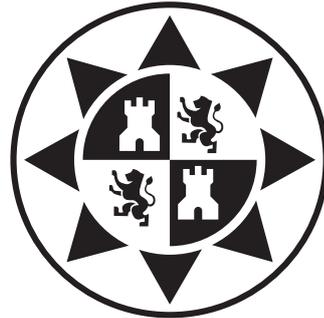


Universidad Politécnica de Cartagena

E.T.S. Ingeniería Industrial

Departamento de Ingeniería de Materiales y Fabricación



Análisis de amarres en máquinas
herramientas

MANUEL ESTREMS AMESTOY

Cartagena, 2012

0.1. Resumen

En este libro se va a presentar una metodología para el análisis de amarres en máquinas herramientas, de forma que se pueda establecer la capacidad del diseño de la sujeción para producir piezas de la precisión y calidad establecidas en las especificaciones de diseño del producto. Se presentan unas herramientas de análisis con capacidad de prever la precisión de una operación de mecanizado, para calcular las fuerzas de apriete mínimas para fijar la pieza y la fuerza de actuación sobre los mecanismos más usuales para generar esas fuerzas de apriete, se determinarán los puntos críticos por donde puede quedar la pieza dañada, y se realizará un estudio del contacto para la comprobación de daño en superficie de la pieza por parte del utillaje empleado.

Keywords: Amarres – Metrología – Mecanismos de fijación – Energía de deformación – Mecánica del contacto

Capítulo 1

Índice general

0.1. Resumen	2
1. Índice general	3
2. Introducción	5
2.1. Análisis del amarre en la Planificación de Procesos	5
2.2. Funciones del amarre	7
2.3. Importancia de un buen diseño del amarre en fabricación . . .	8
2.4. Selección de factores a analizar	8
2.5. Metodología del análisis	9
3. Estudio de la precisión de la operación de la operación	11
3.1. Posicionamiento real de las superficies de referencia	13
3.2. Posicionamiento de los puntos de cota	14
3.3. Valor de cota esperado	15
3.4. Estimación de la incertidumbre de fabricación esperada	16

3.5. Ejemplos Prácticos	17
4. Cálculo mecánico de amarres	23
4.1. Determinación de las fuerzas de apriete	24
4.2. Acción sobre mecanismos de apriete más usuales	28
4.2.1. Cálculo de aprietes con cuñas	29
4.2.2. Cálculo de aprietes con tornillos	30
4.2.3. Cálculo de aprietes con palanca de levas	31
5. Análisis de fuerzas de contacto del amarre	33
5.0.4. Planteamiento del problema	34
5.0.5. Energía de deformación en el contacto entre dos cuerpos elásticos	35
5.0.6. Método matricial solución del problema	39
5.0.7. Ejemplo de aplicación a la sujeción de un cilindro con bloques en V	42
6. Análisis de las tensiones de contacto	47
6.1. Distribución de presiones entre superficies en contacto para distintas geometrías	48
6.1.1. Contacto de apoyo plano con aristas con superficie elástica	48
6.1.2. Contacto hertziano	50
6.1.3. Distribución de presiones normales y tangenciales en contacto con deslizamiento parcial	51
6.1.4. Influencia de la rugosidad superficial en la distribución de presiones	54
6.1.5. Casos típicos de sujeción	58
6.2. Determinación del daño en la pieza	58

	5
7. Recapitulación	61
8. Bibliografía	63

Capítulo 2

Introducción

La presente exposición está enmarcada en el curso de doctorado "Planificación avanzada de procesos de fabricación" dentro del programa de doctorado de la UPCT "Tecnologías industriales".

En esta introducción se va a exponer, en primer lugar, la posición que el análisis del amarre ocupa dentro de la Planificación de Procesos. Después se destacarán las funciones más importantes del amarre en el proceso de fabricación, así como los requisitos que se les puede exigir. Se verá la repercusión que tiene un buen diseño en la fabricación de un producto. Se analizarán las causas por las cuales el amarre puede no cumplir bien su función y se escogerán los factores críticos que requieren un análisis más detenido. A partir de aquí se expondrá la metodología de análisis de amarre que nos servirá de guía a lo largo de la exposición.

2.1. Análisis del amarre en la Planificación de Procesos

La planificación de procesos consta de las siguientes fases [15]:

1. Estudio de la información geométrica del plano
2. Determinación de los volúmenes de mecanizado
3. Determinación de procesos y secuencia de mecanizado
4. Selección de superficies de referencia y sujeción
5. Selección de máquinas herramientas
6. Selección de herramientas
7. Establecimiento de las condiciones de corte
8. **Diseño de utillaje**
9. Confección de programa de máquina
10. Proceso de control
11. Cálculo de tiempos y costes

Dentro de la fase de diseño de la sujeción se pueden distinguir las siguientes etapas:

1. Selección de la sujeción
 - Análisis de la información de entrada
 - Seleccionar los datos de localización
 - Selección de los métodos
 - Diseñar los mecanismos y aparatos
 - Diseño de la configuración del amarre.
2. **Análisis del amarre**
3. Salida del diseño del amarre
 - Dibujo de conjunto del amarre
 - Dibujo de los componentes del amarre

- Listado de los componentes normalizados

- Instrucciones de control de calidad

La primera parte relativa a la «Selección de la sujeción» se realizaría en la etapa de «Selección de superficie de referencia» (Etapa 4 de la «Planificación de Procesos»), después de determinar la secuencia de mecanizado. Las dos últimas fases se realizarían después de determinar las condiciones de corte, a partir de las cuales ya se dispone de las fuerzas de corte y otros datos necesarios para realizar el análisis de la sujeción.

2.2. Funciones del amarre

En los procesos de mecanizado, el aseguramiento geométrico de una parte depende principalmente de la posición relativa de la pieza y la herramienta. El requisito principal de un amarre es localizar una pieza en una posición dada dentro de la bancada de la máquina-herramienta. Para ello se utilizan distintos utillajes que, en contacto con las distintas superficies de la pieza restringen los seis grados de libertad (lineales y rotacionales). Esta posición se ha de asegurar contra las fuerzas de corte, vibraciones, etc., por lo que el amarre debe ser suficientemente rígido y estable.

Se ha de procurar que a lo largo del proceso las superficies acabadas que se utilizan como referencia, y por lo tanto de apoyo, en operaciones posteriores no resultan dañadas por indentaciones que producen los propios utillajes.

Otro tipo de requisitos se suele pedir al amarre son la facilidad de cargar y descargar la pieza, operación de montaje simple y segura, coste reducido, facilitar la automatización de la sujeción de la pieza,

2.3. Importancia de un buen diseño del amarre en fabricación

Los amarres son importantes tanto para la la fabricación tradicional como para los modernos Sistemas de Fabricación Flexible. Afectan directamente a la calidad, productividad y coste de los productos. El tiempo empleado en el diseño y la fabricación de los amarres influye en la mejora y desarrollo de los productos.

Un buen diseño de amarre, por lo tanto, debe:

- Prever, en la medida de lo posible, su capacidad para fabricar dentro de tolerancia, estimando el valor medio y la varianza de las cotas dimensionales o geométricas después del proceso.
- Configurar los amarres asegurando la fijación de la pieza. Esto requerirá un análisis mecánico: Determinación de las fuerzas de apriete y las fuerzas de fijación.
- Facilitar el control en entornos automatizados. Teniendo datos concretos de fuerzas de apriete mínima y máxima.
- Diseñar el contacto para que no se produzcan indentaciones en superficies acabadas, y evitar deslizamiento cuando así se requiera.
- ...
- Influencia en la calidad, productividad, y el coste.

2.4. Selección de factores a analizar

Causas de fallos debidos al utillaje más habituales son las siguientes:

- Baja precisión dimensional en elementos que intervienen en el proceso
- Fuerza de apriete insuficiente

- Fuerza de apriete excesiva o geometría de contacto inconveniente
- Estimación errónea de los coeficientes de rozamiento
- Vibraciones cercanas a la frecuencia natural, . . .

Estos fallos traen como consecuencia:

- Errores dimensionales y geométricos de la pieza (por desviación, o por dispersión)
- Deslizamiento de la pieza durante el proceso por relajamiento, bajo rozamiento . . .
- Daño de la pieza: Indentaciones, desgaste por «fretting», fatiga,

De las causas fallos enumerados anteriormente, las tres primeras se pueden considerar las más críticas, son las que provocan los fallos más importantes en la fabricación, además requieren mayor dominio numérico para obtener los valores válidos que faciliten el control del proceso. Por lo tanto nos vamos a centrar en estos tres aspectos para establecer la metodología de análisis a emplear.

La selección de la fuerza de apriete será la mínima para tener garantías que la pieza no se va a mover, pero con cierto margen de seguridad sobre lo que podría provocar el daño a la pieza.

Los datos de la máquina herramienta utilizada no se han tenido en cuenta en los cálculos suponiendo que los fallos se deben a los utillajes y a su disposición. Tampoco se han tenido en cuenta en estos análisis las frecuencias naturales del conjunto amarre pieza incluyéndose este estudio en el cálculo de los coeficientes de seguridad.

2.5. Metodología del análisis

La aplicación de estos principios a un amarre concreto, depende principalmente de la experiencia y la habilidad del diseñador del proceso. La

disposición de herramientas de cálculo que permitan reproducir el comportamiento del amarre durante el proceso, ahorra mucho tiempo de diseño y pruebas de ensayo-error.

Los estudios que se van a realizar sobre el amarre son los fundamentales para que el proceso produzca productos de la máxima calidad:

1. Estudio de precisión de la operación
 - a) Estudio de precisión en los utillajes y preformas
 - b) Variación de posicionamiento de los puntos de cota
 - c) Cadena de propagación de errores
 - d) Estimación de valor medio y varianza del valor de fabricación
2. Cálculo mecánico del amarre
 - a) Determinación de las fuerzas de apriete
 - b) Acción sobre los mecanismos de apriete
 - c) Distribución de fuerzas sobre superficies
3. Comprobación de daño a la pieza
 - a) Geometría de contacto y presiones superficiales
 - b) Contacto hertziano: Entre cilindros y entre esferas
 - c) Contacto con deslizamiento parcial
 - d) Influencia de la rugosidad superficial
 - e) Tensiones de contacto:fluencia plástica superficial.

Para el seguimiento de la exposición se supone que se poseen conocimientos básicos de Metrología, Elasticidad y Resistencia de Materiales, Métodos Numéricos, y Plasticidad.

Capítulo 3

Estudio de la precisión de la operación de la operación

La principal función del amarre es localizar la pieza en la máquina de herramienta con el fin de que las superficies generadas por la herramienta cumplan las especificaciones dimensionales y geométricas de diseño. Estas especificaciones se han de traducir en datos de localización y programación de trayectoria de herramienta. Los datos de localización son los puntos, líneas y superficies que se usan como referencia para la generación de superficies.

La precisión de la operación vendrá dada por la concordancia de los datos de la pieza fabricada con:

- Datos de diseño: Basados en los requisitos de diseño y funcionalidad.
- Datos de Fabricación: usados para la operación, la localización y medición.

Para la localización se utiliza el principio de isostaticidad, es decir, para que un objeto esté bien situado en el espacio debe tener restringido los seis grados de libertad(3 rotaciones + 3 traslaciones). Estas restricciones se

suelen realizar mediante apoyos, cada uno de los cuales restringe un grado de libertad mediante la fijación en el espacio de un punto. Un caso típico es el método 3-2-1 de sujeción de piezas prismáticas las cuales tienen un plano base que viene definido por 3 puntos de apoyo, el deslizamiento de la pieza en una dirección y su rotación se restringen mediante dos puntos definidos por una alineación, y el deslizamiento en la otra dirección se realizará mediante el sexto apoyo.

Para determinar la precisión de mecanizado se va a proceder a determinar cuáles son las fuentes de error, se analizará la incertidumbre de fabricación a partir de las incertidumbres de las fuentes de error.

Las fuentes de error de localización principales son las siguientes:

- posicionamiento de la herramienta
- planitud de la bancada
- **precisión dimensional del utillaje**
- **dimensión y forma de la pieza en las superficies usadas como referencia**
- colocación de la pieza mediante los utillajes

De entre estas fuentes de error se va a estudiar principalmente la tercera y cuarta de las enunciadas, ya que no dependen tanto de la máquina herramienta cuya precisión dependerá de cada una, y tampoco depende de la habilidad manual del operario. Además estas dos causas son las que van a variar el posicionamiento de las superficies de referencia respecto a una posición ideal que produciría piezas perfectas en una máquina herramienta perfecta.

Lo que se pretende con el presente estudio es determinar la capacidad de un diseño de sujeción determinado para fabricar dentro de tolerancia. Para ello se necesitará conocer la precisión dimensional del utillaje determinado mediante análisis metrológico, y la precisión de la preforma en sus superficies de apoyo que dependería de la precisión de las operaciones anteriores.

La metodología de análisis sería la siguiente:

- (a) Posicionamiento real de las superficies de referencia. Lo cual vendrá determinado por la fiabilidad de utillajes y preforma
- (b) Posición de los puntos de cota. Que utilizará el cambio de sistema de referencia obtenido en el punto anterior
- (c) **Estimación de valor real de cota de fabricación**
- (d) **Estimación de incertidumbre de una cota de fabricación**

Los dos últimos datos estimados son aquellos que se obtendrían en un control de calidad y por lo tanto los que determinarían si la pieza o lote es aceptable o no.

3.1. Posicionamiento real de las superficies de referencia

Como se ha visto anteriormente, se supone que la máquina herramienta es perfecta, por lo que la posición del punto de corte, en un sistema de coordenadas con base en la bancada, será siempre la que se indique en el plano de diseño. Los errores serán introducidos por imprecisiones en el utillaje (dimensiones y posicionamiento) sobre los que apoyan las superficies de referencia que son origen de cota de la superficie mecanizada.

Una superficie de referencia puede ser en el método 3-2-1 (de posicionamiento de piezas prismáticas) una de las tres entidades siguientes:

- Tope: Definido por un punto en el espacio y por lo tanto el utillaje o la preforma puede introducir un error respecto a su posicionamiento ideal de Δx , Δy , Δz
- Alineación: Definido por dos puntos por lo que además de los errores en la traslación de estos puntos se introduce un error geométrico de alineación de α

- Plano de apoyo: Definido por la posición de tres puntos por lo que además de la traslación de estos puntos se introduce el error de paralelismo definido por el giro de su vector director definido por los cosenos directores de $\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z$

Para iniciar el análisis se necesitarán los siguientes datos de partida de los puntos localizadores (puntos de apoyo en las superficies de referencia):

- Valor nominal. Sería la el posicionamiento ideal.
- Valor medio real (obtenido de la medición)
- Incertidumbre (con su constante K)

3.2. Posicionamiento de los puntos de cota

Según el principio de isostaticidad una pieza está perfectamente localizada a partir de sus apoyos. La imprecisión de los apoyos se traducirá en un cambio de sistema de referencia respecto al ideal. La posición del punto de corte, que viene dado por el programa de máquina, mecanizará un punto que en la medición final dependerá del posicionamiento de los apoyos. Así pues, las imprecisiones en el utillaje y en la preforma han introducido un cambio de sistema de referencia para la determinación del punto de corte: La herramienta corta según el sistema de ejes de la máquina pero la cota conseguida dependerá del sistema de referencia dado por el posicionamiento real de las superficies de referencia. Este nuevo posicionamiento de los puntos de cota se puede determinar por las matrices de transformación de coordenadas.

Una variación de posición en el espacio se puede traducir, según los principios de la cinemática en la traslación de un punto del objeto y una rotación alrededor de ese punto. Conociendo la diferencia de posición en la máquina herramienta con la posición ideal se pueden estimar los errores tanto dimensionales como los de forma.

Si se determina la variación de coordenadas de un punto del objeto al rotar un ángulo α_x

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & \text{sen } \alpha_x \\ 0 & -\text{sen } \alpha_x & \cos \alpha_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Si aplicamos las siguientes matrices de transformación correspondientes a los giros respecto los ejes y (α_y) y z (α_z) sucesivamente quedará la siguiente coordenada del punto final respecto al inicial:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_z \cos \alpha_y & \text{sen } \alpha_z \cos \alpha_x - \cos \alpha_y \text{sen } \alpha_y \text{sen } \alpha_x & \cos \alpha_z \text{sen } \alpha_y \cos \alpha_x + \text{sen } \alpha_z \text{sen } \alpha_x \\ -\text{sen } \alpha_z \cos \alpha_y & \text{sen } \alpha_z \text{sen } \alpha_y \text{sen } \alpha_x + \cos \alpha_z \cos \alpha_x & \cos \alpha_z \text{sen } \alpha_x - \text{sen } \alpha_z \text{sen } \alpha_y \cos \alpha_x \\ -\text{sen } \alpha_y & -\cos \alpha_y \text{sen } \alpha_x & \cos \alpha_y \cos \alpha_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Si los ángulos son muy pequeños, en la matriz de transformación se pueden eliminar los términos cuadráticos de los senos y simplificar los cosenos a 1, además, añadiendo la traslación queda:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen } \alpha_z & \text{sen } \alpha_y \\ -\text{sen } \alpha_z & 1 & \text{sen } \alpha_x \\ -\text{sen } \alpha_y & -\text{sen } \alpha_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

3.3. Valor de cota esperado

Una cota hace referencia a la distancia entre:

- Dos puntos
- Punto y plano
- Punto y línea
- Línea y plano

En la representación bidimensional, ya sea en el plano de diseño o en el plano de fabricación, los planos se proyectan en líneas, y éstas se definen por dos puntos. A la hora de medir una cota se suelen escoger los puntos extremos

de esa cota por representar los posibles valores extremos en la comprobación de esa cota.

Por lo tanto, una superficie en un plano de fabricación viene representada por 2 puntos extremos (A y B), cada uno de los cuales tendrá su posicionamiento respecto al sistema de referencia definido por el utillaje. En ese sistema de referencia se definirán las cotas $d_A = z_{01} - z_A$ y $d_B = z_{02} - z_B$ siendo z_{01} y z_{02} los puntos de referencia de las cotas de los puntos A y B respectivamente.

Cota de fabricación esperada será el valor del punto medio

$$d_{med} = \frac{d_A + d_B}{2} \quad (3.4)$$

3.4. Estimación de la incertidumbre de fabricación esperada

La determinación de la incertidumbre de fabricación esperada, se realizará mediante previa obtención de la varianza esperada mediante la Ley de Propagación de Varianzas (LPV) muy usada en metrología. De este modo se puede obtener el intervalo de confianza para un nivel de confianza similar a los que se han tenido en cuenta al obtener las incertidumbres de cada uno de los parámetros.

Ley de propagación de varianzas:

$$u_\alpha^2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial L} \right)^2 u_L^2 + \dots + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m} \right)^2 u_m^2$$

la aplicación de esta ley tiene, entre otras, las siguientes ventajas:

- Permite determinar la influencia de un parámetro en el error global, mediante el análisis de cada uno de los sumandos.
- Es muy útil para planear estrategias con el fin de colocar la fabricación dentro de tolerancia

Esta ley se aplica al valor de cota esperado $d_{med} = \frac{d_A + d_B}{2}$, pero se ha de tener en cuenta que este valor sería el valor de la cota del punto medio entre A y B , por lo que no tiene en cuenta toda la superficie a la hora de determinar su variabilidad. Para ello se tiene en cuenta la desviación media que será: $d_{des} = \frac{d_A - d_B}{2}$

La incertidumbre de cota será: $U_d = K \sqrt{u_{dmed}^2 + u_{ddes}^2}$ siendo K el valor de la constante de incertidumbre (2 o 3 según el nivel de confianza que se esté persiguiendo).

3.5. Ejemplos Prácticos

Paralelismo del mecanizado de una superficie plana

En este ejemplo se va a determinar la inclinación de una superficie mecanizada sobre una máquina herramienta, debida a la imprecisión del utillaje empleado en la sujeción de la pieza. Se trata de mecanizar una superficie plana paralela a la de referencia, la cual se apoya en tres puntos mediante tres piezas las cuales tienen una medida determinada y una incertidumbre, sus cotas en z son 9.81, 10.22 y 10.18 mm y la desviación típica de todas ellas es $u_z = 0,15$ mm. Los tres apoyos se han dispuesto para que formen un triángulo equilátero de lado $L = 50$ mm con una desviación típica de posicionamiento de $u_L = 1$ mm. Se sabe que la máquina herramienta tiene una desviación típica en cuanto capacidad de hacer superficies paralelas se supone de $u_m = 0^\circ$.

Para resolver el problema se va a proceder a determinar el vector director del plano resultante y a calcular el ángulo que forma con el perpendicular ideal. A continuación por el principio de propagación de varianzas se estima la incertidumbre de dicho ángulo.

Los vectores directores de los apoyos serán

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \{0, 0, z_a\} \\ \vec{OB} &= \{L \cos(60^\circ), L \sin(60^\circ), z_b\} \\ \vec{OC} &= \{L, 0, z_c\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

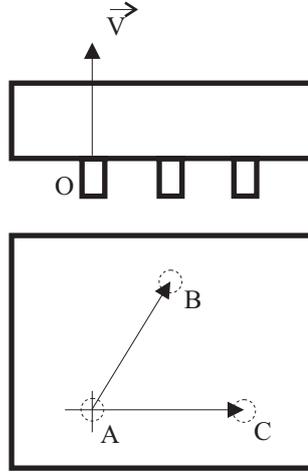


Figura 3.1: Alzado y perfil de pieza sujeta con 3 apoyos

El vector director del plano de los apoyos \vec{V} vendrá dado por el producto vectorial de los dos lados del triángulo rectángulo \vec{AB} y \vec{AC} :

$$\begin{aligned} {}_c\vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} \\ \vec{AC} &= \vec{OC} - \vec{OA} \\ \vec{V} &= \vec{AB} \wedge \vec{AC} \end{aligned} \quad (3.6)$$

El ángulo que forma el plano de los apoyos vendrá dado por el arccoseno del producto escalar de los vectores normalizados de \vec{V} y del eje OZ con lo que queda la siguiente expresión final:

$$\alpha = \arccos \left(-\frac{L \operatorname{sen}(60^\circ)}{\sqrt{((-z_a + z_b) - (-z_a + z_c) \cos(60^\circ))^2 + (L \operatorname{sen}(60^\circ))^2 + ((-z_a + z_c) \operatorname{sen}(60^\circ))^2}} \right) \quad (3.7)$$

Aplicando los datos del problema el resultado es de 0.52° . Queda por determinar la incertidumbre de fabricación de esta magnitud en base a la incertidumbre en los apoyos y de la máquina herramienta. Para ello aplicamos la ley de propagación de varianzas (LPV).

Para aplicar la LPV se ha de derivar la función α respecto a dada una de sus variables. La expresión resultante es gigantesca pero asequible gracias

a los programas de matemáticas disponibles que permiten la derivación simbólica de las variables y su cálculo, de forma que se ha obtenido la influencia de la varianza de cada uno de los parámetros en el ángulo de inclinación del plano mecanizado:

$$u_{\alpha}^2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial L} \right)^2 u_L^2 + \dots + u_m^2 \quad (3.8)$$

Usando una constante $K = 3$ se obtiene una incertidumbre de ángulo de inclinación:

$$U_{\alpha} = K u_{\alpha} = 1,81^{\circ} \quad (3.9)$$

Incertidumbre en el mecanizado de un chavetero en un eje

En el siguiente ejemplo se va estudiar la profundidad de un chavetero de $50 \times 6 \times 3$ que se mecaniza en un eje de diámetro $D = 30,05$ mm con $U_D = 0,04$ mm ($K_D = 2$) que apoya en dos bloques en V distanciados una distancia $L = 200$ mm. El vértice del primero de los bloques esta a una distancia de la bancada de $z_{o1} = 4,98$ mm y el segundo a $z_{o2} = 5,05$ mm. Estos bloques en V tienen la misma incertidumbre de posicionamiento en z de $U_z = 0,02$ mm ($K_z = 2$), y su ángulo es de $\beta = 90^{\circ}$ con una incertidumbre de $U_{\beta} = 1^{\circ}$ ($K_{\beta} = 2$). Si la chaveta está situada entre la cota en x de 100 y 150 mm. determinar el valor esperado de la profundidad del chavetero y el valor de su incertidumbre de fabricación.

Comenzamos resolviendo el problema de posicionamiento vertical del centro del cilindro en un bloque en V hasta su vértice.

$$h = \frac{D}{2 \operatorname{sen}(\beta/2)} + z_0 \quad (3.10)$$

La varianza asociada será

$$u_h = \sqrt{u_{z0}^2 + \left(\frac{u_D}{2 \operatorname{sen}(\beta/2)} \right)^2 + \left(\frac{D u_{\beta}}{4 \operatorname{tg}(\beta/2) \operatorname{sen}(\beta/2)} \right)^2} \quad (3.11)$$

Se establece el origen de coordenadas en el centro nominal de uno de los apoyos a una distancia de la bancada y_n

$$y_n = 5 + \frac{30}{2 \operatorname{sen}(90^{\circ}/2)} \quad (3.12)$$

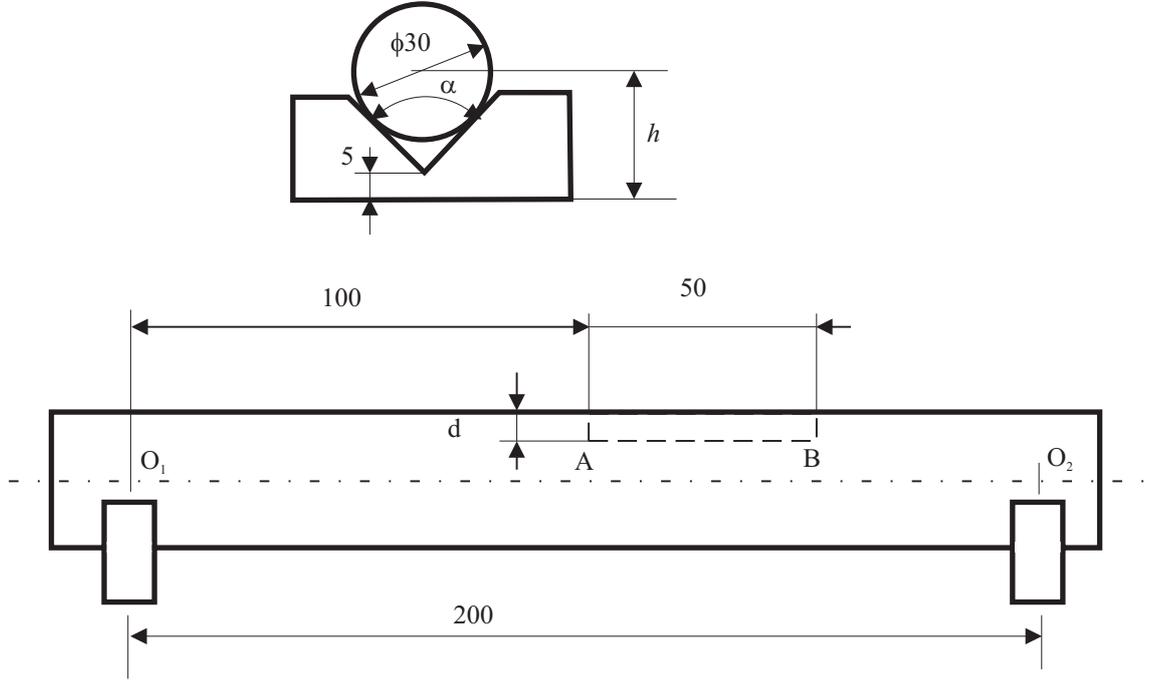


Figura 3.2: Alzado y perfil de eje y chaveta

Las nuevas coordenadas del eje de simetría pasando por los apoyos son:

$$\begin{aligned} y_o &= h_1 - y_n \\ y_{o2} &= h_2 - y_n \end{aligned} \quad (3.13)$$

Respecto al ángulo que forma el eje se tiene que

$$\alpha = \arcsen \frac{y_o - y_{o2}}{L} \quad (3.14)$$

y su varianza será

$$u_\alpha = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{(y_o - y_{o2})^2 u_L^2 + 2L^2 u_h^2}{1 - \left(\frac{y_o - y_{o2}}{L}\right)^2}} \quad (3.15)$$

A partir del ángulo α se puede obtener la cota d a partir de la coordenada de los puntos A y B.

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \left\{100, \frac{D}{2} - d\right\} \\ \vec{OB} &= \left\{100 + 50, \frac{D}{2} - d\right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Aplicando la matriz de transformación de coordenadas de la ec. (3.3) se obtienen las siguientes coordenadas en y :

$$\begin{aligned} y_A &= D/2 - d + y_o - 100 \operatorname{sen} \alpha \\ y_B &= D/2 - d + y_o - (100 + 50) \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (3.17)$$

La cota d resultante en cada uno de los puntos se obtendrán mediante:

$$\begin{aligned} d_A &= D/2 - y_A \\ d_B &= D/2 - y_B \end{aligned} \quad (3.18)$$

El valor medio de fabricación será:

$$d_{med} = \frac{d_A + d_B}{2} \quad (3.19)$$

La desviación media será:

$$d_{des} = \frac{d_A - d_B}{2} \quad (3.20)$$

La incertidumbre de la cota obtenida será por la ley de propagación de varianzas, con $K = 2$

$$U_d = 2\sqrt{u_{dmed}^2 + u_{ddes}^2} \quad (3.21)$$

Los valores numéricos resultantes del problema serán:

$$\begin{aligned} d &= 3,06 \text{ mm} \\ U_d &= 0,50 \text{ mm} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Capítulo 4

Cálculo mecánico de amarres

En el amarre de las piezas es importante que la pieza esté bien localizada a lo largo de todo el proceso de corte, lo cual significa que debe permanecer inmóvil a pesar de las altas fuerzas a las que está sometida.

Un principio básico en el amarre es la isostaticidad, para que la responsabilidad de la localización recaiga sobre unos apoyos que restrinjan los seis grados de libertad. Para asegurar que la pieza está continuamente en contacto con esos apoyos se somete además a unas fuerzas de apriete. Éstas deben ser lo suficientemente altas para que las fuerzas originadas en el proceso no deslocalicen la pieza, pero también tiene su límite ya que han de respetar la integridad de la pieza y no provocar grandes deformaciones.

El efecto de las grandes deformaciones en la calidad de la pieza no es significativo en el caso de que haya una operación de acabado además de la de desbaste, ya que las fuerzas de corte en este caso son mucho menores y por lo tanto también las deformaciones. En caso contrario habrá que compensar los desplazamientos con la cota programada de la herramienta.

El posible daño de la superficie acabada de la pieza sobre la que actúa una fuerza de presión debido al apoyo o al apriete también limita la fuerza del amarre. En realidad la fuerza que actúa sobre una superficie no es puntual

sino que es la resultante de una distribución determinada de presiones. Para el cálculo de esta distribución de presiones así como el daño que produce en la pieza se dedicará la última sección. Como regla general sirva que cuando mayor es la superficie de contacto, menor será el daño producido a la pieza. Cuando la superficie de contacto es muy grande, las deformaciones estructurales también influyen en la distribución de presiones, con lo que es buen contar con algún procedimiento de cálculo para calcular este máximo y no descargarlo sobre el coeficiente de seguridad K .

En esta sección se estudiará en primer lugar la fuerza de amarre, se expondrá los distintos tipos de elementos y su capacidad para provocar esa fuerza, después se calculará las deformaciones y la manera en que afectan a la calidad de fabricación. Los datos obtenidos en esta sección se utilizarán como dato de partida para el análisis del posible daño a la pieza.

4.1. Determinación de las fuerzas de apriete

A partir del cálculo de la fuerza de corte y su dirección, mediante las ecuaciones de equilibrio se pueden obtener las reacciones teóricas en los amarres. Esta reacción teórica se suele multiplicar por un coeficiente de seguridad K que tiene en cuenta distintos factores no calculados como las vibraciones, desgaste de las herramientas, aceleraciones, posibles impactos, distribución no uniforme de carga a lo largo de superficies de contacto, etc. Habitualmente $K = 2,5 \div 3,0$ para operaciones de desbaste, y $K = 1,5 \div 2,0$ en operaciones de acabado.

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos proporcionan las fuerzas que soporta el amarre. De este modo se pueden obtener las fuerzas de apriete mínimo para una operación de torneado o fresado. Por convención se van a denominar F a las fuerzas de corte, Q a las fuerzas de apriete, y los subíndices x , y , y z se refieren a la dirección de la fuerza según los ejes de la máquina-herramienta, y los subíndices r y t , se refieren a las la descomposición de las fuerzas según sus componentes radial y tangencial respectivamente.

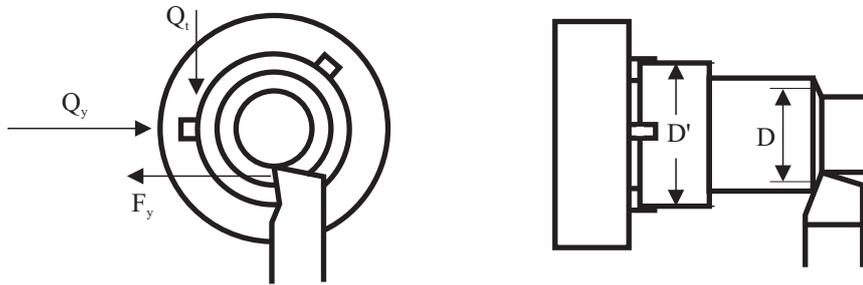


Figura 4.1: Par de fuerzas en una operación de torneado

Fuerzas de apriete para una operación de torneado

En una operación de torneado de una pieza sujeta en un plato de n garras, se tiene que la fuerza mayor en comparación con todas las demás es la fuerza de corte que resulta del producto de la fuerza específica de corte por el área de corte. Esta fuerza genera sobre el amarre un momento torsor, y un momento flector. Despreciando el flector respecto al torsor, el rozamiento de las garras debe ser suficiente para resistir el momento creado por la fuerza de corte.

Si se supone una posición en el que una de las garras está en el punto más alto tal como muestra la figura 4.1, por equilibrio de fuerzas según la dirección y se tiene que

$$Q_y = F_y \quad (4.1)$$

El límite a la fuerza tangencial viene dado por el coeficiente de rozamiento máximo

$$Q_t = \mu Q_y \quad (4.2)$$

y por equilibrio de momentos se obtiene que:

$$nQ_t \frac{D'}{2} = F_y \frac{D}{2} \quad (4.3)$$

siendo D el diámetro de la pieza en el cual se aplica la fuerza de corte, y D' el diámetro de la pieza en la zona de garras.

De estas expresiones se obtiene que la fuerza normal de apriete debe tener

como mínimo el siguiente valor:

$$Q_y = \frac{F_y D}{\mu n D'} \quad (4.4)$$

El valor de F_y se obtiene mediante los métodos habituales de la mecánica de corte.

Fuerza de apriete en un ranurado de cilindro apoyado en 2 bloques en V

En la operación de ranurado se obtiene que la sujeción en el sentido axial se realiza mediante un tope, el eje está alineado mediante dos bloques en V, y la fuerza de apriete se realiza mediante un tope vertical que presiona el eje a los dos bloques. Las fuerzas de corte en el ranurado son axiales o perpendiculares al eje. Se considera que las fuerzas axiales están perfectamente controladas por un tornillo posicionador, y que el parámetro a controlar es la posición el apriete y su fuerza para evitar el deslizamiento del eje por cualquiera de las caras del bloque en V.

La fuerza de corte se calcula mediante el los métodos de la mecánica de corte. Esta fuerza tiene una dirección tangencial en la zona de la ranura. El equilibrio de fuerzas y momentos en el eje y proporcionará la reacción en cada uno de los bloques en V R_{z1} y R_{z2} . El equilibrio de fuerzas y momentos en el eje Z proporcionará las reacciones en los apoyos según la dirección y debido a la fuerza de apriete Q_y . Tomando ahora la sección transversal del eje en dada uno de los bloques, se pueden obtener las reacciones en cada una de las caras del bloque. Estableciendo la condición de no-deslizamiento en las caras del bloque debido al rozamiento, se puede establecer la Fuerza de apriete mínima Q_y para que la pieza esté siempre localizada.

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos sobre el eje son las siguientes:

$$\begin{aligned} Q &= R_{y1} + R_{y2} \\ Q l_{1q} &= R_{y2} l_{12} \\ F_z - Q_z &= R_{z1} + R_{z2} \\ F_z l_{z2} &= R_{z1} l_{12} + Q_z (l_{12} - l_{1q}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

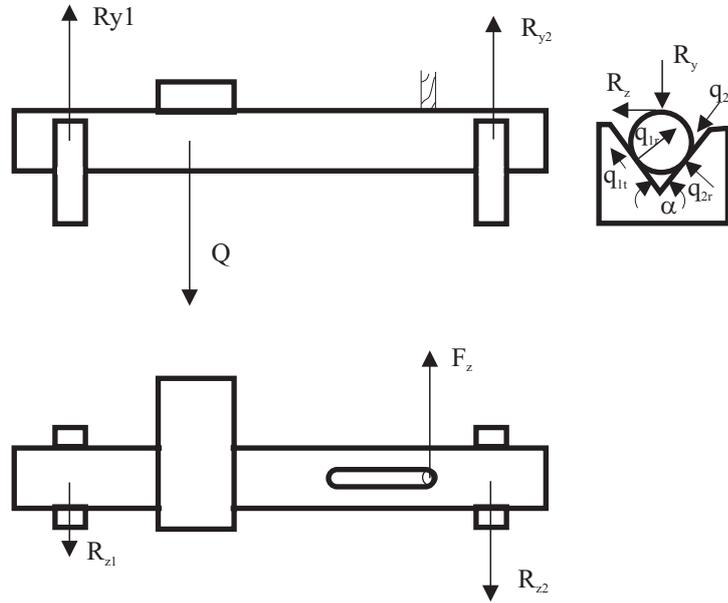


Figura 4.2: Fuerzas en el ranurado de un eje

Siendo l_{ij} la distancia entre los puntos i y j .

Las ecuaciones de equilibrio en cada uno de los bloques en V son:

$$\begin{aligned} (q_{1r} + q_{2r}) \operatorname{sen}(\alpha/2) + (q_{1t} - q_{2t}) \operatorname{cos}(\alpha/2) &= R_y \\ (q_{1r} - q_{2r}) \operatorname{cos}(\alpha/2) - (q_{1t} + q_{2t}) \operatorname{sen}(\alpha/2) &= R_z \\ R_z &= q_{1t} + q_{2t} \end{aligned} \quad (4.6)$$

El sistema es hiperestático ya que los dos puntos de apoyo aportan fuerza de rozamiento cuando en el sistema isostático bastaría que lo aplicara sólo uno. Para salvar este problema se ha establecido que la contribución de cada punto a frenar el par torsor es proporcional a la carga normal soportada en cada cara, lo cual es consistente con la teoría de rozamiento de Coulomb que establece que el área de contacto (y por lo tanto la fuerza de rozamiento) entre dos superficies rugosas es proporcional a la carga aplicada. De esta forma se establece un coeficiente de antideslizamiento μ_i en cada uno de los apoyos.

$$\mu_i = \frac{q_{1ti}}{q_{1ri}} \quad (4.7)$$

Haciendo los siguientes cambios de variable se puede obtener la solución

al sistema de ecuaciones del bloque en V

$$\begin{aligned} a &= q_{1r} + q_{2r} \\ b &= q_{1r} - q_{2r} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por sustitución se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} b &= \frac{R_z(1 + \operatorname{sen}(\alpha/2))}{\cos(\alpha/2)} \\ a &= \frac{R_y \pm \sqrt{R_y^2 - 4R_z^2 \operatorname{sen}(\alpha/2)(1 - \operatorname{sen}(\alpha/2))}}{2 \operatorname{sen}(\alpha/2)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

El discriminante para la obtención de a es siempre que las ecuaciones de equilibrio de la viga no la despeguen de cualquiera de la cara de los bloques.

Ejemplo numérico: Para el ejemplo de cuyas dimensiones coinciden con la figura 3.2, suponer que a fuerza de corte es de 500 N mecanizando el extremo más cercano al punto 2, se coloca un apriete vertical centrado a 50 mm del apoyo 1. Suponiendo un coeficiente de rozamiento estático entre el cilindro y las caras del bloque de $\mu = 0,1$ calcular la fuerza de apriete mínima.

Aplicando las ecuaciones anteriores y suponiendo que el apriete se produce con una almohadilla que amortigüe las tensiones de contacto con lo que $Q_z = 0$, las condiciones que debe cumplir la fuerza de apriete deben ser la de discriminante en mayores o iguales a 0, y que el coeficiente antideslizante sea menor que el coeficiente de rozamiento estático.

Probando valores de Q se obtiene que el discriminante en el apoyo 2 deja de ser negativo a partir de un valor de $Q = 2200$ N, para este valor el bloque 1 ha está adherido, pero para que en los dos bloques haya adhesión, la fuerza de apriete ha de ser de al menos 7300 N.

4.2. Acción sobre mecanismos de apriete más usuales

La fuerza de apriete calculada en el apartado anterior hay que traducirla en una fuerza que se aplica al aparato de sujeción. Entre los aparatos de

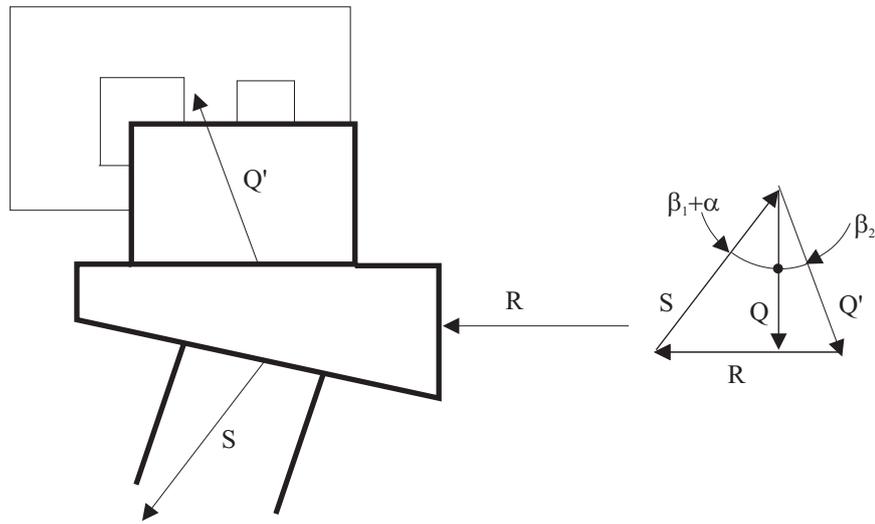


Figura 4.3: Esfuerzos y diagrama polar en una sujeción con cuña

sujeción se van a estudiar tres: cuñas, tornillos y palanca de levas.

Ahora intervienen dos elementos más en el mecanismo: la acción sobre el aparato (R), y el elemento de apoyo del aparato sobre el que se ejerce una acción S .

4.2.1. Cálculo de aprietes con cuñas

La cuña es un mecanismo simple de sujeción muy usado en el diseño de amarres. En la figura se muestra el principio de funcionamiento de la cuña. Para una acción externa R , se produce una fuerza de amarre normal sobre la pieza de Q , cuya relación viene dada en función de los ángulos de fricción sobre la pieza β_1 y sobre la sujeción secundaria β_2 .

Según el diagrama polar de fuerzas se obtiene que:

$$Q = \frac{R}{\tan \beta_2 + \tan(\alpha + \beta_1)} \quad (4.10)$$

La condición de autobloqueo consiste en que cuando deje de actuar la fuerza R la fuerza de amarre permanezca igual. Los sentidos de las fuerzas de fricción se volverán contrarios para resistir el movimiento de la cuña. Para que ello ocurra $\alpha \leq \beta_1 + \beta_2$. Teniendo en cuenta los valores usuales del

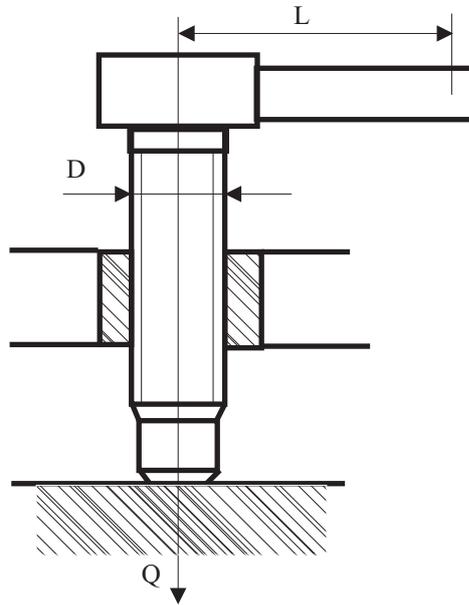


Figura 4.4: Apriete mediante tornillo

coeficiente de fricción, el ángulo de cuña suele estar comprendido entre 6° y 8° .

Cuando se usan accionamientos continuos de sujeción, no hace falta la propiedad de autobloqueo por lo que se suelen permitir ángulos de cuña mayores.

En sistemas de fabricación de producción en masa es popular el uso de la cuña con rodillo para amplificar la fuerza de amarre.

4.2.2. Cálculo de aprietes con tornillos

El sistema de apriete con tornillos es el más usado en todos los tipos de mecanismos. Sus ventajas son su estructura simple, la gran amplificación de fuerza obtenida, y la fiabilidad en la propiedad de autobloqueo. Su principal inconveniente es la relativa lentitud de operación que limita su utilización en producción automatizada.

El mecanismo se aplica básicamente en dos formas: Directamente contactando la punta con la pieza, e indirectamente aplicando la fuerza en medio

de un brazo de palanca uno de cuyos extremos es fijo y el otro presiona sobre la pieza.

El mecanismo de apriete es similar al de cuña, si la rosca se toma como la superficie de una cuña cuyo ángulo α es el ángulo de hélice del tornillo ($p/(\pi D)$), el accionamiento sobre la rosca se obtiene por equilibrio de momentos. Despreciando el rozamiento en la punta queda:

$$Q = \frac{2 R L}{D(\tan(\alpha + \beta_2))} \quad (4.11)$$

4.2.3. Cálculo de aprietes con palanca de levas

El mecanismo de levas es el más rápido en cuanto a implementación de sujeciones. Habitualmente se usa una leva cilíndrica cuyo dentro de giro o está a una distancia e de su centro geométrico. El mecanismo de apriete es el de cuña pero con ángulo α variable. Según la configuración de la figura, la distancia de la superficie de la pieza al eje excéntrico debe ser tal que el ángulo que forman la intersección de las dos circunferencias sea menor que el ángulo de fricción para que exista autobloqueo.

La fuerza de amarre será igual a:

$$Q = \frac{R L}{(r + \delta) \tan(\alpha + \beta)} \quad (4.12)$$

El ángulo máximo de α para la condición de autobloqueo es la siguiente:

$$\frac{e}{r} \leq \tan \beta \quad (4.13)$$

Ejemplo de sujeción. *Calcular acción para con una fuerza de 300 N provocar un apriete de 7300 N.*

Para provocar una acción de 7300 N mediante un tornillo, mediante una palanca en el que el apriete esté entre el apoyo y el tornillo, 50 mm y 50 mm respectivamente, la fuerza que ha de ejercer el tornillo es de 3650 N, para lo que ha de tener un diámetro mínimo de 5 mm (si se le supone una resistencia de 350 MPa), si tiene 16 espiras por pulgada, equivale a un ángulo de cuña de 1 deg, con lo que si se aplica la ecuación 4.11 se obtiene un par que para aplicar 300N se necesita un brazo de 284 mm.

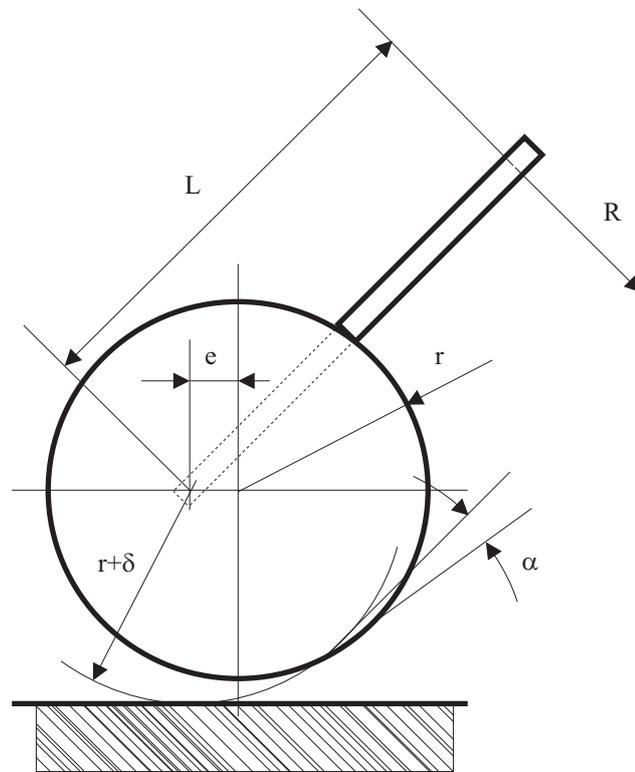


Figura 4.5: Apriete mediante palanca de leva

Capítulo 5

Análisis de fuerzas de contacto del amarre

En el anterior apartado se han calculado las fuerzas de apriete necesarias para que la pieza quede bien fijada, para ello se han supuesto cargas puntuales sobre las superficies, pero en realidad, lo que actúa sobre la superficie son unas distribuciones de presiones sobre determinadas áreas de contacto. Cuanto mayores sean las áreas menor serán las presiones, pero lejos de repartirse la carga uniformemente sobre la superficie, la distribución depende de la forma de deformarse los cuerpos alcanzando picos de presión que pueden realmente dañar la pieza.

Habitualmente, para aumentar la superficie de contacto se suelen proceder con distintas técnicas:

- Aumentar el número de apoyos sobre superficies grandes, quedando la pieza sobrelocalizada
- Aumentar la longitud de la pieza sobre la que apoya una superficie cilíndrica
- Apoyar superficies planas sobre otras también planas

En todos los casos el cálculo de la distribución de fuerzas o de presiones requiere el estudio de las deformaciones, ya que el sistema ha dejado de ser isostático (que es lo ideal para tener bien localizada la pieza en la máquina herramienta) para ser hiperestático.

En este apartado se va a ver cómo influyen las fuerzas de corte y de apriete en la distribución de fuerzas sobre las superficies de apoyo. Al implicar el estudio el cálculo de deformaciones, se puede estudiar de paso las dimensiones finales de la pieza. Para ello se va a suponer que el corte es continuo y equilibrado, por eso se desprecian los efectos vibracionales y se puede estudiar el problema como si fuera estático.

Como los sistemas de contacto multicuerpo son muy variados, y se presentan bajo formas muy diferentes, a continuación se va a formular el problema general con las técnicas para resolverlo, y a continuación se aplicarán las técnicas a casos concretos.

5.0.4. Planteamiento del problema

El contacto entre dos cuerpos se produce normalmente en áreas de superficie cuyas dimensiones cambian dependiendo de la fuerza que ejercen los cuerpos entre sí. Estas áreas son elipses en el caso de que las dos superficies sean curvas. En muchos sistemas mecánicos existe un predominio de las deformaciones estructurales frente a las deformaciones superficiales en los puntos en contacto, con lo que a la hora de estimar la energía del sistema, se pueden despreciar las deformaciones locales frente a las estructurales.

El problema queda reducido a calcular la distribución de fuerzas entre los distintos puntos de contacto entre dos cuerpos. Habitualmente se conoce la fuerza total que dos cuerpos están ejerciendo entre sí, esta fuerza se distribuirá entre los distintos puntos de la línea de contacto de forma que la energía total de deformación elástica sea mínima.

La obtención de la distribución de carga pasaría por desarrollar una expresión de la energía de deformación del sistema y minimizarla, obteniendo el reparto de carga entre los distintos puntos de discretización. Aquí se ha seguido este procedimiento utilizando el método de las condiciones de Kuhn-

Tücker, y otro distinto pero más conocido como el de los multiplicadores de Lagrange. Por los dos métodos se llega a la misma ecuación matricial a partir de la cual se puede despejar de forma directa el vector de fuerzas. El desarrollo de estos métodos se puede estudiar en [6], aunque un resumen viene dado en el Apéndice II.

A partir de la ecuación matricial se puede trabajar con ella para resolver un amplio rango de problemas de contacto. Este apartado se ha dividido en las siguientes secciones:

- Obtención de una expresión de la energía de deformación de un sistema formado por dos cuerpos con varios puntos en contacto y la formulación de este problema en forma matemática.
- Utilización de una expresión matricial, con la que se obtiene directamente la distribución de fuerzas.
- Demostración de su utilidad mediante la resolución de un problema de reparto de carga en la sujeción de una pieza en una máquina herramienta mientras se mecaniza.

5.0.5. Energía de deformación en el contacto entre dos cuerpos elásticos

Energía de deformación de un cuerpo cargado

Se puede suponer que el comportamiento elástico es lineal, es decir, la magnitud de los desplazamientos y las tensiones en cada punto son proporcionales a la carga aplicada. Esta nueva suposición implica que el material es elástico y que las deformaciones son pequeñas.

La energía de deformación U es función cuadrática de la fuerza aplicada, F_i , y la rigidez del elemento mecánico, k_i (Apéndice II).

$$U = \frac{1}{2} F_i^2 k(x) \quad (5.1)$$

Energía de deformación de 2 cuerpos en contacto en un solo punto

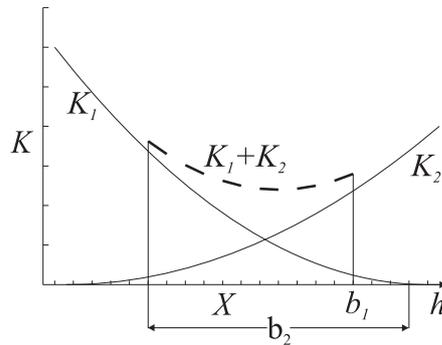


Figura 5.1: Evolución de la rigidez conjunta en función de la localización del punto de contacto

Si dos vigas contactan en un punto y en ese punto actúan la una contra la otra con una fuerza unidad, tal como se muestra en la Figura 8.2, los desplazamientos en ambas vigas vendrán dados por la rigidez de cada una. La suma de ambos desplazamientos dará como resultado la rigidez del par de vigas.

La Figura 7 muestra cómo evoluciona la energía de deformación total para una carga unidad, cuando varía la posición del punto de contacto. Su forma coincide con la de la suma de las rigideces de ambos cuerpos cuando están en contacto en un sólo punto. La energía total de deformación será por lo tanto igual a la suma de las energías de deformación de los dos cuerpos, y se denomina habitualmente como rigidez de contacto. Esta energía será:

$$U = \frac{1}{2}(F_i\delta_1 + F_i\delta_2) = \frac{1}{2}F_i^2(k_1(x) + k_2(h - x)) \quad (5.2)$$

Donde δ_1 y δ_2 son las flechas respectivas en los puntos de contacto.

Energía de deformación de dos cuerpos con varios puntos en contacto

Cuando el contacto entre los cuerpos se produce en dos puntos, la energía ya no depende únicamente de las propias rigideces, pues el desplazamientos del punto donde actúa una fuerza también depende del valor del esfuerzo aplicado en el otro punto. A la flecha de la viga en el punto x cuando actúa una fuerza unidad en el punto x_i se le va a llamar $\delta(x, x_i)$.

Cuando actúan dos fuerzas sobre una viga, F_1 en x_1 y F_2 en x_2 , el desplazamiento total en x_1 y en x_2 será:

$$\begin{aligned}\delta_{T1} &= F_1\delta(x_1, x_1) + F_2\delta(x_1, x_2) \\ \delta_{T2} &= F_1\delta(x_2, x_1) + F_2\delta(x_2, x_2)\end{aligned}\quad (5.3)$$

Si el contacto se produce en dos puntos, a partir del valor de las fuerzas aplicadas, se podrá obtener la expresión de la energía total de deformación de la viga U_1

$$2U_1 = F_1 (F_1\delta_1(x_1, x_1) + F_2\delta_1(x_1, x_2)) + F_2 (F_1\delta_1(x_2, x_1) + F_2\delta_1(x_2, x_2)) \quad (5.4)$$

Donde el subíndice 1 de U_1 y δ_1 denota el cuerpo 1.

La ecuación (5.4) se puede expresar de forma más clara utilizando la notación matricial:

$$2U_1 = [F_1 F_2] \begin{bmatrix} \delta_1(x_1, x_1) & \delta_1(x_1, x_2) \\ \delta_1(x_2, x_1) & \delta_1(x_2, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Cuando los dos cuerpos están en contacto en dos puntos, la energía total de deformación es igual a la energía de deformación de un cuerpo más la del otro. Teniendo en cuenta que:

- F_1 y F_2 son iguales para los dos cuerpos por el principio de Newton de acción-reacción.
- Si la ecuación de la elástica de la segunda viga δ'_2 , (ζ, ζ_i) viene expresada en coordenadas locales ζ , se realizará un cambio de coordenadas para expresarla en las mismas coordenadas que δ_1 , que se tomarán como coordenadas globales, con lo que se podrá operar con las dos elásticas en el mismo sistema de referencia.

La energía total de deformación será:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} [F_1 F_2] \begin{bmatrix} \delta_1(x_1, x_1) + \delta_2(x_1, x_1) & \delta_1(x_1, x_2) + \delta_2(x_1, x_2) \\ \delta_1(x_2, x_1) + \delta_2(x_2, x_1) & \delta_1(x_2, x_2) + \delta_2(x_2, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

lo que se suele expresar de forma más simplificada

$$U = \frac{1}{2} [F_1 \quad F_2] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

y generalizando para muchos puntos en contacto

$$U = \frac{1}{2} [F]^T [C] [F] \quad (5.8)$$

en donde

$$c_{ij} = \sum_k \delta_k(x_i, x_j) \quad ; \quad k = 1, 2 \quad (5.9)$$

En este punto cabe hacer dos observaciones:

- Por el teorema de reciprocidad de Raleigh-Betti se tiene que $c_{ij} = c_{ji}$, con lo que la matriz de coeficientes es simétrica.
- Si se admite que el desplazamiento de cada punto se produce únicamente por la fuerza que actúa en dicho punto, la matriz $[C]$ (matriz de los desplazamientos) es diagonal, por lo que no hace falta el conocimiento de la elástica en cada estado de carga para la elaboración de $[C]$, sino únicamente de la rigidez de cada punto.

Por el principio de mínima energía, la configuración final de tensiones y deformaciones de un sistema será tal que su energía interna alcance un valor mínimo estacionario; ya que, en virtud del teorema de Menabrea, un sistema hiperestático adquiere la configuración final de fuerzas y deformaciones que haga mínima la energía de deformación elástica.

De acuerdo con ello, en el caso del contacto entre dos cuerpos elásticos en varios puntos, el vector de fuerzas se puede hallar minimizando la función de energía U , sujeta a las restricciones de que la fuerza total es igual al valor dado, y que no existe adhesión entre las superficies, y por lo tanto, todas las fuerzas deben ser positivas.

La formulación matemática del problema tendría el siguiente enunciado:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_i \sum_j f_i c_{ij} f_j \\ & \sum f_i = F \quad (\text{a}) \\ & f_i \geq 0 \quad (\text{b}) \\ & i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (5.10)$$

Las incógnitas de este problema son las fuerzas puntuales f_i . La restricción (a) de la Ecuación (5.10) se deduce de que la fuerza total con que actúa un cuerpo contra otro F es un dato de partida, y que las fuerzas puntuales tienen todas la misma dirección. La restricción (b) de la Ecuación (5.10) se basa en que en el contacto no hay fuerzas de adhesión o tracción, ya que antes de que hubiera tracción dejaría de haber contacto.

La formulación del problema se ha realizado considerando dos sólidos con varios puntos en contacto, aunque en realidad se tratan de áreas de contacto. En el caso de elementos transmisores de potencia como engranajes, tornillos, etc., estas áreas se simplifican por líneas de contacto cuando hay una dimensión que predomina sobre la otra, y a su vez, se pueden discretizar estas líneas de contacto en una sucesión de cargas puntuales con el fin de simplificar los cálculos.

5.0.6. Método matricial solución del problema

Las soluciones al reparto de carga dadas por las condiciones de Kuhn-Tücker y por los Multiplicadores de Lagrange vienen expresadas en (8.6) del apéndice II, y tienen su forma matricial del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 2c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1(n-1)} & c_{1n} & -1 \\ c_{21} & 2c_{22} & \dots & \dots & c_{2n} & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & \dots & \dots & 2c_{nn} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

En donde v es un multiplicador de Lagrange al que no se le ha encontrado ningún significado físico.

La matriz cuadrada de la ecuación 5.11 se obtiene directamente a partir de la matriz de desplazamientos $[C]$, añadiendo la primera fila y la última columna, y multiplicando por dos los términos de la diagonal principal. En adelante, se le va a llamar matriz de desplazamientos modificada $[C^*]$, y tiene unas dimensiones de $(n + 1) \times (n + 1)$.

De la expresión (5.11) se puede despejar el vector de fuerzas f_i , invirtiendo la matriz de desplazamientos modificada $[C^*]$. El sistema de ecuaciones no es homogéneo y la matriz diagonalizable, con lo que la solución consistente en el vector de fuerzas f_i será única.

Para la obtención de los valores de la matriz de los desplazamientos $[C]$ se puede recurrir a un método analítico o al Método de los Elementos Finitos (MEF). Este último método se puede aplicar directamente, modelizando simultáneamente los dos componentes en contacto mediante los elementos de contacto, de los que suelen disponer los distintos códigos, pero esto requiere una gran capacidad computacional y mucho tiempo de cálculo, pues el problema del contacto no es lineal. Otra posibilidad es utilizar el MEF para hallar la matriz de los desplazamientos de cada uno de los elementos, solucionando los dos problemas correspondientes a los dos sólidos en contacto por separado. Se combinan ambas matrices y se opera para obtener la matriz de los desplazamientos modificada $[C^*]$, pudiendo a partir de la Ecuación (5.11) obtener directamente el vector de fuerzas f_i sin necesidad de recurrir a elementos no lineales de contacto, y consiguiendo una mayor precisión al haber resuelto cada uno de los elementos por separado, permitiendo usar un mallado mucho más fino en cada caso. Un ejemplo de aplicación de esta metodología se puede estudiar en [5].

El vector solución de la ecuación (5.11) es la primera columna de la inversa de la matriz de coeficientes multiplicado por F .

El método presentado es simple y económico pues:

- La restricción sólo aumenta la matriz final en una fila y una columna.
- Sólo se necesita el cálculo de una columna de la matriz inversa. Esto evita una gran cantidad de operaciones al ordenador.

Por el método de diagonalización de Gauss-Jordan, el aumento de la matriz complementaria sería sólo en una columna con el valor F en la primera fila y cero en el resto, en lugar de añadir tantas como filas hay en la matriz original. Con esto se tienen $n^2(n-1)$ operaciones algebraicas menos que usando el método de diagonalización completo, siendo n la dimensión de la matriz a invertir [1].

Cuando se tienen diferentes zonas de contacto cuyos desplazamientos son independientes entre sí (muy frecuente en el caso de utillajes), la matriz $[C^*]$ tiene muchos ceros, pues el desplazamiento producido en los puntos de una zona de contacto no influye en el desplazamiento de otra. Las ecuaciones matriciales tendrían una forma como la que sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ [C]_1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & [C]_2 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & [C]_N & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{f\}_1 \\ \{f\}_2 \\ \dots \\ \{f\}_N \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

Siendo $[C]_1, [C]_2, \dots, [C]_N$, las matrices de desplazamiento correspondientes a cada zona de contacto, con la diagonal duplicada.

Cuando la matriz de los desplazamientos $[C]$ es diagonal ($c_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$), de la ecuación (5.11) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} v &= \frac{2F}{\sum_i \frac{1}{c_{ii}}} \\ f_i &= \frac{\frac{1}{c_{ii}}}{\sum_j \frac{1}{c_{jj}}} F \end{aligned} \quad (5.13)$$

De esta última expresión se deduce que cuanto menor es c_{ii} mayor es la fuerza soportada por el punto i , por lo que se podría decir que en la línea de contacto entre dos cuerpos cuya evolución de la rigidez tiene el mínimo en un punto intermedio (como la línea discontinua de la Figura 7), la distribución de la fuerza tendrá un máximo en el punto donde estaba el mínimo de rigidez conjunta.

5.0.7. Ejemplo de aplicación a la sujeción de un cilindro con bloques en V

El ejemplo a estudiar consistirá calcular la distribución de fuerzas a lo largo de la línea de contacto entre el cilindro y el bloque en V en posición estática. Para ello se estiman en 10 los puntos de contacto entre el bloque y el cilindro, se calcula la matriz de rigidez a flexión del cilindro y la de rigidez a contacto del bloque. Una vez conocida la fuerza total se aplica la fórmula y se obtiene la distribución de fuerzas discretizada a lo largo del bloque y del cilindro. Éstos serán los datos a aplicar en el análisis de las tensiones de contacto.

Una vez calculadas las reacciones en los bloques en V, se trataría de ver cómo se distribuyen a lo largo de la línea de apoyo. De los dos bloques en V se estudiará el que está más cercano al apriete porque presenta un valor mayor.

El esfuerzo normal en cada cara de contacto del bloque será igual a la reacción R_1 multiplicado por el seno de la mitad del ángulo, sin embargo se procederá al cálculo de la viga a flexión, luego se combinará con la rigidez de contacto en el bloque, para después aplicar el método propuesto anteriormente y determinar la distribución de carga.

Rigidez de contacto en una zona del cilindro

Para calcular la rigidez de cada punto de contacto del cilindro con el bloque en V, se va a aplicar la teoría general de flexión de vigas, según la configuración que aparece representada en la figura 5.2 con su diagrama de momentos y su deformada, en la cual se tiene que una fuerza unidad en un punto i y produce unas reacciones en el punto de apriete Q , y en el otro apoyo en el bloque R_2 .

La deformación que se obtiene en el punto i y los que están a la derecha de éste, se determina mediante el segundo teorema de Mohr. La función de momentos en función de x será:

$$M(x) = \begin{cases} R_2x & \text{si } x < l_1 \\ R_2x - Q(x - l_1) & \text{si } l_1 < x < l_2 \end{cases} \quad (5.14)$$

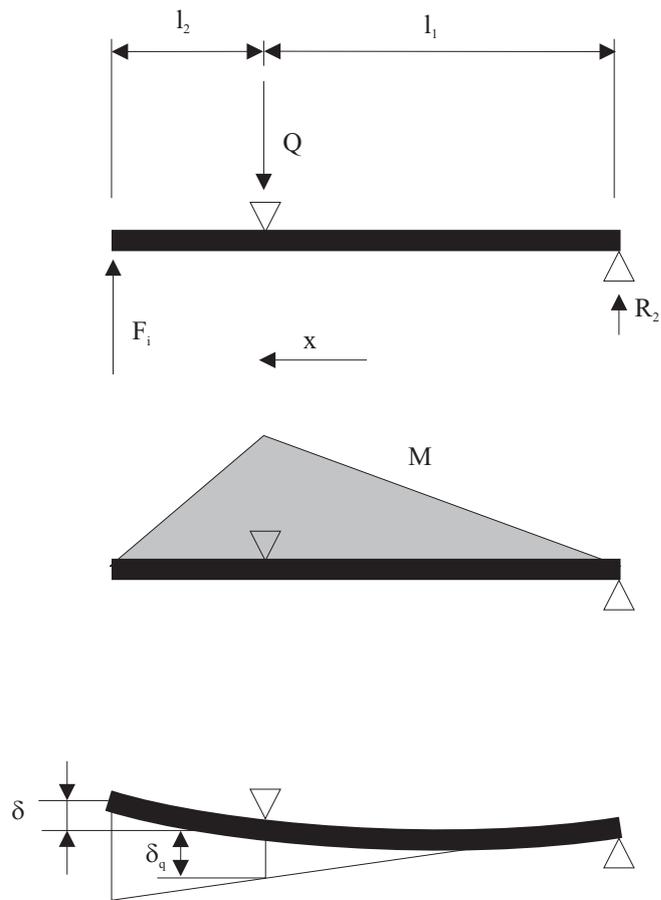


Figura 5.2: Configuración de deformación del cilindro

La línea tangente por el apoyo en Q será

$$\delta_q = \int_0^{l_1} s \frac{R_2 s}{EI_n} ds = \frac{R_2 l_1^3}{3EI_n} \quad (5.15)$$

siendo E el módulo de Young e I_n el momento de inercia de la sección circular que tiene un valor de

$$I_n = \frac{\pi R^4}{4} \quad (5.16)$$

siendo R el radio del cilindro.

El valor de la flecha δ_j en un punto j situado a la izquierda de Q y a la derecha de i , se calculará restando a la tangente obtenida la parte proporcional de δ_q . con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \int_0^{l_1} s \frac{R_2 s}{EI_n} ds + \int_{l_1}^x s \frac{R_2 s - Q(s - l_1)}{EI_n} ds - \delta_q \frac{l_2 + l_1}{l_1} \\ &= \frac{1}{EI_n} \left((R_2 - Q) \frac{x^3}{3} + Ql_1 \left(\frac{l_1^2}{6} - \frac{x^2}{2} \right) \right) - \delta_q \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Para la flecha en los puntos que están a la izquierda de i , la viga no está deformada en este tramo pero sí que está inclinada con el mismo ángulo que tiene el punto i . Este ángulo se puede obtener a partir del primer teorema de Mohr, sabiendo que el punto más bajo de la viga

$$x_0 = \sqrt{\frac{l_1}{3}(l_1 + 2l_2)} \quad (5.18)$$

por el primer teorema de Mohr, el ángulo θ_i será

$$\begin{aligned} \theta_i &= \int_{x_0}^x \frac{M(s)}{EI_n} ds \\ &= \frac{1}{EI_n} \left[R_2 \left(\frac{l_1^2 - x_0^2}{2} \right) + (r_2 - Q) \left(\frac{x^2 - l_1^2}{2} \right) + Ql_2(x - l_2) \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

con lo que la deformada en cualquier punto j a la izquierda de i será:

$$\delta_j = \delta_y(x_j - x_i) \tan \theta_i \quad (5.20)$$

Rigidez de contacto del bloque en V

La misma fuerza que se aplica al cilindro es la reacción del bloque, con la peculiaridad de que la reacción se produce en las dos caras del bloque. El desplazamiento ante una fuerza unidad vertical en el bloque se traducirá en un desplazamiento normal en cada una de las caras. Se ha recomendado que la rigidez normal de contacto (la inversa a este desplazamiento), se calcule como si el desplazamiento se produjera al contacto de una esfera de radio igual a la distancia entre puntos de discretización. De esta forma la matriz de deformación queda muy diagonal, por lo que se pueden desprestigiar todos los demás términos.

El valor de esta rigidez normal multiplicado por el semiángulo del bloque en V será el tomado para el cálculo de la matriz de deformación combinada.

Solución a un caso concreto

Se presenta ahora la distribución de carga obtenida para el caso de los siguientes valores numéricos:

- $l_1 = 100$ mm distancia entre un apoyo y el apriete
- $l_{20} = 40$ mm distancia al primer punto de contacto
- $W = 20$ mm ancho bloque en V a partir del punto $l_1 + l_{20}$
- $n = 10$ n.º de puntos de discretización
- $R = 15$ mm radio del eje
- $E = 2,00E + 05$ N/mm² módulo de Young
- $I_n = 7,85E + 03$ mm⁴ momento de inercia
- $\alpha = 90^\circ$ ángulo del bloque

Con estos datos el reparto de carga para un valor de $R_1 = 5000$ N viene representada en la gráfica siguiente:

Teniendo en cuenta que la presión media sería de 250 N/mm, se ha obtenido que la máxima presión de contacto es de 328 N/mm, lo que es sustancialmente superior.

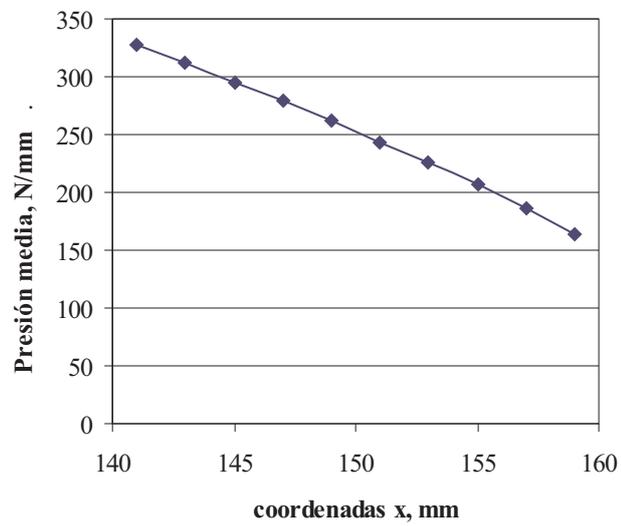


Figura 5.3: Reparto de carga a lo largo de la línea de contacto con el bloque en V

Capítulo 6

Análisis de las tensiones de contacto

En este apartado del tema, se va a tratar de analizar el utillaje desde el punto de vista del contacto mecánico, de forma que sin utilizar almohadillas (las cuales introducen imprecisiones dimensionales y tiempos de preparación de amarres elevados), la fuerza de reacción del punto localizador no dañe la pieza. Para ello a partir de las ecuaciones fundamentales de la mecánica del contacto que se muestran en el Apéndice III se van a mostrar sus soluciones para los casos más comunes, que incluye el contacto de un apoyo plano, una punta cilíndrica, una punta esférica, el contacto con rozamiento, y la influencia de la rugosidad superficial.

Después de obtener las distribuciones de presiones, se desarrollará un método numérico para la determinación del mapa tensional determinando el cortante máximo y el inicio de fluencia de la pieza. De este apartado se deducirá la fuerza máxima a aplicar en el punto para que el utillaje no dañe la pieza por la sujeción, lo que se traducirá en unos pares de apriete máximos en los tornillos de fijación.

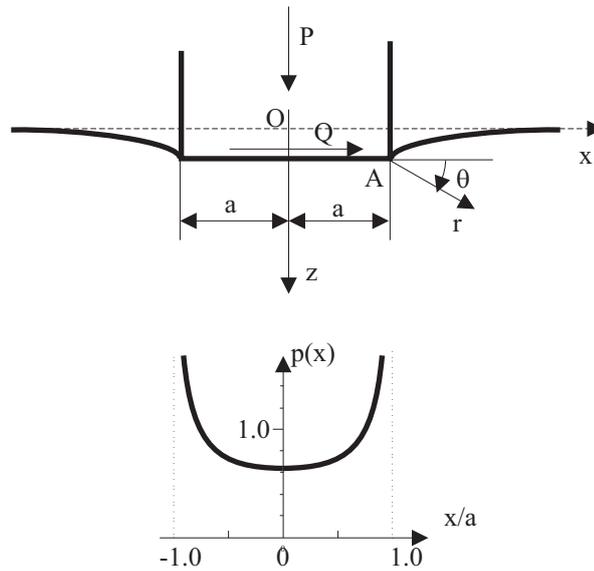


Figura 6.1: Indentación de un apoyo rígido plano sobre una superficie elástica, y su distribución de presiones

6.1. Distribución de presiones entre superficies en contacto para distintas geometrías

6.1.1. Contacto de apoyo plano con aristas con superficie elástica

El primer caso que se va a estudiar es el de un apoyo rígido con aristas vivas, presionando sobre la superficie de la pieza elástica. Como se observa en la figura 6.1 la distribución de presiones que origina se hace infinito en los bordes según la ecuación:

$$p(x) = \frac{P}{\pi(a^2 - x^2)} \quad (6.1)$$

En realidad, ni el apoyo es tan rígido, ni el material tan elástico que no deforme plásticamente en los bordes del contacto. Por esto se ha de tener en cuenta las constantes elásticas de los dos materiales para determinar si se daña o no la pieza. Esto fue estudiado por Dundurs también para el caso en

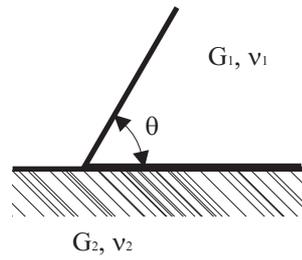


Figura 6.2: Borde del contacto de un apoyo con arista viva

que el ángulo de arista θ sea distinto de 90° tal como aparece en la figura 6.2 (como cuando una arista está matada con un chaffán de 45°).

En este caso se establece un parámetro α que tiene en cuenta las constantes elásticas de los dos materiales y se denomina constante de Dundurs:

$$\alpha = \frac{\frac{1-\nu_1}{G_1} - \frac{1-\nu_2}{G_2}}{\frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2}} \quad (6.2)$$

El valor de este parámetro está entre -1 (apoyo rígido y plano elástico) y $+1$ (apoyo elástico y plano rígido). Para que la tensión sea finita en el borde se debe cumplir que:

$$\alpha \leq \frac{(\pi + \theta) \cos \theta + (\mu\pi - 1) \operatorname{sen} \theta}{(\pi - \theta) \cos \theta + (\mu\pi + 1) \operatorname{sen} \theta} \quad (6.3)$$

se puede observar que cuanto mayor es θ , más rígido es el apoyo por lo que más fácil es que la pieza resulte dañada. Por eso es peligroso matar la arista con chaffán desde el punto de vista del daño de la pieza.

En el caso de que la arista se mate con redondeo, la presión de contacto en los bordes también es muy elevada siempre dependiendo de las constantes elásticas de los materiales y del radio de curvatura del redondeo. Este caso está todavía bajo estudio.

Para evitar estos tipos de problemas, normalmente se prefieren los contactos en los que el área de contacto es progresiva con la fuerza aplicada, como en el contacto entre superficies curvas, de esta formase evitan las fuertes discontinuidades en los bordes del contacto.

6.1.2. Contacto hertziano

El caso de contacto entre superficies curvas cuando el semiancho de contacto es muy pequeño respecto al radio de curvatura de las superficies es el denominado contacto hertziano, dado que las primeras soluciones fueron propuestas por Rudolph Hertz a finales del siglo pasado.

En el Apéndice V se muestra una solución sencilla para el problema del contacto hertziano en el caso bidimensional de contacto entre un cilindro de radio R y una superficie plana, ambos con las mismas constantes elásticas. Así, el semiancho de contacto es:

$$a = \sqrt{\frac{4RP}{\pi E}} \quad (6.4)$$

La forma del perfil de presiones será elíptica:

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (6.5)$$

La máxima presión sobre la superficie será entonces:

$$p_0 = \sqrt{\frac{PE}{\pi R}} \quad (6.6)$$

Este caso se puede generalizar al caso en el que contacten dos superficies con radios de curvatura R_1 y R_2 , estableciendo el radio de contacto equivalente R :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (6.7)$$

Del mismo modo se puede establecer un módulo de Young equivalente en función de las constantes elásticas de las superficies de contacto:

$$\frac{1}{E} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (6.8)$$

De un modo algo distinto se pueden determinar las mismas variables en el caso de contacto entre esferas de modo que quedarían las siguientes

expresiones:

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{3PR}{4E} \right)^{1/3} \\ p_0 &= \left(\frac{3P}{2\pi a^2} \right) \\ \delta &= \frac{a^2}{R} \end{aligned} \quad (6.9)$$

δ es la aproximación entre puntos distantes, que en el caso tridimensional no es una indeterminación como en el bidimensional.

6.1.3. Distribución de presiones normales y tangenciales en contacto con deslizamiento parcial

En el contacto en el que no hay deslizamiento global $Q \leq \mu P$, lo cual es lo deseable en la sujeción de piezas, la zona de contacto no puede estar totalmente adherida pues la tensión alcanzada en los extremos sería infinita debido a que la distribución de presiones tangenciales obtenida de la integración de las ecuaciones tendría la siguiente representación:

$$q(x) = \frac{Q}{\pi(a^2 - x^2)} \quad (6.10)$$

Por esto en la zona de contacto, hay una zona central adherida y la zona cercana a los extremos desliza parcialmente según se puede apreciar en la figura 6.3. Por analogía a la distribución de Hertz el desplazamiento en x es parabólico en la zona deslizante, y en la zona adherida se le ha de restar una distribución tangencial de forma que el desplazamiento total en esta zona sea nulo. Si la zona adherida tiene un semiancho c , la distribución de presiones tangenciales en esta zona será:

$$q(x) = \frac{\mu p_0}{a} \left(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{c^2 - x^2} \right) \quad (6.11)$$

Para que el valor de la fuerza tangencial total sea Q , el semiancho de la zona adherida en el caso plano será:

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{Q}{\mu P}} \quad (6.12)$$

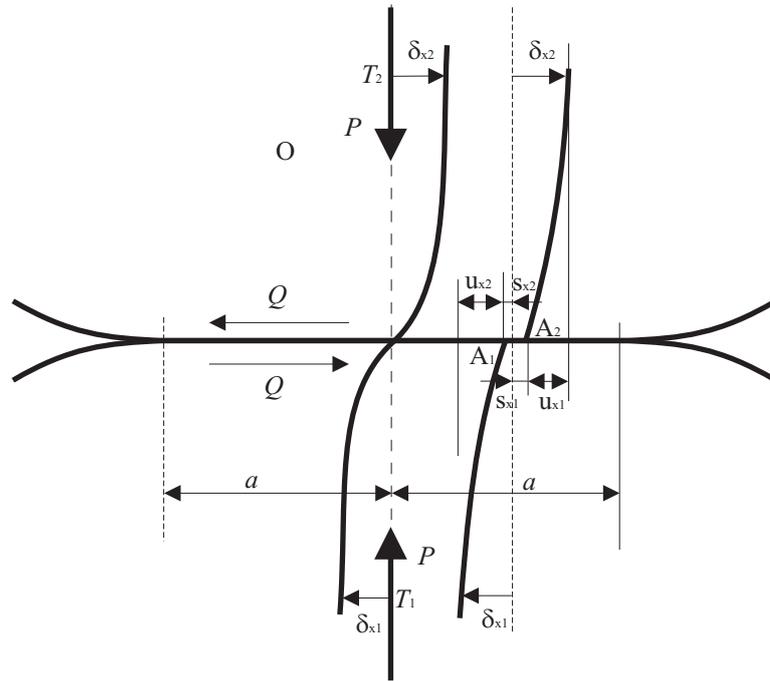


Figura 6.3: Deslizamiento parcial en el contacto

En el caso del contacto de una esfera contra un plano se obtiene una relación similar:

$$\frac{c}{a} = \sqrt[3]{1 - \frac{Q}{\mu P}} \quad (6.13)$$

y en este caso se conoce además el valor del desplazamiento de la zona adherida:

$$\delta_x = \frac{3\mu P}{8a} \left(\frac{2-\nu}{G} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{Q}{\mu P} \right)^{2/3} \right) \quad (6.14)$$

Este tipo de contacto es muy frecuente en utillajes, pero debido a que los coeficientes de fricción son muy pequeños del orden de $\mu = 0,1 \div 0,3$ el semiancho de contacto adherido c es muy elevado y el valor de la tensión tangencial bajo, por lo que la fuerza tangencial apenas influye en el fallo la fluencia plástica que ocurre mayormente en la subsuperficie.

La figura 6.4 muestra un caso de contacto cilíndrico el el cual se puede apreciar la discontinuidad en la fuerza de rozamiento que señala las zonas de deslizamiento en los extremos y la de adhesión en la parte central.

6.1. Distribución de presiones entre superficies en contacto para distintas geometrías⁵⁵

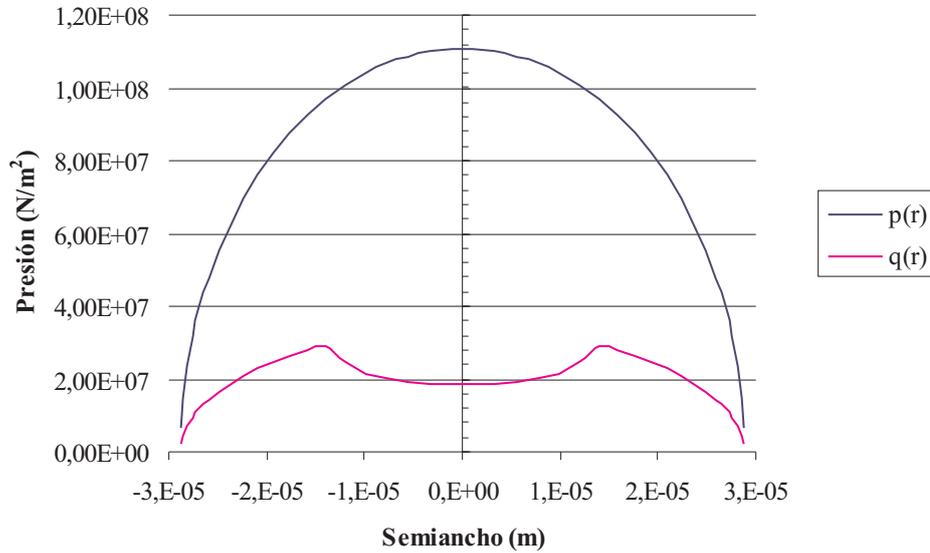


Figura 6.4: Distribución de presiones normales y tangenciales para $R = 30$ mm, $P = 5000$ N/m, $Q = 1200$ N/m y $\mu = 0,3$.

Además, las fuerzas normales suelen ser mucho mayores que las tangenciales en las sujeciones, sin llegar al límite de rozamiento. Para ello las fuerzas de apriete llevan un pretensado que proporciona una fuerza normal inicial que evite por todos los medios que la fuerza tangencial Q llegue a su límite μP .

Cuando la carga Q es oscilante, ocurre que sin perder la adhesión en la zona central, los extremos están continuamente deslizando produciendo un desgaste denominado *fretting*. Este tipo de desgaste es muy probable que se presente en el amarre de piezas. Para evitarlo conviene que las fuerzas normales debido a los aprietes sea mucho mayor que los esfuerzos tangenciales que puedan producirse.

6.1.4. Influencia de la rugosidad superficial en la distribución de presiones

Se ha de tener en cuenta en muchos casos que las superficies de la pieza y el utillaje con el que entra en contacto tienen una rugosidad superficial cuya altura suele ser del orden de magnitud del semiancho de contacto de Hertz, por lo tanto se ha de conocer la influencia de esa rugosidad superficial de ambas superficies en el perfil de presiones final, que afectará tanto al marcado sobre la pieza como en el posible inicio de grieta de fatiga. Formas de determinar la rugosidad superficial y su influencia en el fallo de lo que aquí se incluye un pequeño esbozo se puede estudiar con más profundidad en [8].

El parámetro más usado para estimar la calidad del acabado superficial es la desviación típica σ_s de la rugosidad superficial dada por el perfil de alturas del rugosímetro (en la literatura anglosajona “root mean squarermms”).

El parámetro normalizado para estimar la rugosidad superficial es la media de las alturas de los picos R_a pero como los rugosímetros actuales tienen salida digital, el cálculo de la desviación típica no entraña mucha dificultad, y es un parámetro mucho más repetitivo que el de la media R_a . La calidad de los engranajes suele venir expresado en función de los valores de la desviación típica.

El perfil dado por el rugosímetro se toma perpendicular a las líneas de contacto, pues es la dirección en la que se va a analizar el contacto plano. Para estimar la influencia de la rugosidad superficial en las tensiones superficiales cuando dos dientes entran en contacto, se va a tomar el modelo de Greenwood y Williamson de caracterización de superficies [11]. Este modelo supone que la distribución de alturas de la superficie es normal y toma los siguientes parámetros:

- σ_s desviación típica de la altura de la rugosidad
- κ_s curvatura de los picos
- η_s densidad de picos (n.º de picos por unidad de área)

Para la obtención de estos parámetros en superficies reales se parte del

6.1. Distribución de presiones entre superficies en contacto para distintas geometrías⁵⁷

perfil de la superficie dado por el rugosímetro. Este perfil es bidimensional, es una curva tomada en una longitud L que es la unión de los datos de las alturas z_i tomadas a intervalos de h . A partir de las alturas z_i del rugosímetro se pueden calcular los siguientes datos en cada punto registrado:

$$\begin{aligned}
 \text{pendiente} \quad m_i &= \frac{z_{i+1} - z_i}{h} \\
 \text{curvatura} \quad k_i &= \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} \\
 \text{densidad de picos} \quad \eta_p & \quad \text{dados en la curva del rugosímetro por unidad de longitud}
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Las series de datos anteriores (z_i, m_i, k_i) tienen sus respectivas desviaciones típicas σ_s , σ_m y σ_k . Los dos últimos parámetros son muy sensibles al intervalo h cuando éste se toma del orden de la distancia que hay entre picos. Las características de la topografía de la superficie rugosa se pueden estimar a partir de los datos del rugosímetro de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \sigma_s &\approx \sigma \\
 \kappa_s &\approx \sigma_k \\
 \eta_s &\approx \eta_p
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Para esta última suposición se ha tenido en cuenta que las estrías de la rugosidad superficial tienen el sentido perpendicular al plano del rugosímetro por lo que el número de picos en ese sentido es despreciable frente a los aparecidos en la curva origen. En el caso en el que la densidad de picos fuera igual en ambos sentidos, el valor de η_s sería estimado mejor por el de η_p . También se ha supuesto que la curva del rugosímetro detecte todos los picos al ser h lo suficientemente pequeño.

El contacto entre dos superficies rugosas, a efectos del estado de presiones y semiancho de contacto, se puede asemejar al sistema formado por una superficie plana rígida y una superficie con las siguientes características elásticas, geométricas y superficiales:

$$E = \frac{1}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}} \quad (6.17)$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_{s1}^2 + \sigma_{s2}^2} \quad ; \quad \kappa_s = \frac{1}{\frac{1}{\kappa_{s1}} + \frac{1}{\kappa_{s2}}} \quad ; \quad \eta_s = \eta_{s1} + \eta_{s2} \quad (6.18)$$

En el análisis de las tensiones de contacto se va a suponer que las asperezas no se deforman plásticamente, y tienen una distribución gaussiana de alturas, que es la más común en los procesos descritos. Se ha observado experimentalmente que la rugosidad superficial tiene dos efectos principales sobre la distribución de presiones de Hertz como se puede apreciar también en la Figura 6.5:

- Disminuye el pico de presiones
- Aumenta el ancho efectivo de contacto

La suma de estos dos efectos se traduce en que la tensión tangencial máxima subsuperficial disminuye y aumenta la profundidad a la que ocurre debido al aumento del ancho efectivo de contacto a^* . Ambos efectos son beneficiosos desde el punto de vista de resistencia a fatiga cuando la grieta tiene comienzo en la subsuperficie. Dos parámetros adimensionales en función de los cuales se puede expresar tanto la variación de la presión máxima de contacto, como el semiancho efectivo de contacto, han sido definidos por K. L. Johnson [11]:

$$\alpha = \left(\frac{16RE}{9P^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.19)$$

$$\mu = \frac{8}{3} \eta_s \sigma_s \left(\frac{2R}{\kappa_s} \right)^{\frac{1}{2}}$$

A partir de las representaciones gráficas de estos parámetros [11] se han obtenido la siguiente correlación lineal:

6.1. Distribución de presiones entre superficies en contacto para distintas geometrías⁵⁹

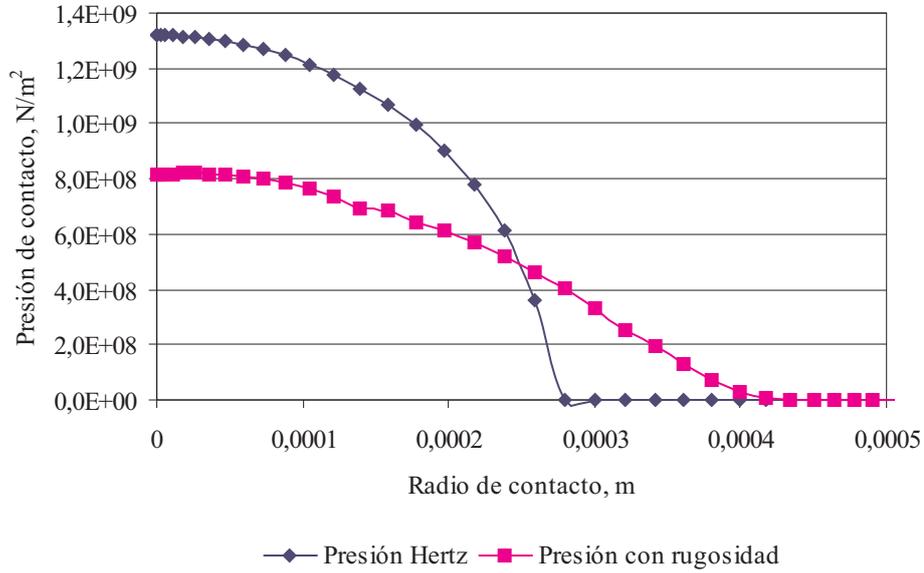


Figura 6.5: Influencia de la rugosidad superficial en la distribución de presiones de Hertz

$$\frac{p(0)}{p_0} = 0,924251 - 057377\alpha + 0,004063\mu \quad (6.20)$$

Los errores obtenidos mediante esta correlación son menores del 5% para el caso de la relación de presiones, y del 1% para la relación de semianchos de contacto. Se pueden considerar válidas para un rango de valores de a entre 0.05 y 1, y para un rango de valores de μ entre 4 y 17.

Se puede observar en la correlación que el parámetro más influyente con diferencia es σ_s , mientras que las características topográficas de η_s y κ_s tienen una influencia mucho menor. De las expresiones anteriores se deduce que si $a^*/a_0 < 0,05$ se puede despreciar la influencia de la rugosidad superficial en la distribución de presiones sobre las superficies.

6.1.5. Casos típicos de sujeción

La forma de analizar los apoyos es asemejando los apoyos a los casos vistos:

- Agarres con tornillo: Estos tornillos llevan por lo general punta esférica con un radio de curvatura elevado.
- Agarres de levas: Se tratan como contacto entre superficie cilíndrica (la leva con un radio de curvatura que le corresponda en el punto de contacto) y plana.
- Apoyo de ejes en bloques en V: se tratan como contacto entre superficie cilíndrica y superficie plana, la longitud de contacto será la del bloque en V.
- Garra de fricción: muy usado en los tornos, se debe tratar como una sucesión de contactos esféricos concatenados que se reparten la carga según la rigidez de cada punta. Aquí se utilizarían los métodos utilizados en la sección 5.
- ...

6.2. Determinación del daño en la pieza

Una vez determinado el esfuerzo que actúa sobre la superficie de contacto, se ha de conocer el estado tensional del punto más crítico para prever si va a quedar dañada la pieza después de realizar la operación.

La superficie de la pieza queda dañada si algún punto de la superficie o de la subsuperficie fluye plásticamente. Si el volumen de material deformado plásticamente aflora a la superficie el daño será visible, pero si el volumen permanece en la subsuperficie, quedando encerrado dentro de material deformado elásticamente, el daño no será visible pero el material quedará con unas tensiones residuales que pueden disminuir sus prestaciones en servicio.

De todas formas en muchos casos los requisitos de calidad exigen simplemente de este daño no haya aflorado a la superficie por tener ésta una simple función estética.

En el contacto elástico hertziano, el material empieza a fluir plásticamente en la subsuperficie cuando se alcanzan ciertos límites en la tensión cortante equivalente (criterio de Tresca) o en la energía de deformación (criterio de von Misses).

En el caso de contacto entre cilindros, la máxima tensión tangencial es de 0.3 veces la presión máxima de Hertz p_0 , y se produce a una profundidad de 0.78 veces el semiancho de contacto a . En el caso de contacto entre esferas, la máxima tensión tangencial se produce a 0.4 veces el semiancho de contacto.

En ambos casos el material empieza a fluir plásticamente pero en un volumen encerrado por material que sólo está deformado elásticamente con lo que el daño no llega a apreciarse en la superficie, y la pieza supera los controles de calidad. La superficie llega a deformar plásticamente y por lo tanto el daño empieza a ser apreciado cuando la presión máxima es 3 veces la tensión de fluencia equivalente \bar{Y} .

Se ha de tener en cuenta que la presencia de tracciones tangenciales, por pequeñas que éstas sean, hacen que la fluencia plástica comience mucho más cerca de la superficie con lo que el límite antes señalado se rebaja considerablemente. Para estudiar este caso y otros como la influencia de la rugosidad superficial, etc., se disponen de herramientas para iniciar su estudio y poder determinar el límite de esfuerzo sobre la superficie. Se ha desarrollado para este fin un algoritmo numérico que dibuja mapa tensional en la zona de contacto, y se puede estudiar en [7].

Capítulo 7

Recapitulación

En la presente exposición se ha visto la importancia que tiene un buen diseño de amarre en:

- La calidad del producto: Sobre todo en la precisión dimensional y geométrica conforme a las especificaciones de producto, como también en el estado de las superficies no mecanizadas que deben permanecer inalteradas durante el proceso
- La productividad: Un mayor control sobre las fuerzas de apriete permite aumentar el área corte y, por lo tanto, la fuerza de corte hasta el límite impuesto por la configuración del amarre, lo que se traduce en un aumento de la tasa de remoción de material hasta el máximo posible. Además, una buena parte del tiempo de producción lo lleva el montaje y desmontaje de la pieza en el utillaje
- El coste global: Pues el tiempo de diseño de utillaje, así como la precisión dimensional exigida, de la que dependerá la de la pieza final, etc. tienen un coste muy elevado

Además se han expuesto unas herramientas de análisis que permiten:

- Prever precisión de la operación. Estimando la capacidad del utillaje utilizado para la fabricación de piezas dentro de tolerancia.
- Configurar los amarres asegurando la fijación e la pieza. Mediante un análisis mecánico se puede determinar la fuerza de apriete y la fuerza que se ha de actuar sobre los mecanismos de sujeción, lo que es muy útil para el control de una posible automatización.
- Diseñar la geometría de contacto con el fin de que a pesar de las altas fuerzas de apriete no se produzcan indentaciones de los apoyos en superficies acabadas, lo que deterioraría el producto final.

Capítulo 8

Bibliografía

- [1] Arsham, H.; Oblak, M., “Matrix inversion: a computational algebra approach”, *International Journal of Mathematical Education Science and Technology*, Vol. 27, No. 4, pp 599-605, (1996).
- [2] Bjork, O., *Computer-Aided Tolerancing*, (ASME Press, New York 1989)
- [3] Boothroyd, G.; Knight, W., *Fundamentals of Machining and Machine Tools*, (Marcel Dekker, Basel 1995)
- [4] Cante, J.C.; Oliver, J.; Oller, S., “Simulación numérica de procesos de compactación de pulvimateriales. Parte 1: Modelo constitutivo, de contacto y fricción”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 14, No. 1, pp 67-99, (1998).
- [5] Estrems, M.; Faura, F.; Pedrero, J.I., Distribución de carga en dientes de engranajes helicoidales: Resolución por el método de los elementos finitos simplificado, *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, Vol.3 No.1, (1999) pp.21-30.
- [6] Estrems, M.; Faura, F.; Pedrero, J.I., Método para determinación de la distribución de carga entre dos cuerpos con varios puntos de contacto,

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol.18 No.1 (2002).

- [7] Estrems, M.; Faura, F.; Pedrero, J.I., Desarrollo de un método numérico para la determinación del mapa tensional en la zona de contacto entre dos cuerpos, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol.16 No.4 (2000) pp 455-472.
- [8] Estrems, M.; Faura, F., Influencia del proceso de fabricación de engranajes en su resistencia a presión superficial, *Anales de Ingeniería Mecánica*, Año 13 (2000).
- [9] Faura, F.; López, J., *Fundamentos de Fabricación* (ICE-Universidad de Murcia, Murcia 1998)
- [10] Hoffman, E.G., *Jig and Fixture Design* (Delmar, New York 1991)
- [11] Johnson, K.L., *Contact Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge 1987)
- [12] Pedrero, J.I.; Estrems, M.; Fuentes, A., Determination of the efficiency of cylindric gear sets, *4th World Congress on Gearing and Power Transmissions* CNIT-Paris (1999).
- [13] Rong, Y.; Zhu, Y., *Computer-Aided Fixture Design* (Marcel Dekker, Basel 1999)
- [14] Reklaitis, G.V.; Ravindran, A.; Ragsdell, K.M., *Engineering Optimization. Methods and applications*, John Willey & Sons, Nueva York, pp 191-200, (1983).
- [15] Rosado, P.; Zamanillo, J.D., *Planificación de Procesos* (SPUPV, Valencia 2000)
- [16] Vijayarangan, S.; Ganesan, N., "Stress analysis of composite spur gear using the finite element approach", *Computers and Structures*, Vol. 46, No. 5, pp 869-875, (1993).

Apéndice I: Rigidez de una viga empotrada en un extremo

Se define desplazamiento específico K_1 de la viga en un punto P como el desplazamiento del punto P donde se aplica la carga y en la dirección de ésta cuando el valor de la misma es la unidad. Si se representa gráficamente la K respecto de la distancia de P al empotramiento, se obtiene una curva creciente K como la mostrada en la Figura 7. Al ser un material elástico y los desplazamientos pequeños, el desplazamiento en un punto será proporcional a la carga aplicada, pues se trabaja dentro del ámbito lineal.

$$\delta = F_i k(x) \quad (8.1)$$

La energía de deformación de la viga será igual al producto de la fuerza por el desplazamiento en el punto de aplicación de la carga, y dividido por dos si se supone el procesos de aplicación es cuasiestático, con lo que al sustituir la

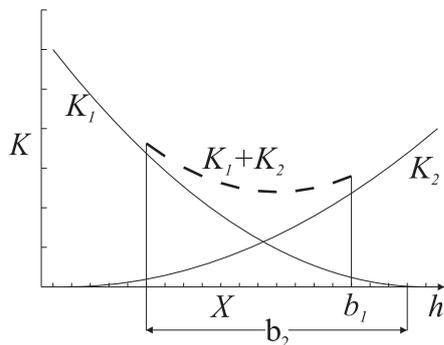


Figura 8.1: Rigidez conjunta de contacto cuando varía la posición de punto de contacto

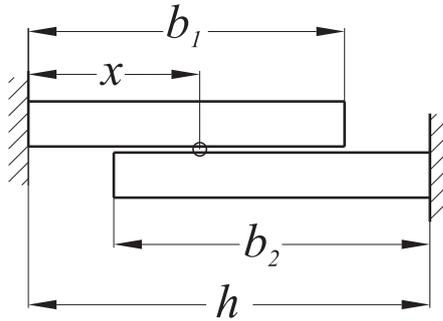


Figura 8.2: Sistema de dos cuerpos elásticos con un punto en contacto

Ecuación (8.1) resulta que la energía de deformación U es función cuadrática de la fuerza aplicada.

$$U = \frac{1}{2}F_i\delta = \frac{1}{2}F_iF_ik(x) \quad (8.2)$$

Si dos vigas contactan en un punto y en ese punto actúan la una contra la otra con una fuerza unidad, tal como se muestra en la Figura 8.2, los desplazamientos en ambas vigas vendrán dados por la rigidez de cada una. La suma de ambos desplazamientos dará como resultado la rigidez del par de vigas. Al venir las rigideces en función de la distancia desde el punto de carga hasta el empotramiento, en una de las vigas se hará una traslación del origen de coordenadas de forma que la nomenclatura usada en las expresiones coincida con las entidades de acotación de la Figura 8.2.

Apéndice II: Métodos de minimización de la energía de deformación

Para la resolución matemática del problema planteado en la Ecuación (5.10), existen varios métodos. La función objetivo es cuadrática, lo que hace que no se puedan aplicar las técnicas de programación lineal que son las más extendidas para resolver problemas de optimización. Las rutinas típicas de programación cuadrática tienen el inconveniente de ser iterativas y laboriosas, y pueden surgir problemas de convergencia. También existe la posibilidad de linealizar el problema como hizo Vijayarangan *et al.* [16] para solucionar el contacto entre cuerpos. Uno de los métodos adoptados ha sido el de asemejar el problema al tipificado de Kuhn-Tücker mucho más general y suficientemente conocido.

Método de las condiciones de Kuhn-Tücker

El problema señalado anteriormente es equivalente al conocido como problema de Kuhn-Tücker [14], por lo tanto, sus soluciones son equivalentes y bastará con solucionar el problema de Kuhn-Tücker, de carácter más general, una vez establecidas las condiciones de necesidad y suficiencia para la equivalencia del problema. El enunciado del problema de Kuhn-Tücker viene

dato, según la versión de Reklaitis [14], por la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && f(x) \\
 &\text{sujeto a} && g_j(x) \geq 0 && j = 1 \dots J \\
 &&& h_k(x) = 0 && k = 1 \dots K \\
 &&& x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

La equivalencia entre este enunciado y (5.10) se hace patente introduciendo en el problema de Kuhn-Tücker las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned}
 x_i &= f_i \\
 f(x) &= U\{f\} = \sum_{i,j} f_i c_{ij} f_j \\
 g_i(x) &= f_i && J = N \\
 h_k(x) &= \sum_{i=1}^N f_i - F && K = 1
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Este problema, conforme a la teoría de Kuhn-Tücker, equivale a encontrar, además del vector $x_{N \times 1}$, los vectores $u_{1 \times J}$, y $v_{1 \times K}$ que cumplen las condiciones de las expresiones (8.5) siguientes, siempre que se cumplan las condiciones de necesidad y suficiencia señaladas en el Apéndice II.

$$\begin{aligned}
 \nabla f(x) - \sum_{j=1}^J u_j \nabla g_j(x) - \sum_{k=1}^K v_k \nabla h_k(x) &= 0 \\
 u_j g_j(x) &= 0 \\
 u_j &\geq 0
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

Haciendo las sustituciones en el problema equivalente y operando las condiciones (8.5), resulta que las u_i son nulas, quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 2f_i c_{ii} + \sum_{j \neq i} c_{ij} f_j - v &= 0 \\
 \sum_i f_i - F &= 0
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

No se ha encontrado ningún significado físico a v , siendo un simple operador para calcular la solución.

Al hacer la equivalencia de Kuhn-Tücker han aparecido las variables c_{ij} y v , aumentando el número de ecuaciones pero también igualando su número al número de incógnitas, y eliminando las inecuaciones.

Lo usual en la solución de la mayoría de los problemas de Kuhn-Tücker es que la equivalencia no salga tan sencilla lo que obliga, como en los ejemplos presentados por Reklaitis [14], a solucionarlos por tanteo. Las condiciones de necesidad y suficiencia se verifican en este caso, como se aprecia en el Apéndice II, lo que significa que la solución única que resuelve el problema es la auténtica, es decir, que las f_i de la solución del sistema de ecuaciones (8.6) constituyen la verdadera distribución de fuerzas que resuelven el problema entre dos cuerpos en contacto.

Método de los Multiplicadores de Lagrange

Se presenta ahora una versión del problema solucionado por el método de los Multiplicadores de Lagrange. En el cálculo de la distribución de carga por este método, el sistema de ecuaciones final es idéntico al que resulta de la formulación por las condiciones de Kuhn-Tücker.

Partiendo del problema mostrado en la Ecuación (5.10) se pueden sustituir las inecuaciones de la restricción (b) introduciendo valores a_i como incógnitas, quedando el problema definido de la forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_i \sum_j f_i c_{ij} f_j \\ & \sum f_i = F \quad (\text{a}) \\ & f_i - a_i^2 = 0 \quad (\text{b}) \\ & i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (8.7)$$

Donde con las a_i se han introducido n variables y n restricciones, eliminando las inecuaciones. La función a minimizar, siguiendo el método de los Multiplicadores de Lagrange, tendrá la forma

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i c_{ij} f_j - \lambda \left(\sum_{i=1}^n f_i - F \right) - \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - a_i^2) \quad (8.8)$$

Seguindo el método, se procede a hacer estacionaria la función U

$$\frac{\partial U}{\partial f_i} = 0 = 2f_i c_{ii} + \sum_{j \neq i} c_{ij} f_j - \lambda - \lambda_i \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = 0 = +2\lambda_i a_i \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = 0 = -(f_i - a_i^2) \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0 = -\left(\sum f_i - F\right) \quad (8.12)$$

De (8.10) se deduce que todos los λ_i son nulos, con lo que de (8.9) y (8.12) se obtiene un sistema de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas, que proporciona los valores de f_i y de λ . Este sistema de ecuaciones coincide con el proporcionado por las condiciones de Kuhn-Tücker, obtenido anteriormente, que de igual modo se puede representar en forma matricial pues las ecuaciones son lineales, con lo que el sistema que queda es equivalente al dado en la expresión (8.6) con sólo sustituir v por λ .

Habitualmente, el multiplicador de Lagrange λ suele tener un significado físico concreto. En este caso, no se ha encontrado, siendo un simple operador necesario para hallar la solución del problema.

Se puede percibir que los valores de las f_i proporcionados por el método de los Multiplicadores de Lagrange son todos positivos, pues antes de que una fuerza f_i fuera negativa dejaría de haber contacto. Sin embargo, matemáticamente podría ocurrir que a_i fuera un número complejo. Una demostración intuitiva de que esto no ocurre es que, para que la energía fuera mínima y la fuerza total sea constante, una fuerza negativa f_i supondría que las fuerzas positivas tendrían que aumentar, con lo que la energía del sistema total aumentaría, con lo que se incumpliría el principio de mínima energía.

De todas formas, al estar demostrado matemáticamente que las condiciones de Kuhn-Tücker se cumplen, se puede extender esta conclusión al método de los multiplicadores de Lagrange, pues los resultados son los mismos.

Apéndice III: Teoremas de Mohr para calcular la deformada de una viga

Los teoremas de Mohr sirven para calcular las diferencias de ángulo y de flecha entre dos puntos de una viga deformada debido al momento flector. Es una forma de simplificar las ecuaciones diferenciales que proporcionan la curvatura de una viga flectada.

1er teorema de Mohr

El primer teorema de Mohr sirve para calcular el ángulo θ_{AB} que forman entre sí dos secciones A y B de una viga flectada, según se muestra en la Figura 8.3.

La expresión del ángulo viene dada por:

$$\theta_{AB} = \int_A^B \frac{M_z(x)}{EI} dx \quad (8.13)$$

2º teorema de Mohr

El segundo teorema de Mohr es consecuencia del primero y hace referencia a las flechas de la viga flectada. Como el ángulo θ_{AB} es el mismo que existe entre las tangentes a la línea neutra, multiplicando el ángulo por la distancia

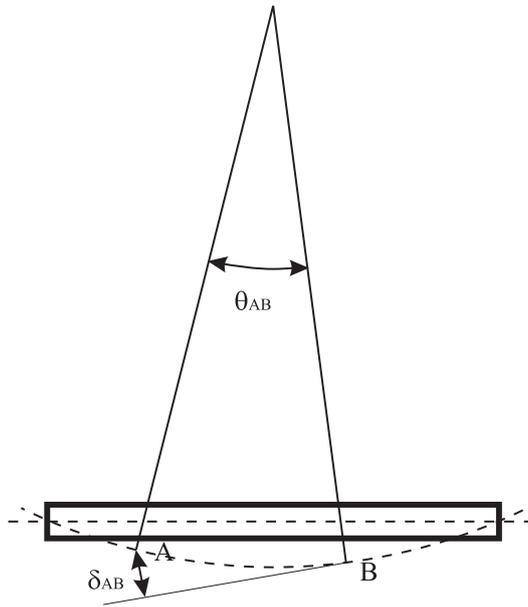


Figura 8.3: Ángulo entre dos secciones de una viga deformada

entre A y B nos dará el diferencial de flecha de un punto respecto a otro. Por ello, integrando este diferencial proporcionará la diferencia la flecha del segundo punto respecto a la tangente del primero.

$$\delta_{AB} = \int_A^B \frac{M_z(x)(x_b - x)}{EI} dx \quad (8.14)$$

Apéndice IV: Determinación de la presión de contacto entre dos cuerpos

A continuación se va a solucionar el caso plano por ser más sencillo y fácil de comprender. Cuando se tiene una distribución de presiones sobre una superficie semiindefinida, donde no se conocen las tensiones en la subsuperficie, la primera solución más intuitiva es su discretización en cargas puntuales de las que se conoce el campo de tensiones producido por cada una de ellas mediante las expresiones (8.15), según la Figura 8.4.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{2P \cos\theta}{\pi r} \\ \sigma_\theta &= 0 \quad ; \quad \tau_{r\theta} = 0\end{aligned}\tag{8.15}$$

Aplicando la ley de Hooke se pueden determinar las deformaciones las cuales, a su vez, están relacionadas con los desplazamientos en las direcciones

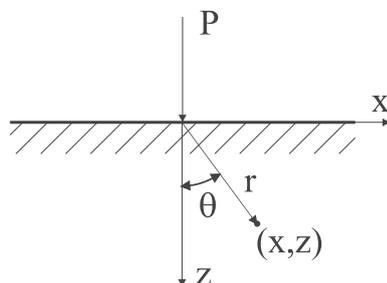


Figura 8.4: Carga puntual sobre una superficie semiindefinida

polares:

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= -\frac{2P(1-\nu^2)\cos\theta}{\pi E r} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{2P\nu(1+\nu)\cos\theta}{\pi E r} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} \\ \tau_{r\theta} &= 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\end{aligned}\quad (8.16)$$

Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales es resoluble mediante ciertas manipulaciones matemáticas, que aquí no se van a exponer por razones de espacio, a nuestros efectos sólo nos interesa el valor de los desplazamientos en la superficie y su relación con la fuerza aplicada:

$$\begin{aligned}(\bar{u}_r)_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2E} \\ (\bar{u}_r)_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= \frac{2P}{\pi E}(1-\nu^2)\ln r + C\end{aligned}\quad (8.17)$$

Por la constante C es imposible tener un valor de \bar{u}_z por lo que se ha de poner una condición de contorno arbitraria. La barra encima de las magnitudes indican que se refieren a puntos de la superficie del espacio semiinfinito.

En el caso de actuar una carga tangencial se tiene el siguiente campo de tensiones:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{2Q\operatorname{sen}\theta}{\pi r} \\ \sigma_\theta &= 0 \quad ; \quad \tau_{r\theta} = 0\end{aligned}\quad (8.18)$$

Siguiendo el mismo procedimiento usado anteriormente se obtiene el siguiente campo de deformaciones:

$$\begin{aligned}(\bar{u}_r)_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= (\bar{u}_r)_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = \frac{2Q}{\pi E}(1-\nu^2)\ln r + C \\ (\bar{u}_r)_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)Q}{2E}\end{aligned}\quad (8.19)$$

Aplicando el principio de superposición se pueden obtener los desplazamientos cuando actúa una distribución de presiones normal $p(s)$ y tangencial

$q(s)$, de forma que se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{u}_x &= +\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left\{ \int_{-b}^x p(s)ds - \int_x^a p(s)ds \right\} - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a q(s) \ln|x-s|ds + C_1 \\ \bar{u}_z &= -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a p(s) \ln|x-s|ds + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left\{ \int_{-b}^x q(s)ds - \int_x^a q(s)ds \right\} + C_2\end{aligned}\quad (8.20)$$

Son integrales que se pueden resolver numéricamente a falta de una condición de contorno para obtener la constante.

Suelen ser más útiles sus derivadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} p(x) - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{q(s)}{x-s} ds \\ \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} &= -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{x-s} ds + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} q(x)\end{aligned}\quad (8.21)$$

La primera parte de esta ecuación es la deformada superficial ϵ_x , mientras que la segunda parte representa la pendiente de la superficie tal como queda. Estas ecuaciones incluyen en sí unas integrales impropias llamadas valores propios de Cauchy que se pueden solucionar mediante el teorema de los residuos o numéricamente mediante cuadraturas especiales.

Como se disponen de dos ecuaciones y cuatro variables ($p(x)$, $q(x)$, \bar{u}_x , \bar{u}_z), habrá que restringir dos para obtener las otras dos. De esta forma surgen cuatro tipos de problemas según las dos variables conocidas. Entre paréntesis se señalan ejemplos de esos casos.

- **Tipo I:** $p(x)$ y $q(x)$ (distribuciones hidráulicas)
- **Tipo II:** \bar{u}_z y $q(x)$ (contacto sin fricción contra un cuerpo rígido $q(x) = 0$), o bien \bar{u}_x y $p(x)$ (contacto entre superficies que no deslizan $\bar{u}_x = 0$)
- **Tipo III:** \bar{u}_x y \bar{u}_z (punzón rígido con adhesión $\bar{u}_x = 0$)
- **Tipo IV:** \bar{u}_z y $q(x) = \pm\mu p(x)$ (punzón rígido con contacto deslizante)

El tipo que más se presenta en sujeción de piezas es el de tipo IV, en el cual se tiene que un desplazamiento vertical forzado por el utillaje que habitualmente es más duro que la pieza de trabajo, y además no hay adhesión

entre las dos superficies, entre las cuales hay un coeficiente de rozamiento. Este problema es extremadamente complejo y se están dedicando muchos esfuerzos de investigación para obtener soluciones analíticas muy aproximadas.

Habitualmente en la sujeción de piezas por razones de seguridad, las fuerzas de apriete normales son mucho mayores que las tangenciales a las cuales van a estar sometidos, por lo que se puede simplificar el problema para convertirlo en un problema de tipo III con el que las tensiones tangenciales superficiales que son las críticas desde el punto de vista de daño de las piezas son mayores.

En los problemas de tipo III las incógnitas son la distribución de presiones normales y las tangenciales. El área de contacto se puede determinar igualando la integral de las presiones a la fuerza normal que sí suele ser un dato, al igual que la fuerza tangencial.

Muy frecuentemente se presentan en el contacto una combinación de varios tipos de problemas, además, en el contacto utillaje-pieza, los datos no son la distribución de presiones sino la fuerza normal y la fuerza tangencial total, las cuales deben ser iguales a la integración de las presiones normales y tangenciales respectivamente. Tampoco se suele conocer el área de contacto, dato que se obtiene por iteración.

Para simplificar la resolución del problema se van a resolver los problemas de tipo II con $q(x) = 0$, uno de cuyos casos particulares es el famoso y común contacto hertziano. Después se expondrán otras soluciones que incluyen el contacto con deslizamiento parcial (Tipo IV), y el contacto entre superficies rugosas (Tipo II pero con múltiples puntos de contacto). Con el campo de presiones calculado se procederá a la determinación del mapa tensional en la subsuperficie que indicará si se produce daño en la pieza.

Apéndice V: Valores propios de Cauchy para forma geométrica polinomial

Se trata de resolver el valor propio de Cauchy que tiene la siguiente forma:

$$I_n = \int_{-1}^1 \frac{S^n(1-S^2)^{\frac{1}{2}}}{X-S} dS \quad (8.22)$$

en donde $X = \frac{x}{a}$ y $S = \frac{s}{a}$.

La solución de esta integral sigue un ley de recursividad de

$$I_n = XI_n - 1 - J_n \quad (8.23)$$

Siendo $I_0 = \pi X$ y J_n sale de la siguiente integral:

$$J_n = \int_{-1}^1 S^n(1-S^2)^{\frac{1}{2}} dS \quad (8.24)$$

J_n es nulo para n impar.

Aunque esta solución es para funciones polinomiales, se puede tener en cuenta que cualquier función puede desarrollarse en polinomios de Legendre que son los que mejor aproximación por mínimos cuadrados dan.

Apéndice VI: Resolución del problema hertziano

En los problemas de tipo II en donde $q(x) = 0$, la forma del punzón rígido tiene una superficie polinomial de la forma $u_z(x) = -Bx^{n+1}$ la ecuación de contacto resultante es:

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}(n+1)Bx^n \quad (8.25)$$

Para despejar $p(x)$ sirve la equivalencia de Miklin (1948)[11]:

$$\text{Si } \int_{-b}^a \frac{F(s)}{x-s} ds = g(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\pi^2 \{(x+b)(a-x)\}^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-b}^a \frac{\{(x+b)(a-x)\}^{\frac{1}{2}} g(s)}{x-s} ds + C \right] \quad (8.26)$$

La constante C se calcula mediante la condición de contorno del valor de la fuerza total:

$$\int_{-b}^a p(x) dx = P \quad (8.27)$$

De este modo queda que para contacto simétrico la presión sobre la superficie será:

$$p(x) = -\frac{E(n+1)Ba^{n+1}}{2(1-\nu^2)\pi} \frac{I_n}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{P}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \quad (8.28)$$

A continuación se estudiará el caso de contacto entre un punzón rígido sobre una superficie plana elástica. Si el punzón es cilíndrico el contacto será hertziano. La superficie cilíndrica de radio R se puede aproximar mediante

una parábola en la cual la distancia penetrada será:

$$u_z(x) = \frac{x^2}{2R} \quad (8.29)$$

con lo que estableciendo las equivalencias respecto al problema anterior se tiene que $B = -1/(2R)$ y $n = 1$.

Normalmente en el contacto se tiene como dato la fuerza total de compresión P , teniendo en cuenta el principio de Boussinesq por el que la presión en los extremos del contacto debe ser nula, se tiene que

$$p(\pm a) = \frac{1}{\pi(a^2 - a^2)} \left(-\frac{\pi E a^2}{4R} + P \right) \quad (8.30)$$

Para que tenga un valor finito se ha de cumplir que

$$P = \frac{\pi E a^2}{4R} \quad (8.31)$$

Lo que permite obtener el semiancho de contacto a partir de los datos del problema.

$$a = \sqrt{\frac{4RP}{\pi E}} \quad (8.32)$$

La forma del perfil de presiones será elíptica:

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (8.33)$$

La máxima presión sobre la superficie será entonces:

$$p_0 = \sqrt{\frac{PE}{\pi R}} \quad (8.34)$$