esto ocurre se dice que el puente está *balanceado*.

En primer lugar se propone un estudio previo de un puente de Wheatstone que ha sido conectado a una fuente de tensión continua V_g con resistencia interna R_g . Se pide:

1. Plantear las ecuaciones del circuito a partir de los nodos A, B y C, y las mallas ABDA, ACBA y BCDB.
2. Hallar el valor de R_x para que la corriente que circula por R_L sea nula ($I_L=0$). Expresar el valor de R_x en función de R_1 , R_2 y R_3 . Particularizar después para los datos dados.
3. Hallar los valores de V_A , V_B y V_C con el puente balanceado.
4. Supongamos a partir de ahora que R_x puede tomar cualquier valor. Resolver el circuito por el método de las mallas para encontrar una expresión de la corriente I_L en función de la resistencia R_x . Representarla gráficamente. A medida que R_x aumenta ¿a qué valor tiende I_L ?
5. Hallar el valor de R_x para el que la corriente I_L sea igual a 0,5 A. Calcular, en ese caso, la potencia disipada en la resistencia R_L . Calcular la potencia absorbida por el puente de Wheatstone, la potencia entregada por el generador y el rendimiento del mismo.

3.2.- Simulación con PSpice.

Vamos a verificar los resultados obtenidos en el estudio teórico mediante PSpice y para ello repetiremos algunas indicaciones con las que ya se trabajó en la práctica anterior, con el fin de recordarlas.

Vamos a describir en primer lugar como utilizar la aplicación *OrCAD Capture* para crear el circuito de la figura 1 conocido como puente de WheatStone.


Debemos comenzar creando un nuevo Proyecto en PSpice.



Figura 2. Ventana de Capture. Versión Student.

- 1 Inicializar la aplicación *Capture* desde el menú de inicio de Windows. Seleccionar *PSpice Student* y después *Capture Student*. También puede hacerse doble-click sobre el icono correspondiente en el acceso directo. Deberá abrirse una ventana como la que se muestra en la figura 2.
- 2 Seleccionar la opción *File/new/project*.
- 3 Aparecerá una caja de dialogo con el nombre de *New Project*. Seleccionar *Analog or Mixed-Signal Circuit Wizard*. Introducir un nombre en la caja de texto rotulada con *Name*, por ejemplo *Wheatstone*.
- 4 Todo el trabajo que realicéis deberá guardarse en vuestro disquete. Debéis tener una carpeta en vuestro disquete llamada **practica3**. En la caja de texto *Browse* pulsar y seleccionar la unidad *a:* y dentro de ella la carpeta *practica3* que habéis creado como destino de los resultados. Una nueva caja de dialogo aparece. Seleccionar la opción *create a blank project* y pulsar OK.


Aparecerá una nueva ventana con el nombre de SCHEMATICS dónde podremos dibujar el circuito que queremos analizar. Vamos a comenzar colocando la **fuerce de tensión continua**. Para ello:

- 1 Seleccionamos esta ventana como la ventana activa haciendo click sobre ella.
- 2 Seleccionamos la opción *Place/Part* que nos muestra la caja de dialogo para seleccionar un componente. Pulsando sobre el icono  de la barra de herramientas de la derecha podemos hacer esto mismo de forma más rápida.
- 3 En primer lugar debemos añadir la librería que contiene los componentes que queremos utilizar.
 - 3.1 Pulsamos *Add library*
 - 3.2 Seleccionamos SOURCE.OLB (librería de PSpice) y pulsamos *abrir*.
- 4 En la línea de texto Part introducir VDC (Voltage Direct Current). Pulsar OK.
- 5 Mover el cursor a la posición de la pantalla donde deba colocarse la fuente de tensión. Pulsar una vez el ratón para colocarla. Si se prefiere podéis hacer un zoom sobre la pantalla mediante las teclas i/o (zoom in/zoom out).
- 6 Pulsar sobre el botón derecho del ratón y seleccionar la opción *End Mode* para dejar la fuente de tensión.

Para colocar las resistencias:

- 1 Seleccionar nuevamente la opción *Place/Part*.
- 2 Añadir la librería donde se encuentra este componente de la misma forma forma que se hizo en el caso anterior. El nombre de la librería es ANALOG.OLB
- 3 Seguir el mismo procedimiento que en el caso anterior. El nombre del componente en este caso que hay que escribir en la línea de texto Part es R. Deberéis colocar seis resistencias en las posiciones que se indican en la figura 4. Para girar una resistencia antes de colocarla con el ratón pulsar la tecla R (Rotate)

Para colocar un punto de referencia de tensión cero:

- 1 Pulsar sobre el icono de tierra (GND) en la barra de herramientas  .
- 2 Colocar el elemento de tierra '0' de la librería SOURCE.OLB de forma que hasta el momento el aspecto de la pantalla debe ser el que se muestra en la figura 4.

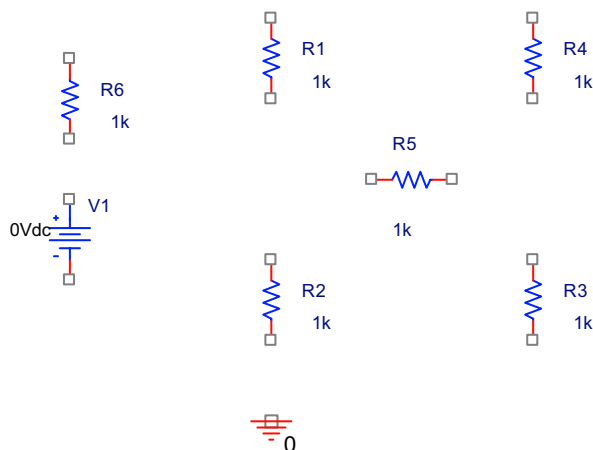



Figura 4. Resultado de colocar los componentes del circuito sobre la ventana de trabajo.

Antes de continuar conectando con cables el circuito vamos a modificar el nombre de la resistencia R6. Vamos a cambiarlo por Rg. Para ello pulsar dos veces sobre el texto R6. Debe abrirse la caja de diálogo *Display Properties* . En la línea *Value* escribir el nuevo nombre Rg. Pulsar OK.

Cambiar también los nombres de R4 y R5 por los de Rx y RL respectivamente.

Nota: las cajas de texto pueden moverse a otras posiciones pulsando una vez con el ratón sobre ellas y desplazándolas por la pantalla.

Para conectar los componentes mediante cables:

- 1 Seleccionar la opción *Place/wire* o bien pulsar en la herramienta  . El cursor cambia a una cruz.
- 2 Pulsar sobre el terminal superior de la resistencia R1. Desplazar el cursor hacia arriba tres puntos aproximadamente, continuar hacia la derecha, pulsar una vez cuando el cursor esté alineado con la resistencia Rx, continuar hacia abajo hasta el terminal superior de Rx, un punto rojo deberá aparecer en ese punto, pulsar el ratón cuando ese punto aparezca.

- 3 Para conectar un componente a un cable comenzar sobre el terminal del componente y dirigirse hacia el cable, cuando el punto rojo aparezca sobre el cable pulsar una vez el ratón.
- 4 Cablear el circuito de la forma en que aparece en la figura 5. No olvidar conectar el terminal de referencia.
- 5 Colocar los rótulos de las resistencias y la fuente de tensión como se muestra en la figura 5.

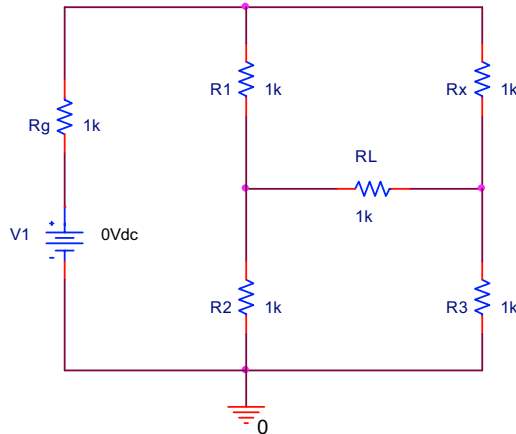



Figura 5. Puente de Wheatstone cableado

Podemos colocar nombres a los nodos mediante la opción *Place/net alias* o pulsando sobre el icono . En la caja de dialogo que aparece teclear el nombre del nodo A y colocarlo sobre él (la esquina inferior izquierda debe contactar con el nodo). Hacer lo mismo con el resto de nodos B,C y D.

Para cambiar el valor de los componentes procederemos:

- 1 Doble click sobre la etiqueta de la fuente de tensión (0 V) para mostrar la caja de dialogo *Display Properties*
- 2 Introducir el valor adecuado en la línea de texto *Value*.
- 3 Hacer lo mismo con las resistencias hasta que todos los valores sean los que se dan en el apartado de datos. El valor de Rx debe ser el obtenido en el apartado 2 del estudio teórico. El aspecto del circuito debe ser el de la figura 6.

Una vez hecho todo esto estamos en condiciones de simular el circuito y conocer el valor de las corrientes por cada rama y las tensiones en cada nodo.

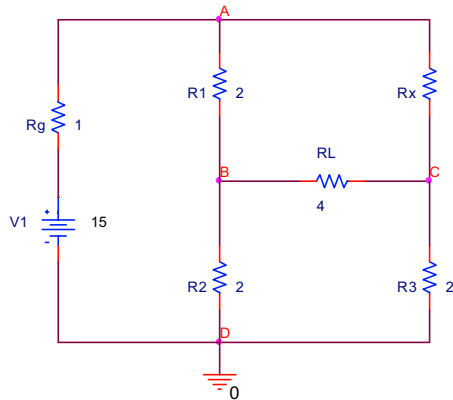

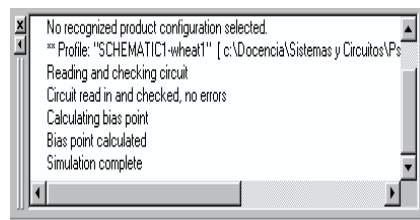




Figura 6. Aspecto final del circuito con los valores propuestos

Simulación


PSpice nos permite realizar diferentes tipos de simulaciones. La más sencilla de ellas (Bias Point) calcula para un circuito de **corriente continua** los valores de tensiones de nodo y corrientes en cada rama (estos valores son constantes). Es lo que vamos a hacer a continuación.

- 1 Una vez nuestro circuito tenga el aspecto de la figura 6. Seleccionamos la opción *PSpice/New Simulation Profile* tras lo que se abrirá una caja de dialogo en la que deberemos introducir un nombre para esta simulación (por ejemplo *wheat1*). En la línea *inherit from* dejaremos el valor *none*. Pulsamos *create*.
- 2 Se abre una nueva caja de dialogo titulada *Simulation Settings*. Únicamente elegimos el tipo de análisis que nos interesa de la línea desplegable *Analysis type*. Seleccionamos *Bias Point* y pulsamos *Aceptar*.
- 3 Hasta el momento el programa no ha efectuado ningún cálculo pero está preparado para comenzar a hacerlo en el momento en que activemos la opción *PSpice/run* o bien pulsemos sobre el icono .
- 4 Una vez hagamos esto aparecerá una ventana con el título *SCHEMATICS-wheat1* en la que podremos seguir la evolución del proceso de simulación. En la parte inferior izquierda de esta ventana podemos seguir el estado de nuestra simulación. Si todo ha ido correctamente en la última línea podremos leer *Simulation Complete*, lo que significa que la simulación se ha completado con éxito.



- 5 Si dentro de esta ventana SCHEMATICS seleccionamos la opción *View/Output file* en la parte principal de la ventana aparece el fichero de texto de salida que genera el proceso de simulación. No vamos a entrar en detalle en el significado de todas las líneas de este fichero, tan solo podéis echar un vistazo a las últimas líneas del mismo en el que aparecen listadas las tensiones y corrientes del circuito tanto para las resistencias como para la fuente. Además también se calcula la potencia total disipada.
- 6 La forma más rápida e intuitiva de obtener los resultados de la simulación *Bias Point* es en la ventana *Orcad Capture* pulsando sobre el icono  para la tensión e  para la corriente, o bien mediante las opciones *PSpice/Bias Point/Enable Bias Voltage Display* para la tensión o *PSpice/Bias Point/Enable Bias Current Display* para la corriente. Si lo hacéis los valores de tensión se muestran directamente sobre cada nodo y los de corriente aparecen también junto a cada componente (junto al nodo por el que entra la corriente).
- 7 Pulsar por tanto sobre esos dos iconos. Si vuestros cálculos para R_x han sido correctos podréis comprobar que la corriente I_L debe ser nula. Comprobar los valores de las tensiones en los puntos A, B y C con el puente balanceado. Rellenar la tabla.

R_x	I_L	V_A	V_B	V_C

- 8 Guardar el trabajo realizado hasta ahora pulsando sobre el icono .

Vamos a comprobar a continuación la exactitud de la función obtenida en el apartado 4 del estudio teórico para la corriente I_L en función de R_x . Lo que haremos será repetir la simulación para distintos valores de R_x y representaremos sobre una gráfica el valor de I_L en cada caso.

$R_x (\Omega)$	$I_L (A)$
0	
1	
2	
5	
10	
15	
30	
50	
100	




PSpice podría haber hecho este trabajo por nosotros. Una posibilidad que nos ofrece PSpice es la de introducir parámetros en las simulaciones y obtener valores para variables en función de estos parámetros. Vamos a hacer esto. Nuestro parámetro será R_x y la variable que nos interesa analizar será I_L .

- 1 En primer lugar volvemos sobre la ventana de diseño. Seleccionamos la herramienta de colocar componentes y elegimos el componente PARAM. Esto no es un componente propiamente dicho sino una herramienta que nos va a permitir declarar variables globales. Situamos esta herramienta junto al circuito. Aparecerá el nombre de Parameters.
- 2 Para declarar un parámetro global pulsamos dos veces sobre Parameters. Se abrirá una ventana de propiedades. En esa ventana pulsamos sobre la *opción New column*. Introducimos un nombre para la variable (en nuestro caso Rx), un valor por defecto (2Ω) y pulsamos OK.
- 3 Antes de continuar nos situamos sobre la celda justo debajo de la columna de Rx, donde aparecerá el valor de 2Ω . Pulsamos el botón derecho del ratón y seleccionamos la *opción display*. Seleccionamos *Name and value* y pulsamos OK.
- 4 Para terminar pulsamos *apply* y cerramos la ventana de propiedades.
- 5 La variable Rx ha quedado definida como parámetro global. Su nombre y valor deben aparecer debajo de la etiqueta de Parameters.

Una vez hemos definido un parámetro global vamos a utilizarlo en una simulación.

- 1 Cambiamos el valor de la resistencia Rx. El nuevo valor será $\{R_x\}$. Con esta sintaxis PSpice utilizará el valor asignado al parámetro global Rx.
- 2 Seleccionamos de nuevo la *opción New Profile Simulation*. Damos el nombre wheat2 y seleccionamos wheat1 en la *opción inherit from*. A continuación elegimos *DC sweep* como tipo de análisis y seleccionamos como variable de barrido el parámetro global Rx. Pinchamos por tanto en la *opción Global Parameter* y en la casilla *parameter name* introducimos Rx.
- 3 Para terminar introducimos los valores inicial y final de Rx ($1 \Omega - 250 \Omega$) y el incremento entre muestras (1). Pulsamos *aceptar* y listo.
- 4 Todo esta preparado para lanzar el proceso de simulación mediante la tecla *run*.

Si todo ha ido bien deberá haber aparecido dentro de la ventana SCHEMATICS una nueva ventana gráfica en cuyo eje horizontal se representa el valor de Rx desde 0 a 250Ω como habíamos seleccionado. Sin embargo no se representa nada sobre la gráfica. Esto es así porque todavía no hemos dicho nada a PSpice sobre qué valores representar. Esto vamos a hacerlo desde la ventana capture.

- 1 Volver a la ventana de captura y seleccionar la opción *PSpice/marker/current into pin* o bien pulsar sobre el icono .
- 2 Para representar la corriente con el mismo sentido en que aparece en el enunciado del problema deberéis pinchar la sonda que aparece junto al cursor en el terminal de RL por el que entra la corriente (en este caso el de la izquierda). Una vez hayáis hecho esto la sonda queda sobre ese punto. Salir mediante el botón derecho y la opción *End mode*.
- 3 Si ahora volvéis a la ventana gráfica la corriente I_L debe aparecer dibujada sobre la gráfica. Guardar los datos mediante *File/Append Waveform*.
- 4 Seleccionar la opción *Trace/cursor/display* y rellenar la siguiente tabla.

$R_x (\Omega)$	$I_L (A)$
0	
1	
2	
5	
10	
15	
30	
50	
100	
	0,5

- 5 Deducir de la gráfica el valor de R_x necesario para que la corriente I_L sea de 0,5 A. Comprobar que este valor coincide con el obtenido en el apartado 5 del estudio teórico. Escribirlo en la tabla anterior.

HOJA DE ENTREGA DE RESULTADOS. **Práctica 4.**

Grupo: _____ Nombre: _____

Tabla 1. Puente de Wheatstone balanceado

	R_x	I_L	V_A	V_B	V_C
Teórico		0			
PSpice		0			

Tabla 2. Corriente I_L en función de R_x .

$R_x (\Omega)$	I_L (A) (Bias point)	I_L (A) Gráfica
0		
1		
2		
5		
10		
15		
30		
50		
100		

I_L	R_x
0,5	



Práctica 5. Teoremas 1.

Esta práctica consta de dos partes. La primera de ellas, **que el alumno deberá tener resuelta por escrito antes de comenzar la clase de laboratorio**, se dedicará al análisis teórico de algunos circuitos propuestos. La segunda parte, que se desarrollará en el laboratorio, trata sobre el montaje y medida de estos circuitos.

Es muy importante leer detenidamente todo el contenido de la práctica antes de acudir a la sesión en el laboratorio, tanto la parte descriptiva como los ejercicios finales que se proponen y que deberán realizarse en el laboratorio.

Al finalizar la sesión práctica el alumno deberá entregar por escrito al profesor los ejercicios propuestos como desarrollo teórico junto con la hoja de resultados que se adjunta al final de este boletín.

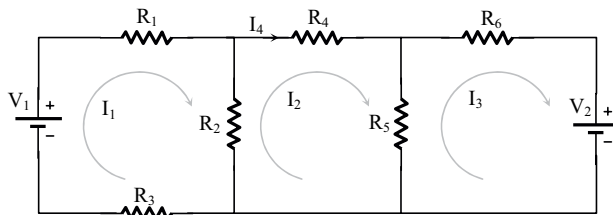
Se entregará una sola copia por cada puesto de laboratorio, indicando nombres, grupo y puesto (máximo tres personas). Los desarrollos previos son imprescindibles para el resto de tareas a realizar en el laboratorio. Los profesores de la asignatura comprobarán al comienzo de la clase práctica que cada puesto ha realizado el trabajo previo solicitado.

1.- Teorema de superposición

La respuesta tanto en tensión como en intensidad que se produce en un circuito como consecuencia de diversas excitaciones puede considerarse como la suma de las respuestas individuales, que se producen en esa parte del circuito; habiéndose obtenido cada respuesta individual dejando una sola excitación y anulando las restantes.

1.1. Estudio teórico.

Dado el circuito siguiente y aplicando el principio de superposición calcular teóricamente la corriente I_4 que circula por la resistencia R_4 .



Datos
 $V_1 = 12 \text{ V}$
 $V_2 = 7 \text{ V}$
 $R_1 = R_5 = 1 \text{ k}\Omega$
 $R_2 = 5,6 \text{ k}\Omega$
 $R_3 = 220 \Omega$
 $R_4 = R_6 = 10 \text{ k}\Omega$

1.2. Desarrollo práctico.

1. Montar sobre la placa de pruebas el circuito propuesto.
2. Aplicando el teorema de superposición, anular V_2 y medir la tensión en R_4 . Calcular I'_4 a partir de la ley de Ohm.
3. Anular V_1 y medir I''_4 de la misma forma.
4. Sumar las dos intensidades anteriores para determinar el valor de I_4 .
5. Rellenar adecuadamente los datos de la tabla.

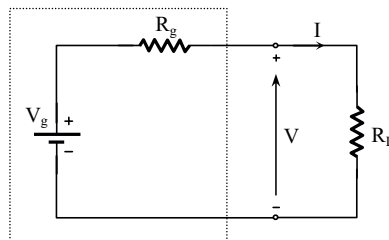
	Teórico	Práctico
I'_4		
I''_4		
$I_4 = I'_4 + I''_4$		

2.- Teorema de la máxima transferencia de potencia.

Un generador transfiere la máxima potencia a una carga cuando la resistencia de ésta es igual a la resistencia interna del generador.

2.1. Conceptos teóricos.

Vamos a verificar el enunciado de este teorema. Para ello montaremos el circuito de la siguiente figura:



Teóricamente hemos visto que:

$$I = \frac{V_g}{R_g + R_L} \quad V = R_L \frac{V_g}{R_g + R_L};$$

la potencia suministrada a R_L :

$$P = VI = \frac{R_L V_g^2}{(R_g + R_L)^2}$$

para $R_L = 0$ (cortocircuito) y para $R_L = \infty$ (circuito abierto) $P = 0$, pero entre estos límites la potencia suministrada es siempre finita y positiva, calculándose su valor máximo sin más que derivar la expresión de potencia con respecto a la variable R_L ; esto es:

$$\frac{dP}{dR_L} = V_g^2 \frac{R_g - R_L}{(R_g + R_L)^3}$$

expresión que se anula para $R_L = R_g$ y pasa de valor positivo a negativo. Por lo tanto la potencia máxima entregada a R_L tendrá como expresión:

$$P_{max} = \frac{V_g^2}{4R_g}$$

en estas condiciones el rendimiento del generador, o razón entre la potencia recibida por la carga y la suministrada por la fuente, valdrá:

$$\eta = \frac{VI}{V_g I} = \frac{R_L}{R_g + R_L}$$

siendo para $R_L = R_g$, $\eta = 0,5$.

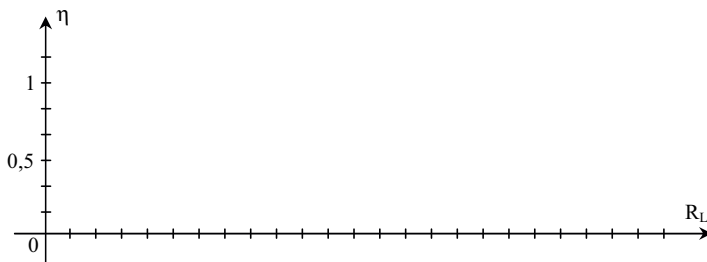
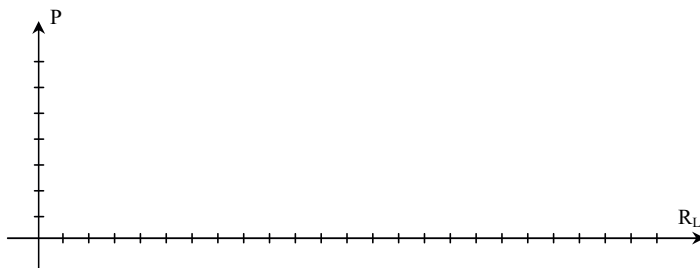
2.2. Desarrollo práctico.

Realizar el montaje de la figura, en el cual V_g representa la tensión de la fuente; R_g la resistencia interna del generador y R_L la resistencia de carga.

- Tomar una $R_g = 1 \text{ k}\Omega$.
- Ajustar la tensión de la fuente a $V_g = 10 \text{ V}$.
- Completar la tabla siguiente, con el fin de ver como varía la potencia transferida y el rendimiento al variar R_L . Tomaremos tres valores por debajo y otros tres por encima del valor que hace máxima la transferencia de potencia. Medir en cada caso la tensión en bornes de la carga V , y calcular la potencia de transferencia y el rendimiento.

$R_L (\Omega)$	V (V)	Potencia transferida		Rendimiento	
		$P_{teor} = \frac{R_L V_g^2}{(R_g + R_L)^2}$	$P_{pract} = \frac{V^2}{R_L}$	$\eta_{teor} = \frac{R_L}{R_g + R_L}$	$\eta_{pract} = \frac{V}{V_g}$
1000					

3.- Representar la potencia transferida P y el rendimiento η en función de R_L .



3.- Teoremas de Thevenin y Norton

Teorema de Thevenin: Todo circuito lineal activo con dos terminales accesibles, puede sustituirse desde el punto de vista de su comportamiento externo por un circuito equivalente formado por una fuente ideal de tensión en serie con una resistencia. La tensión de esta fuente es igual a la diferencia de potencial existente entre los terminales abiertos del circuito original y la resistencia de Thevenin la resistencia equivalente.

Teorema de Norton: Todo circuito lineal activo con dos terminales accesibles, puede sustituirse desde el punto de vista de su comportamiento externo por un circuito equivalente formado por una fuente ideal de intensidad en paralelo con una resistencia. Esta fuente de intensidad de Norton tiene el valor de la corriente que circularía entre los dos terminales cuando éstos se cortocircuitan. La resistencia de Norton coincide con la resistencia de entrada del circuito vista desde los terminales accesibles.

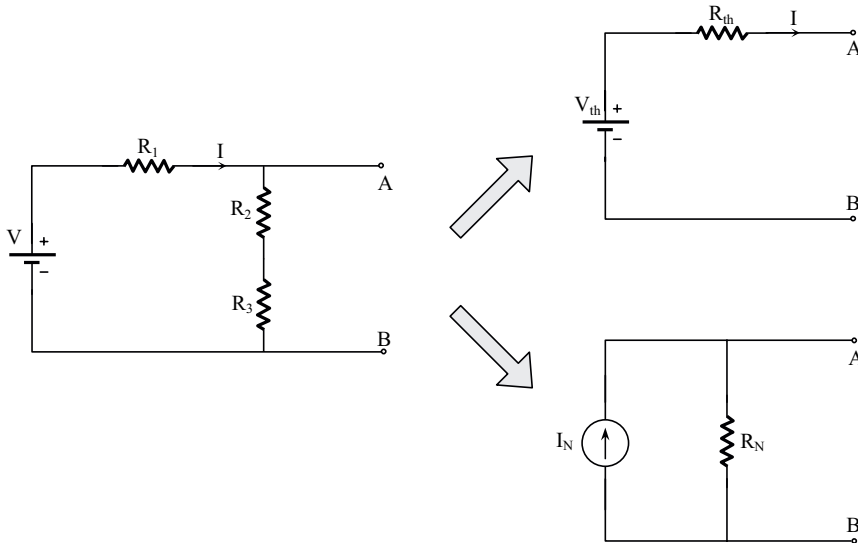
En el circuito representado en la figura en su equivalente de Thevenin la V_{th} será:

$$V_{th} = V_{AB} = I(R_2 + R_3)$$

mientras que para el circuito equivalente de Norton la I_N valdrá:

$$I_N = \frac{V}{R_1}$$

en ambos casos la resistencia equivalente será la que se vea desde los terminales A y B:



$$R_{th} = R_N = R_{AB} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Calcular el equivalente de Thevenin del circuito que aparece en el apartado 3.1 con los siguientes valores: $V=10V$; $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_3 = 5,6 \text{ k}\Omega$;

Determinar teóricamente el valor de la tensión que tendrá una resistencia de valor $R = 1,22 \text{ k}\Omega$ colocada entre los terminales A y B del circuito.

3.2.- Desarrollo práctico.

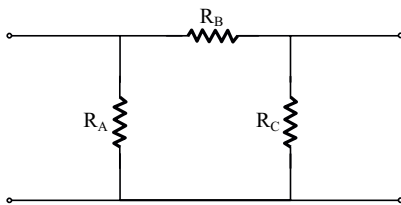
Montar el circuito equivalente de Thevenin. Colocar la resistencia entre los extremos A y B, comprobar que el valor de tensión en la resistencia es el obtenido teóricamente.

V_R teórica	V_R medida

4.- Teorema de Kenelly

Todo circuito cuyas resistencias estén conectadas en triángulo puede sustituirse por una conexión equivalente en estrella y viceversa.

Para ello hay que tener en cuenta las siguientes relaciones:

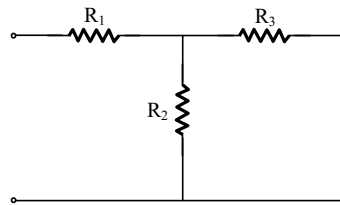


Transformación de Y a Δ

$$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2}$$

$$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1}$$



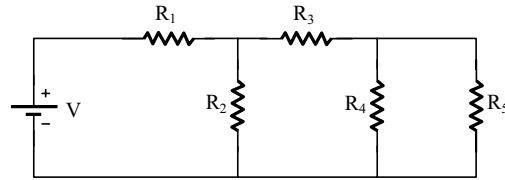
Transformación de Δ a Y

$$R_1 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_2 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_3 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

Calcular teóricamente la tensión y corriente que circulará por la resistencia R_5 del circuito de la figura.



Datos

$V = 10 \text{ V}$
$R1 = 100 \ \Omega$
$R2 = 1 \text{ k}\Omega$
$R3 = 10 \text{ k}\Omega$
$R4 = 39 \text{ k}\Omega$
$R5 = 5,6 \text{ k}\Omega$

Con objeto de verificar el teorema de Kenelly, transformar las resistencias R_2 , R_3 y R_4 por su equivalente en estrella.

Obtener teóricamente el valor de la tensión en R_5 y la corriente una vez hecha la transformación.

Desarrollo práctico

Montar sobre la placa de pruebas el circuito propuesto en la figura anterior. Medir con el multímetro el valor de tensión en la resistencia R_5 . Contrastar este resultado con el obtenido teóricamente.

V_{R_5} teórica	V_{R_5} práctica

Montar a continuación el circuito como resultado de hacer la transformación en estrella eligiendo los valores adecuados entre las resistencias disponibles en el laboratorio. Si no existe el valor exacto de la resistencia necesaria éste puede lograrse mediante asociaciones en serie y/o paralelo de las disponibles.

Rellenar la tabla:

V_{R_5} teórica	V_{R_5} práctica

HOJA DE ENTREGA DE RESULTADOS. **Práctica 5.**

Grupo: _____ Nombre: _____

Tabla 1. Teorema de superposición.

	Teórico	Práctico
I'_4		
I''_4		
$I_4 = I'_4 + I''_4$		

Tabla 2. Teorema de la máxima transferencia de potencia.

$R_L (\Omega)$	V (V)	Potencia transferida		Rendimiento	
		$P_{teor} = \frac{R_L V_g^2}{(R_s + R_L)^2}$	$P_{pract} = \frac{V^2}{R_L}$	$\eta_{teor} = \frac{R_L}{R_s + R_L}$	$\eta_{pract} = \frac{V}{V_g}$
1000					

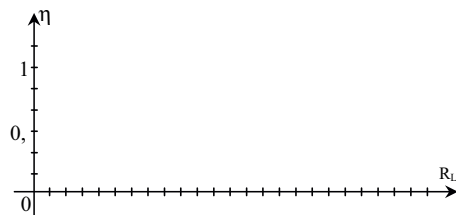
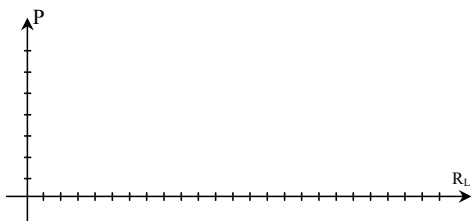


Tabla 3. Teorema de Thevenin

V_R teórica	V_R medida

Tabla 4. Teorema de Kenelly

V_{R5} teórica (Δ)	V_{R5} práctica (Δ)
V_{R5} teórica (Y)	V_{R5} práctica (Y)

Práctica 6. Teoremas en PSpice.

1.- Teorema de superposición

El teorema de superposición asegura que la tensión y la intensidad que circula por un circuito que contiene varias fuentes de excitación pueden considerarse como la suma de las respuestas individuales de cada excitación por separado, anulando las restantes.

Para anular una fuente de tensión ideal hay que sustituirla por un cortocircuito, que asegura que la tensión entre los terminales de la fuente haya una tensión nula sin imponer ninguna restricción. Para anular una fuente de intensidad ideal hay que sustituirla por un circuito abierto, ya que la intensidad entre los nodos de la fuente de intensidad es cero.

1.1. Estudio teórico.

Dado el siguiente circuito calcular la caída de tensión en la resistencia R_3 (V_{R3}) y la intensidad I_{R3} mediante el teorema de superposición:

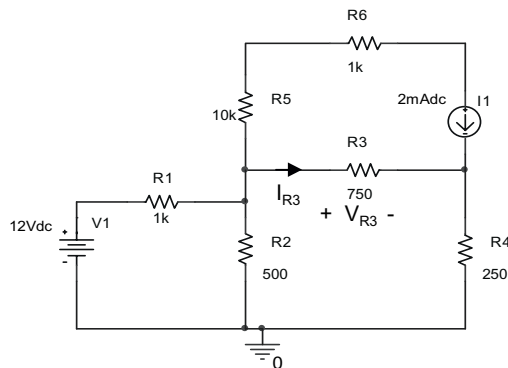


Figura 1. Teorema de Superposición

	Teórico
V'_{R3}	
I'_{R3}	
P'_{R3}	
V''_{R3}	
I''_{R3}	
P''_{R3}	
$V_{R3} = V'_{R3} + V''_{R3}$	
$I_{R3} = I'_{R3} + I''_{R3}$	

Tabla 1. Resultados del Teorema de superposición (Estudio teórico)

1.2. Simulación.

1. Montar el circuito de la Figura 1 en PSpice y obtener con las sondas del programa la tensión en R_3 (V_{R3}) y la intensidad I_{R3} . Calcular la potencia entregada a R_3 . (P_{R3})
2. Aplicando el teorema de superposición, construir un nuevo circuito donde se anule V_1 y obtener con las sondas la tensión en R_3 (V'_{R3}) y la intensidad I'_{R3} . Calcular la potencia entregada a R_3 . (P'_{R3})
3. Aplicando el teorema de superposición, construir un nuevo circuito donde se anule I_1 y obtener la tensión en R_3 (V''_{R3}) y la intensidad I''_{R3} . Calcular la potencia entregada a R_3 . (P''_{R3})
4. Sumar las dos tensiones y comprobar que el resultado coincide con la simulación del circuito con ambas fuentes activadas. Comprobar que la potencia entregada a R_3 no coincide con la suma de las potencias.

		PSpice
Apartado 1	V_{R3}	
	I_{R3}	
	P_{R3}	
Apartado 2	V'_{R3}	
	I'_{R3}	
	P''_{R3}	
Apartado 3	V''_{R3}	
	I''_{R3}	
	P'''_{R3}	
Apartado 4	$V_{R3} = V'_{R3} + V''_{R3}$	
	$I_{R3} = I'_{R3} + I''_{R3}$	
	$P_{R3} < P'_{R3} + P''_{R3}$	

Tabla 2. Resultados del teorema de superposición (Pspice)

2.- Teorema de la máxima transferencia de potencia.

Un generador transfiere la máxima potencia a una carga cuando la resistencia de ésta es igual a la resistencia interna del generador.

2.1. Estudio teórico.

Vamos a verificar el enunciado de este teorema. Para ello consideramos el circuito de la siguiente figura:

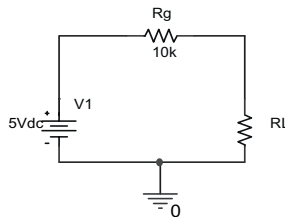


Figura 2. Circuito para obtener la máxima transferencia de potencia.

Realizar teóricamente todos los pasos para obtener el valor de la resistencia de carga R_L , considerando la potencia suministrada a dicha resistencia, realizando la derivada e igualándola a cero. Indicar también la potencia máxima que se consigue.

R_L	P_{RL}

Tabla 3. Teorema de máxima transferencia de potencia (Estudio Teórico)

2.2. Simulación.

Construir el circuito de la Figura 2. Para que R_L sea considerada por PSpice como global es necesario definirlo a través de *Place/Part PARAM*. Situamos este componente a un lado del circuito. Pulsamos dos veces sobre él y se abre una ventana de propiedades. Seleccionamos *Opción New Column*. Introducimos el nombre de la variable (en este caso RL), un valor por defecto, por ejemplo 1Ω y pulsamos OK.

Justo debajo de la columna RL aparecerá el valor 1Ω . Pulsamos el botón derecho del ratón y seleccionamos la opción *display*. Seleccionamos *Name and Value* y pulsamos OK. Finalmente pulsamos *apply* y cerramos la ventana de propiedades.

De esta forma ha quedado definida la variable RL como variable global. A continuación es necesario cambiar el valor de la resistencia RL por $\{RL\}$ y seleccionamos un nuevo perfil de simulación, *New Profile Simulation*. Elegimos DC Sweep como tipo de análisis y seleccionamos como variable de barrido el parámetro global RL. Pinchamos por tanto en la opción *global parameter* y en la casilla *parameter name* introducimos RL. Para terminar introducimos los valores inicial y final de RL ($1\Omega - 50K\Omega$) y el incremento entre muestras $1K\Omega$. Pulsamos *aceptar* y finalmente *run*.

Seleccionamos las sondas de tensión y corriente. La sonda de tensión debe indicar la tensión que cae en la resistencia RL y la sonda de corriente la intensidad que circula por el circuito (Cuidado con el sentido – lo estudiamos en práctica 2-2).

En la ventana Schematic habrá que dibujar tres gráficas diferentes. En una la tensión que indica la sonda, en otra la intensidad y en la última habrá que representar la multiplicación de ambas para representar la potencia consumida por la resistencia RL. Para ir obteniendo las gráficas será necesario utilizar las opciones: *Plot - Add Plot To Window* y *Trace - Add Trace*. En la gráfica de la potencia hay que buscar el máximo por medio de los cursores y anotar el valor de la RL a la cual corresponde y el valor de potencia, rellenado la siguiente tabla.

R_L	P_{RL}

Tabla 4. Teorema de la máxima transferencia de potencia (PSpice)

3.- Teorema de Thevenin

Teorema de Thevenin: Todo circuito lineal activo con dos terminales accesibles, puede sustituirse desde el punto de vista de su comportamiento externo por un circuito equivalente formado por una fuente ideal de tensión en serie con una resistencia. La tensión de esta fuente es igual a la diferencia de potencial existente entre los terminales abiertos del circuito original y la resistencia de Thevenin la resistencia equivalente.

3.1.- Estudio Teórico.

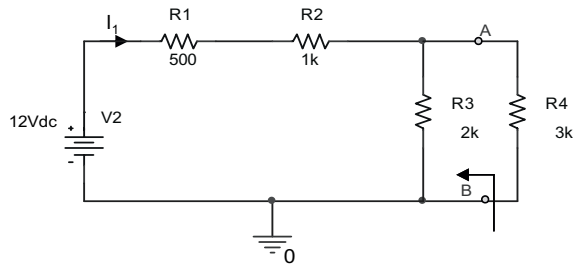


Figura 3: Equivalente de Thevenin

- 1.- En el circuito de la Figura 3 hallar I_1 y la caída de tensión entre A y B.
- 2.- Hallar el equivalente de Thevenin entre los terminales A y B. No considerar la resistencia R_4 para hacer el equivalente. Rellenar la Tabla 5 con los valores de la fuente de tensión equivalente y la resistencia equivalente de Thevenin.
- 3.- Colocar entre los terminales A y B del circuito equivalente de Thevenin la resistencia R_4 y hallar la intensidad que circula por el circuito I'_1 y la caída de tensión entre los bornes de R_4 , es decir entre A y B.

Apartado 1	I_1	V_{AB}
Apartado 2	V_{th}	R_{th}
Apartado 3	I'_1	V_{AB}

Tabla 5. Equivalente de Thevenin (Estudio Teórico)

3.2.- Desarrollo práctico.

- 1.- Montar el circuito de la Figura 3 en PSpice y obtener la caída de tensión entre los terminales A y B y la intensidad I_1 .
- 2.- Montar el equivalente de Thevenin hallado en el estudio teórico junto con la resistencia R_4 y obtener la caída de tensión y la intensidad I_1 . Comprobar que los resultados coinciden con los del estudio teórico.

	I_1	V_{AB}
Apartado 1		
Apartado 2		

Tabla 6: Teorema de Thevenin (PSpice)

4.- Teorema de Transformación de Fuentes

Podemos intercambiar una fuente de tensión por una de intensidad y viceversa con tal de que sean equivalentes, es decir, que cada fuente produzca exactamente la misma tensión y corriente para cualquier carga que se conecte entre sus terminales.

4.1.- Estudio Teórico.

Calcular teóricamente la tensión entre A y B, es decir, la caída de tensión en la resistencia R_4 de la Figura 4 aplicando transformación de fuentes en el paralelo de la fuente de intensidad con la resistencia R_5 . Rellenar la t

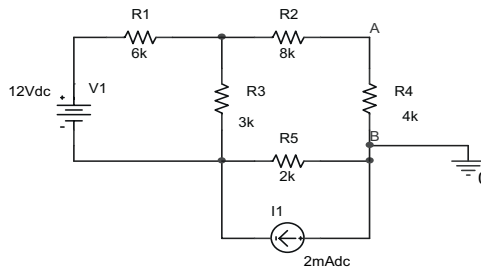


Figura 4: Teorema de transformación de fuentes

V_{R4} teórica

Tabla 7. Transformación de fuentes (Estudio Teórico)

4.2.- Desarrollo práctico.

- 1.- Dibujar en PSpice el circuito de la Figura 4 y hallar la tensión entre A y B.
- 2.- Dibujar el circuito equivalente hallado en el estudio teórico, donde se han sustituido la fuente de intensidad y la resistencia R_5 por una fuente de tensión y una resistencia serie. Hallar de nuevo la caída de tensión en bornes de R_4 . Contrastar los resultados con los obtenidos teóricamente.

	V_{R4}
Apartado 1	
Apartado 2	

Tabla 8. Transformación de fuente (PSpice)

HOJA DE ENTREGA DE RESULTADOS. Práctica 6.

Grupo: _____ Nombre: _____

Teorema de superposición

	Teórico
V'_{R3}	
I'_{R3}	
P'_{R3}	
V''_{R3}	
I''_{R3}	
P''_{R3}	
$V_{R3} = V'_{R3} + V''_{R3}$	
$I_{R3} = I'_{R3} + I''_{R3}$	

Tabla 9. Resultados del Teorema de superposición (Estudio teórico)

		PSpice
Apartado 1	V_{R3}	
	I_{R3}	
	P_{R3}	
Apartado 2	V'_{R3}	
	I'_{R3}	
	P''_{R3}	
Apartado 3	V''_{R3}	
	I''_{R3}	
	P''_{R3}	
Apartado 4	$V_{R3} = V'_{R3} + V''_{R3}$	
	$I_{R3} = I'_{R3} + I''_{R3}$	
	$P_{R3} \neq P'_{R3} + P''_{R3}$	

Tabla 10. Resultados del teorema de superposición (Pspice)

Teorema de la máxima transferencia de potencia

R_L	P_{RL}

Tabla 11. Teorema de máxima transferencia de potencia (Estudio Teórico)

R_L	P_{RL}

Tabla 12. Teorema de la máxima transferencia de potencia (PSpice)

Teorema de Thevenin

Apartado 1	I_1	V_{AB}
Apartado 2	V_{th}	R_{th}
Apartado 3	I'_1	V_{AB}

Tabla 13. Equivalente de Thevenin (Estudio Teórico)

	I_1	V_{AB}
Apartado 1		
Apartado 2		

Tabla 14: Teorema de Thevenin (PSpice)

Teorema de transformación de fuentes

V_{R4} teórica

Tabla 15. Transformación de fuentes (Estudio Teórico)

	V_{R4}
Apartado 1	
Apartado 2	

Tabla 16. Transformación de fuente (PSpice)

Práctica 7. Análisis transitorio en circuitos de primer orden.

La formulación de las ecuaciones diferenciales para los circuitos simples RC, RL y RLC proporciona una buena idea de su comportamiento. La facultad que tienen estos circuitos de almacenar energía da lugar a respuestas exponenciales y oscilantes que encuentran gran cantidad de aplicaciones en múltiples circuitos que van desde temporizadores hasta filtros.

En esta práctica vamos a tratar circuitos de primer orden para establecer una relación entre su representación matemática, que es una ecuación diferencial, y el comportamiento físico del circuito. Prestaremos especial atención a la respuesta del circuito a la función escalón. La función escalón es tal que para $t < 0$ su valor es nulo y para $t > 0$ es igual a la unidad.

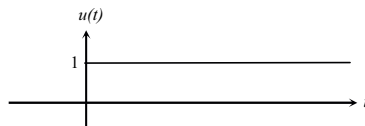


Figura 1. Función escalón

El análisis transitorio de circuitos más sencillo son los que contienen un solo condensador o una sola bobina. Hablaremos en ese caso de circuitos de primer orden.

1.- Condensador.

Un condensador es un componente electrónico capaz de almacenar energía entre sus placas. La forma más sencilla de este dispositivo está formada por dos placas conductoras paralelas separadas por un aislador o dieléctrico. En la figura 2 se muestra un condensador plano así como algunos ejemplos de estos dispositivos reales.

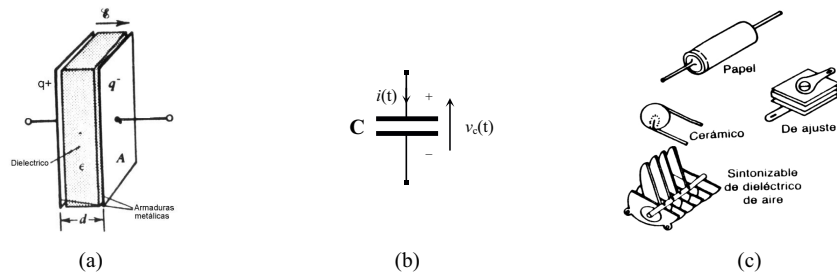


Figura 2. (a) Condensador plano. (b) Símbolo convencional. (c) Dispositivos reales

La electrostática demuestra que dos cargas de igual valor absoluto pero de signos contrarios q^+ y q^- , una en cada placa o armadura y separadas una distancia d , dan lugar a un campo eléctrico E entre las armaduras. La carga almacenada en un condensador queda relacionada con la tensión entre sus armaduras mediante la expresión:

$$q(t) = v_c(t) \cdot C$$

donde C es la capacidad del condensador medida en Faradios¹.

Por un condensador tras un periodo transitorio, en corriente continua no debe circular ninguna intensidad. Se comporta por tanto como un circuito abierto en corriente continua. De acuerdo con la figura 2.b, la ecuación de definición del condensador es en todo momento:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

2.- Bobina.

La bobina es un elemento que genera un campo magnético cuando circula una corriente a través de él. Si se devana un hilo de la forma en que se indica en la figura 3.a, las líneas de flujo se concentran a lo largo del eje de la bobina. Cuanto mayor sea el número N de espiras mayor será el flujo. En la figura 3 además de una bobina simple se muestra su símbolo convencional y ejemplos de bobinas utilizadas en la práctica.

¹ La unidad de capacidad recibe su nombre del físico británico Michael Faraday (1791-1867). Faraday era un ayudante del Royal Institute en Londres. Allí descubrió que un campo magnético variable podía producir una corriente eléctrica. Sus investigaciones condujeron al desarrollo de los generadores electromecánicos y, posteriormente, al telégrafo.

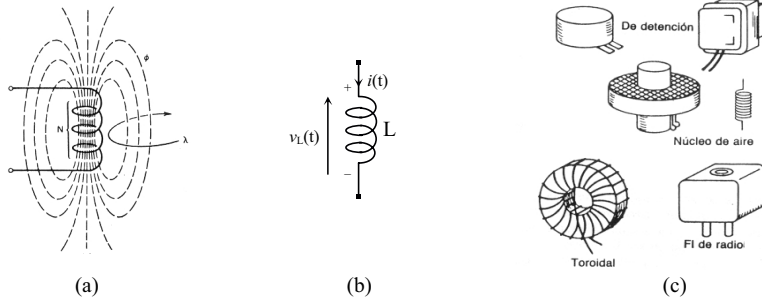


Figura 3. (a) Flujo de campo creado por una bobina. (b) Símbolo. (c) Bobinas reales

Toda bobina viene caracterizada por su coeficiente de autoinducción o inductancia L que se expresa en Henrios².

En una bobina, tras un periodo transitorio, en corriente continua, la diferencia de tensión entre sus bornes es cero. En corriente continua se comporta como un cortocircuito. La ecuación de definición de la bobina es, de acuerdo con la figura 3.b:

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

3.- Carga y descarga de un condensador.

El conocimiento de las ecuaciones de definición de estos elementos nos permite calcular respuestas en el dominio del tiempo, para circuitos que hagan uso de ellos, mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales que se plantean.

Sea el circuito de la figura 4, formado por una fuente de tensión, una resistencia y un condensador de capacidad C , conectados en serie.

² La unidad de inductancia recibe su nombre del científico e inventor norteamericano Joseph Henry. Éste y Faraday descubrieron, independientemente, de manera casi simultánea, la ley de inducción magnética. La bobina es la representación circuital de la inducción magnética y a su unidad se le dio el nombre de Henry en vez de Faraday por razones que se han perdido en el transcurso del tiempo.

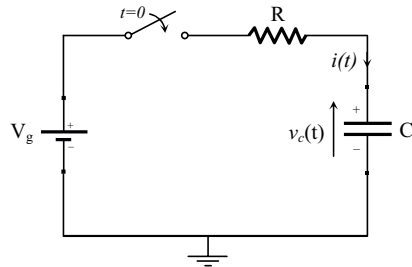


Figura 4. Circuito RC.

Si el condensador está inicialmente descargado, $v_c(t=0^+) = 0 \text{ V}$ es la condición inicial a aplicar para resolver la ecuación diferencial. Al cerrar el interruptor y puesto que $v_c(t=0^+) = 0 \text{ V}$ tendremos $i(t=0^+) = V_g/R$ como condición inicial para la corriente.

Nuestro objetivo es ver de qué forma evolucionan la corriente y la tensión en el condensador en función del tiempo a partir del instante en que se cierra el interruptor. La ecuación diferencial que se plantea es:

$$V_g = Ri(t) + v_c(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

derivando respecto a t

$$-RC \frac{di(t)}{dt} = i(t)$$

cuya solución aplicando la condición inicial es:

$$i(t) = \frac{V_g}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad v_c(t) = V_g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

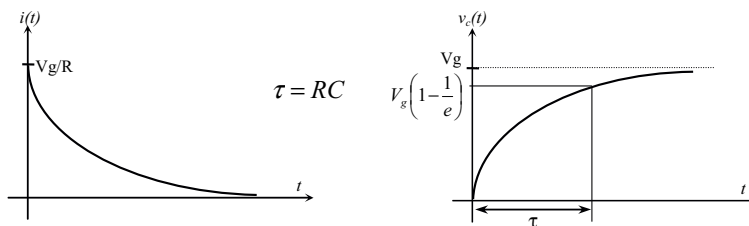


Figura 5. Evolución de la corriente y la tensión en el condensador con el tiempo.

Teniendo en cuenta que la carga almacenada en un condensador está relacionada directamente con la tensión entre sus placas de la forma:

$$q(t) = C \cdot v(t)$$

la expresión de la carga almacenada en el condensador en función del tiempo sería:

$$q(t) = Q \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

en la que C es la capacidad del condensador y Q representa la carga máxima del condensador, en este caso: $Q = C \cdot V_g$. Observar que el producto $R \cdot C$ es igual al tiempo necesario para que la carga del condensador aumente hasta el 63 % de su valor final. Lo que quiere decir que ha adquirido el 63 % de dicha carga Q . A dicho tiempo se le denomina constante de tiempo del circuito y se representa con la letra τ .

Si ahora partimos de un condensador inicialmente cargado con una tensión entre sus placas o armaduras de V_o voltios y lo conectamos a una resistencia en serie, el condensador se descargará a través de ésta (figura 6).

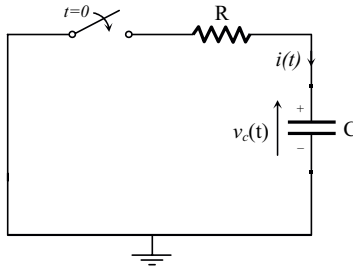


Figura 6. Circuito RC. Descarga del condensador

Resolviendo de nuevo la ecuación diferencial del circuito obtenemos en este caso:

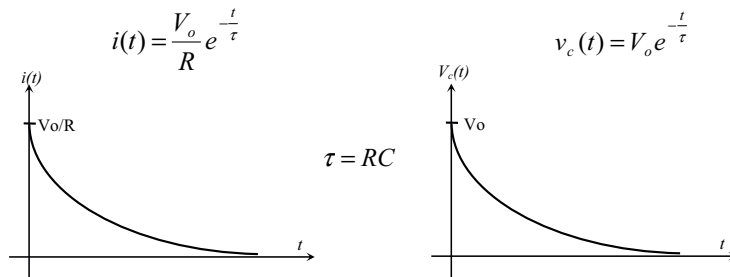


Figura 7. Evolución de la corriente y la tensión en el condensador con el tiempo.

4.- Circuito RL.

Para un circuito RL como el que se representa en la figura 8, la forma de encontrar $i(t)$ y $v_L(t)$ es similar. La única salvedad consiste en aplicar la condición inicial apropiada que en este caso será $i_L(t=0^+) = 0$, o lo que es lo mismo, $v_L(t=0^+) = V_g$.

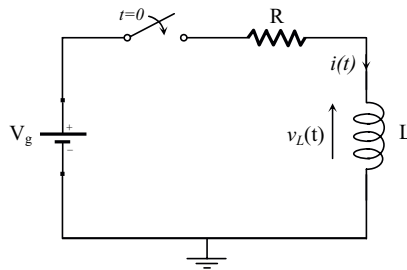


Figura 8. Circuito RL.

La ecuación diferencial resulta en este caso:

$$- \frac{R}{L} dt = \frac{di(t)}{i(t)}$$

cuya solución con la condición inicial dada es:

$$v_L(t) = V_g e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad i(t) = \frac{V_g}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

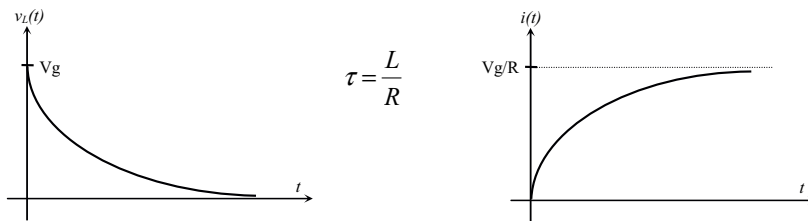


Figura 9. Evolución de la corriente y la tensión en la bobina con el tiempo.

E

n el caso de la bobina la constante de tiempo τ puede definirse como el tiempo necesario para que la corriente que circula por ella alcance el 63 % de su valor máximo.

Para el objetivo de la presente práctica será suficiente con los conceptos introducidos hasta ahora. No obstante es importante tener presente que es posible asociar bobinas y condensadores, en cuyo caso tendríamos que resolver ecuaciones diferenciales de ordenes superiores, con lo que el problema se complica. Una asociación, por ejemplo,

en serie o en paralelo de una resistencia, una bobina y un condensador es un circuito de segundo orden, y la ecuación diferencial que tendríamos que resolver será asimismo de segundo grado.

5. Estudio teórico.

En primer lugar se propone un estudio previo que deberá estar resuelto por escrito en el momento de comenzar la clase de laboratorio.

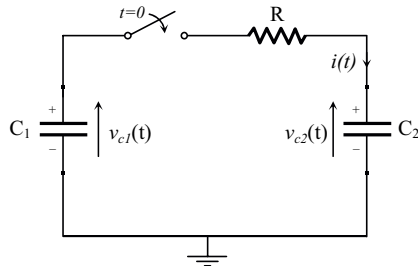


Figura 10. Condensadores con carga inicial.

Sea el circuito de la figura 10, en el que tenemos un par de condensadores inicialmente cargados. En el instante $t = 0$ ambos se conectan mediante una resistencia R entre ellos. Observar que el punto de referencia de tierra se ha tomado como el de unión entre ambos condensadores. Se pide:

- 1.- Plantear la ecuación diferencial que define el comportamiento de la corriente $i(t)$ en el circuito para $t > 0$.
- 2.- Resolver la ecuación diferencial aplicando las siguientes condiciones iniciales. Indicar claramente cual es la constante de tiempo τ en función de R , C_1 y C_2 .

$$v_{c1}(t=0^+) = V_1; \text{ tensión inicial en el condensador } C_1$$

$$v_{c2}(t=0^+) = V_2; \text{ tensión inicial en el condensador } C_2$$

- 3.- Obtener asimismo las ecuaciones que describen la evolución de $v_{c1}(t)$ y $v_{c2}(t)$.
- 4.- Representar gráficamente $i(t)$, $v_{c1}(t)$ y $v_{c2}(t)$. Dejar bien indicado los valores iniciales y el valor al que tiende la tensión en los condensadores. Expresar estos valores en función de los datos R , C_1 , C_2 , V_1 y V_2 .
- 5.- Indicar a qué tensión quedarán los condensadores cuando $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 0,5 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 0,2 \text{ }\mu\text{F}$, $V_1 = 8 \text{ V}$, $V_2 = 3 \text{ V}$.

6. Análisis práctico.

6.1 Simulación con PSpice.

- 1.- Crear un nuevo proyecto en PSpice con el nombre *transitorio*.
- 2.- Crear el diagrama esquemático del circuito de la figura 4. El nombre de los componentes es: **V**PULSE (fuente de tensión), **R** (resistencia), **C** (condensador).
- 3.- La fuente de tensión que hemos seleccionado genera un pulso de tensión de acuerdo con los parámetros que se muestran:

V1 = Tensión antes del salto.

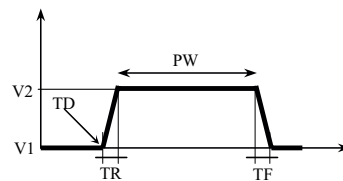
V2 = Tensión después del salto.

TD = Instante de tiempo de inicio del pulso.

TR = Tiempo que tarda en pasar de V1 a V2.

PW = Duración del pulso.

TF = Tiempo que se tarda en pasar de V2 a V1 nuevamente.



Para nosotros tanto TR como TF serán cero puesto que suponemos el pulso ideal. La duración del pulso la tomaremos lo suficientemente grande como para que el circuito alcance el régimen permanente tras el cambio súbito (por ejemplo PW = 140 ms). El instante de inicio del pulso (TD) será cero segundos. Por último el valor de V1 será de cero voltios y el de V2 de 7 voltios. Definiendo de esta forma la función VPULSE hemos conseguido simular una fuente de tensión continua de 7 voltios que se conecta a un interruptor que se cierra en el instante $t = 0$ segundos. De acuerdo por tanto con el circuito de la figura 4, asignaremos los siguientes valores a los componentes:

$$V_g = 7 \text{ V} \quad R = 10 \text{ k}\Omega \quad C = 0,5 \text{ }\mu\text{F}$$

Marcar puntos de test (*mediante la sonda de tensión y/o corriente*) para poder visualizar la forma de la evolución de la tensión en el condensador y en la fuente y la corriente en el circuito (por ejemplo en la resistencia). No olvidar situar el punto de referencia de tierra del circuito.

- 3.- Vamos a realizar un análisis del periodo transitorio en el dominio del tiempo. Para ello vamos al menú Pspice/New Simulation Profile. Elegimos un nombre para la simulación (por ejemplo *transient1*). En la ventana *simulation settings* seleccionamos *time domain (transient)* como tipo de análisis (*analysis type*). **Teniendo en cuenta que la constante de tiempo es $RC = 5$ mseg, fijaremos el tiempo total de simulación (*run to time*) a 35 mseg (unas 7 veces τ).** El recuadro

star saving data lo dejaremos a cero. Por último en la casilla *maximun step size* introduciremos un valor de 0.01 mseg. Este será el intervalo de tiempo en que el programa tomará muestras de los resultados. En nuestro caso si el tiempo total será de 35 mseg y se toma una muestra cada 0.01 mseg habrá un total de 3500 muestras. Tras introducir estos datos pulsamos sobre aceptar y a continuación comenzamos la simulación mediante *run*.

- 4.- Una vez hecho esto en la pantalla se visualizará el resultado gráfico. Sin embargo, en principio todas las curvas aparecen sobre una misma gráfica. Vamos a separar las tensiones de las corrientes. Dentro de la ventana gráfica SCHEMATIC1 seleccionar en la parte inferior de la propia gráfica la etiqueta de la corriente en R1 $I(R1)$ y pulsar *supr*. Seleccionar a continuación la opción *plot/add plot window* para tener dos gráficas diferentes sobre el área de trabajo. Podemos seleccionar cada una de ellas pulsando sobre las mismas. Teniendo seleccionada la nueva gráfica seleccionar la opción *trace/add trace* y elegir ahora $I(R1)$ para representar sobre esta gráfica la corriente por R1.
- 4.- Utilizando los cursores rellenar la siguiente tabla de valores obtenidos a partir de la gráfica calculada.

	$t = \tau$	$t = 2\tau$	$t = 3\tau$	$t = 4\tau$	$t = 5\tau$
$i(t)$					
$v_c(t)$					

- 5.- Repetir el ejercicio anterior con el circuito de la figura 8, red RL. Nombre de los componentes: **VPULSE** (fuente de tensión), **R** (resistencia), **L** (bobina)

Datos: $V_g=10\text{ V}$ $R=10\ \Omega$ $L=20\text{ mH}$

¿Cuánto vale ahora la constante de tiempo τ ?

Rellenar la tabla:

	$t = \tau$	$t = 2\tau$	$t = 3\tau$	$t = 4\tau$	$t = 5\tau$
$i(t)$					
$V_L(t)$					

- 6.- Crear por último el circuito propuesto en el estudio previo. Realizar una simulación en el dominio del tiempo durante un periodo de 7τ

Las condiciones iniciales de los condensadores se introducen editando las propiedades de los mismos y añadiendo una nueva columna con el nombre de IC (*initial condition*) y cuyo valor es el de la tensión inicial de carga correspondiente.

Nota: para que Pspice pueda realizar adecuadamente la simulación es necesario incluir una resistencia en paralelo con C1 o C2 de valor muy alto ($R = 1e50 \Omega$). Esto es necesario para que exista un camino de retorno de la corriente hacia el nodo de referencia aunque dado el valor tan elevado de la resistencia esta corriente será prácticamente nula y por tanto es como si R no estuviera, siendo el circuito equivalente al de la figura 10.

Rellenar de forma aproximada la tabla:

	$t = \tau$	$t = 2\tau$	$t = 3\tau$	$t = 4\tau$	$t = 5\tau$
$i(t)$					
$V_{c1}(t)$					
$V_{c2}(t)$					

¿A qué valor tiende la tensión cuando t aumenta?

6.2 Medida de capacidades mediante el osciloscopio.

Vamos a describir un procedimiento que nos permitirá medir el valor de la capacidad de un condensador midiendo su constante de tiempo para la carga y descarga.

- 1.- Haciendo uso de las resistencias y condensadores disponibles en el laboratorio hacer un circuito sobre la placa de conexiones similar al de la figura 4.
- 2.- Efectuar las conexiones necesarias para visualizar en el canal II del osciloscopio la tensión en el condensador.
- 3.- En lugar de aplicar una fuente de tensión continua, la aplicaremos una señal cuadrada de 5 V de amplitud y de cierta frecuencia que tendremos que ajustar. Conectar esta señal tanto al circuito como al canal I del osciloscopio.
- 3.- Ajustar la frecuencia de la señal cuadrada hasta que la tensión en el condensador alcance sobradamente en cada periodo el valor máximo de la señal cuadrada.
- 4.- Medir la constante de tiempo con los cursores. La constante de tiempo se define durante un periodo de carga como el tiempo que tarda la tensión en el condensador en alcanzar el 63% de su valor máximo. En un periodo de descarga se define como

el tiempo que tarda la tensión en el condensador en descender hasta el 37% del valor inicial.

- 5.- Conocida la resistencia utilizada en el montaje y la expresión que relaciona la constante de tiempo con la resistencia y la capacidad, es inmediato obtener el valor de la capacidad C del condensador.
- 6.- Tomar $R = 10 \text{ k}\Omega$ y para dos condensadores diferentes rellenar la siguiente tabla:

R	Amplitud	τ	C

HOJA DE ENTREGA DE RESULTADOS. Práctica 7.

Grupo: _____ **Nombre:** _____

Circuito RC

Constante de tiempo $\tau =$

	$t = \tau$	$t = 2\tau$	$t = 3\tau$	$t = 4\tau$	$t = 5\tau$
$i(t)$					
$v_c(t)$					

Circuito RL

Constante de tiempo $\tau =$

	$t = \tau$	$t = 2\tau$	$t = 3\tau$	$t = 4\tau$	$t = 5\tau$
$i(t)$					
$V_L(t)$					

Ejercicio propuesto

Constante de tiempo $\tau =$ Límite de v_{c1} y v_{c2} ($t \rightarrow +\infty$)

	$t = \tau$	$t = 2\tau$	$t = 3\tau$	$t = 4\tau$	$t = 5\tau$
$i(t)$					
$V_{c1}(t)$					
$V_{c2}(t)$					

Medida de capacidades mediante el osciloscopio

R	Amplitud	τ	C

Práctica 8. Régimen estacionario senoidal.

En esta práctica vamos a estudiar la respuesta de circuitos lineales bajo excitación sinusoidal. El concepto clave es ahora la respuesta de estado estacionario sinusoidal, condición que se logra una vez que ha desaparecido la respuesta natural y en el cual **todas** las tensiones y corrientes en el circuito son **sinusoidales**. Veremos también que esta respuesta de estado estacionario se puede deducir de la **función de transferencia del circuito** de manera muy directa. Para el análisis teórico del circuito propuesto haremos uso de la representación de las ondas sinusoidales en su forma fasorial.

1.- Análisis de circuitos mediante fasores.

Dada una señal de la forma:

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

en la que A es la amplitud de la señal y φ su fase inicial, se define su fasor¹ asociado como el número complejo de amplitud igual a A y fase igual a φ . Es decir:

$$Y = A \angle_{\varphi} = A e^{j\varphi} = A(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)$$

Para obtener la señal $y(t)$ a partir de su fasor únicamente debemos tomar la parte real o imaginaria del producto de tal fasor por $e^{j\omega t}$, Tomaremos la parte real si la señal sinusoidal es de la forma coseno y la parte imaginaria si es de la forma seno.

El análisis de circuitos mediante la representación fasorial de las formas de onda implica los siguientes pasos.

- 1.-Expresar todos los generadores en la misma forma trigonométrica, seno o coseno, para poder representarlos como parte real o imaginaria del correspondiente fasor.

¹ La historia del concepto de fasor es larga. Este concepto fue presentado por primera vez por el ingeniero alemán Charles Steinmetz en 1893. Sus principales contribuciones a la, por entonces, nascente ingeniería eléctrica incluyeron el fenómeno de la histéresis, el concepto de impedancia y el empleo de cantidades complejas para describir dispositivos y sistemas de corriente alterna (ahora llamados fasores).

- 2.- Sustituir la f.e.m. por sus correspondientes fasores.
- 3.- Sustituir las resistencias, bobinas y condensadores por sus respectivas impedancias complejas:

$$\bar{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} \qquad \bar{Z}_R = R \qquad \bar{Z}_L = j\omega L$$

Aunque las impedancias de los elementos de un circuito son números complejos, **no son fasores**. Es importante hacer esta distinción, los fasores representan señales y las impedancias elementos de un circuito. Son pues dos cosas totalmente diferentes aun cuando ambas se representan mediante números complejos.

- 4.- En el circuito resultante, tendremos como incógnitas los fasores de intensidad en cada rama o de tensión en los nudos. La resolución puede hacerse mediante la aplicación de las leyes de Kirchoff mediante los mismos métodos de resolución aplicados en corriente continua asociando impedancias en serie y paralelo.
- 5.- Tras obtener estos fasores incógnita la forma instantánea de las señales obtenidas en forma fasorial puede obtenerse a partir de:

$$i_i(t) \equiv \text{Im}[\bar{I}_i e^{j\omega t}] \equiv I_{0i} \text{sen}(\omega t + \varphi_i)$$

$$i_i(t) \equiv \text{Re}[\bar{I}_i e^{j\omega t}] \equiv I_{0i} \text{cos}(\omega t + \varphi_i)$$

dependiendo de la forma en que se han expresado los generadores del circuito.

El análisis de circuitos mediante fasores lo podemos considerar atendiendo al diagrama de la figura 1. Comenzamos en el dominio de definición del tiempo con un circuito que opera en régimen estacionario sinusoidal. Transformamos dicho circuito al dominio de la frecuencia, lo que significa que todas las señales se convierten en fasores y los elementos del circuito pasan a caracterizarse por su impedancia en términos de la frecuencia ($j\omega$). A continuación ya podemos emplear nuestras técnicas de análisis para obtener la respuesta en forma de fasor. La figura 1 indica que también existe otro camino para llegar a este resultado. Podríamos aplicar los métodos conocidos para hallar la ecuación diferencial del circuito y determinar después la respuesta forzada mediante técnicas clásicas. Por lo general resulta más sencillo operar con fasores.

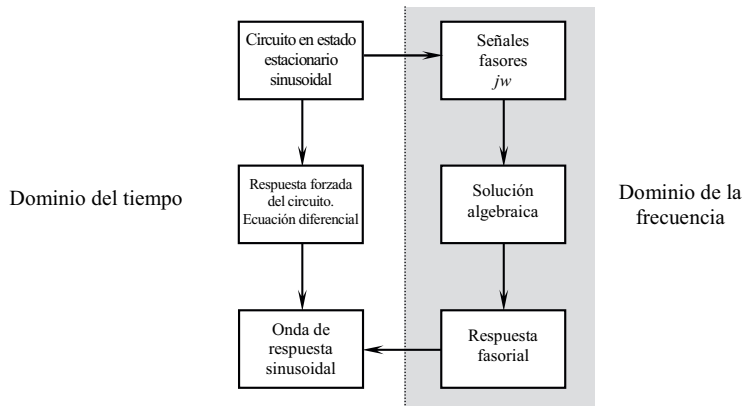


Figura 1. Esquema de análisis de circuitos utilizando fasores

2.- Función de transferencia.

Si en un circuito funcionando en régimen estacionario sinusoidal **definimos una entrada y una salida** (que podrían ser, por ejemplo, las tensiones en dos puntos diferentes del circuito) entre ellas existe, en todo caso, una función de transferencia $H(j\omega)$, cuya variable independiente es la pulsación ω , y a partir de la cual se puede obtener fácilmente la respuesta del circuito (salida) conociendo el fasor de entrada.

La salida o respuesta del circuito cumple las siguientes condiciones:

- Su módulo es igual al módulo de la entrada multiplicado por el módulo de la función de transferencia.
- La fase de la respuesta es igual a la suma de las fases de la señal de entrada y la función de transferencia.

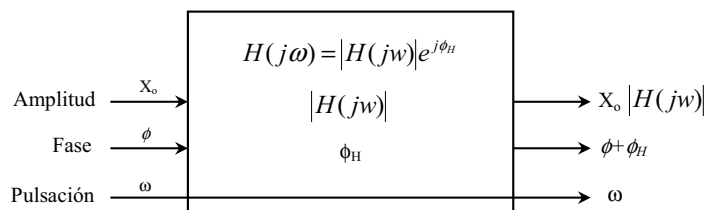


Figura 2. Transferencia de la señal en estado estacionario sinusoidal

La función de transferencia de un circuito se obtiene a partir de la relación:

$$H(j\omega) = \frac{S_s}{S_e}$$

donde S_e representa la señal de entrada y S_s la de salida. Para el caso, por ejemplo en que las señales de entrada y salida sean tensiones tendríamos:

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$$

3.- Ejercicio propuesto.

Sea el circuito de la figura excitado por una fuente de tensión sinusoidal de pulsación $\omega=2000$ rad/seg y amplitud 100 Voltios.

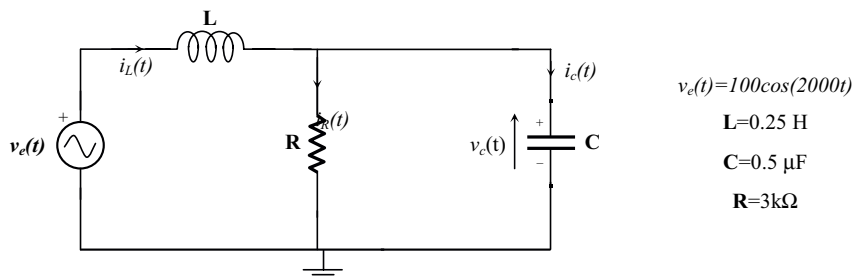


Figura 3. Circuito en regimen estacionario

Se pide:

- 1.- Determinar los fasores de las corrientes $i_L(t)$, $i_C(t)$ e $i_R(t)$. Resolver el circuito en el dominio de la frecuencia.
- 2.- Dibujar el diagrama de fasores en que queden reflejadas estas tres intensidades. En vista del diagrama indicar.
 - 2.1 ¿Está $i_L(t)$ retrasada o adelantada con respecto a la tensión aplicada?
 - 2.2 ¿Está $i_C(t)$ retrasada o adelantada con respecto a la tensión aplicada?
 - 2.3 ¿Está $i_R(t)$ retrasada o adelantada con respecto a la tensión aplicada?
 - 2.4 ¿Cuál es la diferencia de fase entre $i_C(t)$ e $i_L(t)$? ¿ Y entre $i_L(t)$ e $i_R(t)$?
 - 2.5 ¿Cuál será la fase de la tensión en el condensador?
- 3.- Hallar el fasor de tensión en bornes del condensador. ¿Qué potencia disipará la resistencia?
- 4.- Expresar todas las corrientes y tensiones calculadas en el dominio del tiempo.
- 5.- Hallar la función de transferencia $H(j\omega)$ del circuito tomando la entrada en la fuente de alimentación y la salida en los bornes del condensador.

- 6.- Particularizar el módulo y la fase de $H(j\omega)$ para los datos del problema. Comprobar que el producto del módulo de $H(j\omega)$ y la amplitud del fasor de entrada coincide con la amplitud del fasor de salida a esa frecuencia. Hacer lo mismo para la fase.

4.- Simulación con Pspice.

- 1.- Crear, de la forma que ya sabemos el circuito de la figura 3. Utilizar el generador de tensión VSIN.
- 2.- Asignar los valores adecuados a cada componente. En el caso del generador de tensión arbitrario definirlo como un seno con fase inicial 0° , asignándole la frecuencia y amplitud correspondiente. Tensión de offset igual a cero.
- 3.- Realizar una primera simulación en el dominio del tiempo (*Step Time* = 10^{-5} s; *Tiempo límite* = 15 ms). Representar gráficamente los valores de $i(t)$, $v_e(t)$ y $v_c(t)$. Mostrar sobre una misma gráfica las tensiones y sobre otra las corrientes en ventanas diferentes. Medir la amplitud de la tensión $v_c(t)$ (una vez se ha estabilizado) y comprobar que coincide con la obtenida en el estudio teórico.
- 4.- En último lugar vamos a caracterizar el circuito en el dominio de la frecuencia obteniendo la función de transferencia entre la entrada y la salida que tomaremos en bornes del condensador. La forma en que Pspice calcula funciones de transferencia es la siguiente.
 - 4.1.- En primer lugar sustituir la fuente senoidal de frecuencia fija por una fuente VAC en la cual la frecuencia de trabajo será un parámetro (variable). Asignar los mismos valores de amplitud y offset.
 - 4.2.- Realizamos una nueva simulación. Pspice/New Simulation Profile Seleccionamos la opción *AC sweep/noise* que nos mostrará una ventana de opciones. Seleccionamos una frecuencia inicial y una frecuencia final. (por ejemplo 100 Hz – 10 kHz); activamos la opción logarítmica con 10000 puntos por década para representar los resultados.

Importante: La función de transferencia se representa en unidades logarítmicas por lo que su módulo viene dado de la forma:

$$20 \cdot \log_{10} |H(j\omega)|$$

A continuación en una nueva ventana gráfica representaremos el módulo de la tensión en el condensador en función de la frecuencia. Para ello seleccionamos ese punto con la sonda de tensión. Ahora bien, hemos visto que el módulo de la función de transferencia es el cociente entre el módulo de la señal de salida (tensión en el condensador) y la de entrada (tensión del generador). Podemos

representar este cociente mediante la opción *Trace/add trace* haciendo la operación adecuada en la casilla *trace expression*.

- 4.3.- Por último veamos como se representa la fase de una señal en un punto del circuito. Desde Capture seleccionar la opción *Pspice/markers/advanced/Phase of voltage*. Aparecerá una nueva sonda. Situarla adecuadamente para medir la fase de la tensión de salida (en el condensador) en función de la frecuencia. Situar otra sonda para evaluar la fase de la tensión del generador. Por último representar la fase de la función de transferencia como la diferencia de fase entre la entrada y la salida. Agrupar las gráficas de la fase en una misma ventana.
- 5.3.- Indicar los fasores de salida cuando el fasor de entrada es $V_E = 100 \cdot e^{j0}$, para las frecuencias de la tabla 2.

Frecuencia	300 Hz	1 kHz	10 kHz
V_S			

5.- Medida de diferencias de fase mediante el osciloscopio.

5.1 Material necesario.

- Osciloscopio
- Generador de señales
- Placa de conexiones
- 1 resistencia de $1k\Omega$ y una capacidad de $1,8 \text{ nF}$
- 1 cable BNC-bananas, 1 cable BNC-BNC, 1 divisor de señal BNC, 1 cable BNC-pinzas
- Cables de cobre para realizar las conexiones.

5.2 Procedimiento

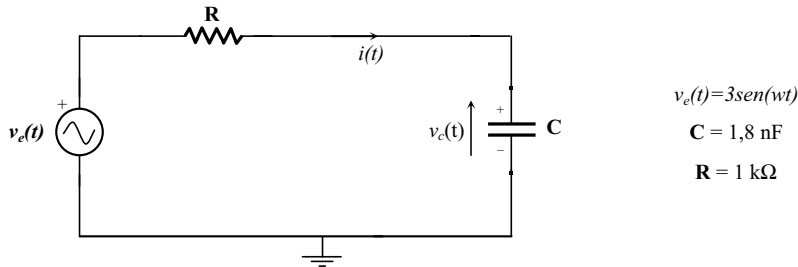


Figura 4. Circuito en régimen estacionario sinusoidal

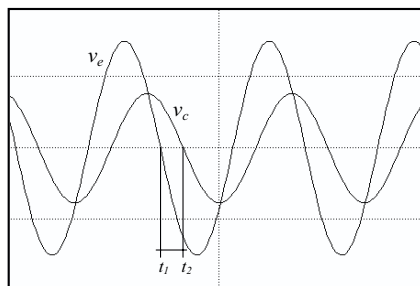
1.

- 1.- Construir sobre la placa de conexiones el circuito de la figura 4.
- 2.- Aplicarle una señal senoidal de 100 kHz de frecuencia y 3 V de amplitud. Efectuar las conexiones necesarias para visualizar esta señal en el canal I del osciloscopio.
- 3.- Conectar adecuadamente la señal registrada en el condensador para que sea visualizada a través del canal II del osciloscopio. Seleccionar el modo dual de funcionamiento del osciloscopio para visualizar ambas señales de forma simultánea en la pantalla.

5.3 Medida del desfase mediante diferencia de tiempos.

Para a medir el desfase entre las señales de tensión $v_e(t)$ y $v_c(t)$ mediremos la diferencia de tiempo entre ambas señales. Como sabemos, una vez conocida la diferencia de tiempo entre dos señales de la misma frecuencia el desfase entre ellas puede obtenerse a partir de $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. Es muy importante el signo positivo o negativo del desfase. Ello indica si una señal está adelantada o retrasada con respecto a otra.

Para medir la diferencia de tiempo entre las señales resultará más cómodo hacer uso de los cursores verticales. Haced esto y determinar el desfase de estas señales.

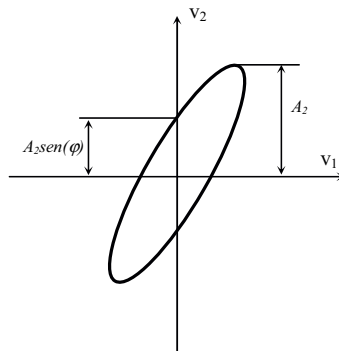


A continuación modificar la frecuencia de la señal de entrada de acuerdo con la tabla de abajo y completarla:

Frecuencia	10 kHz	50 kHz	100 kHz	1 MHz
Δt				
$\Delta\varphi = w\Delta t$				

5.4 Diagrama de Lissajous

Otra forma de calcular el desfase entre dos señales mediante el osciloscopio es mediante el diagrama de Lissajous. Consiste en representar en una gráfica bidimensional las amplitudes de las dos señales. Por ejemplo:



$$v_1(t) = A_1 \text{sen}(wt)$$

$$v_2(t) = A_2 \text{sen}(wt + \varphi)$$

Puesto que estas señales tienen la misma frecuencia, podemos representar sobre dos ejes de coordenadas sus amplitudes. En el eje de abscisas colocamos la amplitud de v_1 y en el de ordenadas la amplitud de v_2 . El resultado es una elipse. La variable temporal ha desaparecido.

Nos interesa medir φ , para lo que recordamos que para cualquier valor de $wt = 2\pi n$, resulta:

$$v_1 = 0 ; \quad v_2 = A_2 \text{sen}(\varphi).$$

es decir que:

$$\varphi = \arcsen\left(\frac{v_2}{A_2}\right)$$

Por otro lado A_2 será el valor máximo que tomará v_2 .

Con todo ello tendremos que el seno del ángulo del desfase es igual al cociente entre el corte de la elipse con el eje de ordenadas y la máxima desviación según dicho eje, tal y como se muestra en la figura de arriba.

Si mantenemos pulsada la tecla dual del osciloscopio durante unos instantes nos aparecerá en la pantalla el diagrama de Lissajous correspondiente a las señales que tengamos en el canal I y en el canal II. Para que este diagrama sea estable es necesario que ambas señales tengan exactamente la misma frecuencia. Por tanto solamente tendremos que medir el valor de amplitud de la elipse en $v_1 = 0$ y el valor máximo que alcanza en el eje de v_2 . Una vez obtengamos estas medidas podremos calcular el $\text{sen}(\varphi)$ mediante el cociente de ambas, y la obtención del ángulo φ es inmediata una vez conocido su seno.

Siguiendo este segundo procedimiento medir la diferencia de fase entre las señales $v_e(t)$ y $v_c(t)$ para las frecuencias de la siguiente tabla:

Frecuencia	20 kHz	70 kHz	110 kHz	100 MHz
v_{cmax}				
$v_{cmax} \text{sen}(\Delta\varphi)$				
$\Delta\varphi$				

HOJA DE ENTREGA DE RESULTADOS. Práctica 8.

Grupo: _____ Nombre: _____

Tabla 1. Función de transferencia. Fasores de tensión de salida en bornes del condensador cuando la entrada es $V_E = 100 \cdot e^{j0}$.

Frecuencia	300 Hz	1 kHz	10 kHz
V_S			

Tabla 2. Medida del desfase mediante el osciloscopio. Diferencia de tiempos.

Frecuencia	10 kHz	50 kHz	100 kHz	1 MHz
Δt				
$\Delta\varphi = \omega\Delta t$				

Tabla 3. Medida del desfase mediante el osciloscopio. Diagrama de Lissajous.

Frecuencia	20 kHz	70 kHz	110 kHz	1 MHz
v_{cmax}				
$v_{cmax} \text{ sen}(\Delta\varphi)$				
$\Delta\varphi$				

Práctica 9. Resolución de problemas de examen mediante PSpice.

1. Examen de Diciembre de 2005.

1.1.- Estudio Teórico – Análisis Transitorio.

En el circuito de la Figura 1, el interruptor lleva en la posición A durante mucho tiempo. En $t = 0$ cambia a la posición B.

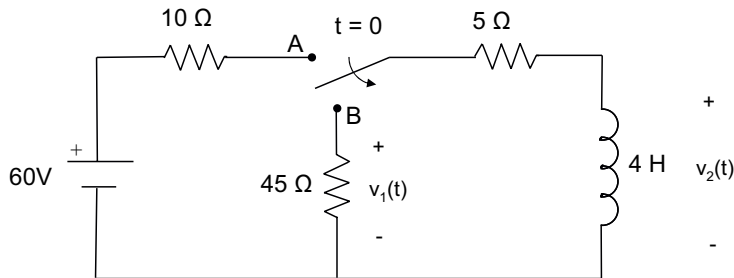


Figura 1

Hallar:

- Corriente I_L en la bobina antes de conmutar.
- Energía almacenada en la bobina.
- Expresión de la intensidad que circula por la bobina en función del tiempo después de la conmutación. Indicar el valor de la constante de tiempo τ . Representar en una gráfica la evolución de la intensidad en la bobina a lo largo del tiempo indicando el valor máximo que alcanza, el valor en $t = \tau$ y el valor al que tiende.
- Expresión de $v_1(t)$ y $v_2(t)$ después de la conmutación. Representarlas en la misma gráfica indicando los valores en $t = 0$ s y en $t = \tau$.
- Energía disipada en la resistencia de 45Ω entre $t = 0$ y $t = 40$ ms.

1.2.- Análisis práctico.

Debemos dibujar el circuito de la Figura 1. Para poder simular el interruptor que aparece en ella, se deben de considerar dos interruptores tal y como muestra la Figura 2, de tal forma que en $t = 0s$ la parte derecha queda en abierto y la rama que contiene la resistencia R3 queda unida a la resistencia R2 y a la bobina. Para situar los interruptores seleccionamos Place Part Sw_tOpen y Sw_tClose.

El perfil de simulación a utilizar es *Time Domain* donde en *Run to Time* pondremos 0.5 segundos para poder obtener una visualización correcta de las gráficas. En la Figura 2 también se muestran las sondas que debemos situar para hallar las formas de onda de la caída de tensión en la resistencia R3 (V_1) y en la bobina (V_2) y la intensidad que circula por la bobina I_L . Las tensiones y las corrientes deben representarse en gráficas diferentes para poder visualizarlas correctamente.

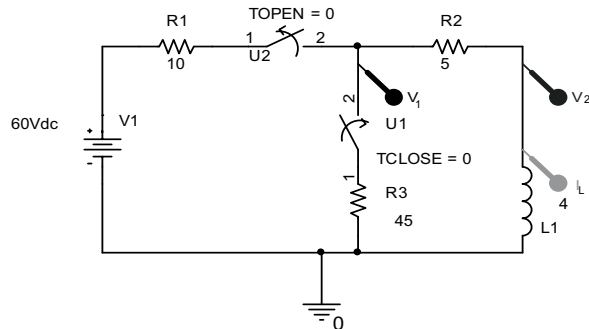
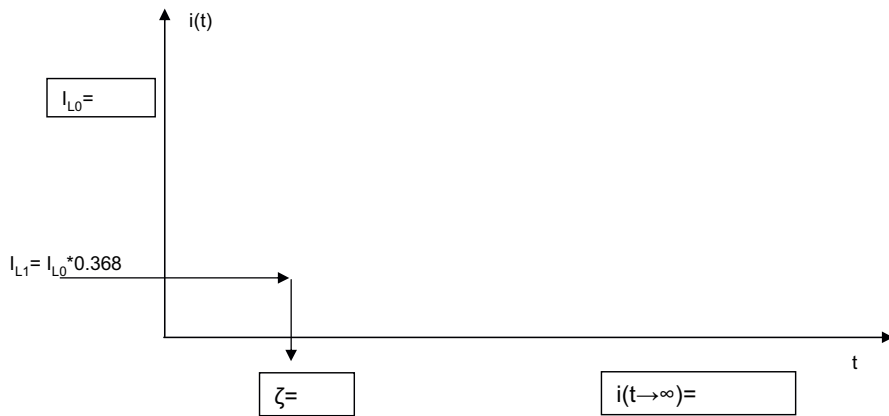
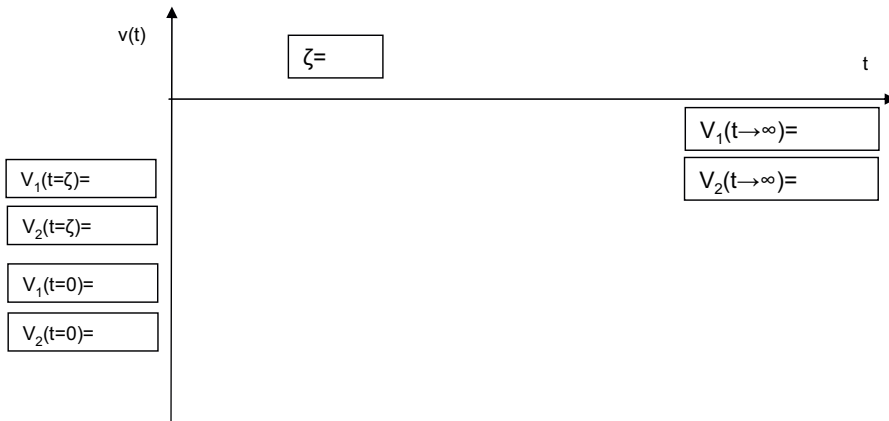


Figura 2

- 1.- Dibujar la evolución de la intensidad a lo largo del tiempo e indicar su valor inicial (en $t = 0s$). Indicar también el valor al que tiende y el valor de la constante de tiempo. (Recordar que para ello debemos buscar el valor de t para el cual la intensidad ha decaído hasta el 36.8% de su valor máximo).



2.- Dibujar en una sola gráfica las tensiones V_1 y V_2 . Indicar los valores iniciales de cada una de ellas, la constante de tiempo y los valores de V_1 y V_2 cuando t es igual a la constante de tiempo y los valores a los que tienden.



1.3.- Estudio Teórico. – Régimen estacionario sinusoidal.

El circuito de la Figura 3 se encuentra funcionando en régimen estacionario sinusoidal.

Se conoce que $i(t) = 4 \cos(500t)$ mA.

- Indicar el fasor de la corriente y las impedancias de cada uno de los elementos.
- Hallar la impedancia equivalente del circuito.
- Hallar $v(t)$.
- Determinar el valor de $i_1(t)$ e $i_2(t)$.
- Demostrar que $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$ en un diagrama fasorial.
- Determinar la potencia entregada al circuito y la potencia consumida.

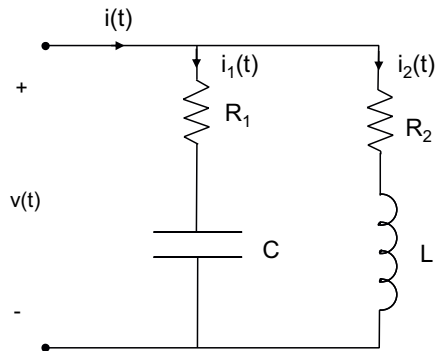


Figura 3

Datos: $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $C = 200 \mu\text{F}$, $L = 10\text{mH}$.

1.4.- Análisis práctico.

Dibujar el circuito de la Figura 4, donde se ha incluido la corriente $i(t) = 4 \cos(500t)$ mA en forma de fuente de intensidad variable (ISIN). Cuidado al escribir la frecuencia, ya que la expresión de $i(t)$ nos informa de la pulsación.

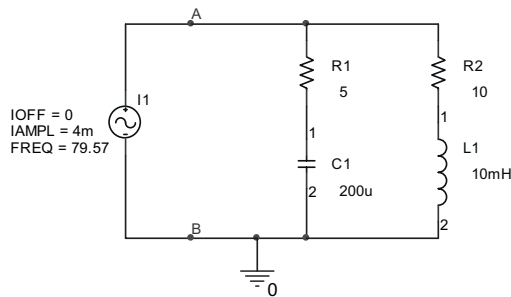


Figura 4

Se pide:

- 1.- Dibujar la tensión entre A y B. Para ello se debe configurar un perfil de simulación de *Time Domain (Transient)* con *Run to Time* 0.1 (tiempo de muestreo) y un *Maximum Step Size* de 0.0001 (intervalo entre muestras). Para hallar el módulo de la tensión se selecciona una sonda de tensión normal y se toma el valor de amplitud máxima de la gráfica al final de la misma, cuando ya ha alcanzado el régimen permanente.

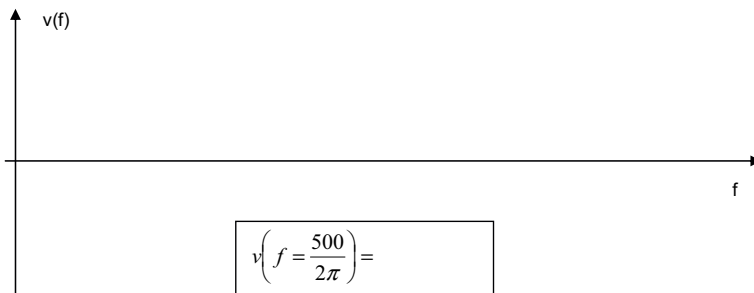


- 2.- Dibujar de la misma forma que en apartado anterior las intensidades $i_1(t)$ e $i_2(t)$ indicadas en la Figura 3, es decir, la intensidad que circula por la rama de la resistencia R1 y el condensador y la intensidad que circula por la rama de la resistencia R2 y la bobina, respectivamente. Deben dibujarse en un *plot* diferente al de la tensión mediante la opción *Plot-Add Plot to Window* y después seleccionando *Trace-Add Trace*.

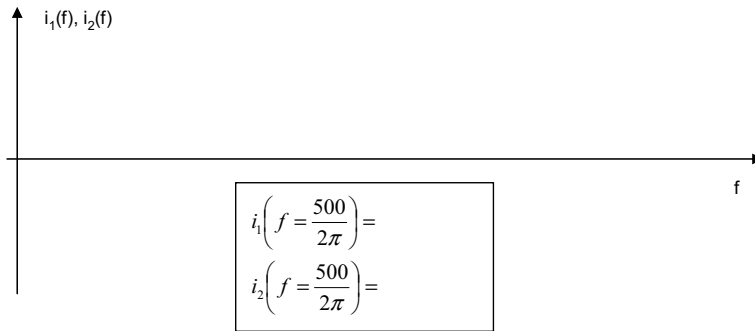


3.- En primer lugar sustituir la fuente senoidal de frecuencia fija por una fuente IAC en la cual la frecuencia de trabajo será un parámetro (variable). Asignar los mismos valores de amplitud y offset. Vamos a realizar una nueva simulación, *Ps spice/New Simulation Profile*. Seleccionamos la opción *AC sweep/noise* que nos mostrará una ventana de opciones. Seleccionamos una frecuencia inicial y una frecuencia final (por ejemplo 10 Hz – 1 kHz); activamos la opción logarítmica con 10000 puntos por década para representar los resultados.

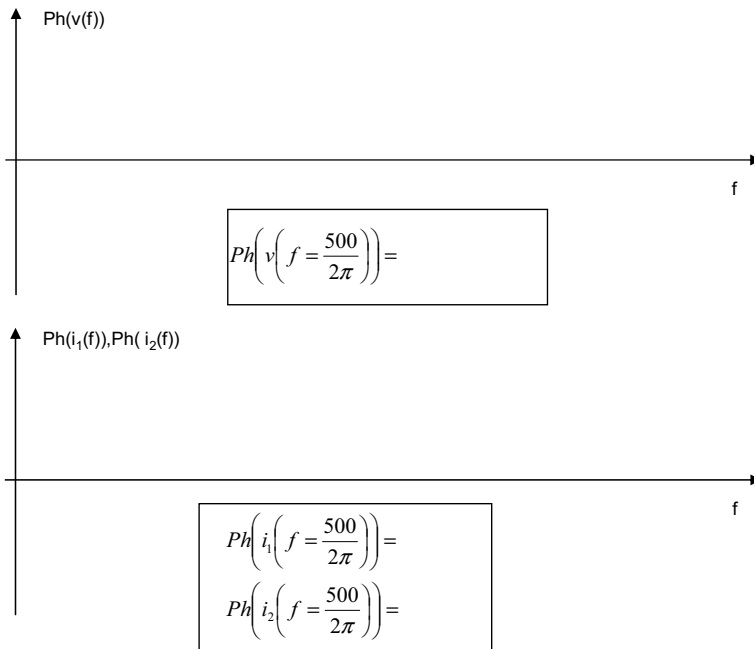
Seleccionar la sonda de tensión para representar la tensión entre los terminales A y B. Dibujarla e indicar el valor de la tensión para la frecuencia en la que está trabajando el generador sinusoidal. Comprobar que coincide con los resultados anteriores.



De la misma forma crear un nuevo *plot* con las intensidades de cada rama.



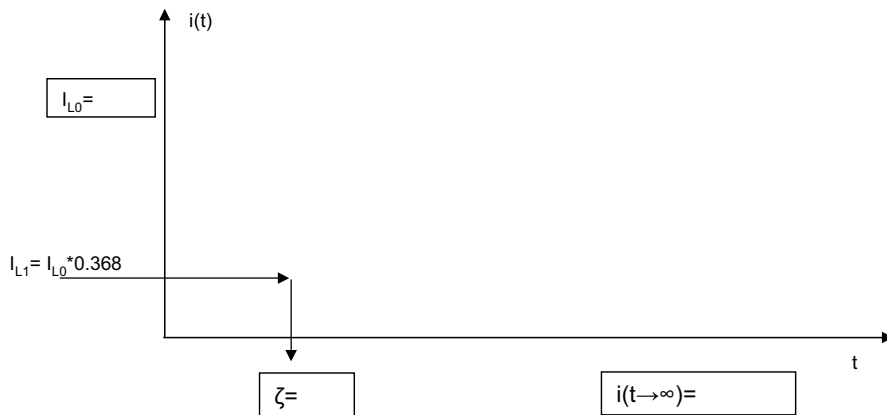
4.- Por último veamos como se representa la fase de una señal en un punto del circuito. Desde Capture seleccionar la opción *Pspice/markers/advanced/Phase of voltage* o *Phase of current*. Aparecerá una nueva sonda. Situarla adecuadamente para medir la fase de la tensión entre A y B en función de la frecuencia. Dibujarla en la gráfica que aparece a continuación indicando el valor de la fase para la frecuencia de trabajo de la fuente. Situar dos sondas más para evaluar la fase de cada una de las intensidades $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Dibujarlas en la gráfica que aparece a continuación indicando el valor de la fase para la frecuencia de trabajo de la fuente.



HOJA DE ENTREGA DE RESULTADOS. Práctica 9.

Grupo: _____ **Nombre:** _____

1. PROBLEMA DE ANÁLISIS TRANSITORIO



2. PROBLEMA DE RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL

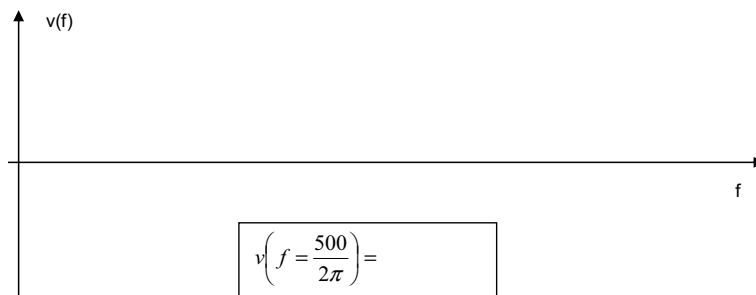
Apartado 1.

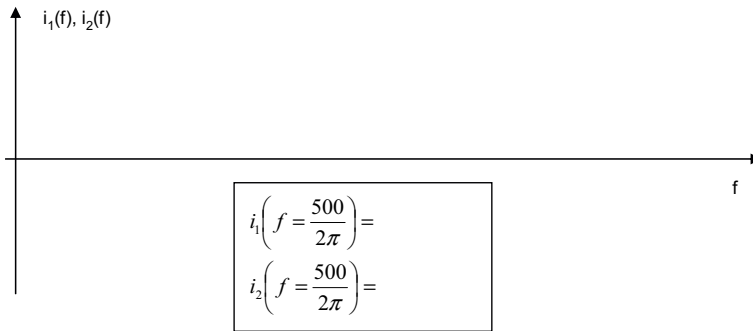


Apartado 2.



Apartado 3.





Apartado 4.

