

# Análisis de Estructuras

**Texto guía para prácticas**

**Pascual Martí Montrull  
Gregorio Sánchez Olivares  
Pedro Martínez Castejón  
Concepción Díaz Gómez**



# ÍNDICE

---

<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>iii</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS .....</b>	<b>vii</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
<b>2. ESTRUCTURA Y REALIZACIÓN DE LAS PRÁCTICAS.....</b>	<b>1</b>
2.1 Estructura de las prácticas .....	1
2.2 Realización de las prácticas .....	2
<b>3. OBJETIVOS DE LAS PRÁCTICAS.....</b>	<b>3</b>
<b>4. PROGRAMA DE PRÁCTICAS.....</b>	<b>3</b>
<b>5. PRÁCTICAS .....</b>	<b>5</b>
Práctica 1: Utilización del programa de cálculo numérico MATLAB.....	5
Práctica 2: Análisis matricial de estructuras articuladas isostáticas por el método de los nudos .....	9
Práctica 3: Determinación de las características elásticas de una pieza de inercia variable .....	21
Práctica 4: Obtención directa de la matriz de rigidez de una estructura .....	35
Práctica 5: Desarrollo de un programa de análisis matricial de estructuras de nudos articulados.....	41
Práctica 6: Desarrollo de un programa de análisis matricial de estructuras de nudos rígidos .....	53
Práctica 7: Análisis de una estructura plana de nudos rígidos .....	67
Práctica 8: Análisis de una estructura espacial de nudos rígidos .....	75

Práctica 9: Análisis de un emparrillado de cimentación .....	81
Práctica 10: Determinación de la carga crítica de pandeo global de una estructura	89
Práctica 11: Desarrollo de un programa de análisis por elementos finitos .....	105
Práctica 12: Análisis de errores en el método de los elementos finitos .....	117
Práctica 13: Modelado y análisis de un elemento estructural continuo mediante el programa de elementos finitos AMEF .....	125
Práctica 14: Modelado y análisis de un elemento estructural continuo mediante el programa de elementos finitos ANSYS .....	129
Práctica 15: Análisis experimental de una estructura metálica con técnicas de extensometría eléctrica .....	141
<b>ANEXO I EL MÉTODO DE LAS RIGIDECES.....</b>	<b>151</b>
<b>ANEXO II SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES .....</b>	<b>165</b>

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 1.1	Viga a analizar.....	5
Figura 2.1	Estructuras a analizar .....	9
Figura 2.2	Sistemas de coordenadas, fuerzas y esfuerzos .....	10
Figura 2.3	Formulación matricial del método de los nudos. Diagrama de flujo ...	13
Figura 2.4	Estructura inestable .....	16
Figura 3.1	Pieza de inercia variable y pieza de inercia constante .....	21
Figura 3.2	Desplazamientos y giros en la pieza .....	22
Figura 3.3	Pieza perfectamente empotrada en ambos extremos.....	23
Figura 3.4	Piezas perfectamente empotradas en un extremo y articuladas en el otro .....	24
Figura 3.5	Factores de transmisión.....	25
Figura 3.6	Rigidez al giro en un extremo con el otro extremo empotrado.....	26
Figura 3.7	Rigidez al giro en un extremo con el otro extremo articulado.....	27
Figura 3.8	Pieza de inercia variable con sección en doble T.....	30
Figura 3.9	Entramado frontal.....	31
Figura 3.10	Diagramas de momentos flectores .....	34
Figura 3.11	Flecha máxima y sección de abscisa $x_{jmax}$ donde se produce.....	34
Figura 4.1	Estructura para obtener la matriz de rigidez .....	35
Figura 4.2	Sistema de coordenadas global y grados de libertad.....	36
Figura 4.3	Fuerzas generalizadas debidas al desplazamiento $D_1$ .....	37
Figura 4.4	Modelo de análisis para DISSENY/2006.....	37
Figura 4.5	Elemento $ij$ : ejes principales, sección transversal y plano de la estructura .....	38
Figura 5.1	Estructura plana de nudos articulados.....	41
Figura 5.2	Sistemas de coordenadas locales de la barra.....	42

Figura 5.3	Nudos y grados de libertad.....	47
Figura 5.4	Sistema de coordenadas global de la estructura y sistemas de coordenadas locales de las barras.....	47
Figura 5.5	Codificación de nudos y barras para el análisis con DISSENY/2006 .	47
Figura 5.6	Reacciones y deformada de la estructura .....	48
Figura 5.7	Grados de libertad .....	49
Figura 6.1	Estructura plana de nudos rígidos .....	53
Figura 6.2	Sistemas de coordenadas para estructuras planas de nudos rígidos.....	54
Figura 6.3	Viga con carga uniformemente repartida .....	55
Figura 6.4	Viga con carga puntual.....	56
Figura 6.5	Nudos y grados de libertad.....	57
Figura 6.6	Sistema de coordenadas global de la estructura y sistemas de coordenadas locales de las barras.....	58
Figura 6.7	Codificación de nudos y barras para el análisis con DISSENY/2006 .	58
Figura 6.8	Estructura con articulación en el nudo 2.....	62
Figura 6.9	Elemento <i>ij</i> : ejes principales, sección transversal y plano de la estructura .....	64
Figura 7.1	Estructura plana con elementos de inercia variable .....	67
Figura 7.2	Modelo de análisis para DISSENY/2006: caso 1° .....	69
Figura 7.3	Modelo de análisis para DISSENY/2006: caso 2° .....	69
Figura 7.4	Modelo del empotramiento elástico en la base con DISSENY/2006...	70
Figura 7.5	Modelo de análisis para DISSENY/2006: caso 3° .....	70
Figura 7.6	Modelo de análisis para DISSENY/2006: caso 4° .....	71
Figura 7.7	Esquema para comparación de resultados del análisis de una estructura plana de nudos rígidos.....	74
Figura 8.1	Silo metálico cilíndrico para cemento.....	76
Figura 8.2	Modelo de análisis: ejes globales, ejes locales y secciones transversales de los elementos barra de nudos rígidos.....	77
Figura 8.3	Modelo de análisis: tipo de elementos y estados de carga .....	78
Figura 9.1	Emparrillado de cimentación .....	81
Figura 9.2	Modelo de análisis del emparrillado .....	82
Figura 9.3	Codificación de nudos y elementos para el análisis del emparrillado con DISSENY/2006 .....	83
Figura 9.4	Áreas del emparrillado asociadas a muelles.....	85
Figura 9.5	Sección eficaz del hormigón para elementos del emparrillado.....	85
Figura 9.6	Sobrecargas sobre el emparrillado .....	86

Figura 10.1	Estructura plana para la determinación de la carga crítica de pandeo global .....	89
Figura 10.2a	Esquema para comparación de resultados de la determinación de la carga crítica y modos de pandeo de una estructura plana de nudos rígidos. Carga vertical simétrica .....	103
Figura 10.2b	Esquema para comparación de resultados de la determinación de la carga crítica y modos de pandeo de una estructura plana de nudos rígidos. Carga vertical y viento por la izquierda .....	103
Figura 10.2c	Esquema para comparación de resultados de la determinación de la carga crítica y modos de pandeo de una estructura plana de nudos rígidos. Carga vertical y viento en ambos lados .....	104
Figura 11.1	Pieza en voladizo con carga puntual .....	105
Figura 11.2	Elemento triangular: coordenadas, desplazamientos y tensiones .....	106
Figura 11.3	Modelo de análisis de la pieza sometida a tensión plana .....	113
Figura 11.4	Modelo de análisis alternativo para la pieza sometida a tensión plana .....	114
Figura 12.1	Viga empotrada con carga en su extremo libre .....	117
Figura 12.2	Condiciones de contorno y cargas .....	118
Figura 12.3	Modelo de diseño .....	119
Figura 12.4	Condiciones de contorno modificadas y cargas .....	121
Figura 13.1	Elemento estructural continuo con un agujero en el centro .....	125
Figura 14.1	Elemento estructural continuo con un agujero en el centro .....	129
Figura 14.2	Modelo CAD 1 .....	131
Figura 14.3	Modelo CAD 2 .....	131
Figura 14.4	Modelo 3 de elementos finitos .....	133
Figura 15.1	Estructura metálica colocada en un marco de ensayos .....	141
Figura 15.2	Galga extensométrica por resistencia eléctrica .....	142
Figura 15.3	Puente de Wheatstone .....	145
Figura 15.4	Estructura metálica: geometría .....	147
Figura 15.5	Estructura metálica: modelo de nudos articulados .....	147
Figura 15.6	Estructura metálica: modelo de nudos rígidos .....	147
Figura I.1	Sistema de referencia cartesiano .....	151
Figura I.2	Sistema global .....	152
Figura I.3	Sistemas de coordenadas locales .....	152
Figura I.4	Sistemas de coordenadas X-Y y $x-y$ .....	153
Figura I.5	Ángulos entre sistemas de coordenadas .....	154
Figura I.6	Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura .....	158

Figura I.7	(a) Estructura a analizar; (b) fuerzas de empotramiento perfecto; (c) fuerzas exteriores y equivalentes .....	161
------------	--	-----

# LISTA DE SÍMBOLOS

---

## MAYÚSCULAS ROMANAS

$A$	Área de la sección transversal de un elemento.
$C$	Constante.
$D_i$	Desplazamiento del nudo $i$ .
$D_X (D_Y, D_Z)$	Desplazamiento en el eje $X (Y, Z)$ .
$E$	Módulo de elasticidad longitudinal.
$E$	Voltaje de excitación.
$F, F_i$	Fuerzas puntuales.
$F_X (F_Y, F_Z)$	Fuerza puntual según el eje $X (Y, Z)$ .
$F_H (F_V)$	Fuerza puntual horizontal (vertical).
$G$	Módulo de elasticidad transversal.
$G_X (G_Y, G_Z)$	Giro alrededor del eje $X (Y, Z)$ .
$I$	Momento de inercia.
$I_i$	Intensidad de corriente.
$J, I_t$	Módulo de torsión.
$K$	Factor de sensibilidad de galga.
$L$	Longitud.
$M$	Momento flector.
$M(x)$	Ley de momentos flectores.
$N, N_i$	Esfuerzos axiales.
$N_i, N_j, N_m$	Funciones de forma de los nodos $i, j$ y $m$ .
$P_{xi} (P_{yi})$	Fuerzas puntuales en el eje $x (y)$ en el punto $i$ .
$R$	Resistencia eléctrica.
$R_{xi} (R_{yi})$	Reacción según el eje $x (y)$ en el punto $i$ .
$T$	Temperatura.
$U^e$	Energía potencial total del elemento $e$ .

$V$	Esfuerzo cortante.
$V_{AC}$	Diferencia de potencial entre los puntos $A$ y $C$ .
$V_x (V_y, V_z)$	Esfuerzo cortante según el eje $x$ ( $y, z$ ) local.

### MAYÚSCULAS ROMANAS (VECTORES Y MATRICES)

<b>B</b>	Matriz geométrica.
<b>B<sub>i</sub> (B<sub>j</sub>, B<sub>m</sub>)</b>	Matriz geométrica para el nodo $i$ ( $j, m$ ).
<b>D</b>	Vector de desplazamientos generalizados.
<b>D</b>	Matriz de elasticidad.
<b>F<sup>e</sup></b>	Vector de fuerzas nodales en el elemento $e$ .
<b>I</b>	Matriz unidad.
<b>K</b>	Matriz de rigidez de la estructura.
<b>K<sup>e</sup></b>	Matriz de rigidez del elemento $e$ .
<b>K<sub>ij</sub></b>	Matriz de rigidez de un elemento en el sistema global.
<b>L</b>	Matriz operador lineal.
<b>N</b>	Matriz función de forma.
<b>P</b>	Vector de fuerzas puntuales generalizadas.
<b>R<sub>ij</sub></b>	Matriz de rotación del sistema global al local.

### MINÚSCULAS ROMANAS

$a, b, d, h, h_0$	Longitudes.
$b$	Número de barras en una estructura.
$e_b, t_a, t$	Espesores.
$dS$	Diferencial de superficie.
$dV$	Diferencial de volumen.
$d_{ij}$	Desplazamiento relativo, perpendicular al eje longitudinal, entre los extremos de una pieza.
$d_i (d_j)$	Desplazamiento del nudo $i$ ( $j$ ).
$e$	Variación de longitud de una barra debida al esfuerzo axial.
$e_i^0$	Variación de longitud de una barra debida a una variación de temperatura o a una falta de ajuste.
$f_{ck}$	Resistencia característica del hormigón.
$k$	Rigidez de un empotramiento elástico.
$k_t$	Factor de concentración de tensiones.
$m_i (m_j)$	Momento aplicado en el nudo $i$ ( $j$ ).
$n$	Número de nudos en una estructura.
$p$	Esfuerzos axiales.

$q$	Carga uniformemente repartida.
$q_h$	Carga uniformemente repartida horizontal.
$q_v$	Carga uniformemente repartida vertical.
$r$	Número de restricciones en una estructura.
$u$ ( $v$ )	Desplazamientos en dirección $x$ ( $y$ ).
$u_i$ ( $u_j, u_m$ )	Desplazamientos en dirección $x$ del nodo $i$ ( $j, m$ ).
$u_{iX}$ ( $u_{iY}$ )	Desplazamiento del nudo $i$ según el eje $X$ ( $Y$ ).
$v$	Desplazamiento en la dirección perpendicular al eje longitudinal del elemento.
$v_i$ ( $v_j, v_m$ )	Desplazamientos en dirección $y$ del nodo $i$ ( $j, m$ ).

### MINÚSCULAS ROMANAS (VECTORES Y MATRICES)

<b>a</b>	Vector de desplazamiento.
<b>a<sup>e</sup></b>	Vector de desplazamientos de los nodos del elemento $e$ .
<b>a<sub>i</sub></b> ( <b>a<sub>j</sub></b> , <b>a<sub>m</sub></b> )	Vectores de desplazamientos del nodo $i$ ( $j, m$ ).
<b>b</b>	Vector de carga volumétrica.
<b>d<sub>ij</sub></b>	Vector de desplazamientos del elemento $ij$ en el sistema local.
<b>f</b>	Vector de fuerzas de volumen.
<b>k<sub>ij</sub></b>	Matriz de rigidez del elemento $ij$ en el sistema local.
<b>p</b>	Vector de fuerzas superficiales.
<b>p<sub>ij</sub></b>	Vector de esfuerzos del elemento $ij$ .
<b>u</b>	Vector de desplazamientos.
<b>t</b>	Vector de carga superficial.

### MAYÚSCULAS GRIEGAS

$\Delta$	Incremento (de longitud, de temperatura, etc.).
----------	---

### MINÚSCULAS GRIEGAS

$\alpha$	Coefficiente de dilatación térmica.
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_i$	Constantes.
$\alpha, \beta$	Ángulos.
$\beta_{ij}$ ( $\beta_{ji}$ )	Factor de transmisión del extremo $i$ ( $j$ ) al extremo $j$ ( $i$ ) de la pieza $ij$ .
$\delta$	Deformación longitudinal.
$\delta$	Flecha.
$\varepsilon$	Deformación unitaria.
$\varepsilon_x$ ( $\varepsilon_y$ )	Deformación en dirección $x$ ( $y$ ).

$\phi_0$	Diámetro antes de la deformación.
$\phi$	Diámetro después de la deformación.
$\gamma_{xy}$	Deformación transversal $xy$ .
$\mu_{ij} (\mu_{ji})$	Momento de empotramiento perfecto en el extremo $i$ ( $j$ ) del elemento $ij$ .
$\theta_i$	Giro en un nudo $i$ .
$\theta_{ij} (\theta_{ji})$	Giro en el extremo $i$ ( $j$ ) de la pieza $ij$ .
$\rho$	Peso específico.
$\rho$	Resistividad del material.
$\sigma$	Tensión.
$\sigma_{eq}$	Tensión equivalente de Von Mises.
$\sigma_1, \sigma_2$	Tensiones principales.
$\sigma_x (\sigma_y)$	Tensión normal en dirección $x$ ( $y$ ).
$\tau(x)$	Ley de relación de inercias.
$\tau_{max}$	Tensión tangencial máxima.
$\tau_{xy}$	Tensión tangencial $xy$ .
$\nu$	Coefficiente de Poisson.

### MINÚSCULAS GRIEGAS (VECTORES Y MATRICES)

$\varepsilon$	Vector de deformaciones.
$\sigma$	Vector de tensiones.

# ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS. TEXTO GUÍA PARA PRÁCTICAS

---

## 1 INTRODUCCIÓN

Este texto guía se ha elaborado como apoyo a la realización de las prácticas de Análisis de Estructuras de las titulaciones de Ingeniería y Arquitectura.

El avance de las técnicas informáticas en los últimos años ha provocado un aumento de la capacidad de cálculo de los ordenadores. El desarrollo continuado del *hardware* y del *software* permite hoy en día el análisis de estructuras de gran tamaño y/o complejidad, impensable hace unos pocos años.

La mayor parte del texto está dedicado a las prácticas relacionadas con los métodos de análisis de estructuras con ordenador. Para las estructuras discretas, se proponen prácticas relacionadas con los métodos clásicos de análisis de estructuras, como paso previo a las prácticas relacionadas con los métodos matriciales (más adecuados para su implementación en programas de ordenador, debido al carácter sistemático de los mismos). Debido al aumento que está experimentando el uso del Método de los Elementos Finitos en la industria, se han incluido varias prácticas de programación y aplicación del método para el análisis de estructuras continuas.

Se ha incluido una práctica de análisis experimental para que los alumnos vean el comportamiento real de una estructura en carga y conozcan las técnicas de medida de desplazamientos, deformaciones y tensiones. Además, con esta práctica experimental, los alumnos pueden comparar el comportamiento real de la estructura con los resultados obtenidos mediante las técnicas numéricas.

Para la correcta realización de estas prácticas son necesarios los conocimientos proporcionados por la Mecánica, la Elasticidad y la Resistencia de Materiales. Para las prácticas de Análisis Matricial y del Método de los Elementos Finitos, es necesario, también, tener conocimientos de álgebra matricial y de cálculo numérico. Finalmente, para el desarrollo adecuado de las prácticas es necesario tener unos conocimientos elementales de programación, y conocer los sistemas operativos de los ordenadores personales (Windows2000/Me/XP).

## 2 ESTRUCTURA Y REALIZACIÓN DE LAS PRÁCTICAS

### 2.1 Estructura de las prácticas

Como regla general, en cada una de las prácticas aparecen los siguientes apartados:

- 1 **Objetivos.** Se exponen los objetivos globales y parciales de la práctica, con el fin de que el alumno conozca el problema que va a resolver y los conocimientos que va a adquirir.
- 2 **Fundamentos teóricos.** Se recogen los fundamentos teóricos más importantes y se complementan con otros necesarios para la realización de la práctica.
- 3 **Desarrollo de la práctica.** Se exponen los pasos que el alumno debe seguir en la realización de la práctica. En cada uno de los pasos se indican las *tareas y operaciones parciales a realizar*. Se indican también algunas *notas y cuestiones* que el alumno debe tener en cuenta para saber lo que está haciendo en cada momento y las alternativas existentes. Estas notas y cuestiones son muy importantes para que la práctica no se convierta en la simple realización de una serie de operaciones más o menos complejas.
- 4 **Actividades de aplicación.** Se proponen una serie de actividades que el alumno debe ser capaz de poder realizar como resultado de los conocimientos adquiridos y de las herramientas desarrolladas durante la práctica. Estas actividades son complementarias a la práctica, y sirven para que el alumno pueda profundizar más en el análisis de estructuras.
- 5 **Bibliografía.** Se recogen los libros y manuales necesarios para la realización de la práctica y para ampliar los conocimientos relacionados con la misma.
- 6 **Enlaces de interés.** Se recogen algunos enlaces a páginas web que pueden ser de interés para la realización de la práctica y para ampliar los conocimientos relacionados con la misma.
- 7 **Preguntas de evaluación de aprendizajes.** Se proponen una serie de cuestiones y/o problemas sobre los contenidos de la práctica. Estas preguntas pueden servir para que el alumno evalúe su nivel de conocimientos. Igual que las actividades de aplicación, estas preguntas no son actividades a realizar en el laboratorio.

En unos pocos casos, en función de las características particulares de la práctica, se suprime alguno de estos apartados o se incluye alguno nuevo.

### 2.2 Realización de las prácticas

Para la realización de las prácticas es recomendable formar grupos de dos o tres alumnos. Las sesiones de prácticas serán de dos o tres horas. En el horario de clases prácticas se realizarán las siguientes actividades:

- 1 explicación de la práctica por parte del profesor, con el objeto de resaltar los aspectos más importantes;
- 2 realización de la práctica y toma de datos, y
- 3 entrega de un borrador de la práctica con los resultados obtenidos.

En horario libre, cada grupo de prácticas deberá realizar la memoria completa de la práctica, elaborada según el modelo siguiente:

- 1 Portada:
  - Universidad, Escuela, Titulación, Curso y Asignatura;
  - número y título de la práctica;
  - número del grupo de prácticas y nombre y apellidos de los alumnos que lo forman, y

- fecha de realización de la práctica y fecha de entrega de la memoria.
- 2 Índices y listas:
    - índice de texto;
    - lista de figuras, y
    - lista de tablas.
  - 3 Desarrollo de la práctica:
    - listado de programas y diagramas de flujo (en caso de realizar programas de ordenador);
    - listado de ficheros de datos y de resultados, y
    - tablas, gráficos, figuras, etc.
  - 4 Análisis de los resultados y conclusiones:
    - análisis de resultados (tablas, gráficos y figuras), y
    - conclusiones.
  - 5 Actividades de aplicación realizadas (optativo).
  - 6 Preguntas de evaluación de aprendizajes resueltas (optativo).

El plazo de entrega de la memoria es de dos semanas desde la fecha de realización de la práctica en el laboratorio. En un plazo de dos semanas deben corregir las memorias de las prácticas y devolverlas a los alumnos, con el objeto de que estos conozcan los resultados y puedan mejorar sus conocimientos de análisis de estructuras.

### 3 OBJETIVOS DE LAS PRÁCTICAS

El objetivo global de las prácticas de *Análisis de Estructuras* es que el alumno tenga los *conocimientos suficientes para poder modelar y analizar las estructuras que tendrá que diseñar durante su vida profesional*. Para cumplir este objetivo global es necesario conseguir tres objetivos parciales: *consolidar los conocimientos teóricos adquiridos en las clases de teoría; y aprender a utilizar programas de ordenador académicos y/o comerciales, y conocer las técnicas experimentales de medida de desplazamiento, deformaciones y tensiones*.

### 4 PROGRAMA DE PRÁCTICAS

Para cumplir los objetivos señalados en el apartado anterior se han elaborado 15 prácticas, divididas en cuatro bloques:

- **Familiarización con las herramientas necesarias para el análisis numérico de estructuras**

Práctica 1: Utilización del programa de cálculo numérico MATLAB.

- **Realización de programas de ordenador de aplicación de los fundamentos teóricos del análisis de estructuras**

Práctica 2: Análisis matricial de estructuras articuladas isostáticas por el método de los nudos.

Práctica 3: Determinación de las características elásticas de una pieza de inercia variable.

Práctica 5: Desarrollo de un programa de análisis matricial de estructuras de nudos articulados.

Práctica 6: Desarrollo de un programa de análisis matricial de estructuras de nudos rígidos.

Práctica 10: Determinación de la carga crítica de pandeo global de una estructura.

Práctica 11: Desarrollo de un programa de análisis por elementos finitos.

- **Utilización de programas de ordenador académicos y comerciales**

Práctica 4: Obtención directa de la matriz de rigidez de una estructura.

Práctica 7: Análisis de una estructura plana de nudos rígidos.

Práctica 8: Análisis de una estructura espacial de nudos rígidos.

Práctica 9: Análisis de un emparrillado de cimentación.

Práctica 12: Análisis de errores en el método de los elementos finitos.

Práctica 13: Modelado y análisis de un elemento estructural continuo, mediante el programa de elementos finitos AMEF.

Práctica 14: Modelado y análisis de un elemento estructural continuo, mediante el programa de elementos finitos ANSYS.

- **Análisis experimental de estructuras**

Práctica 15: Análisis experimental de una estructura metálica con técnicas de extensometría eléctrica.

## Práctica 1

# UTILIZACIÓN DEL PROGRAMA DE CÁLCULO NUMÉRICO MATLAB

### 1 OBJETIVOS

El objetivo global de la práctica es familiarizar al alumno con las herramientas modernas de cálculo numérico adecuadas para la resolución de problemas de análisis de estructuras.

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Conocer los comandos más útiles de MATLAB para resolver problemas de análisis de estructuras.
- 2 Realizar un programa, mediante comandos de MATLAB, para obtener las reacciones y esfuerzos de la viga de la Fig. 1.1.

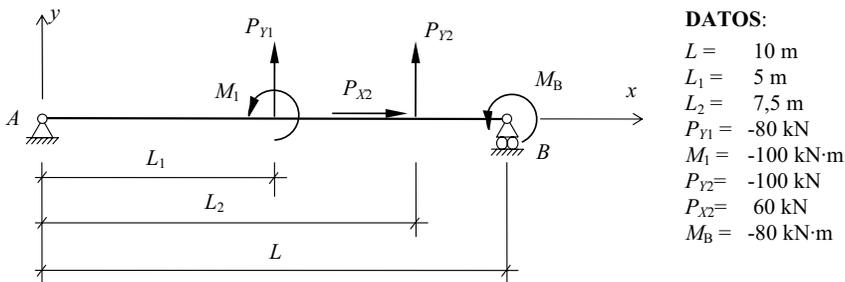


Figura 1.1 Viga a analizar.

### 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Las expresiones de las reacciones y esfuerzos de la viga de la Fig. 1.1 son las siguientes:

- 1 Reacciones a partir de las ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_Y = 0; \sum F_X = 0; \sum M = 0 \quad (1.1a)$$

se obtiene

$$R_{XA} = -\sum_{i=1}^n P_{Xi} \quad (1.1b)$$

$$R_{YA} = -\frac{\sum_{i=1}^n (P_{Yi}(L - L_i) - M_i)}{L} \quad (1.1c)$$

$$R_{YB} = -\sum_{i=1}^n P_{Yi} - R_{YA} \quad (1.1d)$$

- 2 Esfuerzos cortantes: sumando reacciones y fuerzas verticales a la izquierda de la sección considerada (positivo según eje  $y$ )

$$V(x < L_j) = R_{YA} - \sum_{k=1}^{j-1} P_{Yk} \quad (1.2)$$

- 3 Momentos flectores: sumando momentos a la izquierda de la sección considerada (horario positivo)

$$M(x < L_j) = R_{YA}x - \sum_{k=1}^{j-1} [P_{Yk}(x - L_k) - M_k] \quad (1.3)$$

- 4 Esfuerzos axiales: sumando reacciones y fuerzas horizontales a la izquierda de la sección considerada (positivo según eje  $x$ )

$$V(x < L_j) = R_{YA} - \sum_{k=1}^{j-1} P_{Yk} \quad (1.4)$$

Para más detalles puede consultarse la bibliografía Rodríguez-Avial, 1993.

### 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

#### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP, y
- programa MATLAB, versión 4.0 o superior para Windows.

#### 3.2 Comandos de MATLAB

Los comandos de MATLAB necesarios para desarrollar un programa de análisis para la viga de la Fig. 1.1 son:

COMANDOS	DESCRIPCIÓN	EJEMPLO DE USO
help	Proporciona textos de ayuda sobre comandos MATLAB.	help format
%	Delante de un texto hace que MATLAB lo considere como comentario (no ejecutable).	% esto es un comentario

COMANDOS	DESCRIPCIÓN	EJEMPLO DE USO
format	Define el formato para la escritura de datos.	format long format long e
diary	Define el fichero de salida de resultados.	diary salida.res
input	Da mensaje para la introducción de datos por el teclado y los asigna a una variable.	s=input('introducir "s" ')
disp	Escribe el valor de una variable.	disp(area)
for k = 1:n operación end	Repite una operación o grupo de operaciones $n$ veces.	for n = 1:10 disp(n) end
if condición operación 1 else operación 2 end	Selecciona una/s operación/es en función de que se cumpla o no una condición lógica.	if a > 1 a = a-1 else a = a+1 end
plot	Representa gráficamente un/os vector/es.	plot(Vx, Vy, Vz)
grid	Genera una retícula en una representación gráfica.	plot(Vy) grid
title	Añade un título general en una representación gráfica.	plot(Vy) title('esfuerzos cortantes')
xlabel	Añade un nombre al eje de abcisas en una representación gráfica.	plot(Vy) xlabel('metros')
ylabel	Añade un nombre al eje de ordenadas en una representación gráfica.	plot(Vy) ylabel('toneladas')

### 3.3 Desarrollo del programa de análisis de la viga con comandos de MATLAB

Se propone el siguiente esquema de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
1	Elaboración del diagrama de flujo.			
2	Definiciones iniciales.	Encabezamiento. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Formatos numéricos.</li> <li>• Ficheros de resultados.</li> <li>• Lectura de datos.</li> </ul>	% format diary input	En el encabezamiento se incluirá: <ul style="list-style-type: none"> <li>- nº del grupo;</li> <li>- alumnos del grupo, y</li> <li>- fecha de realización.</li> </ul>
3	Entrada de datos.	Geometría. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Restricciones.</li> <li>• Cargas.</li> </ul>	input eval	
4	Cálculo de reacciones.			Expresiones (1.1b), (1.1c) y (1.1d).

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
5	Cálculo de las leyes de esfuerzos cortantes, momentos flectores y esfuerzos axiales.		<pre>for ... end if ... else ... end</pre>	<p>Para la elección del intervalo de cálculo hay que tener en cuenta que hay que obtener los valores máximos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Expresiones (1.2, 1.3 y 1.4).</li> </ul>
6	Gráficas de los diagramas de esfuerzos.	<p>Diagrama de cortantes.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Diagrama de flectores.</li> <li>• Diagrama de axiales.</li> </ul>	<pre>plot title xlabel ylabel grid</pre>	<p>Señalar los valores máximos y las secciones de abscisa <math>x</math> donde se producen.</p>

### 3.4 Memoria de la práctica

Se realizará de acuerdo con las directrices generales, y deberá incluir, como mínimo:

- 1 El diagrama de flujo del programa desarrollado;
- 2 el listado del programa, y
- 3 las gráficas de los diagramas de esfuerzos.

## 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Ampliación del programa desarrollado para poder considerar cargas uniformemente repartidas.
- 2 Ampliación del programa desarrollado para poder calcular y dibujar la deformada de la viga.

## 5 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Harrison, H.B. *Structural analysis design: some microcomputer applications (2 tomos)*. Oxford: Pergamon Press, 1990.
- 2 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: user guide*. Natick: The MathWorks, 1996.
- 3 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: reference guide*. Natick: The MathWorks, 1996.
- 4 MATLAB *Resumen de comandos para prácticas de análisis de estructuras*. Área de MMCyTE, UPCT, Cartagena, 2006.
- 5 Rodríguez-Avial, F. *Resistencia de materiales (2 tomos)*. Sección de Publicaciones ETSII Universidad Politécnica, Madrid, 1993.

## 6 ENLACES DE INTERÉS

- 1 [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)
- 2 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)

## Práctica 2

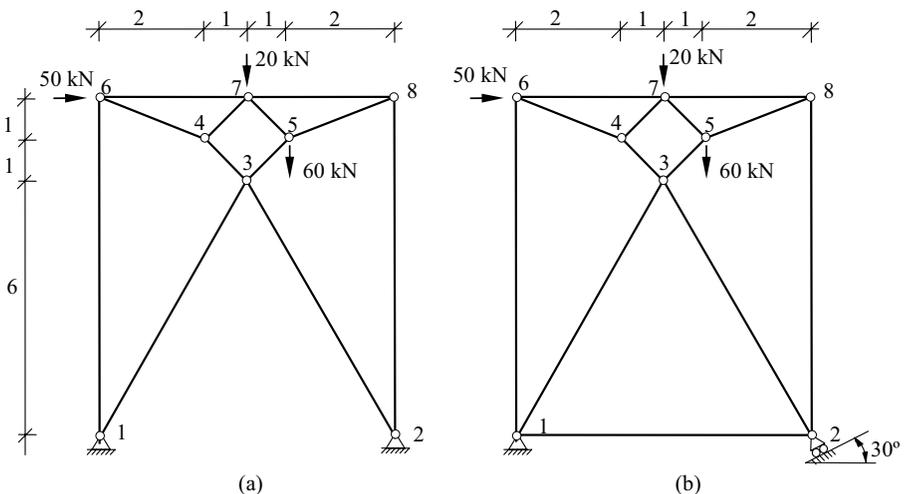
# ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS ARTICULADAS ISOSTÁTICAS POR EL MÉTODO DE LOS NUDOS

### 1 OBJETIVOS

El objetivo global de la práctica es desarrollar y aplicar un programa de análisis matricial de estructuras articuladas isostáticas basado en el método de los nudos. Se pretende que el alumno adquiera experiencia en el desarrollo y utilización de programas de ordenador sencillos, y conozca la problemática asociada con casos particulares de inestabilidad o condiciones de apoyo especiales.

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Desarrollar, mediante comandos de MATLAB, un programa de análisis matricial de estructuras articuladas isostáticas por el método de los nudos.
- 2 Aplicar el programa desarrollado para analizar las estructuras de la Fig. 2.1.

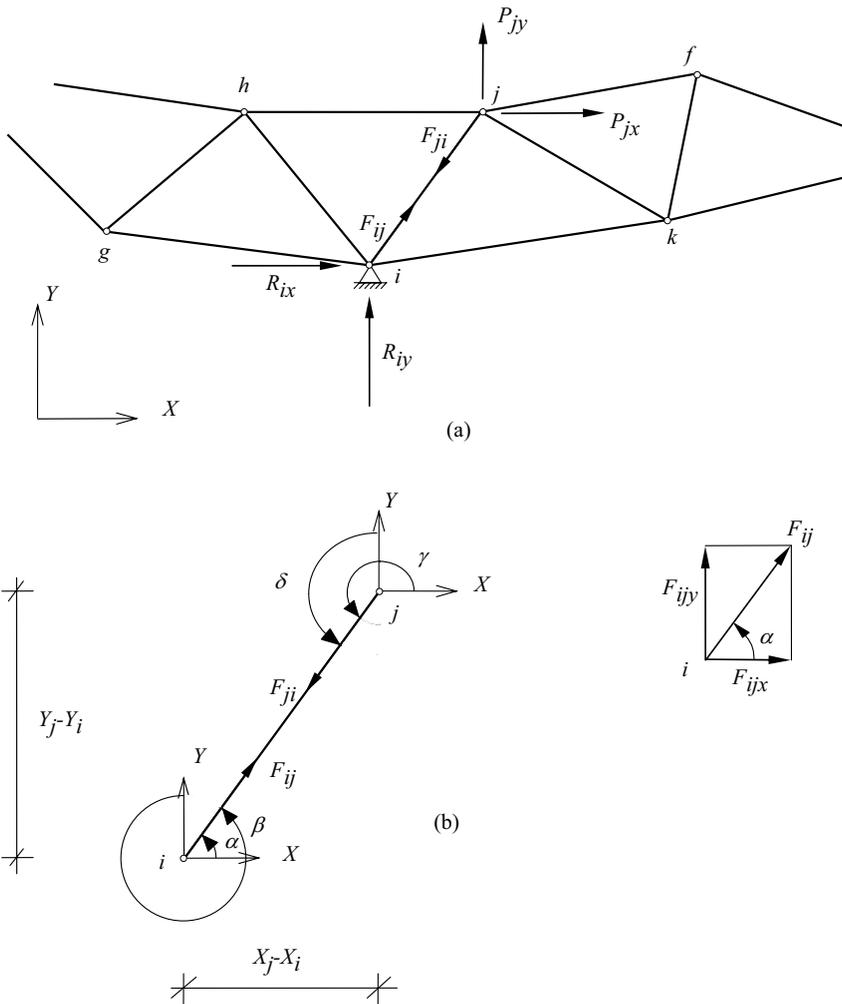


NOTA: longitudes en metros

**Figura 2.1** Estructuras a analizar.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Se expone a continuación la formulación matricial del método de los nudos. Una exposición más completa de la formulación matricial puede encontrarse en la bibliografía (Martí, 2003; West, 1984). Los fundamentos del método de los nudos pueden encontrarse, además, en (Norris, 1982).



**Figura 2.2** Sistemas de coordenadas, fuerzas y esfuerzos.

En una estructura plana de nudos articulados, estáticamente determinada, se cumple:

- 1 en cada uno de los  $n$  nudos hay un sistema de fuerzas concurrentes, para el que pueden plantearse dos ecuaciones independientes de equilibrio, y
- 2 el número total de incógnitas ( $b$  esfuerzos en las barras y  $r$  reacciones en los apoyos) es igual al número de ecuaciones de equilibrio de fuerzas ( $2n$ ).

Se aísla la barra  $ij$  de la Fig. 2.2. Los criterios adoptados para el análisis son:

- Las fuerzas exteriores (fuerzas aplicadas y reacciones) se suponen positivas si actúan en las direcciones positivas del sistema de ejes cartesiano  $X$ - $Y$ .
- Las fuerzas en las barras se toman de forma que su sentido corresponda a un esfuerzo de tracción sobre la barra.
- En todos los equilibrios se consideran *acciones sobre los nudos*.

En el extremo  $i$  de la barra  $i$ - $j$ , la fuerza  $F_{ij}$  se puede descomponer en sus componentes  $F_{ijx}$  e  $F_{ijy}$ , dadas por las expresiones

$$F_{ijx} = F_{ij} \cos \alpha = F_{ij} \frac{X_j - X_i}{L_{ij}} = F_{ij} l_{ij} \quad (2.1a)$$

$$F_{ijy} = F_{ij} \cos \beta = F_{ij} \frac{Y_j - Y_i}{L_{ij}} = F_{ij} m_{ij} \quad (2.1b)$$

En estas expresiones  $l_{ij}$  y  $m_{ij}$  son los *cosenos directores* de la barra  $ij$ , ya que dan los cosenos de los ángulos (medidos en sentido contrario a las agujas del reloj) entre los ejes  $X$  e  $Y$ , y la barra.

En el extremo  $j$ , la fuerza  $F_{ji}$  se descompone en sus componentes  $F_{jix}$  y  $F_{jiy}$ , dadas por las expresiones

$$F_{jix} = F_{ji} \cos \gamma = F_{ji} \frac{X_i - X_j}{L_{ij}} = F_{ji} l_{ji} \quad (2.2a)$$

$$F_{jiy} = F_{ji} \cos \delta = F_{ji} \frac{Y_i - Y_j}{L_{ij}} = F_{ji} m_{ji} \quad (2.2b)$$

siendo  $l_{ji}$  y  $m_{ji}$  los cosenos directores de la barra  $ji$ .

Debido al equilibrio interno en la barra,  $F_{ij} = F_{ji}$ . Por otro lado, viendo las ecuaciones (2.1) y (2.2) se observa que  $l_{ij} = -l_{ji}$  y que  $m_{ij} = -m_{ji}$ . Así pues, puede escribirse

$$F_{ijx} = F_{ij} l_{ij} \quad (2.3a)$$

$$F_{ijy} = F_{ij} m_{ij} \quad (2.3b)$$

$$F_{jix} = F_{ij} (-l_{ij}) = -F_{ijx} \quad (2.3c)$$

$$F_{jiy} = F_{ij} (-m_{ij}) = -F_{ijy} \quad (2.3d)$$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio a los nudos  $i$  y  $j$  se tiene

$$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow F_{igx} + F_{ihx} + F_{ijx} + F_{ikx} + R_{ix} = 0 \quad (2.4a)$$

$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow F_{igy} + F_{ihy} + F_{ijy} + F_{iky} + R_{iy} = 0 \quad (2.4b)$$

$$\sum F_{jx} = 0 \Rightarrow F_{jtx} + F_{jix} + F_{jcx} + F_{jfx} + P_{jx} = 0 \quad (2.4c)$$

$$\sum F_{jy} = 0 \Rightarrow F_{jhy} + F_{jiy} + F_{jky} + F_{jfy} + P_{jy} = 0 \quad (2.4d)$$

Utilizando las ecuaciones (2.3), las ecuaciones (2.4) quedan en la forma siguiente

$$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow F_{ig} l_{ig} + F_{ih} l_{ih} + F_{ij} l_{ij} + F_{ik} l_{ik} + R_{ix} = 0 \tag{2.5a}$$

$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow F_{ig} m_{ig} + F_{ih} m_{ih} + F_{ij} m_{ij} + F_{ik} m_{ik} + R_{iy} = 0 \tag{2.5b}$$

$$\sum F_{jx} = 0 \Rightarrow F_{jh} l_{jh} - F_{ji} l_{ij} + F_{jk} l_{jk} + F_{jf} l_{jf} + P_{jx} = 0 \tag{2.5c}$$

$$\sum F_{jy} = 0 \Rightarrow F_{jh} m_{jh} - F_{ji} m_{ij} + F_{jk} m_{jk} + F_{jf} m_{jf} + P_{jy} = 0 \tag{2.5d}$$

Si la estructura tiene un total de  $n$  nudos, se pueden escribir  $2n$  ecuaciones similares a estas. En forma matricial estas ecuaciones son

$$\begin{array}{c}
 \text{barra/reacción} \\
 \dots \quad i_g \quad i_h \quad i_k \quad i_j \quad j_h \quad j_k \quad j_f \quad \dots \quad R_{ix} \quad R_{iy} \quad \dots
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 0 & 0 & 0 & l_{ig} & l_{ih} & l_{ik} & l_{ij} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & m_{ig} & m_{ih} & m_{ik} & m_{ij} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{ij} & l_{jh} & l_{jk} & l_{jf} & \dots & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{ij} & m_{jh} & m_{jk} & m_{jf} & \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 R_{ix} \\
 R_{iy} \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_{ig} \\
 F_{ih} \\
 F_{ik} \\
 F_{ij} \\
 F_{jh} \\
 F_{jk} \\
 F_{jf} \\
 \vdots \\
 R_{ix} \\
 R_{iy} \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \vdots \\
 \vdots \\
 0 \\
 0 \\
 -P_{jx} \\
 -P_{jy} \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 \tag{2.6}$$

$(2n \times 2n)$   $(2n \times 1)$   $(2n \times 1)$

Puesto que hay  $2n$  ecuaciones, no pueden haber más de  $2n$  incógnitas. Si hubiera más de  $2n$  incógnitas, el sistema sería indeterminado. Por el contrario, si hubiera menos de  $2n$  incógnitas, no habría una solución única, lo que indicaría que la estructura es inestable. La ecuación (2.6) puede ponerse en forma abreviada como

$$\mathbf{C F} = - \mathbf{P} \tag{2.7}$$

siendo  $\mathbf{C}$  la matriz de cosenos directores,  $\mathbf{F}$  el vector de fuerzas en barras y reacciones desconocidas, y  $\mathbf{P}$  el vector de fuerzas exteriores. Formalmente, la solución de este sistema de ecuaciones de equilibrio se puede poner en la forma

$$\mathbf{F} = - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P} \tag{2.8}$$

siendo  $\mathbf{C}^{-1}$  la inversa de la matriz  $\mathbf{C}$ . Para que la estructura sea inestable es necesario que no exista la matriz inversa  $\mathbf{C}^{-1}$ . Esto se produce cuando el determinante de la matriz  $\mathbf{C}$  es igual a cero.

En la Fig. 2.3 se muestra un posible diagrama de flujo para implementar un programa de ordenador basado en el desarrollo teórico anterior.

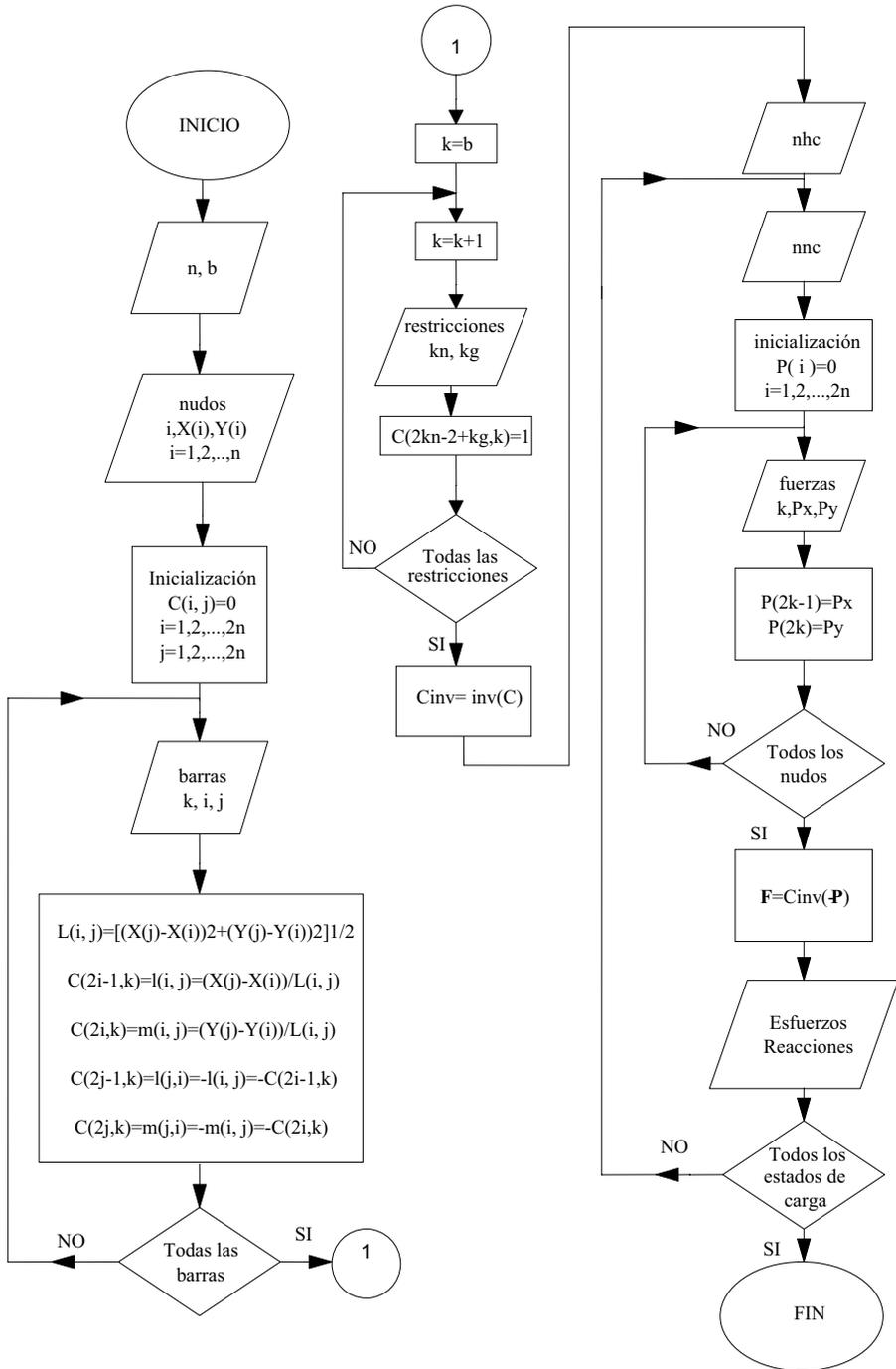


Figura 2.3 Formulación matricial del método de los nudos. Diagrama de flujo.

### 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

#### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP, y
- programa MATLAB, versión 4.0 o superior para Windows.

#### 3.2 Desarrollo de un programa de análisis matricial de estructuras articuladas isostáticas basado en el método de los nudos

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
1	Definiciones iniciales.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Encabezamiento.</li> <li>• Formatos numéricos.</li> <li>• Ficheros de resultados.</li> </ul>	<pre>% format diary</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En el encabezamiento se incluirá: <ul style="list-style-type: none"> <li>- nº del grupo;</li> <li>- alumnos del grupo, y</li> <li>- fecha de realización.</li> </ul> </li> </ul>
2	Entrada de datos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Coordenadas.</li> <li>• Elementos.</li> <li>• Restricciones.</li> <li>• Cargas.</li> </ul>	<pre>input eval fopen fscanf fclose sort for var.=exp. Declaración end</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se planteará la utilidad de hacer la lectura con una interface gráfica de usuario más avanzada.</li> </ul>
3	Cálculo de la matriz de coeficientes ( <b>C</b> ).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cálculo de cosenos directores.</li> <li>• Cálculo de columnas de la matriz <b>C</b> para restricciones.</li> </ul>	<pre>for var.=exp. Declaración end if variable declarac. 1 else declarac. 2 end sqrt</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diagrama de flujo de la Fig. 2.3.</li> <li>• Ecuación (2.6).</li> </ul>
4	Cálculo de los vectores de fuerzas en los nudos ( <b>P</b> ).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Obtener el vector de fuerzas exteriores (<b>P</b>) para cada estado de carga.</li> </ul>	<pre>for var.=exp. declaración end</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diagrama de flujo de la Fig. 2.3.</li> </ul>
5	Obtención de los esfuerzos en las barras y de las reacciones.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Obtener la inversa de la matriz <b>C</b>.</li> </ul>	<pre>inv .*</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diagrama de flujo de la Fig. 2.3.</li> <li>• Ecuación (2.8).</li> </ul>

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Obtener el vector de esfuerzos en las barras y reacciones (F) para cada estado de carga.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Solo es necesario calcular la inversa una vez.</li> </ul>
6	Salida de resultados de esfuerzos y reacciones.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Esfuerzos.</li> <li>• Reacciones.</li> </ul>	<pre>disp plot grid title xlabel ylabel</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Para cada estado de carga.</li> <li>• Representaciones numéricas y gráficas.</li> </ul>

### 3.3 Análisis de dos estructuras complejas con el programa desarrollado

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	NOTAS Y CUESTIONES
1	Analizar la estructura de la Fig. 2.1a.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entrada de datos.</li> <li>• Ejecución.</li> <li>• Análisis de resultados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprobar, mediante las ecuaciones de equilibrio, que el problema está bien resuelto.</li> </ul>
2	Provocar una inestabilidad estática.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Provocar una inestabilidad estática.</li> <li>• Analizar la respuesta del programa.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tener en cuenta que la estructura debe cumplir que <math>b+r = 2n</math>, siendo: <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>b = n^\circ</math> de barras</li> <li>- <math>r = n^\circ</math> de restricciones</li> <li>- <math>n = n^\circ</math> de nudos.</li> </ul> </li> </ul>
3	Provocar una inestabilidad geométrica.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Provocar una inestabilidad geométrica.</li> <li>• Analizar la respuesta del programa.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tener en cuenta que la estructura debe cumplir que <math>b+r = 2n</math>.</li> </ul>
4	Sin modificar el programa, ni cambiar el sistema de coordenadas global, analizar la estructura de la Fig. 2.1b.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realizar una nueva entrada de datos añadiendo la barra horizontal entre los nudos 1 y 2, y cambiando el apoyo del nudo 2 para que sea inclinado.</li> <li>• Ejecución.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El programa desarrollado no puede considerar, directamente, apoyos inclinados. Hay que simularlos.</li> </ul>

### 3.4 Memoria de la práctica

Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 1 El diagrama de flujo del programa propuesto en el apartado 3.2;
- 2 el listado del programa, y
- 3 los gráficos, tablas, Figs., etc., necesarios para explicar lo realizado en los puntos de la tabla del apartado 3.3.

## 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Ampliación del programa para analizar estructuras articuladas espaciales.

- Ampliación del programa para analizar estructuras articuladas con apoyos inclinados.

## 5 BIBLIOGRAFÍA

- Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.
- MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: user guide*. Natick: The MathWorks, 1996.
- MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: reference guide*. Natick: The MathWorks, 1996.
- MATLAB *Resumen de comandos para prácticas de análisis de estructuras*. Área de MMCyTE, UPCT, Cartagena, 2006.
- Norris, Ch.H.; Wilbur, J.B., y Utku, S. *Análisis Elemental de Estructuras*, 2ª ed., McGraw-Hill, Bogotá, 1982.
- West, H.H. *Análisis de Estructuras. Una Integración de los Métodos Clásicos y Modernos*. CECSA, México, New York, 1984.

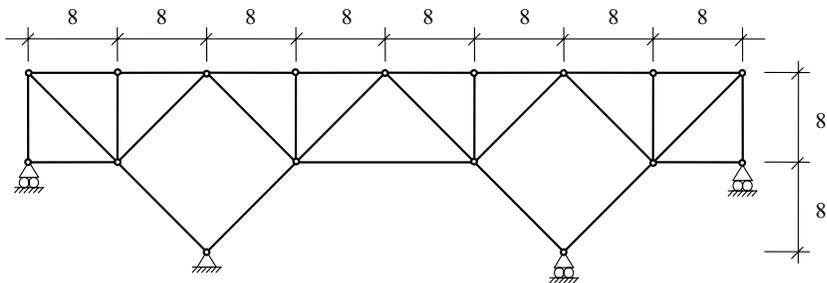
## 6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

### 6.1 Cuestiones

- Demostrar que las inestabilidades estática y geométrica de una estructura isostática no dependen de las fuerzas aplicadas sobre la estructura.
- ¿Como se detecta, utilizando un programa de análisis matricial de estructuras basado en el método de los nudos, que una estructura de nudos articulados es estable, inestable, isostática o hiperestática?

### 6.2 Problemas

- Utilizando un programa de análisis matricial de estructuras basado en el método de los nudos, demostrar que la estructura de la Fig. 2.4 es inestable.



NOTA: longitudes en metros

**Figura 2.4** Estructura inestable.

## 7 ENLACES DE INTERÉS

- [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)
- [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)

# ANEXO 2.1 LISTADO DEL PROGRAMA

## *ANMAT*

---

### 1 INTRODUCCIÓN

Se da a continuación el listado de un programa modelo (ANMAT) realizado con MATLAB. Este listado puede servir de apoyo para la realización de la primera parte de la práctica, como medio de comprobación de los resultados del programa realizado y como programa para resolver otros problemas.

Este programa, implementado según el diagrama de flujo de la Fig. 2.3, está en el fichero *anmat.m*. Los datos de la estructura a analizar (Fig. 2.1 a), están en el fichero *datos.dat*. Ambos ficheros están en el soporte informático que se adjunta con el texto de prácticas.

### 2 LISTADO DEL PROGRAMA *ANMAT*

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Programa ANMAT para el analisis matricial de estructuras
% articuladas isostaticas planas por el metodo de los nudos
%
% Fichero anmat.m
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Inicio
% *****
clear all
format compact

% Fichero de escritura de resultados
% *****
lec_fich=0;
while lec_fich == 0
    fich_dat=input('introducir nombre de fichero de datos ','s');
    esc_fich=input('¿quiere escritura de resultados en un fichero? [si/no]','s');
    if esc_fich == 'si'
        fich_res=input('introducir nombre de fichero de resultados ','s');
        eval(['delete ',fich_res])
        eval(['diary ',fich_res])
        diary on
    end
end

% Entrada de datos
% *****
% Apertura del fichero de datos
% =====
fid=fopen(fich_dat,'rt');
if fid == -1
    disp(';;NO EXISTE EL FICHERO!!!');
    lec_fich=0;
else
    lec_fich=1;
end
end

% Lectura del numero de nudos (n) y de barras (b)
% =====
[txt]=fscanf(fid,'%s',4);
[n]=fscanf(fid,'%i',1);
[txt]=fscanf(fid,'%s',1);
[b]=fscanf(fid,'%i',1);
[txt]=fscanf(fid,'%s',1);

% Lectura de coordenadas X e Y de los nudos
% =====
for i_coor=1:n

```

```

    [nn(i_coor)]=fscanf(fid,'%i',1);
    [xn(i_coor)]=fscanf(fid,'%f',1);
    [yn(i_coor)]=fscanf(fid,'%f',1);
end

% Ordena los datos de coordenadas del nudo 1 al nudo n
% =====
coor=[nn' xn' yn'];
[coor(:,1),i_nn]=sort(coor(:,1));
for i_ord=1:n
    coor(i_ord,2)=xn(1,i_nn(i_ord));
    coor(i_ord,3)=yn(1,i_nn(i_ord));
end
x=coor(:,2);
y=coor(:,3);

% Lectura de barras
% =====
[txt]=fscanf(fid,'%s',1);
for i_barras=1:b

% Numero de la barra
% -----
[kb(i_barras)]=fscanf(fid,'%i',1);

% Nudo inicial de la barra
% -----
[ib(i_barras)]=fscanf(fid,'%i',1);

% Nudo final de la barra
% -----
[jb(i_barras)]=fscanf(fid,'%i',1);
end

% Lectura de restricciones
% =====
[txt]=fscanf(fid,'%s',1);
r=2*n-b;
for i_rest=1:r

% Numero del nudo restringido
% -----
[kn(i_rest)]=fscanf(fid,'%i',1);

% Grado de libertad restringido: 1 = X ; 2 = Y
% -----
[kg(i_rest)]=fscanf(fid,'%i',1);
end

% Lectura de los vectores de fuerzas en los nudos
% =====
[txt]=fscanf(fid,'%s',2);

% Numero de hipotesis de carga
% -----
nhc=fscanf(fid,'%i',1);
add=0;
for i_nhc=1:nhc
    [txt]=fscanf(fid,'%s',1);

% Numero de nudos cargados en la hipotesis de carga i_nhc
% -----
nnc=fscanf(fid,'%i',1);
for i_nnc=1:nnc
    [p(i_nnc+add,1)]=i_nhc;
    [p(i_nnc+add,2)]=fscanf(fid,'%i',1);
    [p(i_nnc+add,3)]=fscanf(fid,'%f',1);
    [p(i_nnc+add,4)]=fscanf(fid,'%f',1);
end
    add=add+nnc;
end

% Cierre del fichero de datos
% =====
status=fclose(fid);

% Matriz de coeficientes (C)
% *****
% Inicializacion de vectores y matrices
% =====
c=zeros(b+r,b+r);
info=zeros(r,2);

% Matriz de coeficientes C: cosenos directores de las barras
% =====

```

```

for i_cos=1:b
    k=kb(i_cos);
    i=ib(i_cos);
    j=jb(i_cos);
    L=(sqrt((x(j)-x(i))^2 + (y(j)-y(i))^2));
    c(2*i-1,k)=(x(j)-x(i))/L;
    c(2*i,k)=(y(j)-y(i))/L;
    c(2*j-1,k)=-c(2*i-1,k);
    c(2*j,k)=-c(2*i,k);
end

% Matriz de coeficientes C: cosenos directores de las reacciones
% =====
for i_res=1:r
    c(2*kn(i_res)-2+kg(i_res),i_res+b)=1;
end

% Matriz de informacion para escritura de reacciones
% =====
if kg(i_res)==1
    info(i_res,1)=kn(i_res);
else
    info(i_res,2)=kn(i_res);
end
end

% Analisis por hipotesis de carga
% *****
% Inicializacion de vectores y matrices
% =====
q=zeros(2*n,1);
f=zeros(2*n,1);

% Calculo de la inversa de la matriz de coeficientes C
% =====
cinv=inv(c);

% Analisis
% =====
for a=1:nhc

% Calculo del vector de fuerzas en nudos
% -----
d=1;
for i_carg=1:size(p,1)
    if p(i_carg,1) == a
        q(2*i_carg,2)-1=-p(i_carg,3);
        q(2*i_carg,2)=-p(i_carg,4);
    end
end

% Resolucion del sistema de ecuaciones de equilibrio
% -----
f=cinv*q;

% Salida de resultados
% *****
disp('=====')
disp(['hipotesis ' num2str(a)])
disp('=====')
disp(' Barra Esfuerzo ')
disp('-----')
for i_esf=1:b,
    disp([num2str(i_esf), ' ', num2str(f(i_esf))])
end
disp('-----')
disp(' Reacciones ')
disp('-----')
for i_reac=b+1:2*n,
    if info(i_reac-b,1)~=0
        nudo=info(i_reac-b,1);
        disp(['reaccion en X nudo ',num2str(nudo), ' = ',num2str(f(i_reac))]);
    elseif info(i_reac-b,2)~=0
        nudo=info(i_reac-b,2);
        disp(['reaccion en Y nudo ',num2str(nudo), ' = ',num2str(f(i_reac))]);
    end
end
end
diary off

```

### 3 LISTADO DE *DATOS*

DATOS DE CONTROL

NN= 8 NB= 12

COORDENADAS

7	3.0	8.0
2	6.0	0.0
4	2.0	7.0
6	0.0	8.0
5	4.0	7.0
3	3.0	6.0
1	0.0	0.0
8	6.0	8.0

ELEMENTOS

1	1	6
8	6	7
5	4	6
7	4	7
6	3	4
2	1	3
11	3	5
10	5	7
9	7	8
12	5	8
4	2	8
3	2	3

RESTRICCIONES

1	1
1	2
2	1
2	2

CARGAS

NHC= 2

NNC= 3

6	50.0	0.0
5	0.0	-60.0
7	0.0	-20.0

NNC= 3

6	-50.0	0.0
5	-0.0	60.0
7	-0.0	20.0

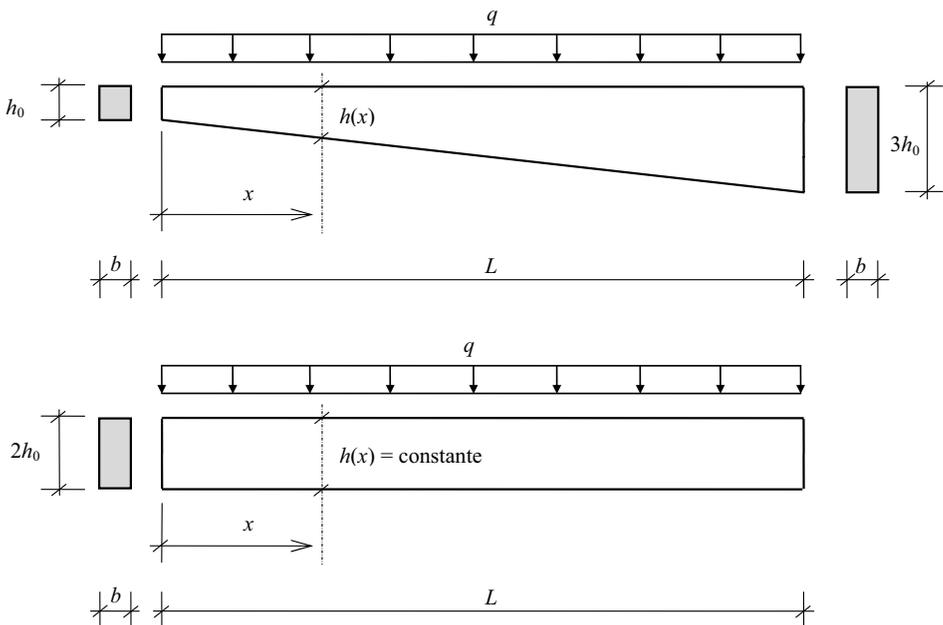
## Práctica 3

# DETERMINACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS ELÁSTICAS DE UNA PIEZA DE INERCIA VARIABLE

---

### 1 OBJETIVOS

El objetivo global de la práctica es obtener las características elásticas y los momentos de empotramiento perfecto de una pieza de inercia variable.



**DATOS:**  $E = 19 \text{ GPa}$ ;  $L = 10 \text{ m}$ ;  $b = 0,3 \text{ m}$ ;  $h_0 = 0,4 \text{ m}$ ;  $q = 20 \text{ kN/m}$ .

**Figura 3.1** Pieza de inercia variable y pieza de inercia constante.

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Desarrollar, mediante comandos de MATLAB, un programa que calcule los momentos de empotramiento perfecto y las características elásticas de las piezas de la figura 3.1:
  - 1.1 momentos de empotramiento perfecto:
    - 1.1.1 para la pieza empotrada en el extremo  $i$  y empotrada en el extremo  $j$ ,
    - 1.1.2 para la pieza empotrada en el extremo  $i$  y articulada en el extremo  $j$ , y
    - 1.1.3 para la pieza articulada en el extremo  $i$  y empotrada en el extremo  $j$ .
  - 1.2 factores de transmisión.
  - 1.3 rigideces al giro:
    - 1.3.1 en el extremo  $i$  de la pieza con el extremo  $j$  empotrado,
    - 1.3.2 en el extremo  $j$  de la pieza con el extremo  $i$  empotrado,
    - 1.3.3 en el extremo  $i$  de la pieza con el extremo  $j$  articulado, y
    - 1.3.4 en el extremo  $j$  de la pieza con el extremo  $i$  articulado.
- 2 Incluir en el programa el cálculo de los giros, la flecha máxima y la sección de abscisa  $x_{fmax}$  donde se produce.
- 3 Comparar los resultados y comentar cómo les afectan las variaciones de geometría y de condiciones de contorno.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Se exponen a continuación las expresiones necesarias para obtener las características elásticas y los momentos de empotramiento perfecto de piezas rectas de inercia variable. Una exposición más completa de la formulación puede encontrarse en la bibliografía (Martí, 2003).

### 2.1 Teoremas de Möhr

#### 2.1.1 Primer Teorema de Möhr

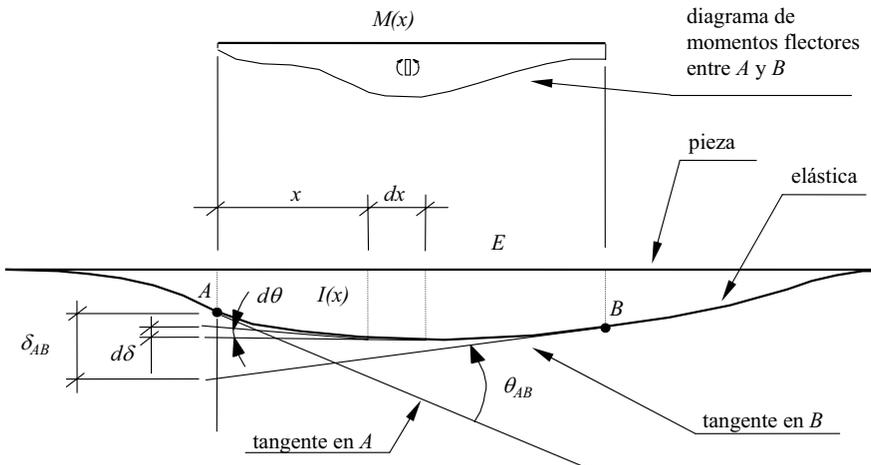


Figura 3.2 Desplazamientos y giros en la pieza.

Sea la pieza de la figura 3.2. El Primer Teorema de Möhr dice: “El ángulo entre las tangentes a la elástica en dos puntos *A* y *B* de una pieza, viene dado por el área del diagrama de momentos flectores dividido por  $EI(x)$ , entre esos puntos”. La expresión del Primer Teorema de Möhr es

$$\theta_{AB} = \int_A^B \frac{M(x)}{EI(x)} ds \tag{3.1a}$$

siendo

- $\theta_{AB}$  el ángulo entre las tangentes a la elástica en dos puntos *A* y *B*;
- $M(x)$  el momento flector en una sección de abscisa *x*;
- $E$  el módulo de elasticidad longitudinal de la pieza, e
- $I(x)$  el momento de inercia en una sección de abscisa *x*.

**2.1.2 Segundo Teorema de Möhr**

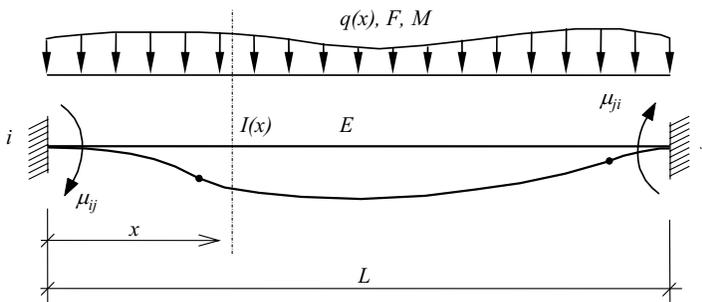
Sea la pieza de la figura 3.2. El Segundo Teorema de Möhr dice: “La distancia desde un punto *A* de la elástica hasta la tangente a otro punto *B* de la elástica, es igual al momento estático del área del diagrama de momentos flectores dividida por  $EI(x)$ , respecto al punto *A*”. La expresión del Segundo Teorema de Möhr es

$$\delta_{AB} = \int_A^B \frac{M(x)x}{EI(x)} ds \tag{3.1b}$$

siendo  $\delta_{AB}$  la distancia desde un punto *A* de la elástica hasta la tangente a otro punto *B* de la elástica.

**2.2 Momentos de empotramiento perfecto**

**2.2.1 Pieza perfectamente empotrada en ambos extremos**



**Figura 3.3** Pieza perfectamente empotrada en ambos extremos.

Sea la pieza de la figura 3.3, perfectamente empotrada en los extremos *i* y *j*, a la que se le aplica un sistema de cargas  $q(x)$ ,  $F$ ,  $M$ . El momento de empotramiento perfecto en el extremo *i* ( $\mu_{ij}$ ) es el momento que se produce en el extremo *i* de la pieza debido a la aplicación del sistema de cargas y a las condiciones de contorno impuestas en los extremos. La expresión del momento de empotramiento perfecto es

$$\mu_{ij} = - \frac{\int_i^j M_i(x) x \tau(x) dx \int_i^j x \tau(x) dx - \int_i^j M_i(x) \tau(x) dx \int_i^j x^2 \tau(x) dx}{\int_i^j x \tau(x) dx \int_i^j (L-x) x \tau(x) dx - \int_i^j (L-x) \tau(x) dx \int_i^j x^2 \tau(x) dx} L \quad (3.2a)$$

siendo

$L$  la longitud de la pieza;

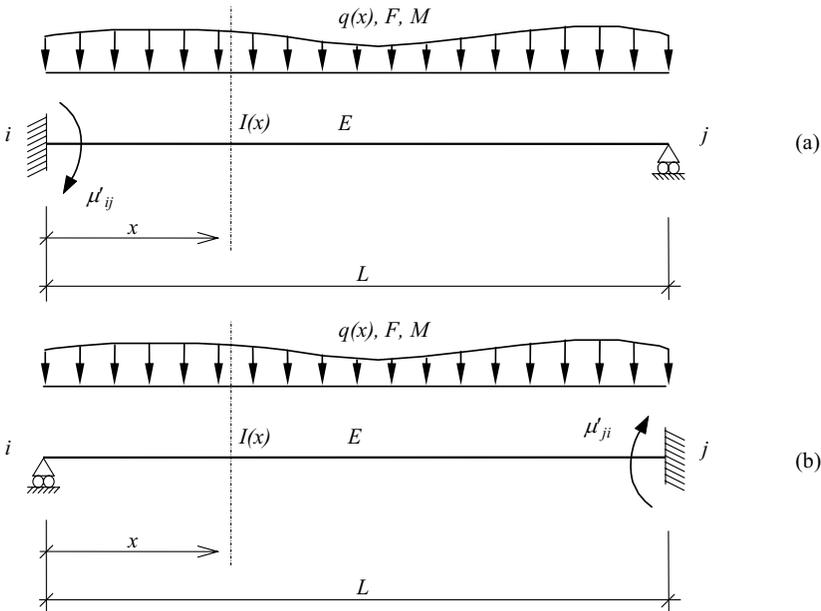
$M_i(x)$  la ley de momentos flectores de la pieza isostática (liberados los giros en los extremos) debida a la acción de las cargas externas, y

$\tau(x) = \frac{I_0}{I(x)}$ ; con  $I_0$  que es el momento de inercia mínimo de la pieza, e  $I(x)$  que es el momento de inercia de la pieza en una sección de abscisa  $x$ .

Igualmente, el momento de empotramiento perfecto en el extremo  $j$  ( $\mu_{ji}$ ) es el momento que se produce en el extremo  $j$  de la pieza debido a la aplicación del sistema de cargas y a las condiciones de contorno impuestas en los extremos. La expresión del momento de empotramiento perfecto es

$$\mu_{ji} = \frac{\int_i^j M_i(x) \tau(x) dx \int_i^j (L-x) x \tau(x) dx - \int_i^j M_i(x) x \tau(x) dx \int_i^j (L-x) \tau(x) dx}{\int_i^j x \tau(x) dx \int_i^j (L-x) x \tau(x) dx - \int_i^j (L-x) \tau(x) dx \int_i^j x^2 \tau(x) dx} L \quad (3.2b)$$

**2.2.2 Pieza perfectamente empotrada en un extremo y articulada en el otro**



**Figura 3.4** Piezas perfectamente empotradas en un extremo y articuladas en el otro.

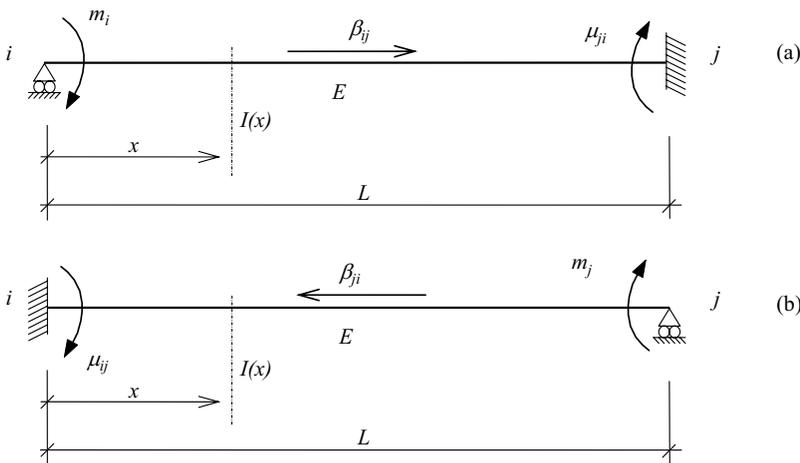
Sea la pieza de la figura 3.4a, perfectamente empotrada en el extremo  $i$  y articulada en el extremo  $j$ , a la que se le aplica un sistema de cargas  $q(x)$ ,  $F$ ,  $M$ . El momento de empotramiento perfecto en el extremo  $i$  ( $\mu'_{ij}$ ) es el momento que se produce en el extremo  $i$  de la pieza debido a la aplicación del sistema de cargas y a las condiciones de contorno impuestas en los extremos. La expresión del momento de empotramiento perfecto es

$$\mu'_{ij} = - \frac{\int_i^j M_i(x)(L-x)\tau(x)dx}{\int_i^j (L-x)^2 \tau(x)dx} L \tag{3.3a}$$

Igualmente, para la pieza de la figura 3.4b, perfectamente empotrada en el extremo  $j$  y articulada en el extremo  $i$ , a la que se le aplica un sistema de cargas  $q(x)$ ,  $F$ ,  $M$ , el momento de empotramiento perfecto en el extremo  $j$  ( $\mu'_{ji}$ ) es el momento que se produce en el extremo  $j$  de la pieza debido a la aplicación del sistema de cargas y a las condiciones de contorno impuestas en los extremos. La expresión del momento de empotramiento perfecto es

$$\mu'_{ji} = \frac{\int_i^j M_i(x)x\tau(x)dx}{\int_i^j x^2 \tau(x)dx} L \tag{3.3b}$$

**2.3 Factores de transmisión**



**Figura 3.5** Factores de transmisión.

Sea la pieza de la figura 3.5a, articulada en el extremo  $i$  y perfectamente empotrada en el extremo  $j$ , a la que se le aplica un momento  $m_i$  en el extremo  $i$ . El factor de

transmisión del extremo  $i$  al extremo  $j$  ( $\beta_{ij}$ ) es el cociente entre el momento de empotramiento perfecto en  $j$  ( $\mu_{ji}$ ) y el momento aplicado en  $i$  ( $m_i$ ). La expresión del factor de transmisión es

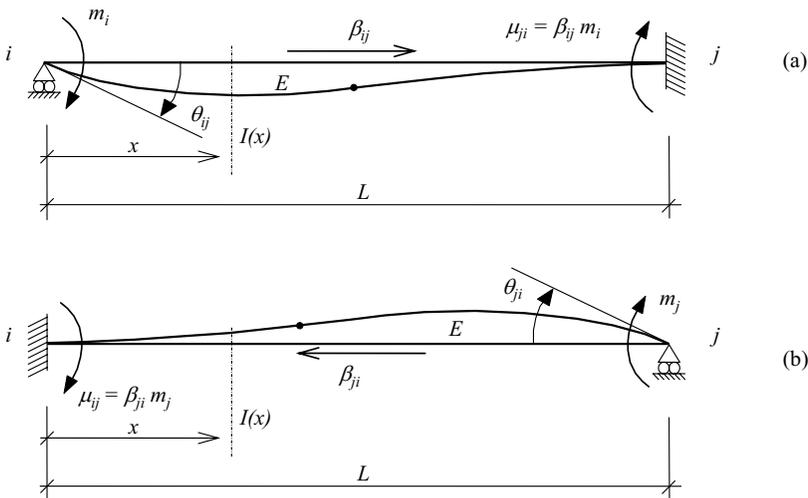
$$\beta_{ij} = \frac{\mu_{ji}}{m_i} = \frac{\int_i^j (L-x)\tau(x)xdx}{\int_i^j x^2\tau(x)dx} \tag{3.4a}$$

Igualmente, para la pieza de la figura 3.5b, articulada en el extremo  $j$  y perfectamente empotrada en el extremo  $i$ , a la que se le aplica un momento  $m_j$  en el extremo  $j$ , el factor de transmisión del extremo  $j$  al extremo  $i$  ( $\beta_{ji}$ ) es el cociente entre el momento de empotramiento perfecto en  $i$  ( $\mu_{ij}$ ) y el momento aplicado en  $j$  ( $m_j$ ). La expresión del factor de transmisión es

$$\beta_{ji} = \frac{\mu_{ij}}{m_j} = \frac{\int_i^j (L-x)\tau(x)xdx}{\int_i^j (L-x)^2\tau(x)dx} \tag{3.4b}$$

**2.4 Rigideces al giro**

**2.4.1 Rigidez al giro en un extremo con el otro extremo empotrado**



**Figura 3.6** Rigidez al giro en un extremo con el otro extremo empotrado.

Sea la pieza de la figura 3.6a articulada en el extremo  $i$  y perfectamente empotrada en el extremo  $j$ , a la que se aplica un momento  $m_i$  en el extremo  $i$ . La rigidez al giro en el

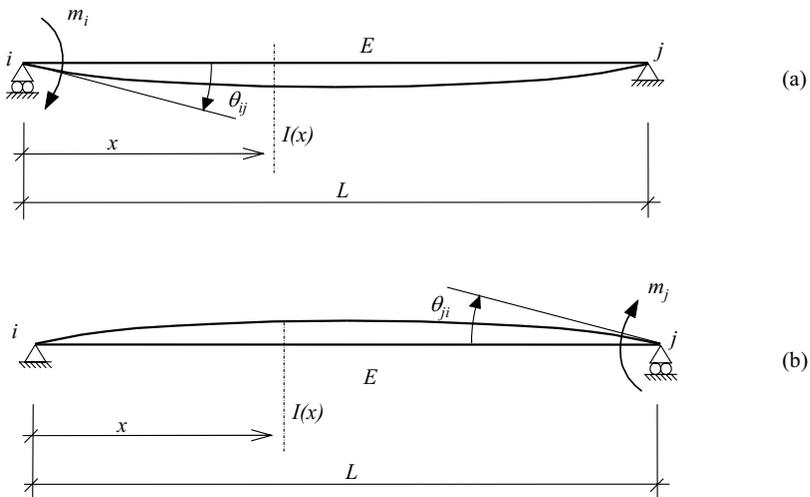
extremo  $i$  ( $k_{ij}$ ) es el cociente entre el momento aplicado ( $m_i$ ) y el giro que en él se produce ( $\theta_{ij}$ ). La expresión de la rigidez al giro es

$$k_{ij} = \frac{m_i}{\theta_{ij}} = \frac{EI_0L}{\int_i^j (L-x)\tau(x)dx - \beta_{ij} \int_i^j x\tau(x)dx} \tag{3.5a}$$

Igualmente para la pieza de la figura 3.6b articulada en el extremo  $j$  y perfectamente empotrada en el extremo  $i$ , a la que se aplica un momento  $m_j$  en el extremo  $j$ . La rigidez al giro en el extremo  $j$  ( $k_{ji}$ ) es el cociente entre el momento aplicado ( $m_j$ ) y el giro que en él se produce ( $\theta_{ji}$ ). La expresión de la rigidez al giro es

$$k_{ji} = \frac{m_j}{\theta_{ji}} = \frac{EI_0L}{\int_i^j x\tau(x)dx - \beta_{ji} \int_i^j (L-x)\tau(x)dx} \tag{3.5b}$$

**2.4.2 Rigidez al giro en un extremo con el otro extremo articulado**



**Figura 3.7** Rigidez al giro en un extremo con el otro extremo articulado.

Sea la pieza de la figura 3.7a articulada en ambos extremos, a la que se aplica un momento  $m_i$  en el extremo  $i$ . La expresión de la rigidez al giro en el extremo  $i$  ( $k'_{ij}$ ) es

$$k'_{ij} = \frac{m_i}{\theta_{ij}} = \frac{EI_0L^2}{\int_i^j (L-x)^2 \tau(x)dx} \tag{3.6a}$$

Igualmente, para la pieza de la figura 3.7b articulada en ambos extremos, a la que se aplica un momento  $m_j$  en el extremo  $j$ , la expresión de la rigidez al giro en el extremo  $j$  ( $k'_{ji}$ ) es

$$k'_{ji} = \frac{m_j}{\theta_{ji}} = \frac{EI_0 L^2}{\int_i^j x^2 \tau(x) dx} \quad (3.6b)$$

### 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

#### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP, y
- programa MATLAB, versión 4.0 o superior para Windows.

#### 3.2 Desarrollo de un programa para el cálculo de las características elásticas de una pieza recta de inercia variable

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
1	Definiciones iniciales.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Encabezamiento.</li> <li>• Formatos numéricos.</li> <li>• Ficheros de resultados.</li> </ul>	<code>% format diary</code>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En el encabezamiento se incluirá: <ul style="list-style-type: none"> <li>- nº del grupo.</li> <li>- alumnos del grupo.</li> <li>- fecha de realización.</li> </ul> </li> </ul>
2	Entrada de datos de las piezas de la figura 3.1.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometría.</li> <li>• Material.</li> <li>• Restricciones.</li> <li>• Cargas.</li> </ul>	<code>input save global</code>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se planteará la utilidad de hacer la lectura desde un fichero de datos, o con una interface gráfica de usuario más avanzada.</li> </ul>
3	Cálculo de las características elásticas de las dos piezas de la figura 3.1.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elaboración de un fichero de función con las expresiones de las funciones a integrar para cada pieza.</li> <li>• Cálculo de integrales.</li> <li>• Cálculo de: <ul style="list-style-type: none"> <li>* Momentos de empotramiento perfecto (para las piezas empotrada-</li> </ul> </li> </ul>	<code>function quad quad8 save global</code>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Para más información sobre el cálculo de integrales con MATLAB puede consultarse la bibliografía (MATLAB, 1996).</li> <li>* Se considerarán los siguientes casos:</li> <li>* Inercia variable y</li> </ul>

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
		<p>empotrada, empotrada-articulada y articulada-empotrada). Expresiones (3.2a), (3.2b), (3.3a) y (3.3b).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Factores de transmisión (para las piezas articulada-empotrada y empotrada-articulada). Expresiones (3.4a) y (3.4b).</li> <li>* Rigideces al giro (para las piezas articulada-empotrada, empotrada-articulada y articulada-articulada). Expresiones (3.5a), (3.5b), (3.6a) y (3.6b).</li> </ul>		<p>pieza empotrada-empotrada.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Inercia constante y pieza empotrada-empotrada.</li> <li>* Inercia variable y pieza empotrada-articulada.</li> <li>* Inercia constante y pieza empotrada-articulada.</li> <li>* Inercia variable y pieza articulada-empotrada.</li> <li>* Inercia constante y pieza articulada-empotrada.</li> <li>* Inercia variable y pieza articulada-articulada.</li> <li>* Inercia constante y pieza articulada-articulada.</li> </ul>
4	Obtención de diagramas de momentos flectores.	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Elaboración de un fichero de función con las expresiones de las leyes de momentos.</li> <li>•Obtención de gráficas.</li> </ul>	<pre>function plot title xlabel ylabel grid</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Se sugiere el formato de croquis del anexo 3.1.</li> </ul>
5	Obtención de giros y flechas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Cálculo de giros y abscisa x donde el giro es nulo.</li> <li>•Cálculo de la flecha para la abscisa x donde el giro es nulo (flecha máxima).</li> <li>•Elaboración de un croquis en donde se incluyan resultados de flechas máximas y abscisa x en los casos considerados en la tarea nº 3.</li> </ul>	<pre>save global quad quad8  for var.=exp.   Declaración end  if variable   declarac. 1 else   declarac. 2 end</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Se considerarán los casos expuestos en la tarea nº 3.</li> <li>•Para el cálculo de giros se podrá utilizar el Primer Teorema de Möhr, expresión (3.1a), y para el cálculo de flechas el Segundo Teorema de Möhr, expresión (3.1b).</li> <li>•Se sugiere el formato de croquis del anexo 3.1.</li> </ul>
6	Comparación de resultados.	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Elaboración de una tabla de resultados para comparar las</li> </ul>	<pre>num2str disp</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Se sugiere el formato de tabla del anexo 3.1.</li> </ul>

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
		características elásticas obtenidas de los casos considerados en la tarea nº 3.		<ul style="list-style-type: none"> <li>Comentar brevemente cómo afecta la geometría de la pieza (canto constante o variable) y las condiciones de contorno en los extremos, en los resultados obtenidos.</li> </ul>

### 3.3 Memoria de la práctica

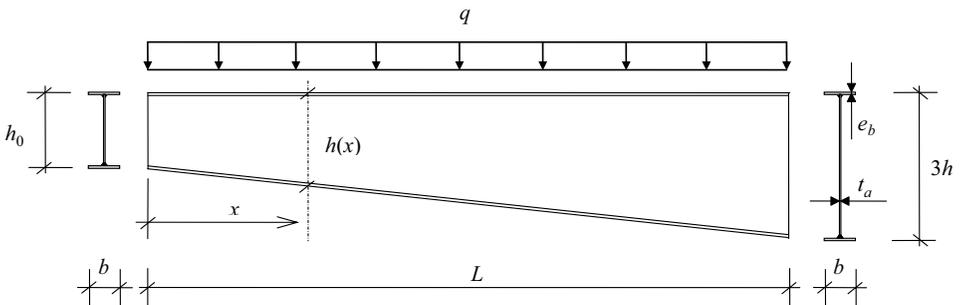
Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 1 El diagrama de flujo del programa desarrollado con comandos de MATLAB;
- 2 el listado del programa, y
- 3 los gráficos, tablas, figuras, etc., necesarios para explicar lo realizado en los puntos de la tabla del apartado 3.2.

## 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Calcular las características elásticas y la flecha máxima de la pieza de la figura 3.8, procediéndose de forma similar al análisis realizado en el apartado 3.2.



**DATOS:**  $E = 210 \text{ GPa}$ ;  $q = 60 \text{ kN/m}$ ;  $L = 10 \text{ m}$ ;  
 $b = 0,25 \text{ m}$ ;  $h_0 = 0,6 \text{ m}$ ;  $t_a = 0,012 \text{ m}$ ;  $e_b = 0,015 \text{ m}$ .

**Figura 3.8** Pieza de inercia variable con sección en doble T.

- 2 Ampliación del programa desarrollado para poder considerar cargas del tipo:
  - puntual;
  - triangular distribuida, y
  - trapezoidal distribuida.
- 3 Ampliación del programa desarrollado para poder calcular y dibujar la deformada de la pieza.
- 4 Comprobar que se cumple el Teorema de Reciprocidad de Rayleigh-Betti para las piezas analizadas. Incluir en el programa esta comprobación para detectar errores

en los cálculos.

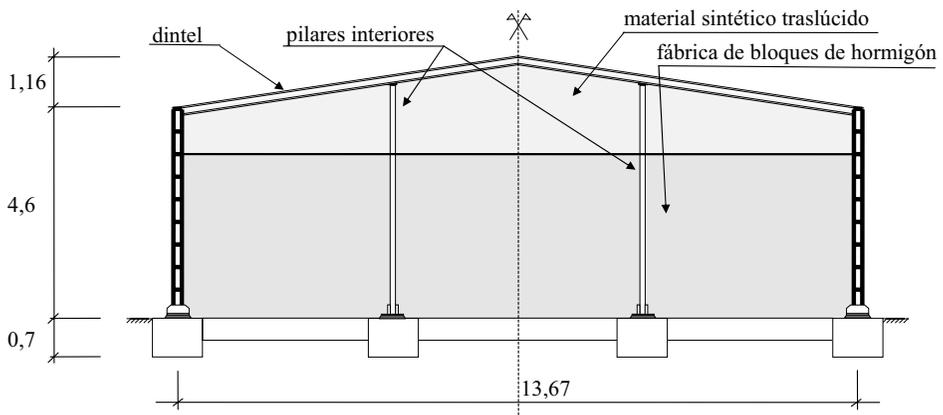
## 5 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.
- 2 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: user guide*. Natick: The MathWorks, 1996.
- 3 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: reference guide*. Natick: The MathWorks, 1996.
- 4 MATLAB *Resumen de comandos para prácticas de análisis de estructuras*. Área de MMCyTE, UPCT, Cartagena, 2006.

## 6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

### 6.1 Cuestiones

Una nave industrial se construye a base de pórticos a dos aguas. Para poder transmitir la acción del viento sobre las fachadas frontales se disponen unos entramados tal como se muestra en la figura 3.9, de forma que los elementos del cerramiento transmiten cargas de viento a los pilares interiores y éstos a la cimentación y a los dinteles de los entramados. Para el cerramiento se dispone en los primeros 3,5 metros de altura fábrica de bloques de hormigón, y por encima planchas de material sintético traslúcido. Con el fin de que *el punto de flecha máxima esté lo más alto posible* y no afecte desfavorablemente al cerramiento de fábrica, que admite pequeñas deformaciones ¿qué tipo de pilares interiores (canto variable o constante) y qué condiciones de contorno en los extremos se deberían utilizar, para que fueran de peso mínimo?



NOTA: longitudes en metros

**Figura 3.9** Entramado frontal.

## 7 ENLACES DE INTERÉS

- 1 [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)
- 2 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)

## ANEXO 3.1 FORMATOS PARA COMPARACIÓN DE RESULTADOS

### 1 INTRODUCCIÓN

En este anexo se sugiere un formato de tabla para comparar los resultados obtenidos para las dos piezas de la figura 3.1 y para las diferentes condiciones de contorno impuestas a las mismas. Así mismo, también se propone hacer un croquis con los diagramas de momentos flectores, flechas máximas y secciones de abscisa  $x_{fmax}$  donde se producen, conforme se ve en las figuras 3.10 y 3.11.

### 2 TABLA PARA COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Se propone la siguiente tabla:

	momentos de empotramiento perfecto				rigideces al giro				factores de transmisión			
	extremo $i$		extremo $j$		extremo $i$		extremo $j$		extremo $i$ al $j$		extremo $j$ al $i$	
empotrada-empotrada	$\mu^c_{ij}$	$\mu^v_{ij}$	$\mu^c_{ji}$	$\mu^v_{ji}$								
articulada-empotrada			$\mu^c_{ji}$	$\mu^v_{ji}$	$k^c_{ij}$	$k^v_{ij}$			$\beta^c_{ij}$	$\beta^v_{ij}$		
empotrada-articulada	$\mu^c_{ij}$	$\mu^v_{ij}$					$k^c_{ji}$	$k^v_{ji}$			$\beta^c_{ji}$	$\beta^v_{ji}$
articulada-articulada					$k^c_{ij}$	$k^v_{ij}$	$k^c_{ji}$	$k^v_{ji}$				

siendo

$\mu^c_{ij}$  el momento de empotramiento perfecto en el extremo  $i$  para canto constante y pieza empotrada-empotrada;

$\mu^v_{ij}$  el momento de empotramiento perfecto en el extremo  $i$  para canto variable y pieza empotrada-empotrada;

$\mu^c_{ji}$  el momento de empotramiento perfecto en el extremo  $j$  para canto constante y pieza empotrada-empotrada;

$\mu^v_{ji}$  el momento de empotramiento perfecto en el extremo  $j$  para canto variable y pieza empotrada-empotrada;

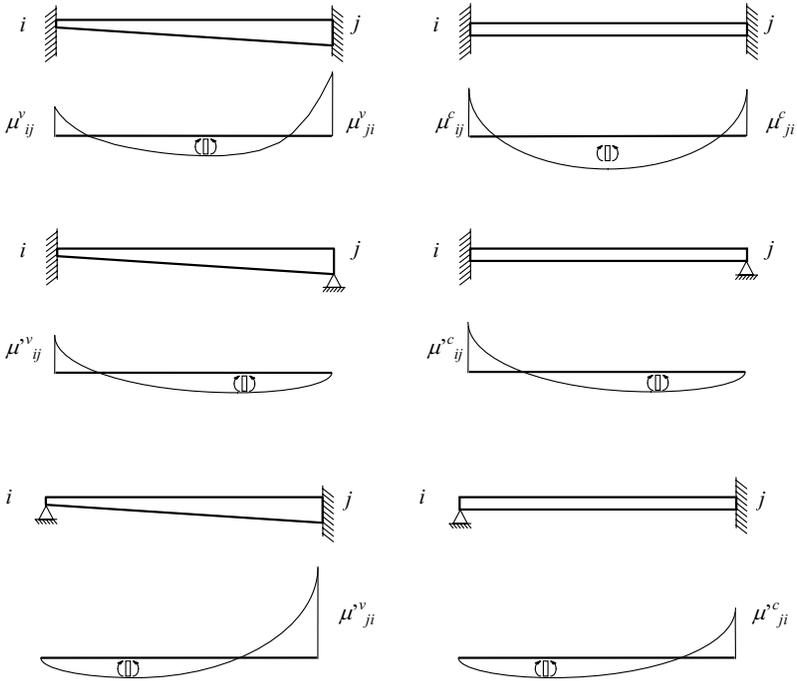
$\mu^c_{ij}$  el momento de empotramiento perfecto en el extremo  $i$  para canto constante y pieza empotrada-articulada;

- $\mu^{*v}_{ij}$  el momento de empotramiento perfecto en el extremo  $i$  para canto variable y pieza empotrada-articulada;
- $\mu^{*c}_{ji}$  el momento de empotramiento perfecto en el extremo  $j$  para canto constante y pieza articulada-empotrada;
- $\mu^{*v}_{ji}$  el momento de empotramiento perfecto en el extremo  $j$  para canto variable y pieza articulada-empotrada;
- $k^c_{ij}$  la rigidez al giro en el extremo  $i$  para la pieza de canto constante articulada-empotrada;
- $k^v_{ij}$  la rigidez al giro en el extremo  $i$  para la pieza de canto variable articulada-empotrada;
- $k^c_{ji}$  la rigidez al giro en el extremo  $j$  para la pieza de canto constante empotrada-articulada;
- $k^v_{ji}$  la rigidez al giro en el extremo  $j$  para la pieza de canto variable empotrada-articulada;
- $k^{*c}_{ij}$  la rigidez al giro en el extremo  $i$  para la pieza de canto constante articulada-articulada;
- $k^{*v}_{ij}$  la rigidez al giro en el extremo  $i$  para la pieza de canto variable articulada-articulada;
- $k^{*c}_{ji}$  la rigidez al giro en el extremo  $j$  para la pieza de canto constante articulada-articulada;
- $k^{*v}_{ji}$  la rigidez al giro en el extremo  $j$  para la pieza de canto variable articulada-articulada;
- $\beta_{ij}$  el factor de transmisión del extremo  $i$  al extremo  $j$  para la pieza de canto constante;
- $\beta^v_{ij}$  el factor de transmisión del extremo  $i$  al extremo  $j$  para la pieza de canto variable;
- $\beta_{ji}$  el factor de transmisión del extremo  $j$  al extremo  $i$  para la pieza de canto constante, y
- $\beta^v_{ji}$  el factor de transmisión del extremo  $j$  al extremo  $i$  para la pieza de canto variable.

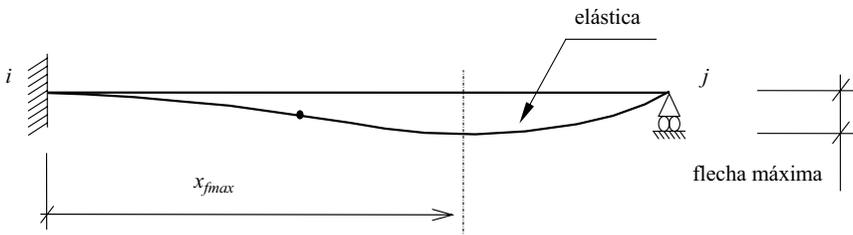
NOTA: no se rellenarán las casillas sombreadas de la tabla.

**2 CROQUIS PARA COMPARACIÓN DE RESULTADOS**

Se propone el siguiente croquis:



**Figura 3.10** Diagramas de momentos flectores.



**Figura 3.11** Flecha máxima y sección de abscisa  $x_{fmax}$  donde se produce.

## Práctica 4

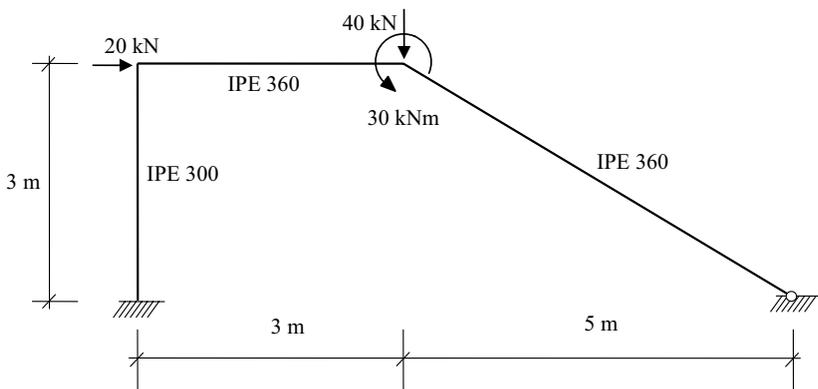
# OBTENCIÓN DIRECTA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA

### 1 OBJETIVOS

El objetivo global de la práctica es mostrar la forma de obtener la matriz de rigidez de una estructura mediante la utilización del programa de análisis de estructuras por elementos finitos DISSENY/2006 (Martí, 2006).

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Obtener la matriz de rigidez de la estructura de la Fig. 4.1 utilizando el programa DISSENY/2006.
- 2 Utilizando el programa MATLAB definir el vector de cargas y, con la matriz de rigidez obtenida en el punto anterior, obtener los desplazamientos y giros de los nudos de la estructura.
- 3 Analizar con DISSENY/2006 la estructura de la Fig. 4.1 y comprobar los resultados obtenidos con MATLAB.



**DATOS:**  $E = 210 \text{ GPa}$ ;  $A_{\text{IPE 300}} = 53,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;  $I_{\text{IPE 300}} = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ .  
 $A_{\text{IPE 360}} = 72,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;  $I_{\text{IPE 360}} = 16270 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ .

**Figura 4.1** Estructura para obtener la matriz de rigidez.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para la obtención de la matriz de rigidez de la estructura de la Fig. 4.1 se va a utilizar el programa DISSENY/2006, que es un sistema para el análisis de estructuras tridimensionales basado en el Método de los Elementos Finitos. En este método se adoptan como incógnitas los giros y desplazamientos de los nudos de la estructura, expresándose los esfuerzos internos de las barras en función de ellos, por medio de las rigideces de cada elemento de la estructura. Se plantea el equilibrio de la estructura por medio de la ecuación matricial

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{D} \quad (4.1)$$

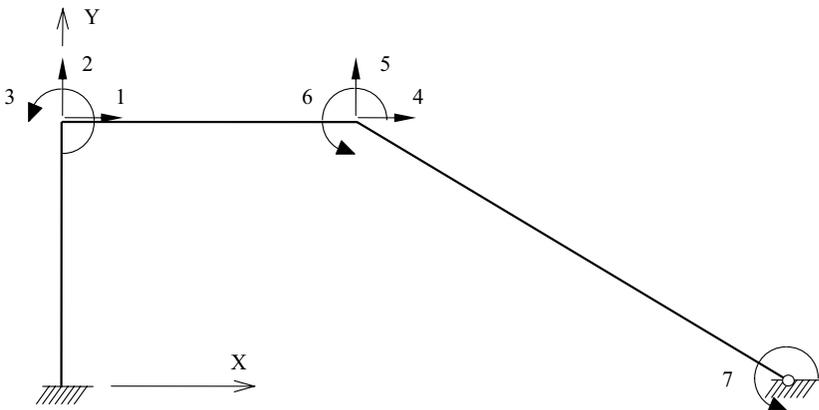
siendo:  $\mathbf{K}$  la matriz de rigidez de la estructura, obtenida a partir de los datos geométricos y elásticos de las barras y la forma de conexión entre ellas;  $\mathbf{D}$  el vector de desplazamientos generalizados, que agrupa los giros y desplazamientos de todos los nudos y  $\mathbf{P}$  el vector de fuerzas generalizadas puntuales equivalentes a las que actúan sobre la estructura.

Para la resolución del sistema de ecuaciones anterior (Ec. 4.1) se invierte la matriz  $\mathbf{K}$ , con lo cual

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} \quad (4.2)$$

Una vez conocidos los desplazamientos y giros de todos los nudos se puede proceder a calcular los esfuerzos en cada elemento y las reacciones en los apoyos. Mayor información sobre los fundamentos teóricos de este programa puede encontrarse en la bibliografía (Martí, 2003).

Si restringimos, por ejemplo, todos los grados de libertad de la estructura excepto el número 1 (Fig. 4.2), las fuerzas necesarias para provocar un desplazamiento unitario  $D_1$  en la dirección del grado de libertad 1 son las de la Fig. 4.3. Estas fuerzas,  $k_{11}$ ,  $k_{31}$  y  $k_{41}$ , son rigideces y forman parte de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  de la estructura, expresión (4.3). Más información sobre el procedimiento para obtener la matriz de rigidez puede encontrarse en la bibliografía (Martí, 2003).



**Figura 4.2** Sistema de coordenadas global y grados de libertad.

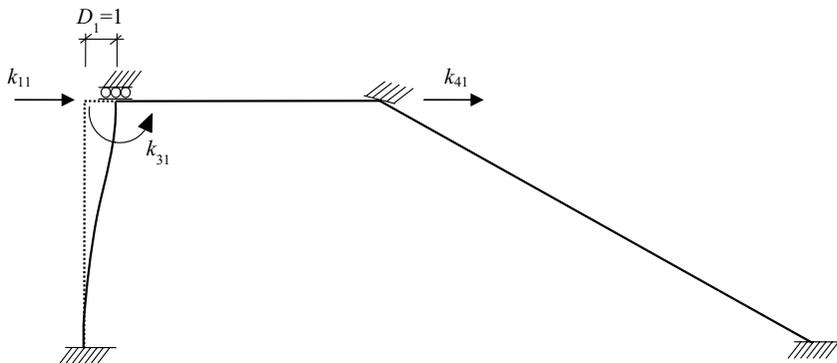


Figura 4.3 Fuerzas generalizadas debidas al desplazamiento  $D_1$ .

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} \\ k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & \\ & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & \\ & & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & \\ & & & k_{55} & k_{56} & k_{57} & \\ & & & & k_{66} & k_{67} & \\ \text{SIM.} & & & & & & k_{77} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

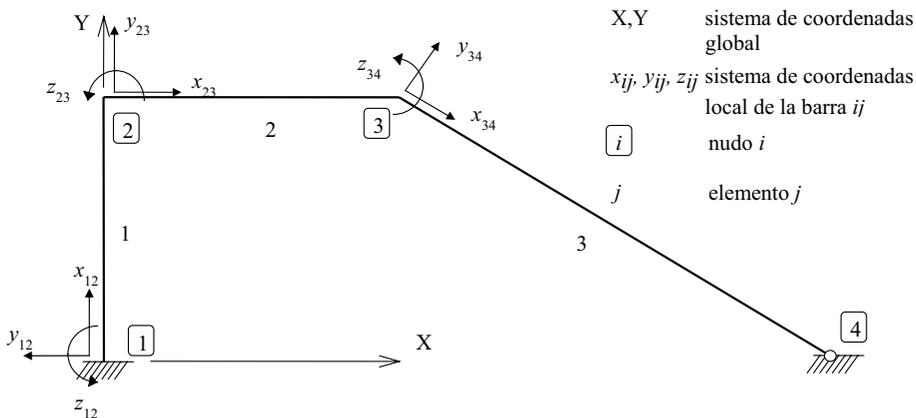
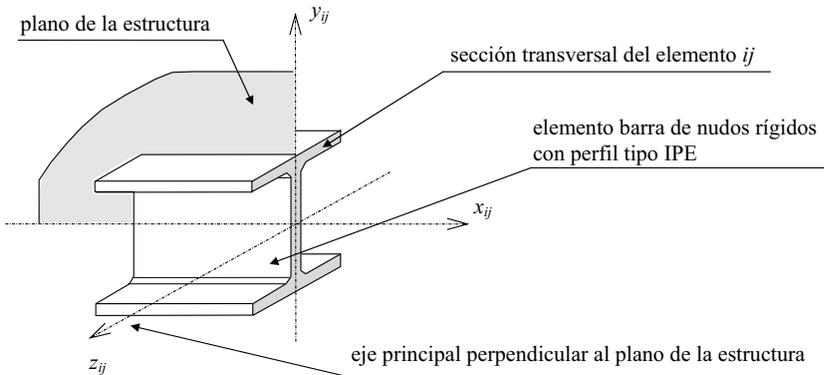


Figura 4.4 Modelo de análisis para DISSENY/2006.



**Figura 4.5** Elemento  $ij$ : ejes principales, sección transversal y plano de la estructura.

### 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

#### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP, y
- programa MATLAB, versión 4.0 o superior para Windows;
- editor de Windows, y
- programa DISSENY/2006, versión académica.

#### 3.2 Procedimiento para la obtención directa de la matriz de rigidez

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	NOTAS Y CUESTIONES
1	Creación de un fichero de datos para DISSENY/2006 para obtener la matriz de rigidez de la estructura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modelado de la estructura de la Fig. 4.1 con la codificación propuesta en la Fig. 4.4, incluyendo en el fichero de datos para DISSENY/2006:               <ul style="list-style-type: none"> <li>* coordenadas de los nudos,</li> <li>* materiales de los elementos,</li> <li>* propiedades de la sección transversal de los elementos, e</li> <li>* información de los elementos.</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La información necesaria para crear el fichero de datos para DISSENY/2006 puede encontrarse en la bibliografía (Martí,2006).</li> <li>• Los elementos son barras de nudos rígidos de inercia constante con los valores de propiedades de la sección definidos en la Fig. 4.1.</li> </ul>
2	Obtención de los elementos de la matriz de rigidez, definiendo restricciones y	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Selección del GDL <math>i</math> (Fig. 4.2) donde queremos obtener un desplazamiento <math>D_i</math>.</li> <li>• Restricción de todos los GDL excepto</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La información de restricciones y cargas se añadirá a la incluida en el fichero de datos creado en la tarea nº 1. Se planteará la</li> </ul>

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	NOTAS Y CUESTIONES
	cargas de forma apropiada.	<p>el seleccionado <math>i</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicación de una carga unitaria <math>Q_i</math> en la dirección del GDL seleccionado <math>i</math>.</li> <li>• Realización del análisis con DISSENY/2006.</li> <li>• Obtención de las rigideces dividiendo la fuerza aplicada <math>Q_i</math> por el desplazamiento <math>D_i</math> (<math>k_{ij}</math>) y las reacciones <math>R_j</math> por el desplazamiento <math>D_j</math> (<math>k_{ji}</math>).</li> <li>• Selección de otro GDL y repetición del proceso.</li> </ul>	<p>utilidad de crear varios ficheros de datos y de resultados para las diferentes rigideces que queramos obtener.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Las cargas se definirán en DISSENY/2006 como cargas en nudos.</li> <li>• Utilizar el fichero de datos creado, cargándolo en DISSENY/2006.</li> </ul> <p><code>&lt;fich.adf&gt;</code> siendo <code>fich.adf</code> el nombre del fichero de datos.</p>
3	Cálculo de desplazamientos de los nudos con MATLAB.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Con los GDL de la Fig. 4.2 y las cargas de la Fig. 4.1 definir en MATLAB el vector de cargas en los nudos de la estructura <b>P</b>.</li> <li>• Cálculo del vector de desplazamientos en los nudos <b>D</b> resolviendo el sistema de ecuaciones de equilibrio <math display="block">\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los comandos MATLAB a utilizar son: <code>zeros</code> <code>inv</code></li> </ul>
4	Análisis de la estructura propuesta con DISSENY/2006 y comparación de resultados.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Adición al fichero de datos para DISSENY/2006 creado en la tarea nº 1 de lo siguiente (Fig. 4.1 y Fig. 4.4): * restricciones en los apoyos, y * cargas.</li> <li>• Comparación de los desplazamientos obtenidos con MATLAB y con DISSENY/2006.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Las restricciones son las de una estructura plana de nudos rígidos.</li> <li>• Las cargas se definirán como cargas en nudos.</li> </ul>

### 3.3 Memoria de la práctica

Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 1 Los listados de los ficheros de datos y de resultados para DISSENY/2006;
- 2 los listados de comandos para MATLAB, y
- 3 los gráficos, tablas, Figs., etc., necesarios para explicar lo realizado en los puntos de la tabla del apartado 3.2.

## 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Comprobar que se cumple el teorema de reciprocidad de Rayleigh-Betti para la estructura de la Fig. 4.1.
- 2 Comprobar la simetría de la matriz de rigidez.

## 5 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.
- 2 Martí, P. DISSENY 2006. *Análisis de Estructuras por Elementos Finitos. Manual del Usuario*. Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, 2006.
- 3 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: user guide*. Natick: The MathWorks, 1996.
- 4 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: reference guide*. Natick: The MathWorks, 1996.
- 5 MATLAB Resumen de comandos para prácticas de análisis de estructuras. Área de MMCyTE, UPCT, Cartagena, 2006.
- 6 NBE EA-95 *Estructuras de acero en edificación*. Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente, Madrid, 1996.

## 6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

### 6.1 Cuestiones

- 1 Justificar la simetría de la matriz de rigidez.
- 2 ¿Cual sería el procedimiento a seguir, similar al explicado en el apartado 3.2, tarea nº 2, en el caso de que los elementos de la estructura fueran barras de nudos articulados?

## 7 ENLACES DE INTERÉS

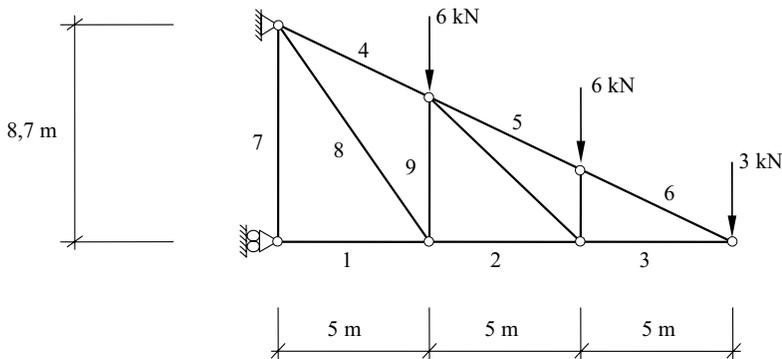
- 1 [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)
- 2 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)

## Práctica 5

# DESARROLLO DE UN PROGRAMA DE ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS DE NUDOS ARTICULADOS

### 1 OBJETIVOS

El objetivo global de la práctica es desarrollar un programa matricial para analizar completamente una estructura plana de nudos articulados.



**DATOS:**  $E = 210 \text{ GPa};$   
 $A_1 = A_2 = A_3 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2;$   
 $A_4 = A_5 = A_6 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2;$   
 $A_7 = A_8 = A_9 = A_{10} = A_{11} = 15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$

**Figura 5.1** Estructura plana de nudos articulados.

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Desarrollar, mediante comandos de MATLAB, un programa para analizar la estructura de la Fig. 5.1, y que incluya:
  - 1.1 lectura de las coordenadas de nudos, propiedades del material, propiedades de los elementos, información de elementos, restricciones en los apoyos y cargas;

- 1.2 definición de las matrices de rotación para pasar del sistema de coordenadas global a los sistemas de coordenadas locales de los elementos;
- 1.3 cálculo de las matrices de rigidez de los elementos en los sistemas de coordenadas locales y en el sistema de coordenadas global;
- 1.4 ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura y obtención de la matriz reducida a partir de las condiciones de contorno de la estructura;
- 1.5 definición de los vectores de cargas en nudos;
- 1.6 obtención de desplazamientos resolviendo el sistema de ecuaciones de equilibrio, y
- 1.7 obtención de esfuerzos y reacciones.

2 Comprobar los resultados obtenidos con el programa DISSENY/2006.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 El método de las rigideces

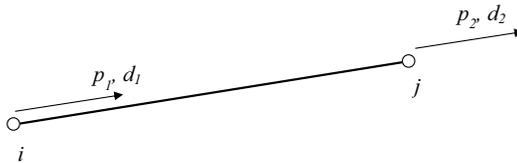
Los fundamentos del método de las rigideces se han desarrollado brevemente en el anexo I. Para mas información sobre la formulación de este método puede consultarse la bibliografía (Martí, 2003).

### 2.2 Matrices de rigidez para elementos barra de nudos articulados

El elemento que vamos a considerar es una barra recta de sección transversal constante, capaz de resistir solo esfuerzos axiales.

El sistema local del elemento va a estar formado, en cada uno de los dos extremos, por un eje  $x$  con dirección y sentido del nudo  $i$  al nudo  $j$ .

Las fuerzas que actúan sobre los dos extremos de la barra son las fuerzas axiales  $N_i$  y  $N_j$ .



**Figura 5.2** Sistemas de coordenadas locales de la barra.

Las fuerzas en la dirección y sentido de los sistemas de coordenadas locales son

$$\mathbf{p}_{ij}^e = (p_1, p_2)^T \quad (5.1)$$

y los desplazamientos en estas mismas direcciones son

$$\mathbf{d}_{ij}^e = (d_1, d_2)^T \quad (5.2)$$

Las propiedades del elemento que se deben considerar son: longitud ( $L$ ); módulo de elasticidad longitudinal ( $E$ ) y área de la sección transversal ( $A$ ).

La ecuación matricial que relaciona las fuerzas y desplazamientos, en los extremos del elemento, en el sistema de coordenadas local es

$$\mathbf{p}_{ij}^e = \mathbf{k}_{ij}^e \mathbf{d}_{ij}^e \quad (5.3)$$

o, en forma más desarrollada

$$\begin{bmatrix} p_{ij} \\ p_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii}^j & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{ij} \\ d_{ji} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

siendo:  $\mathbf{p}_{ij}^e$  el vector de esfuerzos en los extremos del elemento;  $\mathbf{k}_{ij}^e$  la matriz de rigidez del elemento;  $\mathbf{d}_{ij}^e$  el vector de desplazamientos en los extremos del elemento;  $p_{ij}$  ( $p_{ji}$ ) el vector de esfuerzos en el extremo  $i$  ( $j$ ) del elemento;  $d_{ij}$  ( $d_{ji}$ ) el vector de desplazamientos en el extremo  $i$  ( $j$ ) del elemento;  $k_{ii}^j$  ( $k_{jj}^i$ ) es la fuerza que hay que aplicar en el extremo  $i$  ( $j$ ) para producir desplazamientos unitarios en el extremo  $i$  ( $j$ ) del elemento y  $k_{ij}$  ( $k_{ji}$ ) es la fuerza que hay que aplicar en el extremo  $i$  ( $j$ ) para producir desplazamientos unitarios en el extremo  $j$  ( $i$ ). La expresión (5.4) de forma explícita es

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

### 2.3 Matrices de rotación

Si llamamos  $\alpha$  al ángulo que forma el eje  $x$  del sistema de coordenadas local del elemento con el eje  $X$  del sistema de coordenadas global, la matriz de rotación para el elemento es

$$\mathbf{R}_{ij} = [\cos \alpha \quad \sin \alpha] \quad (5.6)$$

Una exposición abreviada de la formulación del método matricial de las rigideces puede encontrarse en el anexo I, o de forma más completa, en la bibliografía (Martí, 2003).

## 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP, y
- programa MATLAB, versión 4.0 o superior para Windows.
- editor de Windows, y
- programa DISSENY/2006, versión académica.

### 3.2 Procedimiento para el desarrollo del programa de comandos MATLAB

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
1	Definiciones iniciales.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Encabezamiento.</li> <li>• Fichero de resultados.</li> <li>• Formato de escritura.</li> </ul>	<code>% format diary</code>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En el encabezamiento se incluirá: <ul style="list-style-type: none"> <li>- nº del grupo;</li> <li>- alumnos del grupo,</li> <li>- fecha de realización.</li> </ul> </li> </ul>
2	Entrada de datos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Coordenadas de los nudos.</li> <li>• Información de los elementos.</li> <li>• Área de los elementos.</li> <li>• Material.</li> </ul>	<code>input eval</code>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La entrada de datos puede realizarse con operaciones de asignación directa, ya que el programa se hace particular para la estructura de la Fig. 5.1.</li> <li>• Las coordenadas se almacenarán en la matriz <i>coor</i> definida en el anexo 5.1.</li> <li>• La información sobre los elementos irá incluida en la matriz <i>conex</i> definida en el anexo 5.1.</li> </ul>
3	Cálculo de las matrices de rotación para cada elemento.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cálculo de los cosenos directores a partir de la información de coordenadas de los nudos inicial y final de cada elemento.</li> <li>• Definición de la matriz de rotación.</li> </ul>	<code>sqrt</code>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teniendo en cuenta que el programa se desarrolla, de forma particular, para la estructura de la Fig. 5.1, los cosenos directores pueden definirse de una forma más directa.</li> <li>• Ver Fig. 5.4.</li> </ul>
4	Obtención de las matrices de rigidez de los elementos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Obtención de las matrices de rigidez de los elementos en los sistemas de coordenadas locales.</li> <li>• Transformación de las matrices de rigidez de los elementos al sistema de coordenadas global de la estructura.</li> </ul>	<code>kloc_pa</code>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El uso del archivo de función <i>kloc_pa.m</i> se explica en el anexo 5.1.</li> <li>• Ver Fig. 5.4.</li> </ul>
5	Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ensamblaje de la matriz de rigidez considerando la aportación de las</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se tendrá en cuenta la simetría de la matriz de rigidez de la estructura para la</li> </ul>

N°	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
		matrices de rigidez de cada elemento en coordenadas globales.		obtención de la misma con el menor número de operaciones. • Ver Figs 5.3 y 5.4.
6	Obtención de la matriz de rigidez reducida.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Consideración de las condiciones de contorno impuestas a la estructura para determinar filas y columnas, de la matriz de rigidez completa, a eliminar.</li> </ul>	Para eliminar de la fila $i$ a la $j$ de la matriz $A$ : $A([i:j], :) = []$ Para eliminar de la columna $l$ a la $m$ de la matriz $A$ : $A(:, [l:m]) = []$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ver Fig. 5.3.</li> </ul>
7	Cálculo del vector de fuerzas exteriores aplicadas en los nudos de la estructura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Definición de un vector con elementos de valor cero de longitud el número de grados de libertad no restringidos de la estructura.</li> <li>Determinación de los grados de libertad en cuya dirección hay una fuerza exterior aplicada.</li> <li>Obtención del vector de fuerzas exteriores aplicadas en nudos.</li> </ul>	zeros	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ver Fig. 5.3.</li> </ul>
8	Cálculo de desplazamientos en los nudos de la estructura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Cálculo de la matriz inversa de la reducida.</li> <li>Cálculo de desplazamientos.</li> </ul>	inv	<ul style="list-style-type: none"> <li>Los desplazamientos se almacenarán en la matriz <math>d</math> definida en el anexo 5.1.</li> </ul>
9	Cálculo de esfuerzos axiales en elementos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Obtención de los vectores de desplazamientos, en el sistema de coordenadas local, para cada elemento.</li> <li>Cálculo de esfuerzos con las matrices de rigidez de los elementos y los desplazamientos en coordenadas locales.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>Pueden calcularse, de forma alternativa, las fuerzas en los nudos de cada elemento a partir de los desplazamientos y las matrices de rigidez de los elementos en el sistema de coordenadas global. Después se utilizan las matrices de rotación para</li> </ul>

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
				obtener los esfuerzos en cada elemento.
10	Cálculo de fuerzas en nudos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Transformar los valores de esfuerzos en fuerzas en nudos en el sistema de coordenadas global de la estructura.</li> <li>• Suma de las fuerzas que concurren a cada nudo de la estructura.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprobar que las fuerzas calculadas en nudos son iguales a las fuerzas exteriores aplicadas en nudos.</li> <li>• ¿Qué son las fuerzas aplicadas en nudos restringidos?</li> <li>• Comprobar el equilibrio de la estructura.</li> </ul>
11	Dibujo de la estructura y de su deformada.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizar el archivo de función <i>dib_est</i> para dibujar la estructura y el archivo de función <i>dib_def</i> para dibujar la deformada.</li> </ul>	<p><i>dib_est</i> <i>dib_def</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El uso de los archivos de función <i>dib_est.m</i> y <i>dib_def.m</i> se explica en el anexo 5.1.</li> </ul>
12	Análisis de la estructura con DISSENY/2006 y comparación de resultados.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Creación del fichero de datos para DISSENY/2006 que incluya la siguiente información (Figs 5.1 y 5.5): <ul style="list-style-type: none"> <li>* coordenadas de los nudos,</li> <li>* materiales de los elementos,</li> <li>* propiedades de la sección de los elementos,</li> <li>* información de los elementos,</li> <li>* restricciones, y</li> <li>* cargas.</li> </ul> </li> <li>• Comparación de resultados.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• La información necesaria para crear el fichero de datos para DISSENY/2006 puede encontrarse en la bibliografía (Martí, 2006).</li> </ul>

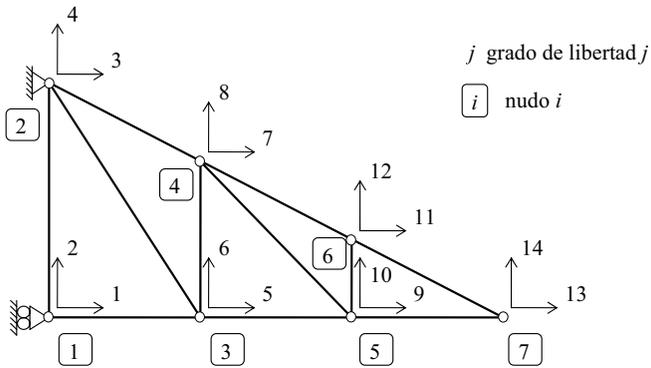


Figura 5.3 Nudos y grados de libertad.

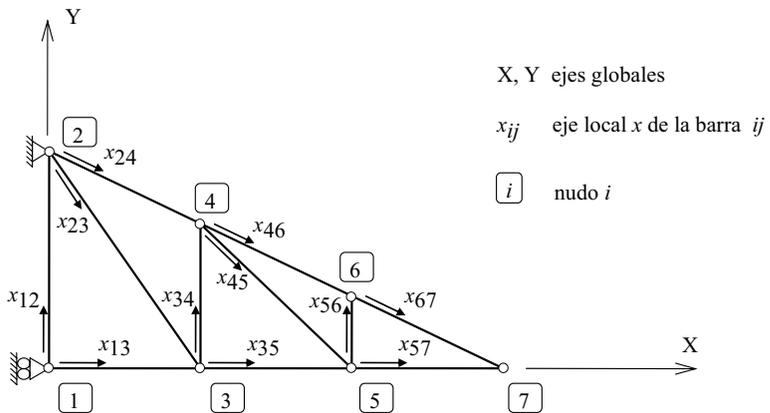


Figura 5.4 Sistema de coordenadas global de la estructura y sistemas de coordenadas locales de las barras.

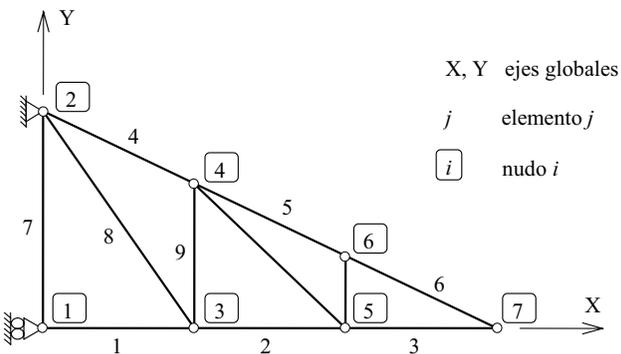


Figura 5.5 Codificación de nudos y barras para el análisis con DISSENY/2006.

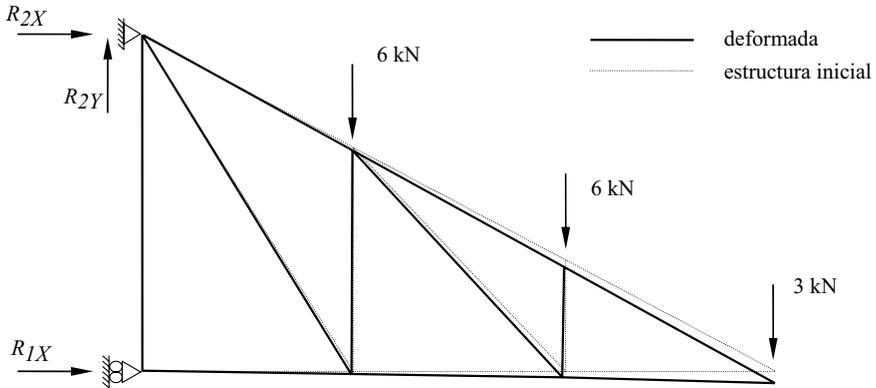


Figura 5.6 Reacciones y deformada de la estructura.

### 3.3 Memoria de la práctica

Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 1 El diagrama de flujo del programa de análisis;
- 2 el listado del programa de comandos para MATLAB, y
- 3 los gráficos, tablas, Figs, etc., necesarios para explicar lo realizado en los puntos de la tabla del apartado 3.2.

## 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Provocar una inestabilidad geométrica y una inestabilidad estática.
- 2 Cuáles deberían ser las nuevas áreas de las barras para conseguir, con el mínimo aumento de peso, reducir a la mitad el desplazamiento vertical del nudo 7.
- 3 Calcular el trabajo que realizan las cargas exteriores y comprobar que es igual a la energía interna de deformación de la estructura; es decir, que se cumple

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m N_i \Delta l_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n Q_j d_j$$

siendo:

- $N_i$  el esfuerzo axial de la barra  $i$ ;
- $\Delta l_i$  la variación de longitud de la barra  $i$ ;
- $m$  el número de barras de la estructura;
- $Q_j$  la carga externa aplicada en un nudo en la dirección del grado de libertad  $j$ ;
- $d_j$  el desplazamiento del nudo sobre el que se aplica la carga  $Q_j$  en la dirección del grado de libertad  $j$ , y
- $n$  el número de nudos cargados de la estructura.

## 5 BIBLIOGRAFÍA

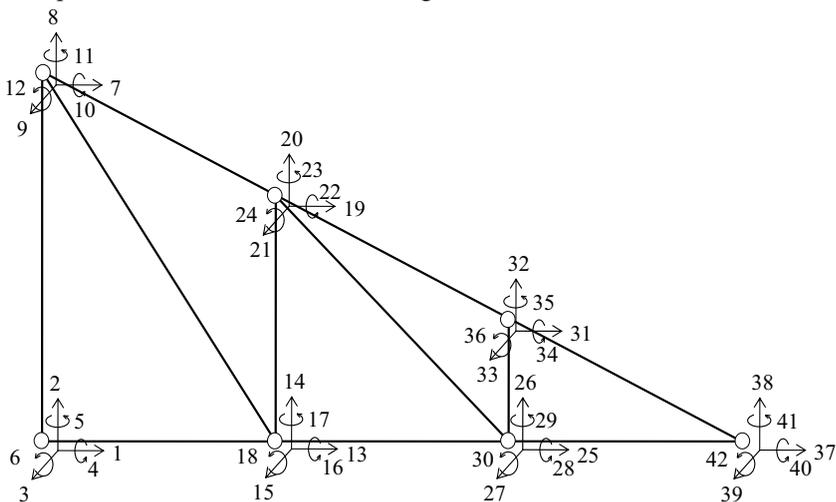
- 1 Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.

- 2 Martí, P. DISSENY 2006. *Análisis de Estructuras por Elementos Finitos. Manual del Usuario*. Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, 2006.
- 3 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: user guide*. Natick: The MathWorks, 1996.
- 4 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: reference guide*. Natick: The MathWorks, 1996..
- 5 MATLAB *Resumen de comandos para prácticas de análisis de estructuras*. Área de MMCyTE, UPCT, Cartagena, 2006.
- 6 NBE EA-95 *Estructuras de acero en edificación*. Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente, Madrid, 1996.

## 6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

### 6.1 Cuestiones

- 1 Justificar, para la estructura de la Fig. 5.1, la independencia de los esfuerzos con los valores de las áreas de los elementos.
- 2 Se denomina *semiancho de banda* ( $m_a$ ) de la matriz de rigidez al máximo número de elementos no nulos a la derecha o izquierda de la diagonal principal. De acuerdo con esto, el *ancho de banda* será  $2 \cdot m_a + 1$ . ¿Existe una secuencia de numeración de nudos diferente a la propuesta en la Fig. 5.3 que reduzca el ancho de banda de la matriz de rigidez de la estructura?
- 3 El esfuerzo axial en la barra 7 es cero ¿sería justificable eliminar la barra? ¿por qué?
- 4 Si consideramos, para la estructura de la Fig. 5.1, los grados de libertad de la Fig. 5.3 y los de la Fig. 5.7, ¿qué condiciones de contorno se deben imponer, en ambos casos, para obtener la misma matriz de rigidez reducida?



**Figura 5.7** Grados de libertad.

**7 ENLACES DE INTERÉS**

- 1 [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)
- 2 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)

## **ANEXO 5.1 ARCHIVOS DE FUNCIÓN MATLAB *KLOC\_PA*, *DIB\_EST* Y *DIB\_DEF***

---

### **1 ARCHIVO DE FUNCIÓN PARA EL CÁLCULO DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS BARRA DE NUDOS ARTICULADOS**

Para la obtención de la matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  (2 x 2) de un elemento barra de nudos articulados

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{ii}^j & k_{ij}^j \\ k_{ji}^i & k_{jj}^i \end{bmatrix}$$

en el sistema de coordenadas local (Fig. 5.2), se utilizará el archivo de función MATLAB *kloc\_pa.m*.

En el sistema local de coordenadas, de una barra de una estructura plana de nudos rígidos, se utilizará el archivo de función MATLAB *kloc\_pr.m*. La forma de utilizar este archivo es:

$$k_{iij} = \text{kloc\_pa} (L_{ij}, E_{ij}, A_{ij}, 1, 1)$$

para obtener  $\mathbf{k}_{ij}^i$  (1 x 1) la submatriz de rigidez directa *ii*;

$$k_{ijj} = \text{kloc\_pa} (L_{ij}, E_{ij}, A_{ij}, 1, 2)$$

para obtener  $\mathbf{k}_{ij}^j$  (1 x 1) la submatriz de rigidez cruzada *ij*;

$$k_{jji} = \text{kloc\_pa} (L_{ij}, E_{ij}, A_{ij}, 2, 1)$$

para obtener  $\mathbf{k}_{ji}^i$  (1 x 1) la submatriz de rigidez cruzada *ji*;

$$k_{jjj} = \text{kloc\_pa} (L_{ij}, E_{ij}, A_{ij}, 2, 2)$$

para obtener  $\mathbf{k}_{jj}^j$  (1 x 1) la submatriz de rigidez directa *jj*;

siendo  $L_{ij}$  la longitud del elemento *ij*,  $E_{ij}$  el módulo de elasticidad longitudinal del material del elemento *ij* y  $A_{ij}$  el área de la sección transversal del elemento *ij*.

### **2 ARCHIVO DE FUNCIÓN PARA EL DIBUJO DE LA ESTRUCTURA (NUDOS Y BARRAS)**

Para la obtención del dibujo de la estructura se utilizará el archivo de función MATLAB *dib\_est.m*. La forma de utilizar este archivo es

$$\text{dib\_est} (\text{coord}, \text{conex})$$

que dibuja la estructura a partir de la matriz *coord* (nº nudos x 2), la cual indica el valor de las coordenadas *x* e *y* de los nudos de la estructura ordenados de forma creciente por filas, y la matriz *conex* (nº barras x 2), que indica el número del nudo inicial *i* y final *j* de cada una de las barras, ordenadas de forma creciente por filas.

$$\text{coor} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{nmud} & y_{nmud} \end{bmatrix}; \quad \text{conex} = \begin{bmatrix} i_1 & j_1 \\ i_2 & j_2 \\ \vdots & \vdots \\ i_{nbarras} & j_{nbarras} \end{bmatrix}$$

### 3 ARCHIVO DE FUNCIÓN PARA EL DIBUJO DE LA DEFORMADA DE LA ESTRUCTURA

Para la obtención del dibujo de la estructura se utilizará el archivo de función MATLAB *dib\_def.m*. La forma de utilizar este archivo es

`dib_def (coor, conex, d, factor)`

que dibuja la estructura deformada a partir de las matrices *coor* y *conex*, ya descritas, y de la matriz *d* ( $n^\circ$  nudos  $\times$  2), que almacena los desplazamientos de los nudos de la estructura, ordenados de forma creciente, en el sistema de coordenadas global. La deformada puede verse mejor haciendo uso de un factor de amplificación (*factor*).

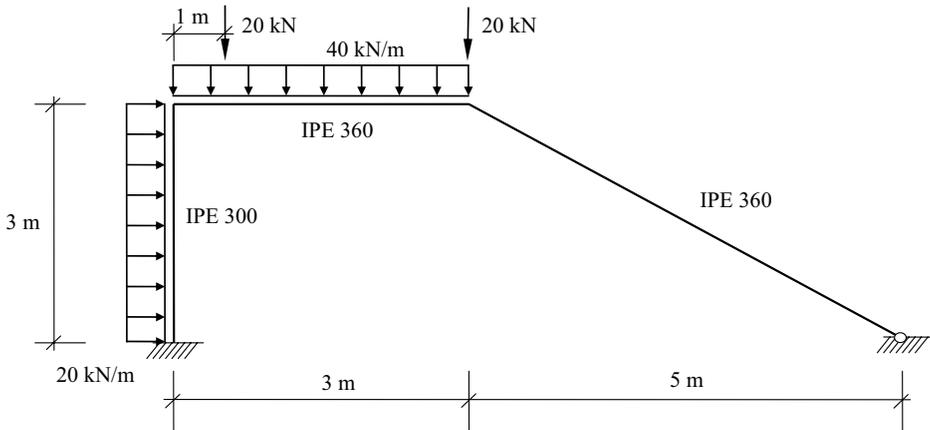
$$d = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ \vdots & \vdots \\ u_{nmud} & v_{nmud} \end{bmatrix}$$

## Práctica 6

# DESARROLLO DE UN PROGRAMA DE ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS DE NUDOS RÍGIDOS

### 1 OBJETIVOS

El objetivo global de la práctica es desarrollar un programa de análisis matricial para analizar completamente una estructura plana de nudos rígidos.



**DATOS:**  $E = 210 \text{ GPa}$ ;  $A_{\text{IPE 300}} = 53,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;  $I_{\text{IPE 300}} = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ ;  
 $A_{\text{IPE 360}} = 72,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;  $I_{\text{IPE 360}} = 16270 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ .

**Figura 6.1** Estructura plana de nudos rígidos.

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Desarrollar, mediante comandos de MATLAB, un programa para analizar la estructura de la Fig. 6.1, y que incluya:
  - 1.1 lectura de las coordenadas de nudos, propiedades del material, propiedades de los elementos, información de elementos, restricciones en los apoyos y cargas aplicadas;

- 1.2 definición de las matrices de rotación para pasar del sistema de coordenadas global a los sistemas de coordenadas locales de los elementos;
- 1.3 cálculo de las matrices de rigidez de los elementos en los sistemas de coordenadas locales y en el sistema de coordenadas global;
- 1.4 ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura y obtención de la matriz de rigidez reducida de la estructura a partir de las condiciones de contorno;
- 1.5 definición de los vectores de cargas en nudos a partir de las cargas sobre la estructura;
- 1.6 obtención de desplazamientos resolviendo el sistema de ecuaciones de equilibrio, y
- 1.7 obtención de esfuerzos y reacciones.

2 Comprobar los resultados obtenidos con el programa DISSENY/2006.

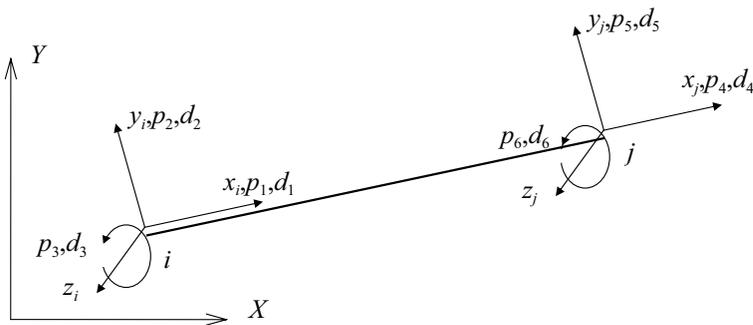
## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 El método de las rigideces

Los fundamentos del método de las rigideces se han desarrollado brevemente en el anexo I. Para más información sobre la formulación de este método puede consultarse la bibliografía (Martí, 2003).

### 2.2 Matriz de rigidez para estructuras planas de nudos rígidos

En la Fig. 6.2 se muestran los sistemas de coordenadas global y local para una estructura plana de nudos rígidos.



**Figura 6.2** Sistemas de coordenadas para estructuras planas de nudos rígidos.

Los esfuerzos que se pueden presentar en los elementos de las estructuras planas de nudos rígidos son: esfuerzos axiales  $N_i$  y  $N_j$ ; esfuerzos cortantes  $V_{yi}$  y  $V_{yj}$ , y momentos flectores  $M_{zi}$  y  $M_{zj}$ . Por coincidir los ejes  $y$  y  $z$  con los ejes principales de la sección transversal del elemento, estos esfuerzos coinciden, respectivamente, con las fuerzas  $p_1$ ,  $p_4$ ,  $p_2$ ,  $p_5$ ,  $p_3$  y  $p_6$ . Así pues, el vector de fuerzas es

$$\mathbf{p}_{ij}^e = (\mathbf{p}_{ij}^T, \mathbf{p}_{ji}^T)^T = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)^T = (N_i, V_{yi}, M_{zi}, N_j, V_{yj}, M_{zj})^T \quad (6.1)$$

y el de desplazamientos es

$$\mathbf{d}_{ij}^e = (\mathbf{d}_{ij}^T, \mathbf{d}_{ji}^T)^T = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)^T = (d_{xi}, d_{yi}, \theta_{zi}, d_{xj}, d_{yj}, \theta_{zj})^T \quad (6.2)$$

Las propiedades del elemento que se deben considerar son: longitud ( $L$ ); módulo de elasticidad longitudinal ( $E$ ); área de la sección transversal ( $A$ ) y momento de inercia de la sección transversal respecto del eje  $z$  ( $I_z$ ).

La ecuación matricial que relaciona las fuerzas y desplazamientos en los extremos del elemento, en el sistema de coordenadas local, es en forma más desarrollada

$$\begin{bmatrix} N_i \\ V_{yi} \\ M_{zi} \\ N_j \\ V_{yj} \\ M_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

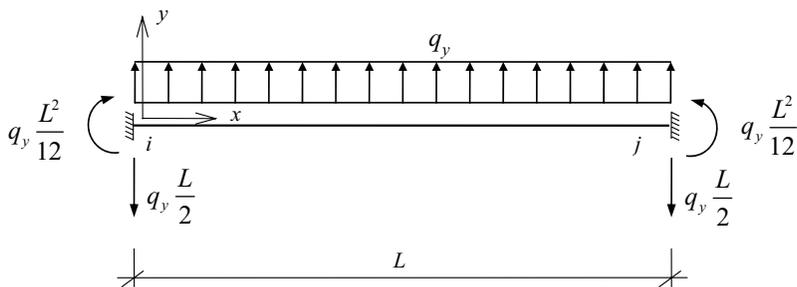
SIM.

### 2.3 Matriz de rotación

Si llamamos  $\alpha$  al ángulo que forma el eje  $x$  del sistema de coordenadas local del elemento con el eje  $X$  del sistema de coordenadas global, la matriz de rotación para el elemento es

$$\mathbf{R}_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

### 2.4 Cargas en barras no puntuales



**Figura 6.3** Viga con carga uniformemente repartida.

En el caso de una viga con una carga uniformemente repartida  $q_y$  (Fig. 6.3) las fuerzas de empotramiento perfecto, para cada uno de los extremos, son

- extremo  $i$

$$\begin{bmatrix} p_x^e \\ p_y^e \\ m_z^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -q_y L/2 \\ -q_y L^2/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L/2 & 0 \\ 0 & -L^2/12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.5a)$$

- extremo  $j$

$$\begin{bmatrix} p_x^e \\ p_y^e \\ m_z^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -q_y L/2 \\ q_y L^2/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L/2 & 0 \\ 0 & L^2/12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.5b)$$

## 2.5 Cargas en barras puntuales

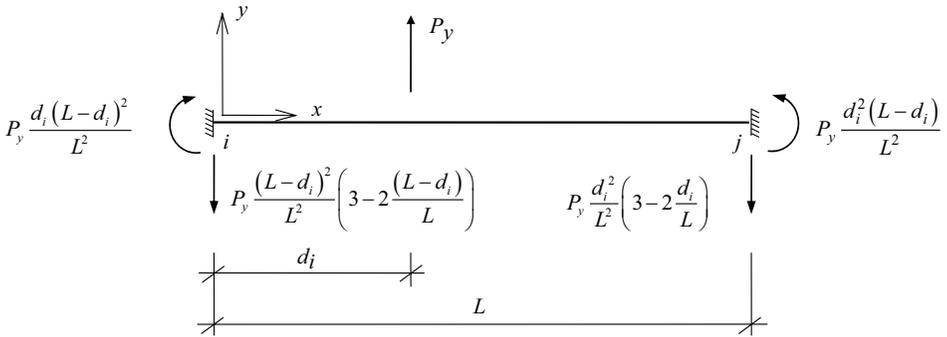


Figura 6.4 Viga con carga puntual.

En el caso de una viga con una carga puntual  $P_y$  perpendicular a ésta, separada una distancia  $d_i$  del extremo  $i$  (Fig. 6.4), las fuerzas de empotramiento perfecto para cada uno de los extremos, son

- extremo  $i$

$$\begin{bmatrix} p_x^e \\ p_y^e \\ m_z^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P_y \frac{(L-d_i)^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{(L-d_i)}{L}\right) \\ -P_y \frac{d_i(L-d_i)^2}{L^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(L-d_i)^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{(L-d_i)}{L}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{d_i(L-d_i)^2}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.6a)$$

- extremo  $j$

$$\begin{bmatrix} P_x^e \\ P_y^e \\ m_z^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P_y \frac{d_i^2}{L^2} \left( 3 - 2 \frac{d_i}{L} \right) \\ P_y \frac{d_i^2}{L^2} (L - d_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_i^2}{L^2} \left( 3 - 2 \frac{d_i}{L} \right) & 0 \\ 0 & \frac{d_i^2}{L^2} (L - d_i) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.6b)$$

### 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

#### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP, y
- programa MATLAB, versión 4.0 o superior para Windows.
- editor de Windows, y
- programa DISSENY/2006, versión académica.

#### 3.2 Procedimiento para el desarrollo del programa de comandos MATLAB

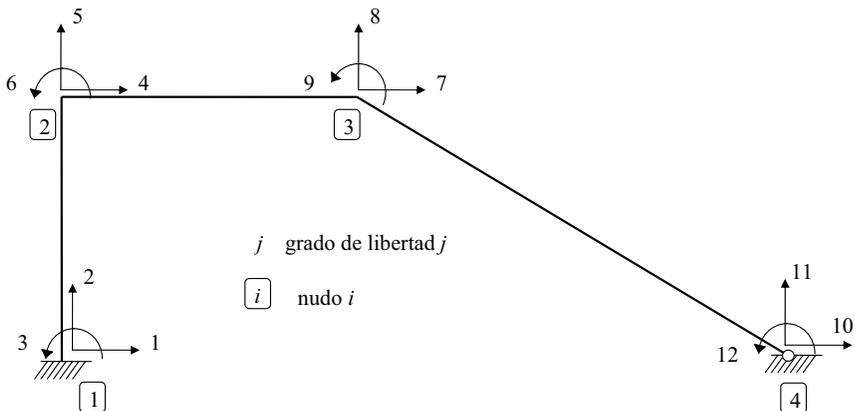
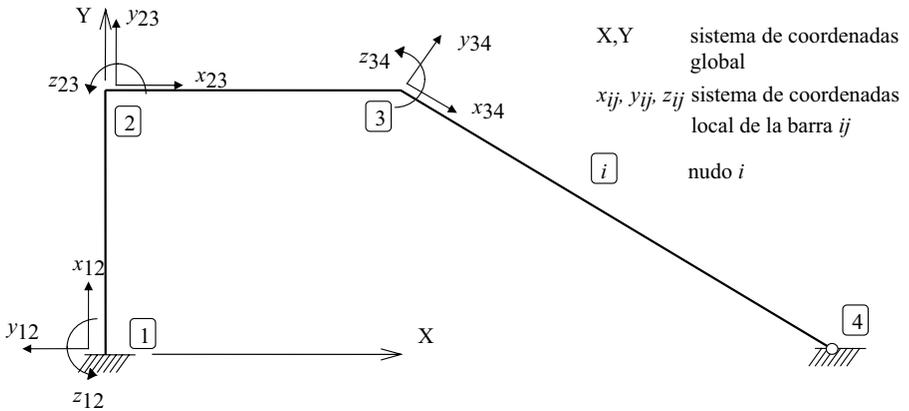
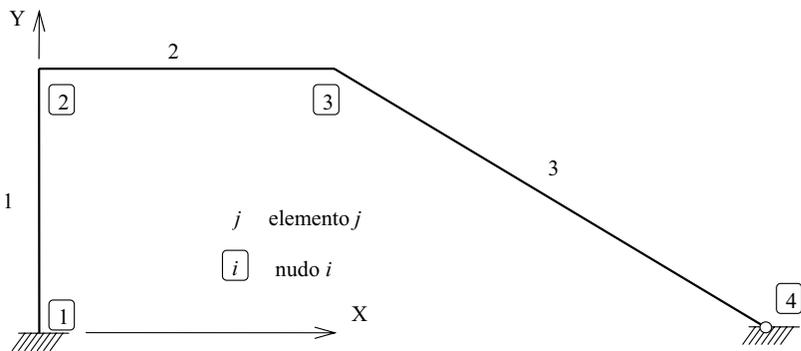


Figura 6.5 Nudos y grados de libertad.



**Figura 6.6** Sistema de coordenadas global de la estructura y sistemas de coordenadas locales de las barras.



**Figura 6.7** Codificación de nudos y barras para el análisis con DISSENY/2006.

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
1	Definiciones iniciales.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Encabezamiento.</li> <li>Fichero de resultados.</li> <li>Formato de escritura.</li> </ul>	<pre>% format diary</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>En el encabezamiento se incluirá: <ul style="list-style-type: none"> <li>- nº del grupo;</li> <li>- alumnos del grupo, y</li> <li>- fecha de realización.</li> </ul> </li> </ul>

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
2	Entrada de datos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Coordenadas de los nudos.</li> <li>• Información de los elementos.</li> <li>• Área de los elementos.</li> <li>• Material.</li> <li>• Cargas.</li> </ul>	input eval	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La entrada de datos puede realizarse con operaciones de asignación directa, ya que el programa se hace particular para la estructura de la Fig. 6.1.</li> </ul>
3	Cálculo de las matrices de rotación para cada elemento.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cálculo de los cosenos directores a partir de la información de coordenadas de los nudos y nudos inicial y final de cada elemento.</li> <li>• Definición de la matriz de rotación.</li> </ul>	sqrt	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teniendo en cuenta que el programa se desarrolla, de forma particular, para la estructura de la Fig. 6.1, los cosenos directores pueden definirse de una forma más directa.</li> <li>• Ver Fig. 6.6.</li> </ul>
4	Obtención de las matrices de rigidez de los elementos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Obtención de las matrices de rigidez de los elementos en los sistemas de coordenadas locales.</li> <li>• Transformación de las matrices de rigidez de los elementos al sistema de coordenadas global de la estructura.</li> </ul>	kloc_pr	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El uso del archivo de función <i>kloc_pr.m</i> se explica en el anexo 6.1.</li> <li>• Ver Fig. 6.6.</li> </ul>
5	Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ensamblaje de la matriz de rigidez considerando la aportación de las matrices de rigidez de cada elemento en coordenadas globales.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se tendrá en cuenta la simetría de la matriz de rigidez de la estructura para la obtención de la misma con el menor número de operaciones.</li> <li>• Ver Fig. 6.5 y 6.6.</li> </ul>
6	Obtención de la matriz de rigidez reducida.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Consideración de las condiciones de contorno impuestas a la estructura para determinar filas y columnas, de la matriz de rigidez completa, a eliminar.</li> </ul>	Para eliminar de la fila $i$ a la $j$ de la matriz $A$ : $A([i:j], :) = []$  Para eliminar de la columna $l$ a la $m$ de la matriz $A$ : $A(:, [l:m]) = []$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ver Fig. 6.5.</li> </ul>

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
7	Cálculo del vector de fuerzas exteriores aplicadas en los nudos de la estructura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Definición de un vector con elementos de valor cero de longitud el número de grados de libertad no restringidos de la estructura.</li> <li>• Obtención de los vectores de fuerzas de empotramiento perfecto para cada elemento mediante los archivos de función <i>fe_p</i> y <i>fe_u</i>.</li> <li>• Obtención de las fuerzas equivalentes en cada nudo.</li> <li>• Obtención del vector de fuerzas aplicadas en nudos.</li> </ul>	<pre>zeros fe_p fe_u</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El uso del archivo de función <i>fe_p.m</i> se explica en el anexo 6.1.</li> <li>• El uso del archivo de función <i>fe_u.m</i> se explica en el anexo 6.1.</li> <li>• Ver Fig. 6.5.</li> </ul>
8	Cálculo de desplazamientos en los nudos de la estructura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cálculo de la matriz inversa de la reducida.</li> <li>• Cálculo de desplazamientos.</li> </ul>	inv	
9	Cálculo de esfuerzos en elementos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Obtención de los vectores de desplazamientos en el sistema de coordenadas local para cada elemento.</li> <li>• Cálculo de esfuerzos con las matrices de rigidez de los elementos, desplazamientos y fuerzas de empotramiento perfecto en coordenadas locales.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se pueden calcular los esfuerzos, de forma alternativa, con los desplazamientos y las matrices de rigidez de los elementos en el sistema de coordenadas global. Las fuerzas así calculadas se transforman posteriormente a coordenadas locales y se les adicionan las fuerzas de empotramiento perfecto.</li> </ul>
10	Cálculo de fuerzas en nudos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Transformar los valores de esfuerzos en fuerzas en nudos en el sistema de coordenadas global</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprobar que las fuerzas calculadas en nudos son iguales a las fuerzas aplicadas en nudos.</li> </ul>

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
		<p>de la estructura.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Suma de las fuerzas que concurren a cada nudo de la estructura.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprobar el equilibrio de la estructura.</li> </ul>
11	Dibujo de diagramas de esfuerzos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recopilación de valores de esfuerzos en cada barra.</li> <li>• Obtención de gráficas de leyes de esfuerzos.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Señalar los valores máximos de esfuerzos y secciones de abscisa <math>x</math> donde se producen.</li> <li>• Se representarán las leyes de esfuerzos, de forma aproximada, mediante un croquis a mano alzada.</li> </ul>
12	Dibujo de la deformada aproximada.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dibujar la estructura sin deformar.</li> <li>• Dibujar nudos desplazados.</li> <li>• Dibujar la elástica de las barras teniendo en cuenta los desplazamientos generalizados en los nudos y la curvatura de la elástica de las barras.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se representará la deformada, de forma aproximada, mediante un croquis a mano alzada.</li> </ul>
13	Análisis de la estructura con DISSENY/2006 y comparación de resultados.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Creación del fichero de datos para DISSENY/2006 que incluya la siguiente información (Figs 6.1 y 6.7): <ul style="list-style-type: none"> <li>* coordenadas de los nudos,</li> <li>* materiales de los elementos,</li> <li>* propiedades de la sección de los elementos,</li> <li>* información de los elementos,</li> <li>* restricciones, y</li> <li>* cargas</li> </ul> </li> <li>• Comparación de resultados.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• La información necesaria para crear el fichero de datos para DISSENY/2006 puede encontrarse en la bibliografía (Martí, 2006).</li> </ul>

### 3.3 Memoria de la práctica

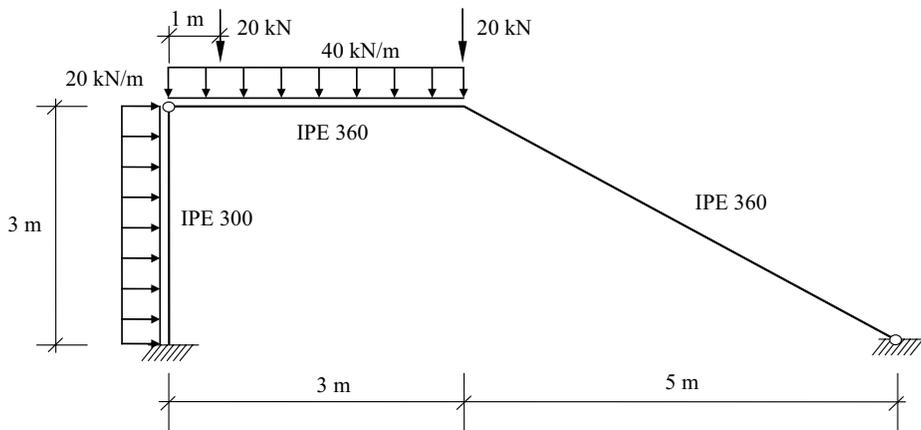
Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 1 El diagrama de flujo del programa de análisis;
- 2 el listado del programa de comandos para MATLAB, y
- 3 los gráficos, tablas, Figs, etc., necesarios para explicar lo realizado en los puntos de la tabla del apartado 3.2.

## 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Desarrollar una subrutina con MATLAB para obtener la deformada de las barras.
- 2 Desarrollar una subrutina con MATLAB para considerar cargas distribuidas de tipo triangular y trapezoidal.
- 3 Adaptar el programa para resolver la estructura de la Fig. 6.8 situando la articulación en el soporte o en la viga.



**Figura 6.8** Estructura con articulación en el nudo 2.

## 5 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.
- 2 Martí, P. DISSENY 2006. *Análisis de Estructuras por Elementos Finitos. Manual del Usuario*. Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, 2006.
- 3 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: user guide*. Natick: The MathWorks, 1996.
- 4 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: reference guide*. Natick: The MathWorks, 1996..
- 5 MATLAB *Resumen de comandos para prácticas de análisis de estructuras*. Área de MMCyTE, UPCT, Cartagena, 2006.
- 6 NBE EA-95 *Estructuras de acero en edificación*. Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente, Madrid, 1996.

## **6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES**

### **6.1 Cuestiones**

- 1 ¿Cómo se consideraría una articulación en el nudo 2 de la Fig. 6.8?
- 2 ¿Cuál es la influencia de considerar una articulación en el nudo 2 de la Fig. 6.8?
- 3 ¿Cómo cambian los resultados del análisis si se multiplican por un factor las inercias y áreas de los perfiles?
- 4 ¿Cómo cambian los resultados del análisis si se aumentan los perfiles?

## **7 ENLACES DE INTERÉS**

- 1 [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)
- 5 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)

## ANEXO 6.1 ARCHIVOS DE FUNCIÓN MATLAB *KLOC\_PR*, *FE\_U* Y *FE\_P*

---

### 1 ARCHIVO DE FUNCIÓN PARA EL CÁLCULO DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS BARRA DE NUDOS RÍGIDOS

Para la obtención de la matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  (6 x 6), conforme la expresión

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii}^j & \mathbf{k}_{ij} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj}^i \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

en el sistema local de coordenadas, de una barra de una estructura plana de nudos rígidos, se utilizará el archivo de función MATLAB *kloc\_pr.m*. La forma de utilizar este archivo es:

$$k_{iij} = kloc\_pr (L_{ij}, E_{ij}, A_{ij}, I_{ij}, 1, 1)$$

para obtener  $\mathbf{k}_{ii}^j$  (3 x 3) la submatriz de rigidez directa *ii*;

$$k_{ij} = kloc\_pr (L_{ij}, E_{ij}, A_{ij}, I_{ij}, 1, 2)$$

para obtener  $\mathbf{k}_{ij}$  (3 x 3) la submatriz de rigidez cruzada *ij*;

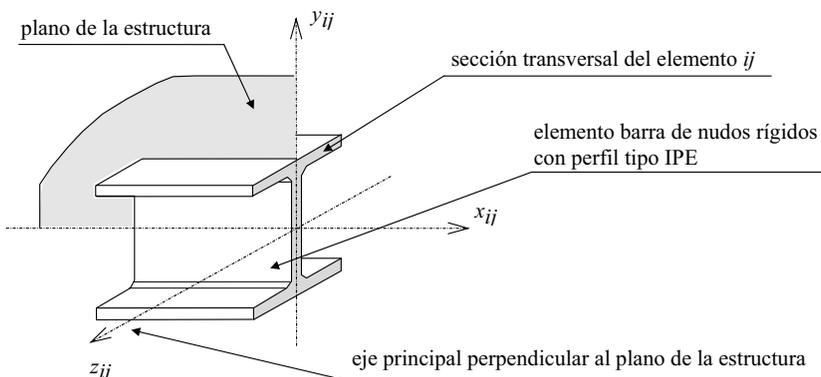
$$k_{ji} = kloc\_pr (L_{ij}, E_{ij}, A_{ij}, I_{ij}, 2, 1)$$

para obtener  $\mathbf{k}_{ji}$  (3 x 3) la submatriz de rigidez cruzada *ji*;

$$k_{jji} = kloc\_pr (L_{ij}, E_{ij}, A_{ij}, I_{ij}, 2, 2)$$

para obtener  $\mathbf{k}_{jj}^i$  (3 x 3) la submatriz de rigidez directa *jj*;

siendo  $L_{ij}$  la longitud del elemento *ij*,  $E_{ij}$  el módulo de elasticidad longitudinal del material del elemento *ij*,  $A_{ij}$  el área de la sección transversal del elemento *ij* e  $I_{ij}$  el momento de inercia de la sección transversal del elemento *ij* respecto al eje principal perpendicular al plano de la estructura (Fig. 6.9).



**Figura 6.9** Elemento *ij*: ejes principales, sección transversal y plano de la estructura.

## 2 ARCHIVOS DE FUNCIÓN PARA EL CÁLCULO DE LAS FUERZAS Y MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

Para la obtención de las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto en el sistema local de coordenadas de una barra de una estructura plana de nudos rígidos, según lo explicado en los apartados 2.3 y 2.4 de esta práctica, se utilizarán los archivos de función MATLAB *fe\_p.m* y *fe\_u.m*. La forma de utilizar estos archivos es:

$$pe_i = fe\_u (L, qy, 1)$$

siendo  $\mathbf{p}_i^e$  (3x1) el vector de fuerzas de empotramiento perfecto en el extremo inicial de la barra, originado por una carga uniforme  $q_y$ , perpendicular a la barra y aplicada sobre toda la longitud  $L$  de la misma (Fig. 6.3);

$$pe_j = fe\_u (L, qy, 2)$$

siendo  $\mathbf{p}_j^e$  (3x1) el vector de fuerzas de empotramiento perfecto en el extremo final de la barra, originado por una carga uniforme  $q_y$ , perpendicular a la barra y aplicada sobre toda la longitud  $L$  de la misma (Fig. 6.3);

$$pe_i = fe\_p (L, Py, di, 1)$$

siendo  $\mathbf{p}_i^e$  (3x1) el vector de fuerzas de empotramiento perfecto en el extremo inicial de la barra, originado por una carga puntual  $P_y$ , aplicada perpendicularmente a la barra de longitud  $L$ , a una distancia  $d_i$  del extremo inicial (Fig. 6.4), y

$$pe_j = fe\_p (L, Py, di, 2)$$

siendo  $\mathbf{p}_j^e$  (3x1) el vector de fuerzas de empotramiento perfecto en el extremo final de la barra, originado por una carga puntual  $P_y$ , aplicada perpendicularmente a la barra de longitud  $L$ , a una distancia  $d_i$  del extremo inicial (Fig. 6.4).

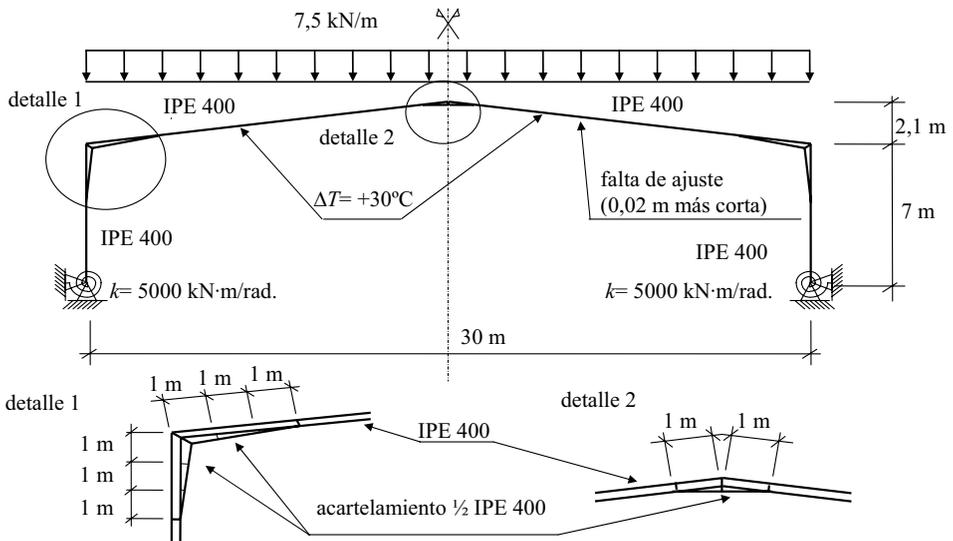


## Práctica 7

# ANÁLISIS DE UNA ESTRUCTURA PLANA DE NUDOS RÍGIDOS

## 1 OBJETIVOS

El objetivo global de la práctica es modelar y analizar una estructura plana de nudos rígidos, formada por perfiles laminados acartelados, apoyos elásticos y diferentes tipos de carga, con el programa de elementos finitos DISSENY/2006.



**Figura 7.1** Estructura plana con elementos de inercia variable.

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Modelar la estructura de la figura 7.1 utilizando el programa DISSENY/2006 con la codificación y datos incluidos en las figuras 7.2, 7.3, 7.5 y 7.6. Se considerarán los 4 casos siguientes:
  - 1.1 caso 1º: estructura con barras de inercia constante y empotramiento perfecto en la base;

- 1.2 caso 2º: estructura con barras de inercia constante y apoyo elástico en la base;
- 1.3 caso 3º: estructura con barras de inercia variable y empotramiento perfecto en la base, y
- 1.4 caso 4º: estructura con barras de inercia variable y apoyo elástico en la base.
- 2 Analizar la estructura con DISSENY/2006 para los casos anteriores y los siguientes estados de carga:
  - 2.1 estado 1º: carga gravitatoria uniformemente repartida sobre la cubierta de 7,5 kN/m;
  - 2.2 estado 2º: carga térmica en cubierta de +30 °C, y
  - 2.3 estado 3º: falta de ajuste del dintel derecho de la estructura de 0,02 m.
- 3 Obtener los diagramas de esfuerzos y la deformada aproximada de la estructura.
- 4 Comparar los resultados de los diferentes casos analizados para observar como influye el modelo de análisis en el comportamiento estructural (desplazamientos, esfuerzos y reacciones).

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La estructura de la figura 7.1 puede modelarse para el análisis con DISSENY/2006 según el caso que se considere:

- Caso 1º: estructura con barras de inercia constante y empotramiento perfecto en la base (figura 7.2). Los elementos que componen el modelo tendrán todos los mismos valores de propiedades de la sección transversal y se considerarán los nudos 1 y 19 empotrados.
- Caso 2º: estructura con barras de inercia constante y apoyo elástico en la base (figura 7.3). Los elementos que componen el modelo tendrán todos los mismos valores de propiedades de la sección transversal. Los apoyos elásticos (muelles de rigidez al giro  $k = 5000 \text{ kN}\cdot\text{m}/\text{rad}$ ) se simularán en DISSENY/2006 con unos elementos barra de nudos rígidos perpendiculares al plano de la estructura y que estén sometidos a torsión pura (figura 7.4). Para que estos elementos produzcan el mismo efecto que los muelles, deberá cumplirse

$$k = \frac{GJ}{L} \quad (7.1)$$

siendo:

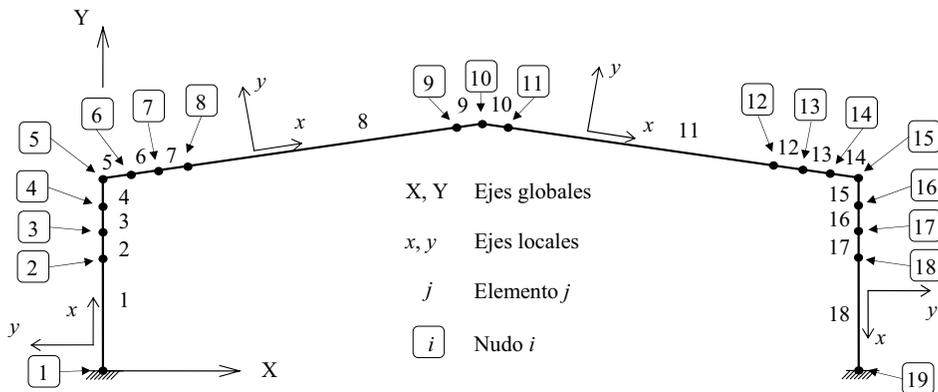
$k$  la rigidez al giro de los muelles, de valor  $5000 \text{ kN}\cdot\text{m}/\text{rad}$ ;

$G$  el módulo de elasticidad transversal del material para los elementos barra de nudos rígidos;

$J$  el módulo de torsión de la sección transversal de los elementos barra de nudos rígidos, y

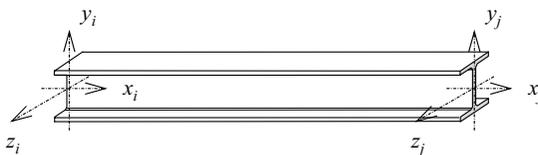
$L$  la longitud de los elementos barra de nudos rígidos.

Para un correcto modelado se deberán también restringir los nudos de los elementos tal como se ve en la figura 7.4.

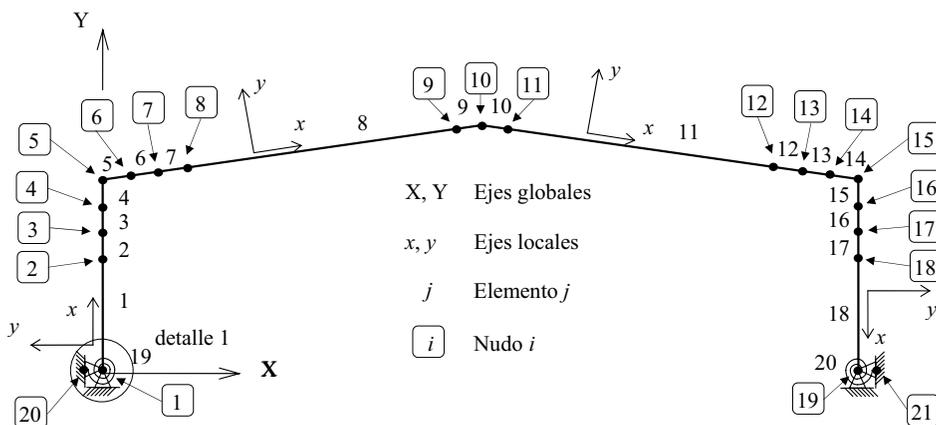


**DATOS:**  $E = 210 \text{ GPa}$ ;  $A = 84,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;  $I_z = 23130 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ ;

Ejes locales del elemento  $ij$

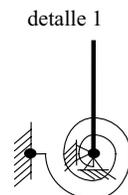


**Figura 7.2** Modelo de análisis para DISSENY/2006: caso 1º.



**DATOS:**  $E = 210 \text{ GPa}$ ;  
 $A_1 \text{ a } A_{18} = 84,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;  $I_{z1} \text{ a } I_{z18} = 23130 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$   
 $k_{19} = k_{20} = 5000 \text{ kN/m/rad}$

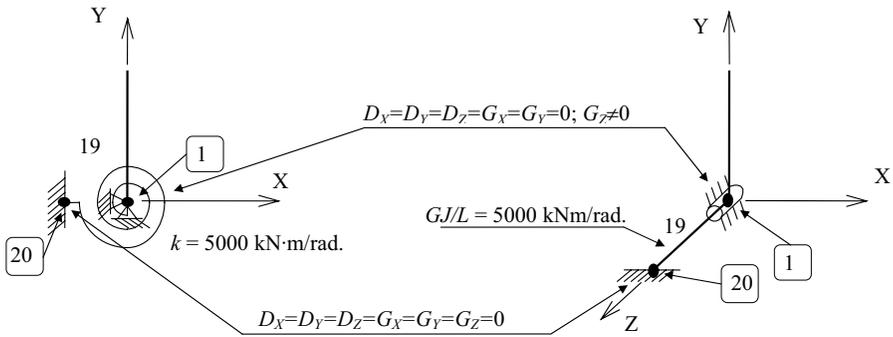
NOTA: los subíndices de las propiedades indican el número del elemento al que están asociadas



**Figura 7.3** Modelo de análisis para DISSENY/2006: caso 2º.

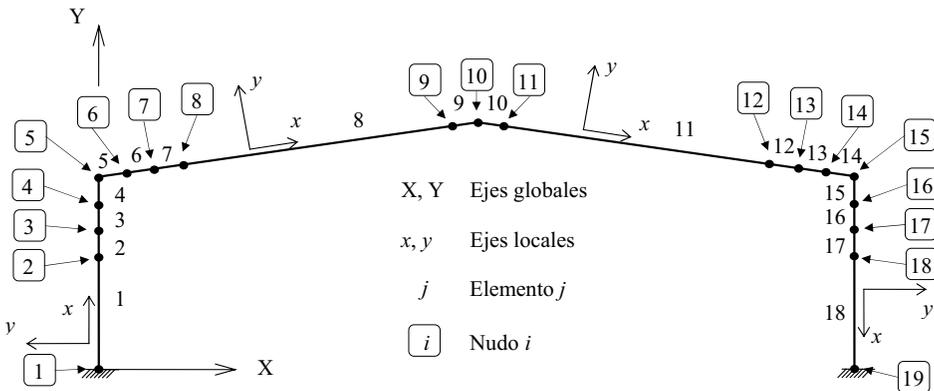
Elementos 19 y 20 muelles de rigidez al giro  $k = 5000 \text{ kN}\cdot\text{m}/\text{rad}$ .

Elementos 19 y 20 barras de nudos rígidos sometidas a torsión pura con rigidez  $GJ/L = 5000 \text{ kN}\cdot\text{m}/\text{rad}$ .



**Figura 7.4** Modelo del apoyo elástico en la base con DISSENY/2006.

- Caso 3º: estructura con barras de inercia variable y empotramiento perfecto en la base (figura 7.5). Los elementos de inercia variable que componen el modelo se considerarán, en DISSENY/2006, como de inercia constante. Los pilares y los dinteles de la estructura quedarán discretizados en elementos de inercia constante cuyo valor varía, simulándose de forma aproximada el cambio uniforme de la inercia de los mismos. Se considerarán los nudos 1 y 19 empotrados.



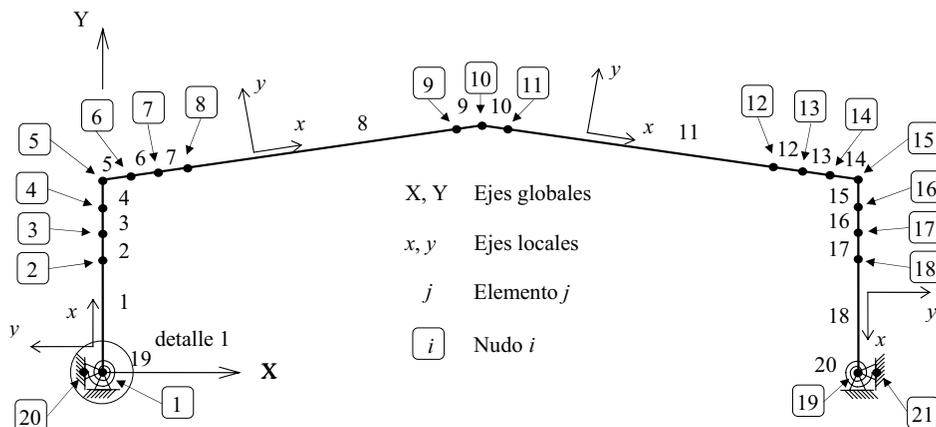
**DATOS:**  $E = 210 \text{ GPa}$ ;

$A_1 = A_{18} = A_8 = A_{11} = 84,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;	$I_{z1} = I_{z18} = I_{z8} = I_{z11} = 23130 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
$A_2 = A_{17} = A_7 = A_{12} = 99,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;	$I_{z2} = I_{z17} = I_{z7} = I_{z12} = 30136 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
$A_3 = A_{16} = A_9 = A_{10} = 116,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;	$I_{z3} = I_{z16} = I_{z9} = I_{z10} = 41909 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
$A_4 = A_{15} = A_5 = A_{14} = 122,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;	$I_{z4} = I_{z15} = I_{z5} = I_{z14} = 52680 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
$A_6 = A_{13} = 116,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;	$I_{z6} = I_{z13} = 41909 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

NOTA: los subíndices de las propiedades indican el número del elemento al que están asociadas

**Figura 7.5** Modelo de análisis para DISSENY/2006: caso 3º.

- Caso 4º: estructura con barras de inercia variable y apoyo elástico en la base (figura 7.6). Los elementos de inercia variable que componen el modelo se considerarán como en el caso 3º. Los apoyos elásticos se simularán igual que en el caso 2º.



**DATOS :**

$E = 210 \text{ GPa};$	
$A_1 = A_{18} = A_8 = A_{11} = 84,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2;$	$I_{z1} = I_{z18} = I_{z8} = I_{z11} = 23130 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
$A_2 = A_{17} = A_7 = A_{12} = 99,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2;$	$I_{z2} = I_{z17} = I_{z7} = I_{z12} = 30136 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
$A_3 = A_{16} = A_9 = A_{10} = 116,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2;$	$I_{z3} = I_{z16} = I_{z9} = I_{z10} = 41909 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
$A_4 = A_{15} = A_5 = A_{14} = 122,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2;$	$I_{z4} = I_{z15} = I_{z5} = I_{z14} = 52680 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
$A_6 = A_{13} = 116,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2;$	$I_{z6} = I_{z13} = 41909 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
$k_{19} = k_{20} = 5000 \text{ kN} \cdot \text{m}/\text{rad}$	

NOTA: los subíndices de las propiedades indican el número del elemento al que están asociadas

**Figura 7.6** Modelo de análisis para DISSENY/2006: caso 4º.

Una exposición completa de la formulación del método matricial de las rigideces puede encontrarse en la bibliografía (Martí, 2003).

### 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

#### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP, y
- programa DISSENY/2006, versión académica.

#### 3.2 Procedimiento para modelar y analizar la estructura con DISSENY/2006

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	NOTAS Y CUESTIONES
1	Creación de 4 ficheros de datos para DISSENY/2006 con los 4 modelos de la estructura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelar la estructura de la figura 7.1 incluyendo en el fichero de datos para DISSENY/2006:               <ul style="list-style-type: none"> <li>* coordenadas de los nudos,</li> <li>* materiales de los elementos,</li> <li>* propiedades de la sección de los elementos,</li> <li>* información sobre los elementos,</li> <li>* restricciones en los apoyos, y</li> <li>* cargas.</li> </ul> </li> <li>considerando los casos 1, 2, 3 y 4.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La falta de ajuste se considerará en el elemento 11, siendo éste 0,02 m más corto que su longitud teórica. Se podrán utilizar cargas en barras del tipo <i>fuerzas de empotramiento</i>.</li> <li>La carga térmica de +30 °C se considerará aplicada en los dinteles de la estructura (elementos 5 al 14).</li> </ul>
2	Analizar la estructura con DISSENY/2006	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utilizar el fichero de datos creado para analizar la estructura cargándolo en DISSENY/2006:  <code>&lt;fich.adf&gt;</code>                siendo <code>fich.adf</code> el nombre del fichero de datos.</li> </ul>	
3	Obtención de diagramas de esfuerzos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Recopilación de valores de esfuerzos en los extremos de los elementos desde el fichero de resultados del análisis con DISSENY/2006.</li> <li>Obtención de gráficas de leyes de esfuerzos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se considerarán los 4 casos expuestos y las 3 hipótesis de carga.</li> </ul>
4	Obtención de la deformada aproximada.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Obtención de los valores de desplazamientos y giros en los nudos del listado de resultados de DISSENY/2006.</li> <li>Obtención de los puntos de los elementos donde los momentos son cero (puntos de inflexión de la curvatura de las barras).</li> <li>Dibujar la deformada aproximada.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se considerarán los 4 casos expuestos y las 3 hipótesis de carga.</li> </ul>
5	Comparación de resultados del análisis.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Recopilación de los valores de momentos flectores en los nudos 1, 5, 10, 15 y 19 de los ficheros de resultados de DISSENY/2006.</li> <li>Recopilación de los valores de desplazamiento vertical en el nudo 10 de los ficheros de resultados de DISSENY/2006.</li> <li>Ordenación de los valores recopilados sobre un croquis de la estructura.</li> <li>Comparación de resultados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se propone el formato de representación de resultados del anexo 7.1.</li> </ul>

### 3.3 Memoria de la práctica

Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 1 Los listados de datos y de resultados de los diferentes modelos de la estructura (4 casos) para el programa DISSENY/2006, y
- 2 los gráficos, tablas, figuras, etc., necesarios para explicar lo realizado en los puntos de la tabla del apartado 3.2.

## 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Estudiar el efecto de la rigidez al giro del apoyo elástico en la cimentación sobre el comportamiento global de la estructura.
- 2 Modificar el valor de las rigideces al giro  $k$  de los apoyos elásticos con el fin de que, para el estado de carga nº 1 y para el caso nº 2, el valor del momento flector en los nudos 1 y 19 no sea mayor que 60 kN·m.
- 3 Estudiar el efecto de acartelar los nudos de esquina y/o del nudo superior.
- 4 Estudiar el efecto de los diferentes modelos propuestos sobre el nivel de seguridad de la estructura.

## 5 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Argüelles Álvarez, R. Argüelles Bustillo, R. Arriaga, F. y Atienza, J.R. *Estructuras de acero. Cálculo: Norma Básica y Eurocódigo (tomos I y II)*. Bellisco, Madrid, 1999.
- 2 Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.
- 3 Martí, P. *DISSENY 2006. Análisis de Estructuras por Elementos Finitos. Manual del Usuario*. Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, 2006.
- 4 Marco, J. *Fundamentos para el cálculo y diseño de estructuras metálicas de acero laminado. Comportamiento del material y esfuerzos básicos. Aplicados al Eurocódigo 3, Normas AISC, Normativa española (EA95)*. McGraw-Hill, Madrid, 1997.
- 5 NBE EA-95 *Estructuras de acero en edificación*. Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente, Madrid, 1996.
- 6 UNE-ENV 1993-1-1 *Eurocódigo 3: Proyecto de estructuras de acero. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación*. AENOR, Madrid, 1996.

## 6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

### 6.1 Cuestiones

- 1 ¿Cómo influye, en los resultados del análisis del pórtico, la rigidez al giro del apoyo?
- 2 ¿Cómo influye, en los resultados del análisis del pórtico, el acartelamiento de los nudos de esquina?
- 3 ¿Cómo influye, en los resultados del análisis del pórtico, el acartelamiento del nudo superior?

## 7 ENLACES DE INTERÉS

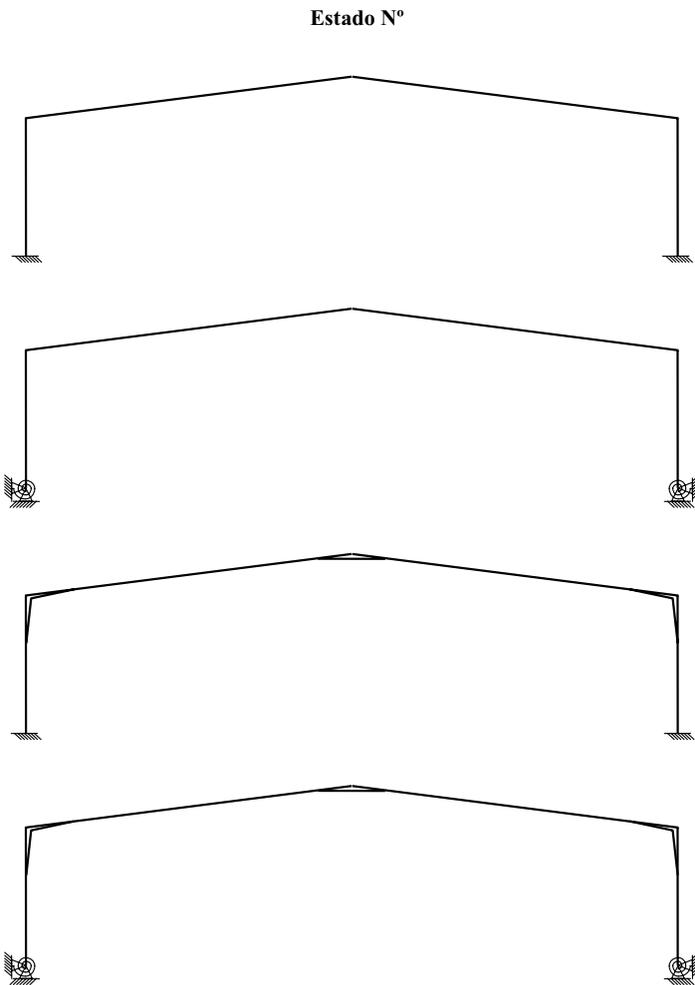
- 1 [www.aceralia.es](http://www.aceralia.es)
- 2 [www.civileng.com/estruc.htm](http://www.civileng.com/estruc.htm)
- 3 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)

## ANEXO 7.1 FORMATO PARA COMPARACIÓN DE RESULTADOS

---

### 1 COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Se propone el siguiente esquema:



**Figura 7.7** Esquema para comparación de resultados del análisis de una estructura plana de nudos rígidos.

## *Práctica 8*

# **ANÁLISIS DE UNA ESTRUCTURA ESPACIAL DE NUDOS RÍGIDOS**

---

### **1 OBJETIVOS**

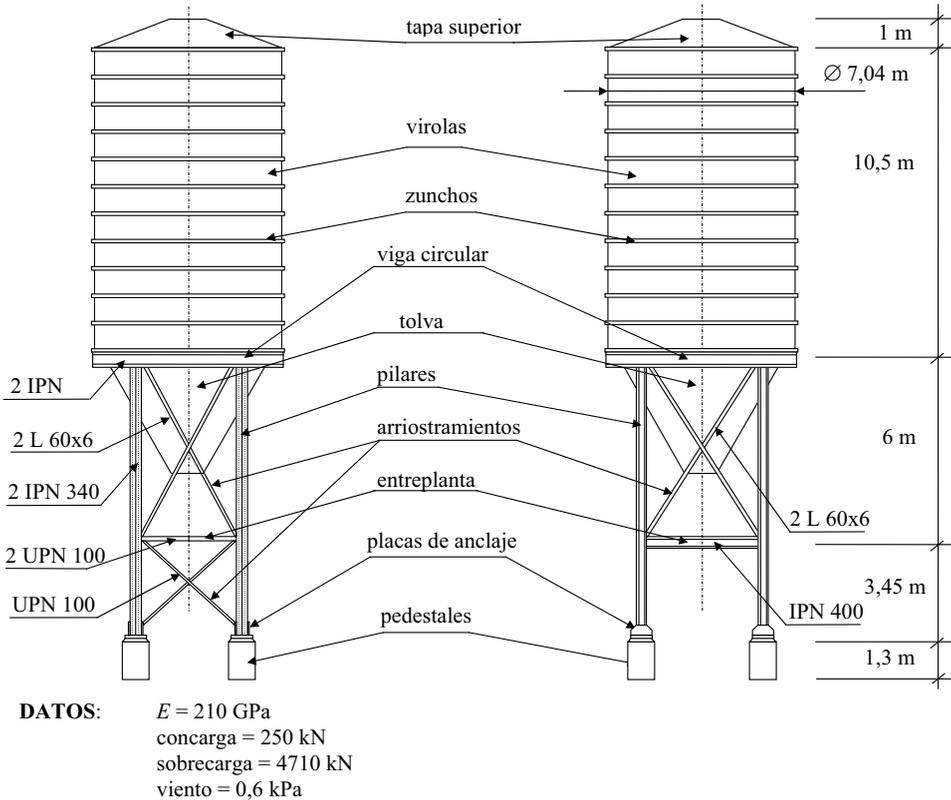
El objetivo global de la práctica es analizar una estructura espacial de nudos rígidos con el programa de elementos finitos DISSENY/2006.

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Modelar la estructura de la figura 8.1 utilizando el programa DISSENY/2006. Considerar el silo con arriostramientos y sin ellos (2 modelos).
- 2 Analizar la estructura con el programa DISSENY/2006.
- 3 Obtener los diagramas de esfuerzos y reacciones.
- 4 Comparar resultados del silo arriostrado y del silo sin arriostrar.

El silo tiene las siguientes características:

- 1 virolas: de chapa plegada de 0,0025 m de espesor con los canales dispuestos verticalmente y 7,04 m de diámetro exterior. Distanciados 0,94 m se colocan zunchos de 0,1 m de ancho y espesor variable con la presión que han de resistir;
- 2 tolva: de forma troncocónica, tiene 6,84 m de diámetro en su parte superior y 1,20 m en la boca de descarga con una altura de 4,645 m;
- 3 tapa superior: de forma troncocónica, tiene 7,04 m de diámetro en su parte inferior y 1,40 m en la boca superior con una altura de 1 m;
- 4 viga circular: sobre la que se apoyan las virolas y la tolva, tiene 6,68 m de diámetro;
- 5 pilares: dispuestos en los vértices de un rectángulo de 5,362 x 3,984 m de lados. Arriostrados conforme se ve en la figura 8.1, terminan sobre pedestales de hormigón armado, y
- 6 entreplanta: situada bajo la tolva y está formada por viguetas y piso de malla metálica.

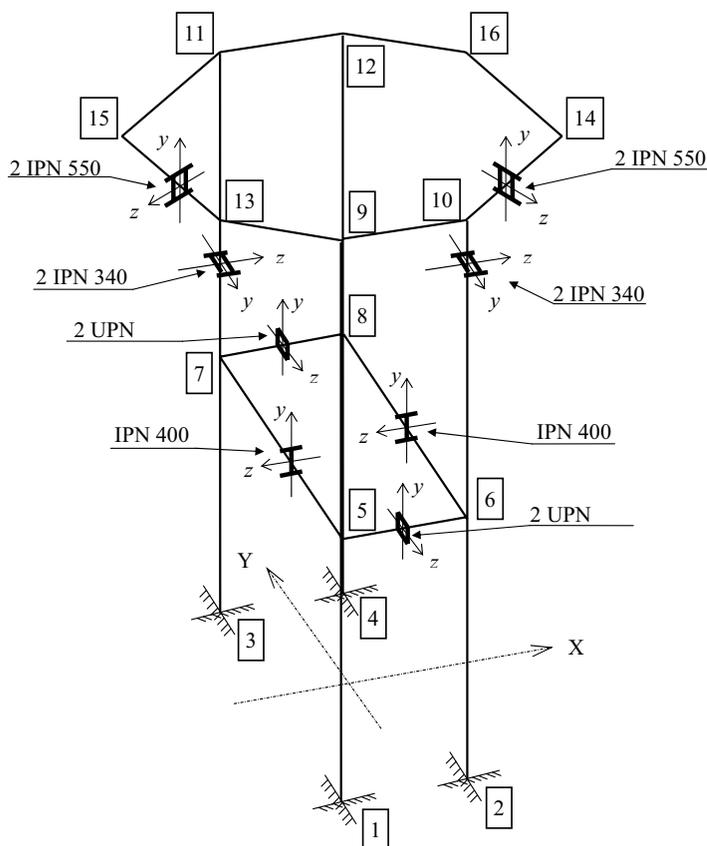


**Figura 8.1** Silo metálico cilíndrico para cemento.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 Modelado

Para analizar la estructura de la figura 8.1 con DISSENY/2006 procederemos a modelar las virolas, los zunchos y la tapa superior con barras de nudos articulados de modo que sólo sirvan a efectos de transmisión de las cargas a la viga circular, pilares, arriostramientos y entreplanta (figura 8.3). La viga circular, pilares y entreplanta serán modelados como barras de nudos rígidos y los arriostramientos como barras de nudos articulados (figura 8.3). Las propiedades de la sección transversal serán las de los perfiles definidos en la figura 8.2. Las cargas son las de la figura 8.3



**Figura 8.2** Modelo de análisis: ejes globales, ejes locales, nudos y secciones transversales de los elementos barra de nudos rígidos.

## 2.2 Análisis matricial y programa de análisis

Una exposición completa de la formulación del método matricial de las rigideces puede encontrarse en la bibliografía (Martí, 2003). El programa de análisis a utilizar es DISSENY/2006.

## 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

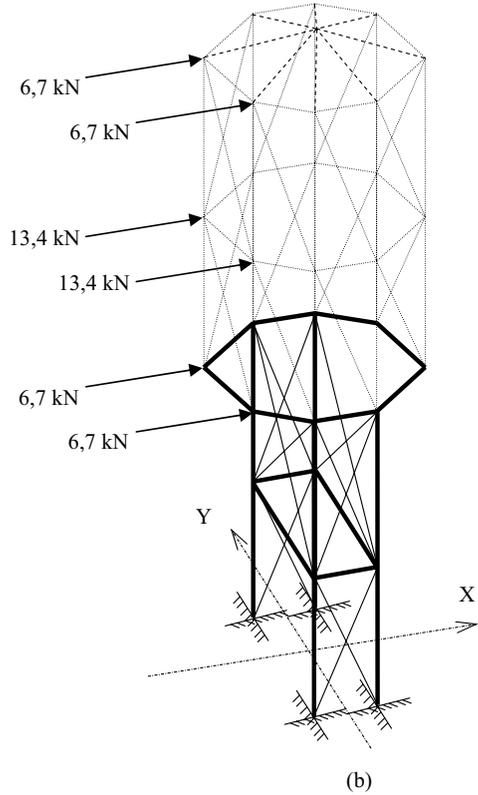
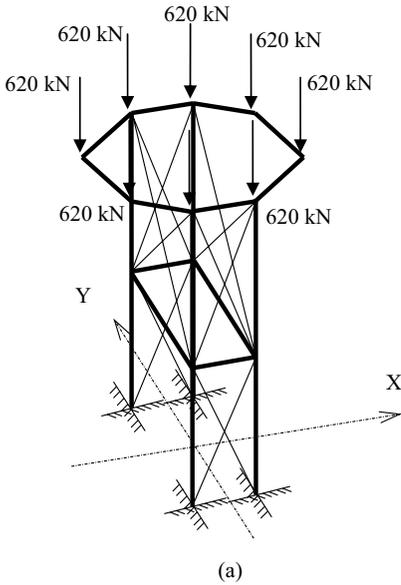
- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP, y
- programa DISSENY/2006, versión académica.

Estado 1: carga + sobrecarga

Estado 2: cargas de viento

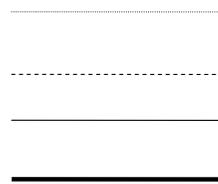


Barra de nudos articulados (modelado de las violas y zunchos del silo)

Barra de nudos articulados (modelado de la tapa del silo)

Barra de nudos articulados (modelado de arriostramientos)

Barra de nudos rígidos (modelado de la viga circular, pilares y entreplanta)



**Figura 8.3** Modelo de análisis: tipo de elementos y estados de carga.

### 3.2 Procedimiento para modelar y analizar la estructura con DISSENY/2006

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	NOTAS Y CUESTIONES
1	Creación de un fichero de datos para DISSENY/2006	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelar la estructura de la figura 8.1 incluyendo en el fichero de datos para DISSENY/2006:</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se tendrá en cuenta el modelo propuesto en las figuras 8.2 y 8.3.</li> </ul>

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	NOTAS Y CUESTIONES
	con el modelo de la estructura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>* coordenadas de los nudos,</li> <li>* materiales de los elementos,</li> <li>* propiedades de la sección de los elementos,</li> <li>* información sobre los elementos,</li> <li>* restricciones en los apoyos y</li> <li>* cargas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se realizarán dos ficheros de datos: uno con la estructura completa y otro sin los arriostramientos.</li> </ul>
2	Analizar la estructura con DISSENY/2006.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizar el fichero de datos creado para analizar la estructura cargandolo en DISSENY/2006: &lt;fich.adf&gt; siendo fich.adf el nombre del fichero de datos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se tendrán en cuenta los dos estados de carga.</li> <li>• Se analizará para el silo arriostrado y para el silo sin arriostrar.</li> </ul>
3	Obtención de diagramas de esfuerzos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recopilación de valores de esfuerzos en los extremos de los elementos desde el fichero de resultados del análisis con DISSENY/2006.</li> <li>• Obtención de gráficas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se tendrán en cuenta los dos estados de carga.</li> <li>• Se obtendrán para el silo arriostrado y para el silo sin arriostrar.</li> </ul>
4	Representación de las reacciones.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Obtener las reacciones del fichero de resultados del análisis con DISSENY/2006.</li> <li>• Dibujar un croquis de la estructura con las reacciones en los apoyos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se obtendrán para el silo arriostrado y para el silo sin arriostrar.</li> </ul>
5	Comparación de resultados.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recopilación de valores de esfuerzos en la base de pilares para el silo sin arriostrar y para el silo arriostrado.</li> <li>• Comparación de resultados.</li> </ul>	

### 3.3 Memoria de la práctica

Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 1 los listados de los ficheros de datos y de resultados para el programa DISSENY/2006, y
- 2 los gráficos, tablas, figuras, etc., necesarios para explicar lo realizado en los puntos de la tabla del apartado 3.2.

## 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Realizar el análisis con un modelo más fino del silo.
- 2 Estudiar el efecto que tiene la rigidez de los arriostramientos.
- 3 Analizar el efecto, sobre la pared del silo, de la rigidez del anillo de apoyo.
- 4 Analizar el efecto, sobre los esfuerzos en el anillo, de la rigidez de las paredes del silo.
- 5 Analizar, iterativamente, el efecto  $P-\Delta$  cuando la estructura tiene, o carece de, arriostramientos.

## 5 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Argüelles Álvarez, R. *La estructura metálica hoy (5 tomos)*. Librería Técnica Bellisco, Madrid, 1975.
- 2 Argüelles Álvarez, R. Argüelles Bustillo, R. Arriaga, F. y Atienza, J.R. *Estructuras de acero. Cálculo: Norma Básica y Eurocódigo (tomos I y II)*. Bellisco, Madrid, 1999.
- 3 ENV 1991-4 *Eurocódigo 1: Bases de diseño y acciones sobre las estructuras. Parte 4: Acciones en silos y depósitos*. Comité Europeo de Normalización, Bruselas, 1995.
- 4 Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.
- 5 Martí, P. DISSENY 2006. *Análisis de Estructuras por Elementos Finitos. Manual del Usuario*. Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, 2006.
- 6 Marco, J. *Fundamentos para el cálculo y diseño de estructuras metálicas de acero laminado. Comportamiento del material y esfuerzos básicos. Aplicados al Eurocódigo 3, Normas AISI, Normativa española (EA95)*. McGraw-Hill, Madrid, 1997.
- 7 NBE EA-95 *Estructuras de acero en edificación*. Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente, Madrid, 1996.
- 8 Ravenet, J. *Silos. Tomo I*. Editores Técnicos Asociados, S.A., Barcelona, 1992.
- 9 UNE-ENV 1993-1-1 *Eurocódigo 3: Proyecto de estructuras de acero. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación*. AENOR, Madrid, 1996.

## 6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

### 6.1 Cuestiones

- 1 ¿Cuál es el efecto del arriostramiento?
- 2 ¿Cómo deberían ser y situarse los perfiles de los soportes si no hubieran arriostramientos?
- 3 ¿Cómo aumenta el efecto  $P-\Delta$  cuando la estructura carece de arriostramientos?
- 4 ¿Qué errores, respecto al modelo real, introduce el modelo de análisis adoptado?
- 5 ¿Cómo se puede mejorar el modelo de análisis? ¿Qué supondría/n esta/s mejora/s?

## 7 ENLACES DE INTERÉS

- 1 [www.aceralia.es](http://www.aceralia.es)
- 2 [www.civileng.com/estruc.htm](http://www.civileng.com/estruc.htm)
- 3 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)

## Práctica 9

# ANÁLISIS DE UN EMPARRILLADO DE CIMENTACIÓN

### 1 OBJETIVOS

El objetivo global de la práctica es modelar y analizar un emparrillado de cimentación con el programa de elementos finitos DISSENY/2006.

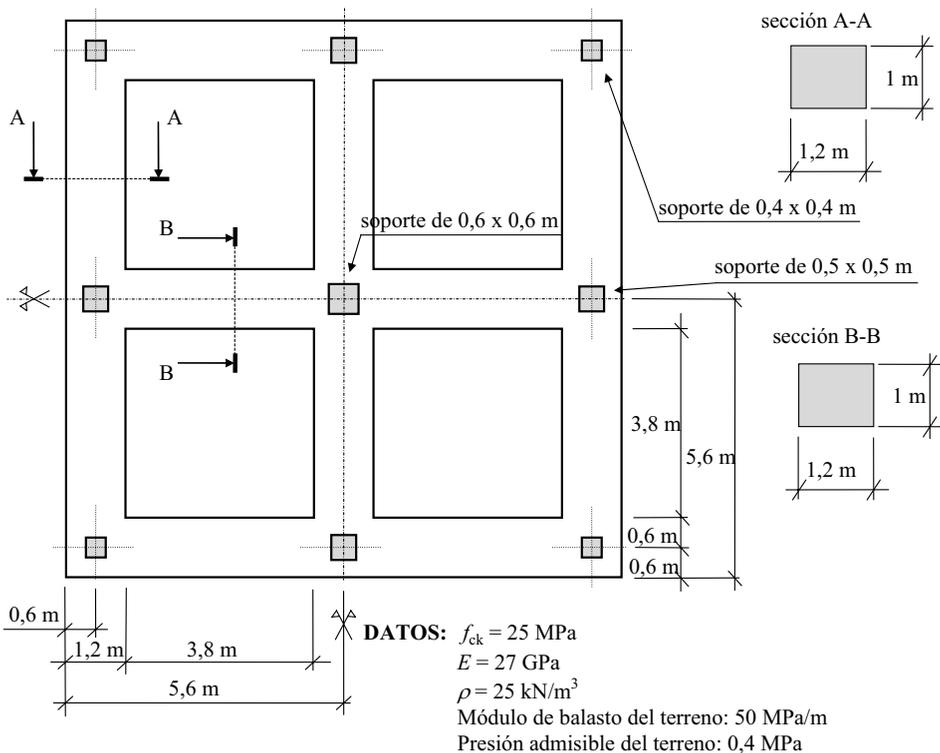


Figura 9.1 Emparrillado de cimentación.

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Modelar el emparrillado de cimentación de la figura 9.1.
- 2 Analizar el modelo con el programa DISSENY/2006.
- 3 Obtener las envolventes de esfuerzos y las presiones máximas sobre el terreno, indicando en qué hipótesis de carga se alcanzan esos valores y en que puntos del emparrillado. Se comprobará que la presión máxima sobre el terreno no supera a la presión admisible.

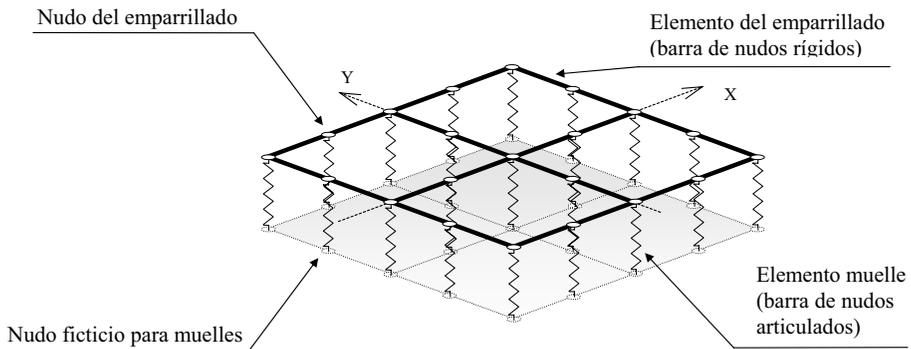
Las cargas a considerar sobre el emparrillado son:

- cargas permanentes (CP):
  - carga en la dirección negativa del eje Z global de 1600 kN en apoyos de 0,6x0,6 m.
  - carga en la dirección negativa del eje Z global de 800 kN en apoyos de 0,5x0,5 m.
  - carga en la dirección negativa del eje Z global de 400 kN en apoyos de 0,4x0,4 m.
- sobrecargas (S) (ver figura 9.6):
  - sobrecarga total (S4/4)
  - sobrecarga en un lado (S2/4l)
  - sobrecarga en una diagonal (S2/4d)
  - sobrecarga en una esquina (S1/4).

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 Modelado del terreno y del emparrillado

El modelado de las vigas del emparrillado se realizará con barras de nudos rígidos tal como se muestra en la figura 9.2.



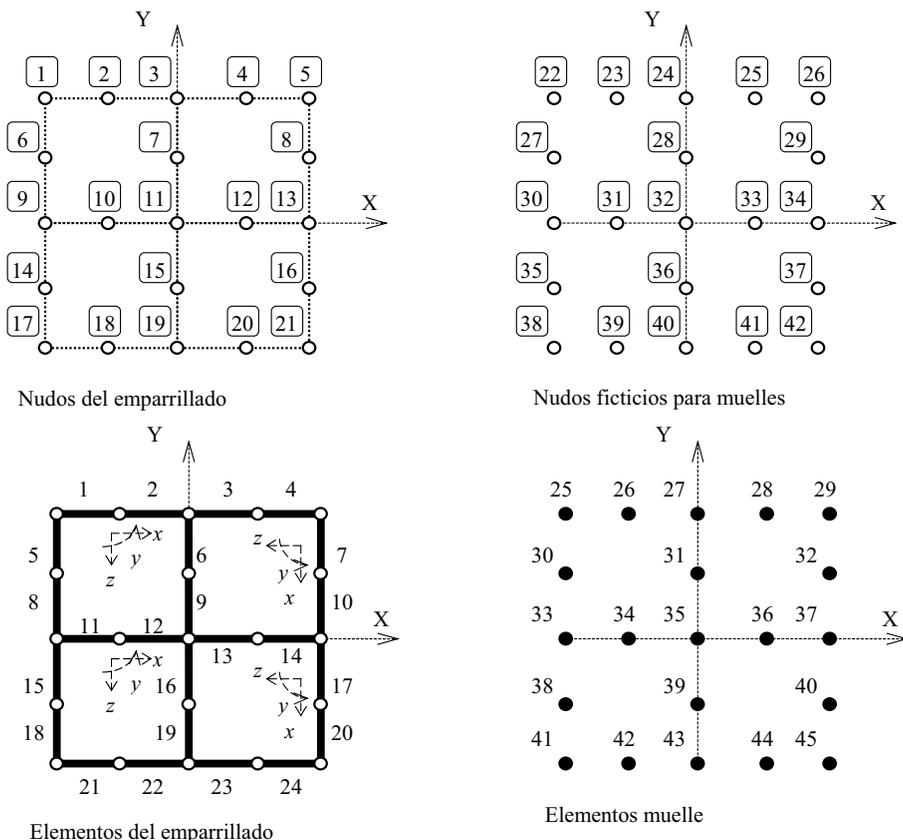
**Figura 9.2** Modelo de análisis del emparrillado.

El modelado del terreno se realiza mediante *muelles* (figura 9.2). Para los muelles se utilizan, en DISSENY/2006, elementos barra de nudos articulados. La ecuación del comportamiento de estos elementos es

$$F_m = \frac{E_m A_m}{L_m} \Delta L_m \quad (9.1)$$

siendo:

- $F_m$  la fuerza aplicada sobre el muelle;
- $E_m$  el módulo de elasticidad longitudinal del muelle;
- $A_m$  el área del muelle;
- $L_m$  la longitud del muelle, y
- $\Delta L_m$  la variación de longitud del muelle.



**Figura 9.3** Codificación de nudos y elementos para el análisis del emparrillado con DISSENY/2006.

El parámetro que define el comportamiento elástico del terreno es el *módulo de balasto* ( $K$ ). Se hace la hipótesis de que si la presión transmitida en un punto  $P$  por el cimiento al terreno es  $\sigma_p$ , el asiento  $y$  está ligado a  $\sigma_p$  por la relación

$$y = \frac{\sigma_p}{K} \tag{9.2}$$

donde  $K$  tiene las dimensiones de una fuerza por unidad de volumen.

Con (9.1) y (9.2) y suponiendo que el asiento del terreno es la variación de longitud del muelle

$$y = \Delta L_m \quad (9.3)$$

obtenemos la relación

$$\frac{F_m L_m}{E_m A_m} = \frac{\sigma_t}{K} \quad (9.4)$$

Si adoptamos un área del muelle  $A_m$  igual a la superficie de las vigas del emparrillado  $A_e$  asociada al nudo donde está conectado el muelle (ver figura 9.4), y consideramos la presión sobre el terreno como

$$\sigma_t = \frac{F_m}{A_e} \quad (9.5)$$

tenemos

$$\frac{F_m}{A_e K} = \frac{F_m L_m}{E_m A_m}; \quad \frac{1}{K} = \frac{L_m}{E_m} \quad (9.6)$$

Si, además, adoptamos para la longitud del muelle  $L_m = 1$ , obtenemos finalmente

$$K = E_m \quad (9.7)$$

De esta forma, con elementos barra de nudos articulados con un área de la sección transversal igual a  $A_e$ , con una longitud ficticia  $L_m = 1$  y con un material ficticio de módulo de elasticidad longitudinal  $E_m$  tal que cumpla la expresión (9.7), podemos simular el comportamiento elástico del terreno. En todo caso, se deberá comprobar, tras el análisis, que en ningún punto del terreno se supera la tensión admisible, ya que de lo contrario el módulo de balasto  $K$  de la expresión (9.2) no es una constante.

El terreno no admite tracciones por lo que, tras cada análisis, se deberán detectar los muelles traccionados y eliminarlos, para analizar nuevamente, repitiéndose el proceso hasta asegurar que ningún muelle está traccionado. Una alternativa a la eliminación de los muelles es reducir la rigidez axial de los mismos hasta valores que produzcan tracciones despreciables.

Los nudos de la periferia del emparrillado se restringen en las direcciones X e Y, simulándose así la oposición que ofrece el terreno a los desplazamientos laterales del emparrillado. En la realidad el terreno lateral cede algo frente a acciones horizontales, tales como el viento, si bien en nuestro modelo no consideraremos estos desplazamientos laterales al no existir tales acciones. Los nudos inferiores de los elementos barra de nudos articulados tendrán todos los desplazamientos y giros restringidos.

Para el cálculo del módulo de torsión de los elementos barra de nudos rígidos del emparrillado se considerará la sección eficaz del hormigón (figura 9.5).

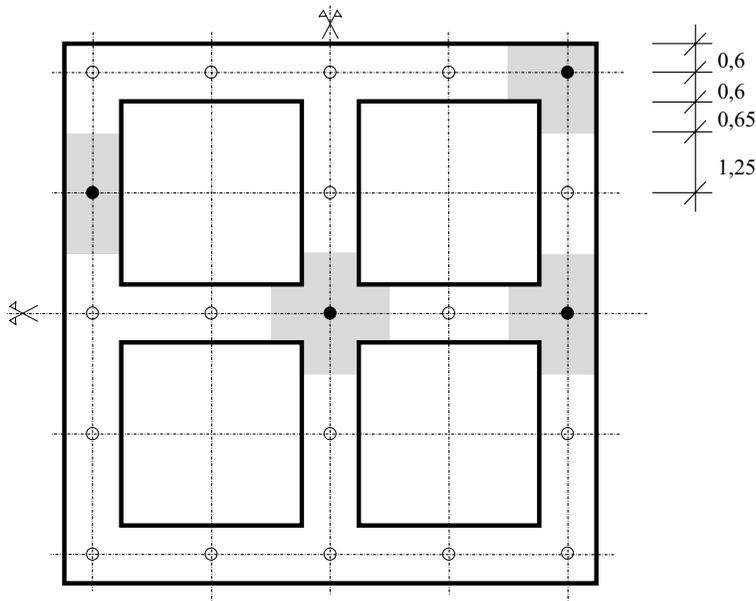


Figura 9.4 Áreas del emparrillado asociadas a muelles.

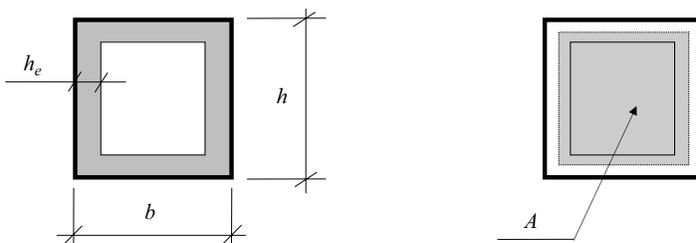


Figura 9.5 Sección eficaz del hormigón para elementos del emparrillado.

Según el artículo 45.2.1 de la Instrucción EHE, el módulo de torsión  $I_t$  puede calcularse como sigue

$$h_e = \frac{b}{6}; e = h_e; I_t = \frac{4 \cdot A^2 \cdot e}{S} = \frac{25 \cdot b^3 \cdot (h - b/6)^2}{108 \cdot (2/3 \cdot b + h)} \quad (9.8)$$

con

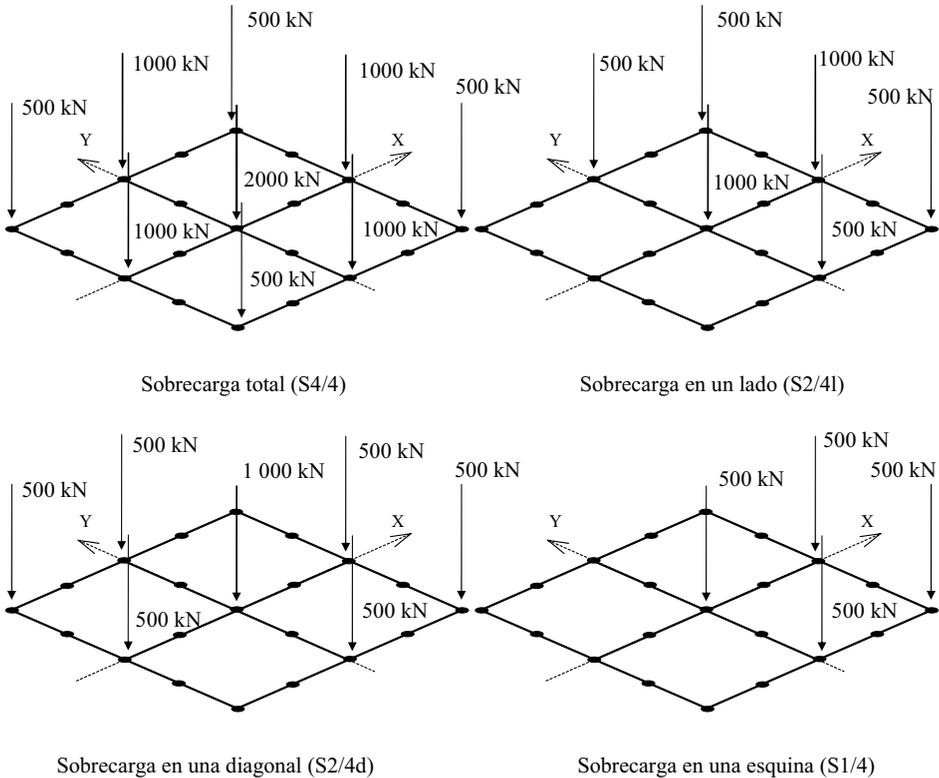
$$h_e = \frac{b}{6}; e = h_e; I_t = \frac{4 \cdot A^2 \cdot e}{S} = \frac{25 \cdot b^3 \cdot (h - b/6)^2}{108 \cdot (2/3 \cdot b + h)} \quad (9.9)$$

**2.2 Acciones y combinaciones sobre el emparrillado**

Con las acciones definidas en el apartado 1 se considerarán las siguientes combinaciones:

- $1,5 \cdot CP + 1,5 \cdot S4/4$
- $1,5 \cdot CP + 1,5 \cdot S2/4l$
- $1,5 \cdot CP + 1,5 \cdot S2/4d$
- $1,5 \cdot CP + 1,5 \cdot S1/4$ .

Más información sobre la formulación del método matricial de las rigideces puede encontrarse en el anexo I. Una exposición más completa de este método y la formulación para las estructuras espaciales de nudos rígidos puede encontrarse en la bibliografía (Martí, 2003). Para más información sobre el análisis de estructuras de cimentación pueden consultarse los textos (Calavera, 1999) y (Jiménez, 2001). Para más información sobre mecánica de suelos pueden consultarse los textos (Jiménez Salas, 1980) y (Serra, J., Oteo, C., García, A.M. y Rodríguez, J.M.; 1986).



**Figura 9.6** Sobrecargas sobre el emparrillado.

### 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

#### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP, y
- programa DISSENY/2006, versión académica.

#### 3.2 Procedimiento para modelar y analizar la estructura con DISSENY/2006

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	NOTAS Y CUESTIONES
1	Creación de un fichero de datos para DISSENY/2006 con el modelo de la estructura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modelar la estructura de la figura 9.1 incluyendo en el fichero de datos para DISSENY/2006:               <ul style="list-style-type: none"> <li>* coordenadas de los nudos,</li> <li>* materiales de los elementos,</li> <li>* propiedades de la sección de los elementos,</li> <li>* información sobre los elementos,</li> <li>* restricciones, y</li> <li>* cargas.</li> </ul> </li> </ul>	
2	Analizar la estructura con DISSENY/2006.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizar el fichero de datos creado para analizar la estructura cargando en DISSENY/2006: &lt;fich.adf&gt; siendo fich.adf el nombre del fichero de datos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se analizará la estructura en cada hipótesis de carga debiéndose comprobar que ningún elemento muelle está traccionado.</li> </ul>
3	Obtención de diagramas de esfuerzos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recopilación de valores de esfuerzos en los extremos de los elementos del emparrillado desde el fichero de resultados del análisis con DISSENY/2006 para cada estado de carga.</li> <li>• Obtener los valores envolventes de los momentos flectores y localizar el punto donde se produce el momento máximo en valor absoluto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Para obtener los momentos flectores envolventes se buscarán los valores máximos (positivos y negativos) en todos los estados de carga.</li> </ul>
4	Obtención del valor de la presión máxima sobre el terreno.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recopilación de valores de esfuerzos axiles en los elementos barra de nudos articulados (muelles) desde el fichero de resultados del análisis con DISSENY/2006 para cada estado de carga.</li> <li>• Obtener el valor máximo de la presión sobre el terreno a partir de los datos obtenidos del fichero de resultados para los elementos barra de nudos articulados, y la hipótesis y zona del emparrillado donde se alcanza.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Para obtener el valor de la presión máxima sobre el terreno se tendrán en cuenta acciones sin mayorar: *1,0-PP+1,0-CP+1,0-S4/4 *1,0-PP+1,0-CP+1,0-S2/4l *1,0-PP+1,0-CP+1,0-S2/4d *1,0-PP+1,0-CP+1,0-S1/4. Siendo: PP el peso propio del emparrillado, CP las</li> </ul>

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	NOTAS Y CUESTIONES
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Comprobar que la presión máxima no supera el valor de la presión admisible sobre el terreno.</li> </ul>	cargas permanentes y S las sobrecargas.

### 3.3 Memoria de la práctica

Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 1 Los listados de los ficheros de datos para el programa DISSENY/2006, y
- 2 las tablas y figuras necesarias para explicar lo realizado en las tareas 3 y 4 de la tabla del apartado 3.2.

## 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Aplicar el programa realizado para estudiar el efecto del módulo de balasto en los resultados.
- 2 Analizar el emparrillado con discretizaciones más finas y más groseras.

## 5 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Calavera, J. *Cálculo de estructuras de cimentación*. INTEMAC, Madrid, 1999.
- 2 EHE *Instrucción de hormigón estructural*. Ministerio de Fomento, Madrid, 1999.
- 3 Jiménez Salas, J.A. y otros. *Geotecnia y Cimientos (3 tomos)*, Editorial Rueda, Madrid, 1980.
- 4 Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.
- 5 Martí, P. DISSENY 2006. *Análisis de Estructuras por Elementos Finitos. Manual del Usuario*. Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, 2006.
- 6 Jiménez, P., García, A. y Morán, F. *Hormigón armado*. Gustavo Gili, S.A., Barcelona, 2001.
- 7 Serra, J. Oteo, C. García, A.M. y Rodríguez, J.M. *Mecánica del suelo y cimentaciones. Unidades didácticas 1, 2 y 3*. Ed. UNED-Fundación Escuela de la Edificación, Madrid, 1986.

## 6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

### 6.1 Cuestiones

- 1 ¿Cómo afecta el valor del módulo de balasto en los resultados del análisis?
- 2 ¿Cómo afecta el tamaño de la discretización en los resultados del análisis?
- 3 ¿Cómo afecta a los resultados el valor utilizado para la rigidez a torsión de las vigas del emparrillado?
- 4 ¿Es más exacto el modelo en terrenos granulares que en terrenos coherentes?

## 7 ENLACES DE INTERÉS

- 1 [www.civileng.com/estruc.htm](http://www.civileng.com/estruc.htm)
- 2 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)

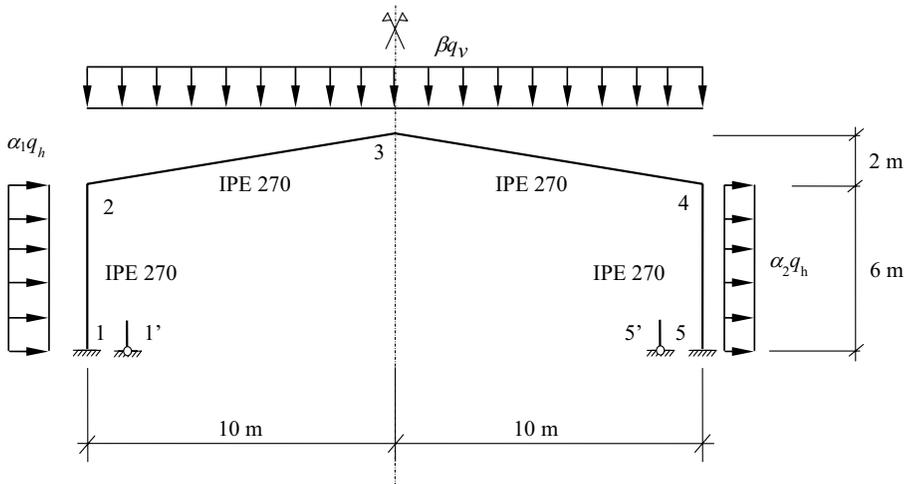
## Práctica 10

# DETERMINACIÓN DE LA CARGA CRÍTICA DE PANDEO GLOBAL DE UNA ESTRUCTURA

---

### 1 OBJETIVOS

El objetivo global de la práctica es utilizar y completar un programa matricial para determinar la carga crítica de pandeo global de una estructura.



**DATOS:**  $E = 210 \text{ GPa}$ ;  $A_{\text{IPE 270}} = 45,9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;  $I_{\text{IPE 270}} = 5790 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

Cargas:  $q_v = 5 \text{ kN/m}$

$q_h = 2 \text{ kN/m}$

**Figura 10.1** Estructura plana para la determinación de la carga crítica de pandeo global.

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Obtener la carga crítica de pandeo global de la estructura de la Fig. 10.1 utilizando un programa realizado con comandos de MATLAB, para los siguientes casos:
  - caso 1º: estructura empotrada en la cimentación (nudos 1, 2, 3, 4 y 5), y
  - caso 2º: estructura articulada en la cimentación (nudos 1', 2, 3, 4 y 5').
 y para las siguientes hipótesis de carga:
  - carga vertical simétrica:  $\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0 \quad \beta = 1$
  - carga vertical y viento por la izquierda:  $\alpha_1 = 1,2 \quad \alpha_2 = 0 \quad \beta = 1$
  - carga vertical y viento en ambos lados:  $\alpha_1 = 0,8 \quad \alpha_2 = 0,4 \quad \beta = 1$
- 2 Comparar y justificar los valores de las cargas críticas de pandeo obtenidas en los casos anteriores.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 Matriz de rigidez de un elemento plano de nudos rígidos. Funciones de estabilidad

La ecuación que gobierna el comportamiento a flexión de un elemento plano de nudos rígidos en teoría de segundo orden es

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E I \frac{d^2 v}{dx^2} \right] - N \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \tag{10.1}$$

siendo

- $E$  el módulo de elasticidad longitudinal del elemento;
- $I$  el momento de inercia de la sección transversal del elemento;
- $N$  el esfuerzo axial en los extremos del elemento, y
- $v$  el desplazamiento en la dirección perpendicular al eje longitudinal del elemento.

En comparación con la teoría de primer orden (caso lineal) se observa que en ésta no aparece el segundo sumando, lo que indica que el axil no produce momento flector al considerar que actúa según la directriz del elemento, lo que no ocurre ahora al plantearse el equilibrio en la posición deformada.

La solución de la ecuación (10.1) es del tipo

$$v = A + B x + C \cos ax + D \operatorname{sen} ax \tag{10.2}$$

con

$$a^2 = \frac{-N}{E I} \tag{10.3}$$

Las constantes  $A, B, C$  y  $D$  se determinan mediante las condiciones de contorno en los extremos, o mejor, en función de los desplazamientos de los extremos. Así, una vez obtenido el valor del desplazamiento  $v$  es posible obtener los esfuerzos en función de los desplazamientos en los extremos del elemento y, por lo tanto, la matriz de rigidez buscada. El resultado puede expresarse en la forma

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} \mathbf{d} \tag{10.4}$$

siendo  $\mathbf{p} = (N_i, V_i, M_i, N_j, V_j, M_j)^T$  el vector de esfuerzos;  $\mathbf{d} = (u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j)^T$  el vector de desplazamientos y  $\mathbf{k}$  la matriz de rigidez

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ C_4 \frac{EI_z}{L^3} & C_1 \frac{EI_z}{L^2} & 0 & -C_4 \frac{EI_z}{L^3} & C_1 \frac{EI_z}{L^2} & \\ & C_2 \frac{EI_z}{L} & 0 & -C_1 \frac{EI_z}{L^2} & C_3 \frac{EI_z}{L} & \\ & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \\ & & & C_4 \frac{EI_z}{L^3} & -C_1 \frac{EI_z}{L^2} & \\ \text{SIM.} & & & & & C_2 \frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

con  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  funciones de  $aL$  denominadas *funciones de estabilidad*. Estas funciones fueron introducidas por Lundquist y Kroll en 1944 y tienen la forma siguiente

$$C_1 = \frac{a^2 L^2 (1 - \cos aL)}{2(1 - \cos aL) - aL \operatorname{sen} aL} \quad (10.6a)$$

$$C_2 = \frac{aL \operatorname{sen} aL - a^2 L^2 \cos aL}{2(1 - \cos aL) - aL \operatorname{sen} aL} \quad (10.6b)$$

$$C_3 = \frac{a^2 L^2 - aL \operatorname{sen} aL}{2(1 - \cos aL) - aL \operatorname{sen} aL} \quad (10.6c)$$

$$C_4 = \frac{a^3 L^3 \operatorname{sen} aL}{2(1 - \cos aL) - aL \operatorname{sen} aL} \quad (10.6d)$$

observándose que para  $aL \rightarrow 0$  tienden a los siguientes valores

$$C_1 \rightarrow 6 \quad C_2 \rightarrow 4 \quad C_3 \rightarrow 2 \quad C_4 \rightarrow 12 \quad (10.7)$$

lo que puede demostrarse sin más que desarrollar en serie de Taylor  $\operatorname{sen} aL$  y  $\cos aL$  en las proximidades de cero.

Si se sustituyen estos valores de  $C_i$  en la expresión de la matriz de rigidez (10.5) se obtiene la matriz de rigidez del elemento de sección constante con teoría lineal, quedando claro que para  $a \rightarrow 0$ , es decir suponiendo despreciable la influencia de los axiles en el proceso de flexión se vuelve a reproducir la matriz de la teoría lineal.

Los valores negativos de  $a^2$  corresponden a estados de tracción en el elemento, y por tanto dan lugar a soluciones distintas de las (10.6) y por tanto expresiones distintas para los  $C_i$ , que pasan a ser las expresiones en senos y cosenos hiperbólicos siguientes

$$C_1 = \frac{a^2 L^2 (1 - \operatorname{cos}_h aL)}{2(1 - \operatorname{cos}_h aL) + aL \operatorname{sen}_h aL} \quad (10.8a)$$

$$C_2 = \frac{-aL \operatorname{sen}_h aL + a^2 L^2 \operatorname{cos}_h aL}{2(1 - \operatorname{cos}_h aL) + aL \operatorname{sen}_h aL} \quad (10.8b)$$

$$C_3 = \frac{-a^2 L^2 + aL \operatorname{sen}_h aL}{2(1 - \operatorname{cos}_h aL) + aL \operatorname{sen}_h aL} \quad (10.8c)$$

$$C_4 = \frac{a^3 L^3 \operatorname{sen}_h aL}{2(1 - \cos_h aL) + aL \operatorname{sen}_h aL} \quad (10.8d)$$

Si los axiles que producen el pandeo no son muy elevados, las funciones  $C_i$  pueden aproximarse con suficiente aproximación por rectas alrededor del punto  $aL = 0$  (se demuestra que para valores de  $P$  que cumplen

$$-\pi^2 \frac{EI}{L^2} \leq P \leq \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (10.9)$$

el error cometido al aproximar las  $C_i$  por el primer término de su desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto  $aL = 0$  es inferior al 7%). Estas rectas vienen dadas por

$$\begin{aligned} C_1 &= 6\left(1 - \frac{PL^2}{60EI}\right) & C_2 &= 4\left(1 - \frac{PL^2}{30EI}\right) \\ C_3 &= 2\left(1 + \frac{PL^2}{60EI}\right) & C_4 &= 12\left(1 - \frac{PL^2}{10EI}\right) \end{aligned} \quad (10.10)$$

En definitiva, si se conociese el valor de los esfuerzos axiles se podría obtener la matriz de rigidez no lineal para cada elemento y operar en la forma habitual en el Cálculo Matricial. El problema estriba en que los axiles dependen de estas matrices, de ahí el carácter no lineal del problema.

## 2.2 Algoritmo para la obtención de la carga crítica de pandeo global de la estructura

En el programa del anexo 10.1, realizado con comandos de MATLAB, para el cálculo de la carga crítica de pandeo global se ha utilizado el algoritmo iterativo siguiente:

- 1 Se establece una hipótesis sobre el valor de los esfuerzos axiles (una buena aproximación suele ser la de los axiles obtenidos a partir de la teoría lineal).
- 2 Se obtienen las matrices de rigidez elementales y se sigue el procedimiento normal del Cálculo Matricial, obteniéndose desplazamientos y esfuerzos.
- 3 Si los axiles obtenidos son sensiblemente iguales a los supuestos se finaliza el proceso. En caso contrario se utilizan estos axiles como nueva hipótesis y se vuelve al punto 2.

Este procedimiento permite obtener la solución del problema con un número pequeño de iteraciones.

Para más información sobre métodos de análisis no lineal de estructuras y obtención de la carga crítica de pandeo puede consultarse la bibliografía.

## 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP, y
- programa MATLAB, versión 4.0 o superior para Windows.

### 3.2 Procedimiento para la obtención de cargas críticas de pandeo con el programa de comandos MATLAB

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	NOTAS Y CUESTIONES
1	Obtención de la carga crítica de pandeo para la estructura de la Fig. 10.1 y para el caso nº 1.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Para el caso nº 1 se procederá de la siguiente forma:                             <ol style="list-style-type: none"> <li>1 Introducir los valores de <math>\alpha_1=0</math>, <math>\alpha_2=0</math> y <math>\beta=1</math>, para definir la carga vertical simétrica.</li> <li>2 Obtener la carga crítica de pandeo 1.</li> <li>3 Introducir los valores de <math>\alpha_1=1,2</math>, <math>\alpha_2=0</math> y <math>\beta=1</math>, para definir la carga vertical y viento por la izquierda.</li> <li>4 Obtener la carga crítica de pandeo 2.</li> <li>5 Introducir los valores de <math>\alpha_1=0,8</math>, <math>\alpha_2=0,4</math> y <math>\beta=1</math>, para definir la carga vertical y viento repartido.</li> <li>6 Obtener la carga crítica de pandeo 3.</li> </ol> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El programa sustituye las cargas por fuerzas puntuales en los nudos.</li> <li>• La función <i>kloce_pr</i> puede calcular la matriz de rigidez de un elemento barrado nudos rígidos con las funciones de estabilidad exactas (10.6) o aproximadas (10.11) (ver listado del fichero <i>kloce_pr.m</i> en el anexo 10.1).</li> </ul>
2	Considerar el caso nº 2 cambiando las condiciones de contorno de la estructura de la Fig. 10.1 y obtener las cargas críticas de pandeo.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Considerar los nudos 1' y 5' de la Fig. 10.1 y proceder como en la tarea 1. Se obtendrán las cargas críticas 4, 5 y 6.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se deberá modificar lo necesario del programa del anexo 10.1 para considerar los cambios introducidos en las condiciones de contorno de la estructura.</li> </ul>
3	Obtención de los modos de pandeo para los casos nº 1 y nº 2.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Obtener el vector de desplazamientos en el estado de carga crítica y sumarlo a las coordenadas iniciales para obtener las coordenadas de la estructura deformada.</li> <li>• Representar la estructura deformada en los dos casos.</li> </ul>	
4	Comparar las cargas críticas y los modos de pandeo obtenidos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hacer una tabla en la que se reflejen los valores de cargas críticas de pandeo en función de las condiciones de contorno de la estructura y tipo de carga.</li> <li>• Determinar la menor carga crítica de las anteriores y justificar el caso considerado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se propone el formato de representación de resultados del anexo 10.2.</li> </ul>

### 3.3 Memoria de la práctica

Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 1 El diagrama de flujo del programa de análisis no lineal que se proporciona en el anexo 10.1;
- 2 el listado del programa de comandos para MATLAB modificado para considerar las condiciones de contorno definidas en la tarea 2 del apartado 3.2;
- 3 un croquis con los modos de pandeo de la estructura y los resultados de las cargas críticas de pandeo, para los dos casos a considerar y con el formato propuesto en el anexo 10.2, y
- 4 la carga crítica de pandeo menor y la justificación de los valores obtenidos.

### 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Modificar el programa para utilizar los valores exactos de fuerzas equivalentes en los nudos a partir del sistema de cargas aplicado en la estructura de la Fig. 10.1.
- 2 Obtener el valor de la longitud de pandeo de los soportes 1-2 y 4-5 para los diferentes casos.
- 3 Estudiar la variación de la carga crítica en función del cambio de la pendiente del pórtico.
- 4 Comparar los resultados con los de la norma NBE EA-95.
- 5 Modificar el programa aumentando la discretización del pórtico (2 elementos en soportes y tres elementos en los dinteles). Repartir las cargas sobre los dinteles y soportes en cargas puntuales en los nudos existentes. Comparar resultados.

### 5 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Bath, P. *Problems in Structural Analysis by Matrix Methods*. Construction Press, New York, 1981.
- 2 Chajes, A. *Principles of Structural Stability Theory*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- 3 Doblare, M, y Grácia, L. *Análisis Lineal de Estructuras. Vol. II: Análisis Matricial de Estructuras de barras*. Departamento de Ingeniería Mecánica. Universidad de Zaragoza, (Apéndice B. Pandeo Global de Estructuras de barras), Zaragoza.
- 4 Livesley, R.K. *Métodos matriciales para cálculo de estructuras*. H. Blume Ediciones, Madrid, 1970.
- 5 Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.
- 6 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: user guide*. Natick: The MathWorks, 1996.
- 7 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: reference guide*. Natick: The MathWorks, 1996..
- 8 MATLAB *Resumen de comandos para prácticas de análisis de estructuras*. Área de MMCyTE, UPCT, Cartagena, 2006.
- 9 NBE EA-95 *Estructuras de acero en edificación*. Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente, Madrid, 1996.

- 10 Timoshenko, S.P., y Gere, J.M. *Theory of Elastic Stability*, 2ª ed. Mc Graw-Hill, Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1963, (1936).

## 6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

### 6.1 Cuestiones

- 1 ¿Cómo influyen las condiciones de apoyo en la carga crítica de pandeo global de un pórtico a dos aguas?
- 2 ¿Cómo varía la longitud de pandeo de los soportes de un pórtico a dos aguas en función de la inclinación de los dinteles?
- 3 ¿Cómo varía la longitud de pandeo de los soportes de un pórtico a dos aguas en función de la discretización empleada?

## 7 ENLACES DE INTERÉS

- 1 [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)
- 2 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)

# ANEXO 10.1 LISTADO DEL PROGRAMA *PORT* Y FUNCIÓN *KLOCE\_PR*

---

## 1 LISTADO DEL PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DE LA CARGA CRÍTICA DE PANDEO GLOBAL DE LA ESTRUCTURA DE LA FIG. 10.1

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Programa PORT para el calculo de la carga critica de pandeo
% de un portico a dos aguas
% Fichero port.m
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

diary port.res
diary on
format compact

% Salida de Resultados
% -----
res_l= 0; % resultados problema lineal
res_nl= 0; % resultados problema no lineal
ev_graf= 1; % evolucion grafica
int_evlg= 10; % numero de pasos sin representacion
ic_evlg= 0;

%DATOS
%Geometria
a= 2;
b= 10;
h= 6;
%Areas en m^2
coefs= 1.0;
coefv= 1.0;
AR=45.9/10^4;
A1=AR*coefs;
A2=AR*coefv;
A3=AR*coefv;
A4=AR*coefs;
%Inercia en m^4
IR= 5790E-8;
I1=IR*coefs;
I2=IR*coefv;
I3=IR*coefv;
I4=IR*coefs;

%Modulo de elasticidad en Pa
E=2.1E11;

%Coordenadas de los nudos en m
X1=0.0;
Y1=0.0;
X2=0.0;
Y2=h;
X3=b;
Y3=h+a;
X4=2*b;
Y4=h;
X5=2*b;
Y5=0;

%Valor de las cargas N/m
aa1= 0.0;
aa2= 0.0;
bb= 10.0;

% Valores para proceso iterativo
% =====
ninc= 100;
landaini= 1;
landafin= 100;
inclanda= 1*(landafin-landaini)/ninc;
inclandamin= 1.E-4;

```

```

landa= landaini - inclanda;
vlanda= zeros(ninc,1);
vdet= zeros(ninc,1);
vdifd= zeros(ninc,1);
vdifm= zeros(ninc,1);

incv= 0;
for inc= 1:ninc
    landa= landa + inclanda;
    incv= incv + 1;
    qv=-500.0*landa;
    qh= 200.0*landa;

%A RESOLUCION LINEAL DE LA ESTRUCTURA
%1.MATRIZ DE RIGIDEZ
%Barra1-2
A= A1;
I= I1;
L12=sqrt((X2-X1)^2+(Y2-Y1)^2);
l12=(X2-X1)/L12;
m12=(Y2-Y1)/L12;
R12=[l12 m12 0;-m12 l12 0;0 0 1];

k112= kloc_pr(L12,E,A,I,1,1);
k12= kloc_pr(L12,E,A,I,1,2);
k21 = kloc_pr(L12,E,A,I,2,1);
k221= kloc_pr(L12,E,A,I,2,2);
K112=R12'*k112*R12;
K12= R12'*k12*R12;
K21= R12'*k21*R12;
K221=R12'*k221*R12;

%Barra2-3;
A= A2;
I= I2;
L23=sqrt((X3-X2)^2+(Y3-Y2)^2);
l23=(X3-X2)/L23;
m23=(Y3-Y2)/L23;
R23=[l23 m23 0;-m23 l23 0;0 0 1];

k223= kloc_pr(L23,E,A,I,1,1);
k23= kloc_pr(L23,E,A,I,1,2);
k32 = kloc_pr(L23,E,A,I,2,1);
k332= kloc_pr(L23,E,A,I,2,2);
K223=R23'*k223*R23;
K23=R23'*k23*R23;
K32=R23'*k32*R23;
K332=R23'*k332*R23;

%Barra3-4
A= A3;
I= I3;
L34=sqrt((X4-X3)^2+(Y4-Y3)^2);
l34=(X4-X3)/L34;
m34=(Y4-Y3)/L34;
R34=[l34 m34 0;-m34 l34 0;0 0 1];

k334= kloc_pr(L34,E,A,I,1,1);
k34= kloc_pr(L34,E,A,I,1,2);
k43 = kloc_pr(L34,E,A,I,2,1);
k443= kloc_pr(L34,E,A,I,2,2);
K334=R34'*k334*R34;
K34=R34'*k34*R34;
K43=R34'*k43*R34;
K443=R34'*k443*R34;

%Barra4-5
A= A4;
I= I4;
L45=sqrt((X5-X4)^2+(Y5-Y4)^2);
l45=(X5-X4)/L45;
m45=(Y5-Y4)/L45;
R45=[l45 m45 0;-m45 l45 0;0 0 1];

k445= kloc_pr(L45,E,A,I,1,1);
k45= kloc_pr(L45,E,A,I,1,2);
k54 = kloc_pr(L45,E,A,I,2,1);
k554= kloc_pr(L45,E,A,I,2,2);
K445=R45'*k445*R45;
K45=R45'*k45*R45;
K54=R45'*k54*R45;
K554=R45'*k554*R45;

%Matrices de la diagonal.
K11=K112;

```

```

K22=K221+K223;
K33=K332+K334;
K44=K443+K445;
K55=K554;

%MATRIZ DE RIGIDEZ REDUCIDA DE LA ESTRUCTURA
%Inicializacion
K= zeros(9,9);
%Aportacion matriz K22
K(1:3,1:3)=K22(:, :);
%Aportacion matriz K23
K(1:3,4:6)=K23(:, :);
%Aportacion matriz K33
K(4:6,4:6)=K33(:, :);
%Aportacion matriz K34
K(4:6,7:9)=K34(:, :);
%Aportacion matriz K44
K(7:9,7:9)=K44(:, :);
%Zona triangular inferior
for i= 2:9
    for j=1:i-1
        K(i,j)=K(j,i);
    end
end

% Determinante
DET= det(K);
if landa == landaini
    det0= DET;
end

%VECTOR DE CARGAS (cargas puntuales)
P= zeros(9,1);

P(1)= (h/2)*aa1*qh;
P(2)= (b/2)*bb*qv;
P(3)= 0.0;
P(4)= 0.0;
P(5)= b*bb*qv;
P(6)= 0.0;
P(7)= (h/2)*aa2*qh;
P(8)= (b/2)*bb*qv;
P(9)= 0.0;

P2=P(1:3);
P3=P(4:6);
P4=P(7:9);

%VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS
D=inv(K)*P;
D2=D(1:3);
D3=D(4:6);
D4=D(7:9);

%CALCULO DE ESFUERZOS EN LAS BARRAS
%Barra 1-2
p12=k12*R12*D2;
p21=k221*R12*D2;

%Barra 2-3
p23=k223*R23*D2+k23*R23*D3;
p32=k32*R23*D2+k332*R23*D3;

%Barra 3-4
p34=k334*R34*D3+k34*R34*D4;
p43=k43*R34*D3+k443*R34*D4;

%Barra 4-5
p45=k445*R45*D4;
p54=k54*R45*D4;

if res_l == 1
    disp(' Resultados Teoria lineal')
    disp(' =====')
    disp(' Determinante de la matriz de rigidez')
    disp(DET)
    disp(' Desplazamientos')
    disp(D)
    disp(' Momento flector en base del pilar')
    disp(p12(3))
    disp(' Momento flector en cabeza de pilar')
    disp(p21(3))
end

% Valor para diferencias lineal-no lineal

```

```

% -----
vdifd(incv)= D(5);
vdifm(incv)= p12(3);

%RESOLUCION NO LINEAL DE LA ESTRUCTURA
%=====
epsilon= 0.0001;
S0= -p12(1:1);
S1= 0;
iter= 0;
while abs(S0-S1) > epsilon
    iter= iter + 1;
    %Matriz de rigidez de las barras para N0
    N12=-p12(1:1);
    N23=-p23(1:1);
    N34=-p34(1:1);
    N45=-p45(1:1);

    S0= -p12(1:1);

%Barra 1-2
A= A1;
I= I1;

k112= kloce_pr(L12,E,A,I,N12,1,1,1);
k12 = kloce_pr(L12,E,A,I,N12,1,1,2);
k21 = kloce_pr(L12,E,A,I,N12,1,2,1);
k221= kloce_pr(L12,E,A,I,N12,1,2,2);
K112=R12'*k112*R12;
K12=R12'*k12*R12;
K21=R12'*k21*R12;
K221=R12'*k221*R12;

%Barra 2-3
A= A2;
I= I2;

k223= kloce_pr(L23,E,A,I,N23,1,1,1);
k23 = kloce_pr(L23,E,A,I,N23,1,1,2);
k32 = kloce_pr(L23,E,A,I,N23,1,2,1);
k332= kloce_pr(L23,E,A,I,N23,1,2,2);
K223=R23'*k223*R23;
K23=R23'*k23*R23;
K32=R23'*k32*R23;
K332=R23'*k332*R23;

%Barra 3-4
A= A3;
I= I3;

k334= kloce_pr(L34,E,A,I,N34,1,1,1);
k34 = kloce_pr(L34,E,A,I,N34,1,1,2);
k43 = kloce_pr(L34,E,A,I,N34,1,2,1);
k443= kloce_pr(L34,E,A,I,N34,1,2,2);
K334=R34'*k334*R34;
K34=R34'*k34*R34;
K43=R34'*k43*R34;
K443=R34'*k443*R34;

%Barra 4-5
A= A4;
I= I4;

k445= kloce_pr(L45,E,A,I,N45,1,1,1);
k45 = kloce_pr(L45,E,A,I,N45,1,1,2);
k54 = kloce_pr(L45,E,A,I,N45,1,2,1);
k554= kloce_pr(L45,E,A,I,N45,1,2,2);
K445=R45'*k445*R45;
K45=R45'*k45*R45;
K54=R45'*k54*R45;
K554=R45'*k554*R45;

%Matrices de la diagonal.
K11=K112;
K22=K221+K223;
K33=K332+K334;
K44=K443+K445;
K55=K554;

%MATRIZ DE RIGIDEZ REDUCIDA DE LA ESTRUCTURA
%Inicializacion
K= zeros(9,9);
%Aportacion matriz K22
K(1:3,1:3)=K22(:, :);
%Aportacion matriz K23

```

```

K(1:3,4:6)=K23(:, :);
%Aportacion matriz K33
K(4:6,4:6)=K33(:, :);
%Aportacion matriz K34
K(4:6,7:9)=K34(:, :);
%Aportacion matriz K44
K(7:9,7:9)=K44(:, :);
%Zona triangular inferior
for i= 2:9
    for j=1:i-1
        K(i,j)=K(j,i);
    end
end

% Determinante
DET= det(K);

%VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS
D= inv(K)*P;
D2= D(1:3);
D3= D(4:6);
D4= D(7:9);

%CALCULO DE ESFUERZOS EN LAS BARRAS
%Barra 1-2
p12=k12*R12*D2;
p21=k221*R12*D2;
%Barra 2-3
p23=k223*R23*D2+k23*R23*D3;
p32=k32*R23*D2+k332*R23*D3;
%Barra 3-4
p34=k334*R34*D3+k34*R34*D4;
p43=k43*R34*D3+k443*R34*D4;
%Barra 4-5
p45=k445*R45*D4;
p54=k54*R45*D4;
    S1= -p12(1:1);
end
if res_nl == 1
    disp(' Resultados Teoria de Segundo orden')
    disp(' =====')
    disp(' Numero de iteraciones')
    disp(iter)
    disp(' Determinante de la matriz de rigidez')
    disp(DET)
    disp(' Desplazamientos')
    disp(D)
    disp(' Momento flector en base del pilar')
    disp(p12(3))
    disp(' Momento flector en cabeza de pilar')
    disp(p21(3))
end

% Diferencias lineal-no lineal
% -----
vdifd(incv)= (D(5) - vdifd(incv))*100/vdifd(incv);
vdifm(incv)= (p12(3)-vdifm(incv))*100/vdifm(incv);
if vdifd(incv) > 500
    vdifd(incv)= 500;
end
if vdifd(incv) < -500
    vdifd(incv)= -500;
end
if vdifm(incv) > 500
    vdifm(incv)= 500;
end
if vdifm(incv) < -500
    vdifm(incv)= -500;
end
if DET > 1000*det0
    disp(' Aumenta el determinante')
    disp(' *****')
    landa= landa - inclanda - inclanda/2;
    if landa < 0
        landa= 0.0;
    end
    incv= incv - 1;
    inclanda= inclanda/2;
end
if DET == 0
    disp(' Determinante negativo')
    disp(' *****')
    landa= landa - inclanda - inclanda/2;
    if landa < 0
        landa= 0.0;
    end
end

```

```

end
incv= incv - 1
inclanda= inclanda/2;
end
if inclanda < inclandamin
disp('Alcanzada precision maxima')
disp('inclanda=')
disp(inclanda)
break
end
vlanda(incv)= landa;
vdet(incv)= DET;
if ev_graf == 1
ic_evlg= ic_evlg + 1;
if ic_evlg == int_evlg | ic_evlg == 1
ic_evlg= 1;
plot(vlanda,vdet)
grid
title(['Portico A. Inercia:',num2str(IR)','. Cargas de pandeo'])
xlabel('Landa')
ylabel('Determinante')
end
end
end

% Representacion grafica
% =====
subplot(211)
plot(vlanda,vdet)
grid
title(['Portico A. Inercia:',num2str(IR)','. Cargas de pandeo'])
xlabel('Landa')
ylabel('Determinante')
subplot(212)
plot(vlanda,vdifd,'g',vlanda,vdifm,'b')
grid
title('Diferencias Teoria Lineal-Teoria 2° orden')
xlabel('Landa')
ylabel('(v) Desp. vertical. (a) Flector en base')
pause

```

## 2 LISTADO DEL ARCHIVO DE FUNCIÓN PARA EL CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LOS ELEMENTOS NO LINEAL *KLOCE\_PR*

```

function kloce = kloce_pr (Lij,E,A,I,Nij,tipa,ifil,icol)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Funcion para calcular la matriz de rigidez no lineal
% de un elemento plano de nudos rigidos en Teoria de
% segundo orden en el sistema de coordenadas local
% Fichero kloce_pr.m
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Funciones de estabilidad
% =====
if tipo == 1
% Funciones exactas
a=sqrt(-Nij/(E*I));
U=2*(1-cos(a*Lij))-a*Lij*sin(a*Lij);
C1=(a^2*Lij^2*(1-cos(a*Lij)))/U;
C2=(a*Lij*sin(a*Lij)-a^2*Lij^2*cos(a*Lij))/U;
C3=(a^2*Lij^2-a*Lij*sin(a*Lij))/U;
C4=(a^3*Lij^3*sin(a*Lij))/U;
end
if tipo == 0
% Funciones aproximadas
C1= 6*(1-N12*L12*L12/60/E/I)
C2= 4*(1-N12*L12*L12/30/E/I)
C3= 2*(1+N12*L12*L12/60/E/I)
C4=12*(1-N12*L12*L12/10/E/I)
end
if ifil == 1
if icol == 1
% Submatriz 1-1
kloce= [E*A/Lij 0 0;0 C4*E*I/Lij^3 C1*E*I/Lij^2;0 C1*E*I/Lij^2 C2*E*I/Lij];
end
if icol == 2
% Submatriz 1-2
kloce=[-E*A/Lij 0 0;0 -C4*E*I/Lij^3 C1*E*I/Lij^2;0 -C1*E*I/Lij^2 C3*E*I/Lij];
end
end
if ifil == 2
if icol == 1
% Submatriz 2-1

```

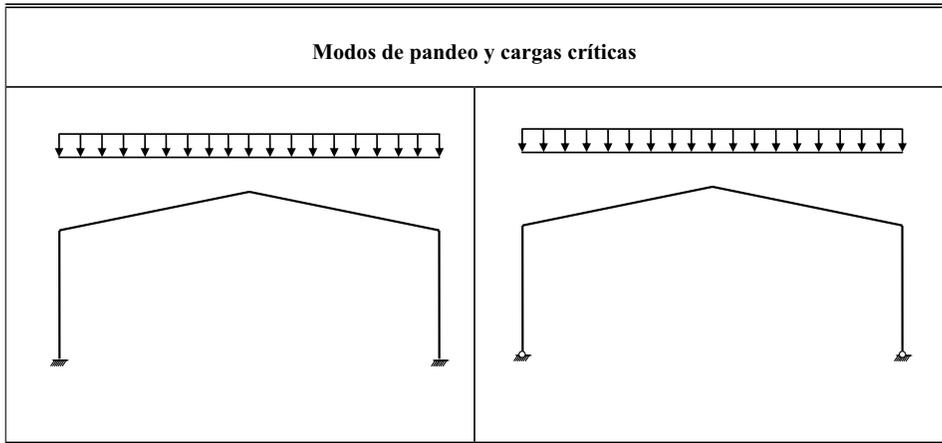
```
    kloce=[-E*A/Lij 0 0;0 -C4*E*I/Lij^3 -C1*E*I/Lij^2;0 C1*E*I/Lij^2 C3*E*I/Lij];
end
if icol == 2
    % Submatriz 2-2
    kloce=[E*A/Lij 0 0;0 C4*E*I/Lij^3 -C1*E*I/Lij^2;0 -C1*E*I/Lij^2 C2*E*I/Lij];
end
end
```

## ANEXO 10.2 FORMATO PARA COMPARACIÓN DE RESULTADOS

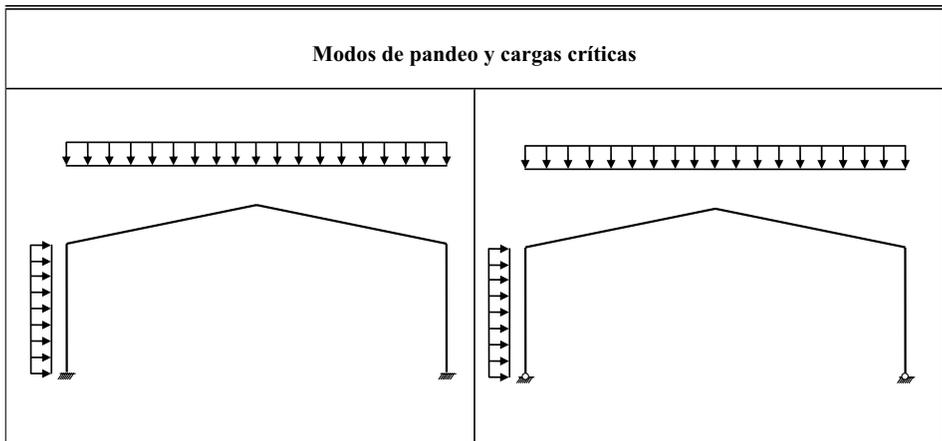
---

### 1 COMPARACIÓN DE RESULTADOS

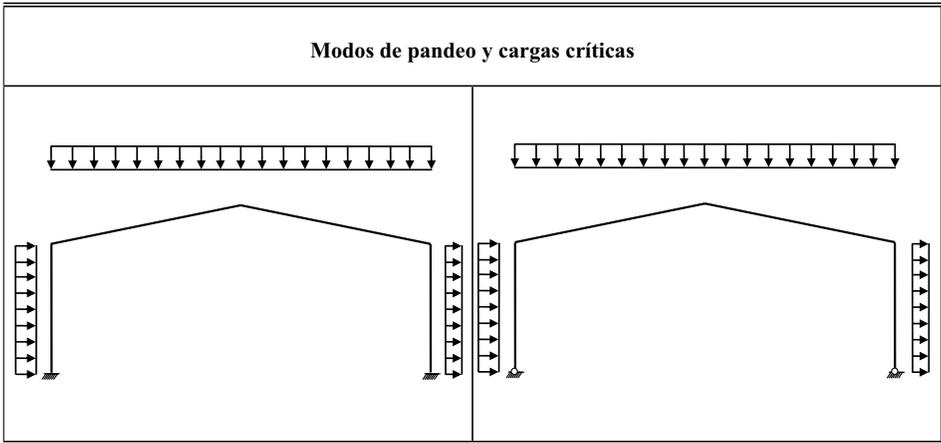
Se propone el siguiente esquema:



**Figura 10.2a** Esquema para comparación de resultados de la determinación de la carga crítica y modos de pandeo de una estructura plana de nudos rígidos.  
Carga vertical simétrica.



**Figura 10.2b** Esquema para comparación de resultados de la determinación de la carga crítica y modos de pandeo de una estructura plana de nudos rígidos.  
Carga vertical y viento por la izquierda.



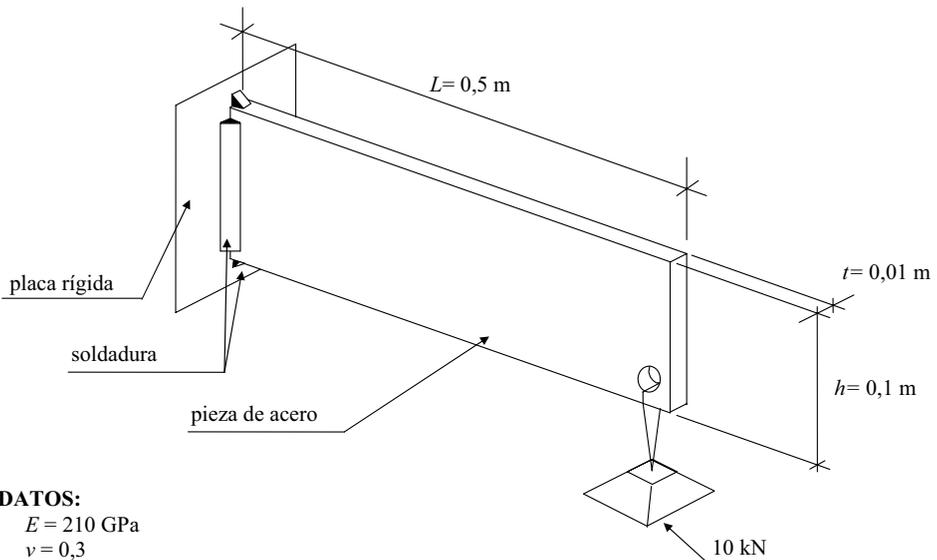
**Figura 10.2c** Esquema para comparación de resultados de la determinación de la carga crítica y modos de pandeo de una estructura plana de nudos rígidos.  
Carga vertical y viento en ambos lados.

## Práctica 11

# DESARROLLO DE UN PROGRAMA DE ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS

### 1 OBJETIVOS

El objetivo global de la práctica es desarrollar un programa de elementos finitos para analizar una pieza en voladizo con una carga puntual aplicada en el extremo libre.



**Figura 11.1** Pieza en voladizo con carga puntual.

Los objetivos parciales de la práctica son:

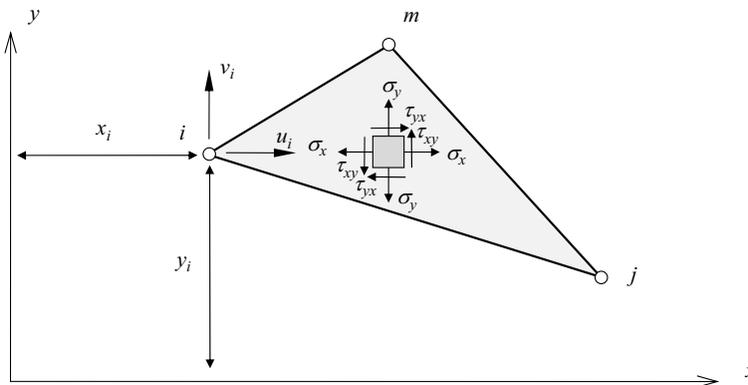
- 1 Desarrollar, mediante comandos de MATLAB, un programa para analizar la pieza de la Fig. 11.1 por elementos finitos, y que incluya:
  - 1.1 lectura de las coordenadas de nudos, propiedades del material, espesor de los elementos, información de los elementos, condiciones de contorno y cargas aplicadas;

- 1.2 cálculo de las funciones de forma;
  - 1.3 cálculo de las matrices de rigidez de los elementos;
  - 1.4 ensamblaje de la matriz de rigidez de la pieza;
  - 1.5 obtención de la matriz de rigidez reducida de la pieza considerando las condiciones de contorno;
  - 1.6 obtención del vector de cargas nodales;
  - 1.7 cálculo de desplazamientos de los nodos del modelo de elementos finitos, y
  - 1.8 cálculo de deformaciones y tensiones.
- 2 Comprobar los resultados mediante el programa DISSENY/2006.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 Funciones de desplazamiento

Consideremos el elemento triangular de la Fig. 11.2, con los nodos  $i, j$  y  $m$ , numerados en sentido antihorario.



**Figura 11.2** Elemento triangular: coordenadas, desplazamientos y tensiones.

Los desplazamientos de un nodo tienen dos componentes

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

y los seis componentes de los desplazamientos del elemento se agrupan en un vector

$$\mathbf{a}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

Los desplazamientos en el interior de un elemento han de quedar definidos unívocamente por esos seis valores. La representación más sencilla viene dada por dos polinomios de primer grado

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (11.3)$$

Se pueden calcular las seis constantes  $\alpha_i$  resolviendo los dos sistemas de tres ecuaciones simultáneas que se obtienen al sustituir las coordenadas de los nodos e igualar las expresiones resultantes a los desplazamientos correspondientes a los nodos

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned} \quad (11.4)$$

Los valores de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  se pueden calcular en función de los desplazamientos nodales  $u_i$ ,  $u_j$  y  $u_m$  para obtener

$$u = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m] \quad (11.5)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m = y_{jm} \\ c_i &= x_m - x_j = x_{mj} \end{aligned} \quad (11.6)$$

obteniéndose los otros coeficientes mediante permutación cíclica de los subíndices  $i, j$  y  $m$ , donde

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2(\text{área del triángulo } ijm) \quad (11.7)$$

Para el desplazamiento vertical tenemos análogamente

$$v = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m] \quad (11.8)$$

Podemos poner las expresiones (11.5) y (11.8) en la forma general siguiente

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{a}^e = [\mathbf{I}N_i, \mathbf{I}N_j, \mathbf{I}N_m] \mathbf{a}^e \quad (11.9)$$

o, de forma más desarrollada

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \quad (11.10)$$

siendo

$$\begin{aligned}
 N_i &= \frac{(a_i + b_i x + c_i y)}{2\Delta} \\
 N_j &= \frac{(a_j + b_j x + c_j y)}{2\Delta} \\
 N_m &= \frac{(a_m + b_m x + c_m y)}{2\Delta}
 \end{aligned}
 \tag{11.11}$$

## 2.2 Deformación

La deformación en cualquier punto del elemento puede definirse mediante sus tres componentes que contribuyen al trabajo interno

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{a}^e = \mathbf{B}\mathbf{a}^e
 \tag{11.12}$$

siendo  $\mathbf{B}$  la matriz

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m]
 \tag{11.13}$$

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{L}\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}
 \tag{11.14}$$

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{L}\mathbf{N}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix}
 \tag{11.15}$$

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{L}\mathbf{N}_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_m & 0 \\ 0 & c_m \\ c_m & b_m \end{bmatrix}
 \tag{11.16}$$

### 2.3 Matriz de elasticidad

Para el caso de tensión plana y para un medio isótropo, la relación entre tensiones y deformaciones es

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\quad (11.17)$$

Despejando las tensiones y poniendo el sistema de ecuaciones en forma matricial tenemos

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}\quad (11.18)$$

con

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}\quad (11.19)$$

que es la *matriz de elasticidad* para el caso de tensión plana en un medio isótropo, y siendo

$E$  el módulo de elasticidad longitudinal, y  
 $\nu$  el coeficiente de Poisson.

### 2.4 Matriz de rigidez

Sea  $\mathbf{F}^e$  el vector de fuerzas nodales en el elemento,  $\mathbf{f}$  el vector de fuerzas de volumen y  $\mathbf{p}$  el vector de fuerzas superficiales. La energía potencial total del elemento  $U^e$  es

$$U^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{V^e} \mathbf{b}^T \mathbf{u} dV - \int_{S_g^e} \mathbf{t}^T \mathbf{u} dS\quad (11.20)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (11.9) y (11.12), podemos poner

$$\begin{aligned}U^e &= \int_{V^e} \frac{1}{2} (\mathbf{B}\mathbf{a}^e)^T \mathbf{D} (\mathbf{B}\mathbf{a}^e) dV - \int_{V^e} \mathbf{b}^T \mathbf{N}\mathbf{a}^e dV - \int_{S_g^e} \mathbf{t}^T \mathbf{N}\mathbf{a}^e dS = \\ &\int_{V^e} \frac{1}{2} \mathbf{a}^{eT} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}^e dV - \int_{V^e} \mathbf{a}^{eT} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV - \int_{S_g^e} \mathbf{a}^{eT} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS\end{aligned}\quad (11.21)$$

y sabiendo que el vector  $\mathbf{a}^e$  es constante en el elemento

$$U^e = \frac{1}{2} \mathbf{a}^{eT} \left( \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{a}^e - \mathbf{a}^{eT} \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV - \mathbf{a}^{eT} \int_{S_g^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS\quad (11.22)$$

La energía potencial total en el elemento  $U^e$  se puede expresar, admitiendo un comportamiento del material elástico-lineal, como

$$U^e = \frac{1}{2} (\mathbf{a}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - (\mathbf{a}^e)^T \mathbf{f}^e\quad (11.23)$$

Relacionando (11.22) y (11.23) podemos definir la *matriz de rigidez del elemento  $ijm$*  como

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (11.24)$$

y

$$\mathbf{f}^e = - \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS \quad (11.25)$$

puediéndose expresar la ecuación (11.24) en forma matricial como

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ij} & \mathbf{k}_{im} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj} & \mathbf{k}_{jm} \\ \mathbf{k}_{mi} & \mathbf{k}_{mj} & \mathbf{k}_{mm} \end{bmatrix} \quad (11.26)$$

Al ser  $t$  el espesor del elemento, y efectuándose la integración en la superficie del triángulo, podemos poner, para un componente de la matriz  $\mathbf{K}^e$

$$\mathbf{k}_{ij} = \iint \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j t dx dy \quad (11.27)$$

Además, si el espesor del elemento es constante, ninguna de las matrices depende de  $x$  o de  $y$ , por lo que la expresión (11.23) queda

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j t \Delta \quad (11.28)$$

y la submatriz  $\mathbf{k}_{ij}$ , por ejemplo, es

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \end{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix} t \Delta \quad (11.29)$$

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{Et}{4\Delta(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_i b_j + c_i c_j \frac{1-\nu}{2} & \nu b_i c_j + c_i b_j \frac{1-\nu}{2} \\ \nu c_i b_j + b_i c_j \frac{1-\nu}{2} & c_i c_j + b_i b_j \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (11.30)$$

## 2.5 Cálculo de tensiones

Conocidas las matrices de rigidez de los elementos, se procede al ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura, a definir el vector de cargas nodales, y a resolver el sistema de ecuaciones de equilibrio. Con el resultado de los desplazamientos en los nodos podemos conocer las deformaciones mediante la expresión (11.12) y, a partir de éstas, las tensiones con la expresión (11.18).

Las tensiones principales ( $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ ) y la tensión tangencial máxima ( $\tau_{max}$ ) pueden obtenerse a partir de las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (11.31a)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (11.31b)$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (11.31c)$$

La tensión equivalente de Von-Mises puede obtenerse a partir de las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad (11.32)$$

o, a partir de las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (11.33)$$

### 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

#### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP;
- programa MATLAB, versión 4.0 o superior para Windows, y
- programa DISSENY/2006, versión académica.

#### 3.2 Procedimiento para el desarrollo del programa de elementos finitos con comandos MATLAB

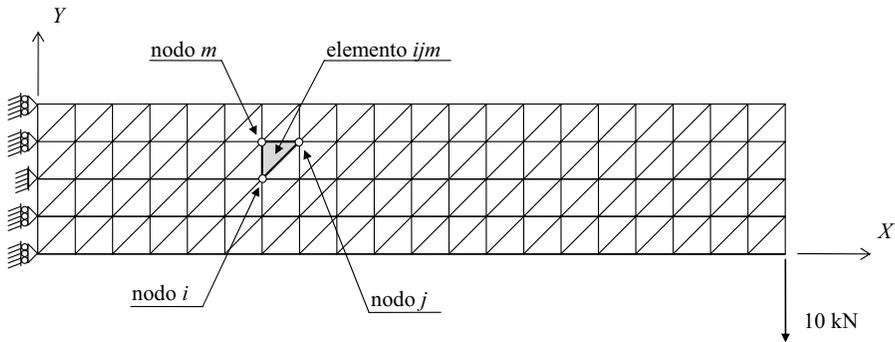
Se propone el siguiente plan de trabajo:

#### 3.4 Memoria de la práctica

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
1	Definiciones iniciales.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Encabezamiento.</li> <li>• Fichero de resultados.</li> <li>• Formato de escritura.</li> </ul>	<pre>% format diary</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En el encabezamiento se incluirá: <ul style="list-style-type: none"> <li>- nº del grupo;</li> <li>- alumnos del grupo,</li> </ul> </li> <li>y</li> <li>- fecha de realización.</li> </ul>
2	Entrada de datos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Coordenadas de los nudos.</li> <li>• Información de los elementos.</li> <li>• Espesor de los elementos.</li> <li>• Material.</li> </ul>	<pre>input eval</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La entrada de datos puede realizarse con operaciones de asignación directa, ya que el programa se hace particular para el modelo de la Fig. 11.3.</li> </ul>

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cargas.</li> </ul>		
3	Obtención de las matrices de rigidez de los elementos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Obtención de los coeficientes de las funciones de forma <math>N_i</math>.</li> <li>• Obtención de las matrices <math>\mathbf{D}</math>, <math>\mathbf{B}_i</math>, <math>\mathbf{B}_j</math> y <math>\mathbf{B}_m</math></li> <li>• Obtención de las matrices de rigidez <math>\mathbf{K}^e</math> de los elementos.</li> </ul>	<pre>zeros eval int2str det for var.=exp.   Declaración end</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expresiones (11.6), (11.7), (11.13), (11.14) (11.15), (11.16), (11.26) y (11.29).</li> </ul>
4	Ensamblaje de la matriz de rigidez de la pieza.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ensamblaje de la matriz de rigidez considerando la aportación de las matrices de rigidez de cada elemento.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se tendrá en cuenta la simetría de la matriz de rigidez de la pieza para la obtención de la misma con el menor número de operaciones.</li> </ul>
5	Obtención de la matriz de rigidez reducida.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Consideración de las condiciones de contorno impuestas a la pieza para determinar filas y columnas, de la matriz de rigidez completa, a eliminar.</li> </ul>	<p>Crear un vector con los números de los grados de libertad no restringidos (<math>\text{libres} = [\text{gdl}_1, \text{gdl}_2, \dots, \text{gdl}_n]</math>). La matriz reducida será <math>\mathbf{K}(\text{libres}, \text{libres})</math>.</p>	
6	Cálculo del vector de fuerzas exteriores aplicadas en los nudos de la estructura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Definición de un vector con elementos de valor cero de longitud el número de grados de libertad no restringidos de la estructura.</li> <li>• Obtención del vector de fuerzas aplicadas en nudos.</li> </ul>	<p>El vector de cargas reducido será <math>\mathbf{f}(\text{libres})</math>.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se considerará la carga puntual de 10 kN definida en la Fig. 11.3.</li> </ul>
7	Cálculo de los desplazamientos en los nodos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cálculo de la matriz inversa de la reducida.</li> <li>• Cálculo de los desplazamientos de los nodos de los elementos <math>\mathbf{a}^e</math>.</li> </ul>	<pre>inv eval int2str a=zeros(2*nno d,1) Los desplazamientos no restringidos serán a(libres)= inv(K(libres,</pre>	

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Obtención de una gráfica con la deformada de la estructura.</li> </ul>	<pre>libres)*f(libres).</pre>	
8	Cálculo de tensiones en los elementos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Cálculo de deformaciones en los elementos a partir de la matriz <b>B</b> y los desplazamientos <math>a^e</math> de los nodos de los elementos.</li> <li>Cálculo de las tensiones en los elementos a partir de las deformaciones y la matriz de elasticidad <b>D</b>.</li> <li>Obtención de un mapa de colores con las tensiones en los elementos.</li> </ul>	<pre>zeros eval int2str det for var.=exp.     declaración end</pre>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expresiones (11.14), (11.15), (11.16), (11.18) y (11.19).</li> <li>Con la función <i>dib_ten.m</i> que se encuentra en la página web del departamento (ver enlaces de interés).</li> </ul>
9	Comprobación con el programa de elementos finitos DISSENY/2006 de los valores obtenidos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utilización del fichero de datos para DISSENY/2006 que incluye la siguiente información (Fig. 11.3): <ul style="list-style-type: none"> <li>* coordenadas de los nudos,</li> <li>* materiales de los elementos,</li> <li>* espesor de los elementos,</li> <li>* restricciones, y</li> <li>* cargas.</li> </ul> </li> <li>Comparación de resultados.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>La información necesaria para crear el fichero de datos para DISSENY/2006 puede encontrarse en la bibliografía (Martí, 2006).</li> <li>El fichero de datos para DISSENY/2006 se encuentra en la página web del libro.</li> </ul>



**Figura 11.3** Modelo de análisis de la pieza sometida a tensión plana.

### 3.3 Memoria de la práctica

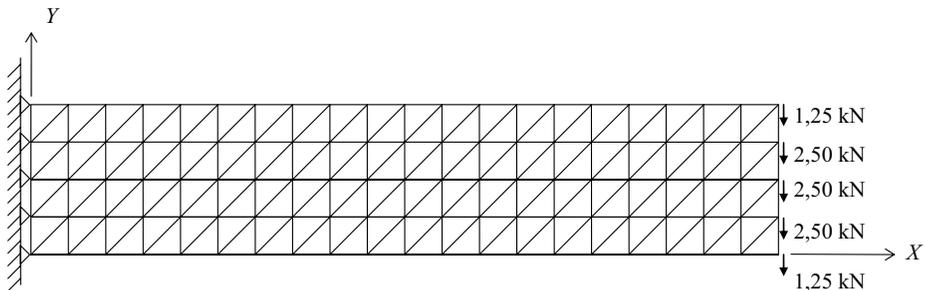
Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 1 El diagrama de flujo del programa de análisis;
- 2 el listado del programa de comandos para MATLAB, y
- 3 los gráficos, tablas, Figs., etc., necesarios para explicar lo realizado en los puntos de la tabla del apartado 3.2.

### 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Modificar el programa de análisis para considerar el modelo de la Fig. 11.4 y comparar los resultados de tensiones con los obtenidos para el modelo de la Fig. 11.3.
- 2 Comparar los resultados obtenidos con los resultados del análisis por resistencia de materiales de una ménsula a flexión justificando las diferencias encontradas.
- 3 Desarrollar una subrutina para mallas la pieza a partir de un valor dado para el tamaño de los elementos. Estudiar el efecto del tamaño en los resultados.



**Figura 11.4** Modelo de análisis alternativo para la pieza sometida a tensión plana.

## 5 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Bathe, K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- 2 Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.
- 3 Martí, P. DISSENY 2006. *Análisis de Estructuras por Elementos Finitos. Manual del Usuario*. Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, 2006.
- 4 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: user guide*. Natick: The MathWorks, 1996.
- 5 MATLAB *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software: reference guide*. Natick: The MathWorks, 1996.
- 6 MATLAB *Resumen de comandos para prácticas de análisis de estructuras*. Área de MMCyTE, UPCT, Cartagena, 2006.
- 7 Zienkiewicz, O.C., y Taylor, R. L. *El método de los elementos finitos*. 5ª ed., 1, Madrid: McGraw-Hill, 2004.

## 6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

### 6.1 Cuestiones

- 1 A la vista de los resultados del análisis por elementos finitos de la pieza de la Fig. 11.1, ¿qué modelo de análisis alternativo a los definidos en las Fig.s 11.3 y 11.4 propondrías para obtener unos valores de tensiones más reales?
- 2 ¿Qué efecto tienen las condiciones de contorno en el empotramiento? ¿En qué zona de la pieza se extiende su efecto?
- 3 ¿Qué efecto tiene la forma de aplicación de la carga? ¿En qué zona de la pieza se extiende su efecto?
- 4 ¿Qué efecto tiene el tamaño del elemento en los resultados del análisis?
- 5 ¿Comprobar que los resultados del análisis son exactos para una fuerza aplicada de tracción? ¿Por qué?

## 7 ENLACES DE INTERÉS

- 1 [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)
- 2 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)



## Práctica 12

# ANÁLISIS DE ERRORES EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

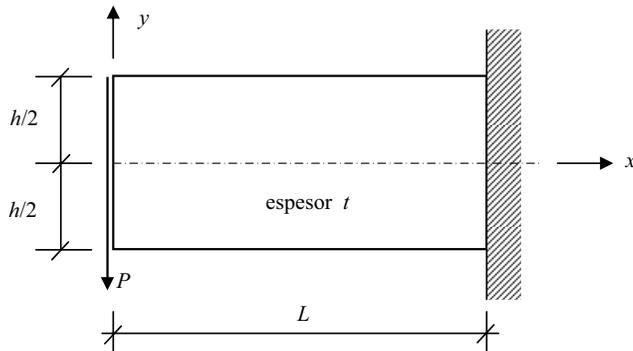
---

### 1 OBJETIVOS

El objetivo global de la práctica es determinar los errores cometidos al analizar un elemento continuo de pequeño espesor (tensión plana) mediante el método de los elementos finitos. Para ello, se obtendrán las soluciones numéricas aproximadas de algún problema cuya solución analítica ya se conoce. Un problema conveniente en este contexto es el de una viga empotrada de sección rectangular constante con una carga en su extremo libre, como muestra la Fig. 12.1. El sistema de esfuerzos se considera en dos dimensiones.

#### DATOS:

$L = 0,2$  m  
 $h = 0,1$  m  
 $t = 0,01$  m  
 $P = 10$  kN  
 $E = 210$  GPa  
 $\nu = 0,3$



**Figura 12.1** Viga empotrada con carga en su extremo libre.

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Modelar, mediante el programa de elementos finitos MEFI, el voladizo a analizar (archivo 'voladizo.dat').
- 2 Estudiar la influencia del tipo de elemento (triangular o cuadrangular, lineal o cuadrático), del número de grados de libertad y de la distorsión del elemento (relación base/altura) en el error relativo de la  $\sigma_x$  máxima ( $L, h/2$ ), de la  $\tau_{xy}$  máxima ( $0, 0$ ) y del desplazamiento vertical en el punto ( $0, 0$ ).

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La solución clásica de este problema comienza con la distribución de esfuerzos supuesta

$$\sigma_x = \frac{P}{I} xy \quad (12.1)$$

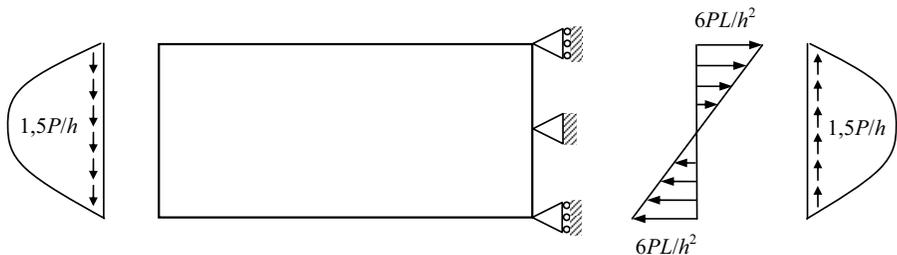
$$\sigma_y = 0 \quad (12.2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2I} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (12.3)$$

donde  $I = th^3/12$ . Estas ecuaciones implican que la carga  $P$  se reparte según una distribución parabólica tangencial sobre el extremo libre de la viga ( $y$  en el extremo empotrado para equilibrar), mientras que el momento de empotramiento se aplica mediante una carga normal que varía linealmente con  $y$ . El valor máximo de la carga parabólica se calcula de manera que el área de ésta sea igual a  $P$  y la carga lineal máxima debe ser tal que el momento producido por ésta equilibre al de la tangencial. Integrando las ecuaciones 12.1 a 12.3, aplicando las condiciones de contorno y particularizando para el punto  $(0, 0)$  tendremos que el desplazamiento vertical en el centro del extremo libre es:

$$u_y(0, 0) = -\frac{PL^3}{3EI} \left( 1 + (2 + 2,5\nu) \frac{h^2}{4L^2} \right) \quad (12.4)$$

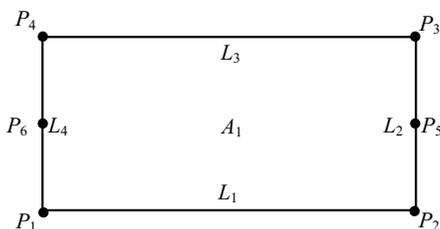
Las cargas anteriores están en equilibrio con lo que, en principio, no haría falta ninguna condición de contorno, sin embargo, para que se pueda analizar mediante el método de los elementos finitos hay que impedir el movimiento de cuerpo rígido de la viga. Las condiciones de contorno y las cargas serán las que se muestran en la Fig. 12.2.



**Figura 12.2** Condiciones de contorno y cargas.

### 2.1 Modelo de diseño

Para construir el modelo CAD se definen los puntos ( $P_1$ - $P_6$ ), con éstos las líneas ( $L_1$ - $L_4$ ) y con éstas el área ( $A_1$ ).



**Figura 12.3** Modelo de diseño.

## 2.2 Modelo de elementos finitos

- Tipo de elementos: triangular de 3, 6 y 10 nodos, y cuadrangular de 4, 8 y 12 nodos.
- Discretización: se define el número de divisiones en las dos direcciones dado en el fichero de datos.
- Restricciones:
  - 1 de movimiento en la dirección X para los puntos 2, 3 y 5, y
  - 2 de movimiento en la dirección Y para el punto 5.
- Cargas en líneas:
  - 1 Lineal en la línea 2.
  - 2 Parabólica en las líneas 2 y 4.

## 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP, y
- programa MEFI.

### 3.2 Procedimiento para el análisis de errores en el método de los elementos finitos

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
1	Cargar en memoria el fichero de datos 'voladizo.dat'.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cambiar al directorio mefi.</li> <li>• Ejecutar MEFI haciendo doble clic sobre el ejecutable.</li> <li>• Del menú 'Archivo' seleccionar el submenú 'Abrir'.</li> <li>• Abrir el archivo 'voladizo.dat'.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• El fichero se encuentra en la página web del departamento (ver enlaces de interés).</li> </ul>

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
2	Modificar el modelo de elementos finitos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Para cambiar el tipo de elemento modificar el comando ELEMENTOS_AREAS.</li> <li>• Para cambiar el número de divisiones modificar el comando MALLADO_LINEAS.</li> </ul>		
3	Analizar los datos de la memoria.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Del menú 'Proceso' seleccionar el submenú 'Analizar'.</li> </ul>		
4	Obtención de resultados del análisis.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los resultados gráficos se muestran en la subventana gráfica (para modificar el mapa visualizado pulsar el botón correspondiente) y los numéricos en la subventana de resultados.</li> </ul>		

### 3.3 Memoria de la práctica

Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 1 Los gráficos del error relativo de la  $\sigma_x$  máxima, de la  $\tau_{xy}$  máxima y del desplazamiento vertical en el punto (0, 0) en función del tipo de elemento, del número de grados de libertad y de la distorsión del elemento.
- 2 Razonar las diferencias existentes entre los errores anteriores y elegir el tipo de elemento y el número de grados de libertad más adecuados para el modelo analizado (buena relación tiempo de cálculo/error cometido).

## 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Comparar los resultados que se obtendrían modificando la carga distribuida parabólica por una distribuida uniforme, justificando las diferencias encontradas.
- 2 Comparar los resultados que se obtendrían modificando la carga distribuida lineal de la derecha por un empotramiento en la misma línea, justificando las diferencias encontradas.

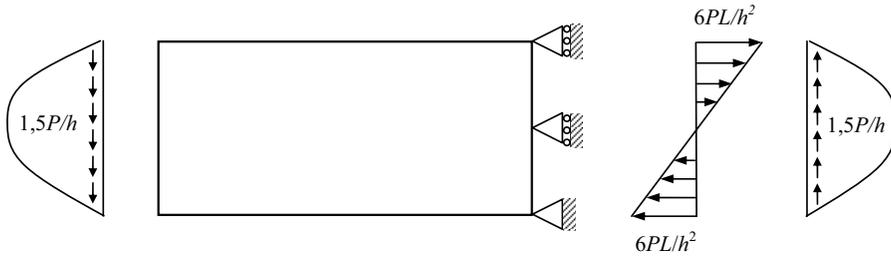
## 5 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Bathe, K.J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- 2 Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.
- 3 Zienkiewicz, O.C., y Taylor, R. L. *El método de los elementos finitos*. 5ª ed., 1, Madrid: McGraw-Hill, 2004.

## 6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

### 6.1 Cuestiones

- 1 ¿Qué efecto tiene considerar las condiciones de contorno de la Fig. 12.4?



**Figura 12.4** Condiciones de contorno modificadas y cargas.

- 2 ¿Qué efecto en el error tiene modificar el espesor de los elementos?

## 7 ENLACES DE INTERÉS

- 1 [www.upct.es/~deyc/software/mefi/](http://www.upct.es/~deyc/software/mefi/)
- 2 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)

## ANEXO 12.1 LISTADO DEL ARCHIVO DE DATOS DEL MODELO

---

### 1 INTRODUCCIÓN

Se da a continuación el listado del archivo de datos 'voladizo.dat' correspondiente al ejemplo de la Fig. 12.1. Este archivo está en el disquete que se adjunta con el texto de prácticas.

### 2 LISTADO DEL ARCHIVO DE DATOS 'VOLADIZO.DAT'

TITULO Voladizo sometido a flexión simple

#### PARAMETROS

```
$ par val
  L 0.2      $ m
  t 0.01     $ m
  F 10.0e3   $ N
  H L/2
  pt 1.5*F/H
  pn 6*F*L/H/H
  dv 16
```

#### PUNTOS

```
$ pun X      Y
  1  0.0     -H/2
  2  L       -H/2
  3  L       H/2
  4  0.0     H/2
  5  L       0.0
  6  0.0     0.0
```

#### LINEAS

```
$ lin tipo pun
  1  POL  1 2
  2  POL  2 5 3
  3  POL  4 3
  4  POL  1 4
```

#### AREAS

```
$ are tipo lin
  1  MAP  1:4
```

#### PROPIEDADES

```
$ pro esp
  1  t
```

#### ELEMENTOS\_AREAS

```
$ are tipo forma mat pro
  1  TEN_PLA  CUA_CUA  ACE  1
```

#### MALLADO\_LINEAS

```
$ lin div
```

```
1 2*dv
2  dv
```

## DESPLAZAMIENTOS\_GLOBALES\_PUNTOS

```
$  pun est DX  DY
3  1  0.0  LIB
5  1  0.0  0.0
```

## CARGAS\_LOCALES\_LINEAS

```
$  lin est tipo  px          py
2  1  PAR  0.0 pt  0.0  pn  0.0 -pn
4  1  PAR  0.0 -pt 0.0  0.0 0.0 0.0
```



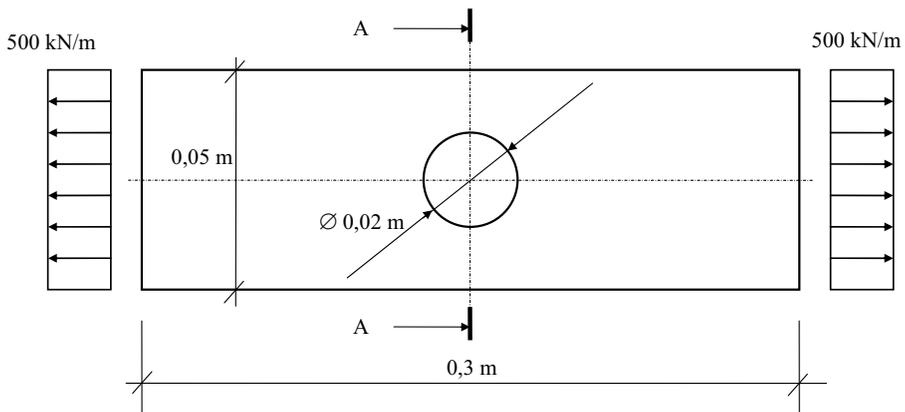
## Práctica 13

# MODELADO Y ANÁLISIS DE UN ELEMENTO ESTRUCTURAL CONTINUO MEDIANTE EL PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS MEFI

---

### 1 OBJETIVOS

El objetivo global de la práctica es modelar y analizar por elementos finitos un elemento estructural continuo, de pequeño espesor, con un agujero en el centro y sometido a un estado de carga uniforme en los extremos.



**DATOS:**  $E = 200$  GPa;  $\nu = 0,3$ ;  $t = 0,006$  m.

**Figura 13.1** Elemento estructural continuo con un agujero en el centro.

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Modelar, analizar y obtener resultados, mediante el programa de elementos finitos MEFI, del elemento estructural de la Fig. 13.1.
- 2 Calcular el factor de concentración de tensiones en el entorno del agujero.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Con el fin de calcular el factor de concentración de tensiones para el elemento de la Fig. 13.1, necesitamos saber que la tensión nominal normal en la sección A-A del elemento es

$$\sigma_n = \frac{P}{A} = \frac{500(\text{kN/m}) \cdot 0,05(\text{m})}{0,006(\text{m}) \cdot 0,03(\text{m})} = 138888 \text{ kPa} \quad (138,88 \text{ MPa}) \quad (13.1)$$

A continuación se analiza el modelo de la estructura propuesta y se obtiene de MEFI la máxima tensión normal en la sección A-A  $\sigma_{nMEFI}$ , para calcular el factor de concentración de tensiones  $k_t$  como

$$k_t = \frac{\sigma_{nMEFI}}{\sigma_n} \quad (13.2)$$

## 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP, y
- programa MEFI.

### 3.2 Procedimiento para el modelado y análisis del elemento estructural continuo con el programa MEFI.

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
1	Crear el fichero de datos y guardarlo como 'agujero.dat'.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cambiar al directorio mefi.</li> <li>• Ejecutar MEFI haciendo doble clic sobre el ejecutable.</li> <li>• Del menú 'Archivo' seleccionar el submenú 'Abrir'.</li> <li>• Abrir un archivo de un ejemplo similar y guardarlo como 'agujero.dat'.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• El fichero se encuentra en la página web del departamento (ver enlaces de interés).</li> </ul>
2	Crear el modelo de elementos finitos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mediante el comando AREAS crear un RECTANGULO, un CIRCULO y restarlas (RESTA).</li> <li>• Definir el tamaño de la malla en los puntos del área mediante el comando</li> </ul>		

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
		MALLADO_PUNTOS. • Imponer desplazamientos conocidos con DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_LINEAS y aplicar cargas con CARGAS_GLOBALES_LINEAS.		
3	Analizar los datos de la memoria.	• Del menú ‘Proceso’ seleccionar el submenú ‘Analizar’.		
4	Obtención del factor de concentración de esfuerzos.	• Obtener la tensión normal en $x$ máxima, del mapa de tensiones, y dividirla por la tensión teórica.		

### 3.3 Memoria de la práctica

Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 3 El listado del fichero de datos de la estructura dada.
- 4 Justificar el modelo, tipo de elemento y el mallado elegidos.
- 5 El mapa de tensiones normales y el mapa de errores estructurales.
- 6 El factor de concentración de tensiones y el punto donde se produce.

## 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Comprobar como afectan el tamaño, el tipo y la distorsión de los elementos en el error cometido en el cálculo del factor de concentración de esfuerzos.

## 5 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Bathe, K.J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- 2 Gere, J. M. *Resistencia de materiales. Timoshenko*. 5ª ed. Madrid: Thompson, 2002.
- 3 Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.
- 4 Shigley, J.E., Mischke, CH.R. *Diseño en ingeniería mecánica*. México: McGraw-Hill. 2004.
- 5 Zienkiewicz, O.C., y Taylor, R. L. *El método de los elementos finitos*. 5ª ed., 1, Madrid: McGraw-Hill, 2004.

## 6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

### 6.1 Cuestiones

- 1 ¿Cómo influye el tamaño del elemento finito en el error estimado total? ¿Cómo influye el tamaño del elemento finito en el tiempo de CPU necesario para analizar los modelos?

- 2 ¿Cómo influye el número de nodos por elemento en el análisis de los modelos y en el error estimado total? Cómo influye el número de nodos por elemento en el tiempo de CPU necesario para analizar los modelos?
- 3 ¿Qué tipo de elemento, triangular o cuadrangular, es más adecuado para el análisis, a la vista de los resultados obtenidos? ¿Por qué?

## **7 ENLACES DE INTERÉS**

- 1 [www.upct.es/~deyc/software/mefi/](http://www.upct.es/~deyc/software/mefi/)
- 2 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)

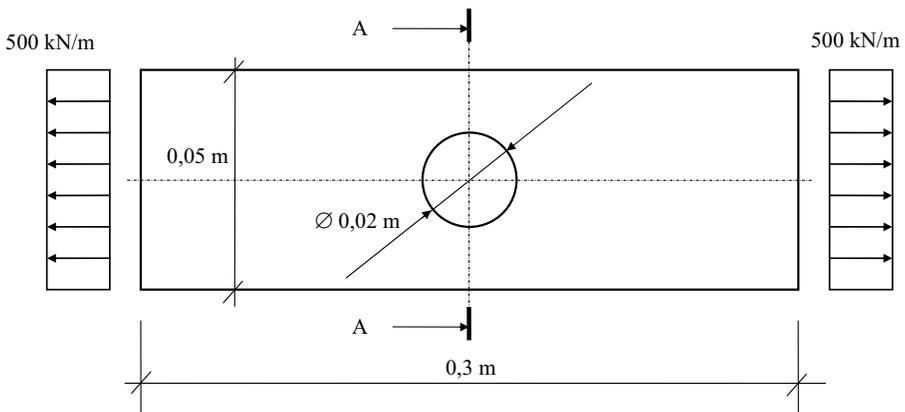
## Práctica 14

# MODELADO Y ANÁLISIS DE UN ELEMENTO ESTRUCTURAL CONTINUO MEDIANTE EL PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS ANSYS

---

### 1 OBJETIVOS

El objetivo global de la práctica es modelar y analizar por elementos finitos un elemento estructural continuo, de pequeño espesor, con un agujero en el centro y sometido a un estado de carga uniforme en los extremos.



**DATOS:**  $E = 200 \text{ GPa}$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $t = 0,006 \text{ m}$

**Figura 14.1** Elemento estructural continuo con un agujero en el centro.

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Modelar, mediante el preprocesador /PREP7 del programa de elementos finitos ANSYS, el elemento estructural de la Fig. 14.1, realizando las siguientes operaciones:
  - 1.1 elaborar dos modelos CAD, y

- 1.2 elaborar tres modelos de elementos finitos variando el tipo de elemento finito y el mallado.
- 2 Analizar los modelos con el procesador /SOLUTION de ANSYS.
- 3 Obtener resultados de los análisis con el postprocesador /POST1 de ANSYS.
- 4 Comparar resultados en función del modelo de elementos finitos utilizado.
- 5 Calcular el factor de concentración de tensiones en el entorno del agujero y compararlo con el teórico definido en la bibliografía (Shigley, 2004).

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Con el fin de calcular el factor de concentración de tensiones para el elemento de la Fig. 14.1, necesitamos saber que la tensión nominal normal en la sección A-A del elemento es

$$\sigma_n = \frac{P}{A} = \frac{500(\text{kN/m}) \cdot 0,05(\text{m})}{0,006(\text{m}) \cdot 0,03(\text{m})} = 138888 \text{ kPa} \text{ (138,88 MPa)} \quad (14.1)$$

A continuación se analizan los diferentes modelos propuestos en el apartado 2.2 y se obtiene de ANSYS la máxima tensión normal en la sección A-A  $\sigma_{nANSYS}$ , para calcular el factor de concentración de tensiones  $k_t$  como

$$k_t = \frac{\sigma_{nANSYS}}{\sigma_n} \quad (14.2)$$

### 2.1 Modelo CAD

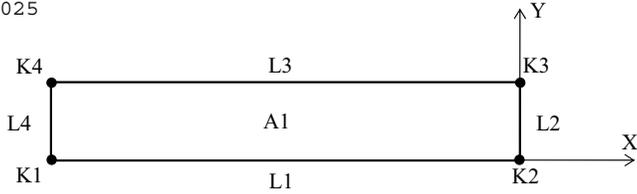
Se utilizarán dos modelos de CAD: el modelo CAD 1 para el modelo de elementos finitos 1 y el modelo CAD 2 para los modelos de elementos finitos 2 y 3.

#### 2.1.1 Modelo CAD 1

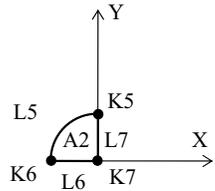
El modelo de CAD 1 se construye creando con el preprocesador PREP7 (Fig. 14.2):

- 1 un área rectangular con un valor de abscisa mínima -0,15 m, abscisa máxima 0 m, ordenada mínima 0 m y ordenada máxima 0,025 m (RECTNG, -0.15, 0, 0, 0.025), en el sistema global de coordenadas cartesianas.
- 2 un área tipo sector circular con un radio interior 0 m, radio exterior 0,010 m, ángulo inicial 90° y ángulo final 180° (PCIRC, 0, 0.010, 90, 180), en el sistema global de coordenadas cartesianas.
- 3 una nueva área, a partir de las anteriores, realizando sobre las mismas una *operación booleana* de substracción de áreas (ASBA, 1, 2). Se realiza entre las dos áreas interiores definidas por el rectángulo (A1) y el sector circular anterior (A2). Esta operación obtiene la forma final de un área (A3) que representa una cuarta parte de la pieza a analizar, tal como se ve en la Fig. 14.2.

RECTNG, -0.15, 0, 0, 0.025



PCIRC, 0, 0, 0.010, 90, 180



ASBA, 1, 2

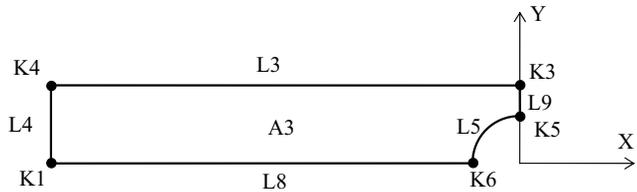


Figura 14.2. Modelo CAD 1.

2.1.2 Modelo CAD 2

El modelo de CAD 2 se construye a partir del modelo CAD 1 con las operaciones adicionales siguientes:

- 1 Borrar el área 3 (ADELE, 3).
- 2 Creación de los keypoints 7 (K, 7, -0.03, 0, 0) y 8 (K, 8, -0.03, 0.025, 0).
- 3 Creación de la línea que va desde el punto 7 a 8 (L, 7, 8).
- 4 Partir la línea 3 por la línea 1 (LPTN, 1, 3) y la línea 8 por la línea 1 (LPTN, 1, 8).
- 5 Creación del área 1 entre las líneas 3, 1, 6 y 4 (AL, 3, 1, 6, 4) y el área 2 entre las líneas 7, 5, 9, 2 y 1 (AL, 7, 5, 9, 2, 1).

ADELE, 3  
 K, 7, -0.03, 0, 0  
 K, 8, -0.03, 0.025, 0  
 L, 7, 8  
 LPTN, 1, 3  
 LPTN, 1, 8  
 AL, 3, 1, 6, 4  
 AL, 7, 5, 9, 2, 1

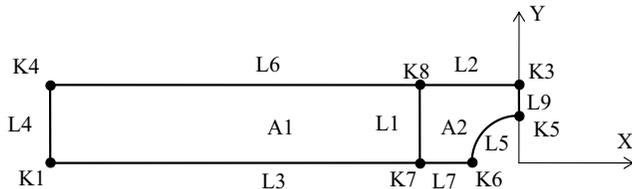


Figura 14.3 Modelo CAD 2.

## 2.2 Modelo de elementos finitos

Se crearán tres modelos de elementos finitos que llamaremos modelo 1, modelo 2 y modelo 3.

### 2.2.1 Modelo 1

- Tipo de elementos: triangulares de 6 nodos (ET, 1, PLANE2, , , 3), con espesor de 0,006 m (R, 1, 0.006).
- Número de elementos: 138 (mallado libre con tamaño de elemento 0,015 m (ESIZE, 0.015) y mallado adaptativo con una iteración máxima y 5 % de error total máximo (ADAPT, 1, 5)).
- Módulo de elasticidad longitudinal del material:  $E = 200$  GPa (MP, EX, 1, 200e6).
- Coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  (MP, NUXY, 1, 0.3).
- Restricciones:
  - 1 de movimiento en la dirección  $X$  para los keypoints 3 (DK, 3, UX, 0, , 1) y 5 (DK, 5, UX, 0, , 1), y todos los nodos intermedios.
  - 2 de movimiento en la dirección  $Y$  para los keypoints 1 (DK, 1, UY, 0, , 1) y 6 (DK, 6, UY, 0, , 1), y todos los nodos intermedios.
- Cargas: de presión en la línea 4 en sentido negativo de la dirección  $X$ , con valor  $500 \text{ kN/m} / 0,006 \text{ m} = 83,33 \text{ MPa}$  (SFL, 4, PRES, -83333, 33).

### 2.2.2 Modelo 2

- Tipo de elementos utilizados: cuadrangulares de 4 nodos (ET, 1, PLANE42, , , 3), con espesor de 0,006 m (R, 1, 0.006).
- Número de elementos: 1593 (mallado libre con varios tamaños de elemento que concurren a un keypoint, ver Tabla 14.1, y mallado adaptativo con 2 iteraciones máximas y 1% de error total máximo (ADAPT, 2, 1)).

**Tabla 14.1** Tamaño de elementos en la vecindad de keypoints

keypoint N°	tamaño en metros
1	0,010
3	0,003
4	0,010
5	0,003
6	0,003
7	0,003
8	0,003

- Módulo de elasticidad longitudinal del material:  $E = 200$  GPa (MP, EX, 1, 200e6).
- Coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  (MP, NUXY, 1, 0.3).
- Restricciones:
  - 1 de movimiento en la dirección  $X$  para los keypoints 3 (DK, 3, UX, 0, , 1) y 5 (DK, 5, UX, 0, , 1), y todos los nodos intermedios.
  - 2 de movimiento en la dirección  $Y$  para los keypoints 1 (DK, 1, UY, 0, , 1), 7 (DK, 7, UY, 0, , 1) y 6 (DK, 6, UY, 0, , 1), y todos los nodos intermedios.
- Cargas: de presión en la línea 4 en sentido negativo de la dirección  $X$ , con valor  $500 \text{ kN/m} / 0,006 \text{ m} = 83,33 \text{ MPa}$  (SFL, 4, PRES, -83333, 33).

### 2.2.3 Modelo 3

- Tipo de elementos utilizados: cuadrangulares de 8 nodos (ET, 1, PLANE82, , , 3), con espesor de 0,006 m (R, 1, 0.006).
- Número de elementos: 50 (mallado manual mediante concatenación de las líneas 1 y 2 (LCCAT), división de líneas (LSIZE) y mallado de las áreas 1 (AMESH, 1) y 2 (AMESH, 2), como se ve en la Fig. 14.4).
- Módulo de elasticidad longitudinal del material:  $E = 200 \text{ GPa}$  (MP, EX, 1, 200e6).
- Coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  (MP, NUXY, 1, 0.3).
- Restricciones:
  - 1 de movimiento en la dirección X para los keypoints 3 (DK, 3, UX, 0, , 1) y 5 (DK, 5, UX, 0, , 1), y todos los nodos intermedios.
  - 2 de movimiento en la dirección Y para los keypoints 1 (DK, 1, UY, 0, , 1), 7 (DK, 7, UY, 0, , 1) y 6 (DK, 6, UY, 0, , 1), y todos los nodos intermedios.
- Cargas: de presión en la línea 4 en sentido negativo de la dirección X, con valor  $500 \text{ kN/m} / 0,006 \text{ m} = 83,33 \text{ MPa}$  (SFL, 4, PRES, -83333.33).

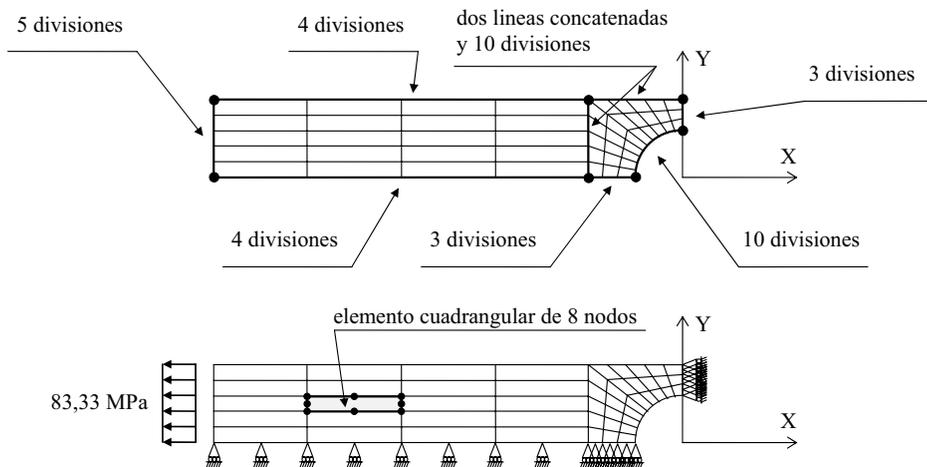


Figura 14.4. Modelo 3 de elementos finitos.

La exposición abreviada del método de las rigideces se encuentra en el anexo I. Una exposición más completa puede verse en la bibliografía (Martí, 2003). La formulación del método de los elementos finitos puede encontrarse en (Bathe, 1982 y Zienkiewicz, 2004).

## 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

*Hardware:*

- ordenador PC Pentium III o superior.

*Software:*

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP,

- editor de Windows, y
- programa ANSYS, versión 5.0 o superior.

### 3.2 Procedimiento para el modelado y análisis del elemento estructural continuo con comandos de ANSYS

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
1	Creación de un fichero de comandos de ANSYS con los datos iniciales para el modelo.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Definición del nombre de los ficheros de resultados y de la base de datos.</li> <li>• Definición del título del problema.</li> </ul>	/FILNAM  /TITLE	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El fichero debe tener la extensión <i>.mac</i> y deberá ejecutarse tecleando su nombre, sin la extensión, en la pantalla principal de ANSYS.</li> </ul>
2	Creación de los modelos CAD del elemento estructural continuo de la Fig. 14.1.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entrada en el preprocesador PREP7.</li> <li>• Definición de primitivas (rectángulo y círculo).</li> <li>• Operación booleana de sustracción de áreas.</li> <li>• Definición de keypoints, líneas y áreas adicionales.</li> </ul>	/PREP7  RECTNG PCIRC  ASBA  K L AL	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ver modelos CAD de las Figs 14.2 y 14.3.</li> </ul>
3	Creación de los modelos de elementos finitos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Definición del material.</li> <li>• Definición del espesor del elemento.</li> <li>• Definición del tipo de elemento finito.</li> <li>• Tamaño del elemento.</li> <li>• Mallado.</li> <li>• Salida del preprocesador PREP7.</li> <li>• Entrada en el procesador de análisis SOLUTION.</li> <li>• Restricciones.</li> <li>• Cargas de superficie.</li> </ul>	MP  R  ET  ESIZE SAVE AMESH  FINISH  /SOLUTION  DK SFL	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se realizarán los tres modelos definidos en el apartado 2.2.</li> </ul>
4	Análisis de los modelos de elementos finitos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Análisis.</li> <li>• Salida del procesador de</li> </ul>	SOLVE FINISH	

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	COMANDOS	NOTAS Y CUESTIONES
		análisis SOLUTION.		
5	Obtención de resultados del análisis.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entrada en el postprocesador POST1.</li> <li>Obtención de valores de tensiones en elementos.</li> <li>Obtención del error estimado total.</li> <li>Salida del postprocesador.</li> </ul>	/POST1  PLESOL  PRERR  FINISH	<ul style="list-style-type: none"> <li>En el caso de un error estimado total mayor que el 5 % se deberá ejecutar el mallado adaptativo.</li> </ul>
6	Ejecución del mallado adaptativo.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entrada al procesador de análisis SOLUTION.</li> <li>Mallado adaptativo.</li> <li>Salida del procesador de análisis SOLUTION.</li> </ul>	/SOLUTION  ADAPT  FINISH	
7	Obtención de resultados del análisis tras el mallado adaptativo.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entrada en el postprocesador POST1.</li> <li>Obtención de valores de tensiones en elementos.</li> <li>Obtención del error estimado total.</li> <li>Salida del postprocesador.</li> </ul>	/POST1  PLESOL  PRERR  FINISH	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se comprobará nuevamente el error estimado total.</li> </ul>
8	Cálculo del factor de concentración de tensiones $k_t$ .	<ul style="list-style-type: none"> <li>Recopilación de valores de tensiones normales máximas en la sección A-A de la Fig. 14.1</li> <li>Cálculo del factor de concentración de tensiones <math>k_t</math>.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>Se utilizará la expresión (14.2).</li> <li>Se calculará para las tensiones obtenidas en los tres modelos de elementos finitos.</li> </ul>
9	Comparación de los valores obtenidos para el factor de concentración de tensiones con el valor teórico.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Cálculo del valor teórico del factor de concentración de tensiones <math>k_t</math>.</li> <li>Comparación de resultados.</li> </ul>		

### 3.3 Memoria de la práctica

Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 1 Los listados de los ficheros de comandos de ANSYS con los tres modelos de elementos finitos;
- 2 el cálculo del factor de concentración de tensiones  $k_t$ , y

- 3 los gráficos, tablas, Figs., etc., necesarios para explicar lo realizado en los puntos de la tabla del apartado 3.2.

#### 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Proponer un modelo de elementos finitos diferente a los definidos en el apartado 2.2 y analizar y obtener los valores de las tensiones máximas en la sección A-A del elemento estructural de la Fig. 14.1. Calcular el factor de concentración de tensiones y comparar con el teórico, justificando la desviación encontrada.

#### 5 BIBLIOGRAFÍA

- 1 ANSYS *User's Manual*. ANSYS, Inc., Houston, USA.
- 2 Bathe, K.J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- 3 Gere, J. M. *Resistencia de materiales. Timoshenko*. 5ª ed. Madrid: Thompson, 2002.
- 4 Martí, P. *Análisis de estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal, eds, Cartagena, 2003.
- 5 Shigley, J.E., Mischke, CH.R. *Diseño en ingeniería mecánica*. México: McGraw-Hill, 2004.
- 6 Zienkiewicz, O.C., y Taylor, R. L. *El método de los elementos finitos*. 5ª ed., 1, Madrid: McGraw-Hill, 2004.

#### 6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

##### 6.1 Cuestiones

- 2 ¿Cómo influye el tamaño del elemento finito en el error estimado total? ¿Cómo influye el tamaño del elemento finito en el tiempo de CPU necesario para analizar los modelos?
- 3 ¿Cómo influye el número de nodos por elemento en el análisis de los modelos y en el error estimado total? ¿Cómo influye el número de nodos por elemento en el tiempo de CPU necesario para analizar los modelos?
- 4 ¿Qué tipo de elemento, triangular o cuadrangular, es más adecuado para el análisis, a la vista de los resultados obtenidos? ¿Por qué?

#### 7 ENLACES DE INTERÉS

- 1 [www.ansys.com](http://www.ansys.com)
- 2 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)

# ANEXO 14.1 LISTADO DE COMANDOS PARA EL ANÁLISIS DEL MODELO 1

---

## 1 LISTADO DE COMANDOS PARA EL ANÁLISIS DEL MODELO 1 MEDIANTE EL PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS ANSYS

```

! LISTADO DEL FICHERO DE COMANDOS. MODELO N° 1
! *****
! Inicio
! *****
/FILNAM,mod_1
/TITLE,modelo num. 1

! Creación del modelo CAD
! *****
! Entrada al preprocesador
! =====
/PREP7

! Primitivas
! =====
! Rectangulo
! -----
RECTNG,-.15,0,0,.025

! Circulo
! -----
PCIRC,0,.010,90,180
/DSCALE,1,AUTO      !escalado automatico de la Fig. en pantalla
APLOT                !dibuja areas

! Operación booleana de sustraccion de areas
! =====
ASBA,1,2

! Modelo de elementos finitos
! *****
! Material
! =====
MP,EX,1,200e6      !modulo de elasticidad longitudinal
MP,NUXY,1,.3      !coeficiente de Poisson

! Tipo de elemento finito
! =====
ET,1,plane2,,3 !tensión plana con espesor

! Espesor
! =====
R,1,.006

! Control del mallado: tamaño del elemento finito
! =====
ESIZE,.015
SAVE                !salva la base de datos antes de mallar

! Mallado
! =====

```

AMESH,ALL

! Sale del preprocesador  
! =====  
FINISH

! Entra al procesador de analisis  
! =====  
/SOLU

! Restricciones  
! =====  
DK,1,UY,0,,1           !definición de restrc. keypoint 1  
DK,6,UY,0,,1           !definición de restrc. keypoint 6  
DK,3,UX,0,,1           !definición de restrc. keypoint 3  
DK,5,UX,0,,1           !definición de restrc. keypoint 5

! Carga superficial  
! =====  
SFL,4,PRES,-83333.33,-83333.33

! Analisis  
! \*\*\*\*\*  
! Entrada al procesador de analisis  
! =====  
/SOLU

! Analisis  
! =====  
SOLVE

! Obtencion de resultados  
! \*\*\*\*\*  
! Salida del procesador de analisis  
! =====  
FINISH

! Entrada al postprocesador  
! =====  
/POST1  
/PBC,ALL,ON           !saca en pantalla simbolos de reacciones y  
                      !restricciones  
/PSF,PRES,,2         !saca en pantalla simbolos de cargas superficiales  
APLOT                !dibuja areas  
/DSCALE,,OFF        !elimina deformaciones

! Obtencion de tensiones en elementos  
! =====  
PLESOL,S,X

! Errores  
! =====  
/GRAFICS,OFF  
PRERR

! Mallado adaptativo  
! \*\*\*\*\*  
! Salida del postprocesador  
! =====  
FINISH

! Entrada al procesador de analisis  
! =====  
/SOLU

```
! Mallado adaptativo y analisis
! =====
ADAPT,1,5

! Salida del procesador de analisis
! =====
FINISH

! Entrada al postprocesador
! =====
/POST1

! Obtencion de tensiones en elementos
! =====
PLESOL,S,X
```



## *Práctica 15*

# **ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE UNA ESTRUCTURA METÁLICA CON TÉCNICAS DE EXTENSOMETRÍA ELÉCTRICA**

---

### **1 OBJETIVOS**

El objetivo global de la práctica es analizar, con técnicas experimentales, una estructura de acero para conocer su comportamiento real y compararlo con el comportamiento idealizado obtenido tras el análisis de diferentes modelos de la estructura.

Los objetivos parciales de la práctica son:

- 1 Modelar y analizar (con el programa DISSENY/2006) la estructura de la figura 15.1, considerando dos modelos: estructura plana de nudos articulados y estructura plana de nudos rígidos.
- 2 Obtener los diagramas de esfuerzos en los elementos y las reacciones en los apoyos, para cada modelo de la estructura.
- 3 Análisis experimental, con técnicas extensométricas, de la estructura para conocer su estado real de deformaciones.
- 4 Interpretación y comparación de los resultados obtenidos con el análisis numérico frente a los resultados obtenidos con el análisis experimental.



**Figura 15.1** Estructura metálica colocada en un marco de ensayos.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 Introducción

La extensometría eléctrica sirve para determinar de una forma simple y fiable la distribución de deformaciones en la superficie de un sólido sometido a unas condiciones de cargas y/o desplazamientos, lo que no es, en principio, un inconveniente, ya que las máximas tensiones se suelen encontrar en la superficie del cuerpo.

Esta técnica se basa en fijar unas resistencias, denominadas galgas, en la superficie del cuerpo a estudiar. Las deformaciones en la superficie del cuerpo se transmiten a las galgas a través del adhesivo y estas cambian su resistencia al variar su longitud. La medida del cambio de resistencia nos informa del nivel de deformación en la superficie del cuerpo.

Las galgas extensométricas de resistencia eléctrica están constituidas por un hilo metálico muy fino formando una rejilla continua, como se ve en la figura 15.2, en la que se observa que la mayor parte de la longitud del hilo está dispuesta en una dirección. El engrosamiento de los extremos del hilo permite soldar los terminales de los cables de conexión a los instrumentos de medida.

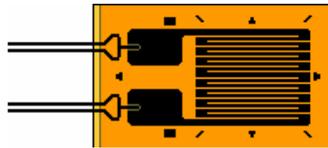


Figura 15.2 Galga extensométrica por resistencia eléctrica.

### 2.2 Principio de funcionamiento de una galga extensométrica por resistencia eléctrica

Se sabe que la resistencia eléctrica de un alambre conductor metálico aumenta con su longitud. La ecuación que liga la resistencia eléctrica  $R$  de un alambre conductor metálico con la resistividad del material  $\rho$ , la longitud  $l$  y el área  $A$  de la sección del mismo, es

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (15.1)$$

Tomando logaritmos de la expresión anterior y derivando, se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - \frac{dA}{A} \quad (15.2)$$

Si el conductor es cilíndrico y tiene un diámetro  $\phi_0$  antes de la deformación y un diámetro  $\phi$  después de la deformación, podemos expresar la deformación transversal  $\varepsilon_y$  como

$$\varepsilon_y = \frac{d\phi}{\phi_0} = \frac{(\phi - \phi_0)}{\phi_0} = -1 + \frac{\phi}{\phi_0} \quad (15.3)$$

y la deformación longitudinal  $\varepsilon_x$  como

$$\varepsilon_x = \frac{dl}{l} \quad (15.4)$$

Sabemos que la relación entre la deformación  $\varepsilon_x$  y la deformación  $\varepsilon_y$  es

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x \quad (15.5)$$

donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson del material.

Sustituyendo en la expresión (15.3) la expresión (15.5), podemos poner el diámetro  $\phi$  en función de  $\phi_0$  como

$$\frac{\phi}{\phi_0} - 1 = -\nu\varepsilon_x \quad (15.6)$$

$$\frac{\phi}{\phi_0} = 1 - \nu\varepsilon_x \quad (15.7)$$

despejando  $\phi$  de la expresión anterior se obtiene

$$\phi = \phi_0(1 - \nu\varepsilon_x) \quad (15.8)$$

y sustituyendo (15.4) en la expresión anterior se obtiene

$$\phi = \phi_0\left(1 - \nu\frac{dl}{l}\right) \quad (15.9)$$

La variación de área de la sección recta  $dA$  se debe a la contracción lateral del conductor. Las áreas antes de la deformación y después de la deformación son

$$A = \frac{\pi}{4}\phi^2 \quad (15.10)$$

$$A_0 = \frac{\pi}{4}\phi_0^2 \quad (15.11)$$

Por lo tanto, podemos poner la variación de área  $dA$  como

$$dA = A - A_0 = \frac{\pi}{4}(\phi^2 - \phi_0^2) \quad (15.12)$$

sustituyendo (15.9) en la expresión anterior y haciendo operaciones se tiene que

$$dA = \frac{\pi}{4}\left[\phi_0^2\left(1 - \nu\frac{dl}{l}\right)^2 - \phi_0^2\right] = \frac{\pi\phi_0^2}{4}\left[\nu^2\left(\frac{dl}{l}\right)^2 - 2\nu\frac{dl}{l}\right] \quad (15.13)$$

La variación unitaria de área es

$$\begin{aligned} \frac{dA}{A} &= \frac{\frac{\pi\phi_0^2}{4} \left[ v^2 \left( \frac{dl}{l} \right)^2 - 2\nu \frac{dl}{l} \right]}{\frac{\pi\phi^2}{4}} = \frac{\frac{\pi\phi_0^2}{4} \left[ v^2 \left( \frac{dl}{l} \right)^2 - 2\nu \frac{dl}{l} \right]}{\frac{\pi\phi_0^2}{4} \left[ 1 - \nu \frac{dl}{l} \right]^2} = \\ &= \frac{\left[ v^2 \left( \frac{dl}{l} \right)^2 - 2\nu \frac{dl}{l} \right]}{\left[ 1 + \nu^2 \left( \frac{dl}{l} \right)^2 - 2\nu \frac{dl}{l} \right]} \end{aligned} \quad (15.14)$$

Teniendo en cuenta que el término

$$\nu^2 \frac{dl^2}{l^2}$$

es un infinitésimo de orden superior, la variación unitaria de área puede tomarse como

$$\frac{dA}{A} \approx \frac{\left[ -2\nu \frac{dl}{l} \right]}{\left[ 1 - 2\nu \frac{dl}{l} \right]} = \frac{\left[ -2\nu \frac{dl}{l} \right] \left[ 1 + 2\nu \frac{dl}{l} \right]}{\left[ 1 - 2\nu \frac{dl}{l} \right] \left[ 1 + 2\nu \frac{dl}{l} \right]} = \frac{\left[ -2\nu \frac{dl}{l} - 4\nu^2 \left( \frac{dl}{l} \right)^2 \right]}{\left[ 1 - 4\nu^2 \left( \frac{dl}{l} \right)^2 \right]} \approx -2\nu \frac{dl}{l} \quad (15.15)$$

Por otro lado, la Ley de Bridgman establece que la variación unitaria de la resistividad es proporcional a la variación unitaria del volumen del conductor, es decir

$$\frac{d\rho}{\rho} = C \frac{dV}{V} \quad (15.16)$$

siendo  $C$  la llamada constante de Bridgman, que adopta unos valores entre 1,13 y 1,15 para las aleaciones utilizadas en la galgas extensométricas.

Como  $V=IA$ , tomando logaritmos y derivando se obtiene

$$\frac{dV}{V} = \frac{dl}{l} + \frac{dA}{A} \quad (15.17)$$

luego, considerando (15.15) podemos poner

$$\frac{dV}{V} = \frac{dl}{l} - 2\nu \frac{dl}{l} = (1 - 2\nu) \frac{dl}{l} \quad (15.18)$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en (15.2) se obtiene

$$\frac{dR}{R} = \left[ 1 + C + 2\nu(1 - C) \right] \frac{dl}{l} = K \frac{dl}{l} = K \varepsilon_x \quad (15.19)$$

es decir

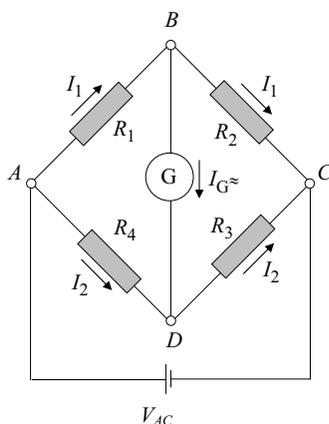
$$K = \frac{dR/R}{\varepsilon_x} \quad (15.20)$$

La constante  $K$  depende del cambio de dimensiones del conductor y de la variación unitaria de la resistencia, y se denomina *factor de sensibilidad de la galga* o simplemente *factor de galga*, y es un valor que proporciona el fabricante y que varía, normalmente, entre 2 y 6.

### 2.3 Medida de la deformación

La ecuación (15.20) indica que la medida de la variación unitaria de la resistencia eléctrica de la galga nos permite obtener una lectura directa de la deformación longitudinal unitaria  $\varepsilon_x$  producida en el punto de la superficie donde se ha adherido la galga.

Los instrumentos que miden la variación de resistencia eléctrica de la galga están basados en los fundamentos del *Puente de Wheatstone*. Sean  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$  las resistencias situadas en las ramas del puente (ver figura 15.3);  $V_{AC}$  la diferencia de potencial entre los puntos  $A$  y  $C$  del puente e  $I_1$  y  $I_2$  las intensidades de corriente de las ramas superior e inferior del puente, respectivamente.



**Figura 15.3** Puente de Wheatstone.

Como

$$V_{AC} = I_1(R_1 + R_2) = I_2(R_3 + R_4) \quad (15.21)$$

cuando es nula la lectura del galvanómetro de la figura 15.3, los puntos  $B$  y  $D$  estarán al mismo potencial, es decir cuando se cumple que

$$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4 \quad (15.22)$$

Si se produce un incremento  $\Delta R_i$  en el valor de la resistencia  $i$ -ésima, las tensiones entre distintos puntos del puente son

$$V_{AC} = E \quad (15.23)$$

$$V_{AB} = I_1(R_1 + \Delta R_1) = \frac{E}{(R_1 + \Delta R_1) + (R_2 + \Delta R_2)}(R_1 + \Delta R_1) \quad (15.24)$$

$$V_{AD} = I_2 (R_4 + \Delta R_4) = \frac{E}{(R_4 + \Delta R_4) + (R_3 + \Delta R_3)} (R_4 + \Delta R_4) \quad (15.25)$$

$$V = V_{DB} = V_{AB} - V_{AD} = E \left[ \frac{R_1 + \Delta R_1}{(R_1 + \Delta R_1) + (R_2 + \Delta R_2)} - \frac{R_4 + \Delta R_4}{(R_4 + \Delta R_4) + (R_3 + \Delta R_3)} \right] \quad (15.26)$$

Teniendo en cuenta (15.22) y despreciando  $\Delta R_i \Delta R_j$ , en el numerador, y  $\Delta R_i \Delta R_j$  y  $R_i \Delta R_j$ , en el denominador, se obtiene

$$V \approx \frac{E (R_1 \Delta R_3 + R_3 \Delta R_1 - R_4 \Delta R_2 - R_2 \Delta R_4)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (15.27)$$

Hay que hacer notar que la expresión (15.27) es una linealización de la expresión (15.26), por lo que será válida para valores pequeños de  $\Delta R$ , circunstancia que ocurre en la mayoría de las medidas extensométricas.

Si todas las resistencias del puente tienen el mismo valor  $R$ , tenemos

$$V = \frac{E (\Delta R_1 - \Delta R_2 + \Delta R_3 - \Delta R_4)}{4R} \quad (15.28)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (15.20) y (15.28) se obtiene

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = \frac{4V}{EK} \quad (15.29)$$

Por ejemplo, si tenemos un montaje en 1/4 del Puente de Wheatstone, entonces  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ , y obtenemos finalmente

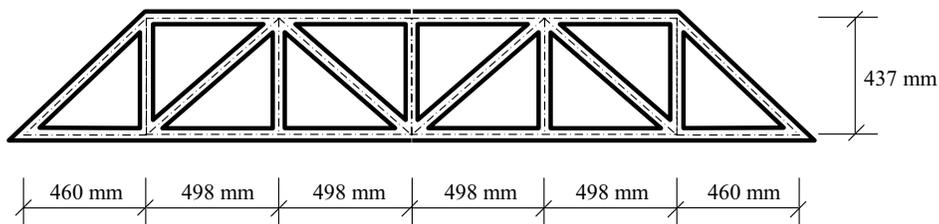
$$\varepsilon_x = \frac{V}{E} \frac{4}{K} \quad (15.30)$$

Esta expresión relaciona la deformación  $\varepsilon_x$  que se ha producido en la superficie del cuerpo donde se ha adherido la galga con factor  $K$ , con la lectura  $V$  del galvanómetro situado en un Puente de Wheatstone con excitación  $E$ .

## 2.4 Modelo de análisis

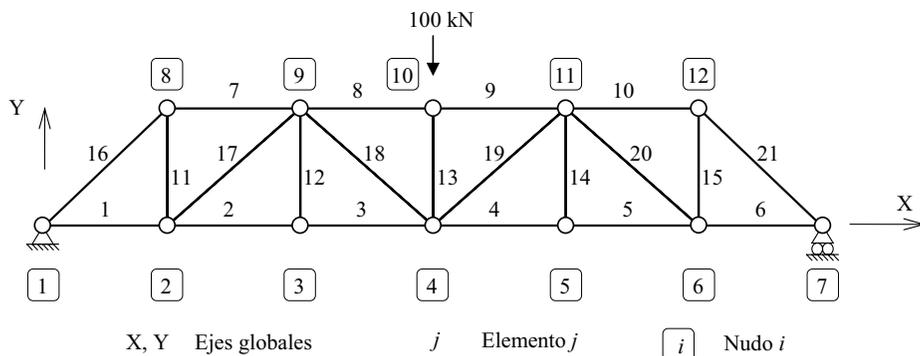
La estructura objeto de estudio, cuya geometría se define en la figura 15.4, tiene, además, las siguientes características:

- Material: acero S275 con un módulo de elasticidad longitudinal de 210 GPa.
- Propiedades de la sección ( $\#$  70.5):  $A = 12,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;  $I = 82 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ ;  $W = 23,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ .



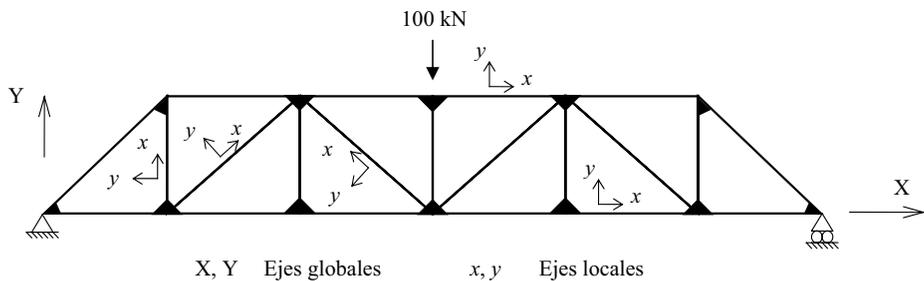
**Figura 15.4** Estructura metálica: geometría.

Para analizar numéricamente la estructura con el programa DISSENY/2006 podemos considerar dos modelos: estructura de nudos articulados y estructura de nudos rígidos. El primer modelo (nudos articulados) se define en la figura 15.5.



**Figura 15.5** Estructura metálica: modelo de nudos articulados.

El segundo modelo (nudos rígidos) se define en la figura 15.6 (con la misma numeración de nudos y elementos).



**Figura 15.6** Estructura metálica: modelo de nudos rígidos.

### 3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

#### 3.1 Equipos, hardware y software necesarios para la realización de la práctica

Marco de ensayos de 200 kN de capacidad (figura 15.1)

Cadena de medida

Galgas:

- Resistencia de la galga:  $R = 350 \Omega$
- Factor de galga:  $K = 2,07$

Acondicionador de señal SPIDER8:

- Puente de Wheatstone: 1/2 (1 resistencia activa -galga- y 1 resistencia pasiva en conector)
- Voltaje de excitación del puente de Wheatstone:  $E = 10V$

Hardware:

- ordenador PC Pentium III o superior.

Software:

- sistema operativo Windows 2000/Me/XP;
- programa DISSENY/2006, versión académica, y
- programa de control y gestión WINTEST.

#### 3.2 Procedimiento para modelar y analizar la estructura

Se propone el siguiente plan de trabajo:

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	NOTAS Y CUESTIONES
1	Creación de dos ficheros de datos para DISSENY/2006 con el modelo de la estructura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modelar las estructuras de la figuras 15.5 y 15.6 incluyendo en los ficheros de datos para DISSENY/2006:               <ul style="list-style-type: none"> <li>* coordenadas de los nudos,</li> <li>* materiales de los elementos,</li> <li>* propiedades de la sección de los elementos,</li> <li>* información sobre los elementos,</li> <li>* restricciones en los apoyos y</li> <li>* cargas.</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se crearán dos ficheros de datos: uno considerando nudos articulados (modelo de la figura 15.5) y otro considerando nudos rígidos (modelo de la figura 15.6).</li> <li>• Se tendrá en cuenta una carga de 100 kN aplicada en el centro de la estructura.</li> <li>• Se considerará la estructura apoyada en los extremos.</li> </ul>
2	Analizar la estructura con DISSENY/2006.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizar los dos ficheros de datos creados para analizar la estructura cargando en DISSENY/2006 el fichero: <code>&lt;fich.adf&gt;</code> siendo <code>fich.adf</code> el nombre del fichero de datos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se analizarán los dos modelos creados en la tarea anterior.</li> </ul>
3	Obtención de diagramas de esfuerzos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recopilación de valores de esfuerzos en los extremos de los elementos incluidos en los ficheros de resultados del análisis con DISSENY/2006.</li> <li>• Obtención de diagramas de esfuerzos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sólo se obtendrán los diagramas de esfuerzos axiales y de momentos flectores en los elementos donde se hayan colocado galgas extensométricas.</li> </ul>

Nº	TAREAS	OPERACIONES PARCIALES	NOTAS Y CUESTIONES
4	Medida experimental.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Obtención de las deformaciones y tensiones en los puntos donde estén situadas las galgas extensométricas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se realizarán al menos tres medidas, utilizando los valores promedio obtenidos ajustados a una carga total de 100 kN en el centro de la estructura.</li> </ul>
5	Comparación de resultados.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Obtención de los esfuerzos axiles y momentos flectores en las secciones donde estén situadas las galgas extensométricas.</li> <li>Obtención de los diagramas de esfuerzos axiles y momentos flectores en las piezas donde estén situadas las galgas extensométricas.</li> <li>Comparación de los resultados obtenidos experimentalmente con los obtenidos analizando los dos modelos de la estructura.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se compararán, en los extremos de los elementos, las tensiones normales producidas por la presencia de esfuerzos axiles con las tensiones normales producidas por la presencia de momentos flectores (tensiones secundarias), según la expresión siguiente</li> </ul> $\frac{\sigma^M}{\sigma^N} 100 = \frac{\left(\frac{M}{W}\right)}{\left(\frac{N}{A}\right)} 100$

### 3.3 Memoria de la práctica

Se realizará de acuerdo con las directrices generales y deberá incluir, como mínimo:

- 1 Los listados de los ficheros de datos y de resultados para el programa DISSENY/2006, y
- 2 los gráficos, tablas, figuras, etc., necesarios para explicar lo realizado en los puntos de la tabla del apartado 3.2.

## 4 ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Como actividades de aplicación se proponen las siguientes:

- 1 Analizar numéricamente el efecto, en los elementos de la estructura, de diferentes modelos de apoyo de la estructura sobre el marco de ensayos.
- 2 Analizar numéricamente el efecto, en los elementos de la estructura, de las hipótesis de carga puntual-carga repartida en el centro de la estructura.
- 3 Analizar numéricamente el efecto, en los elementos de la estructura, de la presencia de excentricidades en los nudos debidas a la no concurrencia de los ejes longitudinales de las piezas.

## 5 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Argüelles Álvarez, R., Argüelles Bustillo, R., Arriaga, F. y Atienza, J.R. *Estructuras de Acero. Cálculo: Norma Básica y Eurocódigo* (2 tomos). Ed. Bellisco, Madrid, 1999.
- 2 Avril, J. *Encyclopedie d'analyse des contraintes*. Micromesures, 1984.

- 3 Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.
- 4 Martí, P. DISSENY 2006. *Análisis de Estructuras por Elementos Finitos. Manual del Usuario*. Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, 2006.
- 5 NBE EA-95 *Estructuras de acero en edificación*. Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente, Madrid, 1996.

## 6 PREGUNTAS DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

### 6.1 Cuestiones

- 1 ¿Cuál es la influencia de la rigidez real de las uniones sobre los esfuerzos en los extremos de las piezas analizadas?
- 2 ¿Pueden ser los esfuerzos reales en los extremos de alguna pieza mayores que los obtenidos del análisis del modelo de nudos rígidos?
- 3 ¿Cómo se puede mejorar el modelo de análisis incluyendo rigideces de los nudos? ¿Qué supondría/n esta/s mejora/s?
- 4 ¿Cómo deberían dimensionarse los nudos, de forma sencilla, para conseguir un comportamiento real de nudo rígido? ¿Y de nudo articulado?
- 5 Si la rigidez axial en las piezas aumentara ¿se reducirían las tensiones secundarias? ¿En qué medida?

## 7 ENLACES DE INTERÉS

- 1 [www.civileng.com/estruc.htm](http://www.civileng.com/estruc.htm)
- 2 [www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html](http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/web-AETGP.html)
- 3 [www.hbm.com](http://www.hbm.com)
- 4 [www.vishay.com/test-measurements](http://www.vishay.com/test-measurements)
- 5 [www.ibertest.com/es\\_principal.htm](http://www.ibertest.com/es_principal.htm)

## Anexo I

# EL MÉTODO DE LAS RIGIDECES

---

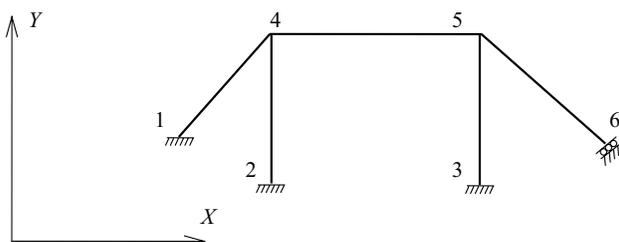
### I.1 SISTEMAS DE COORDENADAS

La formalización que suponen los métodos matriciales lleva consigo el uso de diferentes sistemas de coordenadas. En el caso más general, estos sistemas de coordenadas son: Sistemas de Referencia, Sistema Global, Sistemas Locales de los elementos y Sistemas Nodales.

#### I.1.1 Sistemas de referencia

Son aquellos sistemas que se utilizan para la definición geométrica de la estructura. Estos sistemas de coordenadas pueden ser: cartesianos, polares, esféricos, cilíndricos, etc.

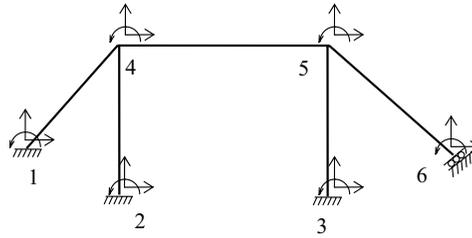
En los casos más sencillos se suele utilizar un único sistema de referencia cartesiano (Fig. I.1).



**Figura I.1** Sistema de referencia cartesiano.

#### I.1.2 Sistema global

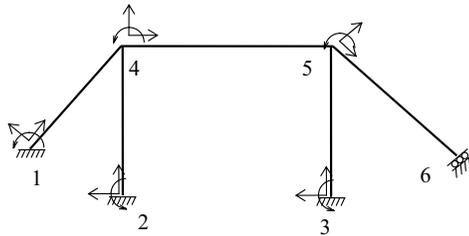
Puesto que en el proceso de discretización de la estructura se supone que está formada por un conjunto de nodos y elementos, y también que los grados de libertad de la estructura están asociados a los nodos de la misma, es preciso definir un sistema (en general paralelo al de referencia) que permita definir, de forma única para toda la estructura, los desplazamientos y fuerzas en los nodos. Así, para el caso de la estructura plana de la Fig. I.2, a cada nodo va asociado un vector de desplazamientos y fuerzas.



**Figura I.2** Sistema global.

### I.1.3 Sistemas locales de los elementos

El comportamiento de la estructura se va a obtener a partir de las relaciones fuerza-desplazamiento de todos los elementos. Por ello va a ser de gran utilidad disponer de un sistema de coordenadas que permita definir estas relaciones de forma única, independientemente de la orientación del elemento en la estructura. En la Fig. I.3 se muestran los sistemas de coordenadas locales de los elementos de una estructura plana.

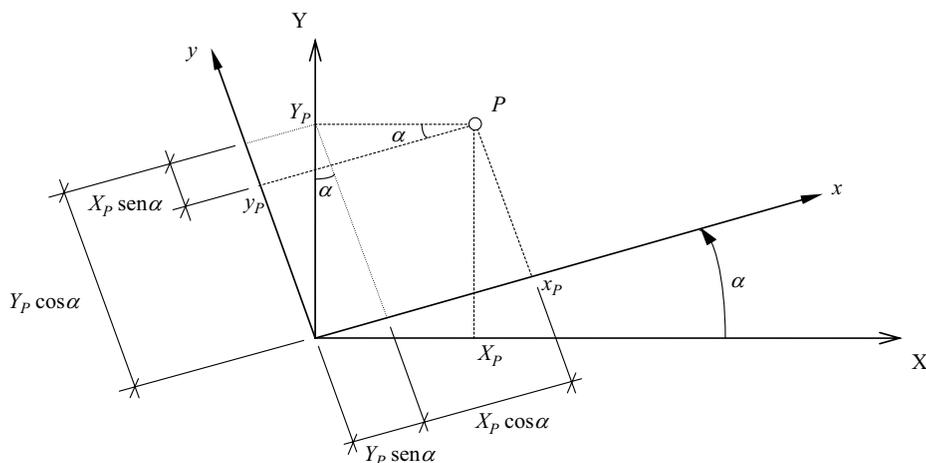


**Figura I.3** Sistemas de coordenadas locales.

## I.2 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

### I.2.1 Rotación de vectores

En la Fig. I.4 se muestran dos sistemas de coordenadas ortogonales  $X-Y$  y  $x-y$ . Sea el punto  $P$  de la Fig. I.4, cuyas coordenadas en el sistema  $X-Y$  son  $X_P$  e  $Y_P$ .



**Figura I.4** Sistemas de coordenadas  $X$ - $Y$  y  $x$ - $y$ .

Las coordenadas del punto  $P$  en el sistema  $x$ - $y$  son

$$x_p = X_p \cos \alpha + Y_p \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{I.1a})$$

$$y_p = -X_p \operatorname{sen} \alpha + Y_p \cos \alpha \quad (\text{I.1b})$$

que pueden ponerse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \end{bmatrix} \quad (\text{I.2})$$

o, en forma más compacta

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \end{bmatrix} \quad (\text{I.3})$$

siendo  $\mathbf{R}$  la matriz de transformación del sistema  $X$ - $Y$  al sistema  $x$ - $y$ .

A partir de la ecuación (I.3) se puede obtener la matriz de transformación del sistema  $x$ - $y$  al sistema  $X$ - $Y$ .

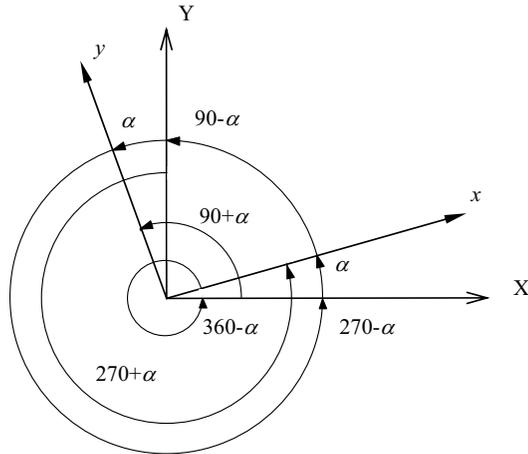
$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \quad (\text{I.4})$$

siendo  $\mathbf{R}^{-1}$  la matriz inversa de  $\mathbf{R}$ .

Cuando los dos sistemas de coordenadas son ortogonales y dextrógiros, como ocurre en este caso, la matriz inversa de  $\mathbf{R}$  coincide con la traspuesta. En efecto,

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{\operatorname{Adj} \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}}{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \quad (\text{I.5})$$

Como puede verse, las filas de la matriz de transformación son los cosenos directores de los ejes del nuevo sistema respecto del antiguo (cosenos de los ángulos entre el eje nuevo y cada uno de los antiguos, medidos en sentido antihorario del antiguo al nuevo sistema).



**Figura I.5** Ángulos entre sistemas de coordenadas.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos (270+\alpha) \\ \cos (90+\alpha) & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (\text{I.6})$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos (360-\alpha) & \cos (270-\alpha) \\ \cos (90-\alpha) & \cos (360-\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{I.7})$$

Para dos sistemas de coordenadas de 3 ejes, con los ejes  $x$ - $y$  y  $X$ - $Y$  en el mismo plano

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (\text{I.8})$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{I.9})$$

Para dos sistemas de coordenadas en general

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (\text{I.10})$$

siendo  $\cos(x, Y)$  el coseno del ángulo entre el eje  $Y$  y el  $x$ , medido en sentido antihorario desde el eje  $Y$  hasta el eje  $x$ .

### I.2.2 Rotación de matrices

Sea una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  en un sistema de coordenadas  $(X,Y,Z)$ . Si en este sistema se cumple la ecuación

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{V} \quad (\text{I.11})$$

esta ecuación también debe cumplirse en el sistema  $(x,y,z)$ , en la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}\mathbf{v} \quad (\text{I.12})$$

Si  $\mathbf{R}$  es la matriz que pasa del sistema  $(X,Y,Z)$  al sistema  $(x,y,z)$  se tiene

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad \mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{V} \quad (\text{I.13})$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación (I.12) se tiene

$$\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{a}\mathbf{R}\mathbf{V} \quad (\text{I.14})$$

Sustituyendo el valor de  $\mathbf{U}$  de la ecuación (I.11) en la ecuación (I.14) se tiene

$$\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{a}\mathbf{R}\mathbf{V} \quad (\text{I.15})$$

Que puede ponerse en la forma

$$(\mathbf{R}\mathbf{A} - \mathbf{a}\mathbf{R})\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (\text{I.16})$$

y, dado que  $\mathbf{V}$  es un vector arbitrario, se cumple

$$\mathbf{R}\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{R} \quad (\text{I.17})$$

Postmultiplicando ambos términos por  $\mathbf{R}^{-1}$  se obtiene

$$\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{a}\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{a}\mathbf{I} = \mathbf{a} \quad (\text{I.18})$$

Esta ecuación es válida para todos los sistemas de coordenadas (lineales, curvilíneos, cartesianos, etc.). Si los dos sistemas son ortogonales y dextrógiros se cumple que  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ , por lo tanto

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T \quad (\text{I.19})$$

Si se tiene  $\mathbf{a}$  y se quiere obtener  $\mathbf{A}$ , basta con premultiplicar la Ec. (I.17) por  $\mathbf{R}^{-1}$ , con lo que queda

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{R} \quad (\text{I.20})$$

y, si los dos sistemas son ortogonales y dextrógiros se tiene

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T\mathbf{a}\mathbf{R} \quad (\text{I.21})$$

## I.3 FORMACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

Para el planteamiento del sistema de ecuaciones de equilibrio de la estructura, antes de aplicar las condiciones de equilibrio y compatibilidad en los nudos, hay que conocer las ecuaciones de comportamiento de los elementos de la estructura en su sistema de coordenadas local. Para un elemento conectado a los nudos  $i$  y  $j$ , estas ecuaciones son

$$\mathbf{p}_{ij}^e = \mathbf{k}_{ij}^e \mathbf{d}_{ij}^e \quad (\text{I.22})$$

o, en forma más desarrollada

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{ij} \\ \mathbf{p}_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii}^j & \mathbf{k}_{ij} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{ij} \\ \mathbf{d}_{ji} \end{bmatrix} \quad (I.23)$$

siendo:  $\mathbf{p}_{ij}^e$  el vector de esfuerzos en los extremos del elemento;  $\mathbf{k}_{ij}^e$  la matriz de rigidez del elemento;  $\mathbf{d}_{ij}^e$  el vector de desplazamientos del elemento;  $\mathbf{p}_{ij}$  ( $\mathbf{p}_{ji}$ ) el vector de esfuerzos en el extremo  $i$  ( $j$ );  $\mathbf{d}_{ij}$  ( $\mathbf{d}_{ji}$ ) el vector de desplazamientos en el extremo  $i$  ( $j$ );  $\mathbf{k}_{ii}^j$  ( $\mathbf{k}_{jj}^i$ ) la submatriz de rigidez directa en el extremo  $i$  ( $j$ ), y  $\mathbf{k}_{ij}$  ( $\mathbf{k}_{ji}$ ) la submatriz de rigidez cruzada en el extremo  $i$  ( $j$ ).

En el método de las rigideces hay que imponer, en primer lugar, las condiciones de compatibilidad de desplazamientos. Estas condiciones suponen que los desplazamientos en los extremos de todos los elementos que concurren a un nudo son iguales al desplazamiento de ese nudo. Si  $\mathbf{D}$  es el vector de desplazamientos de todos los nudos de la estructura (en el Sistema Global), para aplicar la ecuación de compatibilidad hay que expresar las ecuaciones de los elementos en ese mismo sistema.

Sea  $\mathbf{R}_{ij}$  la matriz de rotación que transforma un vector (con un número de elementos igual al número de grados de libertad de un nudo) en el sistema global en otro vector en el sistema local. Para los vectores de fuerzas y desplazamientos se cumple

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{R}_{ij} \mathbf{P}_{ij} \quad \mathbf{d}_{ij} = \mathbf{R}_{ij} \mathbf{D}_{ij} \quad (I.24a)$$

$$\mathbf{p}_{ji} = \mathbf{R}_{ij} \mathbf{P}_{ji} \quad \mathbf{d}_{ji} = \mathbf{R}_{ij} \mathbf{D}_{ji} \quad (I.24b)$$

siendo:  $\mathbf{P}_{ij}$  ( $\mathbf{P}_{ji}$ ) el vector de fuerzas en el extremo  $i$  ( $j$ ) del elemento en el sistema global; y  $\mathbf{D}_{ij}$  ( $\mathbf{D}_{ji}$ ) el vector de desplazamientos en el extremo  $i$  ( $j$ ) del elemento en el sistema global.

Por las propiedades de la matriz de rotación para el caso de sistemas ortogonales dextrógiros, se tiene

$$\mathbf{R}_{ij}^{-1} = \mathbf{R}_{ij}^T \quad (I.25)$$

y por lo tanto

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{p}_{ij} \quad \mathbf{D}_{ij} = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{d}_{ij} \quad (I.26a)$$

$$\mathbf{P}_{ji} = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{p}_{ji} \quad \mathbf{D}_{ji} = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{d}_{ji} \quad (I.26b)$$

Sustituyendo las Ecs. (I.24) en la ecuación (I.23) y premultiplicando las dos ecuaciones matriciales por  $\mathbf{R}_{ij}^{-1} = \mathbf{R}_{ij}^T$  se llega a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ij} \\ \mathbf{P}_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^j & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ij} \\ \mathbf{D}_{ji} \end{bmatrix} \quad (I.27)$$

siendo

$\mathbf{K}_{ii}^j = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{k}_{ii}^j \mathbf{R}_{ij}$  la rigidez directa en el extremo  $i$ ;

$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{k}_{ij} \mathbf{R}_{ij}$  la rigidez cruzada en el extremo  $i$ ;

$\mathbf{K}_{jj}^i = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{k}_{ij}^i \mathbf{R}_{ij}$  la rigidez directa en el extremo  $j$ , y

$\mathbf{K}_{ji} = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{k}_{ji} \mathbf{R}_{ij}$  la rigidez cruzada en el extremo  $j$ .

La aplicación de las condiciones de compatibilidad en el nudo  $i$  supone

$$\mathbf{D}_{ij} = \mathbf{D}_{im} = \mathbf{D}_{in} = \dots = \mathbf{D}_i \quad (\text{I.28})$$

y la ecuación (I.27) queda en la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ij} \\ \mathbf{P}_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^j & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i \\ \mathbf{D}_j \end{bmatrix} \quad (\text{I.29})$$

Las condiciones de equilibrio en el nudo  $i$  exigen que la suma de las fuerzas en el extremo  $i$  de todos los elementos que concurren al nudo, sea igual a las fuerzas exteriores aplicadas al nudo

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{ij} + \mathbf{P}_{im} + \mathbf{P}_{in} + \dots \quad (\text{I.30})$$

Sustituyendo las ecuaciones del tipo (I.27) para cada uno de los elementos que concurren al nudo se llega a las ecuaciones de equilibrio del nudo  $i$ , puestas en función de los desplazamientos del nudo  $i$  y de los nudos a los que están conectados los elementos que concurren al nudo  $i$

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{K}_{ii}^j \mathbf{D}_i + \mathbf{K}_{ij} \mathbf{D}_j + \mathbf{K}_{ii}^m \mathbf{D}_i + \mathbf{K}_{im} \mathbf{D}_m + \mathbf{K}_{ii}^n \mathbf{D}_i + \mathbf{K}_{in} \mathbf{D}_n + \dots \quad (\text{I.31})$$

Esta ecuación puede ponerse en la forma

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{K}_{ii} \mathbf{D}_i + \mathbf{K}_{ij} \mathbf{D}_j + \mathbf{K}_{im} \mathbf{D}_m + \mathbf{K}_{in} \mathbf{D}_n + \dots \quad (\text{I.32})$$

siendo

$$\mathbf{K}_{ii} = \mathbf{K}_{ii}^j + \mathbf{K}_{ii}^m + \mathbf{K}_{ii}^n + \dots \quad (\text{I.33})$$

Planteando la ecuación (I.32) para el resto de los nudos de la estructura, y agrupando los términos en forma matricial, se llega al sistema de ecuaciones de equilibrio

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_j \\ \mathbf{P}_m \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{P}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{im} & \dots & \mathbf{K}_{in} \\ & \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{jm} & \dots & \mathbf{K}_{jn} \\ & & \mathbf{K}_{mm} & \dots & \mathbf{K}_{mn} \\ & & & \dots & \cdot \\ & & & \dots & \cdot \\ \text{SIM.} & & & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \mathbf{D}_i \\ \mathbf{D}_j \\ \mathbf{D}_m \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{D}_n \end{bmatrix} \quad (\text{I.34})$$

En el primer miembro de esta ecuación están las *fuerzas exteriores conocidas* (fuerzas aplicadas en los grados de libertad de la estructura) y las *fuerzas exteriores desconocidas* (reacciones en los grados de libertad restringidos). De la misma forma, el vector del segundo miembro contiene *desplazamientos desconocidos* (grados de libertad de la estructura) y *desplazamientos conocidos* (grados de libertad restringidos de la estructura). La matriz de la ecuación (I.34) es la *matriz de rigidez completa de la estructura*.

Los pasos a seguir para ensamblar la matriz de rigidez completa de la estructura son los siguientes:

- 1 Obtener las matrices de rigidez de los elementos en los sistemas de coordenadas locales.
- 2 Transformar las matrices de rigidez de los elementos al sistema de coordenadas global de la estructura.
- 3 Imponer las condiciones de compatibilidad en cada uno de los nudos.
- 4 Plantear las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en cada nudo.
- 5 Ordenar las ecuaciones de equilibrio en forma matricial.

Este proceso puede acelerarse teniendo en cuenta la estructura particular del problema. Por ejemplo, debido a que la matriz de rigidez es una matriz simétrica, basta con obtener la zona triangular superior o la zona triangular inferior. El proceso para obtener la zona triangular superior es la siguiente:

- 1 Calcular la matriz de rigidez cruzada  $\mathbf{K}_{ij}$ , para  $i < j$ , y situarla en la posición correspondiente (fila  $i$  columna  $j$ ).
- 2 Calcular la matriz de rigidez directa  $\mathbf{K}_{ii}^j$  y sumarla a la existente en la posición fila  $i$ -columna  $i$ , de la diagonal principal.
- 3 Calcular la matriz de rigidez directa  $\mathbf{K}_{jj}^i$  y sumarla a la existente en la posición fila  $j$ -columna  $j$ , de la diagonal principal.
- 4 Realizar los tres pasos anteriores para cada uno de los elementos.

Este procedimiento se ilustra en la Fig. I.6. Como puede comprobarse, si hay un elemento conectando los nudos  $i$  y  $m$  de la estructura, este elemento produce las submatrices de las posiciones fila  $i$ -columna  $m$ , y fila  $m$ -columna  $i$ , y, además, contribuye a las matrices que aparecen en las posiciones  $i$  y  $m$  de la diagonal principal.

$$\begin{array}{c}
 \cdot \\
 i \\
 j \\
 m \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 n
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
 \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{im} & \cdots & \mathbf{K}_{in} \\
 & \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{jm} & \cdots & \mathbf{K}_{jn} \\
 & & \mathbf{K}_{mm} & \cdots & \mathbf{K}_{mn} \\
 & & & \cdots & \cdot \\
 & & & \cdots & \cdot \\
 \text{SIM.} & & & \cdots & \mathbf{K}_{nn}
 \end{bmatrix}$$

**Figura I.6** Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura

#### I.4 CONDICIONES DE CONTORNO. CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS

La matriz de la Fig. I.6 es singular y no puede invertirse, debido a que la estructura sin las condiciones de apoyo es estáticamente inestable, debido a lo cual hay infinitas soluciones al sistema anterior. Aplicando las condiciones de apoyo se llega a una matriz de rigidez no singular.

La ecuación (I.34) se puede poner en la forma siguiente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_L \\ \mathbf{P}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{LL} & \mathbf{K}_{LR} \\ \mathbf{K}_{RL} & \mathbf{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_L \\ \mathbf{D}_R \end{bmatrix} \quad (\text{I.35})$$

siendo:  $\mathbf{P}_L$  las fuerzas exteriores aplicadas en los grados de libertad;  $\mathbf{P}_R$  las reacciones en los grados de libertad restringidos (de valor conocido);  $\mathbf{D}_L$  los desplazamientos libres de la estructura, y  $\mathbf{D}_R$  los desplazamientos restringidos.

Operando en la primera ecuación (I.35) se tiene

$$\mathbf{P}_L = \mathbf{K}_{LL}\mathbf{D}_L + \mathbf{K}_{LR}\mathbf{D}_R \quad (\text{I.36})$$

cuya solución es

$$\mathbf{D}_L = \mathbf{K}_{LL}^{-1}(\mathbf{P}_L - \mathbf{K}_{LR}\mathbf{D}_R) \quad (\text{I.37a})$$

En el caso particular de que todos los grados de libertad restringidos tengan valor cero, la ecuación anterior se reduce a la siguiente

$$\mathbf{D}_L = \mathbf{K}_{LL}^{-1}\mathbf{P}_L \quad (\text{I.37b})$$

Como puede observarse, esta ecuación es la que queda al resolver la ecuación (I.35) después de eliminar las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad impedidos (de valor cero).

## 1.5 CÁLCULO DE ESFUERZOS

Los esfuerzos en los extremos de un elemento se pueden obtener mediante dos procedimientos distintos. El primero consiste en obtener los desplazamientos en el sistema de coordenadas local del elemento

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{R}_{ij}\mathbf{D}_i \quad (\text{I.38a})$$

$$\mathbf{d}_{ji} = \mathbf{R}_{ji}\mathbf{D}_j \quad (\text{I.38b})$$

y emplear luego las ecuaciones de comportamiento en el sistema de coordenadas local

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{k}_{ii}^j\mathbf{d}_{ij} + \mathbf{k}_{ij}^j\mathbf{d}_{ji} \quad (\text{I.39a})$$

$$\mathbf{p}_{ji} = \mathbf{k}_{ji}^i\mathbf{d}_{ij} + \mathbf{k}_{jj}^i\mathbf{d}_{ji} \quad (\text{I.39b})$$

El segundo procedimiento consiste en obtener, en primer lugar, las fuerzas sobre los elementos en el sistema de coordenadas global

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{K}_{ii}^j\mathbf{D}_i + \mathbf{K}_{ij}^j\mathbf{D}_j \quad (\text{I.40a})$$

$$\mathbf{P}_{ji} = \mathbf{K}_{ji}^i\mathbf{D}_i + \mathbf{K}_{jj}^i\mathbf{D}_j \quad (\text{I.40b})$$

y obtener los esfuerzos al transformar estas fuerzas al sistema de coordenadas local del elemento.

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{R}_{ij}\mathbf{P}_{ij} \quad (\text{I.41a})$$

$$\mathbf{p}_{ji} = \mathbf{R}_{ji}\mathbf{P}_{ji} \quad (\text{I.41b})$$

El empleo de un procedimiento u otro depende de los resultados intermedios que se estén guardando en la memoria principal del ordenador, o de los que se guarden en la memoria auxiliar cuando no se realiza todo el programa en memoria principal.

El segundo procedimiento resulta especialmente indicado cuando, además de los esfuerzos se quieren obtener las fuerzas exteriores que actúan sobre los nudos.

Si se va a emplear el segundo procedimiento, teniendo en cuenta que se tienen que realizar las siguientes operaciones

$$\mathbf{K}_{ii}^j = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{k}_{ii}^j \mathbf{R}_{ij} ; \quad \mathbf{K}_{ij} = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{k}_{ij} \mathbf{R}_{ij} \quad (I.42a)$$

$$\mathbf{K}_{ji} = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{k}_{ji} \mathbf{R}_{ij} ; \quad \mathbf{K}_{jj}^i = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{k}_{jj}^i \mathbf{R}_{ij} \quad (I.42b)$$

se pueden realizar, en primer lugar, las postmultiplicaciones, y guardar las matrices resultantes. De este modo los esfuerzos se obtienen en la forma

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{k}_{ii}^j \mathbf{R}_{ij} \mathbf{D}_i + \mathbf{k}_{ij} \mathbf{R}_{ij} \mathbf{D}_j \quad (I.43a)$$

$$\mathbf{p}_{ji} = \mathbf{k}_{ji} \mathbf{R}_{ij} \mathbf{D}_i + \mathbf{k}_{jj}^i \mathbf{R}_{ij} \mathbf{D}_j \quad (I.43b)$$

## I.6 CÁLCULO DE FUERZAS EN LOS NUDOS

Existen varios procedimientos para obtener las fuerzas aplicadas sobre los nudos, pudiendo emplearse uno u otro en función de la organización de los cálculos y del flujo de datos del programa.

En el caso, poco frecuente, de que se forme y guarde toda la matriz de rigidez de la estructura, las reacciones en los grados de libertad restringidos se pueden obtener a partir de la segunda ecuación de (I.35)

$$\mathbf{P}_R = \mathbf{K}_{RL} \mathbf{D}_L + \mathbf{K}_{RR} \mathbf{D}_R \quad (I.44)$$

En el caso de que se hayan obtenido los esfuerzos a partir de los desplazamientos en el sistema local, hay que obtener primeramente las fuerzas en el sistema global

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{p}_{ij} \quad (I.45a)$$

$$\mathbf{P}_{ji} = \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{p}_{ji} \quad (I.45b)$$

y, a continuación, las fuerzas exteriores en un nudo  $i$  se obtienen mediante la expresión

$$\mathbf{P}_i = \sum \mathbf{P}_{ij} \quad (I.46)$$

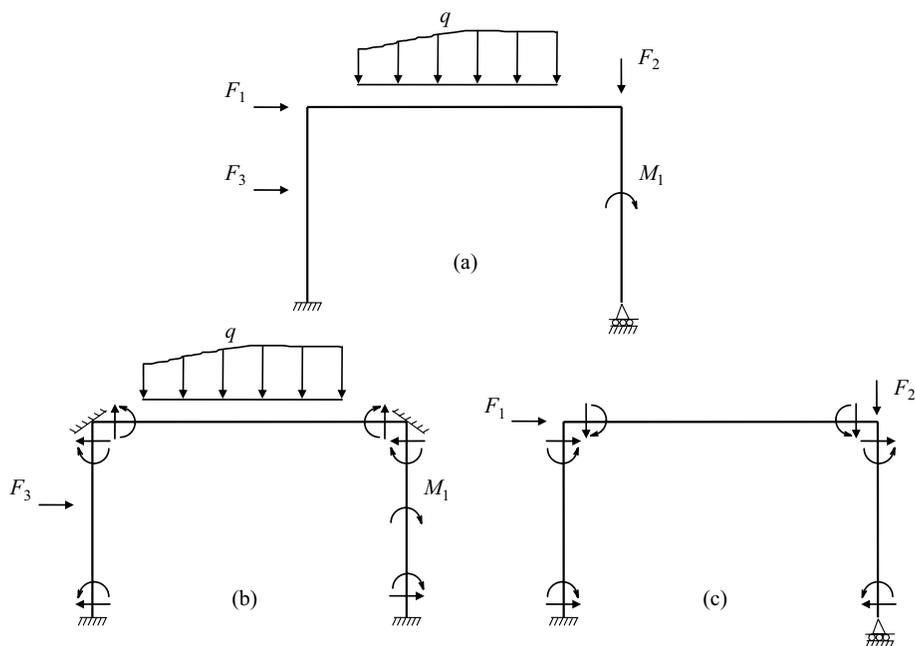
extendiéndose el sumatorio a las fuerzas en el extremo  $i$  de todos los elementos que concurren al nudo.

En el caso de que se hayan obtenido los esfuerzos a partir de las fuerzas en el sistema global, basta con realizar el sumatorio anterior.

Cualquiera de los dos procedimientos anteriores proporciona las fuerzas en los nudos restringidos y en los nudos libres. Las primeras corresponden a las reacciones, mientras que las segundas deben ser iguales a las fuerzas exteriores aplicadas sobre los nudos de la estructura. Esta última condición se puede utilizar para comprobar el grado de cumplimiento de las condiciones de equilibrio, lo que proporciona una buena estimación de los errores numéricos (redondeos y truncamientos) que se han producido durante el cálculo.

## I.7 CARGAS APLICADAS EN ELEMENTOS

Las cargas aplicadas sobre los elementos pueden ser puntuales o distribuidas. En el caso de cargas puntuales es posible utilizar la formulación normal, definiendo un nudo en los puntos de aplicación de las cargas. El inconveniente de este procedimiento es que supone mayor trabajo de entrada de datos y de tiempo de resolución, al aumentar el tamaño de la matriz de rigidez de la estructura. Así mismo, con este procedimiento se reduce el tamaño máximo del problema resoluble con un cierto programa.



**Figura I.7** (a) Estructura a analizar; (b) fuerzas de empotramiento perfecto; (c) fuerzas exteriores y equivalentes.

Sea la estructura de la Fig. I.7a. Para su resolución se puede aplicar el Principio de Superposición, descomponiendo el problema en las siguientes etapas:

- 1 Se restringen todos los grados de libertad que no estén ya impedidos por las condiciones de contorno de la estructura.
- 2 Se aplican las cargas exteriores en los elementos y en los nudos. Cada uno de los elementos se comporta como empotrado-empotrado. Las fuerzas de empotramiento perfecto (Fig. I.7b) serán las fuerzas que se producen en los grados de libertad restringidos.
- 3 El estado de equilibrio anterior se mantiene si se sustituyen las restricciones adicionales por las fuerzas de empotramiento perfecto correspondientes.
- 4 Puesto que han aparecido unas fuerzas que no existían en la estructura inicial, será necesario calcular una estructura a la que se le apliquen las fuerzas de empotramiento perfecto cambiadas de signo.

De esta forma, el análisis de la estructura inicial se sustituye por el análisis de dos estructuras, una en la que solo aparecen esfuerzos debidos a las fuerzas de empotramiento perfecto, y otra en la que aparecen desplazamientos y esfuerzos producidos por estos desplazamientos.

Con el fin de sistematizar el análisis, se puede seguir el siguiente proceso operativo:

**1 Expresar la carga exterior aplicada sobre cada elemento en su sistema de coordenadas local.**

Sea  $\mathbf{F}$  el vector columna de fuerzas exteriores (generalizadas) sobre el elemento  $i-j$ , expresado en el sistema de coordenadas global. Si  $\mathbf{R}_{ij}$  es la matriz de rotación del sistema global al local, las fuerzas sobre el elemento, en su sistema de coordenadas, serán

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}_{ij} \mathbf{F} \quad (I.47)$$

**2 Calcular las fuerzas de empotramiento perfecto.**

Las fuerzas de empotramiento perfecto, en el extremo  $i$  del elemento  $i-j$ , pueden ponerse en la forma

$$\mathbf{p}_{ij}^e = \mathbf{C}_i \mathbf{f} = \mathbf{C}_i \mathbf{R}_{ij} \mathbf{F} \quad (I.48)$$

siendo:  $\mathbf{C}_i$  una matriz de coeficientes. Esta matriz relaciona las fuerzas exteriores aplicadas en el elemento (en su sistema de coordenadas), con las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto en el extremo del mismo.

En el caso más general de una estructura espacial de nudos rígidos, la ecuación I.48 tiene la forma

$$\begin{bmatrix} P_x^e \\ P_y^e \\ P_z^e \\ m_x^e \\ m_y^e \\ m_z^e \end{bmatrix}_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (I.49)$$

En el caso de una estructura plana de nudos rígidos, la ecuación I.49 se reduce a la forma

$$\begin{bmatrix} P_x^e \\ P_y^e \\ m_z^e \end{bmatrix}_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (I.50)$$

Si hay más de un tipo de carga aplicada sobre el elemento se tiene

$$\mathbf{p}_{ij}^e = \sum_r^r \mathbf{C}_{rj} \mathbf{R}_{ij} \mathbf{F}_r \quad (I.51)$$

**3 Sustituir las restricciones aplicadas a los nudos por las fuerzas equivalentes (fuerzas y momentos de empotramiento perfecto cambiadas de signo).**

Estas fuerzas equivalentes deben expresarse en el sistema global de la estructura.

$$\mathbf{P}_{ij}^e = -\mathbf{R}_{ij}^T \sum_r \mathbf{C}_{ri} \mathbf{R}_{ij} \mathbf{F}_r \quad (I.52)$$

En el caso de que haya más de un elemento que concurra al nudo  $i$ , se tiene

$$\mathbf{P}_i^e = \sum_j \mathbf{P}_{ij}^e = -\sum_j \mathbf{R}_{ij}^T \sum_r \mathbf{C}_{ri} \mathbf{R}_{ij} \mathbf{F}_r \quad (I.53)$$

La fuerza total aplicada en el nudo  $i$  será la suma de estas fuerzas equivalentes y de las fuerzas exteriores directamente aplicadas en el nudo ( $\mathbf{P}^{ext}$ ).

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^e + \mathbf{P}_i^{ext} \quad (I.54)$$

Realizando las mismas operaciones para cada uno de los nudos de la estructura, se obtiene el vector de fuerzas generalizadas de la estructura. Una vez obtenido este vector, los desplazamientos se obtienen por el procedimiento habitual, resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{D} \quad (I.55)$$

Los desplazamientos obtenidos al resolver este sistema de ecuaciones son los desplazamientos finales de la estructura, ya que la estructura restringida no tiene desplazamientos en los nudos.

Los esfuerzos en los elementos, son los resultantes de superponer los dos estados. A partir de los desplazamientos obtenidos, los esfuerzos en los extremos de los elementos son

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{p}_{ij}^e + \mathbf{k}_{ij}^i \mathbf{R}_{ij} \mathbf{D}_i + \mathbf{k}_{ij} \mathbf{R}_{ij} \mathbf{D}_j \quad (I.56a)$$

$$\mathbf{p}_{ji} = \mathbf{p}_{ji}^e + \mathbf{k}_{ji} \mathbf{R}_{ij} \mathbf{D}_i + \mathbf{k}_{jj}^i \mathbf{R}_{ij} \mathbf{D}_j \quad (I.56b)$$

## I.8 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Gere, J. M, y Weaver, W. *Análisis de estructuras reticulares*. Compañía Editorial Continental, S.A., México, 1972.
- 2 Kardestuncer, H. *Introducción al análisis estructural con matrices*. McGraw-Hill, México, 1975.
- 3 Livesley, R. K. *Métodos matriciales para cálculo de estructuras*. Blume, Madrid, 1970.
- 4 Martí, P. *Análisis de Estructuras. Métodos clásicos y matriciales*. Horacio Escarabajal Ed., Cartagena, 2003.
- 5 Przemieniecki, J. S. *Theory of Matrix Structural Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- 6 Saez-Benito, J. M. *Cálculo matricial de estructuras*. Fondo Editorial de Ingeniería Naval, Madrid, 1975.



## Anexo II

# **SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES**

---

### **II.1 SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES**

El Sistema Internacional de Unidades (SI) tiene varias *unidades básicas*, a partir de las cuales se derivan las demás. Las unidades básicas más importantes para el análisis de estructuras son el metro (m) para la longitud, el segundo (s) para el tiempo y el kilogramo (kg) para la masa.

Otras unidades utilizadas en el análisis de estructuras, denominadas *unidades derivadas*, se expresan en función de las unidades básicas anteriores. La unidad de fuerza es el newton, que se define como la fuerza necesaria para producir una aceleración de un metro por segundo al cuadrado a un kilogramo. La unidad de trabajo y energía es el joule, que se define como el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de una fuerza de un newton se desplaza una distancia de un metro en la dirección de la fuerza.

### **II.2 RECOMENDACIONES PARA EL USO DE UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL**

#### **II.2.1 Prefijos**

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades del Sistema Internacional se crean añadiendo prefijos a las unidades. La utilización de los prefijos evita tener que utilizar números demasiado grandes o demasiado pequeños. El valor del número que representa una cantidad se recomienda que esté comprendido entre 0,1 y 1000; para ello se utilizarán los múltiplos o submúltiplos correspondientes.

Los prefijos recomendados son los que cambian el tamaño de la cantidad por un múltiplo o submúltiplo de 3. Se recomienda que las potencias de diez se expresen en unidades  $10^{\pm 3n}$ , siendo  $n$  un número entero.

#### **II.2.2 Forma de escribir las unidades del Sistema Internacional**

Las reglas para escribir las unidades del Sistema Internacional han sido establecidas por acuerdo internacional, y se encuentran en la Norma ISO 1000: 1981. A continuación se exponen algunas de las más importantes.

**Tabla II.1** Prefijos, símbolos y valores para múltiplos y submúltiplos

Símbolo	Prefijo	Factor de multiplicación
T	tera	$10^{12}$
G	giga	$10^9$
M	mega	$10^6$
k	kilo	$10^3$
h	hecto	$10^2$
da	deca	$10^1$
d	deci	$10^{-1}$
c	centi	$10^{-2}$
m	mili	$10^{-3}$
$\mu$	micro	$10^{-6}$
n	nano	$10^{-9}$
p	pico	$10^{-12}$

- Las unidades se escriben siempre como símbolos (m) en ecuaciones y cálculos numéricos. En el texto, las unidades se escriben con su denominación completa (metros), salvo que se estén dando valores numéricos, en cuyo caso puede usarse indistintamente la forma completa o el símbolo.
- Los símbolos de las unidades se escribirán con letras minúsculas, excepto cuando se deriven de nombres propios que se escribirá la primera letra con mayúscula. Cuando se utilice la denominación completa de las unidades la primera letra será minúscula, excepto al principio de un párrafo o en textos totalmente en mayúsculas.
- Los símbolos de las unidades no deben escribirse con un punto final, pues no se trata de abreviaturas, y permanecerán invariables en plural.
- Las unidades y sus prefijos se escriben siempre con letra redonda y nunca en cursiva, aunque el texto esté en cursiva.
- La multiplicación en una unidad compuesta se indica mediante un punto elevado (kN·m).
- La división en una unidad compuesta se indica mediante una diagonal o por multiplicación utilizando un exponente negativo (m/s o  $\text{ms}^{-1}$ ). Cuando la unidad se escribe con su denominación completa la diagonal se reemplaza con “por” (metro por segundo al cuadrado).
- Siempre se pone un espacio entre un número y sus unidades (210 MPa o 210 megapascales) excepto en el símbolo grado en el que no se usa espacio entre el número y el símbolo (30°, 30°C).

### II.2.3 Unidades recomendadas

Para los cálculos en análisis de estructuras se recomiendan las siguientes unidades:

- Fuerzas, esfuerzos y cargas: kN, kN/m, kN/m<sup>2</sup>
- Densidad: kg/m<sup>3</sup>
- Peso específico: kN/m<sup>3</sup>
- Tensiones y Resistencias: N/mm<sup>2</sup> (= MN/m<sup>2</sup> o MPa)
- Momentos (flectores,...): kN·m