

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN  
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA



**Proyecto Fin de Carrera**

# **Síntesis de Filtros Usando el Método de la Matriz de Acoplos, y Aplicación al Diseño de Filtros Transversales Multicapa**



AUTOR: Mónica Martínez Mendoza  
DIRECTOR: Alejandro Álvarez Melcón  
CODIRECTOR: David Cañete Rebenaque

Cartagena, Noviembre 2006





<b>Autor</b>	Mónica Martínez Mendoza
<b>E-mail del Autor</b>	<a href="mailto:shanaz00@hotmail.com">shanaz00@hotmail.com</a>
<b>Director(es)</b>	Alejandro Álvarez Melcón
<b>E-mail del Director</b>	<a href="mailto:Alejandro.alvarez@upct.es">Alejandro.alvarez@upct.es</a>
<b>Codirector(es)</b>	David Cañete Rebenaque
<b>Título del PFC</b>	<b>Síntesis de Filtros Usando el Método de la Matriz de Acoplos, y Aplicación al Diseño de Filtros Transversales Multicapa</b>
<b>Descriptores</b>	Filtros de microondas, matriz de acoplo, métodos de síntesis de circuitos, diseño de filtros
<b>Resumen</b>	
<p>En este proyecto fin de carrera se pretende abordar el estudio de la técnica de la matriz de acoplo y su aplicación a la síntesis de diferentes funciones de transferencia de filtros utilizados en comunicaciones móviles y por satélite.</p> <p>El estudio de la técnica, incluirá la formulación necesaria para llegar a la matriz de acoplamiento, así como diferentes procedimientos para transformar ésta en otra equivalente, que represente una topología más adecuada para la tecnología que se pretenda utilizar en la fabricación del filtro. Tras la primera fase de estudio de la técnica, se implementará una herramienta capaz de calcular los acoplos necesarios entre los elementos del filtro, así como de transformar la matriz de acoplo, correspondiente a una configuración dada, en otra equivalente. Finalmente, se sintetizarán diversas funciones de transferencia de aplicación práctica, incluyendo la topología a utilizar en cada caso, y posibles estructuras para la implementación final del filtro.</p>	
<b>Titulación</b>	Ingeniero de Telecomunicación
<b>Intensificación</b>	Sistemas y Redes de Telecomunicación
<b>Departamento</b>	Tecnología de la Información y la Comunicación
<b>Fecha de Presentación</b>	Noviembre de 2006



*A mis padres Antonio e Isabel  
y a mi hermana Marina.*



*“No llores por no haber visto el sol,  
porque las lágrimas te impedirán ver las estrellas”*

*Rabindranath Tagore*



# AGRADECIMIENTOS

---

Quiero comenzar dando las gracias a **mis padres** por el apoyo incondicional en todo lo que hago, y por haber creído siempre en mí. Por preocuparse día a día de mi felicidad y respaldarme cuando lo he necesitado. Gracias también a **Marina**, mi hermana, mi amiga y mi cómplice en el día a día. Soy quien soy y lo que soy, sin duda, gracias a vosotros tres. Juntos podemos con todo porque formamos el equipo perfecto. Os quiero.

Dar las gracias también a **Sebas**, por cada momento que ha compartido conmigo. Por tener siempre una sonrisa para mí, y por hacer que me levantara cada día con ilusión y ganas de ir a la universidad. También por el interés que ha puesto en este proyecto y por intentar resolver conmigo las dudas que le planteé.

Gracias a **mis amigas** por todos los momentos en que han contado conmigo. En especial, gracias a **Arantxa y Almudena**, por los cafés que nos hemos tomado juntas estos últimos 5 años, por escucharme siempre y tener palabras de ánimo cuando las necesitaba. Sé que estáis y estaréis siempre ahí.

Gracias a **Flori, Lidia, Laura, Juan, Javi, Sergio y todos los demás compañeros de la carrera**, porque gran parte del camino que finaliza con este proyecto lo recorrimos juntos. Gracias por las horas en prácticas, por las clases (los que iban), por las fiestas universitarias (aquí sí que iban todos), por las comidas y los desayunos en la cantina, por las risas... Todo fue más fácil y divertido cuando estabais cerca.

También quiero dar las gracias a **Alejandro, mi director de proyecto**, por haber confiado en que podía hacerlo y por ser optimista cuando yo no lo era. Gracias por todo el apoyo técnico recibido, pero sobre todo gracias por el entusiasmo contagioso puesto a cada paso, que ha conseguido motivarme día a día, y por la alegría mostrada ante cualquier pequeño avance.

Agradezco también a **David Cañete, mi codirector de proyecto**, la cesión del código inicial a partir del que desarrollé algunos de los programas que forman este proyecto, así como su disposición constante para resolver dudas.

En definitiva, gracias a todos los que me ayudaron a encontrar el camino cuando pensé que estaba perdida, a los que me contagian ilusiones, a los que día a día me cruzo por los pasillos y me devuelven la sonrisa, y a todos aquellos que me ayudan a seguir adelante de una u otra forma. Sin todos vosotros, esto no habría sido posible.



# Índice

<b>1. Introducción.....</b>	<b>1</b>
1.1 Descripción del proyecto .....	1
1.1.1 Planteamiento inicial del proyecto .....	1
1.1.2 Objetivos.....	1
1.1.3 Estructura de la memoria.....	2
1.1.4 Aportaciones novedosas .....	2
1.1.5 Software desarrollado .....	3
1.2 Conceptos básicos .....	4
1.2.1 ¿Qué es un filtro?.....	4
1.2.2 Síntesis de filtros .....	7
1.2.3 Principales tipos de filtros .....	8
<b>2. Método de síntesis de la matriz <math>N \times N</math>.....</b>	<b>11</b>
2.1 Introducción.....	11
2.2 Síntesis de polinomios .....	12
2.2.1 Función de filtrado .....	13
2.2.2 Técnica recursiva.....	20
2.2.3 Principio de singularidad alternativa .....	22
2.2.3.1 Método general .....	23
2.2.3.2 Método de ‘Rhodes & Alseyab’ .....	24
2.2.4 Ejemplo de síntesis de polinomios .....	28
2.3 Procedimiento para obtener la matriz de acoplo $N \times N$ .....	35
2.3.1 Redes de dos terminaciones.....	35
2.3.2 Redes de una terminación.....	39
2.3.3 Síntesis.....	42
2.3.3.1 Procedimiento para obtener las ecuaciones del circuito.....	44
2.3.3.2 Cálculo de los parámetros de admitancia .....	46
2.3.3.3. Ortonormalización de Gram Schmidt.....	50
2.4 Características de transferencia y reflexión a partir de la matriz $N \times N$ .....	53
2.4.1 Relación entre la admitancia de entrada, la admitancia de transferencia y los parámetros $S_{21}$ y $S_{11}$ .....	54
2.4.1.1 Redes de dos terminaciones.....	54
2.4.1.2 Redes de una terminación.....	56
2.5 Ejemplos .....	58
2.5.1 Síntesis de una red con dos terminaciones .....	58
2.5.2 Síntesis de una red con una terminación .....	63
2.5.3 Ejemplos comparativos .....	68
2.6 Software desarrollado .....	71
2.7 Conclusiones.....	72

<b>3. Método de síntesis de la matriz <math>N+2</math> .....</b>	<b>73</b>
3.1 Introducción.....	73
3.2 Síntesis de la función de admitancia.....	74
3.2.1 Síntesis mediante polinomios de transferencia y reflexión .....	74
3.2.2 Síntesis mediante aproximación circuital.....	79
3.3 Síntesis de la matriz transversal $N+2$ .....	87
3.4 Características de transferencia y reflexión a partir de la matriz $N+2$ .....	89
3.5 Ejemplo de síntesis de la matriz $N+2$ . Paso banda.....	89
3.6 Extensión a filtros de banda rechazada.....	95
3.6.1 Relación entre filtros paso banda y banda rechazada.....	95
3.6.2 Solución dual en síntesis de filtros de banda rechazada.....	96
3.6.3 Ejemplos de síntesis de la matriz $N+2$ . Banda rechazada.....	98
3.7 Software desarrollado .....	101
3.8 Conclusiones.....	101
<b>4. Diferentes topologías para la implementación práctica de filtros.....</b>	<b>103</b>
4.1 Introducción.....	103
4.2 Topología <i>Folded Canonical Form</i> .....	104
4.2.1 Rotaciones y cancelación de elementos de la matriz.....	104
4.2.2 Procedimiento para reducir la matriz de acoplo a su forma <i>folded canonical</i> .....	108
4.3 Topología <i>Parallel Connected</i> .....	121
4.3.1 Ejemplo con dos subredes de grado 2. ....	121
4.3.2 Ejemplo con una subred de grado 4 y otra de grado 2. ....	125
4.4 Topología <i>Cul de Sac</i> .....	129
4.4.1 Síntesis.....	129
4.4.2 Ejemplos .....	131
4.5 Software desarrollado .....	136
4.6 Conclusiones.....	136
<b>5. Síntesis de filtros utilizando nodos no resonantes. ....</b>	<b>137</b>
5.1 Introducción.....	137
5.2 Síntesis y ejemplo de un filtro de grado 3 y un cero de transmisión.....	139
5.3 Síntesis y ejemplo de un filtro de grado 4 y dos ceros de transmisión.....	144
5.4 Síntesis y ejemplo de un filtro de grado 3 y dos ceros de transmisión.....	149
5.5 Software desarrollado .....	151
5.6 Conclusiones.....	152

<b>6. Ejemplos de aplicación práctica.....</b>	<b>153</b>
6.1 Introducción.....	153
6.2 Diseño de un filtro paso banda de cuarto orden y dos ceros de transmisión, en configuración <i>parallel connected 2-2</i> .....	153
6.3 Diseño de un filtro paso banda de cuarto orden y dos ceros de transmisión, en una configuración alternativa. ....	158
6.4 Diseño de un filtro paso banda de sexto orden con cuatro ceros de transmisión en configuración <i>parallel connected 4-2</i> .....	161
6.5 Diseño de un filtro paso banda de quinto orden con dos ceros de transmisión, en configuración <i>cul-de-sac</i> .....	165
6.6 Diseño e implementación de filtros planares con múltiples acoplos.....	168
6.6.1 Filtro paso banda .....	168
6.6.1.1 Síntesis.....	168
6.6.1.2 Implementación y resultados .....	170
6.6.2 Filtro de banda rechazada .....	172
6.6.2.1 Síntesis.....	172
6.6.2.2 Implementación y resultados .....	174
6.7 Diseño de filtros en tecnología híbrida.....	176
6.7.1 Diseño con dos ceros de transmisión asimétricos .....	176
6.7.2 Diseño con dos ceros de transmisión simétricos .....	179
6.7.3 Diseño con todos los ceros de transmisión situados en el infinito .....	181
6.8 Conclusiones.....	184
<b>7. Conclusiones y líneas futuras de investigación .....</b>	<b>185</b>
7.1 Conclusiones.....	185
7.2 Líneas futuras de investigación .....	186
<b>Anexo A .....</b>	<b>187</b>
<b>Anexo B.....</b>	<b>193</b>
<b>Anexo C .....</b>	<b>197</b>
<b>Anexo D .....</b>	<b>199</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>201</b>



# Índice de Figuras

Figura 1. 1. Respuesta de un filtro paso banda de orden $N = 7$ .....	5
Figura 1. 2. Detalle de la respuesta de un filtro paso banda de orden $N = 7$ en torno a cero. ....	5
Figura 1. 3. Retardo de grupo de un filtro paso banda de orden $N = 7$ . ....	6
Figura 1. 4 Respuesta típica de un filtro Butterworth.....	9
Figura 1. 5 Respuesta típica de un filtro Chebyshev. ....	9
Figura 1. 6 Respuesta típica de un filtro Elíptico. ....	9
Figura 2. 1. Representación de la función de filtrado $C_N(\omega)$ .....	14
Figura 2. 2 Topología de la red que pretendemos sintetizar, para un caso de grado $N=7$ .....	23
Figura 2. 3 Distribución de las raíces del polinomio $[\varepsilon_R \cdot P(s) - j \cdot \varepsilon \cdot F(s)]$ y su conjugado. ....	26
Figura 2. 4. Distribución de las raíces de los polinomios $[\varepsilon_R \cdot P(s) - j \cdot \varepsilon \cdot F(s)]$ y $E(s)$ . .....	27
Figura 2. 5. Ceros de transmisión especificados .....	28
Figura 2. 6. Distribución de las raíces del polinomio $\varepsilon_R \cdot P(\omega) - j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)$ y su conjugado en el plano complejo .....	31
Figura 2. 7. Distribución de las raíces de $E(s)$ y el polinomio $\varepsilon_R \cdot P(\omega) - j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)$ en el plano complejo.....	31
Figura 2. 8. Característica de transferencia .....	32
Figura 2. 9. Característica de reflexión.....	33
Figura 2. 10. Nivel de pérdidas de retorno, y características de transferencia y reflexión en dB,.....	33
Figura 2. 11. Retardo de grupo .....	34
Figura 2. 12. Función de filtrado de grado $N$ .....	34
Figura 2. 13. Red de dos terminaciones .....	35
Figura 2. 14. Definición de la impedancia de entrada.....	36
Figura 2. 15. Análisis de la red.....	36
Figura 2. 16. Red de una terminación.....	39
Figura 2. 17. Análisis de la red.....	40
Figura 2. 18. Red genérica de dos puertos.....	42
Figura 2. 19. Red de con transformadores para normalizar a la unidad las impedancias. 43	
Figura 2. 20. Cavidad inicial en el interior del prototipo paso banda.....	44
Figura 2. 21. Varias cavidades acopladas. Interior del prototipo paso banda .....	45
Figura 2. 22. Circuito para calcular $y_{21}(s)$ .....	46
Figura 2. 23. Circuito para calcular $y_{22}(s)$ .....	47
Figura 2 24. Primer paso en el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt .....	51
Figura 2. 25. Red de dos terminaciones .....	54
Figura 2. 26. Análisis de la red de dos terminaciones .....	55
Figura 2. 27. Red de una terminación.....	56
Figura 2. 28. Ceros de transmisión especificados .....	58
Figura 2. 29. Raíces del polinomio numerador $E(s)$ .....	60
Figura 2. 30. Característica de transferencia .....	61
Figura 2. 31. Característica de reflexión.....	61

Figura 2. 32. Nivel de pérdidas de retorno y característica de transferencia y reflexión en dB .....	62
Figura 2. 33. Retardo de grupo .....	62
Figura 2. 34. Ceros de transmisión especificados .....	63
Figura 2. 35. Raíces del polinomio numerador $E(s)$ .....	65
Figura 2. 36. Característica de transferencia .....	66
Figura 2. 37. Característica de reflexión.....	66
Figura 2. 38. Nivel de pérdidas de retorno y característica de transferencia y reflexión en dB .....	67
Figura 2. 39. Retardo de grupo .....	67
Figura 3. 1. Array de N resonadores transversales incluyendo el acoplo directo fuente / carga $M_{SL}$ .....	79
Figura 3. 2. Sección paso bajo k-ésima .....	80
Figura 3. 3. Sección paso bajo equivalente, a frecuencias infinitas. ....	80
Figura 3. 4. Único camino posible entre fuente y carga.....	80
Figura 3. 5. Circuito equivalente del array transversal cuando $s = \pm j \cdot \infty$ .....	81
Figura 3. 6. Sección k-ésima .....	84
Figura 3. 7. Etapas para el cálculo de la matriz $ABCD$ .....	84
Figura 3. 8. Matriz transversal $N+2$ .....	88
Figura 3. 9. Matriz transversal $N + 2$ .....	91
Figura 3. 10. Ceros de transmisión del filtro <i>fully canonical</i> diseñado.....	92
Figura 3. 11. Función de filtrado de grado N del filtro <i>fully canonical</i> diseñado .....	92
Figura 3. 12. Raíces del polinomio denominador.....	93
Figura 3. 13. Característica de transferencia y reflexión del filtro <i>fully canonical</i> diseñado.....	93
Figura 3. 14. Respuesta frecuencial y nivel de pérdidas de retorno del filtro <i>fully canonical</i> diseñado.....	94
Figura 3. 15. Retardo de grupo del filtro <i>fully canonical</i> diseñado.....	94
Figura 3. 16. Respuesta en frecuencia del filtro paso banda de orden 4. ....	96
Figura 3. 17. Ceros de transmisión deseados.....	98
Figura 3. 18. Nivel de rechazo y característica de transferencia y reflexión del filtro en dB. ....	98
Figura 3. 19. Nivel de rechazo y característica de transferencia y reflexión del filtro en dB. ....	99
Figura 3. 20. Nivel de rechazo y característica de transferencia y reflexión del filtro en dB. ....	100
Figura 4. 1. Ejemplo gráfico de la propiedad a). ....	106
Figura 4. 2. Topología que pretendemos conseguir, y representación de los posibles acoplos distintos de cero.....	106
Figura 4. 3. Matriz de acoplo.....	107
Figura 4. 4. Orden de las cancelaciones de los acoplos para el caso par e impar.....	108
Figura 4. 5. Aspecto de la matriz tras las primeras 4 transformaciones .....	109
Figura 4. 6. Aspecto de la matriz tras las primeras 7 transformaciones.....	110
Figura 4. 7. Aspecto de la matriz en cada una de las 3 transformaciones que eliminan los elementos deseados de la última columna. ....	111
Figura 4. 8. Aspecto de la matriz tras 9 transformaciones. ....	112
Figura 4. 9. Aspecto final de la matriz .....	112
Figura 4. 10. Aspecto de la matriz, al eliminar el elemento $M_{46}$ .....	114

Figura 4. 11. Aspecto de la matriz tras las tres primeras transformaciones. ....	115
Figura 4. 12. Aspecto de la matriz, al eliminar los elementos $M_{14}$ y $M_{13}$ .....	116
Figura 4. 13. Aspecto de la matriz tras las primeras 5 transformaciones .....	116
Figura 4. 14. Aspecto final de la matriz .....	117
Figura 4. 15. Nivel de rechazo y característica de transferencia y reflexión en dB .....	118
Figura 4. 16. Folded form para una matriz 7x7 .....	118
Figura 4. 17. Red <i>folded canonical</i> de orden 5.....	119
Figura 4. 18. Nivel de pérdidas de retorno en dB y función de transferencia y reflexión del filtro .....	119
Figura 4. 19. <i>Folded form</i> para una matriz 4x4.....	120
Figura 4. 20. Red <i>folded canonical</i> de orden 4.....	120
Figura 4. 21. Topología de la primera subred. Residuos $k = 1$ y $k = 2$ .....	122
Figura 4. 22. Topología de la segunda subred. Residuos $k = 3$ y $k = 4$ .....	123
Figura 4. 23. Topología de la red total. ....	123
Figura 4. 24. Nivel de pérdidas de retorno, y característica de transferencia y reflexión en dB.....	124
Figura4 25. Retardo de grupo .....	124
Figura 4. 26. Topología de la primera subred. Residuos $k = 1$ y $k = 6$ .....	126
Figura 4. 27. Topología de la segunda subred. Residuos $k = 2$ , $k = 3$ , $k = 4$ y $k = 5$ .....	126
Figura 4. 28. Topología de la red total. ....	127
Figura 4. 29. Nivel de pérdidas de retorno, y característica de transferencia y reflexión en dB.....	127
Figura4 30. Retardo de grupo .....	128
Figura 4. 31. Posible configuración <i>cul-de-sac</i> de grado 10 .....	129
Figura 4. 32. Pivote [3,5] de una transformación cross-pivot .....	130
Figura 4. 33. Matriz transversal de un filtro de orden 6 .....	131
Figura 4. 34. Matriz en la forma <i>folded canonical</i> de un filtro de orden 6. ....	132
Figura 4. 35. Matriz correspondiente a la topología <i>cul-de-sac</i> . Filtro grado 6. ....	132
Figura 4. 36. Topología <i>cul-de-sac</i> para un filtro de grado 6.....	132
Figura 4. 37. Pérdidas de retorno y característica de transferencia y reflexión.....	133
Figura 4. 38. Retardo de grupo .....	133
Figura 4. 39. Matriz transversal de un filtro de orden 5 .....	134
Figura 4. 40. Matriz en la forma <i>folded canonical</i> de un filtro de orden 5 .....	134
Figura 4. 41. Matriz correspondiente a la topología <i>cul-de-sac</i> . Filtro grado 5 .....	134
Figura 4. 42. Topología <i>cul-de-sac</i> para un filtro de grado 5.....	135
Figura 4. 43. Pérdidas de retorno y característica de transferencia y reflexión.....	135
Figura 4. 44. Retardo de grupo .....	135
Figura 5. 1. Esquema de acoplo utilizado para extraer un cero de transmisión .....	139
Figura 5. 2. Admitancias intermedias para el cálculo de la admitancia de entrada.....	139
Figura 5. 3. Nivel de pérdidas de retorno en dB y función de transferencia y reflexión del filtro. ....	143
Figura 5. 4. Nivel de pérdidas de retorno en dB y función de transferencia y reflexión del filtro. ....	143
Figura 5. 5. Esquema de acoplo utilizado para extraer dos cero de transmisión.....	144
Figura 5. 6. Admitancias intermedias para el cálculo de la admitancia de entrada.....	145
Figura 5. 7. Nivel de pérdidas de retorno en dB y función de transferencia y reflexión del filtro. ....	149
Figura 5. 8. Esquema de acoplo utilizado para extraer dos ceros de transmisión .....	149

Figura 5. 9. Nivel de pérdidas de retorno en dB y función de transferencia y reflexión del filtro. ....	151
Figura 6. 1. Posición en el plano complejo de los ceros de transmisión .....	154
Figura 6. 2. Matriz de acoplo y topología de la primera subred.....	154
Figura 6. 3. Matriz de acoplo y topología de la segunda subred .....	155
Figura 6. 4. Configuración <i>Parallel-Connected</i> .....	155
Figura 6. 5. Característica de reflexión del filtro.....	156
Figura 6. 6. Característica de transferencia del filtro .....	156
Figura 6. 7. Nivel de pérdidas de retorno y respuesta frecuencial del filtro.....	156
Figura 6. 8. Retardo de grupo .....	157
Figura 6. 9. Aspecto físico que tendría el filtro de cuarto orden que hemos diseñado. ....	157
Figura 6. 10. Posición en el plano complejo de los ceros de transmisión .....	158
Figura 6. 11. Topología que deseamos implementar.....	159
Figura 6. 12. Respuesta frecuencial y nivel de pérdidas de retorno del filtro diseñado. ....	159
Figura 6. 13. Retardo de grupo .....	160
Figura 6. 14. Aspecto físico que tendría el filtro de cuarto orden que hemos diseñado.....	160
Figura 6. 15. Posición en el plano complejo de los ceros de transmisión .....	161
Figura 6. 16. Matriz de acoplo y topología de la primera subred.....	162
Figura 6. 17. Matriz de acoplo y topología de la segunda subred .....	162
Figura 6. 18. Configuración <i>Parallel-Connected</i> .....	163
Figura 6. 19. Respuesta frecuencial y nivel de pérdidas de retorno del filtro diseñado. ....	163
Figura 6. 20. Retardo de grupo .....	164
Figura 6. 21. Aspecto físico que tendría el filtro de cuarto orden que hemos diseñado.....	164
Figura 6. 22. Posición en el plano complejo de los ceros de transmisión .....	165
Figura 6. 23. Matriz transversal de un filtro de orden 5 .....	165
Figura 6. 24. Matriz en la forma <i>folded canonical</i> de un filtro de orden 5 .....	166
Figura 6. 25. Matriz correspondiente a la topología <i>cul-de-sac</i> . Filtro grado 5 .....	166
Figura 6. 26. Topología <i>cul-de-sac</i> para un filtro de grado 5.....	166
Figura 6. 27. Respuesta frecuencial y nivel de pérdidas de retorno del filtro diseñado. ....	167
Figura 6. 28 Retardo de grupo .....	167
Figura 6. 29. Aspecto físico que tendría el filtro de cuarto orden que hemos diseñado.....	168
Figura 6. 30. Matriz de acoplo transversal .....	169
Figura 6. 31. Topología del filtro paso banda que vamos a construir .....	169
Figura 6. 32. Respuesta frecuencial del filtro, dada por el análisis de la matriz de acoplo .....	169
Figura 6. 33. Estructura que implementa un filtro paso banda con la topología de la figura 6.31.....	170
Figura 6. 34. Estructura y medidas para la implementación del filtro.....	171
Figura 6. 35. Respuesta frecuencial de la estructura mostrada en la figura 6.34 .....	171
Figura 6. 36. Aspecto del filtro paso banda fabricado.....	172
Figura 6. 37. Resultados simulados y medidos para el filtro paso banda de la figura 6.36 .....	172
Figura 6. 38. Matriz de acoplo transversal .....	173
Figura 6. 39. Respuesta frecuencial del filtro, dada por el análisis de la matriz de acoplo .....	173
Figura 6. 40. Estructura que implementa un filtro de banda rechazada .....	174
Figura 6. 41. Estructura y medidas para la implementación del filtro.....	174
Figura 6. 42. Respuesta frecuencial de la estructura mostrada en la figura 6.41 .....	175
Figura 6. 43. Aspecto del filtro paso banda fabricado.....	175

Figura 6. 44. Resultados simulados y medidos para el filtro paso banda de la figura 6.43	175
Figura 6. 45. Filtro en tecnología híbrida	176
Figura 6. 46. Matriz de acoplo transversal	177
Figura 6. 47. Respuesta frecuencial del filtro, dada por el análisis de la matriz de acoplo	177
Figura 6. 48. Vista superior del circuito impreso en la estructura	178
Figura 6. 49. Respuesta frecuencial obtenida a partir del análisis de la estructura	178
Figura 6. 50. Matriz de acoplo transversal	179
Figura 6. 51. Respuesta frecuencial del filtro, dada por el análisis de la matriz de acoplo	179
Figura 6. 52. Vista superior del circuito impreso en la estructura	180
Figura 6. 53. Respuesta frecuencial obtenida a partir del análisis de la estructura	180
Figura 6. 54. Comparación entre la respuesta frecuencial especificada y la obtenida analizando el circuito en tecnología híbrida.	181
Figura 6. 55. Matriz de acoplo transversal	181
Figura 6. 56. Respuesta frecuencial del filtro, dada por el análisis de la matriz de acoplo	182
Figura 6. 57. Vista superior del circuito impreso en la estructura	182
Figura 6. 58. Respuesta frecuencial obtenida a partir del análisis de la estructura	183
Figura 6. 59. Comparación entre la respuesta frecuencial especificada y la obtenida analizando el circuito en tecnología híbrida.	183
Figura A. 1. Función coseno hiperbólico	187
Figura A. 2. Función coseno hiperbólico negativo	189
Figura A. 3. Función coseno hiperbólico inverso	189
Figura B. 1. Fase de los ceros de $S_{21}(s)$	195
Figura B. 2. Fases de los ceros de $S_{11}(s)$ y $S_{22}(s)$	196
Figura D. 1. Transformador	199
Figura D. 2. Definición de tensiones y corrientes	199
Figura D. 3. Transformador	200
Figura D. 4. Definición de tensiones y corrientes	200



# Índice de Tablas

Tabla 1. 1. Especificaciones para la síntesis.....	7
Tabla 1. 2. Principales tipos de filtros, en función de su respuesta en frecuencia.....	8
Tabla 2. 1.Regiones del comportamiento de la función de filtrado $C_N(\omega)$ .....	13
Tabla 2. 2. Redes canónicas de grado par e impar .....	16
Tabla 2. 3. Resonadores en el camino mínimo.....	16
Tabla 2. 4. Especificaciones del filtro .....	28
Tabla 2. 5. Coeficientes y raíces de $F_4(s)$ .....	30
Tabla 2. 6. Coeficientes y raíces de $V_4(s)$ .....	30
Tabla 2. 7. Coeficientes y raíces de $E_4(s)$ .....	32
Tabla 2. 8. Transformador ideal .....	42
Tabla 2. 9. Parámetros $\gamma$ .....	43
Tabla 2. 10. Relación entre tensiones y corrientes del circuito .....	43
Tabla 2. 11. Impedancias de entrada y salida de un transformador.....	49
Tabla 2. 12. Especificaciones del filtro .....	58
Tabla 2. 13. Coeficientes y raíces de $P(s)$ .....	59
Tabla 2. 14. Coeficientes y raíces de $F_4(s)$ .....	59
Tabla 2. 15. Coeficientes y raíces de $V_4(s)$ .....	59
Tabla 2. 16. Coeficientes y raíces de $E(s)$ .....	60
Tabla 2. 17. Especificaciones del filtro .....	63
Tabla 2. 18. Coeficientes y raíces de $P(s)$ .....	64
Tabla 2. 19. Coeficientes y raíces de $F_4(s)$ .....	64
Tabla 2. 20. Coeficientes y raíces de $V_4(s)$ .....	64
Tabla 2. 21. Coeficientes y raíces de $E(s)$ .....	65
Tabla 2. 22. Comparación gráfica entre dos filtros variando el signo del cero de transmisión .....	68
Tabla 2. 23. Comparación gráfica entre dos filtros variando la posición del cero de transmisión .....	69
Tabla 2. 24. Comparación gráfica entre dos filtros variando la distancia de los ceros de transmisión al eje imaginario.....	70
Tabla 2. 25. Parámetros de entrada del software desarrollado .....	71
Tabla 3. 1. Especificaciones del filtro .....	89
Tabla 3. 2. Polinomios del filtro <i>fully canonical</i> diseñado.....	91
Tabla 3. 3. Valores propios y residuos del filtro <i>fully canonical</i> diseñado .....	91
Tabla 3. 4. Vectores $T_{1k}$ y $T_{Nk}$ del filtro <i>fully canonical</i> diseñado.....	91
Tabla 3. 5. Cambios para pasar de un filtro paso banda a otro de banda rechazada. ....	95
Tabla 4. 1. Resumen del proceso de reducción de la matriz de grado $N = 7$ . .....	113
Tabla 4. 2. Resumen del proceso de reducción de la matriz de grado $N = 6$ . .....	117
Tabla 4. 3. Residuos valores propios y vectores $T_{1k}$ y $T_{Nk}$ .....	122
Tabla 4. 4. Residuos valores propios y vectores $T_{1k}$ y $T_{Nk}$ .....	125
Tabla 4. 5. Comparación entre el retardo de grupo con y sin ecualización.....	128

Tabla 4. 6. Coordenadas para los pivotes que reducen la matriz de acoplo en su forma <i>folded canonical</i> a la matriz <i>cul-de-sac</i> .....	131
Tabla 5. 1. Modelo de los resonadores .....	137
Tabla 5. 2. Inversor de admitancia .....	138
Tabla 6. 1. Especificaciones del filtro .....	153
Tabla 6. 2. Residuos valores propios y vectores $T_{1k}$ y $T_{Nk}$ .....	154
Tabla 6. 3. Especificaciones del filtro .....	158
Tabla 6. 4. Especificaciones del filtro .....	161
Tabla 6. 5. Residuos valores propios y vectores $T_{1k}$ y $T_{Nk}$ .....	161
Tabla 6. 6. Especificaciones del filtro .....	165
Tabla 6. 7. Especificaciones del filtro .....	168
Tabla 6. 8. Respuesta del filtro con el acoplo directo y sin él.....	170
Tabla 6. 9. Especificaciones del filtro .....	173
Tabla 6. 10. Especificaciones del filtro .....	176
Tabla 6. 11. Especificaciones del filtro .....	179
Tabla 6. 12. Especificaciones del filtro .....	181
Tabla A. 1. Regiones del comportamiento de la función de filtrado $C_N(\omega)$ .....	192

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Descripción del proyecto

#### 1.1.1 Planteamiento inicial del proyecto

El desarrollo de filtros de microondas es importante durante la concepción y diseño de los modernos sistemas de comunicaciones móviles y por satélite. Las nuevas aplicaciones requieren de diseños cada vez más compactos y ligeros, sin perder la selectividad y la capacidad de rechazar señales indeseadas. Las fases de diseño de filtros son varias, y normalmente requieren mucho esfuerzo hasta lograr el comportamiento adecuado. Una de las fases más importantes es la síntesis de la función de transferencia deseada. Es en esta fase donde deberemos calcular los acoplos entre resonadores para obtener una función de transferencia acorde a las necesidades de la aplicación. El siguiente paso es su implementación con una tecnología específica.

En el presente proyecto, pretendemos abordar la fase de síntesis mediante la técnica de la matriz de acoplamiento, estudiando además diferentes transformaciones, que aplicadas sobre dicha matriz nos llevarán a poder implementar una u otra topología, ya sea para filtros paso banda o banda rechazada [1,2,3]. Estos métodos universales serán útiles para diseñar filtros de microondas de altas prestaciones en una gran variedad de tecnologías, con aplicación en sistemas de comunicaciones terrestres y espaciales. Trataremos también la síntesis de filtros utilizando nodos no resonantes [4,5], y finalmente, consideraremos algunas topologías alternativas, así como diferentes ejemplos prácticos [6,7] .

#### 1.1.2 Objetivos

El objetivo principal del proyecto es el estudio y aplicación de la técnica de la matriz de acoplamiento a la síntesis de diferentes funciones de transferencia de filtros para comunicaciones. Tras la primera fase de estudio de la técnica, se pretende implementar una herramienta que sea capaz de calcular los acoplos necesarios entre los elementos del filtro, con el fin de sintetizar diversas funciones de transferencia de aplicación práctica. Finalmente propondremos diversas topologías que podremos sintetizar en una u otra tecnología, en función de la aplicación a la que vaya destinado el filtro.

### 1.1.3 Estructura de la memoria

El proyecto se ha dividido en un total de 6 capítulos.

En el presente capítulo, se introduce el planteamiento del proyecto y los objetivos, así como un breve resumen del resto de los capítulos. Además, incluimos una serie de conceptos básicos que utilizaremos posteriormente.

En el capítulo 2 abordamos el estudio de la formulación de la técnica de la llamada matriz de acoplamiento  $N \times N$  [1], aplicada a la síntesis de funciones de transferencia de filtros paso banda utilizados en sistemas de comunicaciones móviles y por satélite.

En el tercer capítulo, nos centramos en el estudio de la matriz de acoplo transversal  $N + 2$  [2], que permite la existencia de múltiples acoplos de entrada/salida, y que aporta diferentes ventajas comparada con la matriz  $N \times N$ . Abordaremos además las modificaciones necesarias para poder aplicar la síntesis a funciones de transferencia no sólo de filtros paso banda, sino también de filtros de banda rechazada [3].

En el capítulo 4 estudiamos algunas de las diferentes secuencias de transformaciones que pueden aplicarse sobre la matriz de acoplo obtenida, ya sea ésta  $N \times N$  o  $N + 2$ . Podremos así anular los acoplos deseados, y obtener la matriz en una forma más conveniente para la tecnología que vayamos a utilizar en la implementación física. Nos centraremos principalmente en las configuraciones conocidas con el nombre '*folded canonical form*', '*cul de sac*' y '*parallel connected*' [1,2].

En el capítulo 5 abordamos la síntesis de filtros con polos de atenuación arbitrariamente situados, usando nodos no resonantes [4,5].

En el sexto, plantearemos la implementación de diversos ejemplos prácticos. Partiremos del tipo de filtro – paso banda / banda rechazada -, la posición de los ceros - de transmisión / de reflexión -, el orden del filtro y las pérdidas de retorno deseadas, y obtendremos la matriz de acoplamiento, las funciones de transferencia, la topología a implementar y posibles circuitos físicos.

En el séptimo y último capítulo extraeremos las conclusiones finales de todo el proyecto y propondremos algunas líneas de investigación futuras.

Finalmente, mostraremos las distintas fuentes y referencias utilizadas a lo largo del proyecto.

### 1.1.4 Aportaciones novedosas

El presente proyecto aporta diversos puntos de vista, enfoques y técnicas novedosas que clarifican y facilitan el proceso de síntesis de filtros de microondas.

Cuando hablemos de las funciones de transferencia y reflexión del filtro dadas por  $S_{21}(s)$  y  $S_{11}(s)$ , tendremos que normalizar éstas para que la respuesta en frecuencia tenga el nivel de pérdidas de retorno especificado. Para ello utilizaremos dos constantes,

que llamaremos  $\varepsilon$  y  $\varepsilon_R$ . En este proyecto, por una parte, se explica de forma detallada el cálculo de estas constantes que normalizan las funciones de transferencia y reflexión del filtro. Además, analizamos los cambios necesarios en dichas constantes para transformar la respuesta paso banda, en una respuesta de banda rechazada, así como el efecto que se produce en el valor de acoplo directo entre fuente y carga, que llamaremos  $M_{SL}$ .

Por otra parte, detallamos el proceso de ortonormalización de Gram Schmidt necesario para obtener la matriz de acoplo  $N \times N$ , que difiere un poco del procedimiento básico, puesto que partimos de dos vectores que ya son ortonormales.

Asimismo, introducimos un nuevo procedimiento para reducir la matriz de acoplos completa a su forma '*folded canonical*' diferente del implementado en [1] para el caso de filtros de orden  $N$  par. La ventaja del nuevo procedimiento, es que es sistemático para cualquier orden par del filtro.

Finalmente, en el sexto capítulo proponemos nuevos y diferentes circuitos físicos para implementar algunos de los filtros diseñados.

### 1.1.5 Software desarrollado

Para la implementación de los diferentes procedimientos de síntesis que explicamos a lo largo del proyecto, hemos empleado el software comercial Matlab©, debido a que integra la computación matemática con funciones de gran versatilidad para visualizar los resultados.

Debido a la gran cantidad de ficheros utilizados, no expondremos el código de forma detallada, aunque sí indicaremos los parámetros de entrada utilizados en cada uno de los procesos de síntesis, así como los resultados obtenidos. No obstante, adjuntamos el software desarrollado debidamente comentado para facilitar su utilización y, en su caso, un desarrollo posterior.

## 1.2 Conceptos básicos

El presente proyecto aborda la síntesis de filtros de microondas, por lo que estaremos trabajando en un rango de frecuencias comprendido entre 1 y 300 GHz aproximadamente.

En este apartado, realizaremos una breve introducción de los conceptos que utilizaremos a lo largo del proyecto, definiendo los parámetros más importantes a la hora de caracterizar la respuesta frecuencial de un filtro, así como una explicación de a qué nos estamos refiriendo cuando hablamos de la síntesis de filtros [8].

### 1.2.1 ¿Qué es un filtro?

Entendemos por **filtro** un cuadripolo que permite la transmisión de determinadas frecuencias, atenuando fuertemente las restantes.

Para estudiar la respuesta del filtro, utilizaremos los **parámetros de scattering**. Éstos parámetros, también llamados parámetros S, son selectivos en frecuencia:

$$S(f) = \begin{bmatrix} S_{11}(f) & S_{12}(f) \\ S_{21}(f) & S_{22}(f) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

donde:

$$\begin{aligned} S_{21} &\rightarrow \text{Respuesta en transmisión} \\ S_{11} &\rightarrow \text{Respuesta en reflexión} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Estos parámetros, tienen el siguiente significado:

- $S_{11} \rightarrow$  Es el coeficiente de reflexión visto desde el plano de referencia situado en el puerto 1, cuando ubicamos un generador en dicho puerto y terminamos el puerto 2 con su impedancia característica.
- $S_{21} \rightarrow$  Es el coeficiente de transmisión entendido como la señal reflejada (vista desde el plano situado en el puerto 1), dividida entre la señal incidente (vista desde el plano situado en el puerto 2), cuando ubicamos un generador en este último puerto y terminamos el puerto 1 con su impedancia característica.

Además, los filtros van a cumplir las siguientes condiciones:

- Son redes de dos accesos **pasivas**, por lo que se verifica que  $|S_{ij}| \leq 1$ .
- Son redes **recíprocas**, por lo que se verifica que  $S_{21} = S_{12}$ .

Asumiremos también que **no existen pérdidas**, es decir, que la energía que no se transmite a la salida se refleja a la entrada, por lo que se cumple la condición de unitariedad, que viene dada por:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \quad (1.3)$$

Tendremos entonces filtros pasivos y sin pérdidas, formados por elementos reactivos que a cierta frecuencia resonarán, dejando pasar la señal de microondas, y al resto de frecuencias reflejarán la energía. Según esto, distinguiremos dos bandas diferenciadas en su respuesta:

- BANDA DE PASO:  $|S_{21}| \rightarrow 0$  dB. Toda la señal se transmite.  
 $|S_{11}| \rightarrow \infty$  dB. La señal no se refleja.
- BANDA ATENUADA:  $|S_{21}| \rightarrow \infty$  dB. La señal no se transmite.  
 $|S_{11}| \rightarrow 0$  dB. Toda la señal se refleja.

Veamos a continuación la respuesta típica de un filtro ideal paso banda:

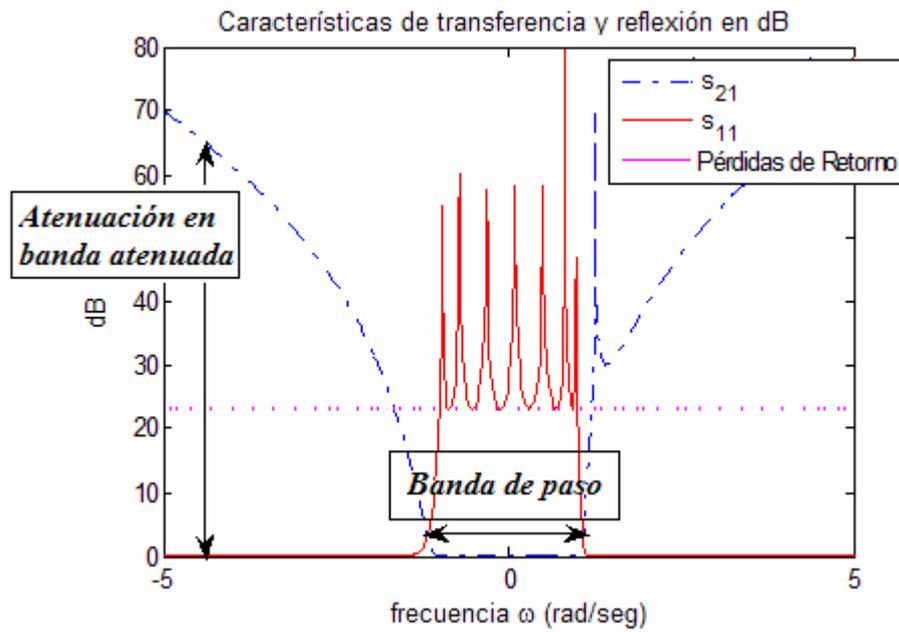


Figura 1. 1. Respuesta de un filtro paso banda de orden  $N = 7$ .

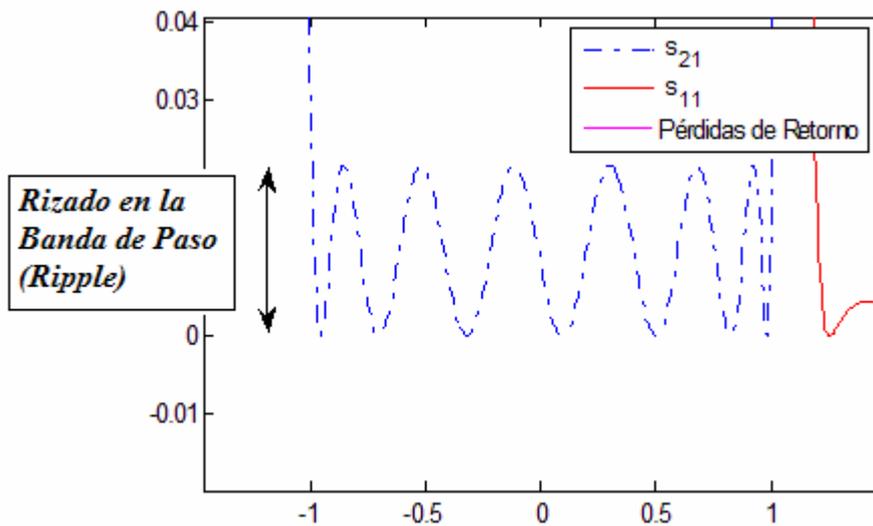


Figura 1. 2. Detalle de la respuesta de un filtro paso banda de orden  $N = 7$  en torno a cero.

En la respuesta del filtro podemos por tanto distinguir la banda de paso de la banda atenuada, así como los siguientes parámetros:

- Pérdidas de Retorno (Return Loss).
- Atenuación en la banda atenuada.
- Rizado en la banda de paso (Ripple).

Otro parámetro a determinar será el **orden**  $N$  del filtro, que vendrá dado por el número de resonadores actuando como tal, y que coincidirá con el número de ceros de la respuesta en reflexión  $S_{11}$ .

Además de éstos, existe otro parámetro importante en la respuesta frecuencial, que viene dado por la fase de  $S_{21}$ , y al que denominamos **retardo de grupo**. El retardo de grupo  $\tau(\omega)$  se mide en segundos, e indica el retardo que sufre cada componente espectral de la señal al pasar por el filtro. Se define como:

$$\tau(\omega) = \frac{\partial \Phi(\omega)}{\partial \omega} \quad (1.4)$$

donde:

$$\Phi(\omega) = \text{Fase de } S_{21} \quad (1.5)$$

De aquí se deduce que para que el retardo de grupo sea constante en la banda de paso, interesa que la fase de  $S_{21}$  sea lineal en dicha banda. Con esto evitaremos que se produzca dispersión espectral de la señal. Sin embargo, hemos de tener en cuenta que en general necesitamos filtros muy selectivos, y cuanto más selectivo sea un filtro, menos constante será su retardo de grupo. Existe por tanto un **compromiso entre la selectividad de la respuesta en amplitud y la distorsión de fase**, de forma que cuanto más abrupta es la respuesta, mayor es la distorsión de fase; y cuanto menor es la distorsión de fase, menos selectivo es el filtro.

Siguiendo con el ejemplo anterior de un filtro paso banda de orden  $N = 7$ , representamos a continuación su retardo de grupo, que en este caso conserva un valor más o menos constante en la banda de paso, comprendida en este caso entre  $-1$  y  $1$ .

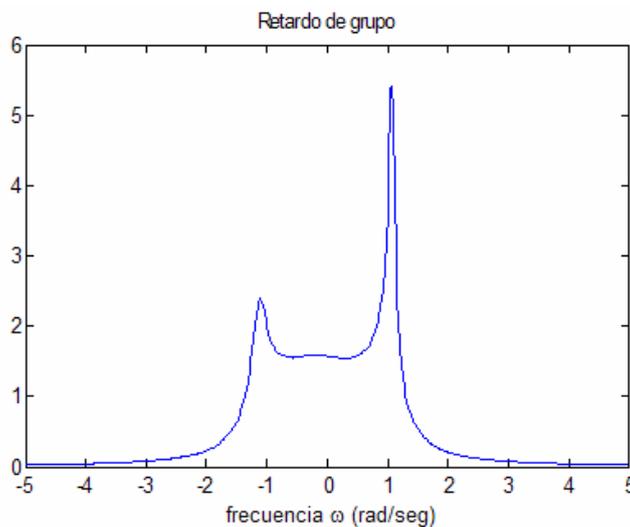


Figura 1. 3. Retardo de grupo de un filtro paso banda de orden  $N = 7$ .

Es importante también, destacar el significado de los ceros de transmisión y los ceros de reflexión en un filtro :

- **Ceros de transmisión:** Son los valores de frecuencia en los que no se transmite la señal, por lo que el parámetro  $S_{21}$  tiene un valor en dB muy alto. A la hora de diseñar un filtro, será de gran importancia poder determinar la posición de estos ceros, puesto que así seremos capaces de eliminar la señal a la frecuencia concreta que deseemos.
- **Ceros de reflexión:** Son los valores de frecuencia en los que la señal no se refleja.

Si, por ejemplo, nos fijamos en el filtro paso banda de la figura 1.1 se observa la existencia de un cero de transmisión a frecuencias finitas, y de siete ceros de reflexión.

### 1.2.2 Síntesis de filtros

Se denomina **síntesis** al proceso mediante el cual diseñamos un circuito de microondas con una respuesta en frecuencia que se adapte a las especificaciones dadas. En los filtros que vamos a tratar en el presente proyecto, el parámetro  $S_{12}$  será idéntico al  $S_{21}$ , y asumiendo que no existen pérdidas, la respuesta en reflexión será complementaria a la obtenida en transmisión por la condición de unitariedad (1.3).

Además, en la mayoría de los casos que trataremos, las especificaciones que determinarán la respuesta del filtro serán:

<i>Tipo</i>	Grupo al que pertenece el filtro según su respuesta en frecuencia (ver apartado 1.2.3)
<i>Orden</i>	Número de resonadores del filtro
<i>Pérdidas de retorno</i>	Valor medido en dB indicado en la figura 1.1
<i>Ceros de transmisión</i>	Ceros de la respuesta en transmisión $S_{21}$ . Su parte imaginaria indicará el valor frecuencial en el que la señal no se transmite

**Tabla 1. 1. Especificaciones para la síntesis**

### 1.2.3 Principales tipos de filtros

Atendiendo a la respuesta en frecuencia del filtro, podemos distinguir los siguientes tipos de filtros:

- Filtro Paso Bajo: Se incluyen dentro de este grupo aquellos que permiten el paso de las bajas frecuencias. Concretamente, permitirán el paso de las frecuencias comprendidas entre cero y otra frecuencia determinada, llamada frecuencia de corte.
- Filtro Paso Alto: Serán aquellos que permitan el paso de todas las frecuencias superiores a una frecuencia dada, llamada frecuencia de corte.
- Filtro Paso Banda: Permiten el paso de un rango de frecuencias comprendidas entre una frecuencia de corte inferior, y una frecuencia de corte superior.
- Filtro Elimina Banda: Permiten el paso de todas las frecuencias, excepto aquellas comprendidas entre una frecuencia de corte inferior y una frecuencia de corte superior

Gráficamente:

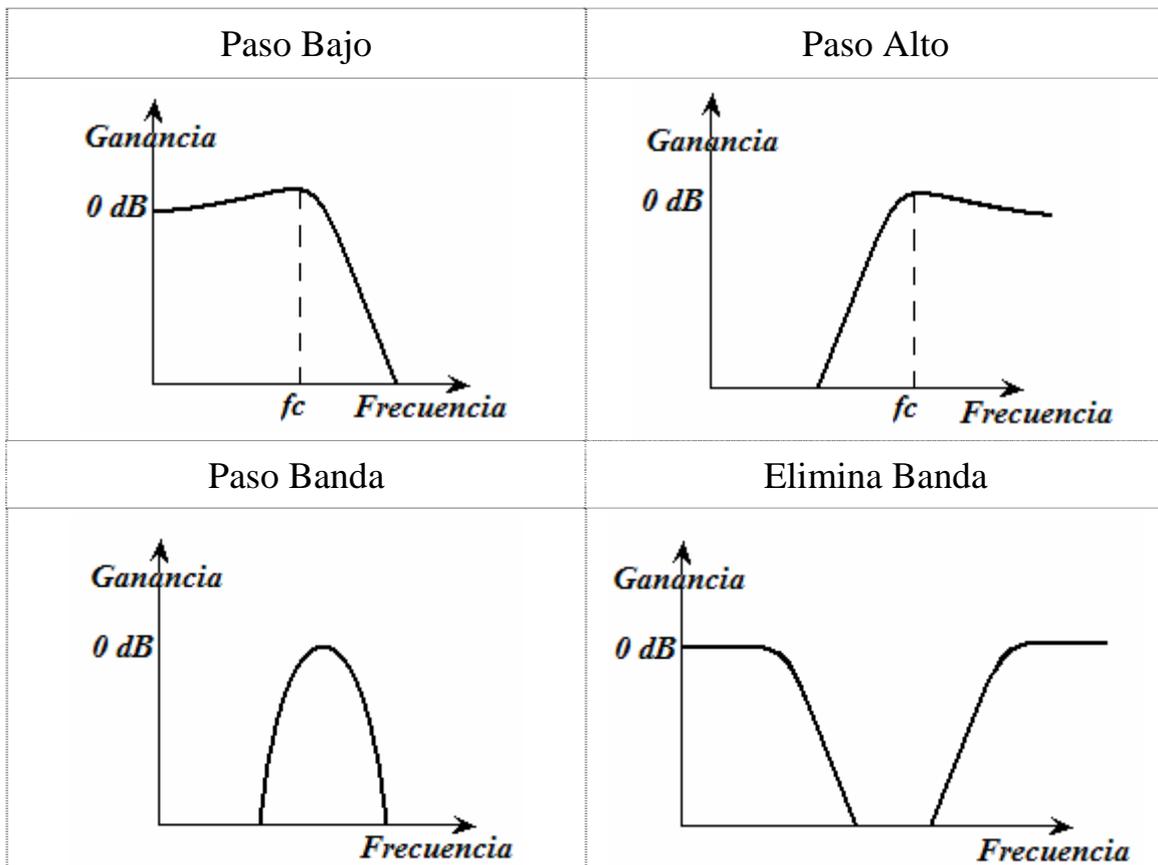


Tabla 1. 2. Principales tipos de filtros, en función de su respuesta en frecuencia

También podemos clasificar los filtros en función de la familia a la que pertenezcan, estando ésta especificada por ciertos criterios de diseño que determinan la relación entre la señal de salida y la señal de entrada del filtro, esto es, su función de transferencia. Las principales familias existentes, y sus características son :

- **Butterworth:** Estos filtros, también llamados ‘máximamente planos’, son óptimos en el sentido de que presentan la respuesta más plana posible en la banda de paso, para una complejidad dada. Su principal ventaja es que el retardo de grupo es más suave para éstos que para otros filtros, sin embargo, presenta una respuesta poco abrupta, por lo que su selectividad se ve perjudicada.

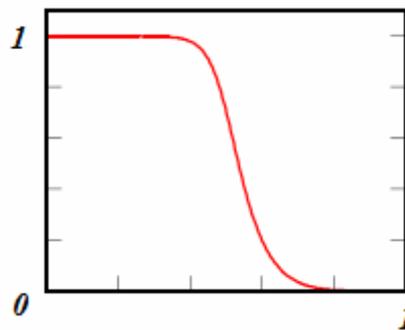


Figura 1. 4 Respuesta típica de un filtro Butterworth

- **Chebyshev:** La repuesta de estos filtros es más abrupta que la de los Butterworth, sin embargo, presentan rizado constante en alguna de sus bandas, lo que supone una distorsión en amplitud. Podremos distinguir dos tipos de filtros Chebyshev, el primero con rizado constante en la banda de paso, y el segundo con rizado en la banda de rechazo.

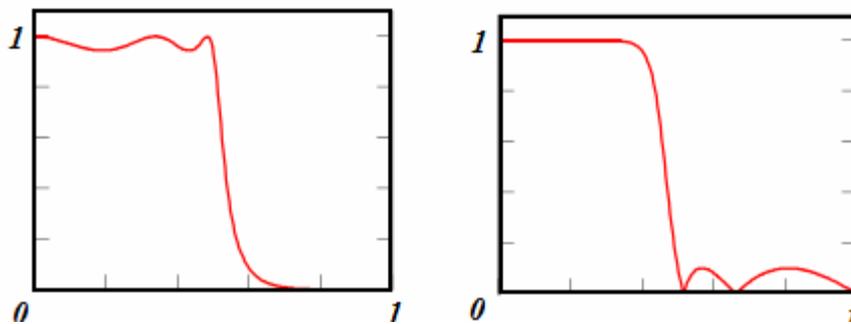


Figura 1. 5 Respuesta típica de un filtro Chebyshev.

- **Elíptico:** Estos filtros presentan la respuesta más abrupta de todas, sin embargo presentan rizado constante en ambas bandas.

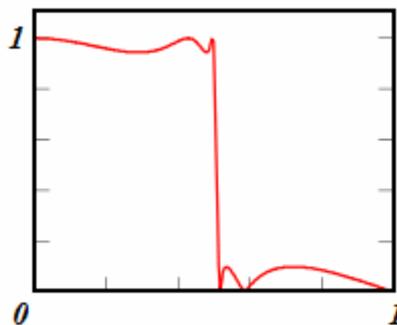


Figura 1. 6 Respuesta típica de un filtro Elíptico.

A la hora de diseñar el filtro, sea cual sea la familia a la que pertenezca, tendremos que tener en cuenta que a mayor orden, más se aproximará la respuesta en frecuencia a la ideal, provocando una mayor selectividad, y una mayor atenuación en banda eliminada. Sin embargo, también a mayor orden, aumentará notablemente la complejidad.

Finalmente, indicar que durante la mayor parte del proyecto trabajaremos con procedimientos de síntesis en los que las frecuencias se encuentran normalizadas. Esto sin embargo, no implica pérdida de generalidad.

## Capítulo 2

# Método de síntesis de la matriz $N \times N$

## 2.1 Introducción

En este capítulo vamos a desarrollar el procedimiento completo de síntesis para obtener la matriz de acoplamiento de cualquier filtro paso banda de Chebyshev, incluyendo los casos de grado par o impar de filtro, ya tenga éste características simétricas o asimétricas. Además, trataremos no solo las redes con dos terminaciones, sino también las redes con una terminación, puesto que a veces presentan propiedades eléctricas especiales que las hace interesantes para el diseño de ciertos componentes.

Para el proceso de síntesis estableceremos previamente los ceros de transmisión, el orden del filtro y las pérdidas de retorno deseadas. A partir de éstos, lograremos obtener la matriz de acoplamiento.

Podemos dividir el método de síntesis de la matriz  $N \times N$  en dos partes:

- *Síntesis de polinomios*: En esta parte, describiremos qué es y cómo se comporta la función de filtrado, así como la técnica recursiva y el principio de singularidad alternativa necesarios para obtener los polinomios que determinarán los parámetros  $S_{21}$  y  $S_{11}$ . Finalmente presentaremos algunos ejemplos de la síntesis descrita.
- *Procedimiento para obtener la matriz de acoplo*: Esta segunda parte, tratará de cómo obtener las ecuaciones del circuito, así como del cálculo de los parámetros de admitancia y la relación entre éstos y los parámetros de transmisión y reflexión. Todo esto será tratado para redes de una y de dos terminaciones, distinguiendo entre los casos de filtros con grado par o impar. Incluiremos también una explicación detallada del algoritmo de ortonormalización de Gram Schmidt, utilizado en la última fase antes de la obtención de la matriz de acoplamiento que buscábamos.

## 2.2 Síntesis de polinomios

En cualquier red de filtros sin pérdidas de 2 puertos, compuesta por una serie de  $N$  resonadores interacoplados, las funciones de *reflexión* y *transferencia* pueden expresarse como un cociente de dos polinomios de grado  $N$ , que comparten denominador común :

- Función de reflexión  $S_{11}(\omega) = \frac{F_N(\omega)}{E_N(\omega)}$  (2.1)

- Función de transferencia  $S_{21}(\omega) = \frac{P_N(\omega)}{\varepsilon \cdot E_N(\omega)}$  (2.2)

donde  $\omega$  es la variable real de frecuencia normalizada, relacionada con la variable compleja  $s$  según  $s = j \cdot \omega$ .

El polinomio  $P_N(\omega)$ , numerador de  $S_{21}(\omega)$ , contiene los ceros de transmisión de la función de transferencia, y por tanto podemos determinarlo a partir de éstos.

Además, para una función de filtrado de Chebyshev,  $\varepsilon$  es una constante que normaliza el valor de  $S_{21}(\omega)$  al nivel de rizado constante en  $\omega = \pm 1$  según:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \cdot \frac{P_N(s)}{F_N(s)} \Bigg|_{s=j} = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \cdot \frac{P_N(j \cdot \omega)}{F_N(j \cdot \omega)} \Bigg|_{\omega=\pm 1} \quad (2.3)$$

donde  $RL$  representa el nivel de pérdidas de retorno expresado en dB, y se asume que todos los polinomios han sido normalizados tal que sus coeficientes de grado más alto son la unidad.

Para desarrollar la expresión de la función de transferencia (2.2) podemos elevar ésta al cuadrado y sustituir en ella la expresión de la función de reflexión (2.1) :

$$S_{21}^2(\omega) = \frac{P_N^2(\omega)}{\varepsilon^2 \cdot E_N^2(\omega)} = \frac{P_N^2(\omega)}{\varepsilon^2 \cdot \left( \frac{F_N^2(\omega)}{S_{11}^2(\omega)} \right)} \quad (2.4)$$

Utilizando ahora la ecuación de conservación de la energía para una red sin pérdidas, podemos seguir desarrollando la expresión anterior:

$$S_{11}^2 + S_{21}^2 = 1 \Rightarrow S_{11}^2 = 1 - S_{21}^2 \quad (2.5)$$

$$S_{21}^2(\omega) = \frac{P_N^2(\omega)}{\varepsilon^2 \cdot \left( \frac{F_N^2(\omega)}{S_{11}^2(\omega)} \right)} = \frac{P_N^2(\omega)}{\varepsilon^2 \cdot \left( \frac{F_N^2(\omega)}{1 - S_{21}^2(\omega)} \right)} \quad (2.6)$$

Despejando el valor de  $S_{21}^2$ :

$$S_{21}^2(\omega) \cdot \varepsilon^2 \cdot F_N^2(\omega) = P_N^2(\omega) \cdot (1 - S_{21}^2(\omega)) \quad (2.7)$$

$$S_{21}^2(\omega) \cdot \varepsilon^2 \cdot \frac{F_N^2(\omega)}{P_N^2(\omega)} + S_{21}^2(\omega) = 1 \quad (2.8)$$

$$\left( \varepsilon^2 \cdot \frac{F_N^2(\omega)}{P_N^2(\omega)} + 1 \right) \cdot S_{21}^2(\omega) = 1 \quad (2.9)$$

$$(\varepsilon^2 \cdot C_N^2(\omega) + 1) \cdot S_{21}^2(\omega) = 1 \quad (2.10)$$

$$S_{21}^2(\omega) = \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot C_N^2(\omega) + 1} = \frac{1}{(1 + j \cdot \varepsilon \cdot C_N(\omega)) \cdot (1 - j \cdot \varepsilon \cdot C_N(\omega))} \quad (2.11)$$

### 2.2.1 Función de filtrado

En el desarrollo anterior, hemos definido una nueva función  $C_N(\omega)$  (2.10), que se conoce como función de filtrado de grado  $N$ , y que viene dada por:

$$C_N(\omega) = \frac{F_N(\omega)}{P_N(\omega)} \quad (2.12)$$

Esta función, tiene una forma concreta para la función de Chebyshev:

$$C_N(\omega) = \cosh \left[ \sum_{n=1}^N \cosh^{-1} \left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} \right) \right] = \cosh \left[ \sum_{n=1}^N \cosh^{-1}(x_n) \right] \quad (2.13)$$

donde  $j \cdot \omega_n = s_n$  es la posición del n-ésimo cero de transmisión en el plano complejo.

Se puede demostrar que la función de filtrado, en función de la frecuencia, se comporta de la siguiente manera (Anexo A):

$ \omega  < 1$	$-1 < C_N(\omega) < 1$	$\rightarrow  C_N(\omega)  < 1$
$ \omega  = 1$	$C_N(\omega) = 1$	$\rightarrow  C_N(\omega)  = 1$
$ \omega  > 1$	$C_N(\omega) < -1$ y $C_N(\omega) > 1$	$\rightarrow  C_N(\omega)  > 1$

**Tabla 2. 1. Regiones del comportamiento de la función de filtrado  $C_N(\omega)$**

Podemos verificar gráficamente este comportamiento, con un ejemplo. Si calculamos el valor de  $C_N(\omega)$  para un filtro de grado 4, con unas pérdidas de retorno de 22 dB, y cuatro ceros situados en  $\omega_1 = -3.7431$ ,  $\omega_2 = -1.8051$ ,  $\omega_3 = 1.5699$  y  $\omega_4 = 6.1910$  se obtiene la siguiente representación gráfica:

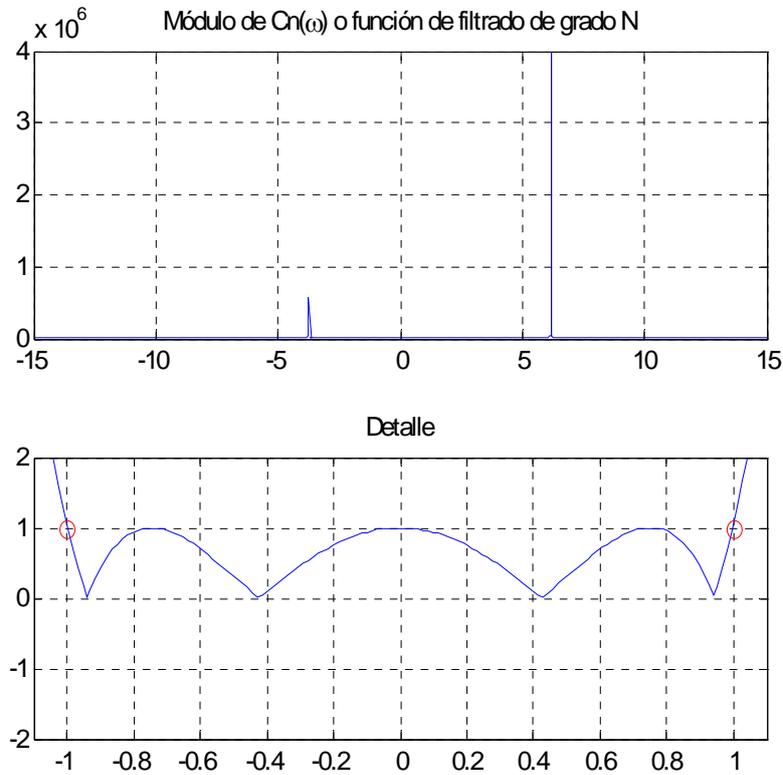


Figura 2. 1. Representación de la función de filtrado  $C_N(\omega)$

En la gráfica inferior podemos comprobar cómo efectivamente para un valor de  $|\omega| < 1$ , se cumple que  $|C_N(\omega)| < 1$ , mientras que si  $|\omega| > 1$ , entonces  $|C_N(\omega)| > 1$ . Y si  $|\omega| = 1$ , se cumple que  $C_N(\omega) = 1$ .

Además, las condiciones dadas en la tabla 2.1, representan una condición necesaria para una respuesta tipo Chebyshev.

Por otra parte, cuando todos los ceros de transmisión deseados se aproximan a infinito, la función  $C_N(\omega)$  degenera en la función pura de Chebyshev:

$$C_N(\omega)\Big|_{\omega_n=\infty} = \cosh\left[\sum_{n=1}^N \cosh^{-1}\left(\frac{\omega-0}{1-0}\right)\right] \quad (2.14)$$

$$C_N(\omega)\Big|_{\omega_n=\infty} = \cosh[N \cdot \cosh^{-1}(\omega)] \quad (2.15)$$

A la hora de elegir la posición de los ceros de transmisión, debe conservarse la simetría alrededor del eje imaginario ( $s = j \cdot \omega$ ) del plano 's' complejo, para asegurar que el polinomio numerador de  $C_N(\omega)$ , esto es,  $F_N(\omega)$  con grado N, y el polinomio denominador de  $C_N(\omega)$ , esto es,  $P_N(\omega)$  con grado igual al número de ceros de transmisión finitos, tengan ambos, coeficientes puramente reales. Supongamos por ejemplo, que tenemos dos ceros de transmisión finitos en el plano complejo, que en general, tendrán la siguiente forma:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 + j \cdot \beta_1 \\ s_2 &= \sigma_2 + j \cdot \beta_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

En ese caso, el polinomio  $P_N(s)$ , lo calcularemos según:

$$P_N(s) = (s - s_1) \cdot (s - s_2) = (s - \sigma_1 - j \cdot \beta_1) \cdot (s - \sigma_2 - j \cdot \beta_2) \quad (2.17)$$

$$P_N(s) = s^2 - s \cdot \sigma_2 - s \cdot j \cdot \beta_2 - \sigma_1 \cdot s + \sigma_1 \cdot \sigma_2 + j \sigma_1 \cdot \beta_2 - j \cdot \beta_1 \cdot s + j \cdot \beta_1 \cdot \sigma_2 - \beta_1 \cdot \beta_2 \quad (2.18)$$

$$P_N(s) = s^2 - s \cdot (\sigma_2 + j \cdot \beta_2 + \sigma_1 + j \cdot \beta_1) + \sigma_1 \cdot \sigma_2 + j \sigma_1 \cdot \beta_2 + j \cdot \beta_1 \cdot \sigma_2 - \beta_1 \cdot \beta_2 \quad (2.19)$$

Se deduce entonces, que para que  $P_N(s)$  tenga coeficientes reales, debe cumplirse:

$$-j \cdot \beta_2 = j \cdot \beta_1 \quad (2.20)$$

$$j \cdot \sigma_1 \cdot \beta_2 = -j \cdot \beta_1 \cdot \sigma_2 \quad (2.21)$$

por lo que llegamos a:

$$\begin{aligned} -\beta_2 &= \beta_1 = \beta \\ \sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma \end{aligned} \quad (2.22)$$

con lo que las raíces tendrán la forma:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma + j \cdot \beta \\ s_2 &= \sigma - j \cdot \beta \end{aligned} \quad (2.23)$$

Concluimos por tanto, que **la posición de los ceros de transmisión debe ser simétrica alrededor del eje imaginario**, para que los coeficientes del polinomio  $P_N(s)$  sean reales.

Además, en el método de síntesis que vamos a describir, debe cumplirse que el número de ceros de transmisión con posiciones finitas en el plano 's' debe ser  $n_{fc} \leq N$ . Si  $n_{fc} < N$ , aquellos ceros sin posiciones finitas, deberán ser situados en el infinito. Sin embargo, las redes canónicas de dos puertos que más tarde expresarán la función de transferencia, deberán comportarse según la regla del 'camino mínimo':

*Regla del camino mínimo:* El máximo número de ceros de transmisión en posiciones finitas que puede realizar una red, viene dado por  $n_{max} = N - n_{min}$ , siendo  $n_{min}$  el número de resonadores en la ruta más corta que exista en la red entre la terminación de fuente y la carga.

Las redes que sintetizaremos, tendrán en un principio la siguiente forma:

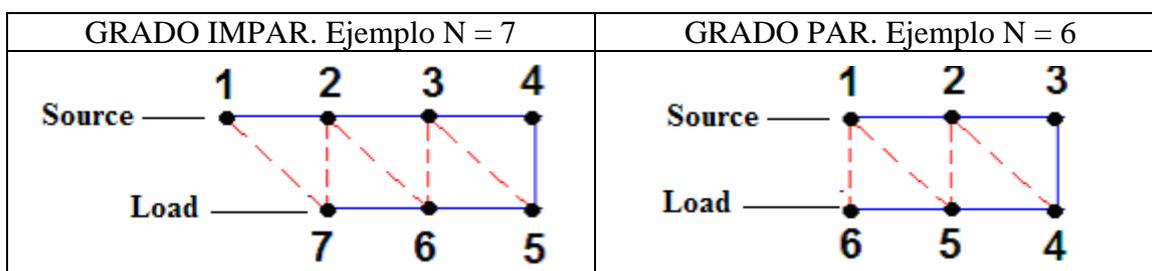


Tabla 2. 2. Redes canónicas de grado par e impar

En las que como vemos el camino mínimo entre fuente y carga, pasa como mínimo por  $n_{min} = 2$  resonadores:

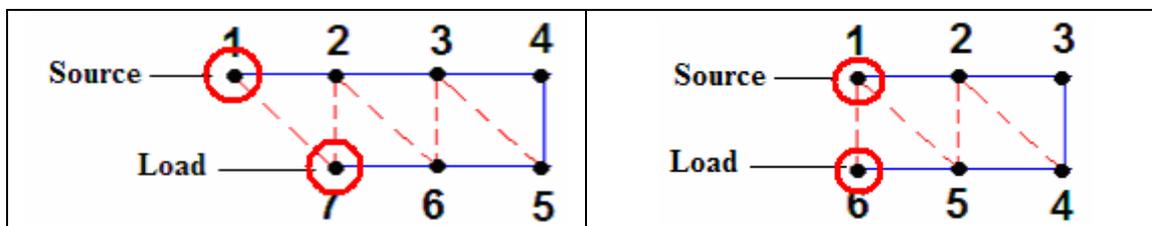


Tabla 2. 3. Resonadores en el camino mínimo

La conclusión es por tanto, que estas redes canónicas tendrán un máximo de  $n_{max} = N - n_{min} = N - 2$  posiciones finitas de ceros, por lo que cuando sinteticemos polinomios para esas redes, al menos dos de los ceros de transmisión deberemos situarlos en el infinito.

El objetivo ahora es encontrar los coeficientes de los polinomios de grado N en la variable  $\omega$ , correspondientes al  $\cosh \left[ \sum_{n=1}^N \cosh^{-1}(x_n) \right]$ . Con estos polinomios, podremos proceder a la síntesis del prototipo de la red, de donde podremos obtener una red eléctrica real con la función de transferencia característica dada por  $S_{21}(\omega)$ .

El primer paso en el procedimiento utiliza la definición de la función hiperbólica inversa:

$$\cosh^{-1}(x_n) = \ln(x_n + \sqrt{x_n^2 - 1}) \quad (2.24)$$

y el desarrollo es el siguiente:

$$C_N(\omega) = \cosh \left[ \sum_{n=1}^N \cosh^{-1}(x_n) \right] = \cosh \left[ \sum_{n=1}^N \ln(x_n + \sqrt{x_n^2 - 1}) \right] \quad (2.25)$$

$$\text{Definimos} \rightarrow \begin{cases} a_n = x_n \\ b_n = \sqrt{x_n^2 - 1} \end{cases} \quad (2.26)$$

$$C_N(\omega) = \cosh \left[ \sum_{n=1}^N \ln(a_n + b_n) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left( \exp \left( \sum_{n=1}^N \ln(a_n + b_n) \right) + \exp \left( - \sum_{n=1}^N \ln(a_n + b_n) \right) \right) \quad (2.27)$$

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left( \prod_{n=1}^N (\exp(\ln(a_n + b_n))) + \prod_{n=1}^N (\exp(-\ln(a_n + b_n))) \right) \quad (2.28)$$

Por tanto, nos queda:

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left( \prod_{n=1}^N (a_n + b_n) + \frac{1}{\prod_{n=1}^N (a_n + b_n)} \right) \quad (2.29)$$

Si multiplicamos y dividimos el segundo término por  $\prod_{n=1}^N (a_n - b_n)$  tendremos:

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left( \prod_{n=1}^N (a_n + b_n) + \frac{1}{\prod_{n=1}^N (a_n + b_n)} \cdot \frac{\prod_{n=1}^N (a_n - b_n)}{\prod_{n=1}^N (a_n - b_n)} \right) \quad (2.30)$$

Y desarrollando el denominador del segundo sumando se observa que es igual a la unidad:

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^N (a_n + b_n) \cdot \prod_{n=1}^N (a_n - b_n) &= \prod_{n=1}^N (a_n^2 - b_n^2) \\ \left. \begin{aligned} a_n &= x_n \\ b_n &= \sqrt{x_n^2 - 1} \end{aligned} \right\} \rightarrow \prod_{n=1}^N (x_n^2 - (x_n^2 - 1)) &= \prod_{n=1}^N 1 = 1 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Así pues, la expresión de  $C_N(\omega)$  queda como:

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left( \prod_{n=1}^N (a_n + b_n) + \prod_{n=1}^N (a_n - b_n) \right) \quad (2.32)$$

Si tenemos en cuenta las igualdades:

$$\begin{aligned} a_n &= x_n & x_n &= \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} \\ b_n &= \sqrt{x_n^2 - 1} \end{aligned} \quad (2.33)$$

podemos seguir desarrollando  $C_N(\omega)$ :

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left( \prod_{n=1}^N (x_n + \sqrt{x_n^2 - 1}) + \prod_{n=1}^N (x_n - \sqrt{x_n^2 - 1}) \right) \quad (2.34)$$

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left( \prod_{n=1}^N \left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} + \sqrt{\left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} \right)^2 - 1} \right) + \prod_{n=1}^N \left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} - \sqrt{\left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} \right)^2 - 1} \right) \right) \quad (2.35)$$

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left( \underbrace{\prod_{n=1}^N \left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} + \sqrt{\frac{(\omega - 1/\omega_n)^2 - (1 - \omega/\omega_n)^2}{(1 - \omega/\omega_n)^2}} \right)}_{\downarrow} + \prod_{n=1}^N \left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} - \sqrt{\frac{(\omega - 1/\omega_n)^2 - (1 - \omega/\omega_n)^2}{(1 - \omega/\omega_n)^2}} \right) \right) \quad (2.36)$$

Desarrollando solamente el primer término:

$$\prod_{n=1}^N \left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} + \frac{\sqrt{\omega^2 - \frac{2\omega}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n^2} - 1 + \frac{2\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right)} \right) = \quad (2.37)$$

$$\frac{\prod_{n=1}^N \left( \omega - 1/\omega_n + \sqrt{\omega^2 - 1 + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot (1 - \omega^2)} \right)}{\prod_{n=1}^N \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_n} \right)} = \frac{\prod_{n=1}^N \left( \omega - 1/\omega_n + \sqrt{\omega^2 - 1} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\omega_n^2}\right)} \right)}{\prod_{n=1}^N \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_n} \right)} \quad (2.38)$$

Por tanto, si hacemos lo mismo con el segundo término, la expresión que nos queda de la función de filtrado es:

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\prod_{n=1}^N \left( \omega - 1/\omega_n + \sqrt{\omega^2 - 1} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\omega_n^2}\right)} \right)}{\prod_{n=1}^N \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_n} \right)} + \frac{\prod_{n=1}^N \left( \omega - 1/\omega_n - \sqrt{\omega^2 - 1} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\omega_n^2}\right)} \right)}{\prod_{n=1}^N \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_n} \right)} \right) \quad (2.39)$$

Definiendo ahora:

$$\begin{aligned}c_N &= \omega - 1/\omega_n \\d_n &= \omega' \cdot \left(1 - \frac{1}{\omega_n^2}\right)^{1/2} \\ \omega' &= (\omega^2 - 1)^{1/2}\end{aligned}\tag{2.40}$$

Podemos reescribir la última ecuación como:

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\prod_{n=1}^N (c_n + d_n) + \prod_{n=1}^N (c_n - d_n)}{\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right)} \right)\tag{2.41}$$

Comparando esta ecuación con la definición de la función de filtrado podremos identificar el numerador y el denominador de ésta:

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\prod_{n=1}^N (c_n + d_n) + \prod_{n=1}^N (c_n - d_n)}{\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right)} \right) \Leftrightarrow C_N(\omega) = \frac{F_N(\omega)}{P_N(\omega)}\tag{2.42}$$

Denominador de  $C_N(\omega)$ : El denominador de  $C_N(\omega)$  es  $P_N(\omega)$ , y  $P_N(\omega)$  es a su vez, el polinomio numerador de  $S_{21}(\omega)$ , generado a partir de los ceros de transmisión deseados  $\omega_n$ .

$$Den(C_N(\omega)) = P_N(\omega) = \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right)\tag{2.43}$$

Numerador de  $C_N(\omega)$ : El numerador de  $C_N(\omega)$  es  $F_N(\omega)$ , y  $F_N(\omega)$  es a su vez, el polinomio numerador de  $S_{11}(\omega)$ .

$$\begin{aligned}Num(C_N(\omega)) &= F_N(\omega) = \prod_{n=1}^N (c_n + d_n) + \prod_{n=1}^N (c_n - d_n) \\ Num(C_N(\omega)) &= \frac{1}{2} \cdot \left( \prod_{n=1}^N \left( \omega - 1/\omega_n + \omega' \cdot \left(1 - \frac{1}{\omega_n^2}\right)^{1/2} \right) + \prod_{n=1}^N \left( \omega - 1/\omega_n - \omega' \cdot \left(1 - \frac{1}{\omega_n^2}\right)^{1/2} \right) \right)\end{aligned}\tag{2.44}$$

Si nos fijamos en su expresión, podemos ver que parece una mezcla de dos polinomios de grado finito, uno de ellos en la variable pura  $\omega$ , y el otro con cada uno de sus coeficientes multiplicado por la variable transformada  $\omega' = (\omega^2 - 1)^{1/2}$ . Sin embargo, los coeficientes que multiplican a la variable transformada, se cancelarán unos con otros cuando operemos sobre la expresión (2.44). Vamos a probar esto último con un ejemplo.

### **Ejemplo de la cancelación de los términos con variable transformada**

Supongamos un caso de grado  $N = 2$  y veamos qué ocurre:

$$\begin{aligned} Num(C_N(\omega)) &= \prod_{n=1}^2 (c_n + d_n) + \prod_{n=1}^2 (c_n - d_n) = (c_1 + d_1)(c_2 + d_2) + (c_1 - d_1)(c_2 - d_2) \\ Num(C_N(\omega)) &= (c_1 \cdot c_2 + c_1 d_2 + d_1 \cdot c_2 + d_1 \cdot d_2) + (c_1 \cdot c_2 - c_1 d_2 - d_1 \cdot c_2 + d_1 \cdot d_2) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Vemos que los términos que contienen un número impar de elementos  $d_n$  se cancelan unos con otros. Por tanto, quedarán únicamente aquellos que contienen un número par de dichos elementos:

$$Num(C_N(\omega)) = 2 \cdot c_1 \cdot c_2 + 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \quad (2.46)$$

Debido a que  $\omega' = (\omega^2 - 1)^{1/2}$  es multiplicador común para todos los elementos  $d_n$ , la variable transformada  $\omega'$  solo será alcanzada por potencias pares, produciendo subpolinomios únicamente en la variable pura  $\omega$ , ya que  $(\omega')^2 = \omega^2 - 1$ . Podemos concluir entonces, que el numerador de  $C_N(\omega)$  será un polinomio en la variable pura  $\omega$ .

#### 2.2.2 Técnica recursiva

Volviendo a la expresión del numerador de la función de filtrado, podemos escribir éste como:

$$Num(C_N(\omega)) = F_N(\omega) = \frac{1}{2} \cdot [G_N(\omega) + G'_N(\omega)] \quad (2.47)$$

donde:

$$\begin{aligned} G_N(\omega) &= \prod_{n=1}^N [c_n + d_n] = \prod_{n=1}^N \left[ \left( \omega - \frac{1}{\omega_n} \right) + \omega' \cdot \left( 1 - \frac{1}{\omega_n^2} \right)^{1/2} \right] \\ G'_N(\omega) &= \prod_{n=1}^N [c_n - d_n] = \prod_{n=1}^N \left[ \left( \omega - \frac{1}{\omega_n} \right) - \omega' \cdot \left( 1 - \frac{1}{\omega_n^2} \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

El método para el cálculo de los coeficientes de  $F_N(\omega)$  consiste en una técnica recursiva en la que la solución para el grado  $N$  se construye usando los resultados obtenidos para el grado  $N-1$ .

Considerando en primer lugar el polinomio  $G_N(\omega)$ , éste puede escribirse como la suma de dos polinomios  $U_N(\omega)$  y  $V_N(\omega)$ . El polinomio  $U_N(\omega)$  contiene los coeficientes de los términos en la variable  $\omega$ , mientras que el polinomio auxiliar  $V_N(\omega)$  contiene los coeficientes multiplicados por la variable transformada  $\omega'$ :

$$G_N(\omega) = U_N(\omega) + V_N(\omega) \quad (2.49)$$

donde:

$$\begin{aligned} U_N(\omega) &= u_0 + u_1 \cdot \omega + u_2 \cdot \omega^2 + \dots + u_N \cdot \omega^N \\ V_N(\omega) &= \omega' \cdot (v_0 + v_1 \cdot \omega + v_2 \cdot \omega^2 + \dots + v_N \cdot \omega^N) \end{aligned} \quad (2.50)$$

El ciclo recursivo se inicia con los términos correspondientes al primer cero de transmisión deseado  $\omega_1$ , esto es, sustituyendo  $N = 1$  en  $G_N(\omega)$ :

$$G_1(\omega) = \prod_{n=1}^N [c_n + d_n] = c_1 + d_1 \quad (2.51)$$

$$G_1(\omega) = c_1 + d_1 = \left( \omega - \frac{1}{\omega_1} \right) + \omega' \cdot \left( 1 - \frac{1}{\omega_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} = U_1(\omega) + V_1(\omega) \quad (2.52)$$

En el primer ciclo del proceso,  $G_1(\omega)$  debe ser multiplicado por el término correspondiente al segundo cero deseado  $\omega_2$ :

$$\begin{aligned} G_2(\omega) &= \prod_{n=1}^N [c_n + d_n] = [c_1 + d_1] \cdot [c_2 + d_2] = G_1(\omega) \cdot [c_2 + d_2] \\ G_2(\omega) &= [U_1(\omega) + V_1(\omega)] \cdot \left[ \left( \omega - \frac{1}{\omega_2} \right) + \omega' \cdot \left( 1 - \frac{1}{\omega_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = U_2(\omega) + V_2(\omega) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Operando y ordenando de nuevo los términos – en  $U_2(\omega)$  los de la variable pura  $\omega$ , y en  $V_2(\omega)$  los de la variable transformada  $\omega'$  – observamos que el producto  $\omega' \cdot V_N(\omega)$  resultará en  $\omega' \cdot V_N(\omega) = (\omega^2 - 1) \cdot (v_0 + v_1 \cdot \omega + v_2 \cdot \omega^2 + \dots + v_N \cdot \omega^N)$ , un polinomio en la variable pura  $\omega$ , y que por tanto debe reubicarse en  $U_2(\omega)$ .

De forma detallada, la reagrupación en  $U_2(\omega)$  y  $V_2(\omega)$  es la siguiente:

$$\begin{aligned} G_2(\omega) &= U_1(\omega) \left( \omega - \frac{1}{\omega_2} \right) + U_1(\omega) \cdot \omega' \left( 1 - \frac{1}{\omega_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} + V_1(\omega) \left( \omega - \frac{1}{\omega_2} \right) + V_1(\omega) \cdot \omega' \left( 1 - \frac{1}{\omega_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ G_2(\omega) &= \underbrace{U_1(\omega) \cdot \omega}_{U_2(\omega)} - \underbrace{\frac{U_1(\omega)}{\omega_2}}_{U_2(\omega)} + \underbrace{U_1(\omega) \cdot \omega' \left( 1 - \frac{1}{\omega_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}_{V_2(\omega)} + \underbrace{V_1(\omega) \cdot \omega}_{V_2(\omega)} - \underbrace{\frac{V_1(\omega)}{\omega_2}}_{V_2(\omega)} + \underbrace{V_1(\omega) \cdot \omega' \left( 1 - \frac{1}{\omega_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}_{U_2(\omega)} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} U_2(\omega) &= \omega \cdot U_1(\omega) - \frac{U_1(\omega)}{\omega_2} + \left( 1 - \frac{1}{\omega_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \omega' \cdot V_1(\omega) \\ V_2(\omega) &= \omega \cdot V_1(\omega) - \frac{V_1(\omega)}{\omega_2} + \left( 1 - \frac{1}{\omega_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \omega' \cdot U_1(\omega) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Tras obtener estos nuevos polinomios  $U_2(\omega)$  y  $V_2(\omega)$ , el ciclo puede repetirse con el tercer cero deseado, y así con los  $N$  ceros, hasta completar los  $N-1$  ciclos (incluyendo aquellos ceros situados en el infinito,  $\omega_n = \infty$ ).

Si repetimos todo este proceso, pero esta vez para  $G'_N(\omega) = U'_N(\omega) + V'_N(\omega)$ , llegaremos a:

$$\begin{cases} U'_N(\omega) = U_N(\omega) \\ V'_N(\omega) = -V_N(\omega) \end{cases} \quad (2.56)$$

Por tanto, tras los  $N-1$  ciclos del método recursivo,  $V_N(\omega)$  y  $V'_N(\omega)$  se anularán, y se cumplirá que:

$$\begin{aligned} \text{Num}(C_N(\omega)) = F_N(\omega) &= \frac{1}{2} \cdot [G_N(\omega) + G'_N(\omega)] \\ \text{Num}(C_N(\omega)) = F_N(\omega) &= \frac{1}{2} \cdot [U_N(\omega) + V_N(\omega) + U'_N(\omega) + V'_N(\omega)] \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\text{Num}(C_N(\omega)) = F_N(\omega) = \frac{1}{2} \cdot [U_N(\omega) + \cancel{V_N(\omega)} + U'_N(\omega) - \cancel{V'_N(\omega)}]$$

$$F_N(\omega) = U_N(\omega)$$

Por tanto, volviendo a nuestro problema inicial, en el que tratamos de calcular la función de reflexión y la función de transferencia de una red de filtros de 2 puertos, sólo nos queda determinar el denominador de ambas funciones  $E_N(\omega)$ , puesto que la cte.  $\varepsilon$ , el numerador de  $S_{21}(\omega) - P_N(\omega)$  - y el numerador de  $S_{11}(\omega) - F_N(\omega)$  - ya sabemos cómo obtenerlos. Para ello, utilizaremos el principio de singularidad alternativa, que veremos a continuación.

### 2.2.3 Principio de singularidad alternativa

El principio de singularidad alternativa ( *Alternating Pole Method* ), como hemos dicho, lo utilizaremos para determinar el polinomio denominador  $E(s)$ , en la síntesis de polinomios descrita anteriormente. Como hemos visto:

- Los ceros de transmisión en el plano complejo, definirán el polinomio numerador de  $S_{21}(s)$ , es decir  $P(s)$ .
- Los coeficientes del polinomio numerador de  $S_{11}(s)$ , es decir  $F(s)$ , se pueden encontrar usando el método recursivo desarrollado.

Queda entonces encontrar el polinomio denominador de  $S_{11}(s)$  y  $S_{21}(s)$ , es decir  $E(s)$ , para completar el diseño de la función de filtrado, ya que:

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)}{E(s)} \quad S_{21}(s) = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot E(s)} \quad (2.58)$$

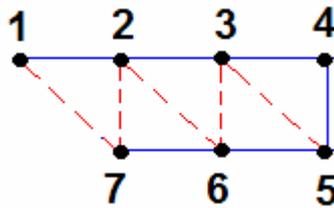
### 2.2.3.1 Método general

Conocidos dos de los tres polinomios a determinar, el tercero se puede calcular utilizando la ecuación de conservación de la energía:

$$S_{11}^2 + S_{21}^2 = 1 \quad (2.59)$$

$$S_{11}(s) \cdot S_{11}(s)^* + S_{21}(s) \cdot S_{21}(s)^* = 1 \quad (2.60)$$

A continuación vamos a sustituir cada parámetro  $S$  por su expresión como cociente de polinomios, dada por 2.58. Aparecerá una nueva constante  $\varepsilon_R$ , no contemplada hasta ahora, cuyo significado explicaremos en el siguiente capítulo, puesto que su valor sólo es distinto de la unidad cuando el grado del filtro es igual al número de ceros de transmisión finitos, y como vimos en las tablas 2.2 y 2.3, según la regla del camino mínimo, esto nunca ocurrirá mientras estemos sintetizando matrices  $N \times N$  para redes del tipo:



**Figura 2. 2 Topología de la red que pretendemos sintetizar, para un caso de grado  $N=7$**

Sustituyendo pues las expresiones en forma de cociente de polinomios tendremos:

$$\left( \frac{F(s)}{\varepsilon_R \cdot E(s)} \right) \cdot \left( \frac{F(s)}{\varepsilon_R \cdot E(s)} \right)^* + \left( \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot E(s)} \right) \cdot \left( \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot E(s)} \right)^* = 1 \quad (2.61)$$

$$\left( \frac{F(s) \cdot F(s)^*}{\varepsilon_R^2} \right) + \left( \frac{P(s) \cdot P(s)^*}{\varepsilon^2} \right) = E(s) \cdot E(s)^* \quad (2.62)$$

Podemos calcular la parte izquierda de la última ecuación usando multiplicaciones de polinomios para encontrar así el polinomio  $E(s) \cdot E(s)^*$ , que debe ser una cantidad escalar. Esto significa que las  $2 \cdot N$  raíces de  $E(s) \cdot E(s)^*$  serán simétricas alrededor del eje imaginario del plano complejo, ya que a cualquier frecuencia 's', el producto  $E(s) \cdot E(s)^*$  es escalar.

El polinomio  $E(s)$  es, como sabemos, el polinomio denominador de  $S_{21}(s)$ , por lo que sus raíces serán los polos de  $S_{21}(s)$ . Esto implica que las raíces de  $E(s)$  deben estar todas situadas en la mitad izquierda del plano complejo, para que el circuito sea estable. Así pues, sabemos que las raíces de  $E(s)$  son estrictamente Hurwitz, que es lo mismo que decir que la parte real de todas y cada una de las raíces es negativa. Por tanto, sabemos que las raíces de  $E(s) \cdot E(s)^*$  que estén en la parte izquierda pertenecerán a  $E(s)$ , y las que estén en la derecha a  $E(s)^*$ . Así, eligiendo las  $N$  raíces del lado izquierdo, podremos formar el polinomio  $E(s)$ .

Aunque el método que acabamos de presentar es genérico, implica trabajar con el doble del grado del polinomio, y a veces, con funciones de filtrado de grado muy alto, las raíces de  $E(s) \cdot E(s)^*$  tienden a acercarse mucho a  $s = \pm j$ , lo que puede dar lugar a una baja precisión. A continuación presentamos un método alternativo en el que las raíces de  $E(s)$  pueden determinarse sin trabajar con polinomios de grado  $2N$ .

### 2.2.3.2 Método de ‘Rhodes & Alseyab’

Vamos en principio, a distinguir dos casos, en función de si la diferencia entre el grado del polinomio  $N$  y el número de ceros de transmisión finitos  $nfz$  es par o impar.

#### □ *Caso en el que $N$ - $nfz$ es un número IMPAR*

Partimos en primer lugar del desarrollo de la ecuación (2.62), de la siguiente forma:

$$\left(\varepsilon^2 \cdot F(s) \cdot F(s)^*\right) + \left(\varepsilon_R^2 \cdot P(s) \cdot P(s)^*\right) = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(s) \cdot E(s)^* \quad (2.63)$$

A continuación sumamos y restamos  $\varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(s)^* \cdot F(s) + \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(s) \cdot F(s)^*$ , y reagrupamos:

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon^2 \cdot F(s) \cdot F(s)^*\right) + \left(\varepsilon_R^2 \cdot P(s) \cdot P(s)^*\right) \\ & + \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(s)^* \cdot F(s) + \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(s) \cdot F(s)^* \\ & - \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(s)^* \cdot F(s) - \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(s) \cdot F(s)^* = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(s) \cdot E(s)^* \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_R \cdot P(s) \cdot \left[ P(s)^* \cdot \varepsilon_R + \varepsilon \cdot F(s)^* \right] \\ & + \varepsilon \cdot F(s) \cdot \left[ \varepsilon \cdot F(s)^* + \varepsilon_R \cdot P(s)^* \right] \\ & - \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot \left[ P(s)^* \cdot F(s) + P(s) \cdot F(s)^* \right] = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(s) \cdot E(s)^* \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \varepsilon_R \cdot P(s) + \varepsilon \cdot F(s) \right] \cdot \left[ \varepsilon_R \cdot P(s)^* + \varepsilon \cdot F(s)^* \right] \\ & - \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot \left[ P(s)^* \cdot F(s) + P(s) \cdot F(s)^* \right] = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(s) \cdot E(s)^* \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left[ \varepsilon_R \cdot P(s) + \varepsilon \cdot F(s) \right] \cdot \left[ \varepsilon_R \cdot P(s)^* + \varepsilon \cdot F(s)^* \right] - \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot \left[ P(s)^* \cdot F(s) + P(s) \cdot F(s)^* \right]}_{\downarrow} \\ & \text{Para que este término se anule:} \\ & P(s)^* \cdot F(s) = -P(s) \cdot F(s)^* \end{aligned} \quad (2.67)$$

Por otra parte la condición de ortogonalidad unitaria es la siguiente:

$$S_{11}(s) \cdot S_{12}(s)^* + S_{21}(s) \cdot S_{22}(s)^* = 0 \quad (2.68)$$

por lo que para el caso  $N$ - $nfz$  impar, tendremos:

$$\frac{F(s)}{\varepsilon_R \cdot E(s)} \cdot \left( \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot E(s)} \right)^* + \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot E(s)} \cdot \left( \frac{F_{22}(s)}{\varepsilon_R \cdot E(s)} \right)^* = 0 \quad (2.69)$$

lo que simplificando nos conduce a:

$$F(s) \cdot P(s)^* + P(s) \cdot F_{22}(s)^* = 0 \quad (2.70)$$

Observamos que para que se cumplan simultáneamente las condiciones (2.67) y (2.70), debe ocurrir que:

$$F(s) = F_{22}(s) \quad (2.71)$$

Además, según demostramos en el Anexo B, la condición de ortogonalidad unitaria nos lleva a una condición de fase según la cual los  $N$  ceros del numerador de  $S_{22}(s)$ , esto es, de  $F_{22}(s)$ , deben ser o bien coincidentes con los del numerador de  $S_{11}(s)$ ,  $F(s)$ , o bien formar pares reflejados sobre el eje imaginario con los  $N$  ceros de  $S_{11}(s)$ . Por tanto, la única posibilidad para que se cumpla la condición (2.71), es que *todos los ceros de  $F(s)$  están en el eje imaginario y coincidan con los de  $F_{22}(s)$ .*

□ **Caso en el que  $N$ -nfz es un número PAR**

De nuevo partimos del desarrollo de la ecuación (2.62), de la siguiente forma:

$$\left(\varepsilon^2 \cdot F(s) \cdot F(s)^*\right) + \left(\varepsilon_R^2 \cdot P(s) \cdot P(s)^*\right) = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(s) \cdot E(s)^* \quad (2.72)$$

En este caso, vamos a sumar y restar una cantidad diferente. La cantidad que utilizamos es  $\varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(s)^* \cdot j \cdot F(s) + \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(s) \cdot j \cdot F(s)^*$ , y de nuevo reagrupamos:

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon^2 \cdot F(s) \cdot F(s)^*\right) + \left(\varepsilon_R^2 \cdot P(s) \cdot P(s)^*\right) \\ & + \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(s)^* \cdot j \cdot F(s) + \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot j \cdot P(s) \cdot F(s)^* \\ & - \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(s)^* \cdot j \cdot F(s) - \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(s) \cdot j \cdot F(s)^* = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(s) \cdot E(s)^* \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_R \cdot j \cdot P(s) \cdot \left[\varepsilon \cdot F(s)^* + P(s)^* \cdot \varepsilon_R \cdot (-j)\right] \\ & + \varepsilon \cdot F(s) \cdot \left[\varepsilon \cdot F(s)^* + P(s)^* \cdot \varepsilon_R \cdot (-j)\right] \\ & - \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot \left[(-j) \cdot P(s)^* \cdot F(s) + (j \cdot P(s)) \cdot F(s)^*\right] = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(s) \cdot E(s)^* \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon_R \cdot (j \cdot P(s)) + \varepsilon \cdot F(s)\right] \cdot \left[\varepsilon_R \cdot (j \cdot P(s))^* + \varepsilon \cdot F(s)^*\right] \\ & - \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot \left[\underbrace{(j \cdot P(s))^* \cdot F(s) + (j \cdot P(s)) \cdot F(s)^*}_{\downarrow\downarrow}\right] = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(s) \cdot E(s)^* \end{aligned} \quad (2.75)$$

Para que este término se anule: (2.76)

$$P(s)^* \cdot F(s) = P(s) \cdot F(s)^*$$

Además hemos de tener en cuenta que la ecuación (2.74) es válida para el caso N-nfz es par, en el que  $P(s)$  ha tenido que ser multiplicado por  $j$ . Entonces la condición de ortogonalidad unitaria (2.68) nos llevará en este caso a:

$$\frac{F(s)}{\varepsilon_R \cdot E(s)} \cdot \left(\frac{j \cdot P(s)}{\varepsilon \cdot E(s)}\right)^* + \frac{j \cdot P(s)}{\varepsilon \cdot E(s)} \cdot \left(\frac{F_{22}(s)}{\varepsilon_R \cdot E(s)}\right)^* = 0 \quad (2.77)$$

$$-F(s) \cdot j \cdot P(s)^* + j \cdot P(s) \cdot F_{22}(s)^* = 0 \quad (2.78)$$

lo que simplificando nos conduce a:

$$F(s) \cdot P(s)^* - P(s) \cdot F_{22}(s)^* = 0 \quad (2.79)$$

Observamos que para que se cumplan simultáneamente las condiciones (2.75) y (2.78), debe ocurrir que:

$$F(s) = F_{22}(s) \quad (2.80)$$

De nuevo, al igual que en el caso impar, la única posibilidad es que *todos los ceros de  $F(s)$  están en el eje imaginario y coincidan con los de  $F_{22}(s)$* .

Por tanto, si los ceros de  $F(s)$  y  $F_{22}(s)$  cumplen la condición  $F(s) = F_{22}(s)$ , las ecuaciones vistas para los casos par e impar se reducen a:

□ *Caso  $N$ -nfz impar:*

$$[\varepsilon_R \cdot P(s) + \varepsilon \cdot F(s)] \cdot [\varepsilon_R \cdot P(s)^* + \varepsilon \cdot F(s)^*] = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(s) \cdot E(s)^* \quad (2.81)$$

$$[\varepsilon_R \cdot P(s) + \varepsilon \cdot F(s)] \cdot [\varepsilon_R \cdot P(s) + \varepsilon \cdot F(s)]^* = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(s) \cdot E(s)^* \quad (2.82)$$

□ *Caso  $N$ -nfz par:*

$$[\varepsilon_R \cdot (j \cdot P(s)) + \varepsilon \cdot F(s)] \cdot [\varepsilon_R \cdot (j \cdot P(s))^* + \varepsilon \cdot F(s)^*] = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(s) \cdot E(s)^* \quad (2.83)$$

$$[\varepsilon_R \cdot (j \cdot P(s)) + \varepsilon \cdot F(s)] \cdot [\varepsilon_R \cdot (j \cdot P(s)) + \varepsilon \cdot F(s)]^* = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(s) \cdot E(s)^* \quad (2.84)$$

Si estamos trabajando en el plano  $\omega$ , entonces  $P(\omega)$  y  $F(\omega)$  tendrán coeficientes puramente reales, y podremos encontrar las singularidades en el caso  $N$ -nfz par o impar, utilizando la ecuación modificada como sigue (ver demostración en el Anexo C) :

$$\varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(\omega) \cdot E(\omega)^* = [\varepsilon_R \cdot P(\omega) - j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)] \cdot [\varepsilon_R \cdot P(\omega) - j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)]^* \quad (2.85)$$

Buscando las raíces de uno de los términos de la parte derecha de la ecuación, tendremos un patrón de singularidades que alternará entre el plano de la parte derecha y el de la izquierda. Buscando además las raíces del otro término, tendremos el conjunto de singularidades complementarias, completando la simetría del patrón alrededor del eje imaginario.

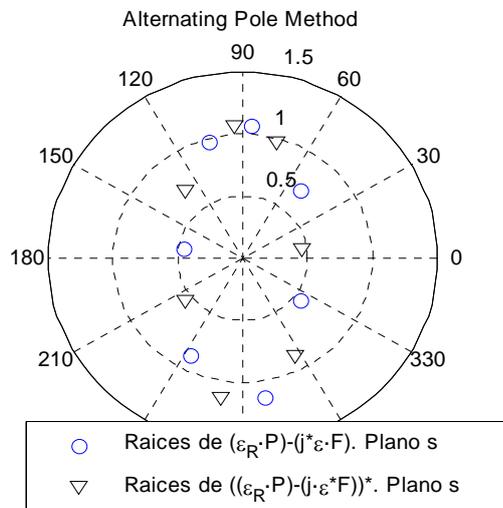
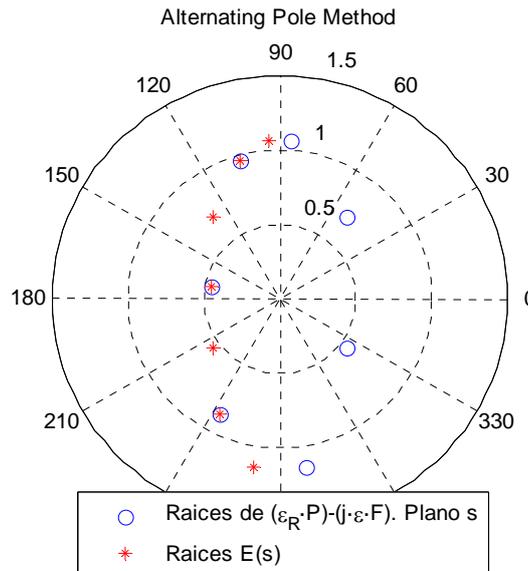


Figura 2. 3 Distribución de las raíces del polinomio  $[\varepsilon_R \cdot P(s) - j \cdot \varepsilon \cdot F(s)]$  y su conjugado.

Solo es necesario entonces, formar uno de los dos términos de la ecuación a partir de los polinomios  $P(s)$  y  $F(s)$ , y luego encontrar las raíces del polinomio resultante de grado N con coeficientes complejos para encontrar las singularidades.

Sabiendo que, como ya hemos dicho, el polinomio  $E(s)$  debe ser Hurwitz, cualquier singularidad en el plano derecho debe reflejarse alrededor del eje imaginario en el plano izquierdo. Para encontrar  $E(s)$  solo tendríamos por tanto que tratar con polinomios de grado N, y como las singularidades tienden a estar menos cercanas a  $s = \pm j$ , garantizamos **mayor precisión**.



**Figura 2. 4. Distribución de las raíces de los polinomios  $[\epsilon_R \cdot P(s) - j \cdot \epsilon \cdot F(s)]$  y  $E(s)$ .**

En la práctica, para la mayoría de los casos utilizando distintas funciones de filtrado, por ejemplo Butterworth o Chebyshev, los ceros de reflexión (raíces del polinomio  $F(s)$ ), están en el eje imaginario, y el método de singularidad alternativa puede aplicarse para encontrar el polinomio  $E(s)$ .

Para ciertos casos específicos, por ejemplo en filtros predistorsionadores, en los que algunos o todos los ceros de reflexión están en el plano complejo y no en el eje imaginario, tendremos que usar el método que usa la ecuación de conservación de la energía para encontrar el  $E(s)$ .

### 2.2.4 Ejemplo de síntesis de polinomios

Para ilustrar el procedimiento recursivo, realizaremos la síntesis detallada de un ejemplo de cuarto grado, con rizado constante y unas pérdidas de retorno de 15 dB. Los ceros de transmisión los situaremos en  $s = +j \cdot 1.5$  y  $s = +j \cdot 3.5$ . Las especificaciones serán por tanto:

<i>Tipo de filtro</i>	Paso banda Asimétrico Chebyshev
<i>Grado</i>	4
<i>Pérdidas de retorno</i>	15 dB
<i>Ceros de transmisión</i>	$+j \cdot 1.5$ $+j \cdot 3.5$

**Tabla 2. 4. Especificaciones del filtro**

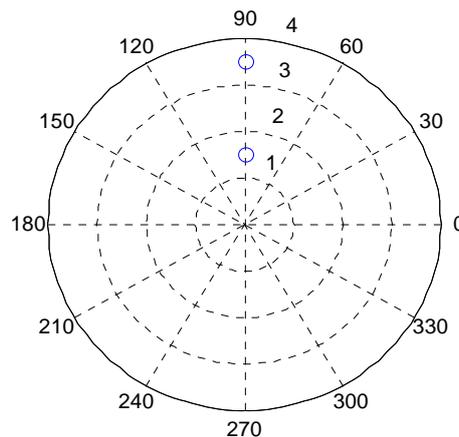
Comprobamos cómo, los ceros de transmisión deseados, cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método de síntesis que utilizaremos, es decir:

- Deben existir al menos dos ceros de transmisión el infinito, por lo que el número de ceros finitos (nfz) debe ser menor o igual que  $N-2$ :

$$nfz \leq N - 2 \rightarrow 2 \leq (4 - 2) = 2 \quad (2.86)$$

- Los ceros de transmisión deben estar situados simétricamente alrededor del eje imaginario. En este caso concreto, los ceros están justo sobre el eje imaginario:

Ceros de tx deseados : Simetría alrededor del eje imaginario



**Figura 2. 5. Ceros de transmisión especificados**

Iniciaremos el proceso con  $s_1 = +j \cdot 1.5$ , y por tanto  $\omega_1 = +1.5$ :

$$U_1(\omega) = \left( \omega - \frac{1}{\omega_1} \right) = \left( \omega - \frac{1}{1.5} \right) \quad (2.87)$$

$$U_1(\omega) = \omega - 0.6667 \quad (2.88)$$

$$V_1(\omega) = \omega' \cdot \left( 1 - \frac{1}{\omega_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \omega' \cdot \left( 1 - \frac{1}{(1.5)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.89)$$

$$V_1(\omega) = 0.7454 \cdot \omega' \quad (2.90)$$

A continuación, en el primer ciclo, con  $s_2 = +j \cdot 3.5$ , y  $\omega_2 = +3.5$ , tendremos las siguientes ecuaciones:

$$U_2(\omega) = \omega \cdot U_1(\omega) - \frac{U_1(\omega)}{\omega_2} + \left( 1 - \frac{1}{\omega_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \omega' \cdot V_1(\omega) \quad (2.91)$$

$$V_2(\omega) = \omega \cdot V_1(\omega) - \frac{V_1(\omega)}{\omega_2} + \left( 1 - \frac{1}{\omega_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \omega' \cdot U_1(\omega) \quad (2.92)$$

que desarrolladas, sustituyendo  $U_1(\omega)$ ,  $V_1(\omega)$  y  $\omega_2$ , resultan en los polinomios  $U_2(\omega)$  y  $V_2(\omega)$ :

$$U_2(\omega) = 1.7143 \cdot \omega^2 - 0.9524 \cdot \omega - 0.5238 \quad (2.93)$$

$$V_2(\omega) = \omega' \cdot (1.7037 \cdot \omega - 0.8518) \quad (2.94)$$

Para el segundo y tercer ciclo, los ceros deseados se sitúan en el infinito, por lo que las ecuaciones básicas, al particularizar al caso  $\omega_n = \infty$  se simplifican bastante:

$$U_n(\omega) = \omega \cdot U_{n-1}(\omega) - \frac{U_{n-1}(\omega)}{\omega_n} + \left( 1 - \frac{1}{\omega_n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \omega' \cdot V_{n-1}(\omega) \quad (2.95)$$

$$\omega_n = \infty \Rightarrow \boxed{U_n(\omega) = \omega \cdot U_{n-1}(\omega) + \omega' \cdot V_{n-1}(\omega)} \quad (2.96)$$

$$V_n(\omega) = \omega \cdot V_{n-1}(\omega) - \frac{V_{n-1}(\omega)}{\omega_n} + \left( 1 - \frac{1}{\omega_n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \omega' \cdot U_{n-1}(\omega) \quad (2.97)$$

$$\omega_n = \infty \Rightarrow \boxed{V_n(\omega) = \omega \cdot V_{n-1}(\omega) + \omega' \cdot U_{n-1}(\omega)} \quad (2.98)$$

Por tanto, en el segundo ciclo con  $\omega_2 = \infty$ , tendremos:

$$U_3(\omega) = \omega \cdot U_2(\omega) + \omega' \cdot V_2(\omega) \quad (2.99)$$

$$U_3(\omega) = 3.4180 \cdot \omega^3 - 1.8042 \cdot \omega^2 - 2.2275 \cdot \omega + 0.8518 \quad (2.100)$$

$$V_3(\omega) = \omega \cdot V_2(\omega) + \omega' \cdot U_2(\omega) \quad (2.101)$$

$$V_3(\omega) = \omega' \cdot (3.4180 \cdot \omega^2 - 1.8042 \cdot \omega - 0.5238) \quad (2.102)$$

Y finalmente, en el tercer y último ciclo con  $\omega_3 = \infty$ :

$$U_4(\omega) = \omega \cdot U_3(\omega) + \omega' \cdot V_3(\omega) \quad (2.103)$$

$$U_4(\omega) = 6.8359 \cdot \omega^4 - 3.6084 \cdot \omega^3 - 6.1692 \cdot \omega^2 + 2.6561 \cdot \omega + 0.5238 \quad (2.104)$$

$$V_4(\omega) = \omega \cdot V_3(\omega) + \omega' \cdot U_3(\omega) \quad (2.105)$$

$$V_4(\omega) = \omega' \cdot (6.8359 \cdot \omega^3 - 3.6084 \cdot \omega^2 - 2.7513 \cdot \omega + 0.8518) \quad (2.106)$$

En este punto, el polinomio  $U_4(\omega)$ , normalizado tal que el coeficiente de grado más alto sea la unidad, coincidirá con el numerador de la función de reflexión  $S_{11}(\omega)$ , es decir  $F_4(\omega)$ , y buscando sus raíces podemos encontrar los N ceros de reflexión en banda. Si trabajamos en el plano complejo (sabiendo que  $s = j \cdot \omega$ ):

<b>Coefficientes de <math>F_4(s)</math></b>	<b>Raíces de <math>F_4(s)</math> = Ceros de reflexión</b>
1.0000	-j 0.8824
-j 0.5279	j 0.9597
0.9025	j 0.6011
-j 0.3885	-j 0.1505
0.0766	

**Tabla 2. 5. Coeficientes y raíces de  $F_4(s)$**

De la misma forma, para el polinomio  $V_4(\omega)$ , si trabajamos en el plano complejo, encontramos las N-1 máximos de reflexión en banda, y los coeficientes del polinomio:

<b>Coefficientes de <math>V_4(s)</math></b>	<b>Raíces de <math>V_4(s)</math> = Máximos de reflexión en banda</b>
1.0000	-j 0.5677
-j 0.5279	j 0.8316
0.4025	j 0.2639
-j 0.1246	

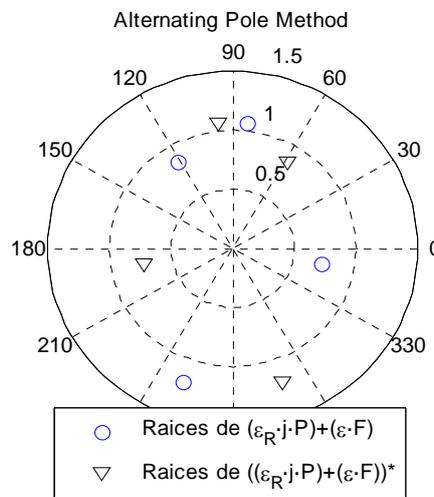
**Tabla 2. 6. Coeficientes y raíces de  $V_4(s)$**

Una vez conocidos los polinomios  $P(s)$ , y  $F_4(s)$ , podemos calcular el polinomio denominador  $E_4(s)$  y sus raíces utilizando el principio de singularidad alternativa, según el cual:

$$\varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(\omega) \cdot E(\omega)^* = [\varepsilon_R \cdot P(\omega) - j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)] \cdot [\varepsilon_R \cdot P(\omega) - j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)]^* \quad (2.107)$$

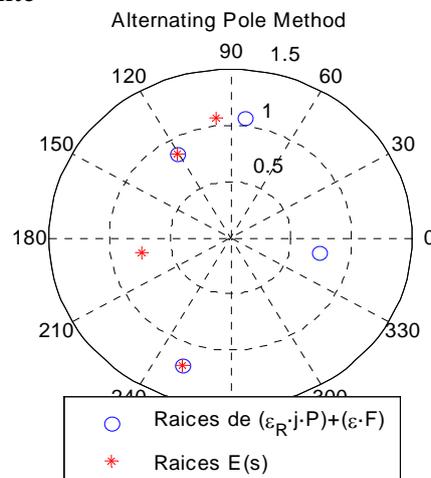
Buscaremos entonces, las raíces del término  $\varepsilon_R \cdot P(\omega) - j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)$ , y transformándolas al plano 's', tendremos un patrón de singularidades que alternará entre la parte derecha y la parte izquierda del plano. Buscando además las raíces del término  $[\varepsilon_R \cdot P(\omega) - j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)]^*$  y transformándolas también al plano 's', obtendremos el conjunto de singularidades complementarias, que completa la simetría alrededor del eje imaginario.

Podemos comprobar esto gráficamente:



**Figura 2. 6. Distribución de las raíces del polinomio  $\varepsilon_R \cdot P(\omega) - j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)$  y su conjugado en el plano complejo**

Vemos que es suficiente con formar sólo uno de los dos términos de la parte derecha de la ecuación (2.107), y obtener sus raíces, puesto que las raíces del polinomio  $E_4(s)$ , pueden obtenerse sabiendo que tiene todas sus raíces en la parte izquierda del plano complejo. Gráficamente



**Figura 2. 7. Distribución de las raíces de  $E(s)$  y el polinomio  $\varepsilon_R \cdot P(\omega) - j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)$  en el plano complejo**

Entonces, el polinomio  $E(s)$  resulta ser el siguiente:

Coefficientes de $E_4(s)$	Raíces de $E_4(s)$ = Polos de transmisión y reflexión
1.0000	$-0.4000 - j \cdot 1.1354$
$1.6812 - j \cdot 0.5279$	$-0.7243 - j \cdot 0.1350$
$2.3156 - j \cdot 0.9906$	$-0.1163 + j \cdot 1.0596$
$1.5319 - j \cdot 1.3080$	$-0.4406 + j \cdot 0.7386$
$0.3846 - j \cdot 0.7164$	

Tabla 2. 7. Coeficientes y raíces de  $E_4(s)$

Conociendo por tanto, los tres polinomios que determinan las funciones de reflexión y de transferencia según explicamos en el proceso de síntesis, es sencillo obtener su representación gráfica, y comprobar que los ceros de transmisión se encuentran donde deseábamos.

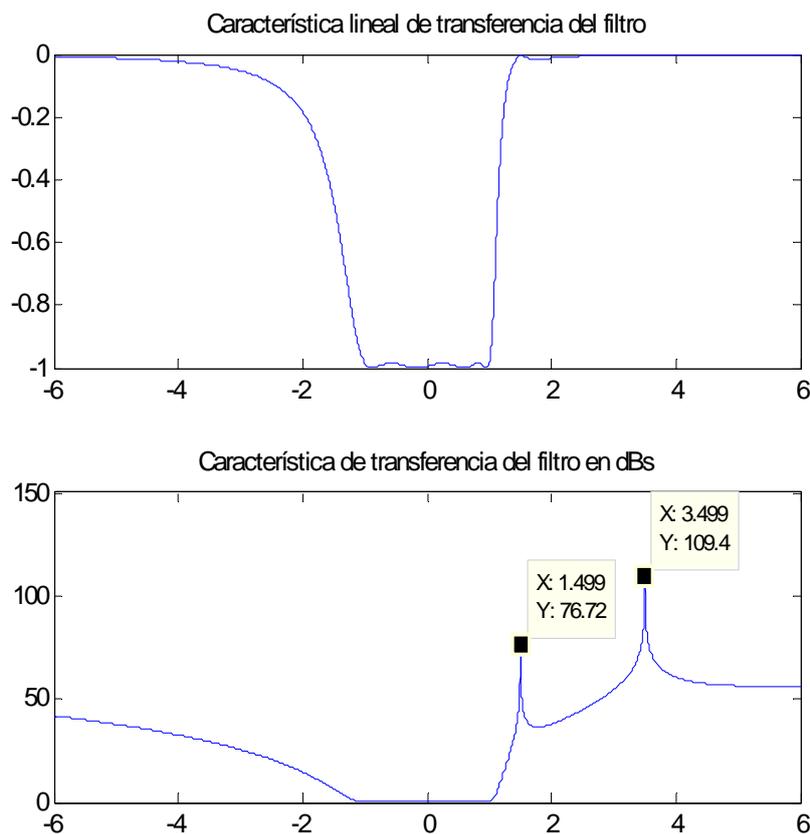


Figura 2. 8. Característica de transferencia

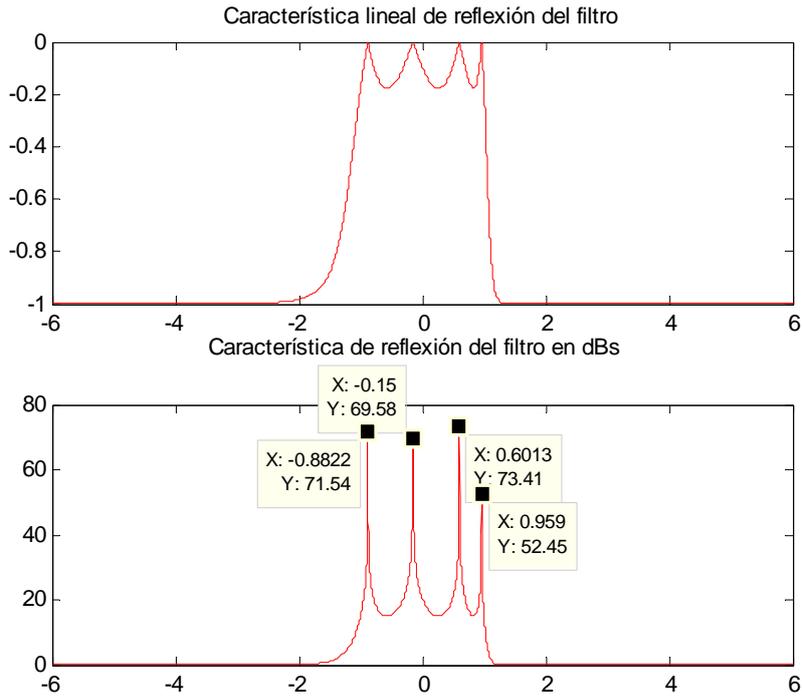


Figura 2. 9. Característica de reflexión

Además, se observan la existencia de unas pérdidas de retorno de 22 dB, como se había especificado:

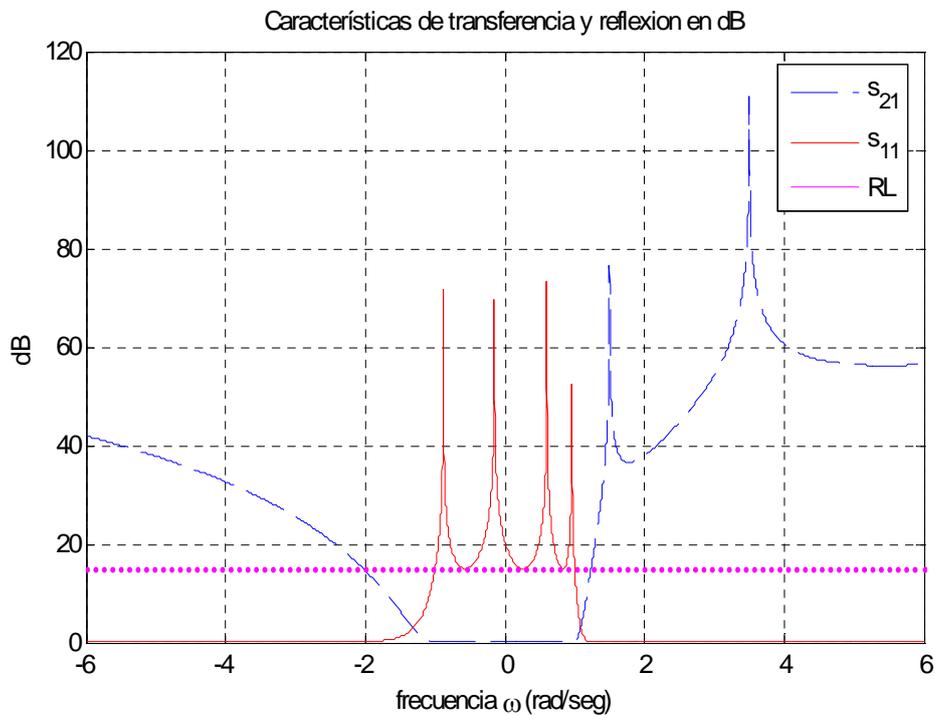


Figura 2. 10. Nivel de pérdidas de retorno, y características de transferencia y reflexión en dB,

El retardo de grupo, calculado como la derivada negativa de la fase de  $S_{21}$  es el siguiente:

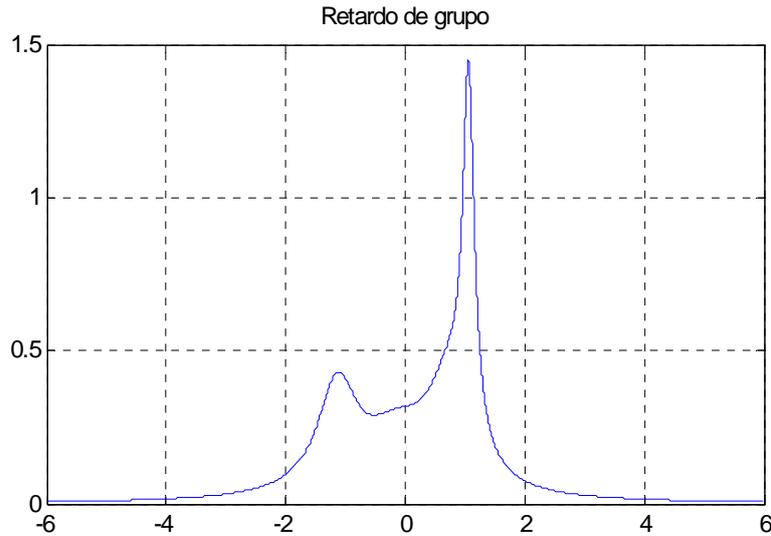


Figura 2. 11. Retardo de grupo

Por último, vamos a calcular y representar, a modo de comprobación, la función de filtrado de grado N:

$$C_N(\omega) = \cosh \left[ \sum_{n=1}^N \cosh^{-1} \left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} \right) \right] = \cosh \left[ \sum_{n=1}^N \cosh^{-1}(x_n) \right] \quad (2.108)$$

observamos que, como preveíamos, se cumple que:

$$\begin{cases} |\omega| = 1 \rightarrow |C_N(\omega)| = 1 \\ |\omega| < 1 \rightarrow |C_N(\omega)| \leq 1 \\ |\omega| > 1 \rightarrow |C_N(\omega)| > 1 \end{cases} \quad (2.109)$$

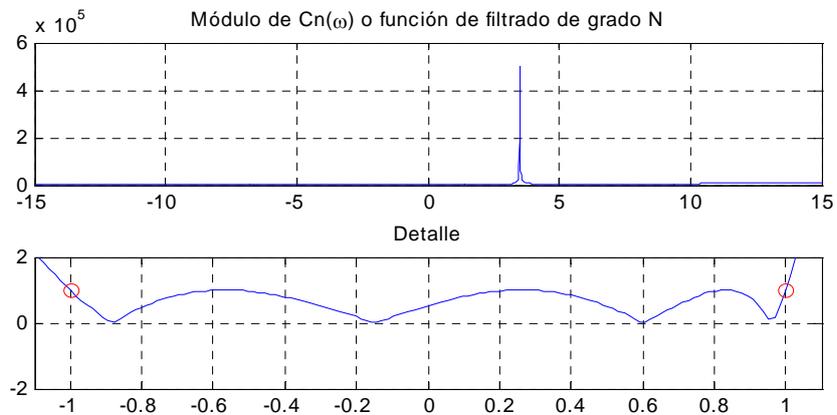


Figura 2. 12. Función de filtrado de grado N

## 2.3 Procedimiento para obtener la matriz de acoplo $N \times N$

El punto de partida para la síntesis e la matriz de acoplo, tanto en el caso de una terminación como en el de dos terminaciones, son los polinomios de transferencia y reflexión  $E(s)$ ,  $F(s)$  y  $P(s)$  establecidos previamente:

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)}{E(s)} \quad S_{21}(s) = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot E(s)} \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \cdot \frac{P_N(s)}{F_N(s)} \Bigg|_{s=j} \quad (2.110)$$

En general, los coeficientes de  $E(s)$  serán complejos, y los de  $F(s)$  y  $P(s)$  alternarán entre puramente reales y puramente imaginarios según aumente la potencia de  $s$ . El grado de  $E(s)$  y  $F(s)$  será  $N$ , y el grado de  $P(s)$  se corresponde con el número de ceros que no estaban situados en el  $\infty$ , que se especificaron en un principio. Como ya hemos dicho, la síntesis exitosa de las redes de dos puertos que vamos a considerar debe tener al menos dos de los ceros de transmisión en el infinito, por lo que *el grado de  $P(s)$  no debe exceder  $N-2$* .

A continuación describiremos la síntesis de polinomios racionales para los parámetros de admitancia  $y_{21}(=y_{12})$  e  $y_{22}$ , a partir de los polinomios de transferencia y reflexión  $E(s)$ ,  $F(s)$  y  $P(s)$ . El procedimiento difiere un poco para los casos de una y dos terminaciones, y por tanto vamos a tratarlo de forma separada. Posteriormente trataremos el método utilizado para sintetizar la matriz de acoplo de la red a partir de los parámetros  $y_{21}$  e  $y_{22}$ , así como la relación entre éstos y los parámetros de scattering  $S_{21}$  y  $S_{11}$ .

### 2.3.1 Redes de dos terminaciones

La siguiente figura muestra una red de filtrado de dos puertos y sin pérdidas, con una fuente de tensión de impedancia interna  $R_1$  en la parte izquierda, y una impedancia de carga  $R_n$  en la parte derecha:

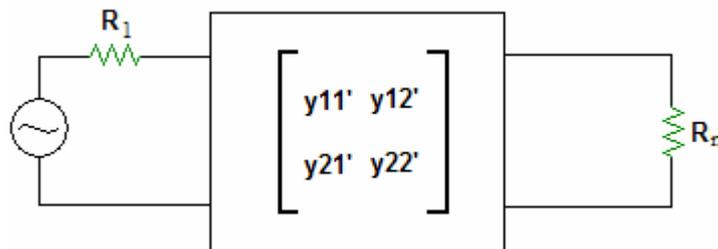


Figura 2. 13. Red de dos terminaciones

Vamos ahora, a tratar de hallar la *impedancia de entrada* del sistema, definida como la función de transferencia siguiente:

$$Z(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \quad (2.111)$$

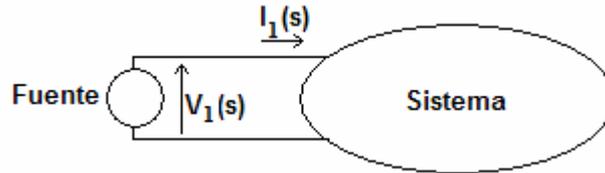


Figura 2. 14. Definición de la impedancia de entrada

Para ello, partiremos de las ecuaciones básicas que definen nuestra red, dadas por la matriz de admitancias:

$$I_1 = y_{11} \cdot V_1 + y_{12} \cdot V_2 \quad (2.112)$$

$$I_2 = y_{21} \cdot V_1 + y_{22} \cdot V_2 \quad (2.113)$$

$$V_1 = z_{11} \cdot I_1 + z_{12} \cdot I_2 \quad (2.114)$$

$$V_2 = z_{21} \cdot I_1 + z_{22} \cdot I_2 \quad (2.115)$$

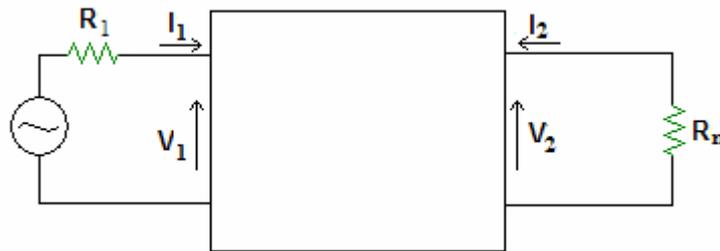


Figura 2. 15. Análisis de la red

Observando el circuito, vemos que se cumple:

$$V_2 = -I_2 \cdot R_n \quad (2.116)$$

De donde, utilizando (2.113), se deduce:

$$I_2 = y_{21} \cdot V_1 - y_{22} \cdot I_2 \cdot R_n \quad (2.117)$$

Despejando  $I_2$  en esta última ecuación:

$$I_2 = \frac{y_{21} \cdot V_1}{(1 + y_{22} \cdot R_n)} \Rightarrow I_2 = \frac{\frac{y_{21}}{y_{22}} \cdot V_1}{\left(R_n + \frac{1}{y_{22}}\right)} \quad (2.118)$$

Si sustituimos ahora en (2.114), nos queda:

$$V_1 = z_{11} \cdot I_1 + z_{12} \cdot \left( \frac{\frac{y_{21} \cdot V_1}{y_{22}}}{\left( R_n + \frac{1}{y_{22}} \right)} \right) \quad (2.119)$$

Ya podemos determinar la relación entre  $V_1$  e  $I_1$  que nos dará la impedancia de entrada buscada:

$$V_1 \cdot \left( 1 - \frac{\frac{y_{21} \cdot z_{12}}{y_{22}}}{\left( R_n + \frac{1}{y_{22}} \right)} \right) = z_{11} \cdot I_1 \quad (2.120)$$

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{z_{11}}{\left( 1 - \frac{\frac{y_{21} \cdot z_{12}}{y_{22}}}{\left( R_n + \frac{1}{y_{22}} \right)} \right)} = \frac{z_{11} \cdot \left( R_n + \frac{1}{y_{22}} \right)}{R_n + \frac{1}{y_{22}} - \frac{y_{21}}{y_{22}} \cdot z_{12}} = \frac{z_{11} \cdot \left( R_n + \frac{1}{y_{22}} \right)}{R_n + \left( \frac{1 - y_{21} \cdot z_{12}}{y_{22}} \right)} \quad (2.121)$$

Si además, tenemos en cuenta que en redes recíprocas como la que estamos estudiando, se cumple la relación indicada a continuación entre los parámetros A, B, C y D de la red definidos en [9, pág. 258], y expresamos ésta en función de los parámetros 'y' y 'z' [10]:

$$A \cdot D - B \cdot C = 1 \quad (2.122)$$

$$-\frac{z_{22}}{z_{21}} \cdot \frac{y_{22}}{y_{21}} + \frac{1}{y_{21}} \cdot \frac{1}{z_{21}} = 1 \quad (2.123)$$

$$-z_{22} \cdot y_{22} + 1 = y_{21} \cdot z_{21} \quad (2.124)$$

$$1 = y_{21} \cdot z_{21} + z_{22} \cdot y_{22} \quad (2.125)$$

Y que, por ser una red recíproca también se verifica que  $[z_{ij}] = [z_{ji}]$ , por lo que la última ecuación puede expresarse como:

$$1 = y_{21} \cdot z_{12} + z_{22} \cdot y_{22} \Rightarrow \frac{1 - y_{21} \cdot z_{12}}{y_{22}} = z_{22} \quad (2.126)$$

Entonces, si sustituimos en (2.121) la última expresión, obtenemos la *impedancia de entrada* que buscábamos:

$$Z_{in}(s) = \frac{V_1}{I_1} = \frac{z_{11} \cdot \left( R_n + \frac{1}{y_{22}} \right)}{R_n + z_{22}} \quad (2.127)$$

Normalizando  $R_n$  a  $1 \Omega$ , la impedancia de entrada, queda finalmente:

$$Z_{in}(s) = \frac{V_1}{I_1} = \frac{z_{11} \cdot \left( 1 + \frac{1}{y_{22}} \right)}{1 + z_{22}} \quad (2.128)$$

Por otra, parte la impedancia de entrada si  $R_n = 1 \Omega$ , puede expresarse también en función de los polinomios  $E(s)$  y  $F(s)$  como:

$$Z_{in}(s) = \frac{1 \pm S_{11}}{1 \mp S_{11}} = \frac{1 \pm \frac{F(s)}{E(s)}}{1 \mp \frac{F(s)}{E(s)}} = \frac{E(s) \pm F(s)}{E(s) \mp F(s)} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} \quad (2.129)$$

Donde  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $n_1$  y  $n_2$  son los polinomios complejos par e impar respectivamente, en la variable 's', contruidos a partir de  $E(s)$  y  $F(s)$ . Concretamente:

$$m_1 + n_1 = \text{numerador}(Z(s)) = E(s) + F(s) \quad (2.130)$$

por lo que:

$$m_1 = \text{Re}(e_0 + f_0) + j \cdot \text{Im}(e_1 + f_1) \cdot s + \text{Re}(e_2 + f_2) \cdot s^2 + \dots \quad (2.131)$$

$$n_1 = j \cdot \text{Im}(e_0 + f_0) + \text{Re}(e_1 + f_1) \cdot s + j \cdot \text{Im}(e_2 + f_2) \cdot s^2 + \dots \quad (2.132)$$

donde:

$$\begin{aligned} i &= 0, 1, 2, \dots, N \\ e_i &= \text{Coeficientes complejos de } E(s) \\ f_i &= \text{Coeficientes complejos de } F(s) \end{aligned} \quad (2.133)$$

Distinguiremos dos casos:

□ **Orden  $N$  del filtro par.**

Sacando  $n_1$  de los paréntesis en (2.129), tendremos que:

$$Z_{in}(s) = \frac{n_1 \cdot \left( \frac{m_1}{n_1} + 1 \right)}{m_2 + n_2} \quad (2.134)$$

La comparación entre ésta expresión y la (2.128), nos lleva a:

$$y_{22} = \frac{n_1}{m_1} \quad (2.135)$$

y como el denominador de  $y_{21}$  es el mismo que el de  $y_{22}$ , y el numerador de  $y_{21}$  tiene los mismos ceros de transmisión que  $S_{21}(s) = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot E(s)}$ , también se cumplirá que:

$$y_{21} = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot m_1} \quad (2.136)$$

□ **Orden  $N$  del filtro impar**

Sacando  $m_1$  de los paréntesis en este caso, en la expresión (1.129), tendremos que:

$$Z_{in}(s) = \frac{m_1 \cdot \left(1 + \frac{n_1}{m_1}\right)}{m_2 + n_2} \quad (2.137)$$

La comparación entre ésta expresión y la (2.128), nos lleva a:

$$y_{22} = \frac{m_1}{n_1} \quad (2.138)$$

y como el denominador de  $y_{21}$  es el mismo que el de  $y_{22}$ , y el numerador de  $y_{21}$  tiene los mismos ceros de transmisión que  $S_{21}(s)$ , también se cumplirá que:

$$y_{21} = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot n_1} \quad (2.139)$$

### 2.3.2 Redes de una terminación

La construcción de los polinomios  $m_1$  y  $n_1$  para redes de una terminación sigue líneas similares al procedimiento explicado para redes de dos terminaciones. Cuando hablamos de una red de una terminación, la impedancia de fuente vale  $R_1 = 0$ , y por tanto la red presenta el siguiente aspecto:

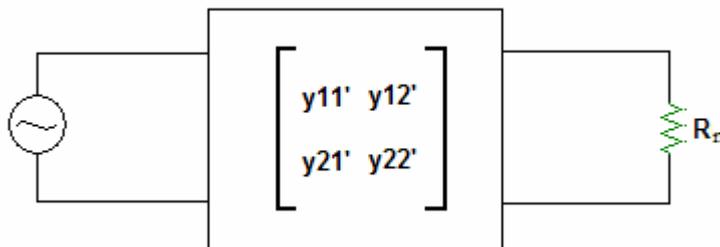


Figura 2. 16. Red de una terminación

Vamos ahora, a tratar de hallar la *admitancia de transferencia* del sistema, definida como la función siguiente:

$$Y_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} \quad (2.140)$$

Para ello, partiremos de las ecuaciones básicas que definen nuestra red:

$$I_1 = y_{11} \cdot V_1 + y_{12} \cdot V_2 \quad (2.141)$$

$$I_2 = y_{21} \cdot V_1 + y_{22} \cdot V_2 \quad (2.142)$$



Figura 2. 17. Análisis de la red

Observando el circuito, vemos que se cumple:

$$V_2 = -I_2 \cdot R_n \quad (2.143)$$

De donde, utilizando (2.142), se deduce:

$$I_2 = y_{21} \cdot V_1 - y_{22} \cdot I_2 \cdot R_n \quad (2.144)$$

Despejando  $I_2$  en esta última ecuación:

$$I_2 = \frac{y_{21} \cdot V_1}{(1 + y_{22} \cdot R_n)} \quad (2.145)$$

ya podemos encontrar la relación entre  $V_1$  e  $I_2$  que nos dará la *admitancia de transferencia* buscada:

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{y_{21}}{(1 + y_{22} \cdot R_n)} \quad (2.146)$$

Normalizando  $R_n$  a  $1 \Omega$ , queda finalmente:

$$Y_{21} = \frac{y_{21}}{(1 + y_{22})} \quad (2.147)$$

Por otra parte:

$$S_{21}(s) = \frac{P(s)/\varepsilon}{E(s)} = \frac{P(s)/\varepsilon}{m_1 + n_1} \quad (2.148)$$

donde  $m_1$  y  $n_1$  son los polinomios complejos par e impar que componen  $E(s)$ .

□ **Orden  $N$  del filtro par**

En este caso, de (2.148) llegamos a:

$$S_{21}(s) = \frac{P(s)/\varepsilon}{m_1 + n_1} = \frac{P(s)/(\varepsilon \cdot m_1)}{1 + \frac{n_1}{m_1}} \quad (2.149)$$

Para una red de una terminación con  $R_n = 1 \Omega$ , la función de transferencia  $S_{21}(s)$  es igual a la admitancia de transferencia  $Y_{21}(s)$ , por lo que comparando (2.147) con (2.149), se observa que:

$$y_{22} = \frac{n_1}{m_1} \quad (2.150)$$

$$y_{21} = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot m_1} \quad (2.151)$$

donde:

$$m_1 = \operatorname{Re}(e_0) + j \cdot \operatorname{Im}(e_1) \cdot s + \operatorname{Re}(e_2) \cdot s^2 + \dots \quad (2.152)$$

$$n_1 = j \cdot \operatorname{Im}(e_0) + \operatorname{Re}(e_1) \cdot s + j \cdot \operatorname{Im}(e_2) \cdot s^2 + \dots \quad (2.153)$$

siendo  $e_0, e_1, e_2, \dots$  los coeficientes complejos de  $E(s)$

□ **Orden  $N$  del filtro impar**

En este caso, de (2.148) llegamos a:

$$S_{21}(s) = \frac{P(s)/\varepsilon}{m_1 + n_1} = \frac{P(s)/(\varepsilon \cdot n_1)}{1 + \frac{m_1}{n_1}} \quad (2.154)$$

Como hemos dicho, para una red de una terminación con  $R_n = 1 \Omega$ , la función de transferencia  $S_{21}(s)$  es igual a la admitancia de transferencia  $Y_{21}(s)$ , por lo que comparando (2.147) con (2.154), observamos que:

$$y_{22} = \frac{m_1}{n_1} \quad (2.155)$$

$$y_{21} = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot n_1} \quad (2.156)$$

Vemos que para el caso de redes de una terminación sólo es necesario conocer  $\varepsilon$ ,  $P(s)$ ,  $E(s)$ , que forman el numerador y denominador de  $S_{21}(s)$ , para determinar  $m_1$  y  $n_1$ .

### 2.3.3 Síntesis

Habiendo determinado los polinomios numerador y denominador  $y_{21}$  e  $y_{22}$ , podemos proceder a la síntesis de la matriz de acoplamiento de la red eléctrica.

Bajo el análisis eléctrico, la red prototipo producirá precisamente las mismas características de transferencia y reflexión que aquellos expresados dentro de las representaciones puramente polinómicas de  $S_{11}(s)$  y  $S_{21}(s)$ . A continuación, vamos a ver el procedimiento para la síntesis de la matriz de acoplamiento.

Las impedancias de fuente y de carga,  $R_1$  y  $R_N$  de una red genérica de dos puertos pueden normalizarse a la unidad, incluyendo transformadores a la entrada y a la salida de la red, con relaciones  $1:n_1$  y  $n_2:1$  respectivamente, donde  $n_i$  expresa la relación entre la tensión a la entrada y a la salida de la red.

La red de dos puertos, y su matriz de parámetros  $y$ , son los siguientes:

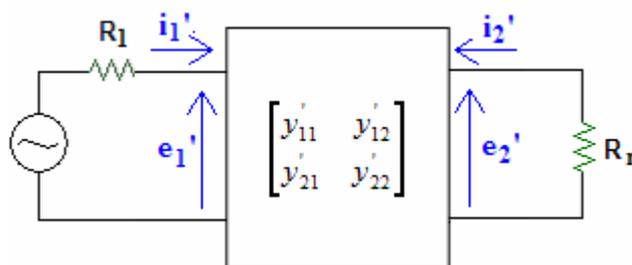


Figura 2. 18. Red genérica de dos puertos

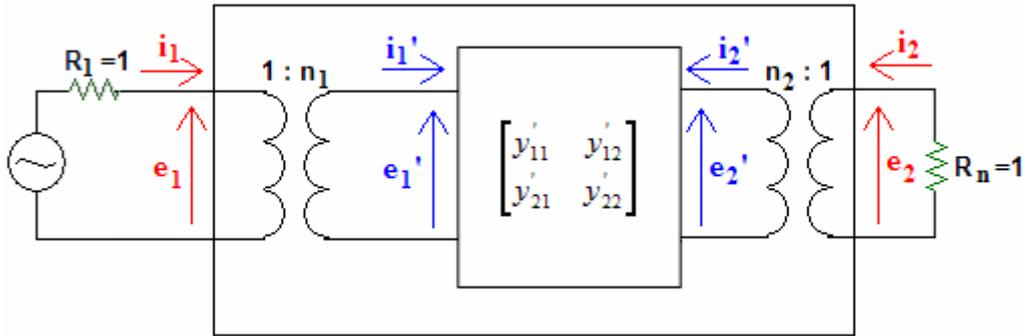
$$\begin{aligned}
 y'_{11} &= \left. \frac{i'_1}{e_1} \right|_{e'_2=0} & y'_{12} &= \left. \frac{i'_1}{e_2} \right|_{e'_1=0} \\
 y'_{21} &= \left. \frac{i'_2}{e_1} \right|_{e'_2=0} & y'_{22} &= \left. \frac{i'_2}{e_2} \right|_{e'_1=0}
 \end{aligned}
 \tag{2.157}$$

Vamos entonces, a tratar de calcular la relación de esta matriz, con la matriz de parámetros  $y$  de la red con transformadores. Para ello hemos de saber que en un transformador ideal se cumple:

	$n_1 = \frac{e_2}{e_1} = \frac{i_1}{i_2}$
	$n_2 = \frac{e_1}{e_2} = \frac{i_2}{i_1}$

Tabla 2. 8. Transformador ideal

A continuación, definimos en el circuito ya con transformadores, las siguientes tensiones y corrientes:



**Figura 2. 19. Red de con trasformadores para normalizar a la unidad las impedancias**

Así pues, según la ésta definición del circuito, los parámetros de la red sin transformadores y con ellos, son los siguientes:

Red sin transformadores	Red con transformadores
$y_{11}' = \left. \frac{i_1'}{e_1} \right _{e_2=0}$	$y_{11} = \left. \frac{i_1}{e_1} \right _{e_2=0}$
$y_{12}' = \left. \frac{i_1'}{e_2} \right _{e_1=0}$	$y_{12} = \left. \frac{i_1}{e_2} \right _{e_1=0}$
$y_{21}' = \left. \frac{i_2'}{e_1} \right _{e_2=0}$	$y_{21} = \left. \frac{i_2}{e_1} \right _{e_2=0}$
$y_{22}' = \left. \frac{i_2'}{e_2} \right _{e_1=0}$	$y_{22} = \left. \frac{i_2}{e_2} \right _{e_1=0}$

**Tabla 2. 9. Parámetros y**

Y aplicando las ecuaciones de la tabla 2.8 para los transformadores, también se cumple:

Transformador 1 : n <sub>1</sub>	Red con transformadores 1 : n <sub>2</sub>
$n_1 = \frac{e_1'}{e_1} = \frac{i_1}{i_1'}$	$n_2 = \frac{e_2}{e_2'} = \frac{-i_2'}{-i_2}$

**Tabla 2. 10. Relación entre tensiones y corrientes del circuito**

Podemos por tanto encontrar la relación entre los parámetros de la red con y sin transformadores:

$$\frac{y_{11}}{y_{11}'} = \frac{i_1/e_1}{i_1'/e_1'} = \frac{i_1 \cdot e_1'}{i_1' \cdot e_1} = n_1^2 \Rightarrow y_{11} = y_{11}' \cdot n_1^2 \tag{2.158}$$

$$\frac{y_{12}}{y_{12}'} = \frac{i_1/e_2}{i_1'/e_2'} = \frac{i_1 \cdot e_2'}{i_1' \cdot e_2} = n_1 \cdot n_2 \Rightarrow y_{12} = y_{12}' \cdot n_1 \cdot n_2 \tag{2.159}$$

$$\frac{y_{21}}{y_{21}'} = \frac{i_2/e_1}{i_2'/e_1'} = \frac{i_2 \cdot e_1'}{i_2' \cdot e_1} = n_2 \cdot n_1 \Rightarrow y_{21} = y_{21}' \cdot n_1 \cdot n_2 \tag{2.160}$$

$$\frac{y_{22}}{y_{22}'} = \frac{i_2/e_2}{i_2'/e_2'} = \frac{i_2 \cdot e_2'}{i_2' \cdot e_2} = n_2^2 \Rightarrow y_{22} = y_{22}' \cdot n_2^2 \tag{2.161}$$

Así pues, los parámetros de admitancia en cortocircuito para la red de dos puertos sin transformadores nos proporcionarán el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}' & y_{12}' \\ y_{21}' & y_{22}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_N \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

donde  $[y_{21}' = y_{12}']$  e  $[y_{11}']$  ya han sido obtenidos a partir de las funciones de transferencia y reflexión. Mientras que si utilizamos la red con transformadores, tendremos, como acabamos de demostrar, el siguiente sistema :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 \cdot y_{11}' & n_1 \cdot n_2 \cdot y_{12}' \\ n_1 \cdot n_2 \cdot y_{21}' & n_2^2 \cdot y_{22}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_N \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

Por otra parte, en el interior del prototipo de la red paso banda asumiremos que los coeficientes de acoplo y las impedancias de terminación de la red son invariantes con la frecuencia, por lo que esta red puede hacerse también con un prototipo paso bajo si realizamos la siguiente transformación:

$$s = j \cdot \left( \omega_b - \frac{1}{\omega_b} \right) \quad (2.164)$$

donde  $\omega_b$  es la variable frecuencial en el prototipo paso banda. Así pues, partiendo del prototipo paso banda, podremos obtener las ecuaciones del paso bajo. Debemos tener también en cuenta que para la red prototipo paso banda, la frecuencia central y el ancho de banda son ambos de 1 rad/seg.

A continuación vamos a estudiar el interior del prototipo genérico de la red paso banda, para obtener las ecuaciones del circuito.

### 2.3.3.1 Procedimiento para obtener las ecuaciones del circuito

Supongamos una única cavidad:

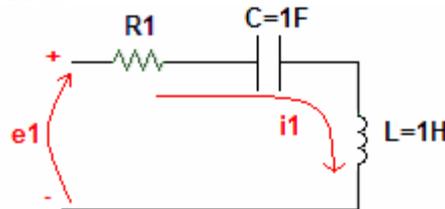


Figura 2. 20. Cavidad inicial en el interior del prototipo paso banda

Podemos calcular ahora la impedancia equivalente de los tres elementos en serie que aparecen en el circuito:

$$\left. \begin{array}{l} R_1 \\ j \cdot \omega \cdot L = j \cdot \omega \\ \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = \frac{1}{j \cdot \omega} \end{array} \right\} \rightarrow \text{En serie} \rightarrow Z_{eq} = R_1 + j \cdot \omega + \frac{1}{j \cdot \omega} \quad (2.165)$$

$$Z_{eq} = R_1 + j \cdot \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right) = R_1 + s \quad (2.166)$$

Por tanto, se cumplirá:

$$\begin{aligned} e_1 &= i_1 \cdot Z_{eq} \\ e_1 &= i_1 \cdot (R_1 + s) \end{aligned} \quad (2.167)$$

Si ahora, en vez de tener una cavidad tenemos varias, aparecerán acoplos entre unas y otras:

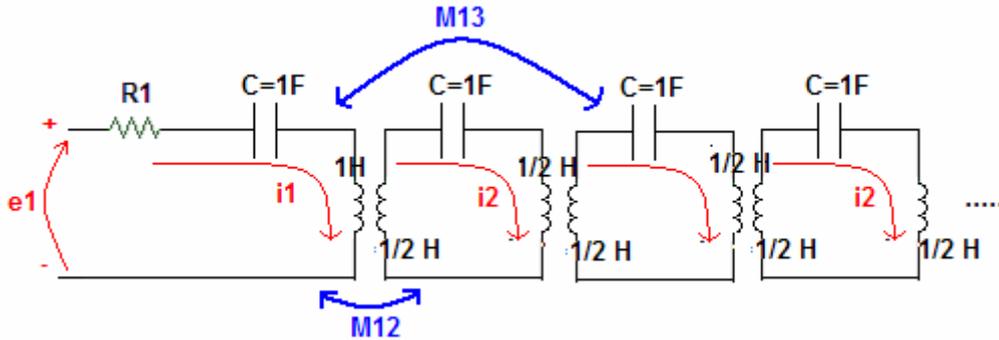


Figura 2. 21. Varias cavidades acopladas. Interior del prototipo paso banda

En la **primera malla**, sin tener en cuenta los acoplos, se cumplirá como ya hemos visto:

$$e_1 = i_1 \cdot (R_1 + s) \quad (2.168)$$

Si además tenemos en cuenta los acoplos:

$$e_1 = i_1 \cdot (R_1 + s) + i_2 \cdot j \cdot M_{12} + i_3 \cdot j \cdot M_{13} + \dots \quad (2.169)$$

En la **segunda malla**, sin tener en cuenta los acoplos:

$$\begin{aligned} 0 &= i_2 \cdot \left( \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} + j \cdot \omega \cdot L + j \cdot \omega \cdot L \right) = i_2 \cdot \left( \frac{1}{j \cdot \omega} + j \cdot \omega \cdot \frac{1}{2} + j \cdot \omega \cdot \frac{1}{2} \right) \\ 0 &= i_2 \cdot \left( j \cdot \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right) \right) = i_2 \cdot s \end{aligned} \quad (2.170)$$

Si además tenemos en cuenta los acoplos:

$$0 = i_1 \cdot j \cdot M_{21} + i_2 \cdot s + i_3 \cdot j \cdot M_{23} + \dots \quad (2.171)$$

Si hacemos esto con cada una de las mallas, llegaremos a la expresión general:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + R_1 & j \cdot M_{12} & j \cdot M_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & j \cdot M_{1N} \\ j \cdot M_{21} & s & j \cdot M_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & j \cdot M_{2N} \\ j \cdot M_{31} & j \cdot M_{32} & s & \cdot & \cdot & \cdot & j \cdot M_{3N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s & j \cdot M_{N-1,N} \\ j \cdot M_{1N} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & j \cdot M_{N,N-1} & s + R_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_N \end{bmatrix} \quad (2.172)$$

Llamando  $Z$  a la matriz total, podemos expresarla como:

$$Z = s \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_I + \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R_N \end{bmatrix}}_R + j \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} & \dots & \dots & M_{1N} \\ M_{21} & 0 & M_{23} & \dots & \dots & M_{2N} \\ M_{31} & M_{32} & 0 & \dots & \dots & M_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & M_{N-1,N} \\ M_{1n} & \dots & \dots & \dots & M_{N,N-1} & 0 \end{bmatrix}}_M \quad (2.173)$$

$$Z = s \cdot I + R + j \cdot M = s \cdot I + M_R \quad (2.174)$$

Y por tanto, el sistema total quedaría representado por las ecuaciones:

$$[s \cdot I + R + j \cdot M] \cdot [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n]^t = e_1 \cdot [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^t \quad (2.175)$$

donde  $M$ ,  $I$ , y  $R$  son las matrices de tamaño  $N \times N$  definidas en (2.173).

### 2.3.3.2 Cálculo de los parámetros de admitancia

Vamos ahora a calcular los parámetros de admitancia. Para ello hacemos:

$$s = j \cdot \omega \quad (2.176)$$

A continuación, si pretendemos obtener el parámetro  $y_{21}(s)$  tendríamos que excitar en el puerto 1, y medir  $i_N/e_1$ , de forma que  $e_N$  sea nulo. El aspecto del circuito para la medida sería:

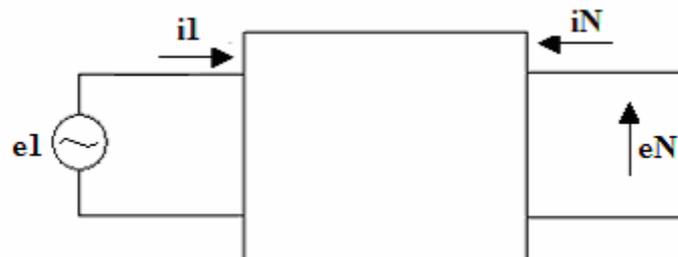


Figura 2. 22. Circuito para calcular  $y_{21}(s)$

Vemos en el circuito, que se cumplirá lo siguiente:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & R_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.177)$$

Por lo que el sistema que nos quedará, con la excitación a la entrada y las resistencias de carga y de fuente nulas, será:

$$j \cdot [\omega \cdot I + M] \cdot [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_N]^t = e_1 \cdot [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^t \quad (2.178)$$

Resolviendo el sistema para  $i_N$ , y tomando el elemento  $N$  del vector de soluciones, obtendremos el parámetro buscado :

$$y_{21}(s) = \left. \frac{i_N}{e_1} \right|_{R=0} = j \cdot [-\omega \cdot I - M]_{N1}^{-1} \quad (2.179)$$

Si lo que ahora pretendemos obtener es el parámetro  $y_{22}(s)$  tendremos que excitar en el puerto  $N$ , y medir  $i_N/e_N$ , de forma que  $e_1$  sea nulo. El aspecto del circuito para la medida será:

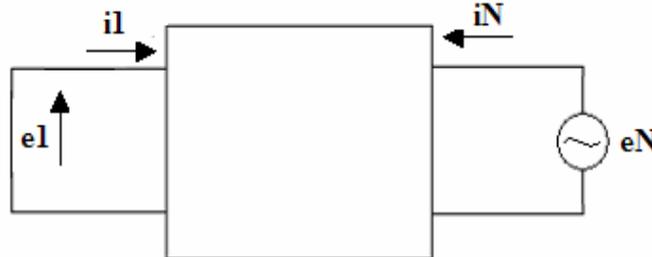


Figura 2. 23. Circuito para calcular  $y_{22}(s)$

y el sistema a resolver, con las resistencias de fuente y carga nulas, y la excitación en el puerto  $N$ , será :

$$j \cdot [\omega \cdot I + M] \cdot [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_N]^t = e_N \cdot [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]^t \quad (2.180)$$

Resolviendo el sistema para  $i_N$ , y tomando el elemento  $N$  del vector de soluciones, se obtiene el parámetro :

$$y_{22}(s) = \left. \frac{i_N}{e_N} \right|_{R=0} = j \cdot [-\omega \cdot I - M]_{NN}^{-1} \quad (2.181)$$

Este es el paso principal en el procedimiento de síntesis de la red, ya que relaciona la función de transferencia expresada en términos puramente matemáticos ( es decir,  $S_{11}(s)$ ,  $y_{21}$ , etc expresados como polinomios racionales), con el mundo real de la matriz de acoplo, cada uno de cuyos elementos corresponde únicamente a un elemento físico de acoplo en el filtro a realizar.

Como  $M$  es real, y simétrica a lo largo de su diagonal principal, todos sus valores propios serán reales. Por tanto, existe una matriz  $T$  de tamaño  $N \times N$  compuesta por filas de vectores unitarios ortogonales, que satisface la ecuación:

$$-M = T \cdot \Lambda \cdot T^t \quad (2.182)$$

donde:

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N] \quad (2.183)$$

siendo  $\lambda_i$  los valores propios de la matriz  $-M$ , y:

$$T \cdot T^t = T^t \cdot T = I \quad (2.184)$$

Si sustituimos (2.182) en (2.179) y (2.181), tendremos que:

$$y_{21}(s) = j \cdot [T \cdot \Lambda \cdot T^t - \omega \cdot I]_{N1}^{-1} \quad (2.185)$$

$$y_{22}(s) = j \cdot [T \cdot \Lambda \cdot T^t - \omega \cdot I]_{NN}^{-1}$$

y como la solución general para cualquier elemento  $[T \cdot \Lambda \cdot T^t - \omega \cdot I]_{ij}^{-1}$  será:

$$[T \cdot \Lambda \cdot T^t - \omega \cdot I]_{ij}^{-1} = \sum_{k=1}^N \frac{T_{ik} \cdot T_{jk}}{\omega - \lambda_k} \quad (2.186)$$

con  $i, j = 1, 2, \dots, N$

los parámetros  $y_{21}(s)$  e  $y_{22}(s)$  vendrán dados por:

$$y_{21}(s) = j \cdot \sum_{k=1}^N \frac{T_{Nk} \cdot T_{1k}}{\omega - \lambda_k} \quad (2.187)$$

$$y_{22}(s) = j \cdot \sum_{k=1}^N \frac{T_{Nk}^2}{\omega - \lambda_k} \quad (2.188)$$

Observamos entonces, que los valores propios  $\lambda_k$  de  $-M$  son también las raíces del polinomio denominador común de  $y_{21}(s)$  e  $y_{22}(s)$ . Podemos por tanto, obtener la primera y última filas  $T_{1k}$  y  $T_{Nk}$  de la matriz ortogonal  $T$ , igualando los residuos de  $y_{21}(s)$  e  $y_{22}(s)$  con  $T_{Nk} \cdot T_{1k}$  y  $T_{Nk}^2$  según corresponda:

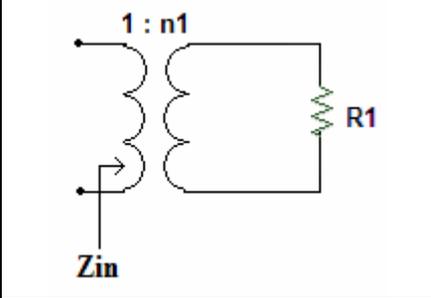
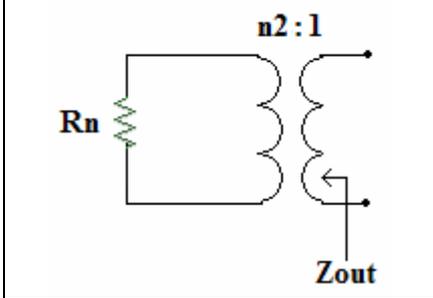
$$T_{Nk} = \sqrt{r_{22k}} \quad (2.189)$$

$$T_{1k} = \frac{r_{21k}}{T_{Nk}} = \frac{r_{21k}}{\sqrt{r_{22k}}} \quad (2.190)$$

con  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Los ratios de transformación  $n_1$  y  $n_2$ , permitirán normalizar las resistencias de entrada y salida del circuito a la unidad.

Sabiendo que se cumple la siguiente relación (ver Anexo D):

	
$Z_{in} = \frac{R_1}{n_1^2}$	$Z_{out} = \frac{R_n}{n_2^2}$

**Tabla 2. 11. Impedancias de entrada y salida de un transformador**

Se sigue que para que las resistencias de entrada y salida sean igual a la unidad, debe cumplirse que:

$$Z_{in} = \frac{R_1}{n_1^2} = 1 \rightarrow n_1^2 = R_1$$

$$Z_{out} = \frac{R_n}{n_2^2} = 1 \rightarrow n_2^2 = R_n$$
(2.191)

Con lo que el circuito quedará como se observa en la figura 2.19.

Por otra parte, según (2.161), se cumple que  $y_{22} = y'_{22} \cdot n_2^2$ , y teniendo en cuenta (2.188):

$$y'_{22} \cdot n_2^2 = j \cdot \sum_{k=1}^N \frac{T_{Nk}^2}{\omega - \lambda_k}$$
(2.192)

Si buscamos expresar  $y'_{22}$  de la misma forma que  $y_{22}$ , sólo tenemos que pasar el parámetro  $n_2^2$  a la parte derecha de la igualdad:

$$y'_{22} = j \cdot \sum_{k=1}^N \frac{(T_{Nk}/n_2) \cdot (T_{Nk}/n_2)}{\omega - \lambda_k} = j \cdot \sum_{k=1}^N \frac{T'_{Nk} \cdot T'_{Nk}}{\omega - \lambda_k} = j \cdot \sum_{k=1}^N \frac{(T'_{Nk})^2}{\omega - \lambda_k}$$
(2.193)

De la misma forma, según (2.160), sabemos que  $y_{21} = y'_{21} \cdot n_1 \cdot n_2$ , y teniendo en cuenta la expresión (2.187):

$$y'_{21} \cdot n_1 \cdot n_2 = j \cdot \sum_{k=1}^N \frac{T_{Nk} \cdot T_{1k}}{\omega - \lambda_k}$$
(2.194)

Ahora podemos expresar  $y'_{21}$  de la misma forma que  $y_{21}$ :

$$y'_{21} = j \cdot \sum_{k=1}^N \frac{(T_{Nk}/n_2) \cdot (T_{1k}/n_1)}{\omega - \lambda_k} = j \cdot \sum_{k=1}^N \frac{T'_{Nk} \cdot T'_{1k}}{\omega - \lambda_k}$$
(2.195)

Por tanto, hemos determinado el valor de  $T'_{1k}$  y  $T'_{Nk}$ , que vendrá dado por:

$$\begin{aligned} T'_{1k} &= \frac{T_{1k}}{n_1} \\ T'_{Nk} &= \frac{T_{Nk}}{n_2} \end{aligned} \tag{2.196}$$

Con la primera y última filas de  $T'$  ya determinadas, las filas ortogonales que quedan se obtienen con el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt que explicaremos en el apartado siguiente, y finalmente sintetizamos la matriz de acoplo  $M$  usando la igualdad  $-M = T \cdot \Lambda \cdot T'$ .

### 2.3.3.3. Ortonormalización de Gram Schmidt

En primer lugar aclaremos el significado de algunos conceptos básicos:

- *Base*: Se denomina base de un espacio vectorial de dimensión finita a todo conjunto de vectores de dicho espacio vectorial linealmente independientes, a partir de los cuales se puede generar el espacio vectorial completo.
- *Vectores ortogonales*: Dos vectores  $x$  e  $y$  son ortogonales si su producto escalar es cero. Esta situación implica que  $x$  e  $y$  son perpendiculares.
- *Vectores ortonormales*: Un conjunto de vectores es ortonormal si es a la vez un conjunto ortogonal y la norma de cada uno de sus vectores es igual a 1. Es posible hallar una base ortonormal a partir de una base ortogonal dividiendo cada vector de la base ortogonal por su norma.

Una vez recordados estos conceptos, veamos en qué consiste el método de ortogonalización de Gram-Schmidt. Utilizaremos el método en cuestión para ortogonalizar un conjunto de vectores en el espacio euclídeo  $R^n$ . La ortogonalización consistirá en comenzar con un conjunto de vectores  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  linealmente independientes, y encontrar una base ortogonal  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  que genere el mismo subespacio que los vectores  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ .

Definamos a continuación el operador proyección:

$$proj_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v \tag{2.197}$$

que proyecta ortogonalmente el vector  $u$  ortogonalmente sobre  $v$ .

Por ejemplo, si  $u = u_2$  y  $v = v_1$  son tal y como se muestra en la figura [11], el vector  $proj_{v_1} u_2$  será el que se indica:

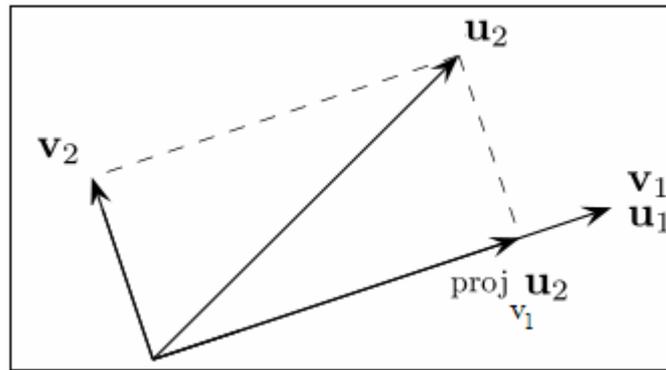


Figura2 24. Primer paso en el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

El método de Gram-Schmidt, en un caso general, funcionaría como sigue:

$$\text{Paso 1} \quad v_1 = u_1 \quad (2.198)$$

$$\text{Paso 2} \quad v_2 = u_2 - proj_{v_1} u_2 \quad (2.199)$$

$$\text{Paso 3} \quad v_3 = u_3 - proj_{v_1} u_3 - proj_{v_2} u_3 \quad (2.200)$$

... ..

$$\text{Paso n} \quad v_n = u_n - \sum_{j=1}^{n-1} proj_{v_j} u_n \quad (2.201)$$

Tras realizar los  $n$  pasos, obtendríamos un conjunto ortogonal de  $n$  vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  linealmente independientes en el espacio euclídeo  $R^n$ , y que por tanto formarían una base ortogonal para dicho espacio. Normalizando los vectores de la base ortogonal, obtendríamos la base ortonormal buscada:

$$\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\} = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\} \quad (2.202)$$

En el problema que nos ocupa a la hora de sintetizar la matriz de acoplamiento del filtro, partiremos de dos vectores que ya son ortogonales entre sí,  $T'_{1k}$  y  $T'_{Nk}$  según vimos en (2.196), y que han de permanecer intactos durante el proceso, de forma que el conjunto de vectores ortogonales que obtengamos como resultado, debe incluir estos dos vectores. Veamos cuál será entonces el procedimiento a seguir.

En primer lugar, tomaremos como vectores iniciales los dos vectores conocidos:

$$\text{Paso 1} \quad v_1 = u_1 = T'_{1k} \quad (2.203)$$

$$\text{Paso 2} \quad v_2 = u_2 = T'_{Nk} \quad (2.204)$$

Seguidamente realizamos el proceso de la misma manera que en el método general

$$\text{Paso 3} \quad v_3 = u_3 - \text{proj}_{v_1} u_3 - \text{proj}_{v_2} u_3 \quad (2.205)$$

...

$$\text{Paso n} \quad v_n = u_n - \sum_{j=1}^{n-1} \text{proj}_{v_j} u_n \quad (2.206)$$

De esta forma nos aseguramos que los dos vectores iniciales van a pertenecer a la base que obtendremos tras el proceso. Ésta vendrá dada por  $\{T'_{1k}, T'_{Nk}, v_3, \dots, v_n\}$ .

También hemos de tener en cuenta que los vectores iniciales  $T'_{1k}$  y  $T'_{Nk}$  de los que partíamos, se correspondían con la primera y última fila de la matriz  $T$  que buscábamos para poder determinar la matriz de acoplos según (2.182). Debemos pues, construir nuestra matriz  $T$  definitiva, situando dichos vectores donde corresponde:

$$\{T'_{1k}, v_3, \dots, v_n, T'_{Nk}\} \quad (2.207)$$

Con lo que la matriz  $T$  tendrá la forma:

$$T = \begin{bmatrix} T'_{1k} \\ v_3 \\ \dots \\ v_n \\ T'_{Nk} \end{bmatrix} \quad (2.208)$$

## 2.4 Características de transferencia y reflexión a partir de la matriz $N \times N$

Una vez conocida la matriz de acoplamiento, es sencillo obtener a partir de ésta la respuesta en frecuencia del filtro que representa. Para ello primero tendremos que calcular la admitancia de reflexión y la admitancia de transferencia. Como sabemos, cuando excitamos en el puerto 1, las ecuaciones del circuito son:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + R_1 & j \cdot M_{12} & j \cdot M_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & j \cdot M_{1N} \\ j \cdot M_{21} & s & j \cdot M_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & j \cdot M_{2N} \\ j \cdot M_{31} & j \cdot M_{32} & s & \cdot & \cdot & \cdot & j \cdot M_{3N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s & j \cdot M_{N-1,N} \\ j \cdot M_{1N} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & j \cdot M_{N,N-1} & s + R_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_N \end{bmatrix} \quad (2.209)$$

Si dividimos en ambos lados de la igualdad por  $e_1$ , tendremos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = [s \cdot I + R + j \cdot M] \cdot \begin{bmatrix} i_1/e_1 \\ i_2/e_1 \\ i_3/e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_N/e_1 \end{bmatrix} \quad (2.210)$$

El valor de la matriz de acoplo  $M$  es conocido. De la misma manera, el valor de  $R$  podemos determinarlo a partir de las resistencias  $R_1$  y  $R_N$  (donde  $R_1$  será nula en redes de una terminación). Por tanto, sabiendo que  $s = j \cdot \omega$ , y resolviendo el sistema (2.209) para cada valor de frecuencia, podemos encontrar las admitancias buscadas. Concretamente, el vector de soluciones tras resolver el sistema, será  $solucion = [i_1/e_1 \ i_2/e_1 \ i_3/e_1 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ i_N/e_1]$ , por lo que:

$$Y_{in}(s) = solucion(1) = \frac{i_1}{e_1} \quad (2.211)$$

$$Y_{trans}(s) = solucion(N) = \frac{i_N}{e_1} \quad (2.212)$$

Conocidas la admitancia de entrada  $Y_{in}(s)$  y la de transferencia  $Y_{trans}(s)$ , nos queda encontrar la relación entre éstas y los parámetros de scattering que nos darán la respuesta en frecuencia,  $S_{11}(s)$  y  $S_{21}(s)$ .

### 2.4.1 Relación entre la admitancia de entrada, la admitancia de transferencia y los parámetros $S_{21}$ y $S_{11}$ .

Para el análisis circuital que nos permitirá expresar  $S_{11}(s)$  y  $S_{21}(s)$  en función de  $Y_{trans}(s)$  e  $Y_{in}(s)$ , distinguiremos entre redes de dos terminaciones, y redes de una terminación puesto que el proceso es algo diferente.

#### 2.4.1.1 Redes de dos terminaciones

En estas redes se verifican las siguientes relaciones entre tensiones, corrientes, ondas reflejadas y ondas incidentes [12]:

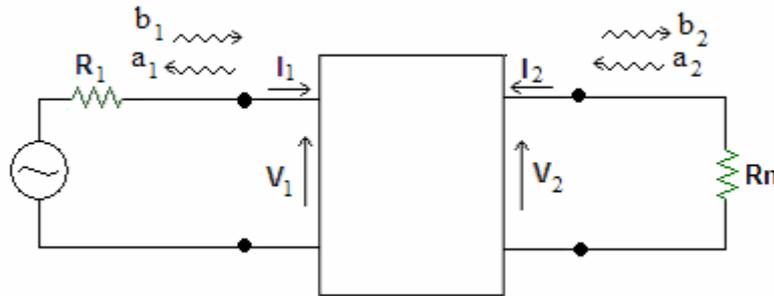


Figura 2. 25. Red de dos terminaciones

$$V_1 = \sqrt{R_1} \cdot (a_1 + b_1) \quad (2.213)$$

$$V_2 = \sqrt{R_N} \cdot (a_2 + b_2) \quad (2.214)$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{R_1}} \cdot (a_1 - b_1) \quad (2.215)$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{R_N}} \cdot (a_2 - b_2) \quad (2.216)$$

Ahora buscamos expresar las ondas  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$  en función de las tensiones y corrientes del circuito.

Para encontrar  $a_1$  sumamos las ecuaciones (2.213) y (2.215) y despejamos su valor:

$$\frac{V_1}{\sqrt{R_1}} + \sqrt{R_1} \cdot I_1 = (a_1 + b_1) + (a_1 - b_1) \quad (2.217)$$

$$\frac{V_1}{\sqrt{R_1}} + \sqrt{R_1} \cdot I_1 = 2 \cdot a_1 \quad (2.218)$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{V_1}{\sqrt{R_1}} + \sqrt{R_1} \cdot I_1 \right) \quad (2.219)$$

Para encontrar  $b_1$  restamos las ecuaciones (2.213) y (2.215) y despejamos su valor:

$$\frac{V_1}{\sqrt{R_1}} - \sqrt{R_1} \cdot I_1 = (a_1 + b_1) - (a_1 - b_1) \quad (2.220)$$

$$\frac{V_1}{\sqrt{R_1}} - \sqrt{R_1} \cdot I_1 = 2 \cdot b_1 \quad (2.221)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{V_1}{\sqrt{R_1}} - \sqrt{R_1} \cdot I_1 \right) \quad (2.222)$$

Para encontrar  $a_2$  sumamos las ecuaciones (2.214) y (2.216) y despejamos su valor:

$$\frac{V_2}{\sqrt{R_N}} + \sqrt{R_N} \cdot I_2 = (a_2 + b_2) + (a_2 - b_2) \quad (2.223)$$

$$\frac{V_2}{\sqrt{R_N}} + \sqrt{R_N} \cdot I_2 = 2 \cdot a_2 \quad (2.224)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{V_2}{\sqrt{R_N}} + \sqrt{R_N} \cdot I_2 \right) \quad (2.225)$$

Para encontrar  $b_2$  restamos las ecuaciones (2.214) y (2.216) y despejamos su valor:

$$\frac{V_2}{\sqrt{R_N}} - \sqrt{R_N} \cdot I_2 = (a_2 + b_2) - (a_2 - b_2) \quad (2.226)$$

$$\frac{V_2}{\sqrt{R_N}} - \sqrt{R_N} \cdot I_2 = 2 \cdot b_2 \quad (2.227)$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{V_2}{\sqrt{R_N}} - \sqrt{R_N} \cdot I_2 \right) \quad (2.228)$$

Si seguimos entonces con el análisis, vemos que se cumple lo siguiente:

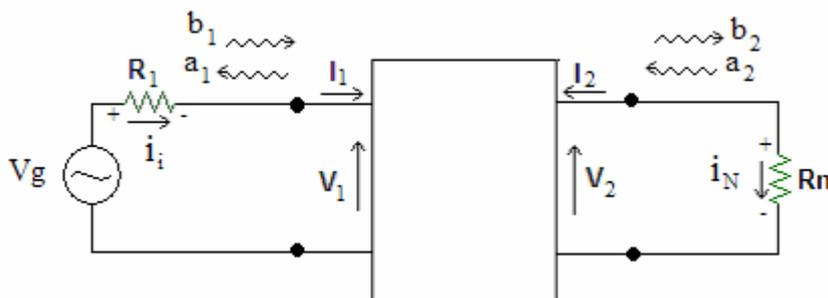


Figura 2. 26. Análisis de la red de dos terminaciones

$$I_1 = i_1 \quad I_2 = -i_N \quad (2. 229)$$

$$V_1 = V_g - i_1 \cdot R_1 \quad V_2 = i_N \cdot R_N \quad (2.230)$$

Por tanto, si sustituimos estas ecuaciones en las expresiones de  $a_1, a_2, b_1$  y  $b_2$ :

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{V_1}{\sqrt{R_1}} + \sqrt{R_1} \cdot I_1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{V_g - i_1 \cdot R_1}{\sqrt{R_1}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1}} \cdot i_1 \right) = \frac{V_g}{2 \cdot \sqrt{R_1}} \quad (2.231)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{V_2}{\sqrt{R_N}} + \sqrt{R_N} \cdot I_2 \right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{R_N}} \cdot (R_N i_N + R_N \cdot (-i_N)) = 0 \quad (2.232)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{V_1}{\sqrt{R_1}} - \sqrt{R_1} \cdot I_1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{V_g - i_1 \cdot R_1}{\sqrt{R_1}} - \sqrt{R_1} \cdot i_1 \right) = \frac{V_g - 2 \cdot R_1 \cdot i_1}{2 \cdot \sqrt{R_1}} \quad (2.233)$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{V_2}{\sqrt{R_N}} - \sqrt{R_N} \cdot I_2 \right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{R_N}} \cdot (R_N i_N - R_N \cdot (-i_N)) = \frac{2 \cdot R_N \cdot i_N}{2 \cdot \sqrt{R_N}} = \sqrt{R_N} \cdot i_N \quad (2.234)$$

Finalmente, es sencillo obtener la relación buscada entre los parámetros de admitancia y los parámetros S:

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{i_N \cdot \sqrt{R_N}}{V_g / 2 \cdot \sqrt{R_1}} = \frac{2 \cdot i_N \cdot \sqrt{R_N} \cdot \sqrt{R_1}}{V_g} = \quad (2.235)$$

$$\boxed{S_{21} = 2 \cdot \sqrt{R_N} \cdot \sqrt{R_1} \cdot Y_{trans}} \quad (2.236)$$

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{V_g - 2 \cdot R_1 \cdot i_1}{2 \cdot \sqrt{R_1}} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{R_1}}{V_g} = 1 - \frac{2 \cdot R_1 \cdot i_1}{V_g} \quad (2.237)$$

$$\boxed{S_{11} = 1 - 2 \cdot R_1 \cdot Y_{in}} \quad (2.238)$$

#### 2.4.1.2 Redes de una terminación

En estas redes, como ya sabemos,  $R_1 = 0$ :



Figura 2. 27. Red de una terminación

La principal diferencia en este caso es que la onda reflejada en el puerto de entrada será nula:  $b_1 = 0$ . Por tanto, cuando calculemos el parámetro:

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad (2.239)$$

tanto la onda incidente  $a_2$  como la onda reflejada  $b_1$  serán nulas. Así, las ecuaciones 2.219, 2.222, 2.225 y 2.228 se reducen a:

$$V_1 = \sqrt{R_1} \cdot a_1 \quad (2.240)$$

$$V_2 = \sqrt{R_N} \cdot b_2 \quad (2.241)$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{R_1}} \cdot a_1 \quad (2.242)$$

$$I_2 = -\frac{1}{\sqrt{R_N}} \cdot b_2 \quad (2.243)$$

Sólo queda entonces encontrar la relación entre  $Y_{trans}$  y el parámetro  $S_{21}$ :

$$Y_{trans} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{\frac{1}{\sqrt{R_N}} \cdot (-b_2)}{\sqrt{R_1} \cdot a_1} = \frac{-b_2}{\sqrt{R_N} \cdot \sqrt{R_1} \cdot a_1} = \frac{-S_{21}}{\sqrt{R_N} \cdot \sqrt{R_1}} \quad (2.244)$$

$$\boxed{S_{21} = -Y_{trans} \cdot \sqrt{R_N} \cdot \sqrt{R_1}} \quad (2.245)$$

En este caso, el módulo del parámetro  $S_{11}$  lo calcularemos a partir de la ecuación de unitariedad como:

$$\boxed{S_{11} = \sqrt{1 - (S_{21})^2}} \quad (2.246)$$

## 2.5 Ejemplos

En este apartado vamos a ver distintos ejemplos de síntesis de la matriz de acoplo. Tratando de cubrir la mayor parte de casos posibles, veremos un ejemplo utilizando una red de dos terminaciones, así como un ejemplo utilizando una red de una sola terminación. A continuación realizaremos una pequeña comparativa entre las distintas matrices obtenidas en función de los ceros de transmisión especificados, variando su posición frecuencial, dada por la parte imaginaria, o bien variando la distancia de los ceros al eje imaginario, cuyo valor viene dado por la parte real de los ceros de transmisión.

### 2.5.1 Síntesis de una red con dos terminaciones

Vamos a realizar el siguiente diseño:

<i>Tipo</i>	Paso Banda Chebyshev
<i>Orden</i>	6
<i>Pérdidas de retorno</i>	25 dB
<i>Ceros de transmisión</i>	$-j \cdot 2.4$
	$-j \cdot 3.8$
	$j \cdot 2.5$

**Tabla 2. 12. Especificaciones del filtro**

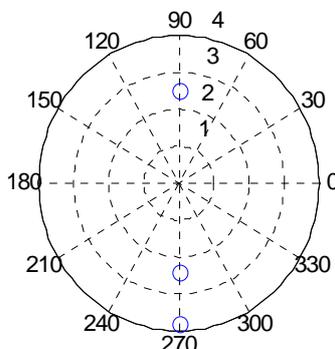
Comprobamos en primer lugar que los ceros de transmisión deseados cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método de síntesis de polinomios:

- Deben existir al menos dos ceros de transmisión en el infinito, por lo que el número de ceros finitos debe ser menor o igual que  $N-2$ :

$$n_{fz} \leq N - 2 \rightarrow 3 \leq (6 - 2) = 4 \quad (2.247)$$

- Los ceros de transmisión deben estar situados en el eje imaginario o bien de forma simétrica alrededor de éste:

Ceros de tx deseados : Simetría alrededor del eje imaginario



**Figura 2. 28. Ceros de transmisión especificados**

A partir de los ceros de transmisión especificados podemos calcular fácilmente el polinomio  $P(s)$ :

<b>Coefficientes de <math>P(s)</math></b>	<b>Raíces de <math>P(s)</math> = Ceros de transmisión</b>
1.0000	$j$ 2.5000
$j$ 3.7000	$-j$ 3.8000
6.3800	$-j$ 2.4000
$j$ 22.8000	

**Tabla 2. 13. Coeficientes y raíces de  $P(s)$**

A continuación, realizamos la síntesis de polinomios, que nos conduce a:

<b>Coefficientes de <math>F_4(s)</math></b>	<b>Raíces de <math>F_4(s)</math> = Ceros de reflexión</b>
1.0000	$j$ 0.9651
$j$ 0.1435	$j$ 0.6953
1.5170	$-j$ 0.9710
$j$ 0.1825	$-j$ 0.7419
0.5795	$-j$ 0.3121
$j$ 0.0472	$j$ 0.2212
0.0334	

**Tabla 2. 14. Coeficientes y raíces de  $F_4(s)$**

<b>Coefficientes de <math>V_4(s)</math></b>	<b>Raíces de <math>V_4(s)</math> = Máximos de reflexión en banda</b>
1.0000	$j$ 0.8618
$j$ 0.1435	$-j$ 0.8844
1.0170	$-j$ 0.5481
$j$ 0.1107	$j$ 0.4763
0.1960	$-j$ 0.0491
$j$ 0.0098	

**Tabla 2. 15. Coeficientes y raíces de  $V_4(s)$**

En cuanto a la constante de normalización obtenida en este caso, tenemos:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \cdot \left. \frac{P_N(s)}{F_N(s)} \right|_{s=j} = -36.9251 \quad (2.248)$$

Sólo nos queda entonces calcular el último de los polinomios utilizando el *Alternating Pole Method*:

Coefficientes de $E(s)$	Raíces de $E(s)$ = Polos de transmisión y reflexión
1.0000	$-0.1632 + j 0.1435$
$2.4238 + j 0.1435$	$-0.4698 + j 0.8401$
$4.4544 + j 0.3650$	$-0.6521 + j 0.2622$
$5.1154 + j 0.6457$	$-0.3966 - j 0.8812$
$4.2080 + j 0.7026$	$-0.1323 - j 1.1211$
$2.2029 + j 0.4971$	$-0.6098 - j 0.3897$
$0.5912 + j 0.1811$	

Tabla 2. 16. Coeficientes y raíces de  $E(s)$

Gráficamente, las raíces del polinomio  $E(s)$  se presentan en la siguiente figura:

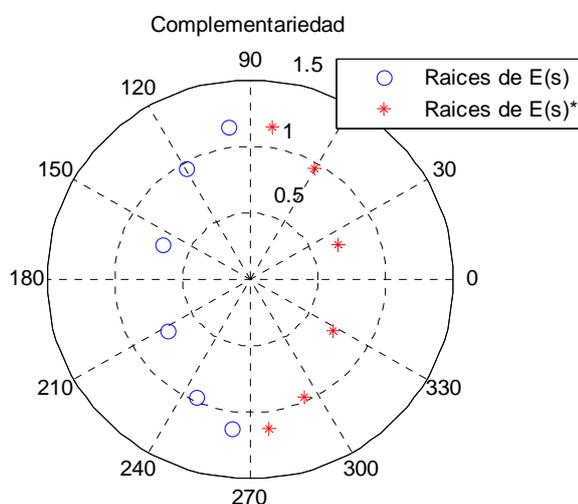


Figura 2. 29. Raíces del polinomio numerador  $E(s)$

Conocidos los polinomios que determinan las funciones de transferencia y reflexión, podemos calcular la matriz de acople  $N \times N$  y las resistencias de fuente y de carga:

$$M = \begin{bmatrix} -0.0071 & 0.6054 & 0.6336 & 0.2028 & 0.2548 & -0.0000 \\ 0.6054 & 0.4484 & 0.0000 & 0.0000 & -0.2770 & 0.6054 \\ 0.6336 & 0.0000 & -0.3153 & 0.2417 & 0.0000 & -0.6336 \\ 0.2028 & 0.0000 & 0.2417 & 0.9932 & 0.0000 & -0.2028 \\ 0.2548 & -0.2770 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9686 & 0.2548 \\ -0.0000 & 0.6054 & -0.6336 & -0.2028 & 0.2548 & -0.0071 \end{bmatrix};$$

Resistencia de fuente:  $R_1 = 1.2119$

Resistencias de carga:  $R_N = 1.2119$

La respuesta frecuencial del filtro podemos obtenerla entonces a partir de la matriz o bien a partir de los polinomios, y en cualquier caso tendrá la forma:

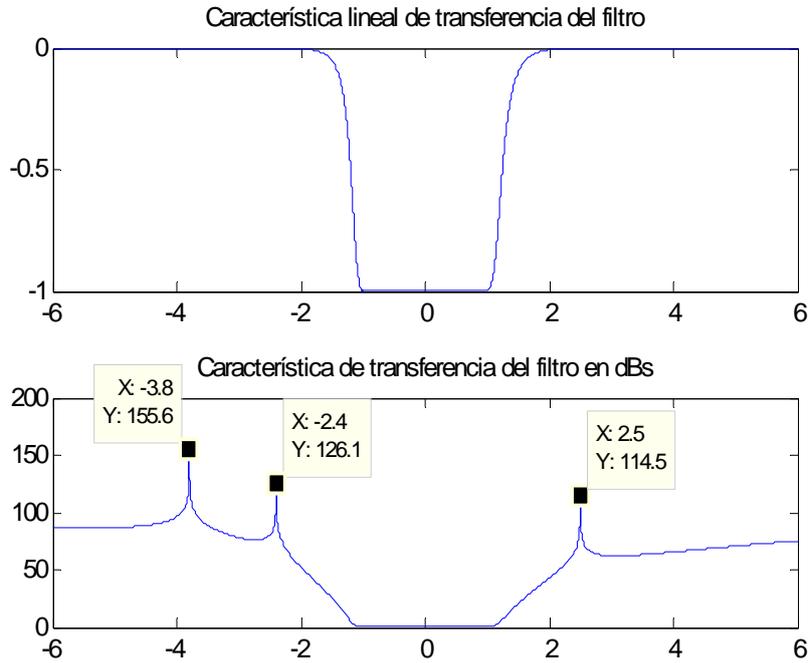


Figura 2. 30. Característica de transferencia

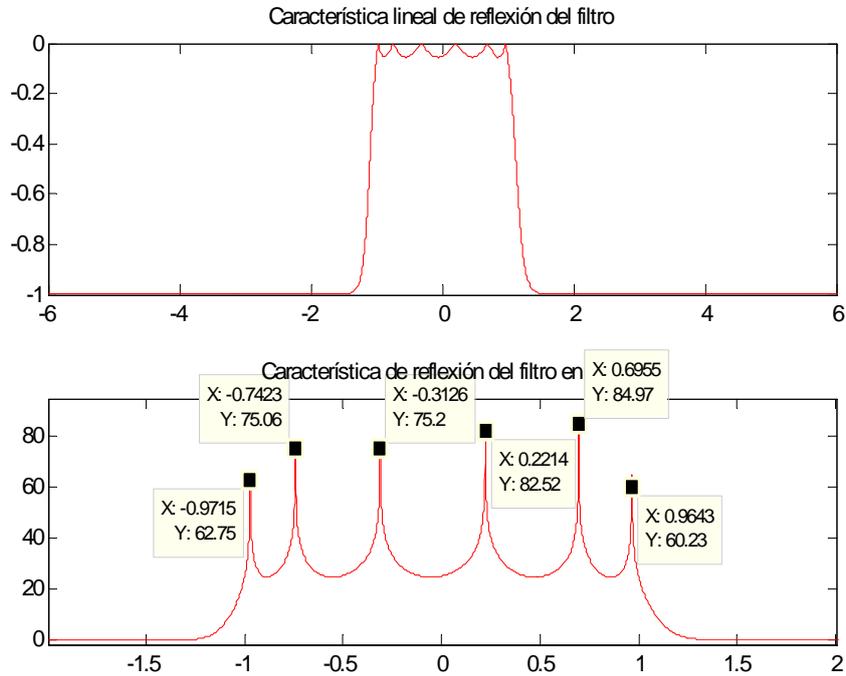


Figura 2. 31. Característica de reflexión

Observamos también que las pérdidas de retorno son de 25 dB, como habíamos especificado:

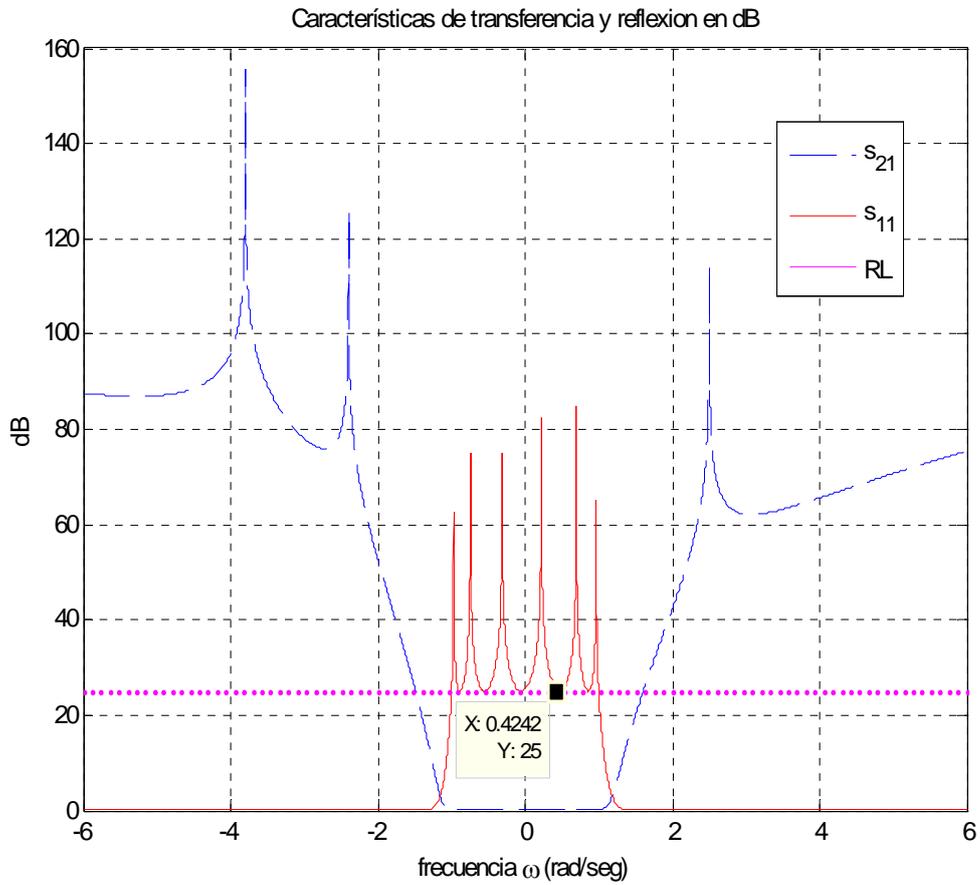


Figura 2. 32. Nivel de pérdidas de retorno y característica de transferencia y reflexión en dB

Y finalmente, el retardo de grupo adquiere la siguiente forma:

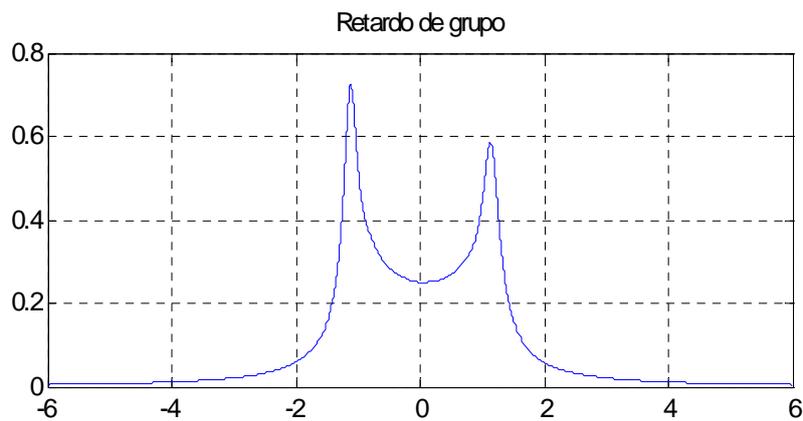


Figura 2. 33. Retardo de grupo

## 2.5.2 Síntesis de una red con una terminación

En este caso, vamos a realizar el siguiente diseño, para una red de una sola terminación:

<i>Tipo</i>	Paso Banda Chebyshev
<i>Orden</i>	8
<i>Pérdidas de retorno</i>	22 dB
<i>Ceros de transmisión</i>	$0.84 - j \cdot 0.23$
	$-0.84 - j \cdot 0.23$
	$j \cdot 1.8$

**Tabla 2. 17. Especificaciones del filtro**

Vemos que en este caso tenemos dos ceros de transmisión complejos, cuya parte real indicará la separación de éstos respecto del eje imaginario en el plano 's'. La parte imaginaria como siempre, indicará la posición frecuencial de los ceros de transmisión.

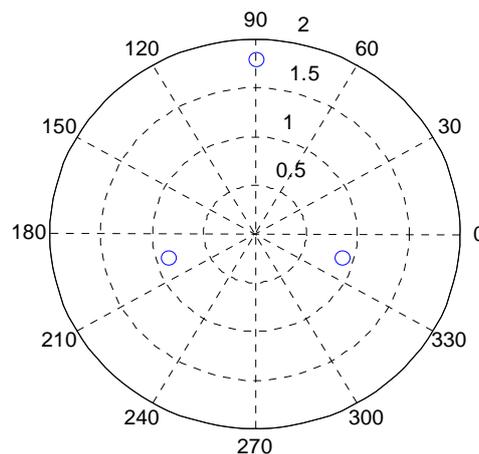
Vamos a comprobar que los ceros de transmisión deseados cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método de síntesis de polinomios:

- Deben existir al menos dos ceros de transmisión en el infinito, por lo que el número de ceros finitos debe ser menor o igual que N-2:

$$nfz \leq N - 2 \rightarrow 3 \leq (8 - 2) = 6 \quad (2.249)$$

- Los ceros de transmisión deben estar situados en el eje imaginario o bien de forma simétrica alrededor de éste:

Ceros de tx deseados : Simetría alrededor del eje imaginario



**Figura 2. 34. Ceros de transmisión especificados**

A partir de los ceros de transmisión especificados podemos calcular fácilmente el polinomio  $P(s)$ :

<b>Coefficientes de <math>P(s)</math></b>	<b>Raíces de <math>P(s)</math> = Ceros de transmisión</b>
1.0000	$j$ 1.8000
$-j$ 1.3400	0.8400 $-j$ 0.2300
0.0695	-0.8400 $-j$ 0.2300
$j$ 1.3653	

**Tabla 2. 18. Coeficientes y raíces de  $P(s)$**

A continuación, realizamos la síntesis de polinomios, que nos conduce a:

<b>Coefficientes de <math>F_4(s)</math></b>	<b>Raíces de <math>F_4(s)</math> = Ceros de reflexión</b>
1.0000	$-j$ 0.9753
$-j$ 0.1419	$-j$ 0.7932
1.9130	$j$ 0.9808
$-j$ 0.2264	$j$ 0.8301
1.1224	$j$ 0.5509
$-j$ 0.0974	$-j$ 0.4964
0.2038	$j$ 0.2012
$-j$ 0.0092	$-j$ 0.1563
0.0054	

**Tabla 2. 19. Coeficientes y raíces de  $F_4(s)$**

<b>Coefficientes de <math>V_4(s)</math></b>	<b>Raíces de <math>V_4(s)</math> = Máximos de reflexión en banda</b>
1.0000	$-j$ 0.9038
$-j$ 0.1419	$j$ 0.9237
1.4130	$j$ 0.7037
$-j$ 0.1554	$-j$ 0.6538
0.5409	$j$ 0.3803
$-j$ 0.0374	$-j$ 0.3293
0.0475	$j$ 0.0210
$-j$ 0.0010	

**Tabla 2. 20. Coeficientes y raíces de  $V_4(s)$**

La constante de normalización obtenida en este caso es la siguiente:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \cdot \left. \frac{P_N(s)}{F_N(s)} \right|_{s=j} = -19.7491 \quad (2.250)$$

Sólo nos queda entonces calcular el último de los polinomios utilizando el *Alternating Pole Method*:

Coefficientes de $E(s)$	Raíces de $E(s)$ = Polos de transmisión y reflexión
1.0000	$-0.0794 + j 1.0617$
$2.1333 - j 0.1419$	$-0.2344 + j 0.9021$
$4.1885 - j 0.3157$	$-0.1087 - j 1.0785$
$4.9246 - j 0.5770$	$-0.2780 - j 0.8539$
$4.6860 - j 0.6415$	$-0.3498 + j 0.5891$
$3.1252 - j 0.5313$	$-0.3442 - j 0.5129$
$1.5162 - j 0.2884$	$-0.3794 + j 0.1998$
$0.4607 - j 0.0952$	$-0.3595 - j 0.1654$
$0.0680 - j 0.0134$	

Tabla 2. 21. Coeficientes y raíces de  $E(s)$

Gráficamente, las raíces del polinomio  $E(s)$  se presentan en la siguiente figura:

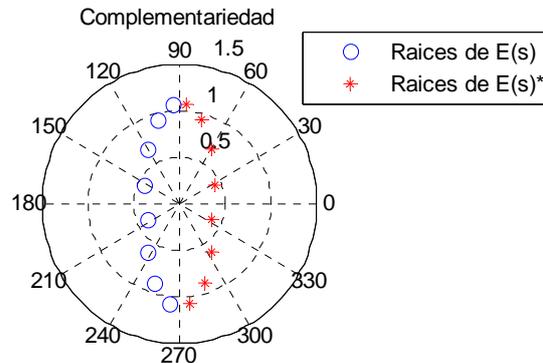


Figura 2. 35. Raíces del polinomio numerador  $E(s)$

Conocidos los polinomios que determinan las funciones de transferencia y reflexión, podemos calcular la matriz de acoplo  $N \times N$ :

$$M = \begin{bmatrix} 0.0167 & 0.3064 & 0.3547 & -0.3225 & -0.2524 & 0.1480 & -0.0174 & -0.0000 \\ 0.3064 & -0.9154 & 0.0616 & -0.0693 & -0.1022 & 0.0518 & -0.2386 & -0.1847 \\ 0.3547 & 0.0616 & 0.8367 & 0.1553 & 0.0659 & -0.0481 & -0.2645 & 0.2349 \\ -0.3225 & -0.0693 & 0.1553 & -0.4648 & 0.1109 & -0.0805 & -0.4349 & -0.1382 \\ -0.2524 & -0.1022 & 0.0659 & 0.1109 & 0.3930 & 0.1367 & -0.3295 & 0.1626 \\ 0.1480 & 0.0518 & -0.0481 & -0.0805 & 0.1367 & 0.0124 & -0.6636 & -0.0494 \\ -0.0174 & -0.2386 & -0.2645 & -0.4349 & -0.3295 & -0.6636 & -0.0266 & 1.3198 \\ 0.0000 & -0.1847 & 0.2349 & -0.1382 & 0.1626 & -0.0494 & 1.3198 & 0.0061 \end{bmatrix}$$

La respuesta frecuencial del filtro podemos obtenerla entonces a partir de la matriz o bien a partir de los polinomios, y en cualquier caso tendrá la forma:

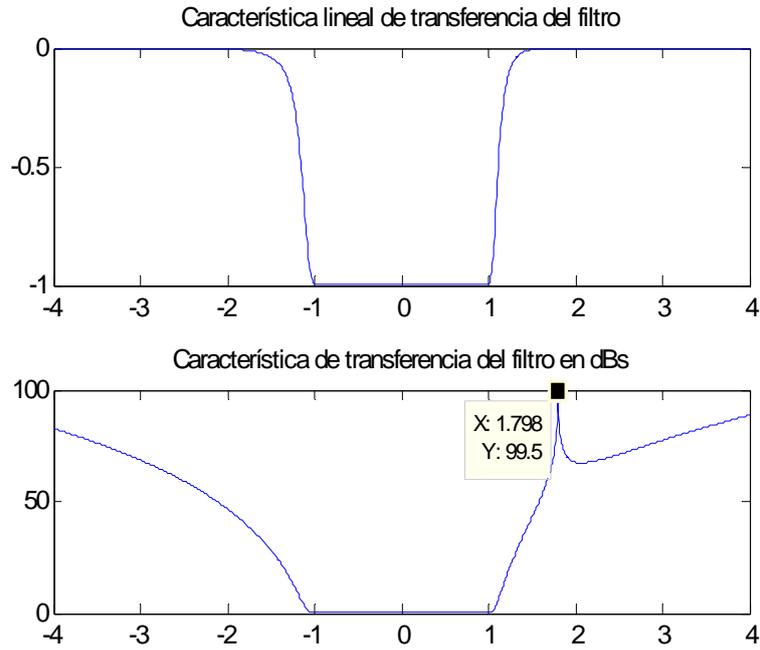


Figura 2. 36. Característica de transferencia

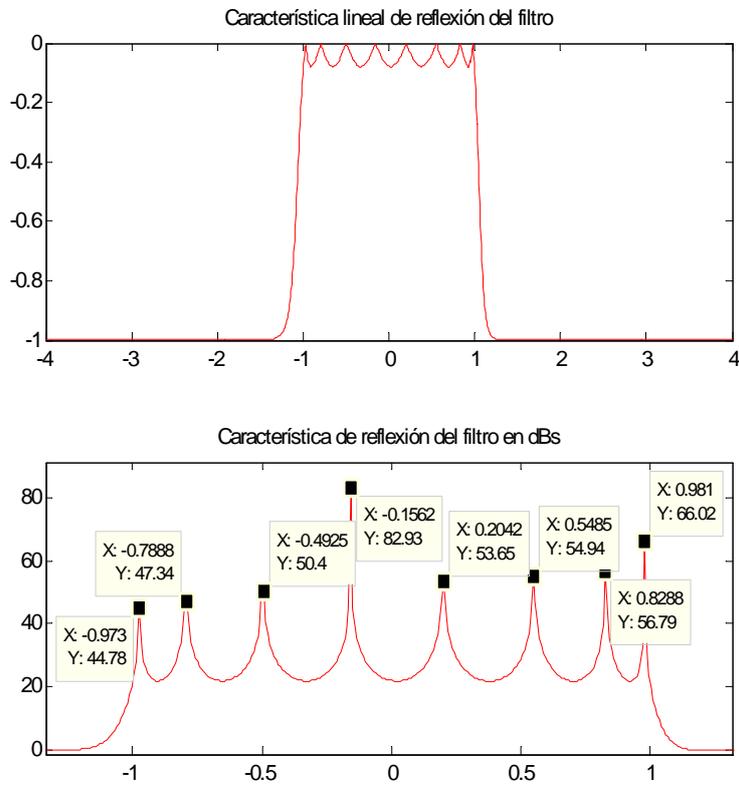


Figura 2. 37. Característica de reflexión

Observamos también que las pérdidas de retorno son de 22 dB, como habíamos especificado:

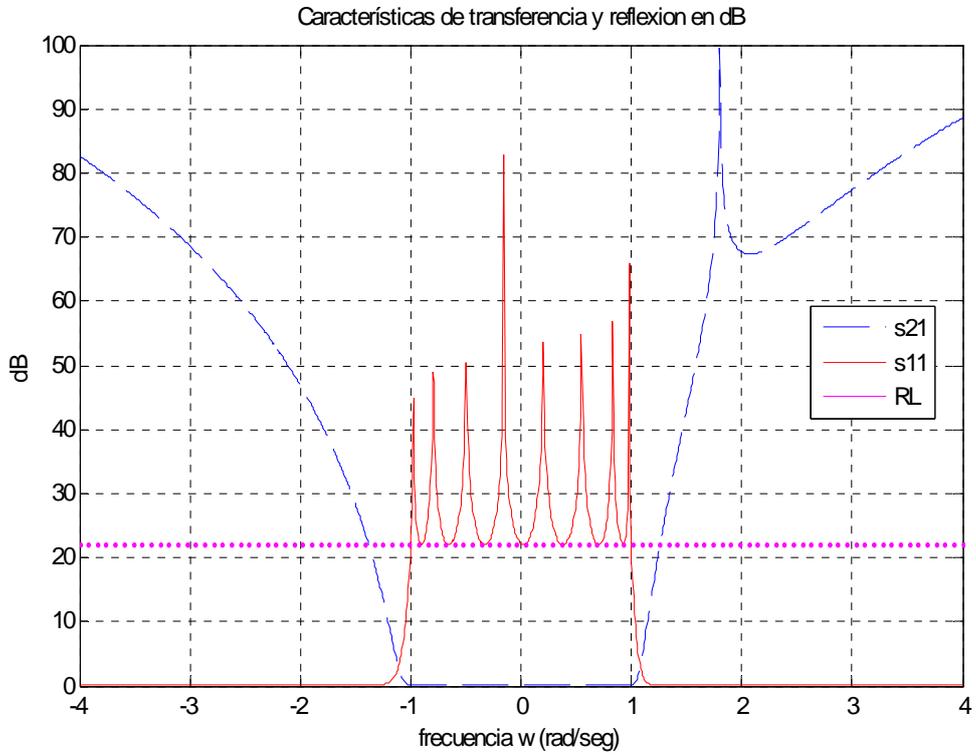


Figura 2. 38. Nivel de pérdidas de retorno y característica de transferencia y reflexión en dB

Y finalmente, el retardo de grupo adquiere la siguiente forma:

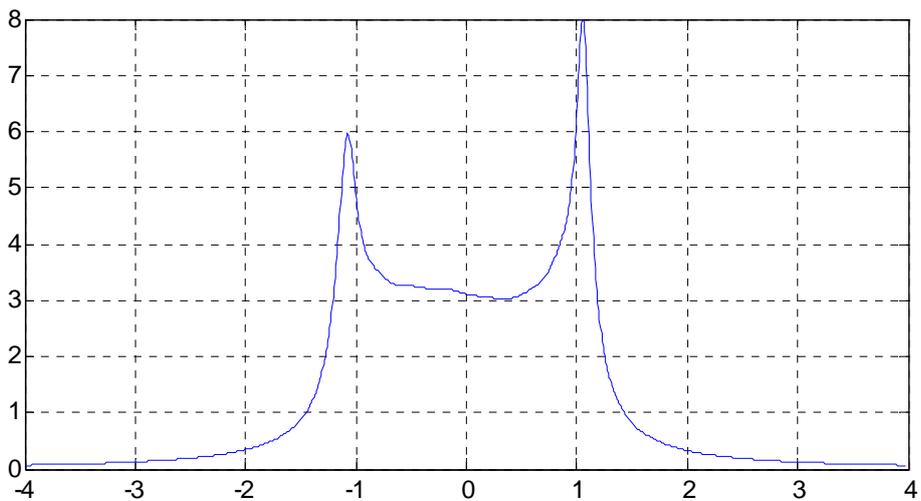


Figura 2. 39. Retardo de grupo

### 2.5.3 Ejemplos comparativos

- *Primer ejemplo:* En primer lugar vamos a comparar gráficamente la respuesta frecuencial y la matriz de acoplamiento obtenida cuando diseñamos un filtro grado 4, variando el signo de su único cero de transmisión situado a frecuencias finitas.

<p>Ceros de tx deseados : Simetría alrededor del eje imaginario</p>	<p>Ceros de tx deseados : Simetría alrededor del eje imaginario</p>
<p>Cero de transmisión = <math>-j \cdot 2.6</math></p>	<p>Cero de transmisión = <math>j \cdot 2.6</math></p>
<p><math>\varepsilon = 1.1265</math></p>	<p><math>\varepsilon = -1.1265</math></p>
<p>Matriz de acoplamiento <math>N \times N</math></p> <pre> -0.0485  0.8414  0.6106  0.0000  0.8414 -0.6116  0.0000  0.8414  0.6106  0.0000  0.9087 -0.6106  0.0000  0.8414 -0.6106 -0.0485                     </pre>	<p>Matriz de acoplamiento <math>N \times N</math></p> <pre>  0.0485  0.8414  0.6106  0.0000  0.8414  0.6116  0.0000 -0.8414  0.6106  0.0000 -0.9087  0.6106 -0.0000 -0.8414  0.6106  0.0485                     </pre>
<p><math>R_1 = R_N = 1.3244</math></p>	<p><math>R_1 = R_N = 1.3244</math></p>
<p>Características de transferencia y reflexion en dB</p>	<p>Características de transferencia y reflexion en dB</p>

Tabla 2. 22. Comparación gráfica entre dos filtros variando el signo del cero de transmisión

- *Segundo ejemplo:* En este caso vamos a ver gráficamente qué ocurre cuando diseñamos un filtro grado 4, variando la posición en frecuencia de su único cero de transmisión situado a frecuencias finitas. A continuación presentamos la posición de los ceros de transmisión en el plano 's', el valor de la cte.  $\varepsilon$ , la matriz de acoplamiento obtenida, las resistencias de fuente y de carga, y la respuesta frecuencial en cada caso:

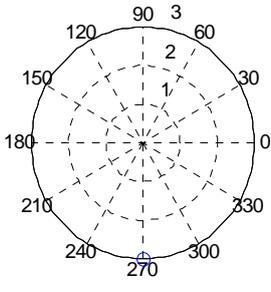
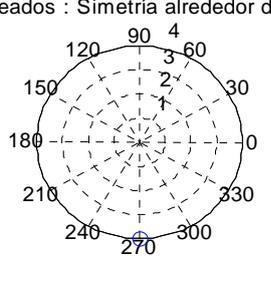
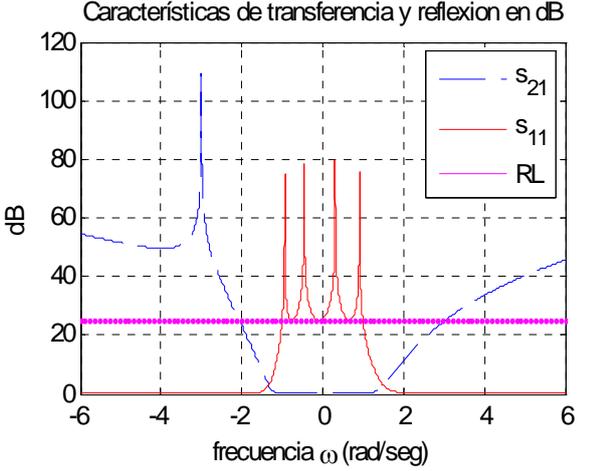
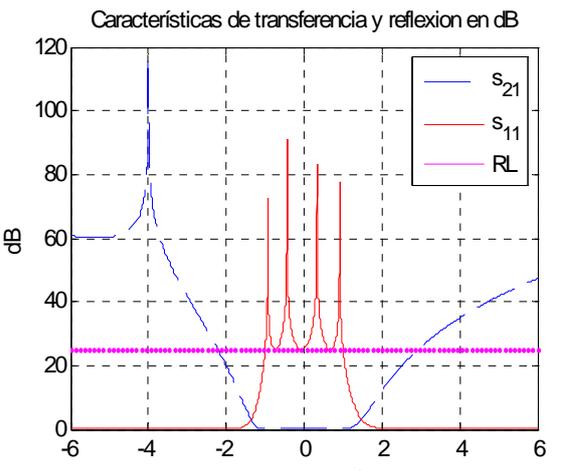
<p>Ceros de tx deseados : Simetría alrededor del eje imaginario</p> 	<p>Ceros de tx deseados : Simetría alrededor del eje imaginario</p> 
<p>Cero de transmisión = <math>-j \cdot 3</math></p>	<p>Cero de transmisión = <math>-j \cdot 4</math></p>
<p><math>\varepsilon = 1.3131</math></p>	<p><math>\varepsilon = 1.7737</math></p>
<p>Matriz de acoplamiento <math>N \times N</math></p> <pre> -0.0417  0.8273  0.6301  0.0000  0.8273 -0.6357  0.0000  0.8273  0.6301  0.0000  0.8907 -0.6301 -0.0000  0.8273 -0.6301 -0.0417                     </pre>	<p>Matriz de acoplamiento <math>N \times N</math></p> <pre> -0.0309  0.8046  0.6594 -0.0000  0.8046 -0.6726  0.0000  0.8046  0.6594  0.0000  0.8615 -0.6594 -0.0000  0.8046 -0.6594 -0.0309                     </pre>
<p><math>R_1 = R_N = 1.3252</math></p>	<p><math>R_1 = R_N = 1.3262</math></p>
<p>Características de transferencia y reflexión en dB</p> 	<p>Características de transferencia y reflexión en dB</p> 

Tabla 2. 23. Comparación gráfica entre dos filtros variando la posición del cero de transmisión

- *Tercer ejemplo:* Ahora compararemos dos filtros de orden 4 cuyos ceros en frecuencia están situados en el mismo punto, pero con la diferencia de que el primero tiene los ceros complejos más cerca del eje imaginario que el segundo.

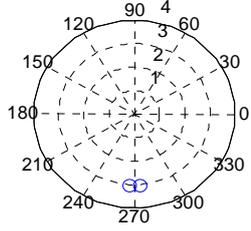
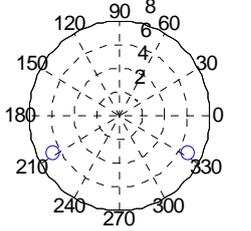
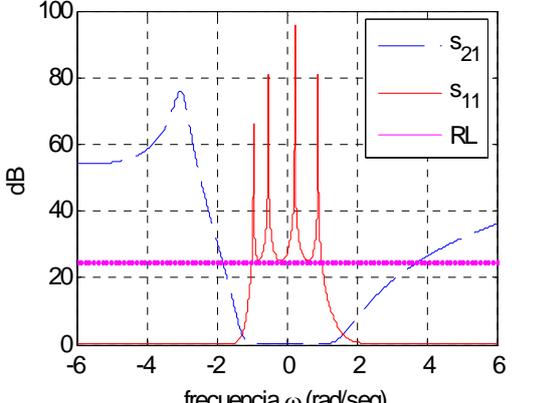
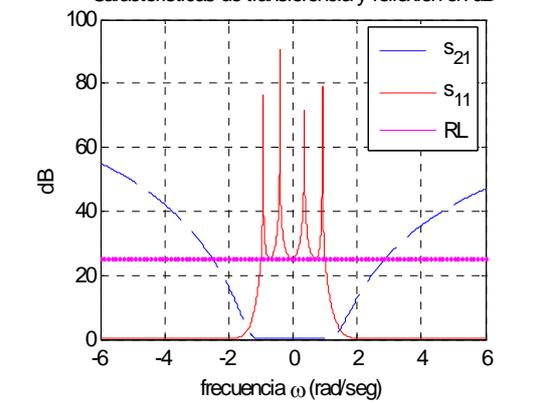
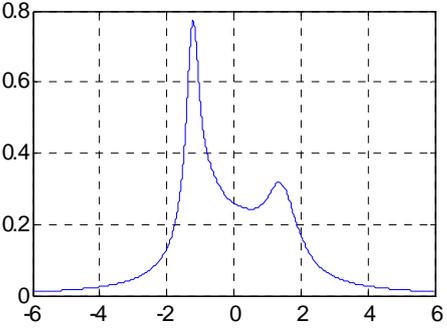
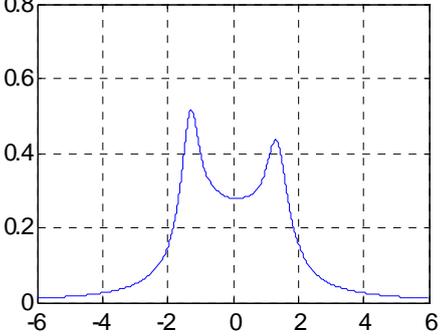
<p>Ceros de tx deseados : Simetría alrededor del eje imaginario</p> 	<p>de tx deseados : Simetría alrededor del eje ima</p> 
<p>Ceros de transmisión = <math>+0.2 - j \cdot 3</math> <math>-0.2 - j \cdot 3</math></p>	<p>Ceros de transmisión = <math>+6 - j \cdot 3</math> <math>-6 - j \cdot 3</math></p>
<p><math>\varepsilon = 3.8469</math></p>	<p><math>\varepsilon = 20.4125</math></p>
<p>Matriz de acoplamiento <math>N \times N</math></p> <pre> -0.0844 -0.9066 -0.5368 0.0972 -0.9066 -0.4521 -0.0000 0.9066 -0.5368 -0.0000 0.9623 -0.5368 0.0972 0.9066 -0.5368 -0.0844                     </pre>	<p>Matriz de acoplamiento <math>N \times N</math></p> <pre> -0.0161 -0.7745 -0.7009 0.0184 -0.7745 -0.7149 0.0000 0.7745 -0.7009 0.0000 0.8131 -0.7009 0.0184 0.7745 -0.7009 -0.0161                     </pre>
<p><math>R_1 = R_N = 1.3369</math></p>	<p><math>R_1 = R_N = 1.3307</math></p>
<p>Características de transferencia y reflexion en dB</p> 	<p>Características de transferencia y reflexion en dB</p> 
<p>Retardo de grupo</p> 	<p>Retardo de grupo</p> 

Tabla 2. 24. Comparación gráfica entre dos filtros variando la distancia de los ceros de transmisión al eje imaginario

*Conclusiones:*

- En la primera de las comparaciones realizadas, para una red de dos terminaciones, observamos cómo **al cambiar el signo de la parte imaginaria del cero de transmisión, éste pasa a situarse en el otro lado de la banda de paso**. Es decir, si estaba a frecuencias más altas que las que constituyen la banda de paso, tras el cambio de signo pasará a estar a frecuencias más bajas, y viceversa. En cuanto a los valores de la matriz de acoplo, vemos que únicamente cambia el signo de algunos de sus elementos, pero no su valor absoluto.
- En la segunda de las comparaciones, para una red con dos terminaciones, observamos cómo **al variar el valor de la parte imaginaria del cero de transmisión sin cambiar su signo, éste se desplaza** a frecuencias mayores o menores (en función de si aumentamos o disminuimos dicho valor), pero manteniéndose siempre en el lado de la banda de paso en el que se encontraba previamente. En cuanto a los valores de la matriz, se mantiene el signo de todos los acoplos, pero varían sus valores.
- El tercer caso es el más interesante. En él, comprobamos qué ocurre cuando los ceros de transmisión tienen una parte real distinta de cero. La comparación, muestra los resultados cuando dichos ceros están a una distancia de 0.2 del eje imaginario, y cuando están a una distancia de 6. En primer lugar observamos que la matriz de acoplamiento mantiene el signo de todos los acoplos al variar la parte real de los ceros de transmisión. También se observa cómo se suaviza el efecto en frecuencia del cero de transmisión al aumentar su parte real. Finalmente, y esto es lo más interesante, **podemos utilizar la parte real de los ceros de transmisión para ecualizar el filtro en cuestión, y conseguir un retardo de grupo más o menos plano en la banda de paso**.

## 2.6 Software desarrollado

La teoría desarrollada en este capítulo ha dado lugar al desarrollo de un software que a partir de los siguientes parámetros de entrada:

<i>Orden</i>	Número de resonadores del filtro	
<i>Pérdidas de retorno</i>	Valor medido en dB de dichas pérdidas	
<i>Ancho de Banda</i>	Ancho de banda de respuesta frecuencial en la banda de paso	
<i>Frecuencia central</i>	Frecuencia a la que se centra la respuesta del filtro	
<i>Ceros de transmisión</i>	Parte real	Indica la distancia de cada cero al eje imaginario, cuando los representamos en el plano complejo 's'
	Parte imaginaria	Para cada uno de los ceros de transmisión, indica el valor frecuencial en el que la señal no se transmite

Tabla 2. 25. Parámetros de entrada del software desarrollado

nos permite obtener los coeficientes y raíces de los polinomios que determinan los parámetros  $S_{11}(s)$  y  $S_{21}(s)$ , así como la representación gráfica de la respuesta frecuencial dada por dichos parámetros. Debido a que la síntesis de polinomios está desarrollada para el caso paso bajo normalizado con un ancho de banda que va de  $-1$  a  $1$  rad/seg, el usuario podrá introducir la frecuencia central (en Hz), los ceros de transmisión y el ancho de banda, y el programa traducirá estos datos a otros normalizados, mediante:

$$\omega_i = \frac{f_0}{\Delta f} \cdot \left( \frac{f_i}{f_0} - \frac{f_0}{f_i} \right) \quad (2.251)$$

siempre teniendo en cuenta que todos los ceros de transmisión deben ser simétricos alrededor del eje imaginario.

Además, se realiza la síntesis que nos lleva a obtener la matriz de acoplo  $M$ , así como las resistencias de entrada y salida  $R_1$  y  $R_n$  con cuyos valores podremos de nuevo obtener la respuesta en frecuencia del filtro y comprobar la validez de la matriz de acoplo  $M$ . Para la síntesis de la matriz hemos desarrollado además una función específica que implementa el método modificado de Gram Schmidt, explicado en el apartado 2.3.3.3.

## 2.7 Conclusiones

En este capítulo hemos presentado un método recursivo para la generación de polinomios de transferencia. Este método podemos utilizarlo cuando los ceros de transmisión se sitúan de forma simétrica o asimétrica, ya sea en filtros de orden par o impar.

En segundo lugar hemos desarrollado la teoría necesaria que permite sintetizar matrices de acoplamiento para redes canónicas del tipo más general, cuando hablamos de filtros de Chebyshev, explicando detalladamente cada uno de los pasos que hemos seguido.

Finalmente, exponemos la forma de obtener las características de transferencia y reflexión a partir de la matriz  $N \times N$  sintetizada, y visualizamos gráficamente los resultados obtenidos en distintos ejemplos, realizando una breve comparativa entre ellos.

## Capítulo 3

# Método de síntesis de la matriz $N+2$

## 3.1 Introducción

En este capítulo vamos a generalizar el método estudiado, de forma que podamos incluir el caso *fully canonical*, en el que los *nz* ceros de transmisión deseados se encuentran todos en posiciones finitas, y coinciden con  $N$ , siendo éste el grado del filtro. El nuevo método sintetiza la matriz de acoplo  $N+2$  de una red transversal pasobanda, en la que se pueden alojar múltiples acoplos de entrada / salida, así como el acoplo directo fuente / carga necesario para los casos en los que la red es *fully canonical*. Vamos por tanto, a superar algunas de las limitaciones de la matriz de acoplo  $N \times N$ . Abordaremos también la extensión de la formulación para aplicar el método a filtros de banda rechazada, así como ejemplos ilustrativos de cada caso.

Las **ventajas de la matriz de acoplo  $N+2$  frente a la tradicional  $N \times N$**  presentada en el capítulo anterior son principalmente las siguientes:

- Se pueden incluir múltiples acoplos de entrada / salida, es decir, se pueden incluir acoplos directamente desde la fuente hacia los resonadores internos, o desde éstos hacia la carga, además de los principales acoplos de entrada / salida del primer y último resonador en el circuito del filtro.
- Se pueden sintetizar, como ya hemos dicho, funciones de filtrado del tipo *fully canonical*, mientras que el método de síntesis de la matriz de acoplo  $N \times N$ , permitía sólo un máximo de  $N-2$  ceros de transmisión en posiciones finitas.
- La matriz  $N+2$  permite además, aparcarse temporalmente acoplos en las filas o columnas más externas durante algunos procedimientos de síntesis, mientras se realizan rotaciones en otro lugar de la matriz, lo cual puede resultar muy útil.
- El método de síntesis de la matriz  $N+2$ , es más sencillo que el de la matriz  $N \times N$ , puesto que no requiere la etapa de ortogonalización de Gram-Schmidt.

## 3.2 Síntesis de la función de admitancia

Para construir la matriz de acoplo transversal  $N + 2$ , construiremos la matriz de los parámetros de admitancia en cortocircuito  $[Y_N]$  para la red total, de dos formas distintas:

- La primera, a partir de los coeficientes de los polinomios racionales que determinan los parámetros de scattering  $S_{21}(s)$  y  $S_{11}(s)$ , y que representan las características del filtro que vamos a realizar.
- La segunda, a partir de los elementos del circuito del array transversal de la red.

Así, mediante las dos expresiones de la matriz  $[Y_N]$  que obtengamos, podremos relacionar los elementos de la matriz de acoplo con los coeficientes de los polinomios  $S_{21}(s)$  y  $S_{11}(s)$ .

### 3.2.1 Síntesis mediante polinomios de transferencia y reflexión

Los polinomios de transferencia y reflexión son:

$$\text{Función de reflexión} \quad S_{11}(s) = \frac{F(s)}{\varepsilon_R \cdot E(s)} \quad (3.1)$$

$$\text{Función de transferencia} \quad S_{21}(s) = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot E(s)} \quad (3.2)$$

donde, como ya comentamos en el procedimiento de síntesis de la matriz  $N \times N$ :

- Se asume que los polinomios  $E(s)$ ,  $F(s)$  y  $P(s)$  han sido normalizados a su grado más alto.
- $E(s)$  y  $F(s)$ , son polinomios de grado  $N$ , siendo  $N$  el grado de la función de filtrado.
- $P(s)$  es un polinomio de grado igual al número de ceros de transmisión deseados,  $nfz$ .

Pero además, por tratarse de la síntesis de la matriz  $N + 2$ , debemos tener en cuenta que ahora:

- Se cumple que el número de ceros de transmisión finitos debe ser menor que el grado de la función de filtrado, esto es,  $nfz < N$ , a diferencia de lo ocurría en la síntesis de la matriz de acoplo  $N \times N$ , donde la limitación era  $nfz < N - 2$ .
- Aparece un nuevo término  $\varepsilon_R$ , cuyo valor es igual a la unidad en todos los casos, excepto en funciones de filtrado *fully canonical*. Notar que, en el proceso de síntesis de matrices  $N \times N$ , obviábamos este término ya que como debía cumplirse que  $nfz < N - 2$ , el caso *fully canonical* no era realizable

La aparición del nuevo término  $\varepsilon_R$ , hace que tengamos que calcular de forma diferente su valor, al igual que el de la otra constante  $\varepsilon$ , en función de si estamos en una red *fully canonical* o no. Veámoslo de forma detallada:

### CÁLCULO GENERAL DE $\xi$ Y $\xi_R$

En el caso más general, excluyendo aquellos en los que la función de filtrado sea de un orden igual al del número de ceros de transmisión situados en posiciones finitas, el valor de las constantes  $\varepsilon$  y  $\varepsilon_R$  se calcula como:

$$\blacksquare \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \cdot \left. \frac{P(s)}{F(s)} \right|_{s=j}, \text{ con } RL = \text{Nivel de pérdidas de retorno} \quad (3.3)$$

$$\blacksquare \quad \varepsilon_R = 1 \quad (3.4)$$

### CÁLCULO DE $\xi$ Y $\xi_R$ EN FUNCIONES DE FILTRADO *FULLY CANONICAL*

En este caso la constante  $\varepsilon_R$  tendrá un valor algo mayor que la unidad, que vendrá dado por:

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad (3.5)$$

Para el cálculo de las constantes, una vez que conozcamos los polinomios  $P(s)$  y  $F(s)$ , podremos calcular el siguiente valor:

$$k = \frac{1}{\sqrt{10^{RL/10} - 1}} \cdot \left. \frac{P(s)}{F(s)} \right|_{s=j} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} \quad (3.6)$$

Como además, de (3.5) se deduce que:

$$\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = k \quad (3.7)$$

Se puede calcular el valor de las constantes como:

$$\blacksquare \quad \varepsilon = \sqrt{k^2 + 1} \quad (3.8)$$

$$\blacksquare \quad \varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad (3.9)$$

Es importante también asegurar la ortogonalidad de los parámetros de transferencia y reflexión. En el Anexo B se demuestra que para ello, debe cumplirse la condición de fase (B.16), lo que implica que la suma de las fases individuales que forman la fase total de los vectores  $S_{11}(s)$ ,  $S_{21}(s)$ , debe ser múltiplo de  $\pi/2$  radianes

Como  $S_{21}(s)$ ,  $S_{11}(s)$  y  $S_{22}(s)$  comparten denominador común  $E(s)$ , sólo es necesario considerar sus polinomios numeradores hasta donde concierne a la condición de fases

$\Delta\varphi = \left[ \phi - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] = \frac{\pi}{2}(2 \cdot k \pm 1)$ . Entonces, los múltiplos de  $\pi/2$  dependerán, como se observa en el Anexo B, de:

- El número de ceros de transmisión en posiciones finitas  $nfz$ , del polinomio numerador de  $S_{21}(s)$ , esto es, de  $P(s)$ .
- El grado  $N$  de la función de filtrado, que será el grado de los polinomios numeradores de  $S_{11}(s)$  y  $S_{22}(s)$ , esto es, de  $F(s)$  y  $F^*(s)$  respectivamente.

Sabiendo esto, veamos qué es necesario para que  $\phi - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$  produzca un múltiplo impar de  $\pi/2$ :

$$\Delta\varphi = \phi - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = nfz \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{N \cdot \pi/2 + N \cdot \pi/2}{2} = nfz \cdot \frac{\pi}{2} - N \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(N - nfz) \quad (3.10)$$

Se observa que para que  $\Delta\varphi$  produzca un múltiplo impar de  $\pi/2$ , es decir para asegurar la ortogonalidad entre  $F(s)$  y  $P(s)$ , la cantidad entera  $N - nfz$ , debe ser impar. Por tanto, es necesario multiplicar  $P(s)$  por  $j$  cuando  $N - nfz$  sea un número entero par. De esta forma, estaremos añadiendo  $\pi/2$  a la fase  $\phi$ , y por tanto  $\Delta\varphi$  pasará a ser, como deseamos, un múltiplo impar de  $\pi/2$  radianes.

Por otra parte, los polinomios numerador y denominador de los elementos  $y_{21}(s)$  e  $y_{22}(s)$  de la matriz  $[Y_N]$ , pueden construirse directamente a partir de los polinomios de transferencia y reflexión,  $S_{21}(s)$  y  $S_{11}(s)$ .

Sabemos que para una red de dos terminaciones con impedancias de fuente y de carga de  $1 \Omega$ , se cumple, como vimos en el segundo capítulo (aptdo. 2.3.1) que :

*Para  $N$  par:*

$$y_{22}(s) = \frac{y_{22n}(s)}{y_d(s)} = \frac{n_1(s)}{m_1(s)} \quad (3.11)$$

$$y_{21}(s) = \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot m_1(s)} \quad (3.12)$$

*Para  $N$  impar:*

$$y_{22}(s) = \frac{y_{22n}(s)}{y_d(s)} = \frac{m_1(s)}{n_1(s)} \quad (3.13)$$

$$y_{21}(s) = \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot n_1(s)} \quad (3.14)$$

donde:

$$m_1 = \operatorname{Re}(e_0 + f_0) + j \cdot \operatorname{Im}(e_1 + f_1) \cdot s + \operatorname{Re}(e_2 + f_2) \cdot s^2 + \dots \quad (3.15)$$

$$n_1 = j \cdot \operatorname{Im}(e_0 + f_0) + \operatorname{Re}(e_1 + f_1) \cdot s + j \cdot \operatorname{Im}(e_2 + f_2) \cdot s^2 + \dots \quad (3.16)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$e_i = \text{Coeficientes complejos de } E(s) \quad (3.17)$$

$$f_i = \text{Coeficientes complejos de } F(s) / \varepsilon_R$$

De la misma forma, como vimos en el apartado 2.3.2 del segundo capítulo, para redes de una terminación los polinomios  $y_{21}(s)$  e  $y_{22}(s)$  pueden encontrarse de la siguiente manera:

Para  $N$  par:

$$y_{22}(s) = \frac{y_{22n}(s)}{y_d(s)} = \frac{n_1(s)}{m_1(s)} \quad (3.18)$$

$$y_{21}(s) = \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot m_1(s)} \quad (3.19)$$

Para  $N$  impar:

$$y_{22}(s) = \frac{y_{22n}(s)}{y_d(s)} = \frac{m_1(s)}{n_1(s)} \quad (3.20)$$

$$y_{21}(s) = \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot n_1(s)} \quad (3.21)$$

donde:

$$m_1 = \operatorname{Re}(e_0) + j \cdot \operatorname{Im}(e_1) \cdot s + \operatorname{Re}(e_2) \cdot s^2 + \dots \quad (3.22)$$

$$n_1 = j \cdot \operatorname{Im}(e_0) + \operatorname{Re}(e_1) \cdot s + j \cdot \operatorname{Im}(e_2) \cdot s^2 + \dots \quad (3.23)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$e_i = \text{Coeficientes complejos de } E(s) \quad (3.24)$$

Conociendo entonces los polinomios numerador y denominador de  $y_{21}(s)$  e  $y_{22}(s)$ , sus residuos  $r_{21k}$  y  $r_{22k}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), podrán obtenerse con la expansión en fracciones simples, mientras que los valores propios puramente reales  $\lambda_k$  de la red, se pueden encontrar a partir de las raíces puramente imaginarias del polinomio denominador común  $y_d(s)$ , que vendrán dadas por  $j \cdot \lambda_k$ .

Si expresamos los residuos de forma matricial, obtenemos la siguiente matriz de admitancias:

$$[Y_N] = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{y_d(s)} \cdot \begin{bmatrix} y_{11n}(s) & y_{12n}(s) \\ y_{21n}(s) & y_{22n}(s) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$[Y_N] = j \cdot \begin{bmatrix} 0 & K_0 \\ K_0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{(s - j \cdot \lambda_k)} \cdot \begin{bmatrix} r_{11k} & r_{12k} \\ r_{21k} & r_{22k} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

donde la constante real  $K_0$ , es nula excepto en el caso *fully canonical*, es decir, cuando  $N = nfz$ , en cuyo caso el grado del numerador de  $y_{21}(s)$  es igual al del denominador, y  $K_0$  debe extraerse de  $y_{21}(s)$  previamente, para reducir el grado de su polinomio denominador por uno, antes de encontrar sus residuos  $r_{21k}$ .

Además, hemos de tener en cuenta que en el caso *fully canonical*,  $N - nfz = 0$  es una cantidad par, por lo que es necesario, como hemos dicho, multiplicar  $P(s)$  por  $j$  para asegurar que se satisfacen las condiciones de unitariedad de la matriz de scattering.

El valor de la constante  $K_0$ , siendo independiente de la variable frecuencial  $s$ , debe evaluarse en  $s = j \cdot \infty$  como sigue:

$$j \cdot K_0 = \left. \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} \right|_{s=j \cdot \infty} = \left. \frac{j \cdot P(s)/\varepsilon}{y_d(s)} \right|_{s=j \cdot \infty} \quad (3.27)$$

El proceso para construir el denominador  $y_d$  (3.15) y (3.16), lleva a que el coeficiente de grado más alto tenga un valor de  $(1 + 1/\varepsilon_R)$ , y como el grado más alto de  $P(s)$  es 1, fijándonos en (3.22), vemos que el valor de  $K_0$  será:

$$K_0 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{(1 + 1/\varepsilon_R)} = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{(1 + \varepsilon_R)} \quad (3.28)$$

Entonces, el nuevo polinomio numerador  $y'_{21n}$  que será de grado  $N - 1$ , lo podemos encontrar como:

$$y'_{21n}(s) = y_{21n}(s) - j \cdot K_0 \cdot y_d(s) \quad (3.29)$$

mientras que los residuos  $r_{21k}$  de  $y'_{21}(s) = \frac{y'_{21n}(s)}{y_d(s)}$ , podemos encontrarlos de la forma habitual, es decir, mediante la expansión en fracciones simples.

### 3.2.2 Síntesis mediante aproximación circuital.

Además de la síntesis de la matriz de admitancia que utiliza los polinomios de transferencia y reflexión, la matriz  $[Y_N]$  para una red de dos puertos, puede obtenerse mediante la síntesis directa que parte de la red transversal *fully canonical*.

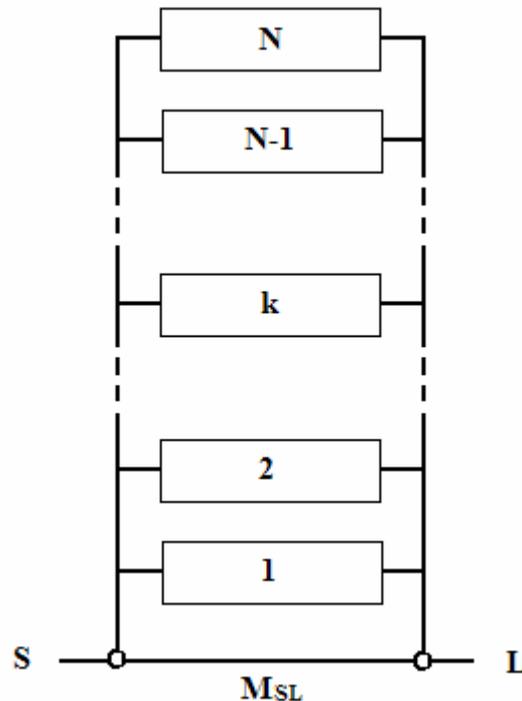


Figura 3. 1. Array de N resonadores transversales incluyendo el acoplamiento directo fuente / carga  $M_{SL}$

Esta red, como vemos en la figura anterior, comprende una serie de N secciones individuales paso bajo de primer orden, conectadas en paralelo entre los terminales fuente y carga.

El inversor de acoplamiento directo entre la fuente y la carga,  $M_{SL}$ , se incluye para permitir la realización de funciones de transferencia *fully canonical*, de acuerdo a la regla del camino mínimo. Esta regla, como sabemos, implica que el número máximo de ceros de transmisión en posiciones finitas  $nfz_{max}$  que puede realizar una red, viene dado por el grado  $N$  de ésta, menos el número de resonadores existentes en la ruta más corta de la red entre la terminación de fuente y la de carga  $n_{min}$ . En redes *fully canonical*,  $n_{min} = 0$ , por lo que  $nfz_{max} = N - n_{min} = N$ , esto es, el número máximo de ceros de transmisión en posiciones finitas que puede realizar la red coincide con el grado de la función de filtrado.

Cada uno de las  $N$  secciones paso bajo, comprende un condensador  $C_k$  conectado en paralelo, y una susceptancia  $B_k$  invariante con la frecuencia, conectada mediante inversores de admitancia, de admitancias características  $M_{Sk}$  y  $M_{Lk}$ , a la fuente y la carga respectivamente.

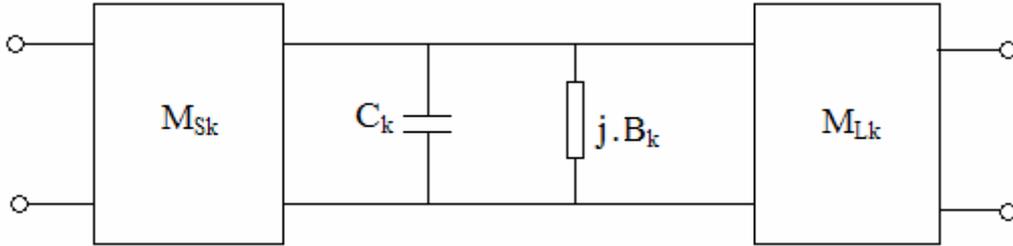


Figura 3. 2. Sección paso bajo k-ésima

□ Particularización para funciones de filtrado *fully canonical*

El inversor directo entre fuente y carga  $M_{SL}$ , es nulo, excepto para funciones de filtrado *fully canonical*, en las que el número de ceros de transmisión en posiciones finitas es igual a  $N$ .

A frecuencias infinitas,  $s = \pm j \cdot \infty$ , todos los condensadores  $C_k$ , se convierten en cortocircuitos en paralelo:

$$Z_c = \frac{1}{s \cdot C_k} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (3.30)$$

y el circuito queda entonces como:

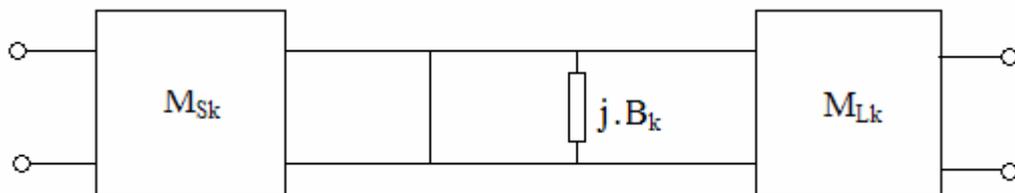


Figura 3. 3. Sección paso bajo equivalente, a frecuencias infinitas.

Los cortocircuitos creados por los condensadores en las distintas secciones paso bajo, aparecen como circuitos abiertos en los puertos de fuente y carga debido a los inversores  $M_{Sk}$  y  $M_{Lk}$ , por tanto, el único camino entre fuente y carga restante, se produce a través del inversor de admitancia  $M_{SL}$  invariante con la frecuencia.

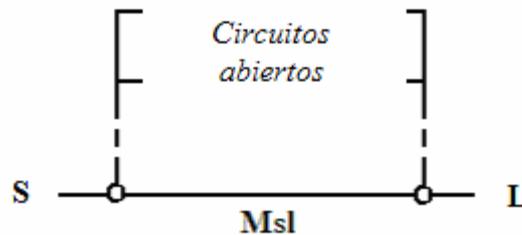


Figura 3. 4. Único camino posible entre fuente y carga.

Si la impedancia de carga es de  $1 \Omega$ , entonces el circuito equivalente del array transversal a frecuencias infinitas, será el siguiente:

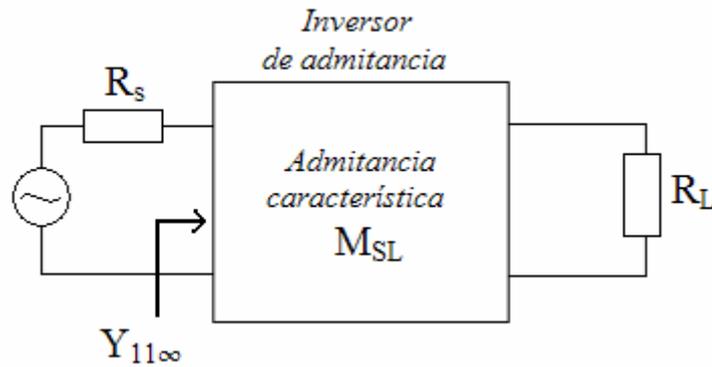


Figura 3. 5. Circuito equivalente del array transversal cuando  $s = \pm j \cdot \infty$

Por tanto, podemos calcular la *driving point admittance*  $Y_{11\infty}$ , sabiendo que un inversor de admitancia se comporta como un transformador en  $\lambda/4$ . Esto implica que la impedancia de entrada del inversor vendrá dada por:

$$Y_{in} = \frac{M_{SL}^2}{Y_L} \quad (3.31)$$

Y como nuestro caso,  $Y_L = 1/R_L = 1 \Omega$ , llegamos a:

$$Y_{11\infty} = M_{SL}^2 \quad (3.32)$$

Es sencillo entonces, calcular el coeficiente de reflexión a la entrada, cuando  $s = \pm j \cdot \infty$ :

$$S_{11}(s)|_{s=j\cdot\infty} \equiv |S_{11\infty}| = \frac{1 - Y_{11\infty}}{1 + Y_{11\infty}} \quad (3.33)$$

Además, teniendo en cuenta que la ecuación de conservación de la energía implica que:

$$1 = |S_{21\infty}|^2 + |S_{11\infty}|^2 \quad (3.34)$$

$$|S_{21\infty}| = \sqrt{1 - |S_{11\infty}|^2} \quad (3.35)$$

podemos calcular el valor de  $|S_{21\infty}|$ :

$$|S_{21\infty}| = \sqrt{1 - \left| \frac{1 - Y_{11\infty}}{1 + Y_{11\infty}} \right|^2} \quad (3.36)$$

$$|S_{21\infty}| = \sqrt{1 - \left| \frac{1 - M_{SL}^2}{1 + M_{SL}^2} \right|^2} \quad (3.37)$$

$$|S_{21\infty}| = \sqrt{\frac{|1 + M_{SL}^2|^2 - |1 - M_{SL}^2|^2}{|1 + M_{SL}^2|^2}} \quad (3.38)$$

$$|S_{21\infty}| = \frac{\sqrt{(1 + 2 \cdot M_{SL}^2 + M_{SL}^4) - (1 - 2 \cdot M_{SL}^2 + M_{SL}^4)}}{1 + M_{SL}^2} \quad (3.39)$$

$$|S_{21\infty}| = \frac{\sqrt{4 \cdot M_{SL}^2}}{1 + M_{SL}^2} = \frac{2 \cdot M_{SL}}{1 + M_{SL}^2} \quad (3.40)$$

Y por tanto, es sencillo ahora encontrar una expresión de  $M_{SL}$ , en función de  $S_{11\infty}$  y  $S_{21\infty}$ . Para ello despejamos  $|S_{21\infty}|$ :

$$|S_{21\infty}| + |S_{21\infty}| \cdot M_{SL}^2 = 2 \cdot M_{SL} \quad (3.41)$$

$$M_{SL}^2 \cdot |S_{21\infty}| - 2 \cdot M_{SL} + |S_{21\infty}| = 0 \quad (3.42)$$

$$M_{SL}^2 \cdot \frac{|S_{21\infty}|}{2} - M_{SL} + \frac{|S_{21\infty}|}{2} = 0 \quad (3.43)$$

Si ahora resolvemos la ecuación, obtenemos el valor de  $M_{SL}$ :

$$M_{SL} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{|S_{21\infty}|}{2} \cdot \frac{|S_{21\infty}|}{2}}}{2 \cdot \frac{|S_{21\infty}|}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - |S_{21\infty}|^2}}{|S_{21\infty}|} \quad (3.44)$$

Y teniendo en cuenta la ecuación (3.34) de conservación de la energía ;

$$M_{SL} = \frac{1 \pm |S_{11\infty}|}{|S_{21\infty}|} \quad (3.45)$$

Además, como en una red *fully canonical*,  $P(s)$ ,  $F(s)$  y  $E(s)$  serán polinomios de grado  $N$  normalizados a la unidad en sus coeficientes de grado más alto, se cumple que, a frecuencias infinitas:

$$|S_{21}(j \cdot \infty)| = \frac{P(j \cdot \infty)}{\varepsilon \cdot E(j \cdot \infty)} = \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.46)$$

$$|S_{11}(j \cdot \infty)| = \frac{F(j \cdot \infty)}{\varepsilon_R \cdot E(j \cdot \infty)} = \frac{1}{\varepsilon_R} \quad (3.47)$$

Por tanto:

$$M_{SL} = \frac{1 \pm |S_{11\infty}|}{|S_{21\infty}|} = \frac{1 \pm (1/\varepsilon_R)}{1/\varepsilon} = \frac{(\varepsilon_R \pm 1) \cdot \varepsilon}{\varepsilon_R} \quad (3.48)$$

donde  $\varepsilon_R$  es un valor algo mayor que la unidad en redes *fully canonical*, por lo que tomando el signo negativo, obtendremos un valor relativamente pequeño de  $M_{SL}$ :

$$M_{SL} = \frac{(\varepsilon_R - 1) \cdot \varepsilon}{\varepsilon_R} \quad (3.49)$$

y como debe ocurrir en filtros que no son *fully canonical*, en los que  $\varepsilon_R = 1$ , se cumplirá que  $M_{SL} = 0$ . Si seguimos desarrollando  $M_{SL}$ , sustituyendo el valor correspondiente de  $\varepsilon_R$  dado por (3.9), vemos que  $M_{SL}$  puede expresarse también como:

$$M_{SL} = \frac{(\varepsilon_R - 1) \cdot \varepsilon}{\varepsilon_R} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} - 1\right) \cdot \varepsilon}{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} = \frac{\left(\frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right) \cdot \varepsilon}{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} \quad (3.50)$$

$$M'_{SL} = \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \quad (3.51)$$

Si tomamos ahora el signo positivo en (3.48), y sustituyendo de nuevo el valor de  $\varepsilon_R$  dado por (3.9), ocurrirá lo siguiente:

$$M'_{SL} = \frac{(\varepsilon_R + 1) \cdot \varepsilon}{\varepsilon_R} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} + 1\right) \cdot \varepsilon}{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} = \frac{\left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right) \cdot \varepsilon}{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} \quad (3.52)$$

$$M'_{SL} = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}) \cdot (\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1})} \quad (3.53)$$

$$M'_{SL} = \frac{(\varepsilon^2 - \varepsilon \cdot \sqrt{\varepsilon^2 - 1} + \varepsilon \cdot \sqrt{\varepsilon^2 - 1} - (\varepsilon^2 - 1))}{(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1})} \quad (3.54)$$

$$M'_{SL} = \frac{1}{(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1})} = \frac{1}{M_{SL}} \quad (3.55)$$

Vemos pues, que existe una segunda solución  $M'_{SL} = 1/M_{SL}$ , inversa a la que se obtiene tomando el signo negativo. Sin embargo, esta nueva solución  $M'_{SL}$  será mayor que  $M_{SL}$ , por lo que en la práctica, para filtros paso banda, nunca se toma el signo positivo.

□ Síntesis de la matriz de admitancia  $[Y_N]$

Procedamos ahora al cálculo de la matriz de parámetros  $ABCD$  de cada una de las secciones que formarán el circuito de la figura (3.1). Tendremos por tanto  $N$  secciones como la siguiente:

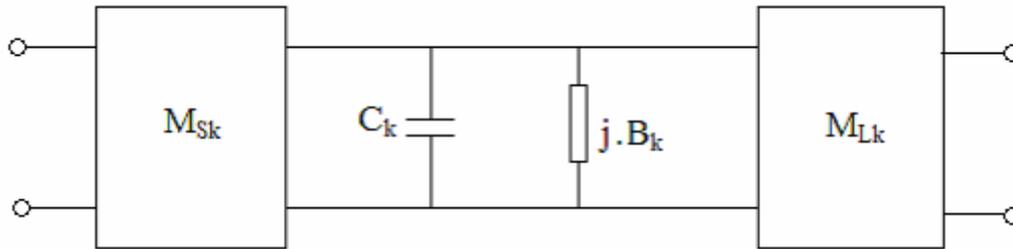


Figura 3. 6. Sección k-ésima

Para el cálculo de la matriz total, consideraremos tres etapas conectadas en cascada, y calcularemos la matriz individual  $ABCD_i$  de cada una de ellas, para posteriormente multiplicarlas y obtener la matriz  $ABCD$  de la sección k-ésima al completo.:

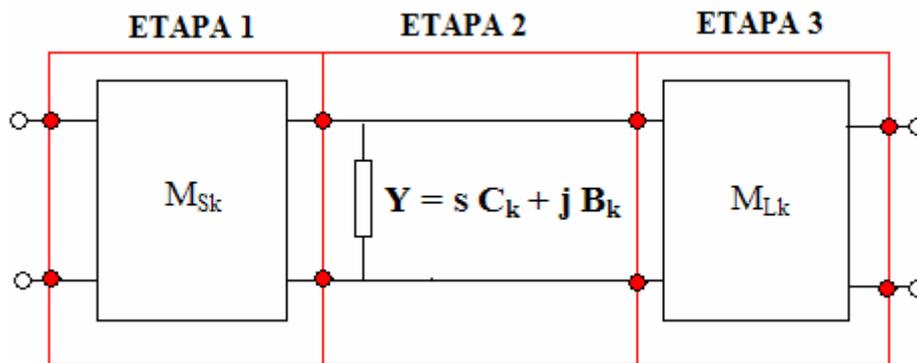


Figura 3. 7. Etapas para el cálculo de la matriz  $ABCD$

▪ ETAPA 1

Esta etapa, consiste en un inversor de admitancia, cuya admitancia característica vale  $Y_c = M_{sk}$ , y por tanto se corresponde con una línea de transmisión de longitud  $l = \lambda/4$ , y una impedancia característica  $Z_c = 1/M_{sk}$ . Sus parámetros  $ABCD_l$  podemos obtenerlos a partir de sus expresiones generales para una línea de transmisión de longitud  $l$ , e impedancia característica  $Z_c$  [13]:

$$A = \cos(\beta \cdot l) \tag{3.56}$$

$$B = j \cdot Z_c \cdot \sin(\beta \cdot l) \tag{3.57}$$

$$C = j \cdot Y_c \cdot \sin(\beta \cdot l) \tag{3.58}$$

$$D = \cos(\beta \cdot l) \tag{3.59}$$

Por tanto, en nuestro circuito de longitud  $l = \lambda/4$  y admitancia característica  $Y_c = M_{sk}$ , esto se traduce en:

$$A = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (3.60)$$

$$B = j \cdot \frac{1}{M_{sk}} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}\right) = j \cdot \frac{1}{M_{sk}} \quad (3.61)$$

$$C = j \cdot M_{sk} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}\right) = j \cdot M_{sk} \quad (3.62)$$

$$D = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (3.63)$$

De esta forma, la matriz  $ABCD_1$  será:

$$ABCD_1 = \begin{bmatrix} 0 & j \cdot \frac{1}{M_{sk}} \\ j \cdot M_{sk} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

#### ▪ ETAPA 2

Esta segunda etapa, consiste en una admitancia  $Y$  conectada en paralelo. Sus parámetros  $ABCD_2$  podemos obtenerlos a partir de su expresión general [13]:

$$A = 1 \quad (3.65)$$

$$B = 0 \quad (3.66)$$

$$C = Y \quad (3.67)$$

$$D = 1 \quad (3.68)$$

Y como sabemos que  $Y = s \cdot C_k + j \cdot B_k$ , la matriz  $ABCD_2$  será:

$$ABCD_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s \cdot C_k + j \cdot B_k & 1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

#### ▪ ETAPA 3

Esta etapa es similar a la primera, con la diferencia de que aquí, la admitancia característica del inversor viene dada por  $M_{Lk}$ . Actuando de la misma forma que en el primer caso, llegamos entonces a la matriz  $ABCD_3$ :

$$ABCD_3 = \begin{bmatrix} 0 & j \cdot \frac{1}{M_{Lk}} \\ j \cdot M_{Lk} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Tras el cálculo de la matriz  $ABCD_i$  de cada una de las etapas, podemos obtener la matriz total  $ABCD$  multiplicando las tres matrices:

$$ABCD = \begin{bmatrix} 0 & j \cdot \frac{1}{M_{Sk}} \\ j \cdot M_{Sk} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s \cdot C_k + j \cdot B_k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & j \cdot \frac{1}{M_{Lk}} \\ j \cdot M_{Lk} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$ABCD = \begin{bmatrix} j \cdot \frac{s \cdot C_k + j \cdot B_k}{M_{Sk}} & j \cdot \frac{1}{M_{Sk}} \\ j \cdot M_{Sk} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & j \cdot \frac{1}{M_{Lk}} \\ j \cdot M_{Lk} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$ABCD = \begin{bmatrix} -\frac{M_{Lk}}{M_{Sk}} & -\frac{s \cdot C_k + j \cdot B_k}{M_{Sk} \cdot M_{Lk}} \\ 0 & -\frac{M_{Sk}}{M_{Lk}} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Esta matriz  $ABCD$  puede convertirse de forma directa a su equivalente de matriz de parámetros  $y$ , utilizando la siguiente expresión [13]:

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D}{B} & -\frac{(A \cdot D - B \cdot C)}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Así pues, calculamos cada uno de los parámetros  $y$ :

$$y_{11} = \frac{D}{B} = \frac{-\frac{M_{Sk}}{M_{Lk}}}{-\frac{s \cdot C_k + j \cdot B_k}{M_{Sk} \cdot M_{Lk}}} = \frac{M_{Sk}^2}{s \cdot C_k + j \cdot B_k} = \frac{M_{Sk} \cdot M_{Lk}}{s \cdot C_k + j \cdot B_k} \cdot \frac{M_{Sk}}{M_{Lk}} \quad (3.75)$$

$$y_{12} = -\frac{(A \cdot D - B \cdot C)}{B} = -\frac{\left(-\frac{M_{Lk}}{M_{Sk}} \cdot -\frac{M_{Sk}}{M_{Lk}}\right)}{-\frac{s \cdot C_k + j \cdot B_k}{M_{Sk} \cdot M_{Lk}}} = \frac{M_{Sk} \cdot M_{Lk}}{s \cdot C_k + j \cdot B_k} \quad (3.76)$$

$$y_{21} = -\frac{1}{B} = -\frac{1}{-\frac{s \cdot C_k + j \cdot B_k}{M_{Sk} \cdot M_{Lk}}} = \frac{M_{Sk} \cdot M_{Lk}}{s \cdot C_k + j \cdot B_k} \quad (3.77)$$

$$y_{22} = \frac{A}{B} = \frac{-\frac{M_{Lk}}{M_{Sk}}}{-\frac{s \cdot C_k + j \cdot B_k}{M_{Sk} \cdot M_{Lk}}} = \frac{M_{Lk} \cdot M_{Sk}}{s \cdot C_k + j \cdot B_k} \cdot \frac{M_{Lk}}{M_{Sk}} \quad (3.78)$$

Entonces, la matriz de parámetros  $y$  para cada una de las secciones  $k$ -ésimas será:

$$y = \frac{M_{Sk} \cdot M_{Lk}}{s \cdot C_k + j \cdot B_k} \cdot \begin{bmatrix} \frac{M_{Sk}}{M_{Lk}} & 1 \\ 1 & \frac{M_{Lk}}{M_{Sk}} \end{bmatrix} = \frac{1}{s \cdot C_k + j \cdot B_k} \cdot \begin{bmatrix} M_{Sk}^2 & M_{Sk} \cdot M_{Lk} \\ M_{Sk} \cdot M_{Lk} & M_{Lk}^2 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Finalmente, la matriz de admitancia en cortocircuito de dos puertos  $[Y_N]$  del array transversal de las  $N$  secciones conectadas en paralelo (figura 3.1), será la suma de las matrices de parámetros y de cada una de las secciones individuales, más la matriz de parámetros  $[y_{SL}]$  del inversor directo de acoplo fuente / carga,  $M_{SL}$ .

$$[Y_N] = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} = [y_{SL}] + \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} y_{11k}(s) & y_{12k}(s) \\ y_{21k}(s) & y_{22k}(s) \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$[Y_N] = j \cdot \begin{bmatrix} 0 & M_{SL} \\ M_{SL} & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{s \cdot C_k + j \cdot B_k} \cdot \begin{bmatrix} M_{Sk}^2 & M_{Sk} \cdot M_{Lk} \\ M_{Sk} \cdot M_{Lk} & M_{Lk}^2 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

### 3.3 Síntesis de la matriz transversal $N+2$

Hemos conseguido expresar  $[Y_N]$  de dos formas distintas, la primera en términos de los residuos de la función de transferencia (3.36), y la segunda en términos de los elementos circuitales del array transversal (3.81). Si igualamos ambas expresiones tendremos:

$$j \cdot \begin{bmatrix} 0 & K_0 \\ K_0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{(s - j \cdot \lambda_k)} \begin{bmatrix} r_{11k} & r_{12k} \\ r_{21k} & r_{22k} \end{bmatrix} = j \cdot \begin{bmatrix} 0 & M_{SL} \\ M_{SL} & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{s \cdot C_k + j \cdot B_k} \begin{bmatrix} M_{Sk}^2 & M_{Sk} \cdot M_{Lk} \\ M_{Sk} \cdot M_{Lk} & M_{Lk}^2 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Se deducen por tanto las siguientes relaciones:

$$K_0 = M_{SL} \quad (3.83)$$

$$\frac{r_{21k}}{s - j \cdot \lambda_k} = \frac{M_{Sk} \cdot M_{Lk}}{s \cdot C_k + j \cdot B_k} \quad (3.84)$$

$$\frac{r_{22k}}{s - j \cdot \lambda_k} = \frac{M_{Lk}^2}{s \cdot C_k + j \cdot B_k} \quad (3.85)$$

Los residuos  $r_{21k}$  y  $r_{22k}$ , y los valores propios  $\lambda_k$  ya se han obtenido de los polinomios  $S_{21}$  y  $S_{22}$  de la función de filtrado deseada, por tanto, igualando las partes reales e imaginarias de la ecuaciones (3.84) y (3.85), podemos relacionarlos directamente con los parámetros del circuito:

$$C_k = 1 \quad (3.86)$$

$$B_k (\equiv M_{kk}) = -\lambda_k \quad (3.87)$$

$$M_{Lk}^2 = r_{22k} \Rightarrow M_{Lk} = \sqrt{r_{22k}} = T_{Nk} \quad (3.88)$$

$$M_{Sk} \cdot M_{Lk} = r_{21k} \Rightarrow M_{Sk} = \frac{r_{21k}}{\sqrt{r_{22k}}} = T_{1k} \quad (3.89)$$

con  $k = 1, 2, \dots, N$

Es aquí donde debemos darnos cuenta que  $M_{Sk}$  y  $M_{Lk}$  constituyen los vectores fila no escalados  $T_{1k}$  y  $T_{Nk}$  de la matriz ortogonal  $T$ , definida en el capítulo anterior.

En este punto sabemos que los condensadores  $C_k$  de las redes paralelas son todos igual a la unidad, y que las susceptancias invariantes con la frecuencia son  $B_k = -\lambda_k$  (y representan los valores de la matriz  $M_{11}, M_{12}, \dots, M_{NN}$ ). Además, los acoplos de entrada  $M_{Sk}$ , los acoplos de salida  $M_{Lk}$ , y el acoplo directo fuente / carga  $M_{SL}$  son todos conocidos, por lo que la matriz de acoplo recíproca y transversal  $N+2$  que representa la red, puede construirse ya.

En la matriz  $N+2$  tendremos entonces que:

- Los  $M_{Sk} (= T_{1k})$  son los  $N$  acoplos de entrada, y ocupan la primera fila y columna de la matriz, de la posición 1 a la posición  $N$ .
- Los  $M_{Lk} (= T_{Nk})$  son los  $N$  acoplos de salida y ocupan la última fila y columna de la matriz, de la posición 1 a la  $N$ .
- Los elementos  $M_{11}, M_{12}, \dots, M_{NN}$  se corresponden con los  $-\lambda_k$ .
- El resto de los elementos de la matriz son nulos.

	S	1	2	3	...	k	...	N-1	N	L
S	0									$M_{SL}$
1			0	0	0	0	0	0	0	
2		0		0	0	0	0	0	0	
3		0	0		0	0	0	0	0	
...		0	0	0		0	0	0	0	
k		0	0	0	0		0	0	0	
...		0	0	0	0	0		0	0	
N-1		0	0	0	0	0	0		0	
N		0	0	0	0	0	0	0		
L	$M_{SL}$									0

	$M_{S1}$ $M_{S2}$ $M_{S3}$ $M_{S4}$ $M_{Sk}$ ... $M_{S,N-1}$ ... $M_{SN}$
	$M_{11}$ $M_{22}$ $M_{33}$ $M_{44}$ $M_{kk}$ ... $M_{N-1,N-1}$ ... $M_{NN}$
	$M_{L1}$ $M_{L2}$ $M_{L3}$ $M_{L4}$ $M_{Lk}$ ... $M_{L,N-1}$ ... $M_{LN}$

Figura 3. 8. Matriz transversal  $N+2$

### 3.4 Características de transferencia y reflexión a partir de la matriz N+2

Para obtener la respuesta frecuencial del filtro cuando partimos de una matriz de acoplamiento  $N+2$ , a la que llamaremos  $M$ , procederemos prácticamente de la misma forma que cuando tenemos una matriz  $N \times N$ , caso que ya vimos en el apartado 2.4. La diferencia es que ahora hemos de eliminar la dependencia frecuencial de los elementos  $Z_{11}$  y  $Z_{NN}$  de la matriz total  $Z = s \cdot I + R + j \cdot M$ , puesto que en este caso ya no representan un desplazamiento respecto de la frecuencia de resonancia para el primer resonador y para el último, sino que se refieren a la fuente y la carga. La diferencia será entonces que ahora la matriz diagonal  $I$  tendrá sus elementos  $I_{11}$  y  $I_{NN}$  iguales a 0, quedando una matriz total  $Z$  igual a:

$$Z = s \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_I + \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R_N \end{bmatrix}}_R + j \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & M_{12} & \dots & \dots & \dots & M_{1N} \\ M_{21} & 0 & \dots & \dots & \dots & M_{2N} \\ M_{31} & M_{32} & \dots & \dots & \dots & M_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & M_{N-1,N} \\ M_{1N} & \dots & \dots & \dots & M_{N,N-1} & 0 \end{bmatrix}}_M \quad (3.90)$$

### 3.5 Ejemplo de síntesis de la matriz N+2. Paso banda.

Vamos a diseñar un filtro cuyo orden coincide con el número de ceros de transmisión situados a frecuencias finitas. Nos encontramos por tanto en una red *fully canonical* ( $N = nfz$ ), con dos terminaciones. Concretamente, las especificaciones del filtro van a ser:

Tipo	Paso Banda Chebyshev
Orden	4
Pérdidas de retorno	25 dB
Ceros de transmisión	$-j \cdot 8$ $-j \cdot 3.5$ $j \cdot 3$ $j \cdot 6$

Tabla 3. 1. Especificaciones del filtro

Aplicando la técnica recursiva, obtenemos los polinomios numerador y denominador de  $S_{11}(s)$  y  $S_{21}(s)$ :

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)/\varepsilon_R}{E(s)} \quad (3.91)$$

$$S_{21}(s) = \frac{P(s)/\varepsilon}{E(s)} \quad (3.92)$$

En este caso, como  $N = n_f z$ , tendremos un valor de  $\varepsilon_R$  distinto de la unidad. Pero además, debido a que  $N - n_f z = 0$  es un número par, los coeficientes de  $P(s)$  deben multiplicarse por  $j$ .

En cuanto a los polinomios numerador y denominador de  $y_{21}(s)$  e  $y_{22}(s)$ , puesto que estamos en un caso en el que  $N$  es par, se construirán como:

$$y_{22}(s) = \frac{y_{22n}(s)}{y_d(s)} = \frac{n_1(s)}{m_1(s)} \quad (3.93)$$

$$y_{21}(s) = \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} = \frac{P(s)/\varepsilon}{m_1(s)} \quad (3.94)$$

y posteriormente se normalizarán respecto el coeficiente de grado más alto de  $y_d(s)$ .

El siguiente paso será encontrar los residuos de  $y_{21}(s)$  e  $y_{22}(s)$  mediante la expansión en fracciones simples. Como el numerador de  $y_{22}(s)$  tiene un grado menos que su denominador, los residuos  $r_{22k}$  de  $y_{22}(s)$  se pueden encontrar directamente. Sin embargo, el grado del numerador de  $y_{21}(s)$  es el mismo que el de su denominador, por lo que hay que extraer el factor  $K_0 (= M_{SL})$  para reducir su grado en uno, antes de obtener los residuos. Esto se consigue fácilmente, buscando en primer lugar el valor de  $K_0 (= M_{SL})$ , evaluando para ello  $y_{21}(s)$  en  $s = j \cdot \infty$ :

$$j \cdot M_{SL} = y_{21}(s)|_{s=j \cdot \infty} = j \cdot K_0 = j \cdot \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{(\varepsilon_R + 1)} = j \cdot 0.0023 \quad (3.95)$$

Comprobamos además que este valor coincide con el del coeficiente de grado más alto del numerador de  $y_{21}(s)$ , como puede comprobarse en la tabla de resultados que incluimos al final de este ejemplo.

A continuación, debemos extraer  $K_0 (= M_{SL})$  del numerador de  $y_{21}(s)$ , de la siguiente manera:

$$y'_{21n}(s) = y_{21n}(s) - j \cdot K_0 \cdot y_d(s) \quad (3.96)$$

En esta fase por tanto,  $y'_{21n}(s)$  será un grado menor que  $y_d(s)$ , y los residuos  $r_{21k}$  podremos encontrarlos ya de forma directa.

Con los residuos, como explicamos en la síntesis, podemos encontrar los valores propios  $\lambda_k$  y los vectores propios  $T_{1k}$  y  $T_{Nk}$ . Conocido además  $M_{SL}$ , podemos completar la matriz transversal de acoplo  $N + 2$ :

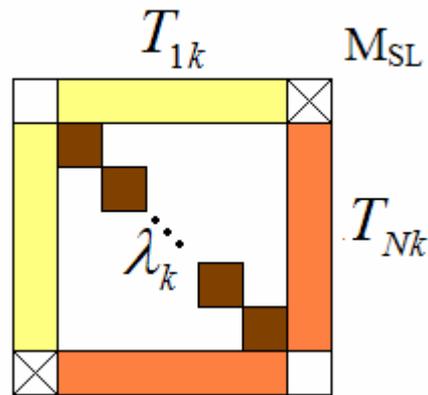


Figura 3. 9. Matriz transversal  $N + 2$

Los polinomios numeradores y denominadores (3.11-3.12) obtenidos para este ejemplo son los siguientes:

Denominador $y_d(s)$	Numerador $y_{22n}(s)$	Numerador $y_{21n}(s)$
1.0000	1.3092	$0 + 0.0023 \cdot j$
$0 - 0.0468 \cdot j$	$0 - 0.0746 \cdot j$	$-0.0060 + 0.0023 \cdot j$
2.7288	2.2018	$0 + 0.1305 \cdot j$
$0 - 0.1488 \cdot j$	$0 - 0.1258 \cdot j$	$-0.1057 + 0.0023 \cdot j$
1.2408		$0 + 1.1789 \cdot j$

Tabla 3. 2. Polinomios del filtro *fully canonical* diseñado.

Los valores propios y los residuos, así como los vectores que determinarán la primera y última fila de la matriz son:

Valores propios $\lambda_k$	Residuos $r_{21k}$	Residuos $r_{22k}$
-1.4814	0.2033	0.2033
1.4507	-0.1860	0.1860
0.7996	0.4483	0.4483
-0.7221	-0.4715	0.4715

Tabla 3. 3. Valores propios y residuos del filtro *fully canonical* diseñado

Vector $T_{1k}$	Vector $T_{Nk}$
0.4509	0.4509
-0.4313	0.4313
0.6696	0.6696
-0.6867	0.6867

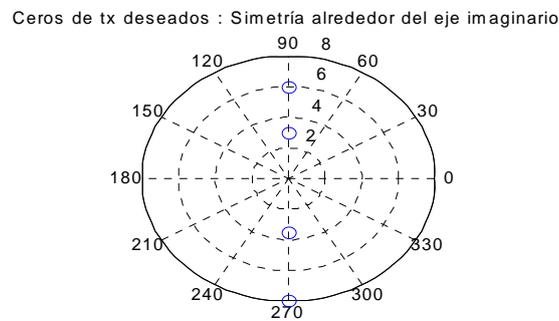
Tabla 3. 4. Vectores  $T_{1k}$  y  $T_{Nk}$  del filtro *fully canonical* diseñado

Finalmente, la matriz de acoplo  $N+2$  que buscábamos, es la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0.4509 & -0.4313 & 0.6696 & -0.6867 & 0.0023 \\ 0.4509 & 1.4814 & 0 & 0 & 0 & 0.4509 \\ -0.4313 & 0 & -1.4507 & 0 & 0 & 0.4313 \\ 0.6696 & 0 & 0 & -0.7996 & 0 & 0.6696 \\ -0.6867 & 0 & 0 & 0 & 0.7221 & 0.6867 \\ 0.0023 & 0.4509 & 0.4313 & 0.6696 & 0.6867 & 0 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz podremos obtener la respuesta frecuencial del filtro en transmisión y en reflexión, según hemos visto en el apartado 3.4.

A continuación, vamos a ver gráficamente algunos de los resultados. La representación en el plano complejo de los ceros de transmisión nos permite asegurar su simetría alrededor del eje imaginario. Como vemos a continuación, en este caso concreto, todos los ceros están justo sobre dicho eje:



En cuanto a las raíces del polinomio denominador calculadas a partir del *Alternating Pole Method*, podemos ver su situación en el plano complejo en la siguiente figura:

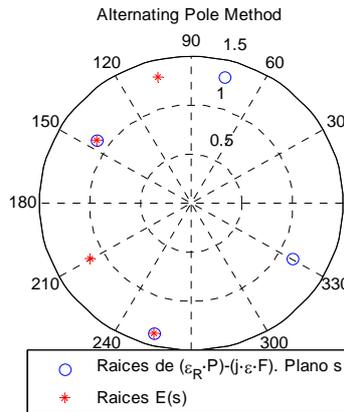


Figura 3. 12. Raíces del polinomio denominador

Finalmente, veamos la respuesta frecuencial del filtro que hemos diseñado:

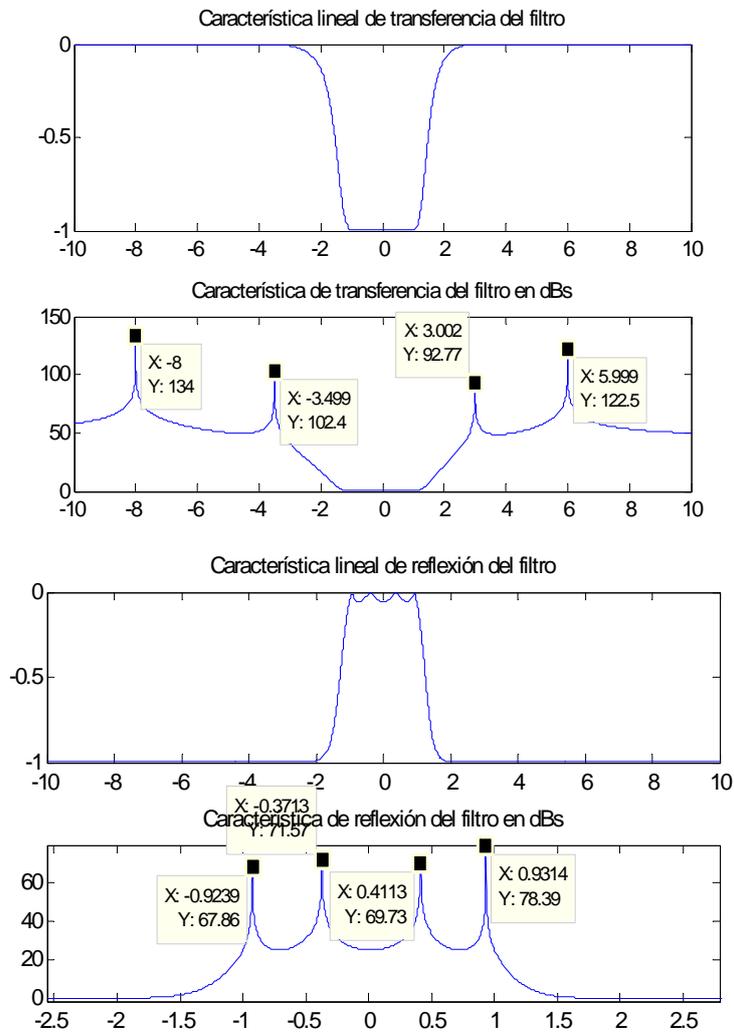


Figura 3. 13. Característica de transferencia y reflexión del filtro *fully canonical* diseñado

También observamos que el nivel de las pérdidas de retorno es de 25 dB, como habíamos especificado:

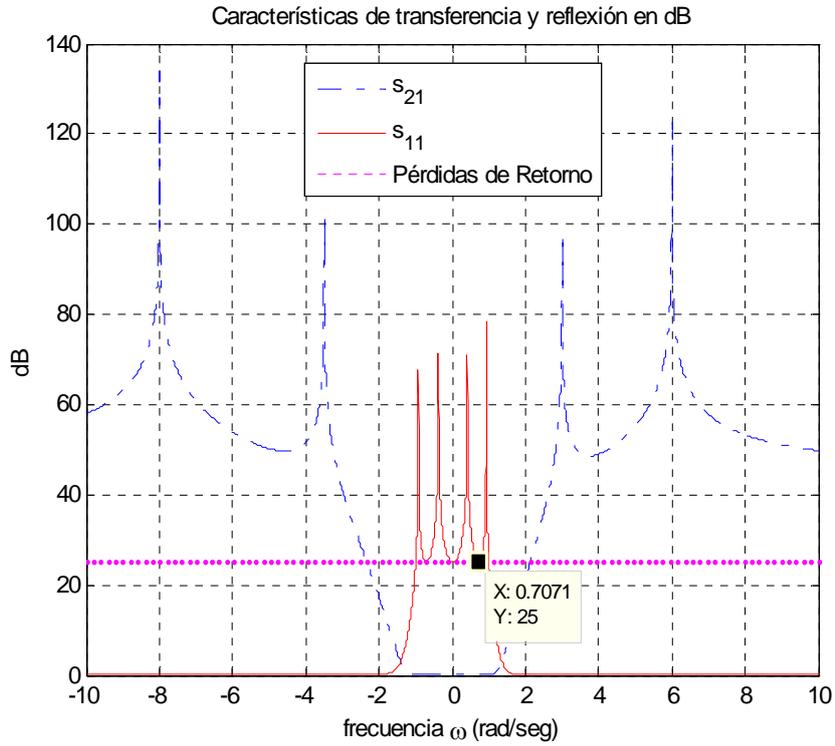


Figura 3. 14. Respuesta frecuencial y nivel de pérdidas de retorno del filtro *fully canonical* diseñado.

Por último, el retardo de grupo viene dado por:

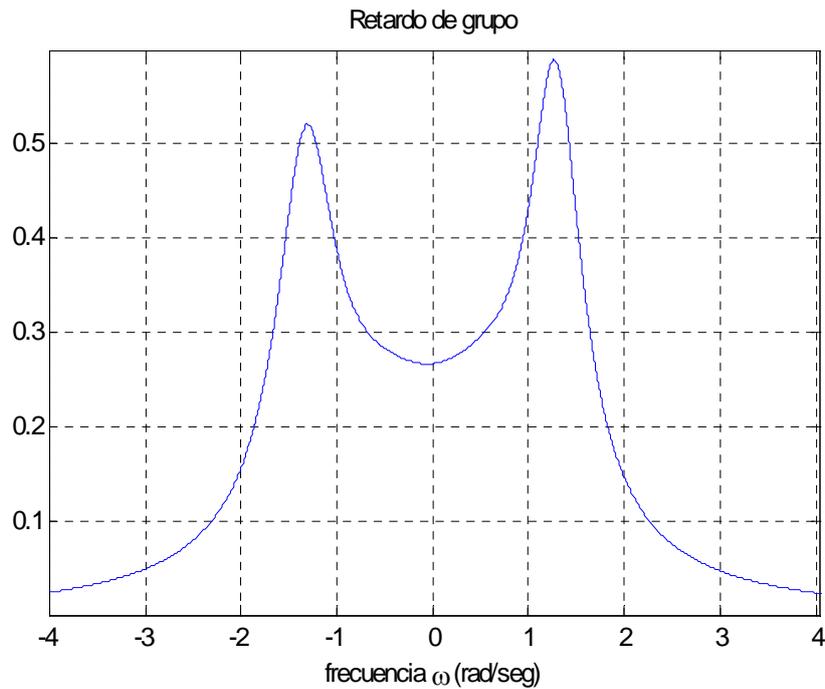


Figura 3. 15. Retardo de grupo del filtro *fully canonical* diseñado.

## 3.6 Extensión a filtros de banda rechazada

En este apartado, vamos a presentar una técnica directa de síntesis de filtros de banda rechazada, extendiendo la técnica hasta ahora vista para filtros paso banda. Consideraremos de nuevo que existe acoplo directo entre carga y fuente mediante un inversor de admitancia para poder generar hasta  $N$  ceros de reflexión, y veremos cómo ahora, para cada diseño, se pueden obtener dos soluciones distintas y válidas de la matriz de acoplo, no relacionadas mediante *similarity transformations* (que veremos en el capítulo siguiente).

### 3.6.1 Relación entre filtros paso banda y banda rechazada.

Las ecuaciones que determinarán la respuesta paso banda de un esquema similar al de la figura 3.1, son idénticas que las que determinan una respuesta del tipo banda rechazada. De hecho, para un filtro *fully canonical* de orden  $N$  con  $N$  ceros de transmisión a frecuencias finitas, la distinción entre un filtro paso banda y un filtro de banda rechazada es meramente cualitativa. Un programa de síntesis de filtros paso banda con acoplo directo entre la fuente y la carga, podremos utilizarlo para sintetizar filtros de banda rechazada. Lo único que se requerirá, será intercambiar los roles de las distintas especificaciones. Las que antes determinaban la respuesta en transmisión del filtro paso banda, serán ahora las que determinen la respuesta en reflexión y viceversa. En un filtro con respuesta paso banda, la síntesis comienza especificando los  $N$  ceros de transmisión y las pérdidas de retorno. Un filtro de banda rechazada cuyo nivel de rechazo en banda sea igual a las pérdidas de retorno de otro filtro paso banda, y cuyos ceros de reflexión sean idénticos a los ceros de transmisión de éste último, puede sintetizarse simplemente intercambiando  $S_{11}$  y  $S_{21}$ . Podemos por tanto, usar esta propiedad para utilizar nuestro programa de síntesis de filtros paso banda canónicos  $N+2$ , para sintetizar filtros de banda rechazada.

Por tanto para pasar de un filtro paso banda *fully canonical* a un filtro de banda rechazada con  $N$  ceros de reflexión, los cambios necesarios serán únicamente los siguientes:

- El polinomio que en paso banda sería  $P(\omega)$  ahora será  $F(\omega)$ .
- El polinomio que en paso banda sería  $F(\omega)$  ahora será  $P(\omega)$ .
- El polinomio que en paso banda sería  $P(s)$  ahora será  $F(s)$ .
- El polinomio que en paso banda sería  $F(s)$  ahora será  $P(s)$ .
- La constante que en paso banda sería  $\varepsilon_R$  ahora será  $\varepsilon$ .
- La constante que en paso banda sería  $\varepsilon$  ahora será  $\varepsilon_R$ .

**Tabla 3. 5. Cambios para pasar de un filtro paso banda a otro de banda rechazada.**

Si no estamos en un filtro de banda rechazada *fully canonical*, es decir, si existe algún cero de reflexión en el infinito, la síntesis requerirá los cambios que acabamos de comentar, pero además, el valor del coeficiente de acoplo directo entre fuente y carga,  $M_{SL}$ , deberá ser igual a uno en magnitud, viniendo su signo determinado en función de si estamos tomando la primera o la segunda solución posible, como veremos a continuación.

### 3.6.2 Solución dual en síntesis de filtros de banda rechazada

Hemos comentado la validez de las ecuaciones vistas para la síntesis de filtros paso banda cuando trabajamos con filtros de banda rechazada, realizando los cambios indicados en la tabla 3.5. Sin embargo, hemos de hacer una aclaración más. Demostramos en la síntesis de filtros paso banda que existían dos soluciones posibles de la matriz de acoplamiento, en función del signo tomado en la ecuación (3.48), pero que sólo aquella en la que tomábamos el signo negativo era válida, puesto que tomando la de signo positivo, los valores de la matriz de acoplo tomaban valores muy altos y por tanto poco prácticos. Veamos un ejemplo:

Si por ejemplo en el diseño de un filtro paso banda de grado 4, con cuatro ceros de transmisión situados en  $-j \cdot 8$ ,  $-j \cdot 3$ ,  $j \cdot 3$  y  $j \cdot 8$ , y unas pérdidas de retorno de 25 dB, utilizamos el valor de acoplo directo  $M_{SL}$  dado por:

$$M_{SL} = \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon_R \pm 1)}{\varepsilon_R} \quad (3.97)$$

y tomamos el signo negativo, obtendremos la siguiente matriz de acoplo:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -0.4383 & 0.4383 & -0.6793 & 0.6793 & 0.0021 \\ -0.4383 & -1.4628 & 0 & 0 & 0 & 0.4383 \\ 0.4383 & 0 & 1.4628 & 0 & 0 & 0.4383 \\ -0.6793 & 0 & 0 & 0.7655 & 0 & 0.6793 \\ 0.6793 & 0 & 0 & 0 & -0.7655 & 0.6793 \\ 0.0021 & 0.4383 & 0.4383 & 0.6793 & 0.6793 & 0 \end{bmatrix}$$

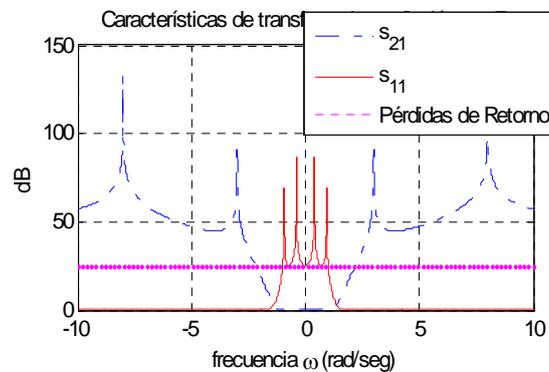


Figura 3. 16. Respuesta en frecuencia del filtro paso banda de orden 4.

Sin embargo, si tomamos el signo negativo en la ecuación (3.97), obtendríamos la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -392.8819 & 392.8819 & 0.6269 & -0.6269 & -485.9811 \\ -392.8819 & 635.3492 & 0 & 0 & 0 & 392.8819 \\ 392.8819 & 0 & -635.3492 & 0 & 0 & 392.8819 \\ 0.6269 & 0 & 0 & 0.8096 & 0 & 0.6269 \\ -0.6269 & 0 & 0 & 0 & -0.8096 & 0.6269 \\ -485.9811 & 392.8819 & 392.8819 & 0.6269 & 0.6269 & 0 \end{bmatrix}$$

Es evidente que esta última matriz, a pesar de conducir a la respuesta del filtro deseada, no es práctica debido al alto valor que toman los distintos acoplamientos .

Una de las ventajas en la síntesis de filtros de banda rechazada, radicarán en la validez práctica de las dos posibles soluciones, tomando el signo positivo o negativo en la expresión de  $M_{SL}$  (3.97).

Concretamente, para cambiar de una matriz de acoplamiento a su matriz dual, debemos invertir los signos de  $S_{21}(s)$  y  $S_{11}(s)$  [3]:

- $F(s)$  pasará a ser  $-F(s)$ .
- $P(s)$  pasará a ser  $-P(s)$ .
- $\varepsilon$  pasará a ser  $-\varepsilon$ .
- $\varepsilon_R$  pasará a ser  $-\varepsilon_R$ .

lo que es equivalente a tomar el signo positivo en (3.97), y cambiar el signo de éste acoplo. Esto se demuestra sabiendo que, como vimos en (3.48-3.55):

$$M_{SL} = \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon_R - 1)}{\varepsilon_R} = \frac{1}{M'_{SL}} = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon \cdot (\varepsilon_R + 1)} \quad (3.98)$$

de donde, si cambiamos el signo de  $\varepsilon$  y  $\varepsilon_R$  para llegar a la solución dual, se deduce que:

$$M_{SL} = \frac{-\varepsilon \cdot (-\varepsilon_R - 1)}{-\varepsilon_R} = -\frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon_R + 1)}{\varepsilon_R} = -\frac{1}{M'_{SL}} \quad (3.99)$$

Vemos por tanto que *el valor  $M_{SL}$  de la matriz de acoplo en la primera solución, tendrá siempre el signo contrario a su equivalente en la segunda solución.*

Por otra parte, el valor de acoplo directo fuente / carga  $M_{SL}$  en filtros de banda rechazada *fully canonical*, será el siguiente:

- Solución 1 → Si  $N-nfz$  es par, entonces  $M_{SL} = +1$
  - Solución 1 → Si  $N-nfz$  es impar, entonces  $M_{SL} = -1$
  - Solución 2 → Si  $N-nfz$  es par, entonces  $M'_{SL} = -1$
  - Solución 2 → Si  $N-nfz$  es impar, entonces  $M'_{SL} = +1$
- (3.100)

Así, forzamos que el coeficiente  $S_{11}(s)$  sea nulo a frecuencias infinitas, ya que según (3.32-3.33), se cumple que:

$$M_{SL} = \sqrt{\frac{1 - |S_{11\infty}|}{1 + |S_{11\infty}|}} \quad (3.101)$$

Y por tanto, para que  $|S_{11\infty}|$  se anule,  $M_{SL}$  debe ser igual a 1 en magnitud, como hemos visto.

### 3.6.3 Ejemplos de síntesis de la matriz $N+2$ . Banda rechazada.

- *Primer ejemplo:* Comencemos con un filtro de banda rechazada de segundo orden con dos ceros de reflexión situados simétricamente en  $\omega = \pm 6$ , y un nivel de rechazo de 20 dB. Estamos por tanto en un caso *fully canonical* ( $N = nfz$ ).

Ceros de tx deseados : Simetría alrededor del eje imaginario

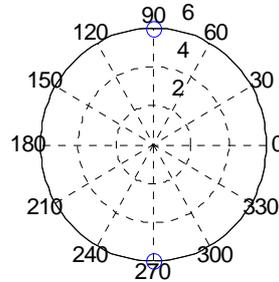


Figura 3. 17. Ceros de transmisión deseados

La respuesta frecuencial de este filtro, en la que podemos apreciar la posición de los ceros de reflexión y de los ceros de transmisión, así como el nivel de rechazo y el orden del filtro, tendrá el siguiente aspecto:

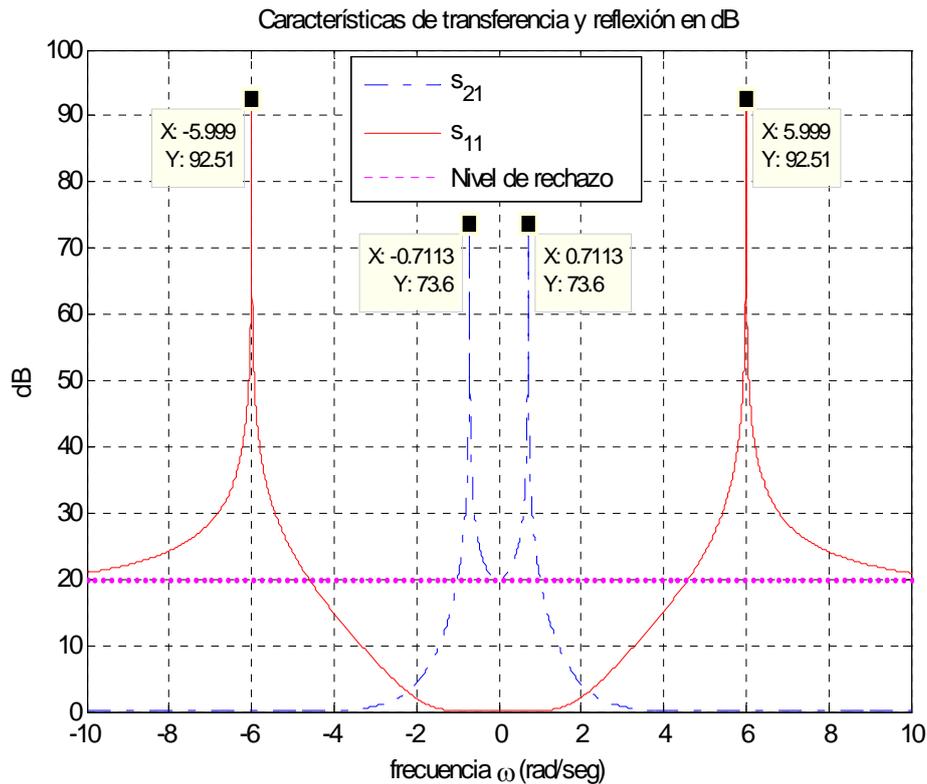


Figura 3. 18. Nivel de rechazo y característica de transferencia y reflexión del filtro en dB.

En cuanto a las dos posibles soluciones obtenidas para la matriz de acoplamiento, tenemos:

○ Solución 1

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1.1880 & 1.1880 & 0.7807 \\ -1.1880 & -3.7507 & 0 & 1.1880 \\ 1.1880 & 0 & 3.7507 & 1.1880 \\ 0.7807 & 1.1880 & 1.1880 & 0 \end{bmatrix}$$

○ Solución 2

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1.2677 & 1.2677 & -1.1499 \\ -1.2677 & -0.1710 & 0 & 1.2677 \\ 1.2677 & 0 & 0.1710 & 1.2677 \\ -1.1499 & 1.2677 & 1.2677 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que el signo del acoplo  $M_{SL}$  es diferente en ambas soluciones, como habíamos comentado. Además, comprobamos la validez práctica de las dos matrices de acoplo que hemos obtenido, debido a que ninguna de ellas tiene coeficientes extremadamente altos. Podría, sin embargo, ser más conveniente la primera matriz debido a que sus acoplos son menores que los de la segunda. Los elementos de la diagonal son meros desplazamientos de frecuencia en las frecuencias de resonancia, y no presentan demasiada dificultad.

- *Segundo ejemplo:* Vamos a contemplar ahora la posibilidad de situar un cero de reflexión en el infinito, y otro en  $\omega = 6$ . Estamos por tanto en un filtro de banda rechazada de segundo orden. El nivel de rechazo lo estableceremos de nuevo en 20 dB.

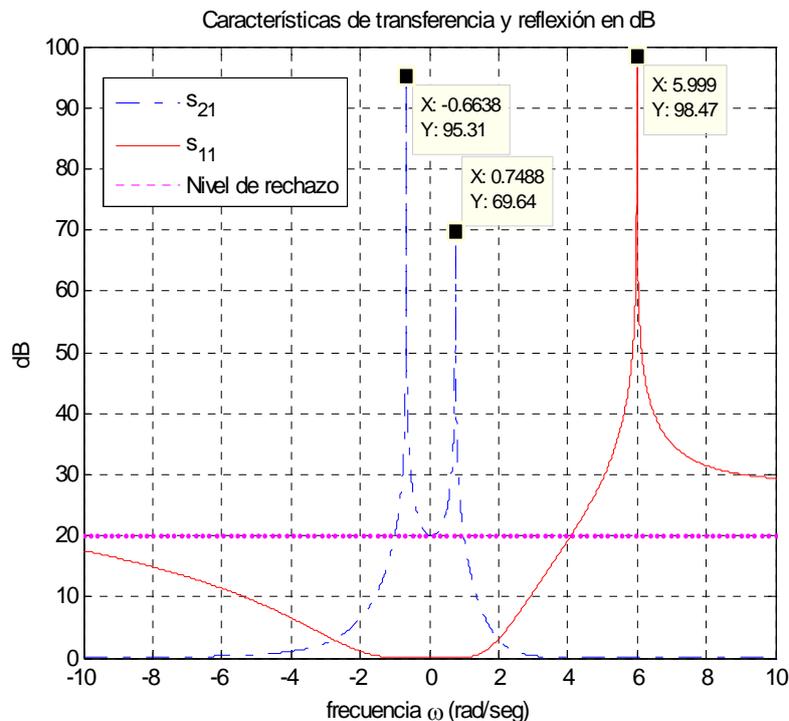


Figura 3. 19. Nivel de rechazo y característica de transferencia y reflexión del filtro en dB.

Las soluciones obtenidas para la matriz de acoplamiento son en este caso:

o Solución 1

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0.7071 & -1.8407 & -1.0000 \\ 0.7071 & -2.2354 & 0 & 1.3904 \\ -1.8407 & 0 & 2.1515 & 0.5341 \\ -1.0000 & 1.3904 & 0.5341 & 0 \end{bmatrix}$$

o Solución 2

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1.3904 & 0.5341 & 1.0000 \\ -1.3904 & -2.2354 & 0 & 0.7071 \\ 0.5341 & 0 & 2.1515 & 1.8407 \\ 1.0000 & 0.7071 & 1.8407 & 0 \end{bmatrix}$$

Vemos que el acoplo  $M_{SL}$  es igual a la unidad debido a que ahora existe un cero de reflexión situado en el infinito. De nuevo,  $M_{SL}$  tiene signo cambiados en ambas soluciones.

Al igual que hemos situado un cero en el infinito, podríamos situar ambos, consiguiendo un filtro de segundo orden sin ningún cero a frecuencias finitas.

- *Tercer ejemplo:* En último lugar, realizaremos un diseño de un filtro de banda rechazada con tres ceros de transmisión a frecuencias finitas, y de quinto orden. Los ceros a frecuencias finitas se sitúan en  $\omega = \pm 4$  y  $\omega = 6$ , y el nivel de rechazo es de 20 dB.

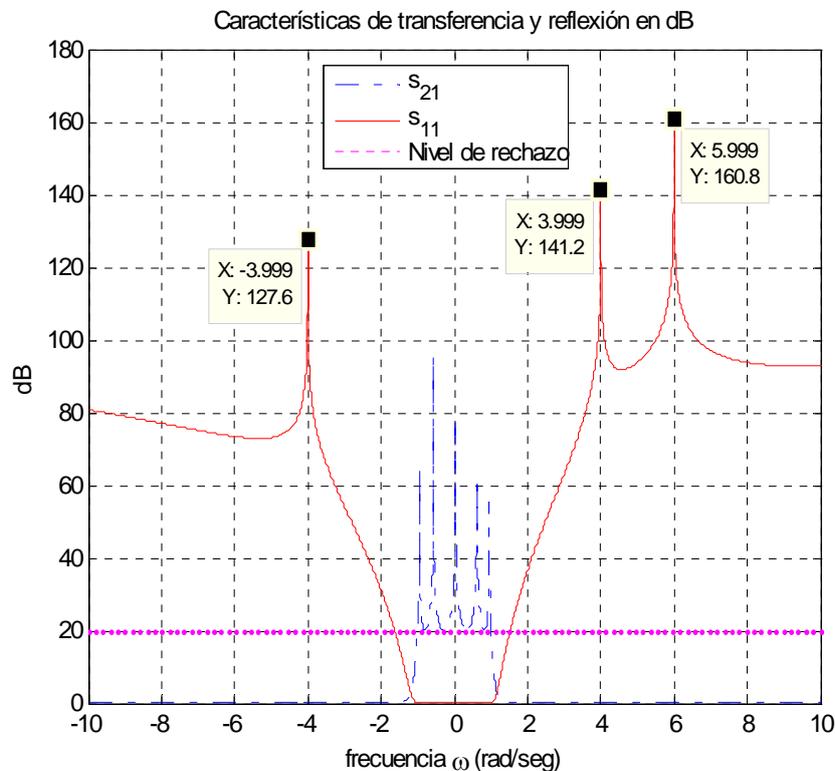


Figura 3. 20. Nivel de rechazo y característica de transferencia y reflexión del filtro en dB.

Las matrices de acoplamiento en este caso son:

○ Solución 1

M=[	0	-0.7762	0.8856	-0.3110	0.4904	-0.5706	1.0000	
	-0.7762	-1.6353	0	0	0	0	0	0.7762
	0.8856	0	1.5179	0	0	0	0	0.8856
	-0.3110	0	0	1.0928	0	0	0	0.3110
	0.4904	0	0	0	-0.5437	0	0	0.4904
	-0.5706	0	0	0	0	-0.5156	0	0.5706
	1.0000	0.7762	0.8856	0.3110	0.4904	0.5706		0]

○ Solución 2

M=[	0	-0.7745	0.8708	-0.2867	0.5163	-0.5855	-1.0000	
	-0.7745	1.6671	0	0	0	0	0	0.7745
	0.8708	0	-1.5336	0	0	0	0	0.8708
	-0.2867	0	0	-1.0920	0	0	0	0.2867
	0.5163	0	0	0	0.4581	0	0	0.5163
	-0.5855	0	0	0	0	0.4164	0	0.5855
	-1.0000	0.7745	0.8708	0.2867	0.5163	0.5855		0]

También en este último ejemplo con un cero en el infinito, conseguimos dos matrices de acoplamiento válidas para el filtro de banda rechazada en cuestión, en las que  $M_{SL}$  tiene distintos signo en cada caso.

### 3.7 Software desarrollado

La implementación de la teoría desarrollada a lo largo de los apartados anteriores, ha dado lugar a un software que permite obtener la matriz de acoplo  $N+2$  de filtros paso banda o banda rechazada a partir de sus especificaciones. Al igual que ocurría con el software desarrollado para la síntesis de matrices  $N \times N$ , el programa es capaz de traducir las frecuencias en Hz que introduzca el usuario a frecuencias normalizadas utilizando la transformación (2.251).

Además, hemos diseñado un software capaz de obtener la respuesta frecuencial del filtro a partir de su matriz de acoplo  $N+2$ , pudiendo así verificar la validez de ésta.

### 3.8 Conclusiones

En este capítulo, hemos desarrollado la teoría necesaria para sintetizar filtros paso banda a partir de determinadas especificaciones. Concretamente, las especificaciones son el orden del filtro, las pérdidas de retorno, y los ceros de transmisión. Tratamos además, la forma de obtener la respuesta frecuencial del filtro a partir de la matriz que obtenemos en dicha síntesis, y por último, completamos este apartado con un ejemplo completo de síntesis  $N+2$ .

Posteriormente, explicamos los cambios que han de realizarse en la síntesis de filtros paso banda para conseguir sintetizar filtros de banda rechazada, y analizamos mediante una serie de ejemplos, las distintas matrices de acoplamiento  $N+2$  obtenidas.



## Capítulo 4

# Diferentes topologías para la implementación práctica de filtros

### 4.1 Introducción

Los elementos de la matriz de acoplo  $M$  que surge del procedimiento de síntesis descrito previamente, tendrán todos, en general, valores distintos de cero.

Los valores no nulos que se produzcan *en los elementos de la diagonal* de redes eléctricamente asimétricas, representarán los ‘offset’ o desplazamientos de la frecuencia central de cada resonancia, mientras que los valores no nulos que se produzcan *en los elementos que no pertenecen a la diagonal de  $M$* , representarán los acoplos entre los distintos nodos resonantes. Esto, es claramente poco práctico, por lo que es usual cancelar los acoplos con una secuencia de transformaciones similares o ‘rotaciones’, hasta llegar a una forma más conveniente de la matriz  $M$ , con un número mínimo de acoplos distintos de cero.

El uso de estas transformaciones similares asegura que los valores y vectores propios de la matriz  $M$  se conservan, de forma que la matriz transformada tendrá exactamente las mismas características de transferencia y reflexión que la matriz original.

Existen varias formas canónicas de la matriz  $M$  más prácticas que la obtenida directamente de la síntesis. La más utilizada, es la llamada *folded form*. Esta forma canónica puede utilizarse directamente, si es conveniente, para obtener los acoplos, o bien utilizarse como punto de partida para la aplicación de más transformaciones que creen una topología alternativa de resonadores interacoplados, óptimamente adaptados a las restricciones físicas y eléctricas de la tecnología con la que el filtro será realizado.

Este capítulo comenzará con la descripción del método para la reducción de la matriz de acoplo a su *folded form*. A continuación, estudiaremos otras dos configuraciones, llamadas *parallel-connected* y *cul-de-sac*. La configuración *parallel-connected* puede obtenerse mediante agrupaciones de residuos que formarán subredes de dos puertos separadas, y que luego se conectarán en paralelo entre las terminaciones de fuente y carga. Por su parte, la configuración *cul-de-sac*, se consigue a partir de la matriz en su forma *folded canonical*, aplicando una serie de rotaciones adicionales.

## 4.2 Topología *Folded Canonical Form*

Vamos a dividir este apartado en tres partes. En la primera, definiremos el concepto de ‘rotaciones’ o ‘similarity transforms’. En la segunda desarrollaremos el procedimiento completo para reducir la matriz de acoplo a su forma canónica utilizando rotaciones, y en la tercera y última veremos algunos ejemplos.

### 4.2.1 Rotaciones y cancelación de elementos de la matriz

Una transformación similar ( *similarity transform*, o *rotación* ) en una matriz de acoplo de tamaño  $N \times N$ , a la que llamaremos  $M_0$ , se lleva a cabo realizando la siguiente operación:

$$M_1 = R_1 \cdot M_0 \cdot R_1^t \quad (4.1)$$

donde  $R_1$  es una matriz de rotación  $N \times N$ , y  $R_1^t$  es su traspuesta. La matriz resultante tras la transformación será  $M_1$ .

Para saber cómo se define la matriz de rotación, hemos de saber que hablar del pivote  $[i, j]$  ( $i \neq j$ ) de  $R_r$ , significa que los elementos  $R_{ii} = R_{jj} = \cos \theta_r$ , y los elementos  $R_{ji} = -R_{ij} = \sin \theta_r$ , siendo  $\theta_r$  el ángulo de rotación, y siempre que se cumpla que ( $i, j \neq 1$  o  $N$ ). El resto de elementos de la matriz serán nulos, excepto los de la diagonal principal, cuyo valor será la unidad.

Por tanto, si por ejemplo estamos hablando del pivote  $[3,5]$  sobre una matriz  $M$  con  $N = 7$ , entonces la matriz  $R_r$  tendrá la siguiente forma:

$$R_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_r & 0 & -\sin \theta_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta_r & 0 & \cos \theta_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Entonces, la transformación de pivote  $[3,5]$ , pasaría por la realización de la siguiente operación :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_r & 0 & -\text{sen} \theta_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen} \theta_r & 0 & \cos \theta_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_r & 0 & \text{sen} \theta_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen} \theta_r & 0 & \cos \theta_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Debido a que los valores propios de la matriz resultante  $M_1$  son exactamente los mismos que los de la matriz original  $M_0$ , se puede aplicar una serie de transformaciones arbitrariamente larga, con pivotes y ángulos arbitrariamente definidos, empezando por  $M_0$ . Cada transformación en la serie tendrá entonces la siguiente forma general:

$$M_r = R_r \cdot M_{r-1} \cdot R_r^t \quad \text{con } r = 1, 2, 3 \dots R \quad (4.4)$$

y analizando la matriz resultante  $M_r$ , al final de la serie de transformaciones, ésta producirá exactamente los mismos valores y vectores propios que la original  $M_0$ .

Cuando una transformación similar de pivote  $[i, j]$ , y ángulo  $\theta_r \neq 0$  se aplica a una matriz de acoplo  $M_{r-1}$ , los elementos de las filas  $i$  y  $j$ , y los elementos de las columnas  $i$  y  $j$  de la matriz resultante  $M_r$ , cambian sus valores respecto a los valores de los elementos correspondientes de la matriz  $M_{r-1}$  previa a la transformación.

Para un elemento  $k$ -ésimo de la fila o columna  $i$  o  $j$  de la matriz  $M_r$ , **que no se encuentre en los elementos cruzados del pivote (es decir, para  $k \neq i, j$ )**, el valor del elemento en cuestión variará según:

$$M'_{ik} = \cos \theta_r \cdot M_{ik} - \text{sen} \theta_r \cdot M_{jk} \quad \text{para un elemento en la fila } i \quad (4.5)$$

$$M'_{jk} = \text{sen} \theta_r \cdot M_{ik} + \cos \theta_r \cdot M_{jk} \quad \text{para un elemento en la fila } j \quad (4.6)$$

$$M'_{ki} = \cos \theta_r \cdot M_{ki} - \text{sen} \theta_r \cdot M_{kj} \quad \text{para un elemento en la columna } i \quad (4.7)$$

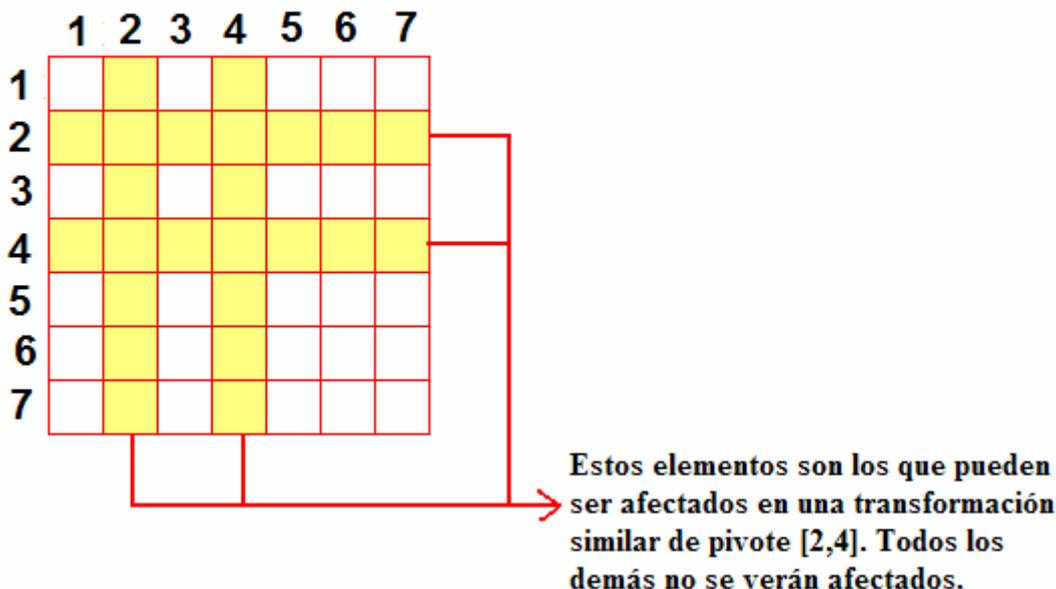
$$M'_{kj} = \text{sen} \theta_r \cdot M_{ki} + \cos \theta_r \cdot M_{kj} \quad \text{para un elemento en la columna } j \quad (4.8)$$

donde  $k(\neq i, j) = 1, 2, 3 \dots N$ .

Vemos que existen dos **propiedades de las transformaciones similares** que podremos utilizar en el proceso de reducción de la matriz:

a) *En el pivote  $[i, j]$  de una transformación, sólo aquellos elementos en las filas y columnas  $i$  y  $j$  podrán ser afectados por la transformación. Todos los demás continuarán con sus valores previos.*

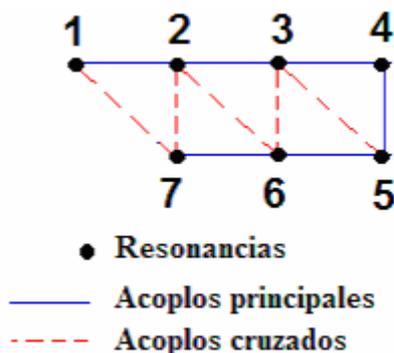
**Matriz de acoplo de grado 7**



**Figura 4. 1. Ejemplo gráfico de la propiedad a).**

b) *Si dos elementos que están enfrentados a través de las filas y columnas del pivote son ambos nulos antes de aplicar la transformación similar, serán nulos tras ella. Por ejemplo, si  $M_{12}$  y  $M_{14}$  son nulos antes de la transformación de pivote  $[2,4]$ , serán nulos tras la transformación, a pesar de encontrarse en una de las filas o columnas  $i$  o  $j$ .*

A continuación, se presenta un ejemplo de grado 7 , y se indica qué acoplos deseamos cancelar en la matriz mediante las transformaciones similares, para una determinada topología:



**Figura 4. 2. Topología que pretendemos conseguir, y representación de los posibles acoplos distintos de cero.**

	1	2	3	4	5	6	7
1	<i>s</i>	<i>m</i>					<i>xa</i>
2	*	<i>s</i>	<i>m</i>			<i>xa</i>	<i>xs</i>
3	*	*	<i>s</i>	<i>m</i>	<i>xa</i>	<i>xs</i>	
4	*	*	*	<i>s</i>	<i>m</i>		
5	*	*	*	*	<i>s</i>	<i>m</i>	
6	*	*	*	*	*	<i>s</i>	<i>m</i>
7	*	*	*	*	*	*	<i>s</i>

**Posibles acoplos distintos de cero:**

- S* Acoplo consigo mismo
- m* Línea principal de acoplo
- xa* Acoplamiento cruzado asimétrico
- xs* Acoplamiento cruzado simétrico
- \*

\* Acoplos simétricos al otro lado de la diagonal principal

**Figura 4. 3. Matriz de acoplo.**

Las ecuaciones (4.5) a (4.8), expuestas para  $M'_{ik}$ ,  $M'_{jk}$ ,  $M'_{ki}$  y  $M'_{kj}$ , pueden utilizarse para cancelar elementos específicos de la matriz de acoplo, es decir, para conseguir anular determinados acoplos. Por ejemplo, para cancelar el elemento  $M'_{15}$  ( y simultáneamente el  $M'_{51}$ ) en la matriz de grado 7, podemos aplicar una transformación de pivote  $[i, j] = [3, 5]$ , por lo que la ecuación a utilizar será la (4.8), definida para un elemento en la columna  $j$ , ya que  $M'_{15}$  se encuentra en la columna 5. El índice  $k$  tomará entonces el valor  $k = 1$ .

Así pues, para anular el elemento  $M'_{kj} = M'_{15}$  debemos igualar su expresión a cero:

$$M'_{15} = \text{sen}\theta_r \cdot M_{13} + \text{cos}\theta_r \cdot M_{15} = 0 \quad (4.9)$$

Si ahora despejamos el ángulo de rotación podremos obtener el valor que éste ha de tener para conseguir cancelar el acoplo deseado:

$$\frac{\text{sen}\theta_r}{\text{cos}\theta_r} \cdot M_{13} + M_{15} = 0 \quad (4.10)$$

$$\text{tg}\theta_r = -\frac{M_{15}}{M_{13}} \quad (4.11)$$

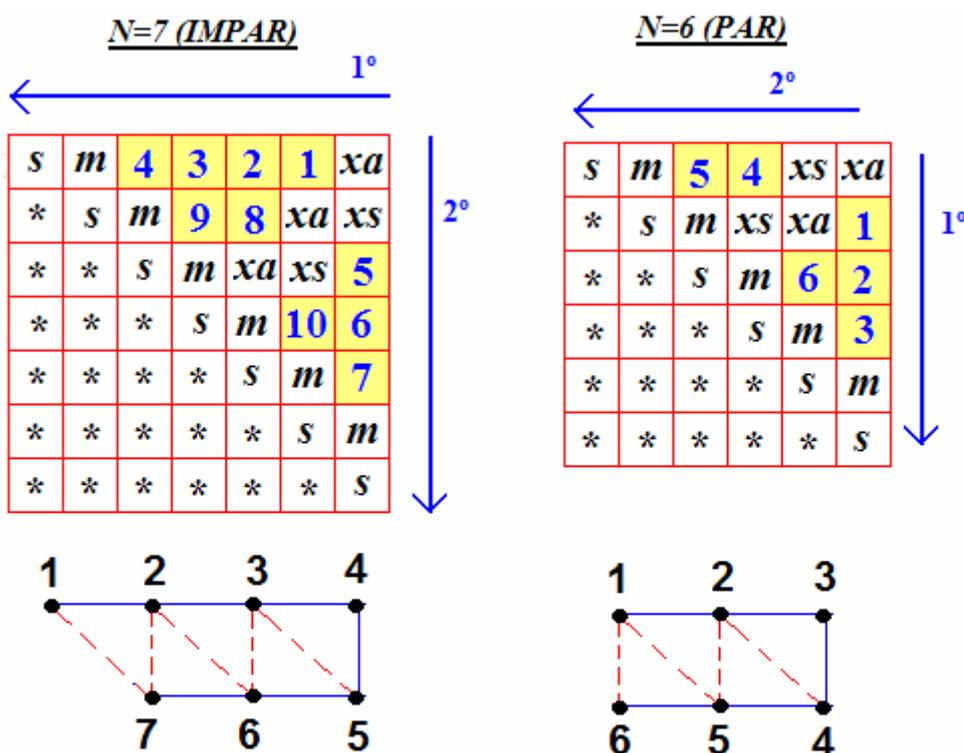
$$\theta_r = \tan^{-1}\left(-\frac{M_{15}}{M_{13}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{M_{15}}{M_{13}}\right) \quad (4.12)$$

Utilizando pues, éste ángulo de rotación y aplicando la transformación similar dada por (4.1), conseguiremos una matriz con los elementos  $M'_{15}$  y  $M'_{51}$  nulos. Además, el resto de elementos de las filas y columnas 3 y 5 podrán haber variado sus valores originales.

El método para reducir la matriz de acoplo  $M_0$  completa a su forma *folded canonical*, implica aplicar una serie de transformaciones similares a  $M_0$  que cancelen los elementos deseados uno por uno. Las transformaciones se aplican en un cierto orden y de una determinada manera, haciendo uso de las dos propiedades mencionadas, y asegurando que una vez cancelado, un elemento no volverá a aparecer por una transformación posterior en la secuencia.

### 4.2.2 Procedimiento para reducir la matriz de acoplo a su forma *folded canonical*

Existe un número de transformaciones que reducirán la matriz completa de acoplo a su forma canónica *folded form*. La secuencia que usaremos aquí, si estamos hablando de una matriz de tamaño  $N \times N$ , en la que  $N$  es impar, elimina alternativamente elementos de derecha a izquierda a lo largo de las filas, y de arriba abajo a lo largo de las columnas, empezando por el elemento de la primera fila y la columna  $N-1$ . Si por el contrario, hablamos de una matriz de tamaño  $N \times N$ , en la que  $N$  es par haremos lo mismo, pero comenzando por las columnas, por lo que el primer elemento a eliminar será el de la última columna situado en la segunda fila. Veámoslo gráficamente para un caso par y un caso impar:



1, 2 .... Significa acoplamiento cancelado como resultado de la primera, segunda, ... transformación de la secuencia

Figura 4. 4. Orden de las cancelaciones de los acoplos para el caso par e impar.

### □ Proceso para un caso impar

Siguiendo con el ejemplo en el que  $N=7$ , comenzaremos por eliminar el elemento  $M_{16}$ . Para ello, podemos utilizar una transformación de pivote  $[i, j]=[5,6]$ . Como el elemento está en la columna  $j$ , la fórmula a utilizar será:

$$M'_{kj} = \text{sen}\theta_r \cdot M_{ki} + \cos\theta_r \cdot M_{kj} \quad (4.13)$$

de donde podemos obtener el ángulo de rotación a utilizar:

$$M'_{16} = \text{sen}\theta_1 \cdot M_{15} + \cos\theta_1 \cdot M_{16} = 0 \quad (4.14)$$

$$\theta_1 = -\tan^{-1}\left(\frac{M_{16}}{M_{15}}\right) \quad (4.15)$$

A continuación eliminaremos el elemento  $M_{15}$ , para lo que podemos utilizar el pivote  $[i, j]=[4,5]$ . La elección de éste pivote asegura que el elemento  $M_{16}$  previamente eliminado no se verá afectado por la transformación, ya que no está ni en las columnas ni en las filas  $i$  y  $j$  ( $4,5 \neq 1,6$ ), por lo que permanecerá a 0. El ángulo de rotación será en este caso:

$$M'_{kj} = \text{sen}\theta_r \cdot M_{ki} + \cos\theta_r \cdot M_{kj} \quad (4.16)$$

$$M'_{15} = \text{sen}\theta_2 \cdot M_{14} + \cos\theta_2 \cdot M_{15} = 0 \quad (4.17)$$

$$\theta_2 = -\tan^{-1}\left(\frac{M_{15}}{M_{14}}\right) \quad (4.18)$$

Ahora, necesitaremos dos transformaciones más para eliminar los elementos  $M_{14}$  y  $M_{13}$  de la primera fila. Para ello utilizaremos respectivamente los pivotes  $[i, j]=[3,4]$  y  $[i, j]=[2,3]$ , asegurando siempre que los elementos previamente eliminados no se vean afectados por nuevas transformaciones.

Tras estas cuatro transformaciones, los elementos de la primera fila de la matriz entre  $M_{12}$  y el  $M_{17}$  serán nulos. Además, debido a la simetría alrededor de la diagonal, los elementos entre el  $M_{21}$  y el  $M_{71}$  de la primera columna, también serán nulos.

<b>S</b>	<b>m</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>xa</b>
*	<b>S</b>	<b>m</b>			<b>xa</b>	<b>xs</b>
<b>0</b>	*	<b>S</b>	<b>m</b>	<b>xa</b>	<b>xs</b>	
<b>0</b>	*	*	<b>S</b>	<b>m</b>		
<b>0</b>	*	*	*	<b>S</b>	<b>m</b>	
<b>0</b>	*	*	*	*	<b>S</b>	<b>m</b>
*	*	*	*	*	*	<b>S</b>

Figura 4. 5. Aspecto de la matriz tras las primeras 4 transformaciones

Seguidamente, eliminaremos los tres elementos de la columna 7:

- ✓ Elemento  $M_{37}$ , para lo que utilizaremos el pivote  $[i, j] = [3, 4]$ . El elemento está en la fila  $i$ , por lo que el ángulo se calcula como:

$$M'_{ik} = \cos \theta_r \cdot M_{ik} - \text{sen} \theta_r \cdot M_{jk} \quad (4.19)$$

$$M'_{37} = \cos \theta_5 \cdot M_{37} - \text{sen} \theta_5 \cdot M_{47} \quad (4.20)$$

$$\theta_5 = \tan^{-1} \left( \frac{M_{37}}{M_{47}} \right) \quad (4.21)$$

- ✓ Elemento  $M_{47}$ , para lo que utilizaremos el pivote  $[i, j] = [4, 5]$ . El elemento está en la fila  $i$ , por lo que el ángulo se calcula como:

$$M'_{ik} = \cos \theta_r \cdot M_{ik} - \text{sen} \theta_r \cdot M_{jk} \quad (4.22)$$

$$M'_{47} = \cos \theta_6 \cdot M_{47} - \text{sen} \theta_6 \cdot M_{57} \quad (4.23)$$

$$\theta_6 = \tan^{-1} \left( \frac{M_{47}}{M_{57}} \right) \quad (4.24)$$

- ✓ Elemento  $M_{57}$ , para lo que utilizaremos el pivote  $[i, j] = [5, 6]$ . El elemento está en la fila  $i$ , por lo que el ángulo se calcula como:

$$M'_{ik} = \cos \theta_r \cdot M_{ik} - \text{sen} \theta_r \cdot M_{jk} \quad (4.25)$$

$$M'_{57} = \cos \theta_7 \cdot M_{57} - \text{sen} \theta_7 \cdot M_{67} \quad (4.26)$$

$$\theta_7 = \tan^{-1} \left( \frac{M_{57}}{M_{67}} \right) \quad (4.27)$$

Como en el caso de la primera fila, ahora la última columna queda con los tres elementos que deseábamos eliminar a cero. El aspecto de la matriz será ahora:

<b>S</b>	<b>m</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>xa</b>
*	<b>S</b>	<b>m</b>				<b>xa xs</b>
<b>0</b>	*	<b>S</b>	<b>m</b>	<b>xa</b>	<b>xs</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	*	*	<b>S</b>	<b>m</b>		<b>0</b>
<b>0</b>	*	*	*	<b>S</b>	<b>m</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	*	*	*	*	<b>S</b>	<b>m</b>
*	*	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	*	<b>S</b>

Figura 4. 6.Aspecto de la matriz tras las primeras 7 transformaciones.

La elección de los tres últimos pivotes se ha hecho de forma que los elementos previamente eliminados no se vieran alterados. Concretamente, los acoplos  $M_{13}$ ,  $M_{14}$ ,  $M_{15}$  y  $M_{16}$  que pusimos a cero en el primer barrido, quedarán a cero porque quedan enfrentados a lo largo de los pivotes que hemos ido tomando en el segundo barrido, y la segunda propiedad de las transformaciones similares, asegura su invariabilidad en este caso. Gráficamente:

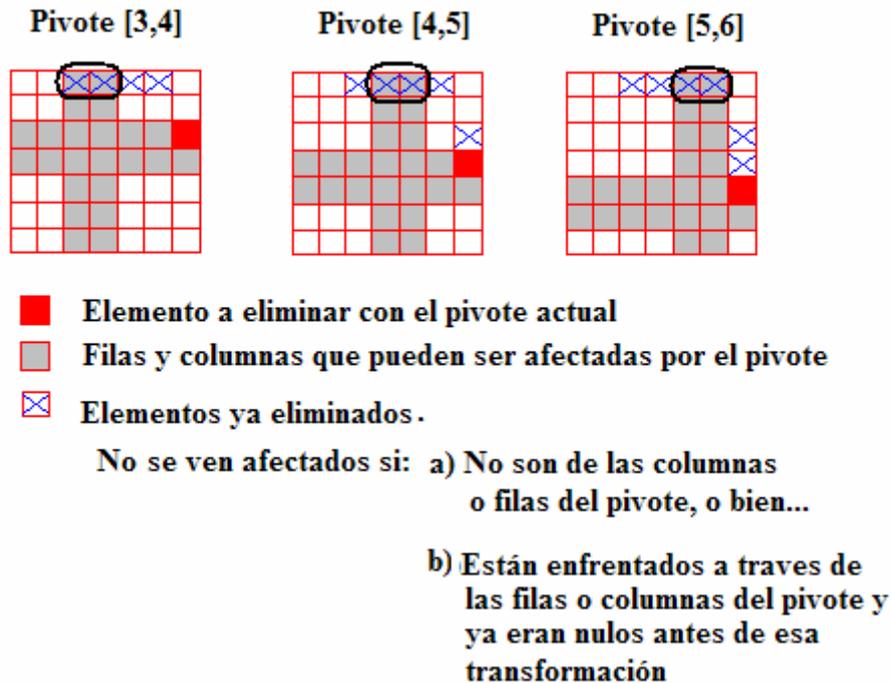


Figura 4. 7. Aspecto de la matriz en cada una de las 3 transformaciones que eliminan los elementos deseados de la última columna.

Si seguimos con un tercer barrido a lo largo de la segunda fila, tendremos que eliminar los siguientes elementos :

- ✓ Elemento  $M_{25}$ , para lo que utilizaremos el pivote  $[i, j] = [4, 5]$ . El elemento está en la columna  $j$ , por lo que el ángulo se calcula como:

$$M'_{kj} = \text{sen}\theta_r \cdot M_{ki} + \text{cos}\theta_r \cdot M_{kj} = 0 \quad (4.28)$$

$$0 = \text{sen}\theta_8 \cdot M_{24} + \text{cos}\theta_8 \cdot M_{25} \quad (4.29)$$

$$\theta_8 = -\tan^{-1}\left(\frac{M_{25}}{M_{24}}\right) \quad (4.30)$$

- ✓ Elemento  $M_{24}$ , para lo que utilizaremos el pivote  $[i, j] = [3, 4]$ . El elemento está en la columna  $j$ , por lo que el ángulo se calcula como:

$$M'_{kj} = \text{sen}\theta_r \cdot M_{ki} + \text{cos}\theta_r \cdot M_{kj} = 0 \quad (4.31)$$

$$0 = \text{sen}\theta_9 \cdot M_{23} + \text{cos}\theta_9 \cdot M_{24} \quad (4.32)$$

$$\theta_9 = -\tan^{-1}\left(\frac{M_{24}}{M_{23}}\right) \quad (4.33)$$

En este punto la matriz tendrá el siguiente aspecto:

<b>S</b>	<b>m</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>xa</b>
*	<b>S</b>	<b>m</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>xa</b>	<b>xs</b>
<b>0</b>	*	<b>S</b>	<b>m</b>	<b>xa</b>	<b>xs</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	*	<b>S</b>	<b>m</b>		<b>0</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	*	*	<b>S</b>	<b>m</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	*	*	*	*	<b>S</b>	<b>m</b>
*	*	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	*	<b>S</b>

Figura 4. 8. Aspecto de la matriz tras 9 transformaciones.

Finalmente, sólo queda eliminar con un último barrido, el elemento  $M_{46}$  en la columna 6. Para ello utilizaremos el pivote  $[i, j] = [4, 5]$ , por lo que se trata de un elemento en la fila  $i$ , lo que nos lleva a:

$$M'_{ik} = \text{cos}\theta_r \cdot M_{ik} - \text{sen}\theta_r \cdot M_{jk} = 0 \quad (4.34)$$

$$\text{cos}\theta_{10} \cdot M_{46} - \text{sen}\theta_{10} \cdot M_{56} = 0 \quad (4.35)$$

$$\theta_{10} = \tan^{-1}\left(\frac{M_{46}}{M_{56}}\right) \quad (4.36)$$

Tras ésta última rotación la matriz ya presentará la forma canónica buscada:

<b>S</b>	<b>m</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>xa</b>
*	<b>S</b>	<b>m</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>xa</b>	<b>xs</b>
<b>0</b>	*	<b>S</b>	<b>m</b>	<b>xa</b>	<b>xs</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	*	<b>S</b>	<b>m</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	*	*	<b>S</b>	<b>m</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	*	*	<b>0</b>	*	<b>S</b>	<b>m</b>
*	*	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	*	<b>S</b>

Figura 4. 9. Aspecto final de la matriz

Podemos resumir el proceso en la siguiente tabla:

N ° de la transformación	Elemento a ser eliminado		Pivote [i, j]	$\theta_r = \tan^{-1}\left(\frac{c \cdot M_{kl}}{M_{mn}}\right)$				
				k	l	m	n	c
1	$M_{16}$	1ª Fila	[5,6]	1	6	1	5	-1
2	$M_{15}$		[4,5]	1	5	1	4	-1
3	$M_{14}$		[3,4]	1	4	1	3	-1
4	$M_{13}$		[2,3]	1	3	1	2	-1
5	$M_{37}$	7ª Columna	[3,4]	3	7	4	7	1
6	$M_{47}$		[4,5]	4	7	5	7	1
7	$M_{57}$		[5,6]	5	7	6	7	1
8	$M_{25}$	2ª Fila	[4,5]	2	5	2	4	-1
9	$M_{24}$		[3,4]	2	4	2	3	-1
10	$M_{46}$	6ª Columna	[4,5]	4	6	5	6	1

**Tabla 4. 1. Resumen del proceso de reducción de la matriz de grado  $N = 7$ .**

Las posiciones y valores finales de los elementos en las diagonales cruzadas de la matriz, se determinan automáticamente (sin necesidad de más acciones específicas). Además, podemos calcular de forma sistemática el ángulo a aplicar en cada transformación y el número total de transformaciones:

$$\theta_r = \tan^{-1}\left(\frac{c \cdot M_{kl}}{M_{mn}}\right) \quad (4.37)$$

$$R = \sum_{n=1}^{N-3} n \quad (4.38)$$

□ **Proceso para un caso par**

Como ya dijimos, en el caso en que  $N$  sea par, por ejemplo  $N = 6$ , se procede de la misma manera, pero comenzando el proceso por la columna  $N$ , siguiendo el orden mostrado en la figura 4.4.

Comenzaremos en este caso por eliminar el elemento  $M_{26}$ . Para ello, podemos utilizar una transformación de pivote  $[i, j] = [2, 3]$ . Como el elemento está en la fila  $i$  la fórmula a utilizar será:

$$M'_{ik} = \cos \theta_r \cdot M_{ik} - \text{sen} \theta_r \cdot M_{jk} \quad (4.39)$$

de donde podemos obtener el ángulo de rotación:

$$M'_{26} = \cos \theta_1 \cdot M_{26} - \text{sen} \theta_1 \cdot M_{36} = 0 \quad (4.40)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{M_{26}}{M_{36}} \right) \quad (4.41)$$

A continuación eliminaremos el elemento  $M_{36}$ , para lo que podemos usaremos el pivote  $[i, j] = [3, 4]$ . La elección de éste pivote asegura que el elemento  $M_{26}$  previamente eliminado no se verá afectado por la transformación, ya que no está ni en las columnas ni en las filas  $i$  y  $j$  ( $3, 4 \neq 2, 6$ ), por lo que permanecerá a 0. El ángulo de rotación será entonces:

$$M'_{ik} = \cos \theta_r \cdot M_{ik} - \text{sen} \theta_r \cdot M_{jk} \quad (4.42)$$

$$M'_{36} = \cos \theta_2 \cdot M_{36} - \text{sen} \theta_2 \cdot M_{46} = 0 \quad (4.43)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left( \frac{M_{36}}{M_{46}} \right) \quad (4.44)$$

Ahora, necesitaremos una última transformación en la última columna, para eliminar el elemento  $M_{46}$ . Utilizaremos para ello el pivote  $[i, j] = [4, 5]$ , asegurando que los elementos previamente eliminados no se ven afectados, puesto que no están en las filas y columnas del pivote que vamos a utilizar:

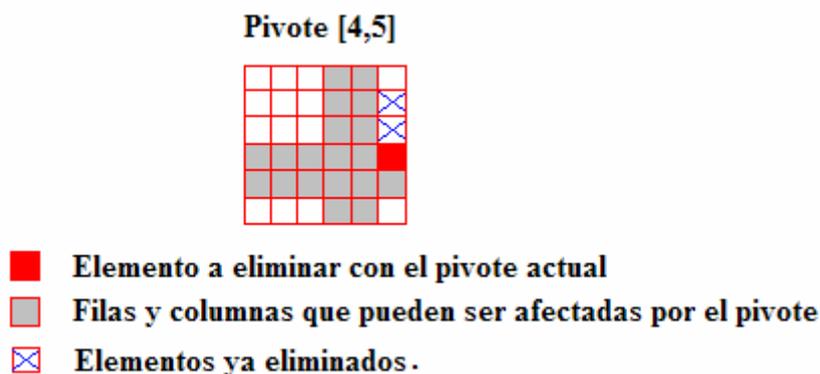


Figura 4. 10. Aspecto de la matriz, al eliminar el elemento  $M_{46}$

El elemento está en la fila  $i$ , por lo que el ángulo de rotación será entonces:

$$M'_{ik} = \cos \theta_r \cdot M_{ik} - \text{sen} \theta_r \cdot M_{jk} \quad (4.45)$$

$$M'_{46} = \cos \theta_3 \cdot M_{46} - \text{sen} \theta_3 \cdot M_{56} = 0 \quad (4.46)$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left( \frac{M_{46}}{M_{56}} \right) \quad (4.47)$$

Tras las tres transformaciones realizadas, los elementos de la primera columna de la matriz, situados entre el  $M_{16}$  y el  $M_{56}$ , serán nulos. Además, por la simetría a ambos lados de la diagonal principal, los elementos entre el  $M_{61}$  y el  $M_{65}$  en la última fila, también serán nulos:

	1	2	3	4	5	6
1	<i>s</i>	<i>m</i>			<i>xs</i>	<i>xa</i>
2	*	<i>s</i>	<i>m</i>	<i>xs</i>	<i>xa</i>	0
3	*	*	<i>s</i>	<i>m</i>		0
4	*	*	*	<i>s</i>	<i>m</i>	0
5	*	*	*	*	<i>s</i>	<i>m</i>
6	*	0	0	0	*	<i>s</i>

Figura 4. 11. Aspecto de la matriz tras las tres primeras transformaciones.

A continuación eliminaremos los dos elementos de la primera fila:

- ✓ El elemento  $M_{14}$ , para lo que utilizaremos el pivote  $[i, j] = [3, 4]$ . El elemento está en la columna  $j$ , por lo que el ángulo se calcula como:

$$M'_{kj} = \text{sen} \theta_r \cdot M_{ki} + \cos \theta_r \cdot M_{kj} \quad (4.48)$$

$$M'_{14} = \text{sen} \theta_4 \cdot M_{13} + \cos \theta_4 \cdot M_{14} = 0 \quad (4.49)$$

$$\theta_4 = -\tan^{-1} \left( \frac{M_{14}}{M_{13}} \right) \quad (4.50)$$

- ✓ Elemento  $M_{13}$ , para lo que utilizaremos el pivote  $[i, j] = [2, 3]$ . El elemento está en la columna  $j$ , por lo que el ángulo se calcula como:

$$M'_{kj} = \text{sen} \theta_r \cdot M_{ki} + \cos \theta_r \cdot M_{kj} \quad (4.51)$$

$$M'_{13} = \text{sen} \theta_5 \cdot M_{12} + \cos \theta_5 \cdot M_{13} = 0 \quad (4.52)$$

$$\theta_5 = -\tan^{-1} \left( \frac{M_{13}}{M_{12}} \right) \quad (4.53)$$

Como en el caso de la última columna, ahora la primera fila queda con los dos elementos que deseábamos eliminar a cero. La elección de los dos últimos pivotes, la hemos hecho de forma que los acoplos  $M_{26}$ ,  $M_{36}$  y  $M_{46}$  que pusimos a cero en el primer barrido, no se vieran afectados, ya que quedan enfrentados a lo largo de las filas de los pivotes y por tanto la segunda propiedad de las transformaciones similares, asegura su invariabilidad. Gráficamente:

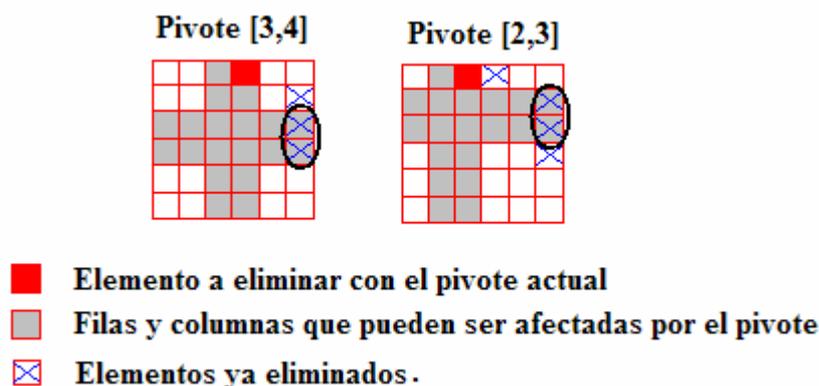


Figura 4. 12. Aspecto de la matriz, al eliminar los elementos  $M_{14}$  y  $M_{13}$

El aspecto de la matriz será entonces:

	1	2	3	4	5	6
1	$s$	$m$	0	0	$xs$	$xa$
2	*	$s$	$m$	$xs$	$xa$	0
3	0	*	$s$	$m$		0
4	0	*	*	$s$	$m$	0
5	*	*	*	*	$s$	$m$
6	*	0	0	0	*	$s$

Figura 4. 13. Aspecto de la matriz tras las primeras 5 transformaciones

Nos queda entonces un último barrido, con el que eliminaremos el último elemento:

- ✓ Elemento  $M_{35}$ , para lo que utilizaremos el pivote  $[i, j] = [3, 4]$ . El elemento está en la fila  $i$ , por lo que el ángulo se calcula como:

$$M'_{ik} = \cos \theta_r \cdot M_{ik} - \text{sen} \theta_r \cdot M_{jk} \quad (4.54)$$

$$M'_{35} = \cos \theta_6 \cdot M_{35} - \text{sen} \theta_6 \cdot M_{45} = 0 \quad (4.55)$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left( \frac{M_{35}}{M_{45}} \right) \quad (4.56)$$

Tras la última rotación la matriz presentará la forma canónica que buscábamos:

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<i>s</i>	<i>m</i>	0	0	<i>xs</i>	<i>xa</i>
<b>2</b>	*	<i>s</i>	<i>m</i>	<i>xs</i>	<i>xa</i>	0
<b>3</b>	0	*	<i>s</i>	<i>m</i>	0	0
<b>4</b>	0	*	*	<i>s</i>	<i>m</i>	0
<b>5</b>	*	*	0	*	<i>s</i>	<i>m</i>
<b>6</b>	*	0	0	0	*	<i>s</i>

Figura 4. 14. Aspecto final de la matriz

La tabla que resume el proceso de reducción de la matriz de acoplo cuando  $N = 6$ , es la siguiente:

N ° de la transformación	Elemento a ser eliminado		Pivote [i, j]	$\theta_r = \tan^{-1}\left(\frac{c \cdot M_{kl}}{M_{mn}}\right)$				
				<b>k</b>	<b>l</b>	<b>m</b>	<b>n</b>	<b>c</b>
1	$M_{26}$	6 <sup>a</sup> Columna	[2,3]	2	6	3	6	1
2	$M_{36}$		[3,4]	3	6	4	6	1
3	$M_{46}$		[4,5]	4	6	5	6	1
4	$M_{14}$	1 <sup>a</sup> Fila	[3,4]	1	4	1	3	-1
5	$M_{13}$		[2,3]	1	3	1	2	-1
6	$M_{35}$	5 <sup>a</sup> Columna	[3,4]	3	5	4	5	1

Tabla 4. 2. Resumen del proceso de reducción de la matriz de grado  $N = 6$ .

El diseño regular y el orden del procedimiento de eliminación de los acoplos, nos ha permitido programar de forma sencilla el proceso de reducción de la matriz de acoplo para cualquier grado de la matriz, par o impar.

### 4.2.3 Ejemplos

- *Primer ejemplo:* Comencemos con un filtro paso banda de dos terminaciones de grado impar, por ejemplo  $N = 5$ . Las especificaciones son unas pérdidas de retorno de 25 dB y los ceros de transmisión están situados en  $\omega_1 = -3.5$ ,  $\omega_2 = 2.5$ , y  $\omega_3 = 5.5$ . La matriz de acoplo sintetizada será  $N+2$  y por tanto tendrá un tamaño  $7 \times 7$ .

La respuesta frecuencial y la matriz son las siguientes:

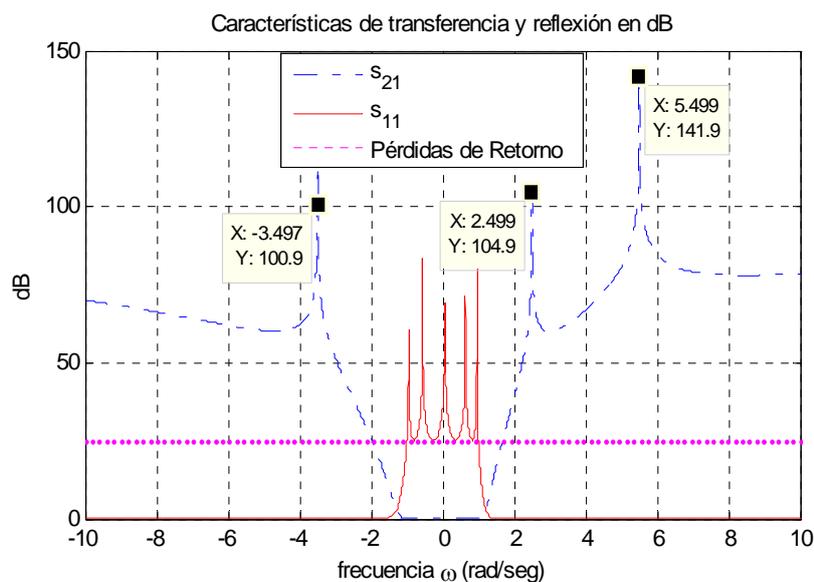


Figura 4. 15. Nivel de rechazo y característica de transferencia y reflexión en dB

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0.4020 & 0.3720 & -0.5372 & -0.5793 & 0.5694 & 0 \\ 0.4020 & 1.3833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4020 \\ 0.3720 & 0 & -1.3254 & 0 & 0 & 0 & 0.3720 \\ -0.5372 & 0 & 0 & -1.0409 & 0 & 0 & 0.5372 \\ -0.5793 & 0 & 0 & 0 & 0.9418 & 0 & 0.5793 \\ 0.5694 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1133 & 0.5694 \\ 0 & 0.4020 & 0.3720 & 0.5372 & 0.5793 & 0.5694 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora vamos de reducir ésta matriz transversal  $N+2$  a su forma *folded canonical*. Según hemos visto en el desarrollo teórico, la matriz resultante debería presentar la siguiente forma:

$S$	$m$	0	0	0	0	$xa$
*	$S$	$m$	0	0	$xa$	$xs$
0	*	$S$	$m$	$xa$	$xs$	0
0	0	*	$S$	$m$	0	0
0	0	*	*	$S$	$m$	0
0	*	*	0	*	$S$	$m$
*	*	0	0	0	*	$S$

Figura 4. 16. Folded form para una matriz 7x7

Realizando el proceso descrito, llegamos efectivamente a la matriz canónica, en la que hemos anulado los acoplos deseados:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1.1173 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0 \\ 1.1173 & 0.0153 & -0.9666 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0098 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.9666 & 0.0199 & 0.6573 & 0.1509 & 0.0443 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.6573 & -0.2388 & 0.6882 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1509 & 0.6882 & 0.0338 & -0.9656 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0098 & 0.0443 & 0.0000 & -0.9656 & 0.0153 & 1.1173 \\ 0 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 1.1173 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene los mismos autovalores que la matriz transversal  $N+2$ , y conduce a la misma respuesta frecuencial del filtro, mostrada en la figura 4.15. Además, esta matriz se corresponden con la topología:

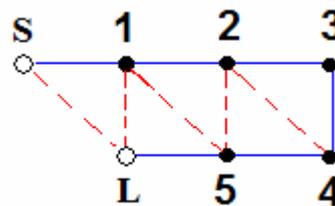


Figura 4. 17. Red *folded canonical* de orden 5

- *Segundo ejemplo:* En este caso vamos a sintetizar un filtro de dos terminaciones paso banda, y de grado par, por ejemplo  $N = 4$ , pero esta vez utilizando la matriz de acoplo  $N \times N$ , por lo que la matriz que tendremos que transformar a su forma *folded canonical* será de tamaño  $4 \times 4$ . El único cero de transmisión está situado en  $\omega = -3$ , y existen unas pérdidas de retorno de 25 dB. La respuesta frecuencial de este filtro, y la matriz  $N \times N$  que obtenemos son:

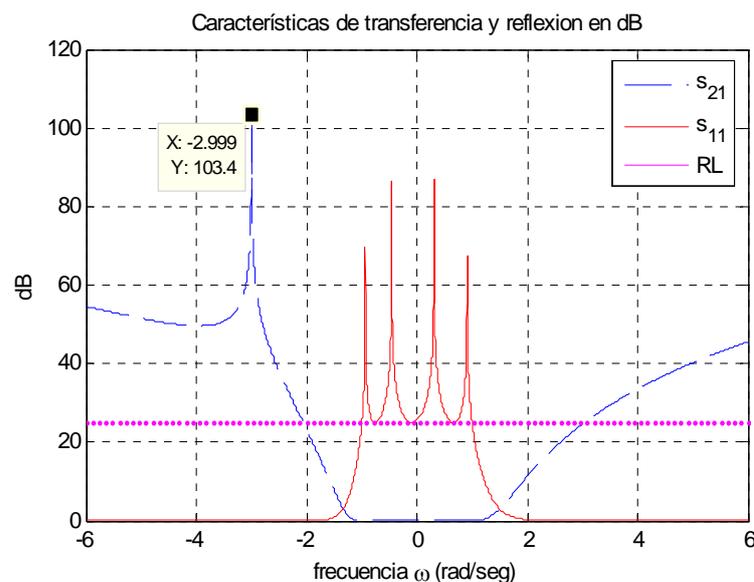


Figura 4. 18. Nivel de pérdidas de retorno en dB y función de transferencia y reflexión del filtro

$$M = \begin{bmatrix} -0.0417 & 0.8273 & 0.6301 & 0.0000 \\ 0.8273 & -0.6357 & 0.0000 & 0.8273 \\ 0.6301 & 0.0000 & 0.8907 & -0.6301 \\ -0.0000 & 0.8273 & -0.6301 & -0.0417 \end{bmatrix}$$

con un valor de las resistencias de fuente y carga igual a  $1.3252 \Omega$ .

Ahora vamos de reducir ésta matriz  $N \times N$  a su forma *folded canonical*. Según hemos visto en el desarrollo teórico, la matriz resultante debería presentar la siguiente forma:

$S$	$m$	$xS$	$x\alpha$
*	$S$	$m$	0
*	*	$S$	$m$
*	0	*	$S$

Figura 4. 19. *Folded form* para una matriz 4x4

Realizando el procedimiento explicado en apartados anteriores, llegamos efectivamente a la matriz canónica, en la que hemos anulado los acoplos deseados:

$$M = \begin{bmatrix} -0.0417 & 1.0025 & -0.2764 & 0 \\ 1.0025 & 0.3303 & 0.7358 & 0 \\ -0.2764 & 0.7358 & -0.0753 & -1.0399 \\ 0 & 0 & -1.0399 & -0.0417 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene los mismos autovalores que la matriz previa  $N \times N$ , y conduce a la misma respuesta frecuencial, mostrada en la figura 4.18. Sin embargo, la matriz *folded canonical* permite una implementación directa en la siguiente topología:

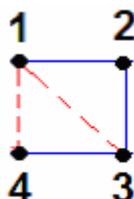


Figura 4. 20. Red *folded canonical* de orden 4

### 4.3 Topología *Parallel Connected*

Las funciones de filtrado pueden separarse en grupos y subredes que más tarde se conectarán en paralelo para recuperar las características de filtrado originales. En esto precisamente, se basa la configuración *parallel-connected*, en la que se forman agrupaciones de residuos que darán lugar a subredes de dos puertos separadas, y que posteriormente se conectarán en paralelo entre las terminaciones de fuente y carga.

Aunque la elección del agrupamiento de los residuos es arbitraria, nos daremos cuenta que si no restringimos la elección de la función de filtrado y los grupos de residuos que tomamos, se crearán acoplos difíciles de realizar dentro de las subredes, y entre los nodos internos de éstas y las terminaciones de fuente / carga. Estas restricciones son:

- Las funciones de filtrado pueden ser *fully canonical*, pero necesariamente deben ser simétricas y de grado par.
- Los grupos de residuos deben consistir en pares complementarios de residuos y valores propios. Es decir, si los residuos con índices  $i$  y  $j$  ( $r_{22i}$ ,  $r_{21i}$ ,  $r_{22j}$  y  $r_{21j}$ ) constituyen un grupo o una parte de un grupo, entonces:

$$\begin{aligned} r_{22i} &= r_{22j} \\ r_{21i} &= -r_{21j} \end{aligned} \tag{4.57}$$

Esto implica que sólo las redes con dos terminaciones del mismo valor, se podrán sintetizar.

Si se cumplen estas restricciones, la red global consistirá en un determinado número de redes de dos puertos, concretamente, el número correspondiente al número de grupos en que se han dividido los residuos. Cada red de dos puertos estará conectada en paralelo entre los terminales de fuente y carga, y si la función de filtrado es *fully canonical*, el acoplo directo fuente-carga  $M_{SL}$  también estará presente.

Una vez que los residuos han sido divididos en grupos, la síntesis de las submatrices y su reducción a la forma canónica sigue exactamente el mismo proceso que para una red individual, como se describe en el capítulo 3 y en la primera parte del presente capítulo. Vamos a ver todo esto con dos ejemplos.

#### 4.3.1 Ejemplo con dos subredes de grado 2.

Para ilustrar el proceso, tomaremos un ejemplo paso banda con una característica de cuarto grado, 22 dB de pérdidas de retorno, y dos ceros de transmisión simétricamente situados a frecuencias  $\omega = \pm 2$ . Este filtro se sintetizará como dos subredes, ambas de grado dos.

Siguiendo el proceso explicado en el capítulo anterior, se obtienen los siguientes residuos y valores propios:

$k$	Valores propios	Residuos		Vectores	
	$\lambda_k$	$r_{22k}$	$r_{21k}$	$T_{Nk} = \sqrt{r_{22k}}$	$T_{1k} = r_{21k} / \sqrt{r_{22k}}$
1	1.3394	0.1484	0.1484	0.3852	-0.3852
2	-1.3394	0.1484	-0.1484	0.3852	0.3852
3	0.7374	0.4222	-0.4222	0.6498	0.6498
4	-0.7374	0.4222	0.4222	0.6498	-0.6498

Tabla 4. 3. Residuos valores propios y vectores  $T_{1k}$  y  $T_{Nk}$ .

Según la condición (4.57) , podemos tomar el grupo de residuos 1 y 2, y el grupo de residuos 3 y 4 para dividir la red en dos subredes.

El agrupamiento de los residuos  $k = 1$  y  $k = 2$  da lugar a la siguiente matriz 4x4:

	<b>S</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>L</b>
<b>S</b>	0	-0.3852	0.3852	0
<b>1</b>	-0.3852	-1.3394	0	0.3852
<b>2</b>	0.3852	0	1.3394	0.3852
<b>L</b>	0	0.3852	0.3852	0

Si aplicamos el procedimiento para reducir esta matriz a su forma *folded canonical*, tenemos la siguiente matriz:

	<b>S</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>L</b>
<b>S</b>	0	-0.5447	0.0000	0
<b>1</b>	-0.5447	0.0000	-1.3394	0.0000
<b>2</b>	0.0000	-1.3394	-0.0000	0.5447
<b>L</b>	0	0.0000	0.5447	0

que se corresponde con la siguiente topología:

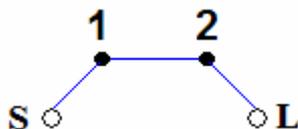


Figura 4. 21. Topología de la primera subred. Residuos  $k = 1$  y  $k = 2$

El agrupamiento de los residuos  $k = 3$  y  $k = 4$  da lugar a la siguiente matriz 4x4:

	S	3	4	L
S	0	0.6498	-0.6498	0
3	0.6498	-0.7374	0	0.6498
4	-0.6498	0	0.7374	0.6498
L	0	0.6498	0.6498	0

Si le aplicamos también a esta matriz el procedimiento para llegar a su forma *folded canonical*, obtenemos:

	S	3	4	L
S	0	0.9189	-0.0000	0
3	0.9189	-0.0000	-0.7374	0
4	-0.0000	-0.7374	0	0.9189
L	0	0	0.9189	0

que se corresponde con la topología:

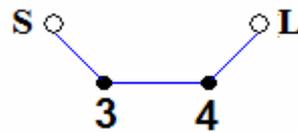


Figura 4. 22. Topología de la segunda subred. Residuos  $k = 3$  y  $k = 4$

Si a continuación superponemos las matrices canónicas correspondientes a las topologías de las figuras 4.21 y 4.22, llegaremos a la matriz que representa la topología buscada. Dicha matriz y topología son:

	S	1	2	3	4	L
S	0	-0.5447	0	0.9189	0	0
1	-0.5447	0	-1.3394	0	0	0
2	0	-1.3394	0	0	0	0.5447
3	0.9189	0	0	0	-0.7374	0
4	0	0	0	-0.7374	0	0.9189
L	0	0	0.5447	0	0.9189	0

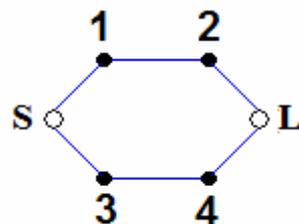


Figura 4. 23. Topología de la red total.

El resultado del análisis de la matriz global que acabamos de obtener, así como el retardo de grupo, se muestran a continuación:

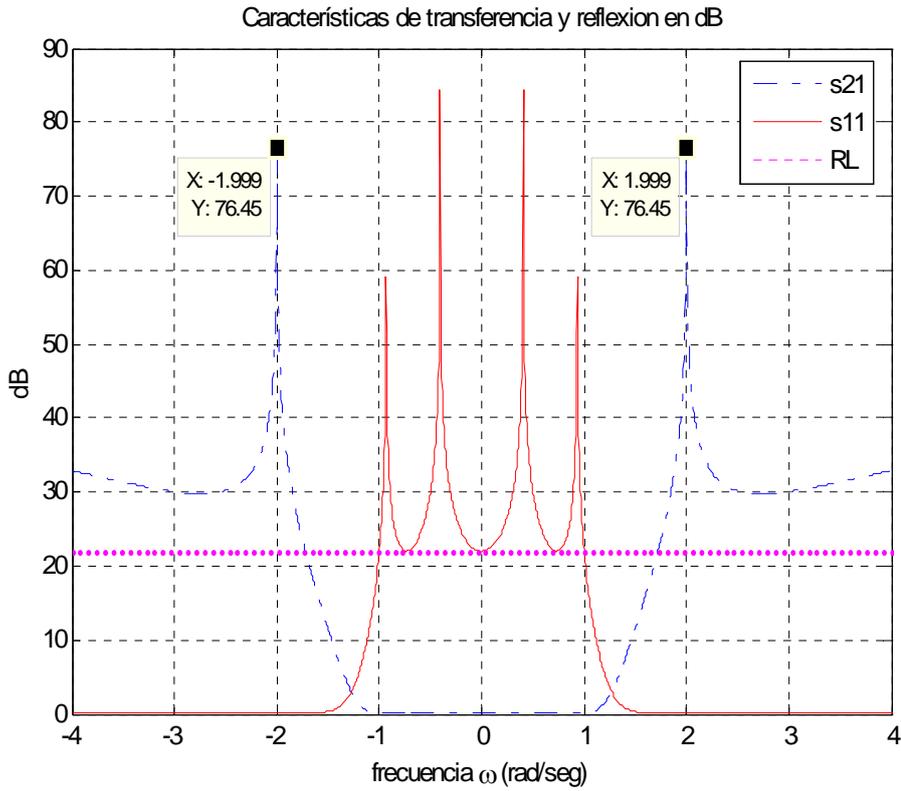


Figura 4. 24. Nivel de pérdidas de retorno, y característica de transferencia y reflexión en dB

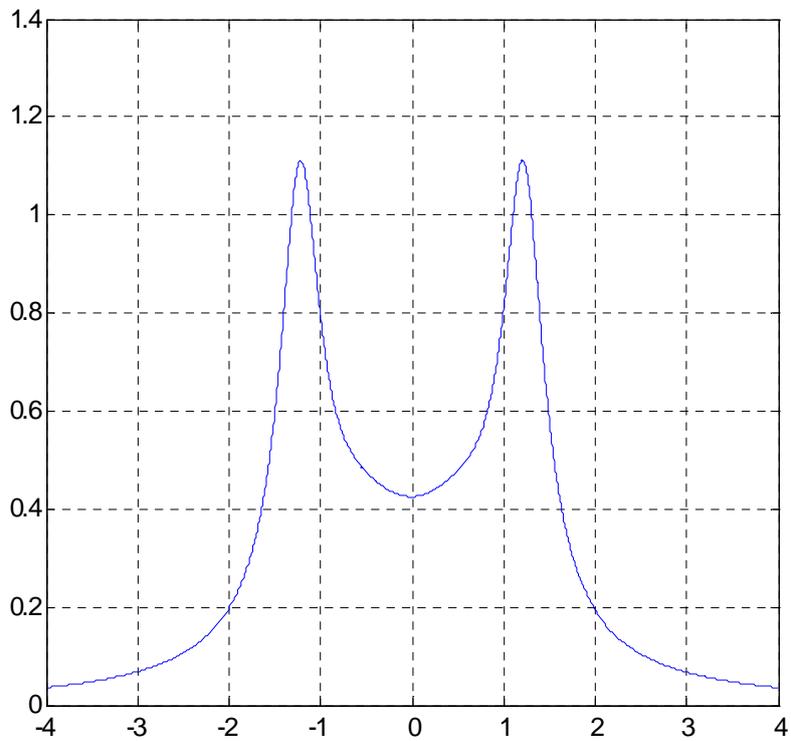


Figura4 25. Retardo de grupo

### 4.3.2 Ejemplo con una subred de grado 4 y otra de grado 2.

En este caso, tomaremos un ejemplo paso banda con una característica de grado seis, 25 dB de pérdidas de retorno, y dos ceros de transmisión simétricamente situados a frecuencias  $\omega = \pm 1.5$ . Añadiremos además dos ceros que tienen únicamente parte real en el plano complejo, para ecualizar el filtro, y conseguir un retardo de grupo plano en la banda de paso. Este filtro se sintetizará como dos subredes, una de cuarto grado, y otra de grado dos.

De nuevo, siguiendo el proceso explicado en el capítulo anterior, se obtienen los siguientes residuos y valores propios:

$k$	Valores propios	Residuos		Vectores	
	$\lambda_k$	$r_{22k}$	$r_{21k}$	$T_{Nk} = \sqrt{r_{22k}}$	$T_{1k} = r_{21k} / \sqrt{r_{22k}}$
1	1.2700	0.1144	0.1144	0.3382	-0.3382
2	-1.0978	0.2569	0.2569	0.5069	-0.5069
3	1.0978	0.2569	-0.2569	0.5069	0.5069
4	0.3787	0.2335	0.2335	0.4832	-0.4832
5	-0.3787	0.2335	-0.2335	0.4832	0.4832
6	-1.2700	0.1144	-0.1144	0.3382	0.3382

Tabla 4. 4. Residuos valores propios y vectores  $T_{1k}$  y  $T_{Nk}$ .

Según la condición (4.57), podemos tomar, por ejemplo el grupo de residuos 1 y 6, y el grupo de residuos 2, 3, 4 y 5 para dividir la red en dos subredes.

El agrupamiento de los residuos  $k = 1$  y  $k = 6$  da lugar a la siguiente matriz 4x4:

	<b>S</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>L</b>
<b>S</b>	0	-0.3382	0.3382	0
<b>1</b>	-0.3382	-1.2700	0	0.3382
<b>6</b>	0.3382	0	1.2700	0.3382
<b>L</b>	0	0.3382	0.3382	0

Aplicando el procedimiento para reducir esta matriz a su forma *folded canonical*, tenemos la siguiente matriz:

	<b>S</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>L</b>
<b>S</b>	0	-0.4783	0.0000	0
<b>1</b>	-0.4783	0.0000	-1.2700	-0.0000
<b>6</b>	0.0000	-1.2700	-0.0000	0.4783
<b>L</b>	0	-0.0000	0.4783	0

que se corresponde con la siguiente topología:

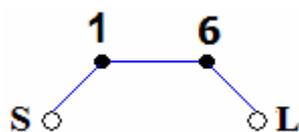


Figura 4. 26. Topología de la primera subred. Residuos  $k = 1$  y  $k = 6$

Por otra parte, el agrupamiento de los residuos  $k = 2$ ,  $k = 3$ ,  $k = 4$  y  $k = 5$  da lugar a la siguiente matriz 6x6:

	S	2	3	4	5	L
S	0	-0.5069	0.5069	-0.4832	0.4832	0
2	-0.5069	1.0978	0	0	0	0.5069
3	0.5069	0	-1.0978	0	0	0.5069
4	-0.4832	0	0	-0.3787	0	0.4832
5	0.4832	0	0	0	0.3787	0.4832
L	0	0.5069	0.5069	0.4832	0.4832	0

Si aplicamos el procedimiento para llegar a la matriz en su forma *folded canonical*, obtenemos:

	S	2	3	4	5	L
S	0	-0.9904	-0.0000	0.0000	-0.0000	0
2	-0.9904	0.0000	-0.7374	0.0000	0.3948	0.0000
3	-0.0000	-0.7374	-0.0000	-0.3243	0.0000	-0.0000
4	0.0000	0.0000	-0.3243	-0.0000	0.7374	-0.0000
5	-0.0000	0.3948	0.0000	0.7374	0.0000	0.9904
L	0	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.9904	0

y esta matriz, se corresponde a la siguiente topología:

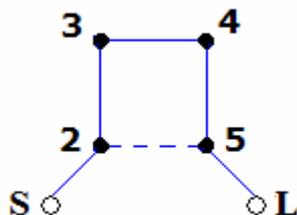


Figura 4. 27. Topología de la segunda subred. Residuos  $k = 2$ ,  $k = 3$ ,  $k = 4$  y  $k = 5$

Si a continuación superponemos las matrices canónicas correspondientes a las topologías de las figuras 4.26 y 4.27, llegaremos a la matriz que representa la topología buscada.

La matriz total y su topología son:

	S	1	2	3	4	5	6	L
S	0	-0.4783	-0.9904	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0
1	-0.4783	0.0000	0	0	0	0	-1.2700	-0.0000
2	-0.9904	0	0.0000	-0.7374	0.0000	0.3948	0	0.0000
3	-0.0000	0	-0.7374	-0.0000	-0.3243	0.0000	0	-0.0000
4	0.0000	0	0.0000	-0.3243	-0.0000	0.7374	0	-0.0000
5	-0.0000	0	0.3948	0.0000	0.7374	0.0000	0	0.9904
6	0.0000	-1.2700	0	0	0	0	-0.0000	0.4783
L	0	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.9904	0.4783	0

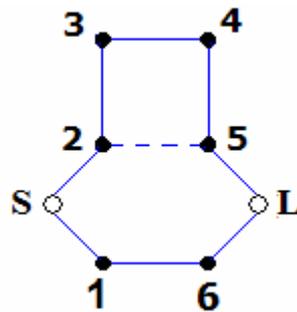


Figura 4. 28. Topología de la red total.

El resultado del análisis de esta última matriz, así como el retardo de grupo, se muestran a continuación:

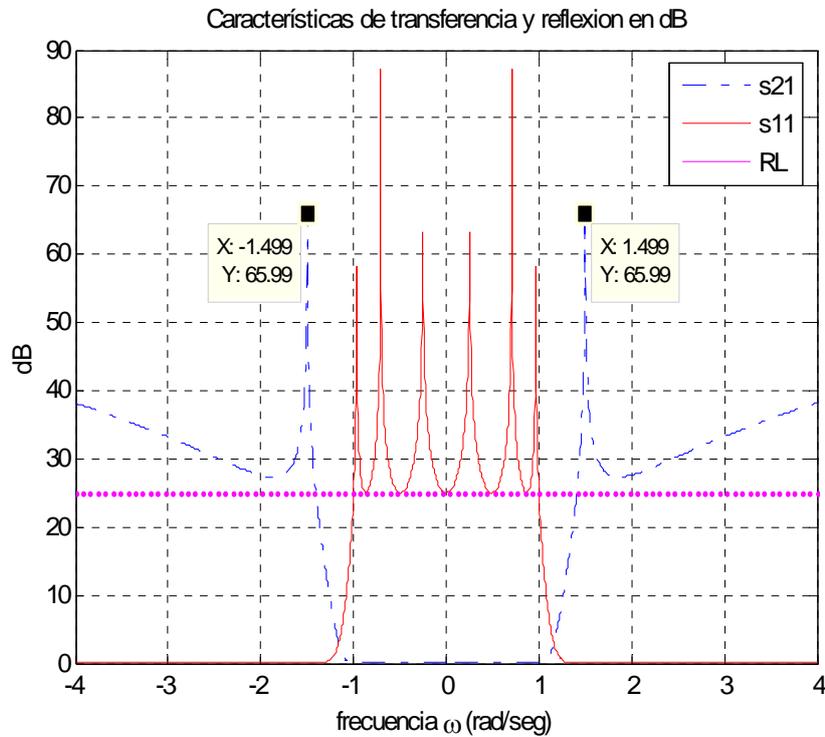


Figura 4. 29. Nivel de pérdidas de retorno, y característica de transferencia y reflexión en dB

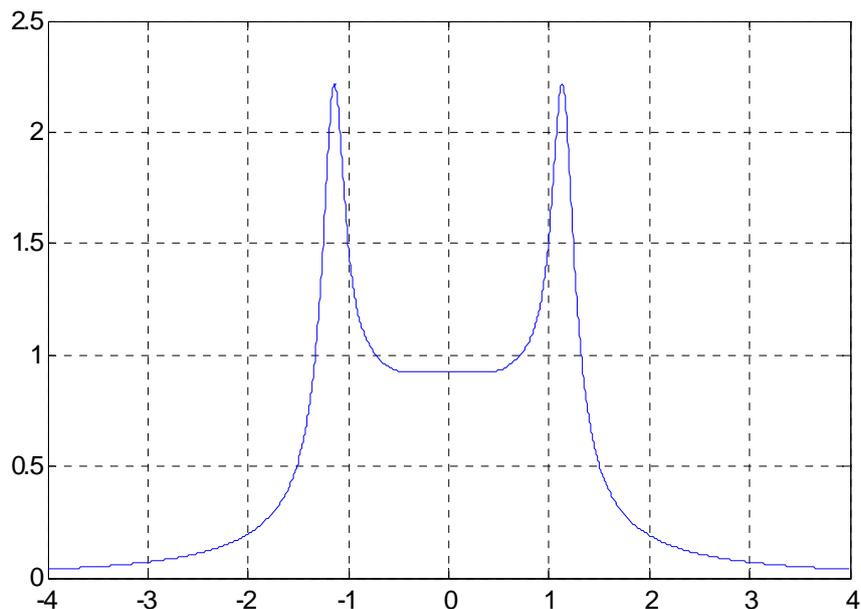


Figura4 30. Retardo de grupo

Notar finalmente que, los ceros de transmisión situados en el eje real del plano complejo, es decir, aquellos que no tienen parte imaginaria, se utilizan para conseguir una mejor ecualización del filtro. Esto se observa mejor comparando el retardo de grupo del filtro con estos dos ceros de transmisión, y sin ellos. La respuesta frecuencial coincide en ambos casos.

Ceros = [ $-j \cdot 1.5$ $j \cdot 1.5$ 1.1 -1.1 ]	Ceros = [ $-j \cdot 1.5$ $j \cdot 1.5$ ]
<b>Retardo de grupo</b>	<b>Retardo de grupo</b>
<p>Este gráfico muestra el retardo de grupo con ecualización. El eje horizontal va de -4 a 4 y el eje vertical de 0 a 2.5. La curva tiene dos picos simétricos que alcanzan una altura de aproximadamente 2.2 unidades, con un valle central que se encuentra a una altura de aproximadamente 0.9 unidades.</p>	<p>Este gráfico muestra el retardo de grupo sin ecualización. El eje horizontal va de -4 a 4 y el eje vertical de 0 a 3. La curva tiene dos picos simétricos que alcanzan una altura de aproximadamente 2.7 unidades, con un valle central que se encuentra a una altura de aproximadamente 0.8 unidades.</p>

Tabla 4. 5. Comparación entre el retardo de grupo con y sin ecualización

## 4.4 Topología *Cul de Sac*

La configuración *cul-de-sac* [2] se restringe a redes con dos terminaciones y un máximo de  $N-3$  **ceros de transmisión**. Podrá, sin embargo, alojar prototipos simétricos o asimétricos, de grado par o impar. Ésta configuración tiene además la ventaja de que no existen acoplos *diagonales cruzados* que a veces son difíciles de realizar en la práctica. Otra ventaja es que su forma presenta cierta flexibilidad al realizar el layout físico de los resonadores. Una configuración típica *cul-de-sac* sería:

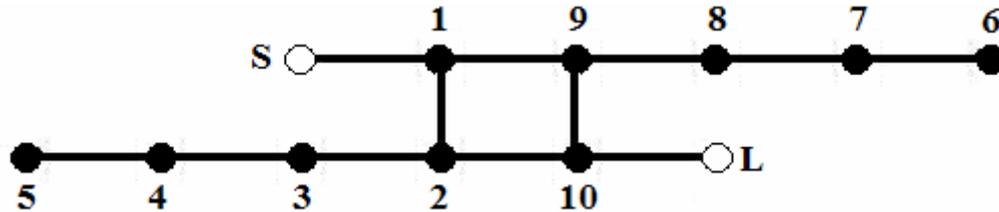


Figura 4. 31. Posible configuración *cul-de-sac* de grado 10

Esta configuración sería un prototipo de grado 10, con un máximo permitido de 7 ceros de transmisión.

En toda configuración *cul-de-sac* existe un núcleo central, que consiste en un cuarteto de resonadores situados en forma de cuadrado (en este caso, los resonadores 1, 2, 9 y 10), con acoplo directo entre ellos, es decir, sin acoplos cruzados en diagonal. La entrada hacia el cuarteto y la salida desde él, se hacen desde esquinas opuestas del cuadrado (en este caso 1 y 10 respectivamente). Todos o algunos de los resonadores restantes, salen conectados en cascada de las otras dos esquinas del cuarteto del núcleo en la misma cantidad para prototipos de grado par, o por un lado un resonador más que por el otro en prototipos de grado impar. El último resonador en cada una de las dos cadenas, no tiene acoplo de salida, de ahí la nomenclatura *cul-de-sac* (literalmente, ‘calle sin salida’ ) para esta configuración.

### 4.4.1 Síntesis

Afortunadamente, la síntesis de redes *cul-de-sac* es muy simple y totalmente automática. Partiendo de la matriz de acoplo en su forma *folded canonical*, los elementos se eliminan utilizando una serie de transformaciones similares regulares (para filtros de grado impar), o una serie de transformaciones cross-pivot (para filtros de grado par), empezando con una línea de acoplo principal cercana al centro de la matriz y moviéndonos hacia fuera, a lo largo de la antidiagonal o de forma paralela a ésta. Esto nos da un máximo de  $(N-2)/2$  transformaciones para prototipos de grado par, y  $(N-3)/2$  para prototipos de grado impar.

La transformación cross-pivot que se utiliza en **filtros de grado par**, es aquella en la que las coordenadas del elemento a eliminar son las mismas que las del pivote de la transformación, es decir, el elemento a eliminar se encuentra en los elementos de cruce del pivote. Por ejemplo, con el pivote [3,5] trataremos de eliminar el elemento  $M_{35}$ :

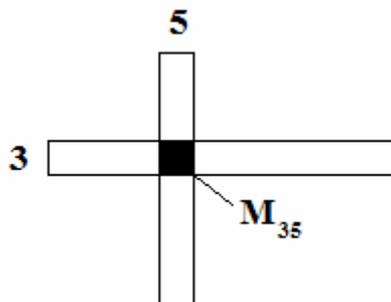


Figura 4. 32. Pivote [3,5] de una transformación cross-pivot

El ángulo de una transformación cross-pivot es diferente del habitual, que usábamos para las transformaciones similares que nos conducían a una matriz en su forma *folded canonical*. En las transformaciones cross-pivot, el ángulo viene dado por:

$$\theta_r = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left[ \frac{2 \cdot M_{ij}}{(M_{ij} - M_{ii})} \right] + \frac{k \cdot \pi}{2} \quad (4.58)$$

donde:

- $[i, j]$  son las coordenadas del pivote y también del elemento a eliminar
- $[\theta_r]$  es el ángulo de la transformación, y
- $[k]$  es un entero arbitrario.

Notar que, para transformaciones cross-pivot de  $M_{ij} \neq 0$  en las que los acoplos  $M_{ii}$  y  $M_{jj}$  coinciden ( $M_{ii} = M_{jj}$ ), se cumple para  $k = 0$ :

$$\theta_r = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left[ \frac{2 \cdot M_{ij}}{(M_{ij} - M_{ii})} \right] + \frac{k \cdot \pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1}[\infty] + \frac{k \cdot \pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{k \cdot \pi}{2} = \frac{\pi}{4} \quad (4.59)$$

Para **filtros de grado impar**, la fórmula del ángulo de transformación toma la forma convencional:

$$\theta_r = \tan^{-1} \left[ \frac{M_{i,j-1}}{M_{j-1,i}} \right] \quad (4.60)$$

Finalmente, indicamos la fórmula general de los índices de los pivotes necesarios para **filtros de grado 4 o más**, según sean de grado par o impar:

Grado	Posición del pivote $[i, j]$ y elemento de la matriz $N+2$ en su forma <i>folded canonical</i> que eliminamos	Ángulo de transformación $\theta_r$		
$N$	<p>Transformación número <math>r</math>. Donde <math>r = 1, 2, 3, \dots, R</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>N</math> par : <math>R = N - 2/2</math></td> </tr> <tr> <td><math>N</math> impar : <math>R = N - 3/2</math></td> </tr> </table>	$N$ par : $R = N - 2/2$	$N$ impar : $R = N - 3/2$	
$N$ par : $R = N - 2/2$				
$N$ impar : $R = N - 3/2$				
$N$ par	$[i, j] M_{i,j}$ $i = \frac{N+2}{2} - r \quad j = \frac{N}{2} + r$	Ecuación (4.58)		
$N$ impar	$[i, j] M_{i,j-1}$ $i = \frac{N+1}{2} - r \quad j = \frac{N+1}{2} + r$	Ecuación (4.60)		

**Tabla 4. 6.** Coordenadas para los pivotes que reducen la matriz de acoplo en su forma *folded canonical* a la matriz *cul-de-sac*

### 4.4.2 Ejemplos

Para ilustrar la síntesis que hemos desarrollado vamos a ver dos ejemplos. El primero de ellos consistirá en el diseño de un filtro paso banda de dos terminaciones y grado 6. Las pérdidas de retorno serán de 22 dB, y tendrá un total de tres ceros de transmisión a frecuencias finitas:  $s_1 = 1 - j \cdot 0.2$ ,  $s_2 = -1 - j \cdot 0.2$ ,  $s_3 = j \cdot 1.4$ . Vemos que no se incumple la restricción que obliga a que el número de ceros de transmisión sea menor o igual que el grado del filtro menos tres, es decir,  $nfz \leq 3$ .

Siguiendo los procedimientos descritos en capítulos anteriores del presente proyecto, podemos obtener la matriz de acoplo transversal del filtro en cuestión, así como su forma *folded canonical*. Estas matrices son:

	<b>S</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>L</b>
<b>S</b>	0	-0.3830	0.3053	-0.4531	0.4972	0.4566	-0.4437	0
<b>1</b>	-0.3830	1.3026	0	0	0	0	0	0.3830
<b>2</b>	0.3053	0	-1.1967	0	0	0	0	0.3053
<b>3</b>	-0.4531	0	0	-1.0646	0	0	0	0.4531
<b>4</b>	0.4972	0	0	0	0.9019	0	0	0.4972
<b>5</b>	0.4566	0	0	0	0	-0.4629	0	0.4566
<b>6</b>	-0.4437	0	0	0	0	0	0.2152	0.4437
<b>L</b>	0	0.3830	0.3053	0.4531	0.4972	0.4566	0.4437	0

**Figura 4. 33.** Matriz transversal de un filtro de orden 6

	S	1	2	3	4	5	6	L
S	0	-1.0477	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0
1	-1.0477	0.0271	-0.8824	-0.0000	-0.0000	0.1141	-0.0000	-0.0000
2	0.0000	-0.8824	0.0169	-0.5785	0.1728	-0.0782	0.0000	-0.0000
3	0.0000	-0.0000	-0.5785	-0.4179	-0.4823	0	-0.0000	0.0000
4	-0.0000	-0.0000	0.1728	-0.4823	0.0052	-0.6265	-0.0000	0.0000
5	0.0000	0.1141	-0.0782	-0.0000	-0.6265	0.0371	0.8898	-0.0000
6	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.8898	0.0271	1.0477
L	0	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	1.0477	0

Figura 4. 34. Matriz en la forma *folded canonical* de un filtro de orden 6.

A continuación, y partiendo de la matriz *folded canonical*, podemos obtener la matriz que representa la red con topología *cul-de-sac*. Para ello, anulamos los elementos  $M_{34}$  y  $M_{25}$  mediante los pivotes  $[3,4]$  y  $[2,5]$ , que como vemos a continuación están situados en la antidiagonal:

	S	1	2	3	4	5	6	L
S	0	-1.0477	0	0	0	0	0	0
1	-1.0477	0.0271	-0.6683	0	0	-0.5874	0	0
2	0	-0.6683	0.1058	-0.6983	-0.0000	0	-0.6683	0
3	0	0	-0.6983	0.3203	0.0000	0.0000	0	0
4	0	0	-0.0000	0	-0.7330	-0.5190	0	0
5	0	-0.5874	-0.0000	0.0000	-0.5190	-0.0518	0.5875	0
6	0	0	-0.6683	0	0	0.5875	0.0271	1.0477
L	0	0	0	0	0	0	1.0477	0

Figura 4. 35. Matriz correspondiente a la topología *cul-de-sac*. Filtro grado 6.

Esta matriz, representan entonces la topología *cul-de-sac* buscada:

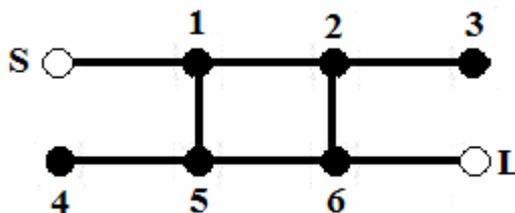


Figura 4. 36. Topología *cul-de-sac* para un filtro de grado 6

A continuación presentamos los resultados que se obtienen al analizar la matriz de acoplo anterior, confirmando que las pérdidas de retorno se encuentran a un nivel de rechazo de 22 dB.

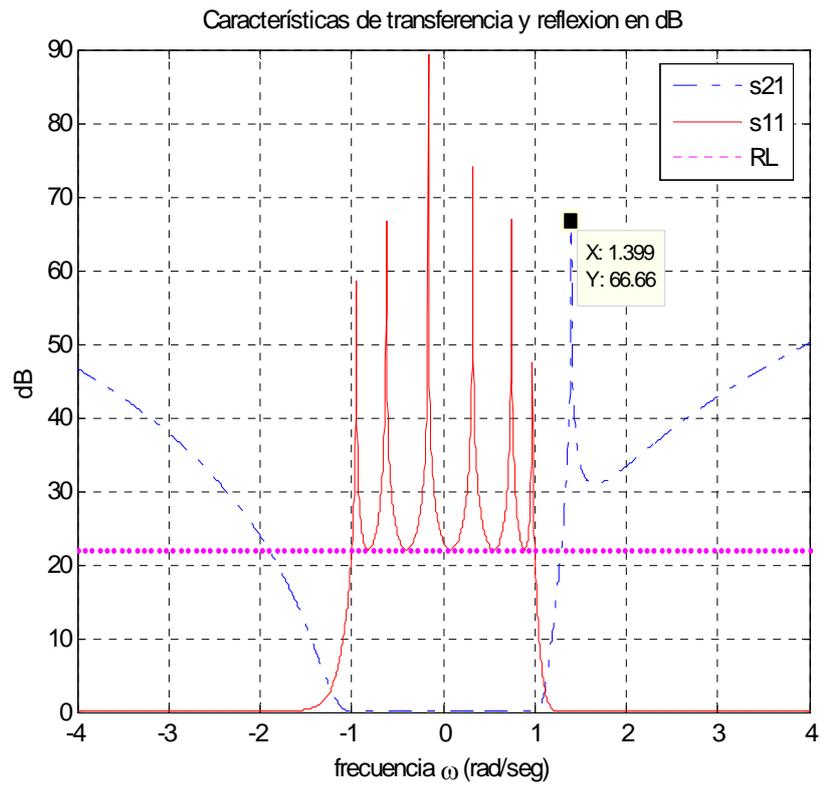


Figura 4. 37. Pérdidas de retorno y característica de transferencia y reflexión

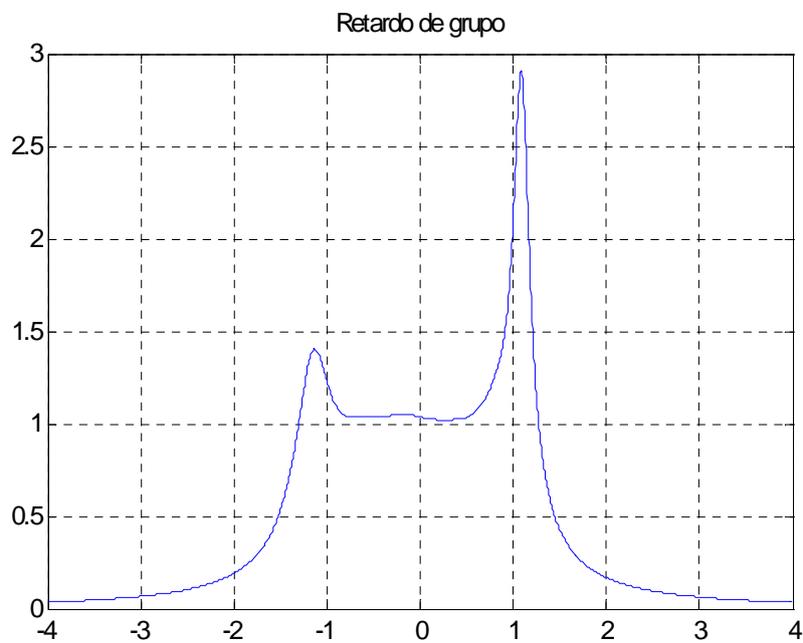


Figura 4. 38. Retardo de grupo

El segundo ejemplo, consiste en un filtro de grado impar  $N = 5$ , paso banda, y con un cero de transmisión a frecuencias finitas, concretamente  $\omega = -2$ . El nivel de pérdidas de retorno es de 20 dB. De nuevo vemos que no se incumple la restricción que obliga a que el número de ceros de transmisión sea menor o igual que el grado del filtro menos tres, en este caso,  $\text{nfz} \leq 2$ .

Siguiendo los procedimientos descritos en capítulos anteriores, obtenemos la matriz de acoplo transversal del filtro en cuestión, así como su forma *folded canonical*. Estas matrices son:

	S	1	2	3	4	5	L
S	0	0.3739	0.3182	-0.4748	-0.5359	0.5211	0
1	0.3739	-1.2749	0	0	0	0	0.3739
2	0.3182	0	1.2074	0	0	0	0.3182
3	-0.4748	0	0	0.9539	0	0	0.4748
4	-0.5359	0	0	0	-0.7856	0	0.5359
5	0.5211	0	0	0	0	0.1672	0.5211
L	0	0.3739	0.3182	0.4748	0.5359	0.5211	0

Figura 4. 39. Matriz transversal de un filtro de orden 5

	S	1	2	3	4	5	L
S	0	1.0125	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0
1	1.0125	-0.0206	0.8635	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
2	0.0000	0.8635	-0.0291	-0.5966	-0.2180	0.0001	0.0000
3	0.0000	0.0000	-0.5966	0.3674	-0.5965	0	0.0000
4	-0.0000	-0.0000	-0.2180	-0.5965	-0.0290	0.8635	-0.0000
5	-0.0000	-0.0000	0.0001	0	0.8635	-0.0206	1.0125
L	0	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	1.0125	0

Figura 4. 40. Matriz en la forma *folded canonical* de un filtro de orden 5

Partiendo de ésta última matriz, ya podemos obtener la matriz que representa la red con topología *cul-de-sac*. Para ello, anulamos el elemento  $M_{23}$  mediante el pivote [2,4]:

	S	1	2	3	4	5	L
S	0	1.0125	0	0	0	0	0
1	1.0125	-0.0206	0.6105	0	0.6106	0	0
2	0	0.6105	0.1890	0	-0.0000	-0.6106	0
3	0	0	0	0.3674	-0.8436	0	0
4	0	0.6106	-0.0000	-0.8436	-0.2471	0.6106	0
5	0	0	-0.6106	0	0.6106	-0.0206	1.0125
L	0	0	0	0	0	1.0125	0

Figura 4. 41. Matriz correspondiente a la topología *cul-de-sac*. Filtro grado 5

Esta matriz, representa la topología *cul-de-sac* buscada:

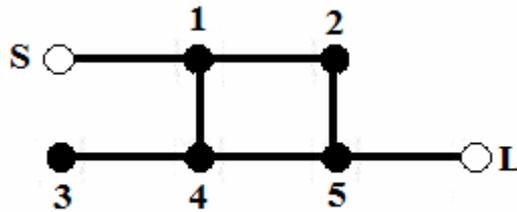


Figura 4. 42. Topología *cul-de-sac* para un filtro de grado 5

A continuación presentamos los resultados que se obtienen al analizar la matriz de acoplo *cul-de-sac*. Se observa cómo las pérdidas de retorno se encuentran a un nivel de rechazo de 20 dB, como se especificó.

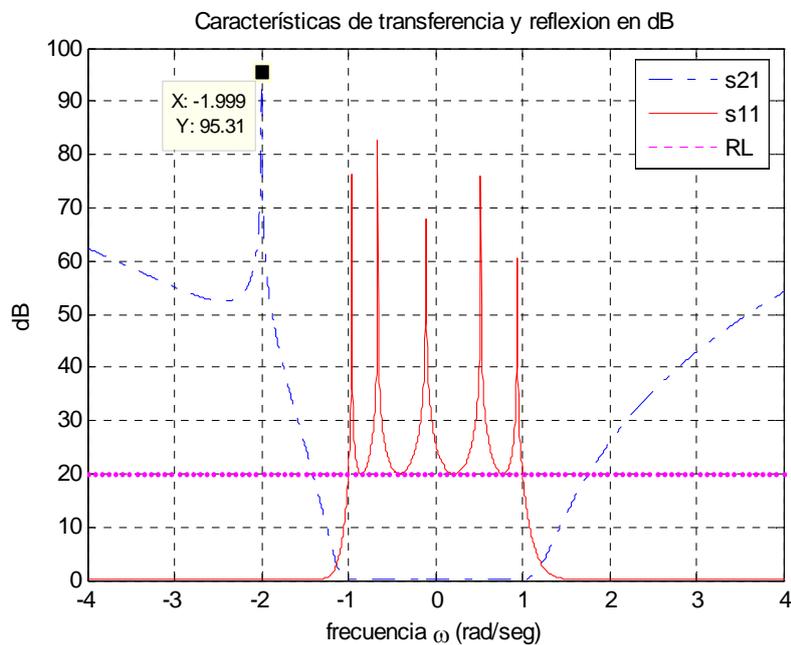


Figura 4. 43. Pérdidas de retorno y característica de transferencia y reflexión

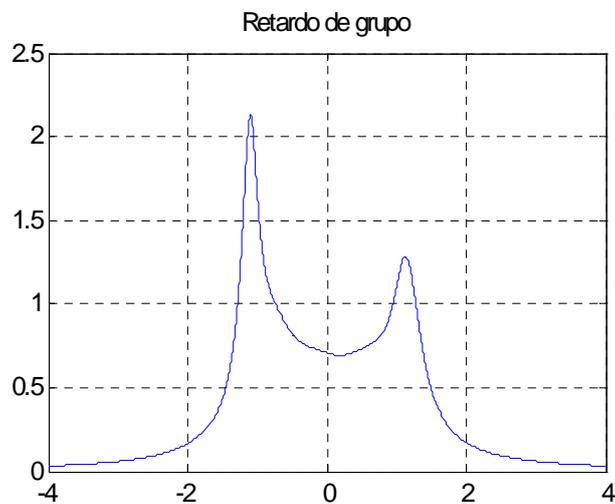


Figura 4. 44. Retardo de grupo

## 4.5 Software desarrollado

Este capítulo ha conducido a la implementación de diversos programas que permiten transformar la matriz de acoplamiento original en otra más conveniente para el circuito físico que vayamos a implementar.

Por una parte, mediante una serie de funciones que permiten obtener los índices de los distintos pivotes para filtros de grado par o impar (véase tabla 4.1 o tabla 4.2), conseguimos un programa que transforma una matriz en su forma habitual  $N \times N$  o  $N + 2$ , en una matriz en la forma *folded canonical*.

Por otra parte, hemos implementado un conjunto de programas que permiten obtener los residuos de un filtro, y separar éstos en distintos grupos con el fin de implementar la configuración *parallel*. Conseguimos por tanto, matrices que se corresponden con topologías *parallel* como vimos en distintos ejemplos en la sección 4.3.2.

Finalmente, implementamos un programa que permite pasar de una matriz en configuración *folded canonical* a otra matriz en configuración *cul-de-sac*, de forma general para un filtro de grado par o impar (siempre  $\geq 4$ ), con un máximo de  $N-3$  ceros de transmisión a frecuencias finitas.

## 4.6 Conclusiones

En este capítulo hemos presentado diversos métodos para transformar una matriz de acoplo, válida para una determinada topología, en otras matrices que presentan más ventajas, o son más adecuadas para topologías alternativas. Concretamente, hemos desarrollado la metodología necesaria para obtener matrices en la forma *folded canonical*, en configuración *parallel*, o bien en configuración *cul-de-sac*. En cada caso, añadimos además diversos ejemplos que validan cada uno de los procedimientos, y muestran los resultados obtenidos mediante el software diseñado.

## Capítulo 5

### Síntesis de filtros utilizando nodos no resonantes.

#### 5.1 Introducción

En este capítulo presentamos un método de síntesis para el diseño de diversos filtros pseudo-elípticos utilizando **nodos no resonantes (NRN)** [4,5].

Un NRN es simplemente un nodo conectado a tierra mediante una reactancia  $j \cdot B_i$  independiente de la frecuencia, que puede ser un circuito abierto en ciertos casos. El número total de NRN que puede existir en un filtro dado es arbitrario, ya que no afecta al orden del filtro. La introducción de nodos no resonantes en el diseño de filtros permite la aparición de algunas ventajas que han sido estudiadas recientemente [4].

Los prototipos paso bajo que vamos a utilizar en el presente capítulo, contienen los siguientes tipos de componentes:

- *Resonadores*: Los resonadores se modelarán mediante capacidades de valor igual a la unidad, conectadas en paralelo con reactancias independientes de la frecuencia, que representan los desplazamientos en la frecuencia de resonancia.

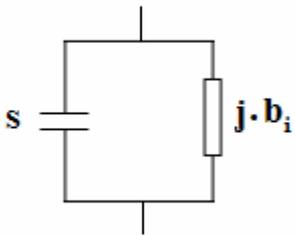
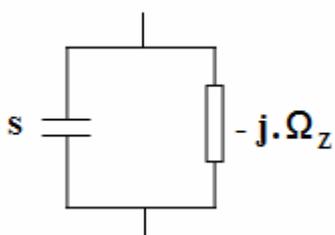
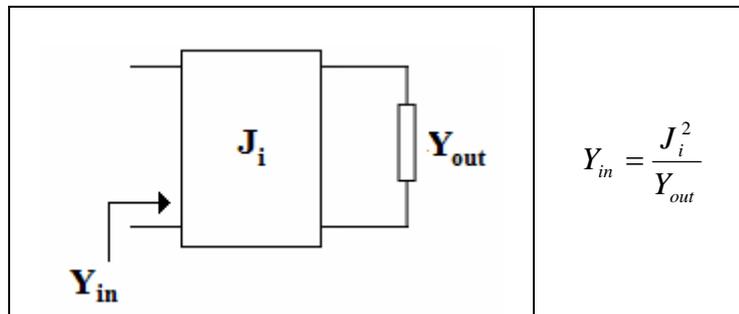
	$Y_{condensador} = j \cdot \omega \cdot C = j \cdot \omega = s$ $Y_{reactancia} = j \cdot b_i$ $Y_{TOTAL} = s + j \cdot b_i$
	$Y_{condensador} = j \cdot \omega \cdot C = j \cdot \omega = s$ $Y_{reactancia} = -j \cdot \Omega_z$ $Y_{TOTAL} = s - j \cdot \Omega_z$

Tabla 5. 1. Modelo de los resonadores

Un resonador que es responsable de un cero de transmisión a la frecuencia normalizada  $s_i = j \cdot \Omega_z$ , se representa, como hemos visto en la tabla 5.1 mediante una capacidad de valor igual a la unidad en paralelo con una reactancia constante de valor  $-j \cdot \Omega_z$ .

- *Inversores de admitancia  $J_i$*  : Invierten la admitancia de la siguiente manera:



**Tabla 5. 2. Inversor de admitancia**

- *Nodos no resonantes (NRN)*: Estos nodos, son nodos internos conectados a tierra mediante reactancias  $j \cdot B_i$  independientes de la frecuencia. Notar que estas reactancias no aparecen en paralelo con ninguna capacidad, como ocurría en el caso de los resonadores.
- *Entrada ( Fuente ) y salida ( Carga )*: Estas se representan mediante conductancias normalizadas  $G_S = G_L = 1$ .

Cada resonador colgante se conecta solamente a un nodo no resonante. Para un filtro de orden  $N$  con  $N_z$  polos de atenuación a frecuencias finitas y reales, existirán  $N_z$  resonadores colgantes, y  $N - N_z$  resonadores a lo largo de los nodos que forman el camino entre la fuente y la carga. Obviamente, cuando  $N_z$  es menor que  $N$ , la posición de los resonadores que conduce a la respuesta deseada no será única. La elección de la posición dependerá entonces de las restricciones de la tecnología que se pretenda utilizar.

Para comprender el procedimiento de síntesis, estudiaremos tres posibles casos y desarrollaremos la teoría necesaria en cada caso para llegar a la matriz de acoplamiento. Los ejemplos que vamos a estudiar serán:

- *Filtro de grado 3 con un cero de transmisión*: Según hemos visto, este filtro tendrá un resonador colgante, y dos resonadores a lo largo de los nodos que forman el camino entre la fuente y la carga.
- *Filtro de grado 4 con dos ceros de transmisión*: Este filtro, tendrá dos resonadores colgantes, y dos resonadores entre la fuente y la carga.
- *Filtro de grado 3 con dos ceros de transmisión*: Este filtro, tendrá dos resonadores colgantes, y un solo resonador en el camino entre la fuente y la carga.

## 5.2 Síntesis y ejemplo de un filtro de grado 3 y un cero de transmisión

Vamos a considerar un filtro de tercer orden con un cero de transmisión a la frecuencia real  $\Omega_z$ . Las pérdidas de retorno en la banda valdrán  $R$  dB. La estructura que vamos a utilizar para implementar esta respuesta, tiene un resonador colgante y dos resonadores entre fuente y carga, y es la siguiente:

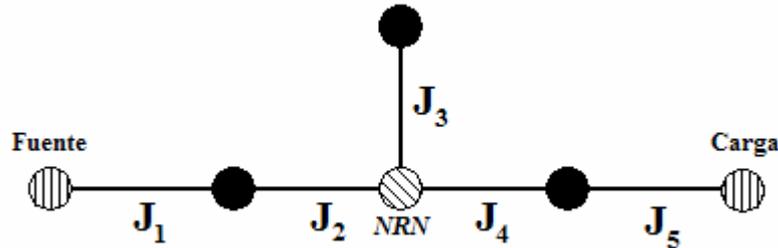


Figura 5. 1. Esquema de acoplo utilizado para extraer un cero de transmisión en un filtro de grado 3.

Partiendo de la posición del cero de transmisión y de las pérdidas de retorno, podemos calcular fácilmente los polos y los ceros del coeficiente de reflexión en el plano complejo, según vimos en el capítulo dos. Tendremos determinado entonces dicho coeficiente:

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)}{\epsilon_R \cdot E(s)} \tag{5.1}$$

A partir de el coeficiente de reflexión podemos entonces calcular la admitancia de entrada, usando la siguiente relación estándar:

$$y_{in} = \frac{1 - S_{11}(s)}{1 + S_{11}(s)} \tag{5.2}$$

Para extraer los elementos tendremos que comparar la admitancia de entrada dada por la ecuación (5.2) con la admitancia de entrada de la red. Vamos pues, a calcularla. Para ello, definimos las siguientes admitancias:

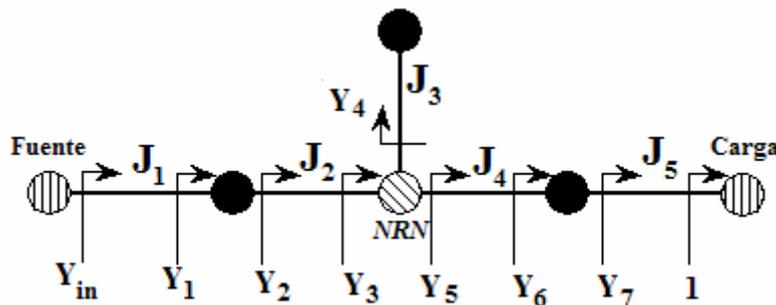


Figura 5. 2. Admitancias intermedias para el cálculo de la admitancia de entrada

Directamente del circuito anterior, se deduce el valor de las admitancias:

$$y_{in} = \frac{J_1^2}{y_1} \quad (5.3)$$

$$y_1 = (s + j \cdot b_1) + y_2 \quad (5.4)$$

$$y_2 = \frac{J_2^2}{y_3} \quad (5.5)$$

$$y_3 = j \cdot B_c + y_4 + y_5 \quad (5.6)$$

$$y_4 = \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_z} \quad (5.7)$$

$$y_5 = \frac{J_4^2}{y_6} \quad (5.8)$$

$$y_6 = (s + j \cdot b_2) + y_7 \quad (5.9)$$

$$y_7 = \frac{J_5^2}{1} = J_5^2 \quad (5.10)$$

Por lo que sustituyendo sucesivamente el valor de cada admitancia intermedia en la anterior, llegamos al valor total de la admitancia de entrada en función únicamente de los elementos del circuito:

$$y_{in} = \frac{J_1^2}{s + j \cdot b_1 + \frac{J_2^2}{j \cdot B_c + \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_z} + \frac{J_4^2}{s + j \cdot b_2 + J_5^2}}} \quad (5.11)$$

El método a utilizar consistirá ahora en ir calculando el valor de cada uno de los parámetros desconocidos en la ecuación (5.11). Para ello, seguiremos los siguientes pasos:

Para calcular  $J_1^2$ , tendremos que multiplicar la admitancia de entrada por la variable compleja  $s$ , y evaluar ésta en  $\infty$ :

$$s \cdot y_{in}(s) \Big|_{s=\infty} = J_1^2 \quad (5.12)$$

A continuación tratamos de calcular  $b_1$ . Para ello despejamos de (5.11) el siguiente valor:

$$y_{in}^1(s) = \frac{J_1^2}{y_{in}(s)} - s = j \cdot b_1 + \frac{J_2^2}{j \cdot B_c + \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_z} + \frac{J_4^2}{s + j \cdot b_2 + J_5^2}} \quad (5.13)$$

y a continuación lo evaluamos en  $s = j \cdot \Omega_z$ :

$$y_{in}^1(s) \Big|_{s=j\cdot\Omega_z} = j \cdot b_1 + \frac{J_2^2}{j \cdot B_c + \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_z} + \frac{J_4^2}{s + j \cdot b_2 + J_5^2}} \Big|_{s=j\cdot\Omega_z} = j \cdot b_1 \quad (5.14)$$

Conocido el valor de  $b_1$  podemos ya eliminar ésta constante de la admitancia con la que estamos tratando, y obtener:

$$y_{in}^2(s) = y_{in}^1(s) - j \cdot b_1 = \frac{J_2^2}{j \cdot B_c + \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_z} + \frac{J_4^2}{s + j \cdot b_2 + J_5^2}} \quad (5.15)$$

$$y_{in}^3(s) = \frac{J_2^2}{y_{in}^2(s)} = j \cdot B_c + \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_z} + \frac{J_4^2}{s + j \cdot b_2 + J_5^2} \quad (5.16)$$

Ahora es sencillo calcular  $J_3^2$  y  $B_c$  de la siguiente manera:

$$J_3^2 = \text{residue}(y_{in}^3(s)) \Big|_{j\cdot\Omega_z} = \text{residue}\left(\frac{J_2^2}{y_{in}^2(s)}\right) \Big|_{j\cdot\Omega_z} \quad (5.17)$$

$$j \cdot B_c = y_{in}^3(s) \Big|_{s=\infty} = \frac{J_2^2}{y_{in}^2(s)} \Big|_{s=\infty} \quad (5.18)$$

De nuevo podemos extraer los términos que ya hemos calculado:

$$y_{in}^4(s) = y_{in}^3(s) - j \cdot B_c - \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_z} = \frac{J_4^2}{s + j \cdot b_2 + J_5^2} \quad (5.19)$$

y calcular entonces la constante  $J_4^2$  como:

$$J_4^2 = s \cdot y_{in}^4(s) \Big|_{s=\infty} \quad (5.20)$$

Si extraemos finalmente la constante que acabamos de calcular:

$$y_{in}^5(s) = \frac{J_4^2}{y_{in}^4(s)} - s = j \cdot b_2 + J_5^2 \quad (5.21)$$

Por lo que las últimas constantes se calculan simplemente como la parte real e imaginaria de  $y_{in}^5(s)$ :

$$J_5^2 = \text{Re}(y_{in}^5(s)) \quad (5.22)$$

$$b_2 = \text{Im}(y_{in}^5(s)) \quad (5.23)$$

Conocidos todos los parámetros que determinan el circuito, podemos escribir la matriz de acoplo del filtro fijándonos en las figuras 5.1 y 5.2:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_1 & b_1 & J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & B_c & J_3 & J_4 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & -\Omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_4 & 0 & b_2 & J_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_5 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Notar que, para obtener la característica de transferencia y reflexión a partir de la matriz de acoplo en este caso, hemos de actuar como vimos en el apartado 3.4, pero con la diferencia de que ahora hemos de eliminar también la dependencia frecuencial del elemento correspondiente a la reactancia  $B_c$ . Por este motivo la matriz identidad que multiplica a la variable compleja  $s$  tendrá el elemento  $I_{33}$  igual a cero. La matriz total  $Z$  quedaría entonces como:

$$Z = s \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} + j \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & \dots & \dots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & \dots & \dots & M_{2N} \\ M_{31} & M_{32} & \dots & \dots & \dots & M_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & M_{N-1,N-1} & M_{N-1,N} \\ M_{1N} & \dots & \dots & M_{N,N-1} & M_{NN} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \quad (5.25)$$

Una vez realizada la síntesis necesaria para calcular la matriz de acoplo, vamos a comprobar el funcionamiento con un ejemplo.

Vamos a diseñar un filtro de tercer orden, con unas pérdidas de retorno de 22 dB y un cero de transmisión a la frecuencia real  $\omega = 1.8$ . La matriz de acoplo  $M$  que obtenemos según el procedimiento descrito, y que se corresponde con la matriz (5.24), es la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1.1395 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1395 & -0.5553 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & -1.3643 & 1.2478 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2478 & -1.8000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & -0.5553 & 1.1395 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1395 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Analizando esta matriz, podemos obtener entonces la característica de transmisión y reflexión del filtro, y verificar que el cero de transmisión se encuentra donde se había especificado. También se observan las pérdidas de retorno a un nivel de 22 dB.

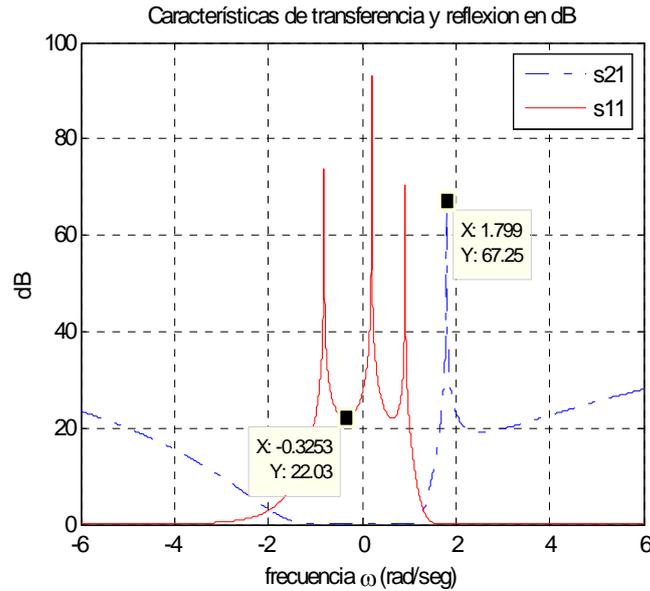


Figura 5. 3. Nivel de pérdidas de retorno en dB y función de transferencia y reflexión del filtro.

Veamos a continuación qué ocurre si situamos el cero de transmisión en la parte izquierda de la banda de paso manteniendo el resto de especificaciones. Es decir, tendremos un filtro de orden 3 con unas pérdidas de retorno de 22 dB y un cero de transmisión a la frecuencia real  $\omega = -1.8$ . La matriz de acoplo  $M$  es en este caso la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1.1395 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1395 & 0.5553 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 1.3643 & 1.2478 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2478 & 1.8000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0.5553 & 1.1395 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1395 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

De nuevo, analizando esta matriz, llegamos a la característica buscada:

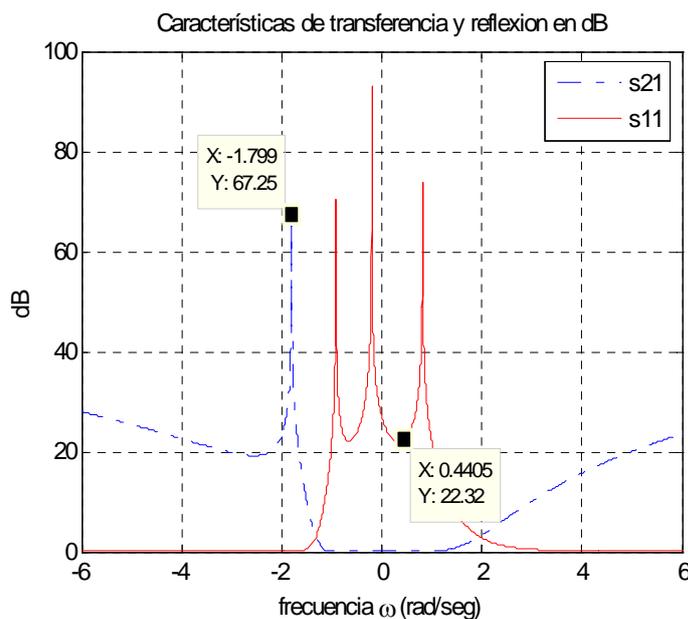


Figura 5. 4. Nivel de pérdidas de retorno en dB y función de transferencia y reflexión del filtro.

Comparando las matrices (5.26) y (5.27), vemos que la única diferencia entre las matrices de acoplamiento cuando cambiamos el cero de transmisión de la parte izquierda de la banda de paso a la parte derecha (de forma simétrica), es que los elementos de la diagonal han cambiado de signo. Estos elementos, se corresponden con los desplazamientos de frecuencia en las frecuencias de resonancia de los resonadores.

### 5.3 Síntesis y ejemplo de un filtro de grado 4 y dos ceros de transmisión

En este caso realizaremos la síntesis de un filtro de cuarto orden con dos ceros de transmisión a las frecuencias reales  $\Omega_{z1}$  y  $\Omega_{z2}$ , y unas pérdidas de retorno de  $R$  dB. Debido a que el orden del filtro es  $N=4$  y el número de ceros de transmisión es  $N_z=2$ , la estructura para implementarlo tendrá dos resonadores colgantes y dos resonadores entre fuente y carga:

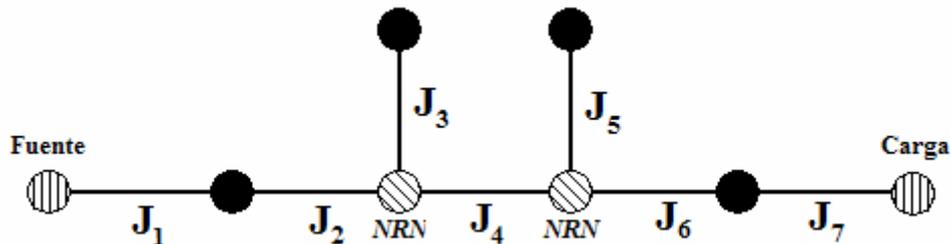


Figura 5. 5. Esquema de acoplo utilizado para extraer dos cero de transmisión en un filtro de grado 4.

Partiendo de la posición de los dos cero de transmisión y de las pérdidas de retorno, podemos calcular el coeficiente de reflexión, según vimos en el segundo capítulo:

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)}{\epsilon_R \cdot E(s)} \quad (5.28)$$

A partir de el coeficiente de reflexión podemos calcular la admitancia de entrada, según:

$$y_{in} = \frac{1 - S_{11}(s)}{1 + S_{11}(s)} \quad (5.29)$$

Al igual que en el caso anterior, para calcular los elementos del circuito tendremos que comparar la admitancia de entrada dada por la ecuación (5.29) con la admitancia de entrada de la red, que calculamos a continuación.

Comencemos definiendo las siguientes admitancias intermedias:

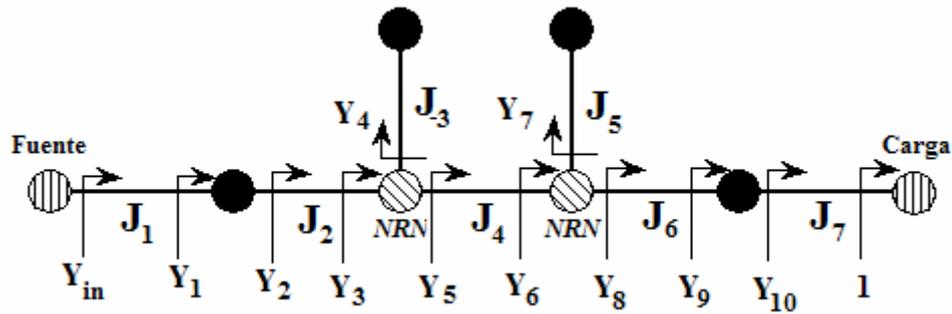


Figura 5. 6. Admitancias intermedias para el cálculo de la admitancia de entrada

Del circuito anterior, se deduce el valor de cada una de las siguientes admitancias:

$$y_{in} = \frac{J_1^2}{y_1} \quad (5.30)$$

$$y_1 = (s + j \cdot b_1) + y_2 \quad (5.31)$$

$$y_2 = \frac{J_2^2}{y_3} \quad (5.32)$$

$$y_3 = j \cdot B_1 + y_4 + y_5 \quad (5.33)$$

$$y_4 = \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_{z1}} \quad (5.34)$$

$$y_5 = \frac{J_4^2}{y_6} \quad (5.35)$$

$$y_6 = j \cdot B_2 + y_7 + y_8 \quad (5.36)$$

$$y_7 = \frac{J_5^2}{s - j \cdot \Omega_{z2}} \quad (5.37)$$

$$y_8 = \frac{J_6^2}{y_9} \quad (5.38)$$

$$y_9 = (s + j \cdot b_2) + y_{10} \quad (5.39)$$

$$y_{10} = \frac{J_7^2}{1} = J_7^2 \quad (5.40)$$

Sustituyendo sucesivamente el valor de cada admitancia intermedia en la anterior, llegamos al valor total de la admitancia de entrada en función únicamente de los elementos del circuito.

La admitancia de entrada queda entonces como:

$$y_{in} = \frac{J_1^2}{s + j \cdot b_1 + \frac{J_2^2}{j \cdot B_1 + \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_{z1}} + \frac{J_4^2}{j \cdot B_2 + \frac{J_5^2}{s - j \cdot \Omega_{z2}} + \frac{J_6^2}{s + j \cdot b_2 + J_7^2}}}} \quad (5.41)$$

El método a utilizar consistirá de nuevo en ir calculando el valor de cada uno de las incógnitas en la ecuación (5.41). Para ello, realizamos lo siguiente:

Para calcular  $J_1^2$ , multiplicamos la admitancia de entrada por la variable compleja  $s$ , y evaluamos ésta en  $\infty$ :

$$s \cdot y_{in}(s) \Big|_{s=\infty} = J_1^2 \quad (5.42)$$

A continuación calculamos  $b_1$ . Para ello despejamos de (5.41) el siguiente valor:

$$y_{in}^1(s) = \frac{J_1^2}{y_{in}(s)} - s = j \cdot b_1 + \frac{J_2^2}{j \cdot B_1 + \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_{z1}} + \frac{J_4^2}{j \cdot B_2 + \frac{J_5^2}{s - j \cdot \Omega_{z2}} + \frac{J_6^2}{s + j \cdot b_2 + J_7^2}}} \quad (5.43)$$

y a continuación lo evaluamos en  $s = j \cdot \Omega_{z1}$ :

$$y_{in}^1(s) \Big|_{s=j \cdot \Omega_{z1}} = j \cdot b_1 \quad (5.44)$$

Conocida la variable  $b_1$  podemos extraer su valor de la admitancia:

$$y_{in}^2(s) = y_{in}^1(s) - j \cdot b_1 = \frac{J_2^2}{j \cdot B_1 + \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_{z1}} + \frac{J_4^2}{j \cdot B_2 + \frac{J_5^2}{s - j \cdot \Omega_{z2}} + \frac{J_6^2}{s + j \cdot b_2 + J_7^2}}} \quad (5.45)$$

$$y_{in}^3(s) = \frac{J_2^2}{y_{in}^2(s)} = j \cdot B_1 + \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_{z1}} + \frac{J_4^2}{j \cdot B_2 + \frac{J_5^2}{s - j \cdot \Omega_{z2}} + \frac{J_6^2}{s + j \cdot b_2 + J_7^2}} \quad (5.46)$$

Ahora calculamos  $J_3^2$  mediante el teorema de los residuos:

$$J_3^2 = \text{residue}(y_{in}^3(s)) \Big|_{j \cdot \Omega_{z1}} = \text{residue} \left( \frac{J_2^2}{y_{in}^2(s)} \right) \Big|_{j \cdot \Omega_{z1}} \quad (5.47)$$

y extraemos su valor de la admitancia, quedando:

$$y_{in}^4(s) = y_{in}^3(s) - \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_{z1}} = j \cdot B_1 + \frac{J_4^2}{j \cdot B_2 + \frac{J_5^2}{s - j \cdot \Omega_{z2}} + \frac{J_6^2}{s + j \cdot b_2 + J_7^2}} \quad (5.48)$$

Para obtener  $B_1$ , simplemente evaluamos la expresión anterior en  $\Omega_{z2}$ :

$$j \cdot B_1 = y_{in}^4(s) \Big|_{s=j \cdot \Omega_{z2}} \quad (5.49)$$

De nuevo, extraemos el nuevo término que acabamos de calcular de la expresión (5.48), quedando:

$$y_{in}^5(s) = y_{in}^4(s) - j \cdot B_1 = \frac{J_4^2}{j \cdot B_2 + \frac{J_5^2}{s - j \cdot \Omega_{z2}} + \frac{J_6^2}{s + j \cdot b_2 + J_7^2}} \quad (5.50)$$

El valor de  $J_4^2$  no va a afectar a la respuesta del filtro, por lo que lo establecemos igual a la unidad, y lo extraemos de la expresión (5.50):

$$y_{in}^6(s) = \frac{J_4^2}{y_{in}^5(s)} = j \cdot B_2 + \frac{J_5^2}{s - j \cdot \Omega_{z2}} + \frac{J_6^2}{s + j \cdot b_2 + J_7^2} \quad (5.51)$$

Calculamos entonces el valor de  $B_2$  y  $J_5^2$  como sigue:

$$j \cdot B_2 = y_{in}^6(s) \Big|_{s=\infty} \quad (5.52)$$

$$J_5^2 = \text{residue}(y_{in}^6(s)) \Big|_{s=j \cdot \Omega_{z2}} \quad (5.53)$$

y lo extraemos de la expresión (5.51):

$$y_{in}^7(s) = y_{in}^6(s) - j \cdot B_2 - \frac{J_5^2}{s - j \cdot \Omega_{z2}} = \frac{J_6^2}{s + j \cdot b_2 + J_7^2} \quad (5.54)$$

Para calcular  $J_6^2$  multiplicaremos la expresión anterior por la variable compleja y evaluaremos la admitancia en infinito:

$$J_6^2 = y_{in}^7(s) \Big|_{s=\infty} \quad (5.55)$$

Finalmente extraemos este valor:

$$y_{in}^8(s) = \frac{J_6^2}{y_{in}^7(s)} - s = j \cdot b_2 + J_7^2 \quad (5.56)$$

y calculamos las últimas incógnitas:

$$J_7^2 = \text{Re}(y_{in}^8(s)) \quad (5.57)$$

$$b_2 = \text{Im}(y_{in}^8(s)) \quad (5.58)$$

Conocidos todos los parámetros, podemos escribir la matriz de acoplo del filtro fijándonos en las figuras 5.5 y 5.6:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_1 & b_1 & J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & B_1 & J_3 & 0 & J_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & -\Omega_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_{z2} & J_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_4 & 0 & J_5 & B_2 & J_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_6 & b_2 & J_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_7 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

En este caso, para obtener la característica de transferencia y reflexión a partir de la matriz de acoplo, hemos de eliminar la dependencia frecuencial de los elementos correspondiente a las reactancias  $B_1$  y  $B_2$ . Por este motivo la matriz identidad que multiplica a la variable compleja  $s$  tendrá los elementos  $I_{33}$  e  $I_{66}$  iguales a cero. La matriz total  $Z$  quedaría como:

$$Z = s \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} + j \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & M_{2N} \\ M_{31} & M_{32} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & M_{3N} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & M_{N-1,N-1} & \dots & \dots & M_{N-1,N} \\ M_{1N} & \dots & \dots & \dots & M_{N,N-1} & \dots & \dots & M_{NN} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \quad (5.60)$$

Tras la síntesis, vamos a comprobar el funcionamiento del método descrito con un ejemplo.

El diseño consiste en un filtro de cuarto orden con dos ceros de transmisión situados a las frecuencias reales  $\omega = -3$  y  $\omega = -8$ , y unas pérdidas de retorno de 25 dB. La matriz de acoplo que obtenemos es la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1.1533 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1533 & 0.0790 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 7.5190 & 7.6359 & 0 & 0.7235 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.6359 & 8.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.0000 & 2.7035 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7235 & 0 & 2.7035 & 2.7796 & 1.0119 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0119 & 0.3204 & 1.1533 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1533 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y analizándola, se obtiene efectivamente la característica especificada:

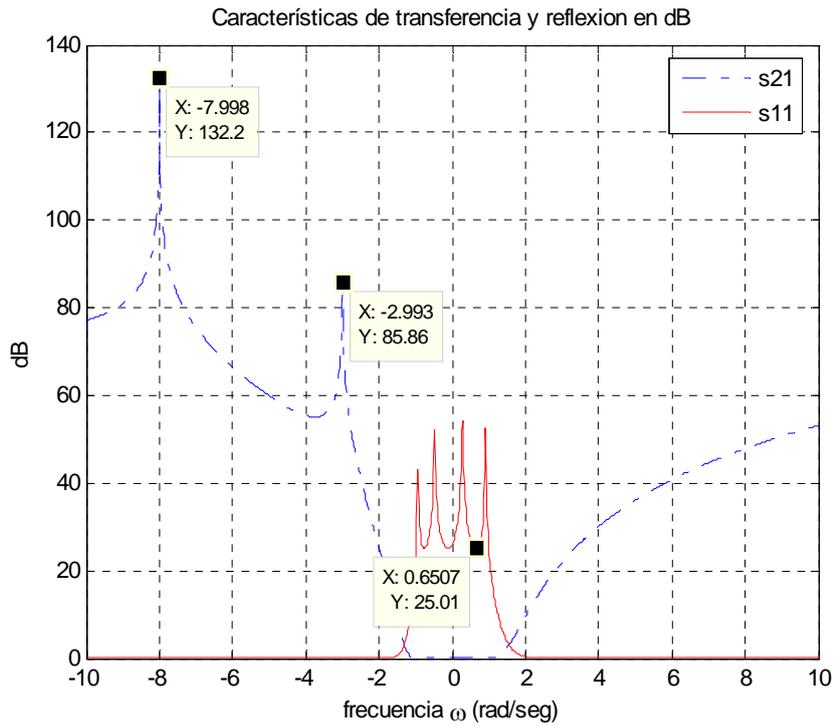


Figura 5. 7. Nivel de pérdidas de retorno en dB y función de transferencia y reflexión del filtro.

Se observa cómo los ceros de transmisión están a las frecuencias  $\omega = -3$  y  $\omega = -8$ , así como un nivel de pérdidas de retorno de 25 dB.

### 5.4 Síntesis y ejemplo de un filtro de grado 3 y dos ceros de transmisión

El último caso que vamos a contemplar, se refiere aun filtro de tercer orden, pero ésta vez con dos ceros de transmisión, situados a las frecuencias reales  $\Omega_{z1}$  y  $\Omega_{z2}$ . Las pérdidas de retorno serán de  $R$  dB, y la estructura que utilizaremos es la siguiente:

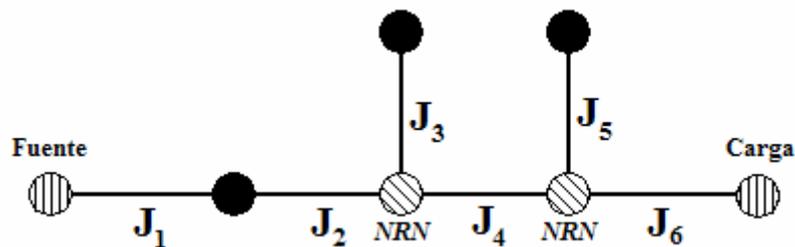


Figura 5. 8. Esquema de acoplo utilizado para extraer dos ceros de transmisión en un filtro de grado 3.

Como vemos, esta estructura tiene dos resonadores colgantes, y un solo resonador en el camino entre la fuente y la carga.

Si al igual que en los apartados 5.2 y 5.3 calculamos la admitancia de entrada de éste circuito, llegamos a su expresión final:

$$y_{in} = \frac{J_1^2}{s + j \cdot b_1 + \frac{J_2^2}{j \cdot B_1 + \frac{J_3^2}{s - j \cdot \Omega_{z1}} + \frac{J_4^2}{j \cdot B_2 + \frac{J_5^2}{s - j \cdot \Omega_{z2}} + J_6^2}}} \quad (5.61)$$

Para calcular cada uno de los parámetros que determinan la admitancia de entrada, debido a su similitud con la admitancia de entrada del caso anterior dada por (5.41), procederemos de la misma manera que entonces, pero con una ligera variación.

El proceso para calcular los parámetros  $J_1^2$ ,  $b_1$ ,  $J_2^2$ ,  $B_1$ ,  $J_3^2$ ,  $J_4^2$ ,  $J_5^2$  sigue exactamente los mismos pasos que los explicados de (5.42) a (5.53). Nos queda entonces calcular el último parámetro  $J_6^2$ , que viene dado directamente por

$$y_{in}^7(s) = y_{in}^6(s) - j \cdot B_2 - \frac{J_5^2}{s - j \cdot \Omega_{z2}} = J_6^2 \quad (5.62)$$

Conocidos todos los parámetros, podemos escribir la matriz de acoplo del filtro fijándonos en la figura 5.8:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_1 & b_1 & J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & B_1 & J_3 & J_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & -\Omega_{z1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_4 & 0 & B_2 & J_5 & J_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_5 & -\Omega_{z2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Para obtener la característica de transferencia y reflexión a partir de la matriz de acoplo, hemos de eliminar también aquí la dependencia frecuencial de los elementos correspondiente a las reactancias  $B_1$  y  $B_2$ . Por este motivo la matriz identidad que multiplica a la variable compleja  $s$  a la hora de resolver el sistema, tendrá los elementos  $I_{33}$  e  $I_{55}$  iguales a cero.

Para comprobar el funcionamiento del proceso que permite calcular la matriz de acoplo (5.63) y así verificar su correspondencia con el filtro de la figura 5.8, vamos a realizar un diseño, obteniendo dicha matriz y analizándola para visualizar la respuesta en frecuencia.

El filtro que vamos a diseñar, tendrá dos ceros de transmisión a las frecuencias reales  $\omega = 2$  y  $\omega = 5$ . El nivel de pérdidas de retorno se encuentra a 25 dB.

La matriz de acoplo correspondiente a la mostrada en (5.63) que obtenemos para este diseño es:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1.2501 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.2501 & 0.0080 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & -3.0106 & 3.8125 & 0.7235 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.8125 & -5.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7235 & 0 & -0.9537 & 1.2431 & 0.9127 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2431 & -2.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9127 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

y analizándola, obtenemos la respuesta frecuencial del filtro:

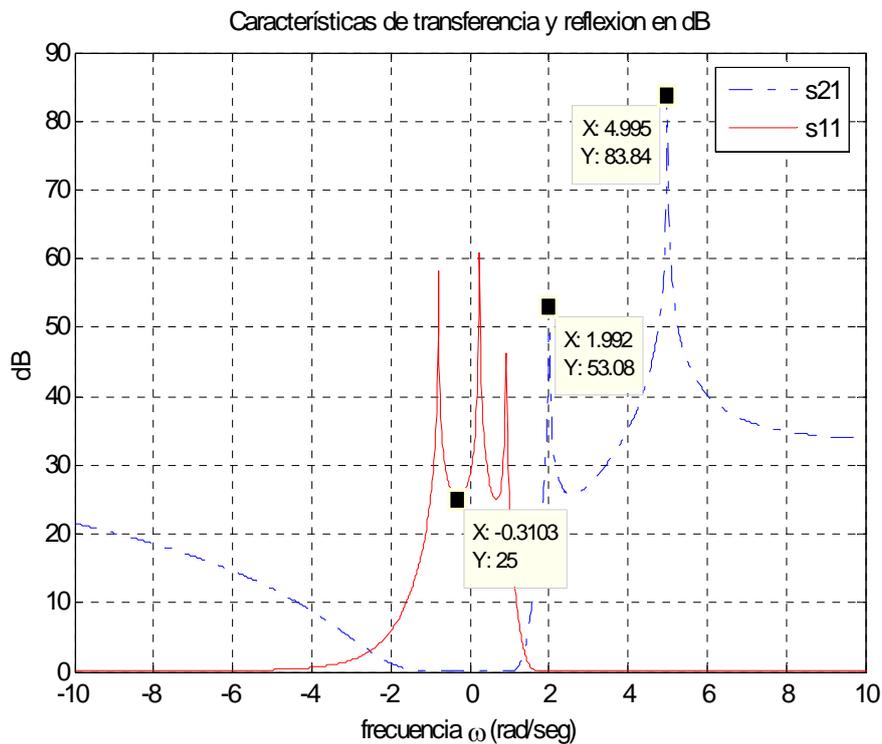


Figura 5. 9. Nivel de pérdidas de retorno en dB y función de transferencia y reflexión del filtro.

Vemos que efectivamente, los ceros de transmisión se encuentran a las frecuencias 2 y 8, y que existe un nivel de pérdidas de retorno igual a 25 dB.

## 5.5 Software desarrollado

Este capítulo y los procedimientos explicados para diseñar filtros utilizando nodos no resonantes, han dado lugar a tres programas que permiten obtener la matriz de acoplamiento del filtro, a partir de los ceros de transmisión y las pérdidas de retorno que presenta su respuesta en frecuencia. Cada uno de los programas permite diseñar un tipo de filtro, a saber, un filtro de orden 3 con un cero de transmisión real arbitrariamente situado (aptdo 5.2), un filtro de orden 4 y dos ceros de transmisión reales situados también arbitrariamente (aptdo 5.3), y un filtro de tercer orden con dos ceros de transmisión reales cualesquiera.

## 5.6 Conclusiones

En este capítulo hemos abordado una técnica utilizada para sintetizar filtros con ceros de transmisión a frecuencias finitas arbitrariamente situados. Los ceros de transmisión se extraen mediante nodos no resonantes internos (NRNs), situados en el centro de la estructura. Además, para cada diseño, con un orden  $N$  y un número de ceros de transmisión  $N_z$  determinados, serán válidas diversas estructuras. Hemos realizado también diversos ejemplos de diseño de filtros utilizando la técnica descrita, mostrando los resultados obtenidos para la matriz de acoplo y la respuesta frecuencial en cada caso.

## Capítulo 6

### Ejemplos de aplicación práctica

#### 6.1 Introducción

En este capítulo vamos a presentar diferentes aplicaciones prácticas de los métodos de síntesis de filtros que hemos desarrollado a lo largo de los capítulos anteriores.

En cada uno de los diseños que vamos a presentar, partiremos de unas especificaciones dadas, como son el tipo y el orden del filtro, los posición de los ceros de transmisión a frecuencias finitas, y las pérdidas de retorno deseadas. A partir de estas especificaciones, realizaremos la síntesis que nos conducirá a la matriz de acoplamiento necesaria para la implementación del filtro. Además, incluiremos distintas topologías para dicha implementación, así como posibles circuitos físicos.

#### 6.2 Diseño de un filtro paso banda de cuarto orden y dos ceros de transmisión, en configuración *parallel connected 2-2*.

Las especificaciones de este primer filtro paso banda que vamos a diseñar, son las siguientes:

<i>Tipo</i>	Paso Banda Chebyshev	
<i>Orden</i>	4	
<i>Pérdidas de retorno</i>	20 dB	
<i>Ceros de transmisión</i>	$-j \cdot 3$	$j \cdot 3$

**Tabla 6. 1. Especificaciones del filtro**

Tendremos por tanto, dos ceros de transmisión a frecuencias finitas situados en el eje imaginario del plano complejo:

Ceros de tx deseados : Simetría alrededor del eje imaginario

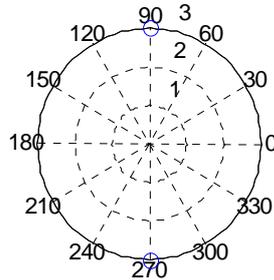


Figura 6. 1. Posición en el plano complejo de los ceros de transmisión

Siguiendo el método de síntesis desarrollado en el capítulo 2, podemos obtener los residuos de las funciones de transferencia y reflexión.

$k$	Valores propios	Residuos		Vectores	
	$\lambda_k$	$r_{22k}$	$r_{21k}$	$T_{Nk} = \sqrt{r_{22k}}$	$T_{1k} = r_{21k} / \sqrt{r_{22k}}$
1	1.3101	0.1576	0.1576	0.3969	-0.3969
2	0.6515	0.3730	-0.3730	0.6108	0.6108
3	-0.6515	0.3730	0.3730	0.6108	-0.6108
4	-1.3101	0.1576	-0.1576	0.3969	0.3969

Tabla 6. 2. Residuos valores propios y vectores  $T_{1k}$  y  $T_{Nk}$ .

A partir de éstos, agrupando los residuos en dos grupos según vimos en la sección 4.3, construiremos dos subredes que conectadas en paralelo nos conducirán a la red total en configuración *parallel-connected*. Esta configuración puede obtenerse, debido a que nuestro filtro es de grado par y simétrico, ya que ambas condiciones eran necesarias para poder llegar a esta topología.

La primera de las subredes, corresponde a la agrupación de los residuos  $k = 1$  y  $k = 4$ . La matriz y la topología que obtenemos son:

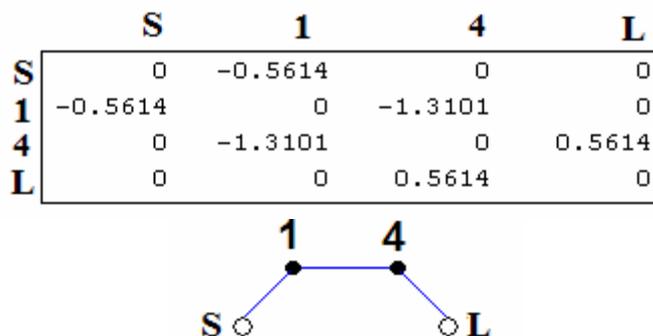


Figura 6. 2. Matriz de acoplo y topología de la primera subred

La segunda de las subredes, corresponde a la agrupación de los residuos  $k = 2$  y  $k = 3$ . La matriz y la topología que obtenemos para esta subred son:

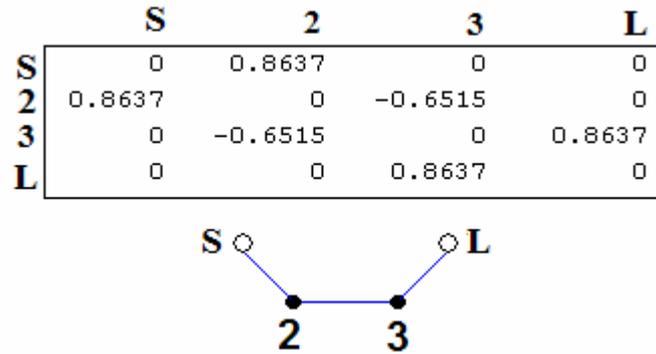


Figura 6. 3. Matriz de acoplo y topología de la segunda subred

Uniendo las dos matrices que hemos obtenido en una única matriz de acoplo  $N+2$  se obtiene es la siguiente:

0	-0.5614	0.8637	0	0	0
-0.5614	0	0	0	-1.3101	0
0.8637	0	0	-0.6515	0	0
0	0	-0.6515	0	0	0.8637
0	-1.3101	0	0	0	0.5614
0	0	0	0.8637	0.5614	0

(6.1)

correspondiente a la topología que se muestra a continuación:

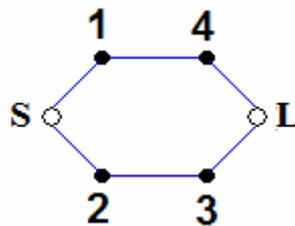


Figura 6. 4. Configuración *Parallel-Connected*

El análisis de la matriz (6.1), como veremos a continuación, nos conduce a la característica de transferencia y reflexión que pretendíamos obtener, con 20 dB de pérdidas de retorno y los dos ceros de transmisión a las frecuencias  $\omega \pm 3$ .

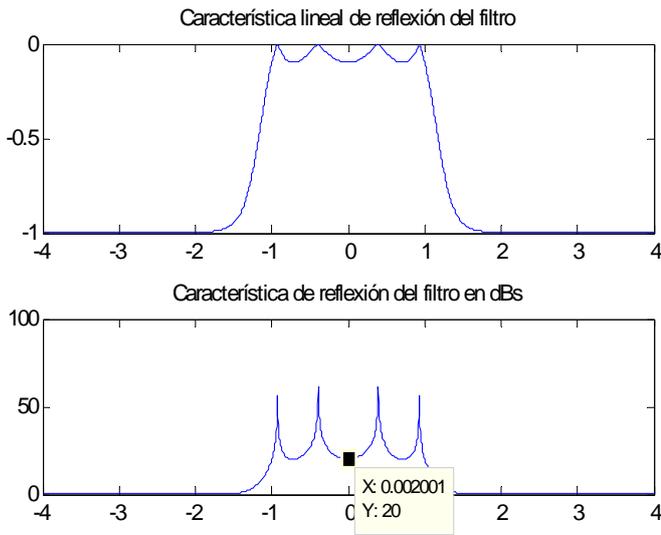


Figura 6. 5. Característica de reflexión del filtro

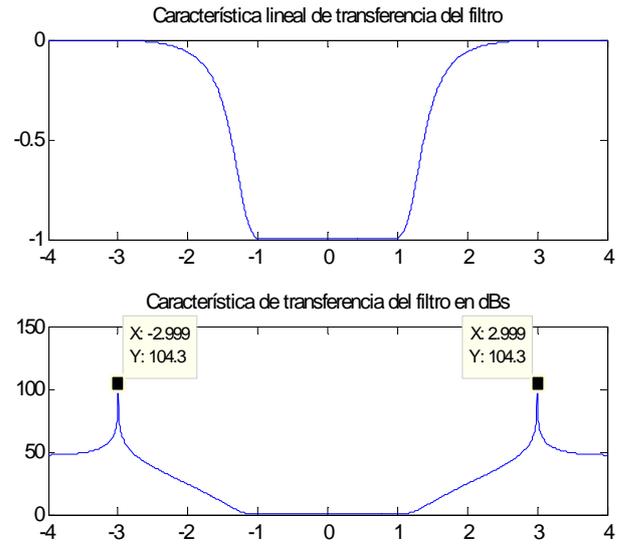


Figura 6. 6. Característica de transferencia del filtro

La respuesta frecuencial del filtro, de forma conjunta, presenta el siguiente aspecto:

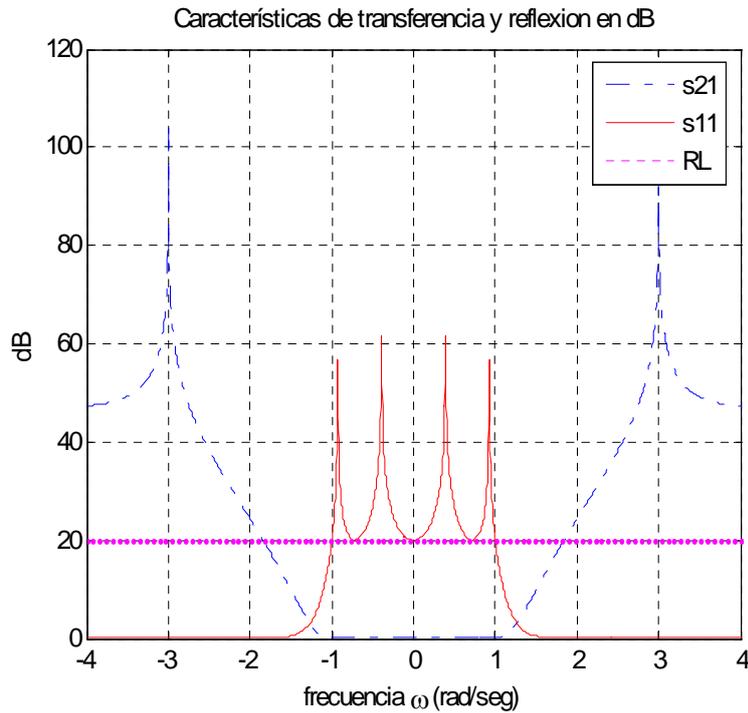


Figura 6. 7. Nivel de pérdidas de retorno y respuesta frecuencial del filtro

Y el retardo de grupo, es el siguiente:

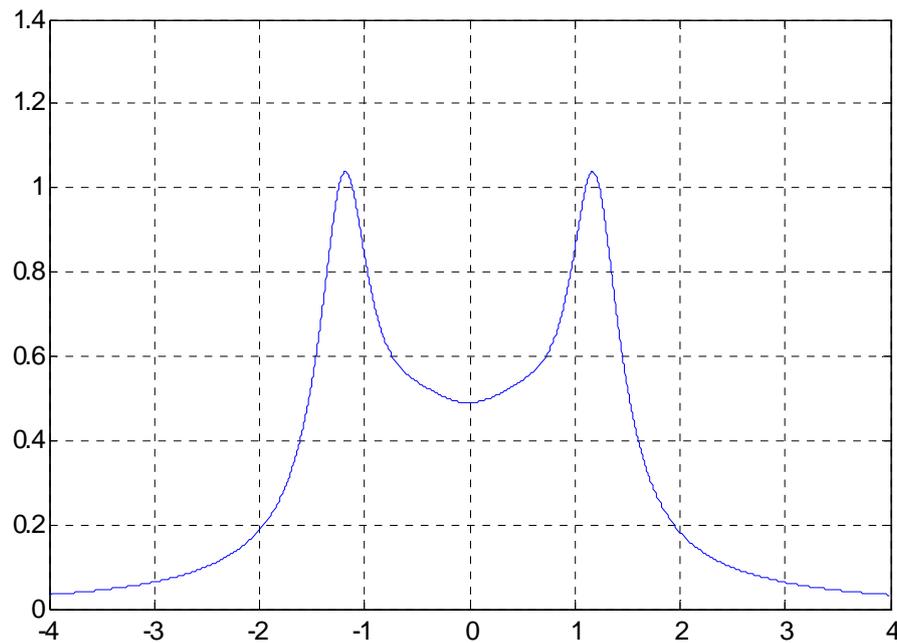


Figura 6. 8. Retardo de grupo

Finalmente, una vez obtenida la matriz (6.1) del filtro que pretendemos construir y conocida su topología (figura 6.2), podríamos implementarlo físicamente en distintas tecnologías. Si utilizamos por ejemplo, tecnología microstrip, un posible diseño sería el que mostramos a continuación:

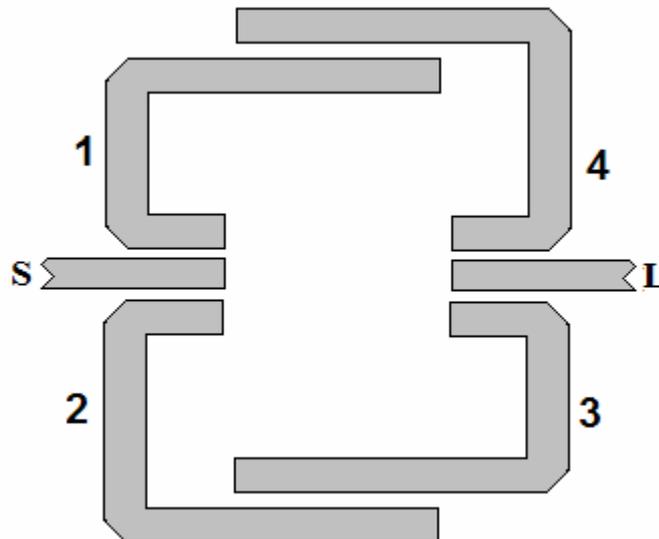


Figura 6. 9. Aspecto físico que tendría el filtro de cuarto orden que hemos diseñado

### 6.3 Diseño de un filtro paso banda de cuarto orden y dos ceros de transmisión, en una configuración alternativa.

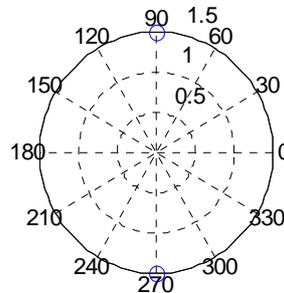
En este segundo ejemplo, vamos a diseñar un filtro paso banda del mismo orden que el anterior, y también con dos ceros de transmisión situados a frecuencias finitas. Sin embargo, en este caso conseguiremos reducir la matriz de acoplo inicial a otra matriz que permite una implementación física del filtro diferente. Las especificaciones serán las siguientes:

<i>Tipo</i>	Paso Banda Chebyshev	
<i>Orden</i>	4	
<i>Pérdidas de retorno</i>	23 dB	
<i>Ceros de transmisión</i>	$-j \cdot 1.4947$	$j \cdot 1.4947$

**Tabla 6. 3. Especificaciones del filtro**

Tendremos entonces dos ceros de transmisión a frecuencias finitas situados en el eje imaginario del plano complejo:

Ceros de tx deseados : Simetría alrededor del eje imaginario



**Figura 6. 10. Posición en el plano complejo de los ceros de transmisión**

En primer lugar, obtenemos la matriz transversal  $N+2$  siguiendo los procedimientos descritos en el tercer capítulo. El resultado es:

0	0.3329	-0.3329	-0.6867	0.6867	0
0.3329	1.3029	0	0	0	0.3329
-0.3329	0	-1.3029	0	0	0.3329
-0.6867	0	0	0.8562	0	0.6867
0.6867	0	0	0	-0.8562	0.6867
0	0.3329	0.3329	0.6867	0.6867	0

El análisis de esta matriz conduce a la respuesta frecuencial del filtro con las características especificadas. Sin embargo, supongamos que queremos implementar la siguiente topología:

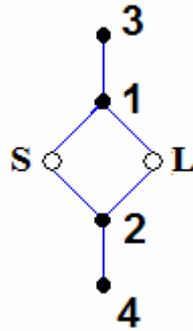


Figura 6. 11. Topología que deseamos implementar

En este caso, tenemos que realizar distintas transformaciones sobre la matriz de acoplo para conseguir anular los elementos no deseados, y obtener otra matriz que sí que se corresponda con esta topología.

La matriz a la que llegamos es entonces la siguiente:

0	0.7631	-0.7631	0	0	0
0.7631	-0.4453	0	0	-0.8475	0.7631
-0.7631	0	0.4453	0.8475	0	0.7631
0	0	0.8475	-0.8920	0	0
0	-0.8475	0	0	0.8920	0
0	0.7631	0.7631	0	0	0

(6.2)

De nuevo, el análisis de esta matriz que ahora sí corresponde a la topología de la figura 6.11, nos conduce a las características de transferencia y reflexión buscadas. Éstas características son:

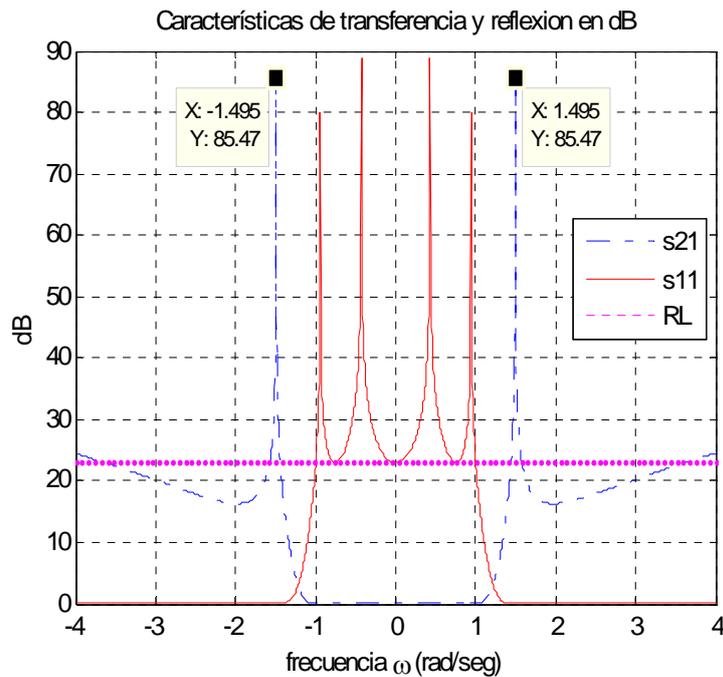


Figura 6. 12. Repuesta frecuencial y nivel de pérdidas de retorno del filtro diseñado

El retardo de grupo presenta la siguiente forma:

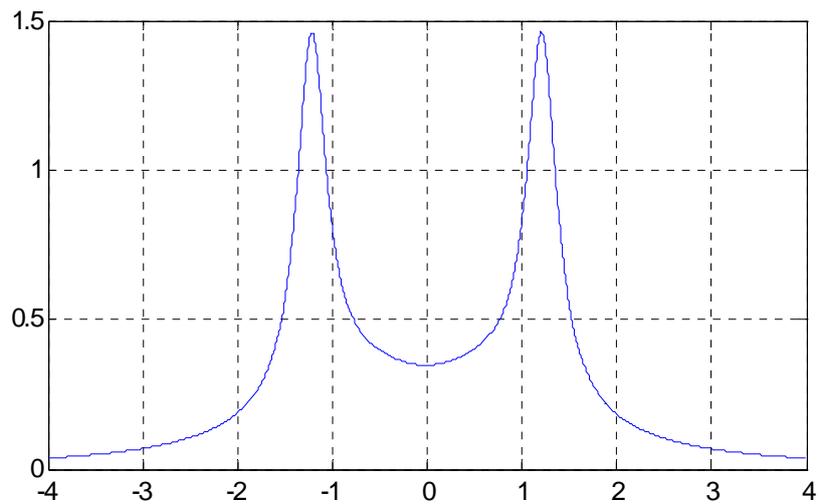


Figura 6. 13. Retardo de grupo

Finalmente, una vez obtenida la matriz (6.2) que se corresponde con la topología (6.11) podemos implementar el filtro físicamente en la tecnología deseada. Utilizando tecnología microstrip, un posible diseño sería el siguiente:

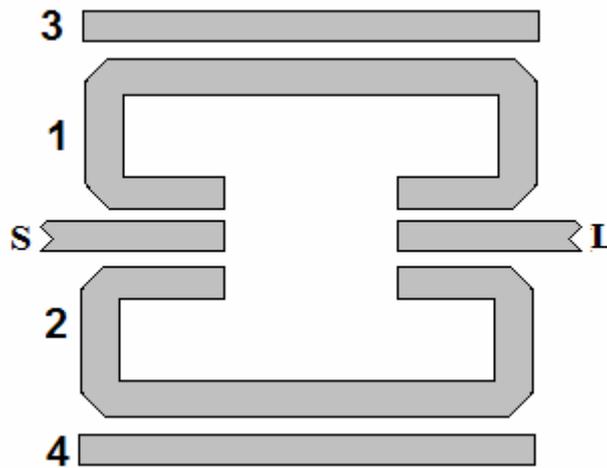


Figura 6. 14. Aspecto físico que tendría el filtro de cuarto orden que hemos diseñado

## 6.4 Diseño de un filtro paso banda de sexto orden con cuatro ceros de transmisión en configuración *parallel connected 4-2*

En este caso, vamos a diseñar un filtro de orden 6. Pretendemos sintetizarlo en tecnología microstrip utilizando una topología en configuración *parallel-connected*. Las especificaciones iniciales de nuestro filtro van a ser:

<i>Tipo</i>	Paso Banda Chebyshev
<i>Orden</i>	6
<i>Pérdidas de retorno</i>	22 dB
<i>Ceros de transmisión</i>	$-j \cdot 3$ $j \cdot 3$ 1.1 $-1.1$

Tabla 6. 4. Especificaciones del filtro

Vemos que se trata de un filtro de grado par  $N=6$  y simétrico, ya que los ceros de transmisión especificados, se encuentran en las siguientes posiciones del plano complejo

Ceros de tx deseados : Simetría alrededor del eje imaginario

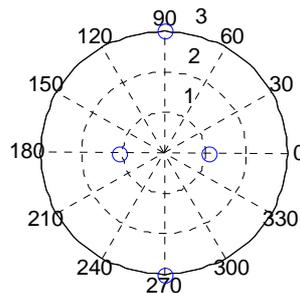


Figura 6. 15. Posición en el plano complejo de los ceros de transmisión

Siguiendo el método de síntesis desarrollado en el capítulo 2, obtenemos los residuos de las funciones de transferencia y reflexión.

$k$	Valores propios	Residuos		Vectores	
	$\lambda_k$	$r_{22k}$	$r_{21k}$	$T_{Nk} = \sqrt{r_{22k}}$	$T_{1k} = r_{21k} / \sqrt{r_{22k}}$
1	1.2589	0.1224	0.1224	0.3498	-0.3498
2	-0.9779	0.2305	0.2305	0.4801	-0.4801
3	0.9779	-0.2305	0.2305	0.4801	0.4801
4	-0.3277	-0.1967	0.1967	0.4435	0.4435
5	0.3277	0.1967	0.1967	0.4435	-0.4435
6	-1.2589	-0.1224	0.1224	0.3498	0.3498

Tabla 6. 5. Residuos valores propios y vectores  $T_{1k}$  y  $T_{Nk}$ .

A partir de éstos, agrupando los residuos en dos grupos, construiremos dos subredes que conectadas nos permitirán obtener la red total en configuración *parallel-connected*.

La primera de las subredes, se obtiene agrupando los residuos  $k = 1$  y  $k = 6$ . Para ellos se obtiene la siguiente matriz y la siguiente topología:

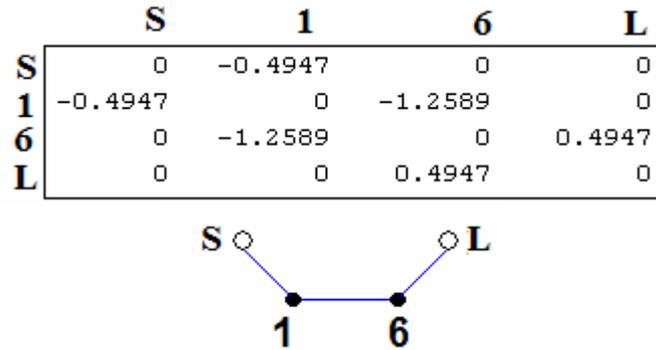


Figura 6. 16. Matriz de acoplo y topología de la primera subred

La segunda subred, la obtendremos agrupando el resto de los residuos, es decir  $k = 2, k = 3, k = 4$  y  $k = 5$ . La matriz y topología obtenidas para esta subred son:

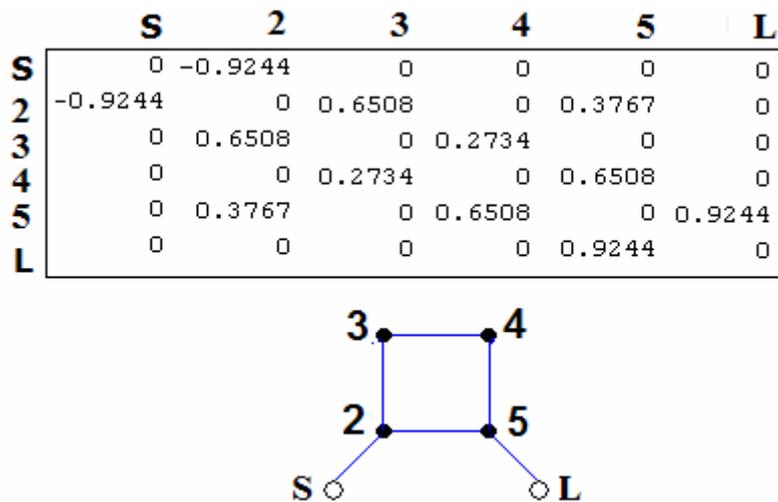


Figura 6. 17. Matriz de acoplo y topología de la segunda subred

Superponiendo las dos matrices que hemos obtenido se obtiene la siguiente matriz de acoplo  $N+2$ :

0	-0.4947	-0.9244	0	0	0	0	0
-0.4947	0	0	0	0	0	-1.2589	0
-0.9244	0	0	0.6508	0	0.3767	0	0
0	0	0.6508	0	0.2734	0	0	0
0	0	0	0.2734	0	0.6508	0	0
0	0	0.3767	0	0.6508	0	0	0.9244
0	-1.2589	0	0	0	0	0	0.4947
0	0	0	0	0	0.9244	0.4947	0

(6.3)

Esta matriz, se corresponde con la topología *parallel-connected* que se muestra a continuación:

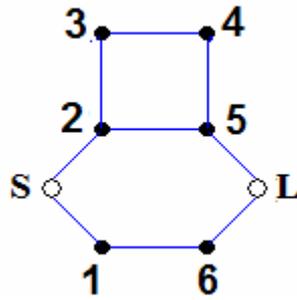


Figura 6. 18. Configuración *Parallel-Connected*

El análisis de la matriz que hemos obtenido, produce las características de transferencia y reflexión especificadas:

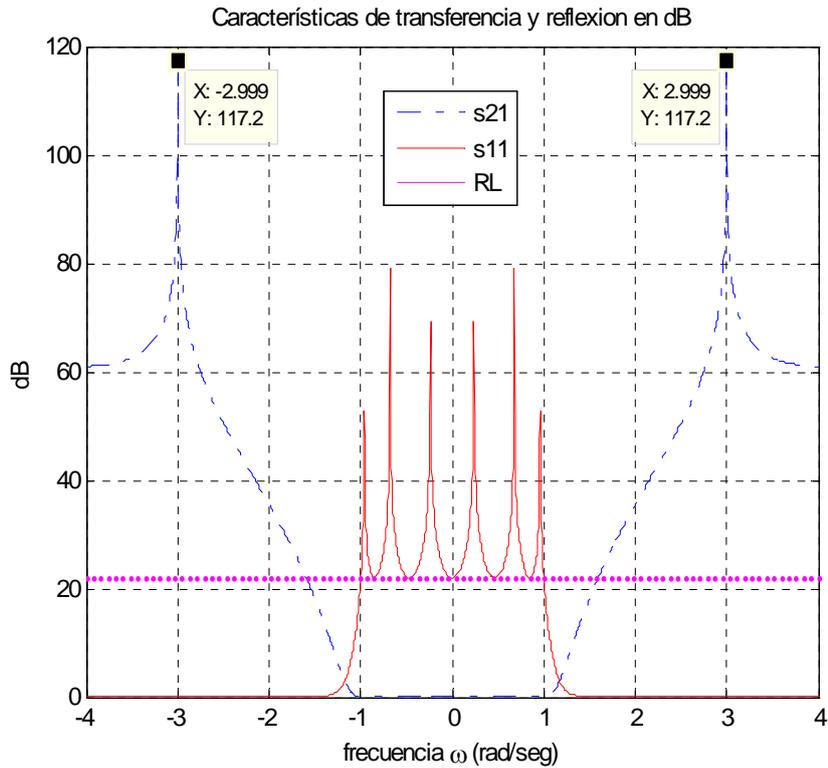
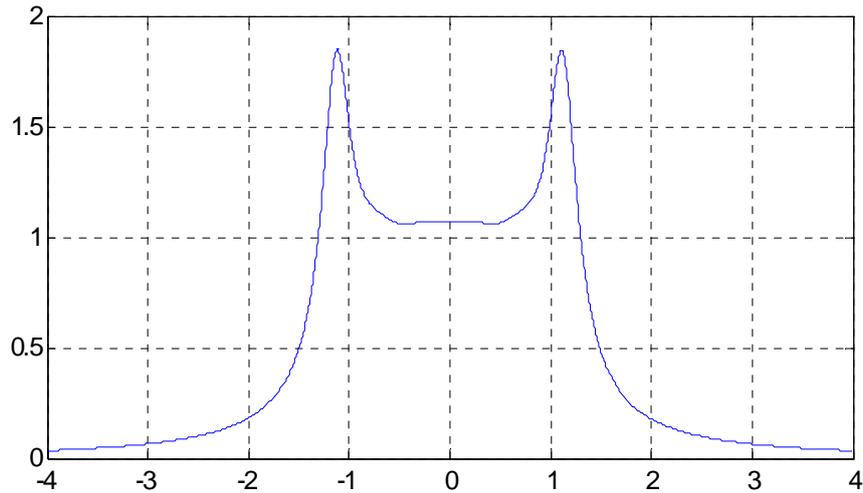


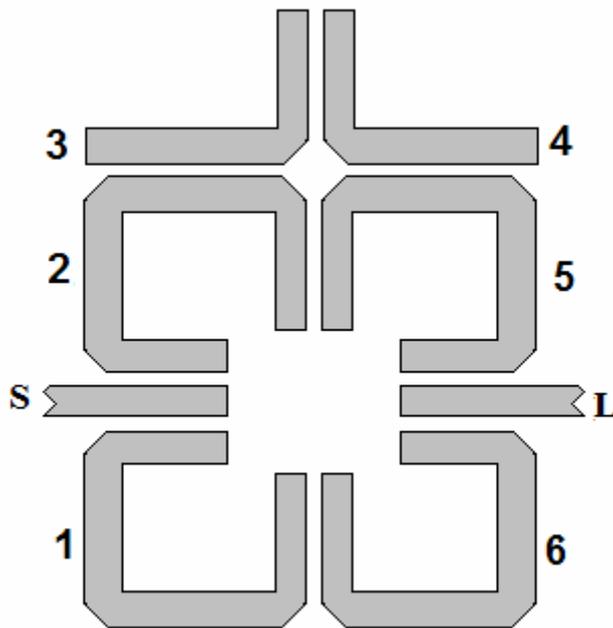
Figura 6. 19. Respuesta frecuencial y nivel de pérdidas de retorno del filtro diseñado

Por otra parte, el retardo de grupo es bastante plano en la parte central de la banda de paso debido a los dos ceros situados en el eje real que hemos utilizado en el diseño. Su representación gráfica se muestra a continuación.



**Figura 6. 20. Retardo de grupo**

Por último, conocida la matriz de acoplo del filtro, así como la topología que ésta implementa, podremos construir el filtro físico en la tecnología deseada. Si utilizamos tecnología microstrip, un posible diseño sería el siguiente:



**Figura 6. 21. Aspecto físico que tendría el filtro de cuarto orden que hemos diseñado**

## 6.5 Diseño de un filtro paso banda de quinto orden con dos ceros de transmisión, en configuración *cul-de-sac*

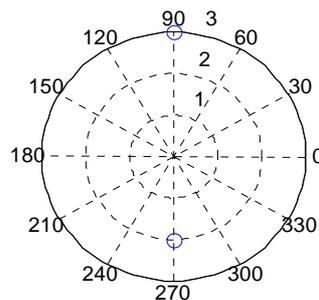
En este ejemplo, pretendemos diseñar un filtro con las siguientes características:

<i>Tipo</i>	Paso Banda Chebyshev
<i>Orden</i>	5
<i>Pérdidas de retorno</i>	25 dB
<i>Ceros de transmisión</i>	$-j \cdot 2 \quad j \cdot 3$

**Tabla 6. 6. Especificaciones del filtro**

Se trata por tanto de un filtro de orden impar igual a 5, con dos ceros de transmisión a frecuencias finitas. Pretendemos utilizar una configuración *cul-de-sac* para su implementación, cosa que será posible, ya que el número de ceros de transmisión finitos es menor o igual que el orden  $N$  del filtro menos tres ( $nfz = 2 \leq 2 = N - 3$ ). Concretamente, los ceros de transmisión se sitúan en:

Ceros de tx deseados : Simetría alrededor del eje imaginario



**Figura 6. 22. Posición en el plano complejo de los ceros de transmisión**

Para obtener la matriz que nos conducirá a una topología *cul-de-sac*, en primer lugar hemos de obtener dicha la matriz de acoplo en configuración transversal, y transformar ésta en otra con configuración *folded canonical*. Siguiendo los procedimientos descritos a lo largo del proyecto para realizar estas transformaciones, obtenemos las siguientes matrices:

	<b>S</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>L</b>
<b>S</b>	0	0.3916	0.3679	-0.5452	-0.5697	0.5771	0
<b>1</b>	0.3916	-1.3655	0	0	0	0	0.3916
<b>2</b>	0.3679	0	1.3237	0	0	0	0.3679
<b>3</b>	-0.5452	0	0	1.0386	0	0	0.5452
<b>4</b>	-0.5697	0	0	0	-0.9712	0	0.5697
<b>5</b>	0.5771	0	0	0	0	0.0708	0.5771
<b>L</b>	0	0.3916	0.3679	0.5452	0.5697	0.5771	0

**Figura 6. 23. Matriz transversal de un filtro de orden 5**

	S	1	2	3	4	5	L
S	0	1.1151	0	0	0	0	0
1	1.1151	-0.0106	0.9622	0	0	-0.0001	0
2	0	0.9622	-0.0142	-0.6565	-0.1006	-0.0852	0
3	0	0	-0.6565	0.1639	-0.7175	0	0
4	0	0	-0.1006	-0.7175	-0.0321	0.9584	0
5	0	-0.0001	-0.0852	0	0.9584	-0.0106	1.1151
L	0	0	0	0	0	1.1151	0

Figura 6. 24. Matriz en la forma *folded canonical* de un filtro de orden 5

Partiendo de ésta matriz, ya podemos obtener otra que nos permita llegar a una topología *cul-de-sac*. Para ello, anulamos el elemento  $M_{23}$  mediante el pivote  $[2,4]$ , y llegamos a:

	S	1	2	3	4	5	L
S	0	1.1151	0	0	0	0	0
1	1.1151	-0.0106	0.7099	0	0.6495	0	0
2	0	0.7099	0.0778	0	0	-0.7098	0
3	0	0	0	0.1639	-0.9725	0	0
4	0	0.6495	0	-0.9725	-0.1241	0.6496	0
5	0	-0.0001	-0.7098	0	0.6496	-0.0106	1.1151
L	0	0	0	0	0	1.1151	0

Figura 6. 25. Matriz correspondiente a la topología *cul-de-sac*. Filtro grado 5

Esta matriz, representa la topología *cul-de-sac* que pretendíamos conseguir:

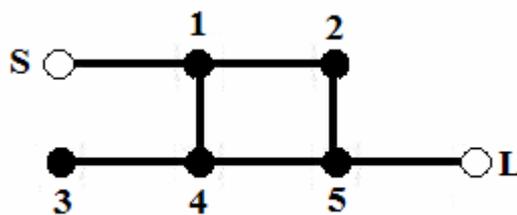


Figura 6. 26. Topología *cul-de-sac* para un filtro de grado 5

El análisis de esta última matriz, al igual que el de todas las anteriores, produce las características de transferencia y reflexión especificadas en un principio. Podemos ver a continuación, los dos ceros especificados situados en  $\omega = -2$  y  $\omega = 3$ , así como las pérdidas de retorno de  $-25$  dB.

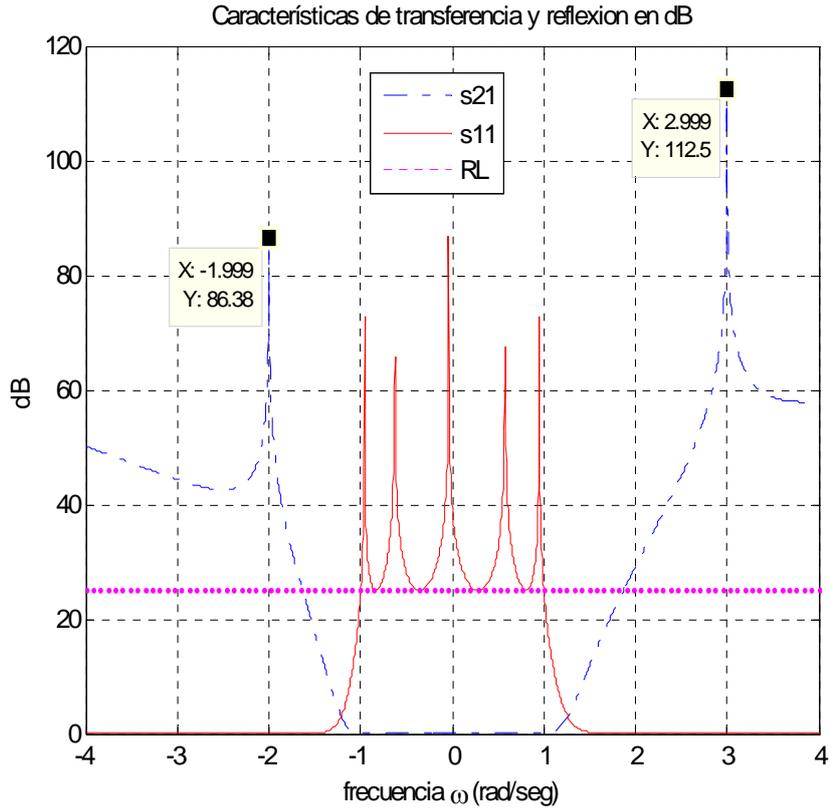


Figura 6. 27. Respuesta frecuencial y nivel de pérdidas de retorno del filtro diseñado

El retardo de grupo por su parte presenta el siguiente aspecto:

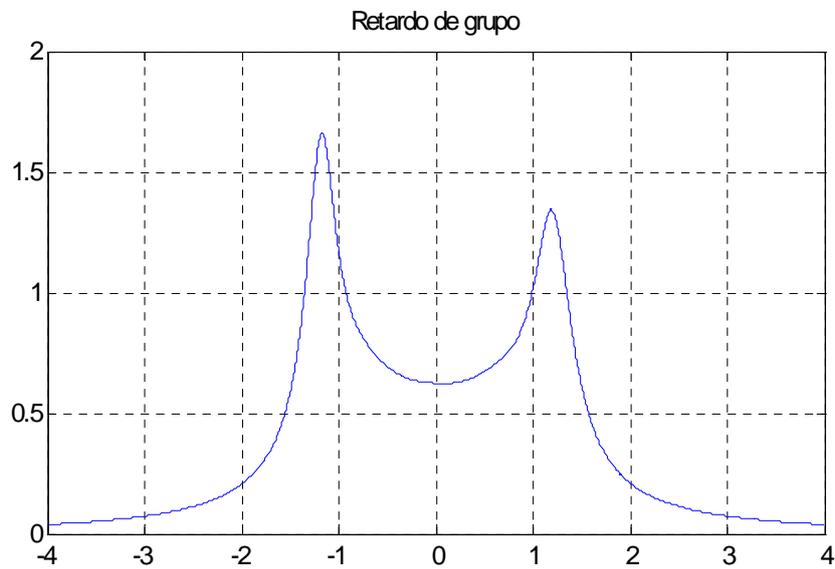


Figura. 6. 28 Retardo de grupo

Finalmente, como ya conocemos la matriz que implementa la topología *cul-de-sac* que deseábamos, podemos implementar físicamente el filtro. Si utilizamos tecnología microstrip, un posible diseño sería el siguiente:

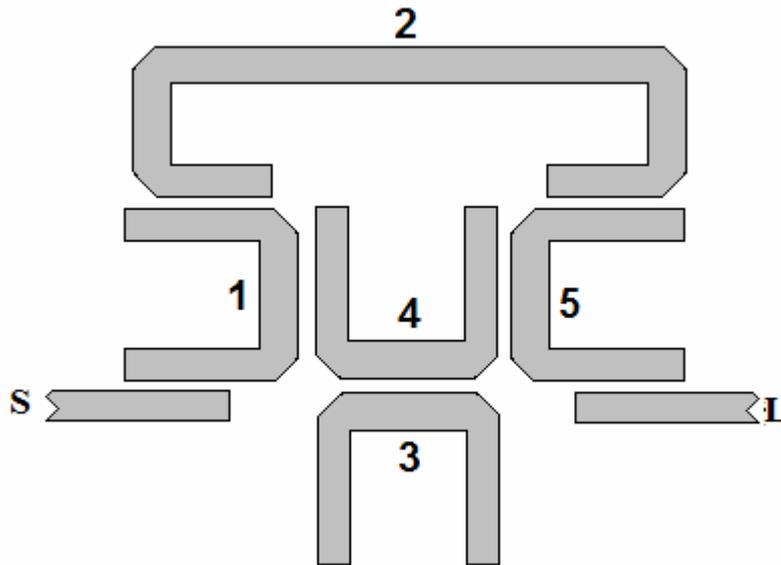


Figura 6. 29. Aspecto físico que tendría el filtro de cuarto orden que hemos diseñado

## 6.6 Diseño e implementación de filtros planares con múltiples acoplos

A continuación vamos a diseñar dos filtros en tecnología microstrip, uno de ellos paso banda y el otro de banda rechazada. Abordaremos en primer lugar, la síntesis teórica y la obtención de la matriz de acoplamiento de cada filtro, así como su topología. En segundo lugar hablaremos acerca de la implementación, y finalmente mostraremos los resultados obtenidos tras la fabricación y medida de los filtros [6].

### 6.6.1 Filtro paso banda

#### 6.6.1.1 Síntesis

El filtro que vamos a diseñar en primer lugar, será un filtro paso banda de segundo orden centrado a la frecuencia  $f_c = 1420$  Mhz, con un ancho de banda de 20 Mhz. Los ceros de transmisión se situarán en las frecuencias  $f_1 = 1305$  Mhz y  $f_2 = 1440$  Mhz. Transformando estas especificaciones mediante la ecuación (2.303), obtenemos los siguientes valores normalizados:

<i>Tipo</i>	Paso Banda
<i>Orden</i>	2
<i>Pérdidas de retorno</i>	22 dB
<i>Ceros de transmisión</i>	$-j \cdot 12.0067$ $j \cdot 1.9861$

Tabla 6. 7. Especificaciones del filtro

Si realizamos la síntesis que nos conduce a la matriz de acoplamiento transversal  $N + 2$  según vimos en el tercer capítulo, se obtiene:

	<b>S</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>L</b>
<b>S</b>	0	-1.2620	0.4747	0.1387
<b>1</b>	-1.2620	1.7482	0	1.2620
<b>2</b>	0.4747	0	-1.5874	0.4747
<b>L</b>	0.1387	1.2620	0.4747	0

Figura 6. 30. Matriz de acoplo transversal

que se corresponde con la siguiente topología:

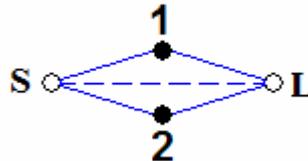


Figura 6. 31. Topología del filtro paso banda que vamos a construir

En esta figura, la línea sólida representa los acoplos entre los puertos de entrada y salida y los resonadores, mientras que la línea discontinua representa el acoplo directo entre la fuente ( $S$ ) y la carga ( $L$ ). Con esta estructura, gracias a la existencia del acoplo directo que acabamos de mencionar, conseguiremos los dos ceros de transmisión que habíamos especificado en la respuesta frecuencial del filtro. De hecho, si analizamos la matriz de acoplo (6.30) desnormalizando los resultados obtenidos, y por tanto centrado los resultados a la frecuencia central  $f_c = 1420$  Mhz, con un ancho de banda de 20 Mhz, comprobamos cómo se obtiene la respuesta frecuencial especificada, con 22 dB de pérdidas de retorno y los ceros de transmisión a las frecuencias  $f_1 = 1305$  Mhz y  $f_2 = 1440$  Mhz:

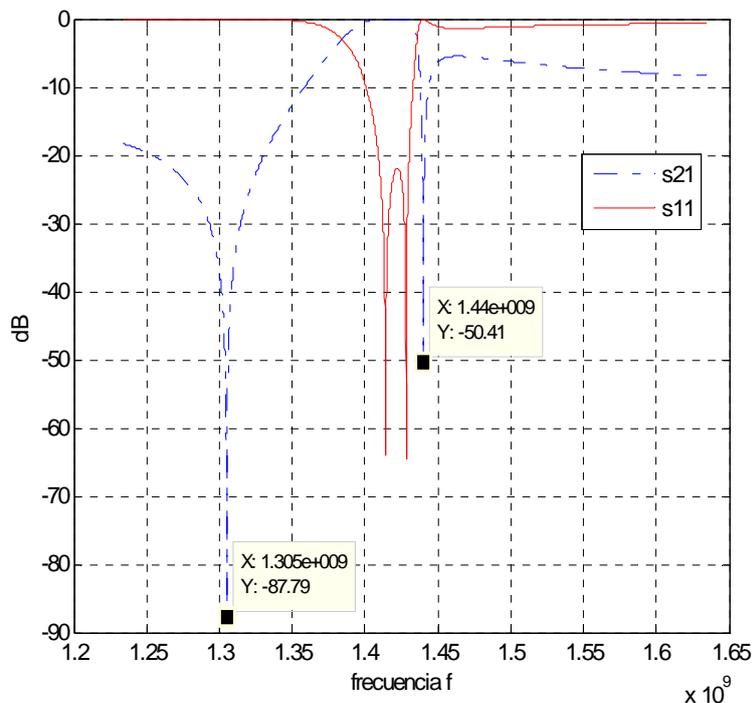


Figura 6. 32. Respuesta frecuencial del filtro, dada por el análisis de la matriz de acoplo

6.6.1.2 Implementación y resultados

Para implementar en tecnología microstrip la topología mostrada en la figura 6.31, utilizaremos la siguiente estructura:

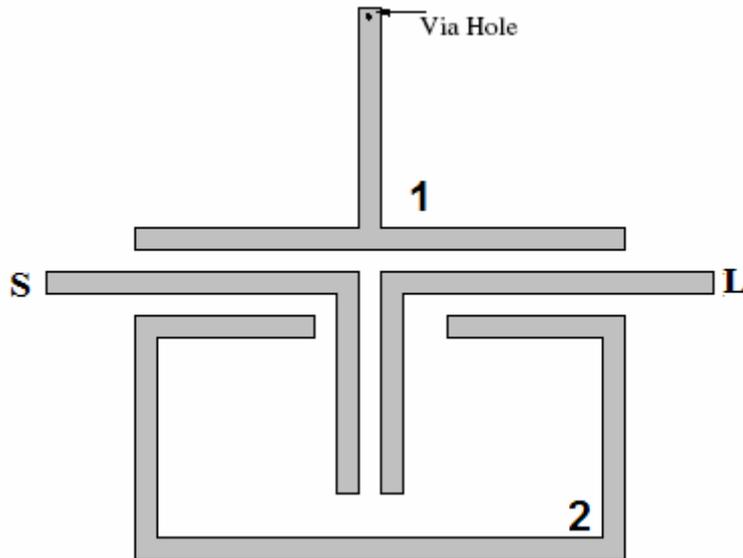


Figura 6. 33. Estructura que implementa un filtro paso banda con la topología de la figura 6.31

En esta estructura estamos utilizando un resonador en lazo abierto con una longitud igual a  $\lambda/2$  de la frecuencia central, y un stub cortocircuitado en  $\lambda/4$ . La diferencia de longitud entre ambos resonadores produce entradas no nulas en la diagonal de la matriz de acoplo (figura 6.30). Los signos de éstas entradas o acoplos no nulos, se pueden controlar ajustando la diferencia de longitudes entre los resonadores 1 y 2. Por otra parte, la forma en que se doblan las líneas de entrada y salida produce la aparición de un acoplo capacitivo entre los puertos de entrada y salida que controla el cero de transmisión situado a frecuencias inferiores a la banda de paso. De hecho, si éste acoplo fuera nulo, dicho cero de transmisión desaparecería. Esto se puede comprobar fácilmente analizando la matriz de acoplo con  $M_{SL} = 0$ :

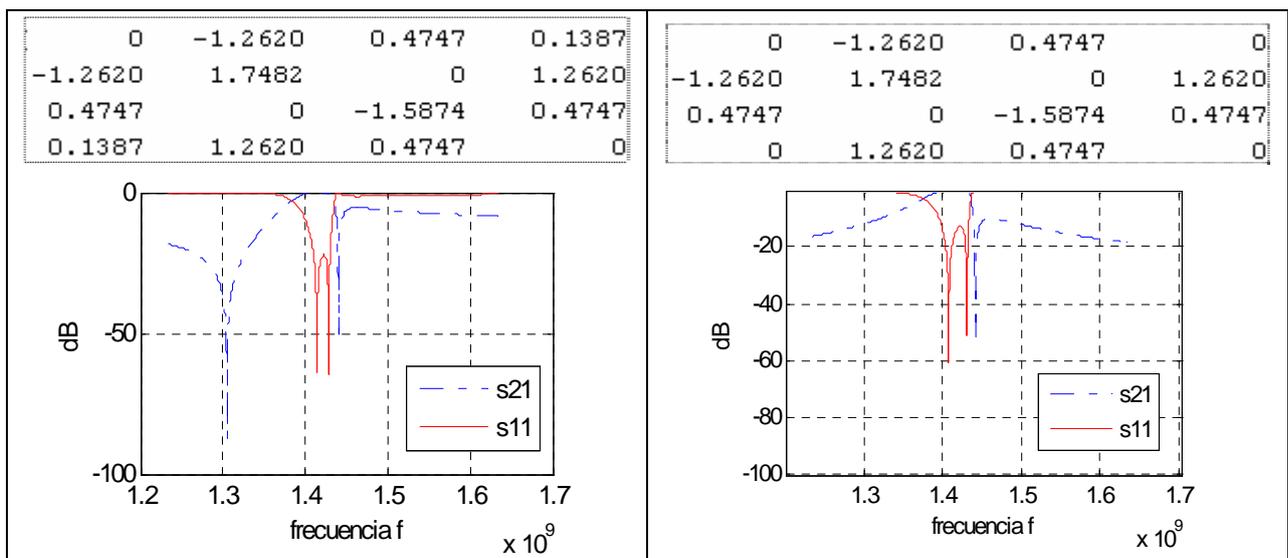


Tabla 6. 8. Respuesta del filtro con el acoplo directo y sin él.

La posición del cero de transmisión que se encuentra a frecuencias superiores a las de la banda de paso, se controlará mediante la diferencia de longitudes de los resonadores 1 y 2. Combinando el efecto de ambos ceros de transmisión, incrementaremos la selectividad del filtro a ambos lados de la banda de paso.

El acoplo capacitivo introducido al doblar el stub dependerá de dos parámetros, el gap ( $d_g$ ) y la longitud de acoplo ( $l_c$ ). El resto de los parámetros determinan la longitud efectiva de cada resonador y por tanto la diferencia de longitudes entre el primer y el segundo resonador. La estructura del filtro, con las medidas utilizadas es la siguiente:

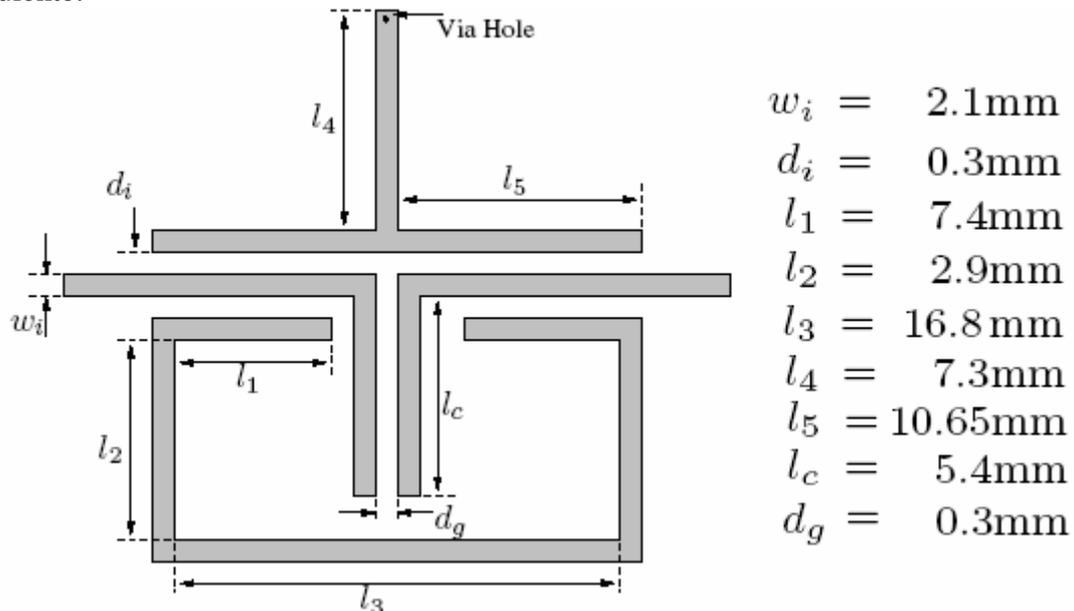


Figura 6. 34. Estructura y medidas para la implementación del filtro

El sustrato empleado en este filtro es un RT-DUROID/6006 con una permitividad relativa de  $\epsilon_R = 6.15$  y un grosor de 1.52 mm.

La respuesta ideal de esta estructura, como vemos a continuación, se corresponde con la que obteníamos de la matriz de acoplo de la figura 6.30:

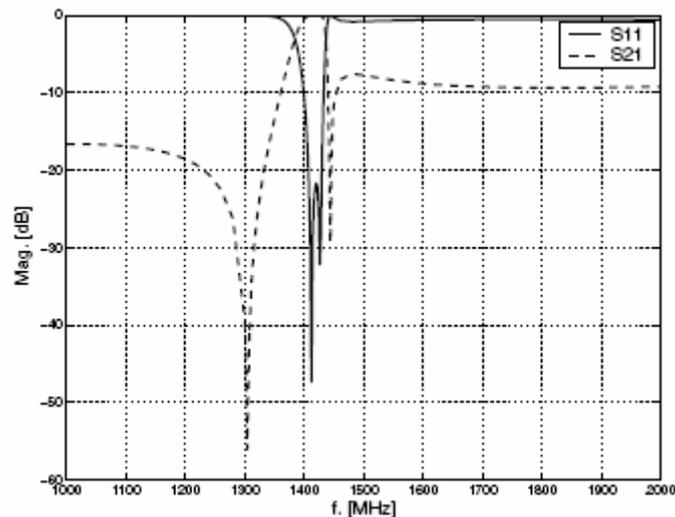


Figura 6. 35. Respuesta frecuencial de la estructura mostrada en la figura 6.34

El filtro fabricado correspondiente al diseño de la figura 6.34 es el siguiente:

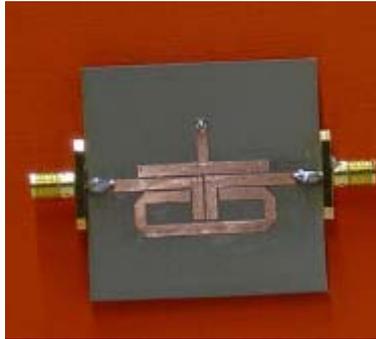


Figura 6. 36. Aspecto del filtro paso banda fabricado

Finalmente, si comparamos los resultados medidos para éste filtro, con la simulación electromagnética de onda completa basada en la ecuación integral incluyendo las pérdidas en el sustrato dieléctrico y en las áreas impreso metálicas, vemos que existe buena concordancia entre los resultados medidos y los que se esperaban obtener:

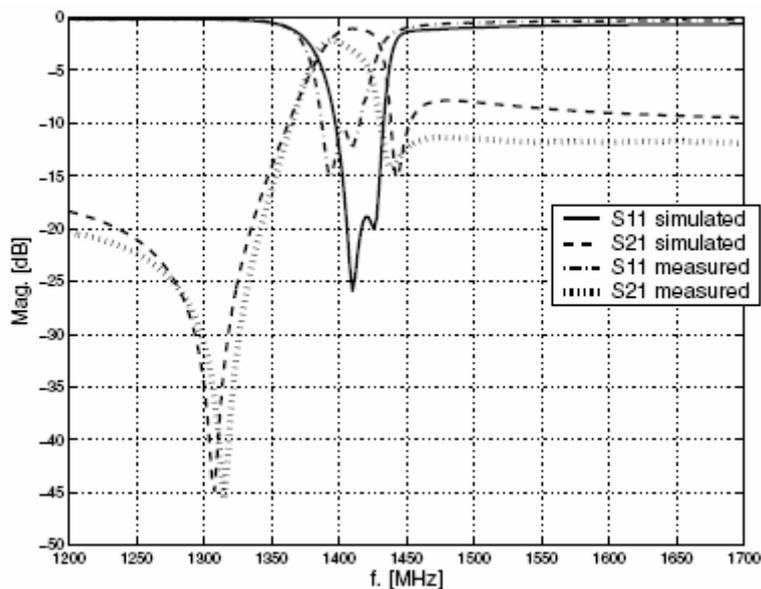


Figura 6. 37. Resultados simulados y medidos para el filtro paso banda de la figura 6.36

## 6.6.2 Filtro de banda rechazada

### 6.6.2.1 Síntesis

El filtro que vamos a diseñar en segundo lugar, será un filtro de banda rechazada de orden 2, centrado a la frecuencia  $f_c = 1420$  Mhz, con un ancho de banda de 20 Mhz. Los ceros de reflexión se situarán en las frecuencias  $f_1 = 1395$  Mhz y  $f_2 = 1820$  Mhz. Transformando estas especificaciones mediante la ecuación (2.251), obtenemos los valores normalizados.

Las especificaciones en valores normalizados son por tanto:

<i>Tipo</i>	Banda rechazada
<i>Orden</i>	2
<i>Pérdidas de retorno</i>	22 dB
<i>Ceros de transmisión</i>	$-j \cdot 2.5224 \quad j \cdot 35.6044$

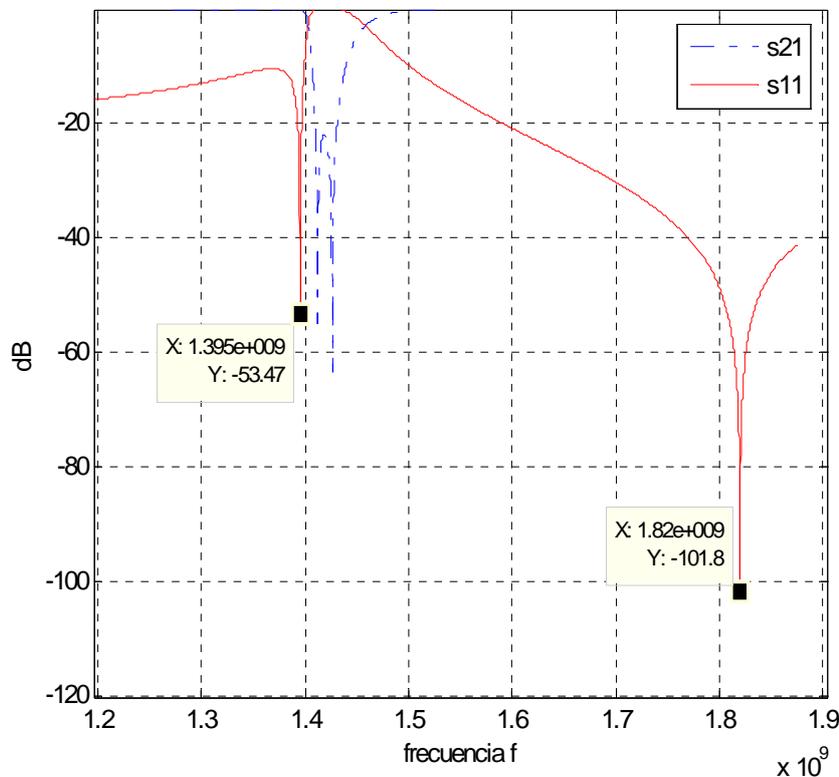
**Tabla 6. 9. Especificaciones del filtro**

Si realizamos la síntesis para obtener la matriz de acoplamiento transversal  $N + 2$  se obtiene:

	<b>S</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>L</b>
<b>S</b>	0	-1.6926	0.7851	0.9298
<b>1</b>	-1.6926	-4.5776	0	1.6926
<b>2</b>	0.7851	0	2.3515	0.7851
<b>L</b>	0.9298	1.6926	0.7851	0

**Figura 6. 38. Matriz de acoplo transversal**

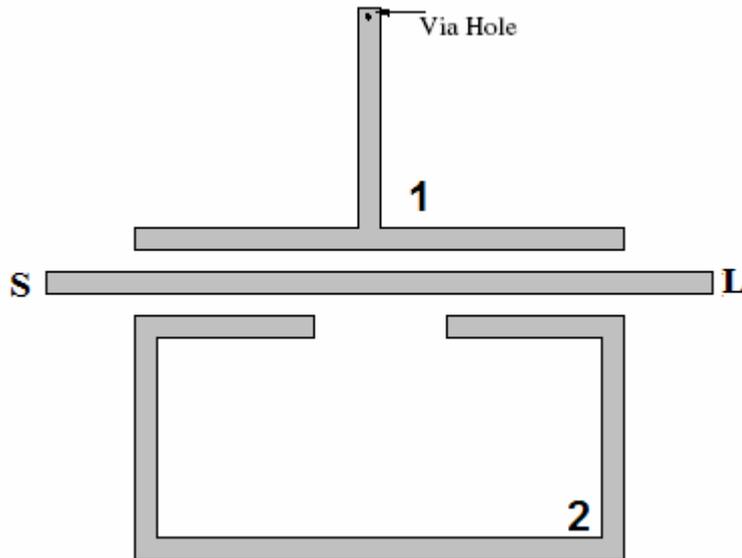
que se corresponde de nuevo a la siguiente topología de la figura 6.31. Analizando esta matriz de acoplo y desnormalizando los resultados de forma que la respuesta quede centrada a  $f_c = 1420$  Mhz y con un ancho de banda de 20 Mhz, comprobamos cómo se obtiene la respuesta frecuencial especificada, con 22 dB de pérdidas de retorno y los ceros de reflexión a las frecuencias  $f_1 = 1395$  Mhz y  $f_2 = 1820$  Mhz:



**Figura 6. 39. Respuesta frecuencial del filtro, dada por el análisis de la matriz de acoplo**

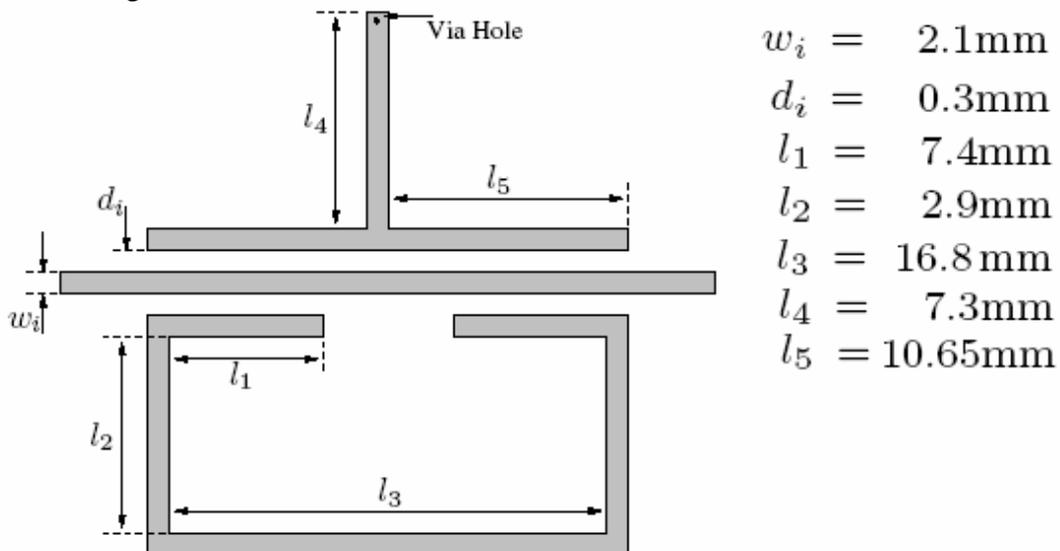
### 6.6.2.2 Implementación y resultados

Para implementar en tecnología microstrip el filtro de banda rechazada, utilizaremos la estructura que se muestra a continuación:



**Figura 6. 40. Estructura que implementa un filtro de banda rechazada con la topología de la figura 6.31**

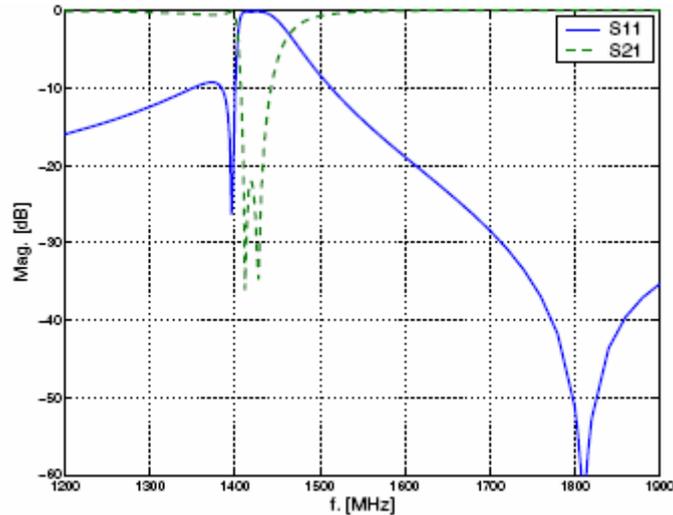
De nuevo, en esta estructura estamos utilizando un resonador en lazo abierto con una longitud igual a  $\lambda/2$  de la frecuencia central, y un stub cortocircuitado en  $\lambda/4$ . La diferencia de longitudes entre estos resonadores servirá en este caso para controlar el cero de reflexión que aparece a frecuencias más bajas que la banda de paso. Además, ahora la línea directa de la entrada a la salida implementará un acoplo de tipo inductivo entre la fuente y la carga., a diferencia de lo que ocurría en el filtro paso banda, en el que este acoplo era capacitivo. La estructura del filtro, con las medidas utilizadas en este caso es la siguiente:



**Figura 6. 41. Estructura y medidas para la implementación del filtro**

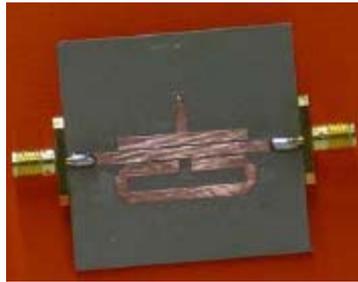
El sustrato empleado en este filtro es también un RT-DUROID/6006 con una permitividad relativa de  $\epsilon_R = 6.15$  y un grosor de 1.52 mm.

La respuesta ideal de esta estructura resulta ser entonces la que buscábamos, es decir, la de un filtro de banda rechazada, con dos ceros de reflexión, uno a cada lado de la banda eliminada:



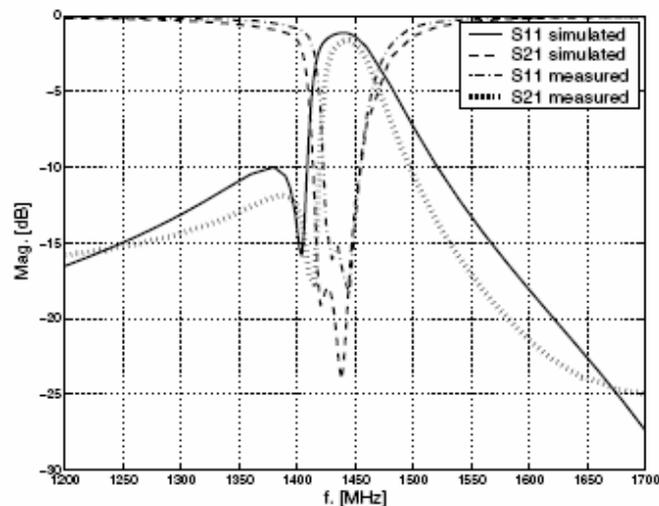
**Figura 6. 42. Respuesta frecuencial de la estructura mostrada en la figura 6.41**

El filtro fabricado correspondiente al diseño de la figura 6.41 es el siguiente:



**Figura 6. 43. Aspecto del filtro paso banda fabricado**

Finalmente, si comparamos los resultados medidos para éste filtro, con la simulación electromagnética incluyendo las pérdidas en el sustrato dieléctrico y en las áreas impresas metálicas, vemos que existe buena concordancia entre los resultados medidos y los que se esperaban obtener.



**Figura 6. 44. Resultados simulados y medidos para el filtro paso banda de la figura 6.43**

## 6.7 Diseño de filtros en tecnología híbrida.

En este apartado vamos a diseñar tres filtros diferentes, cuya implementación se realizará en tecnología híbrida, puesto que mezclaremos tecnología guiada y tecnología microstrip. La estructura básica estará formada por una guía de onda cuadrada de longitudes  $a$  y  $b$ , y altura  $h = h_1 + h_2$ . En el interior de la guía se sitúa un dieléctrico de espesor  $h_1$  y permitividad relativa  $\epsilon_R = 2$ , sobre el que existe un circuito impreso en tecnología microstrip, formado por un resonador, un puerto de entrada y otro de salida. La posición y las longitudes de este circuito impreso se especificarán en cada circuito diseñado, así como el valor de las dimensiones de la guía y del dieléctrico. En general, el filtro presentará el siguiente aspecto:

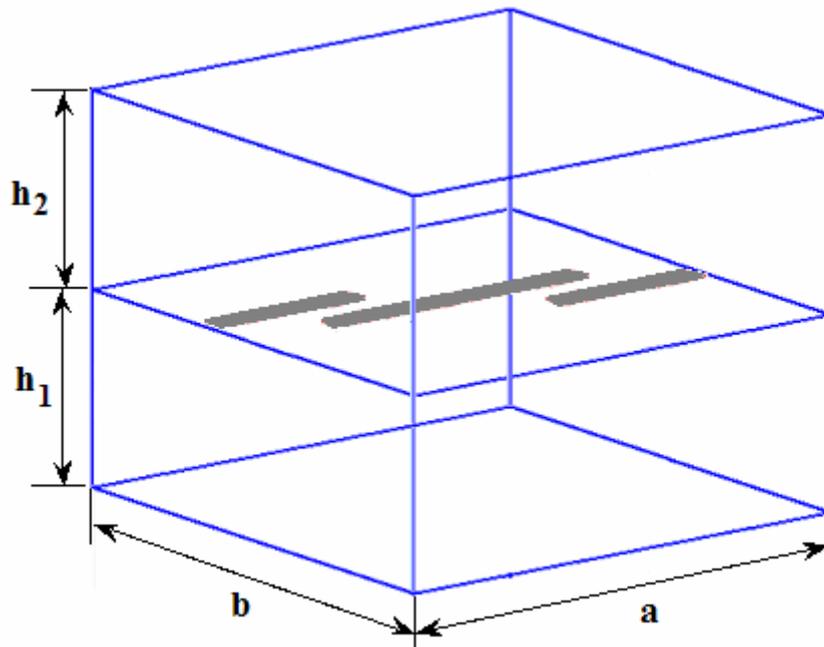


Figura 6. 45. Filtro en tecnología híbrida

### 6.7.1 Diseño con dos ceros de transmisión asimétricos

El primer filtro que vamos a diseñar, será un filtro paso banda con dos ceros de transmisión situados asimétricamente alrededor de la frecuencia central  $f_c = 4.67$  Ghz. El ancho de banda será de 0.2 Ghz y los ceros estarán situados exactamente a las frecuencias  $f_1 = 4.378$  Ghz y  $f_2 = 5.8223$  Ghz. Transformando estas especificaciones mediante la ecuación (2.251), obtenemos los valores normalizados:

<i>Tipo</i>	Paso Banda
<i>Orden</i>	2
<i>Pérdidas de retorno</i>	10 dB
<i>Ceros de transmisión</i>	$-j \cdot 3.0174$ $j \cdot 10.3827$

Tabla 6. 10. Especificaciones del filtro

Si realizamos la síntesis que estudiamos en el capítulo 3, necesaria para obtener la matriz de acoplamiento transversal  $N + 2$  obtenemos:

	<b>S</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>L</b>
<b>S</b>	0	-0.5200	0.6745	0.0247
<b>1</b>	-0.5200	1.0725	0	0.5200
<b>2</b>	0.6745	0	-0.9604	0.6745
<b>L</b>	0.0247	0.5200	0.6745	0

Figura 6. 46. Matriz de acoplo transversal

Analizando esta matriz de acoplo y desnormalizando los resultados de forma que la respuesta quede centrada a 4.67 Ghz y con un ancho de banda de 0.2 Ghz, comprobamos que la respuesta frecuencial es la que habíamos especificado:

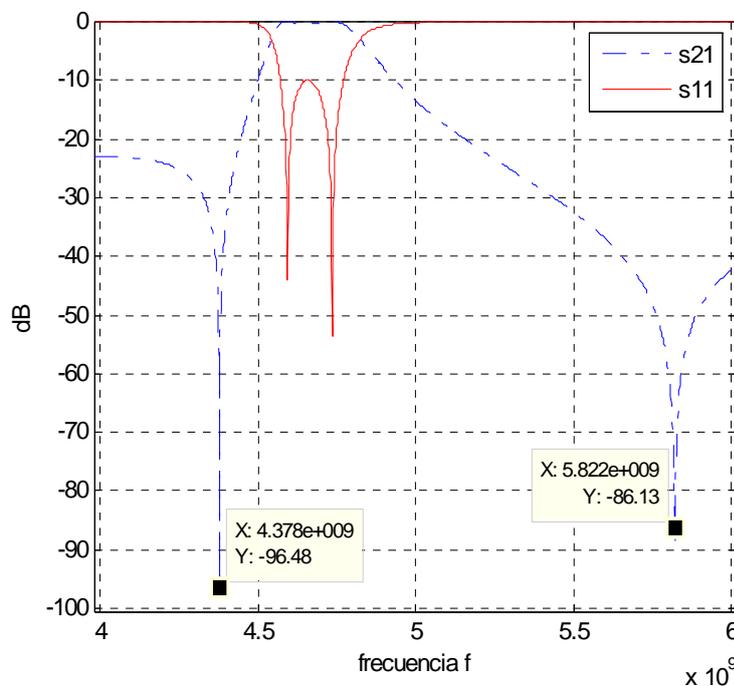


Figura 6. 47. Respuesta frecuencial del filtro, dada por el análisis de la matriz de acoplo

La estructura con la que vamos a implementar este filtro, es la mostrada en la figura 6.45 con las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned}
 a &= 40\text{mm} & h_1 &= 3\text{mm} \\
 b &= 40\text{mm} & h_2 &= 3\text{mm}
 \end{aligned}$$

mientras que el circuito impreso en tecnología microstrip estará situado según las coordenadas que se indican a continuación.

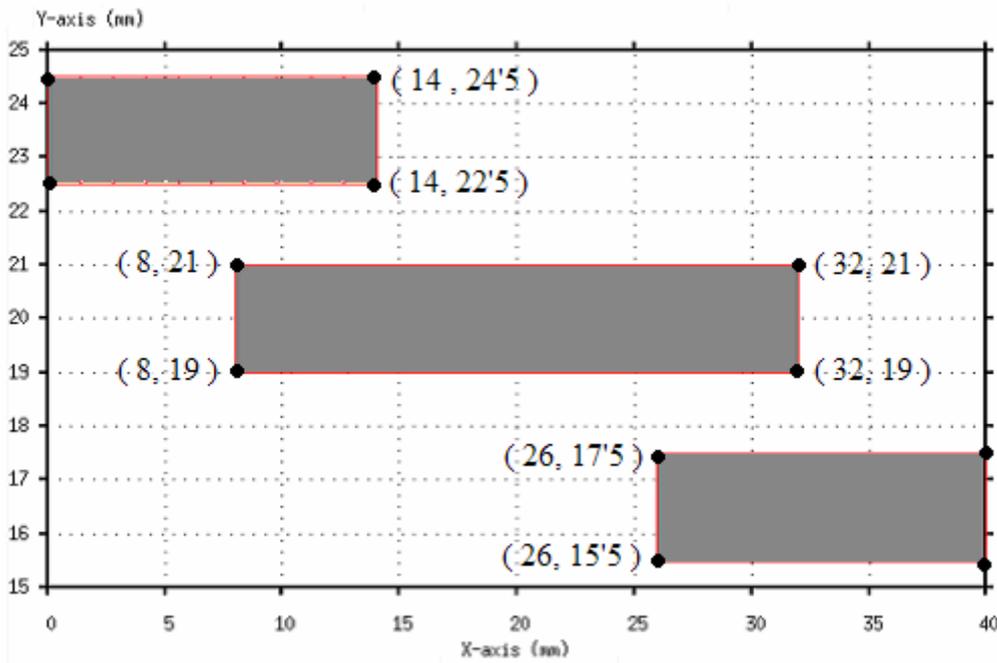


Figura 6. 48. Vista superior del circuito impreso en la estructura

Para obtener la respuesta frecuencial de esta estructura, vamos a utilizar el software desarrollado en [14]. Dicha respuesta resulta ser, como esperábamos, la de un filtro de banda rechazada con dos ceros de reflexión situados asimétricamente alrededor de la banda de paso:

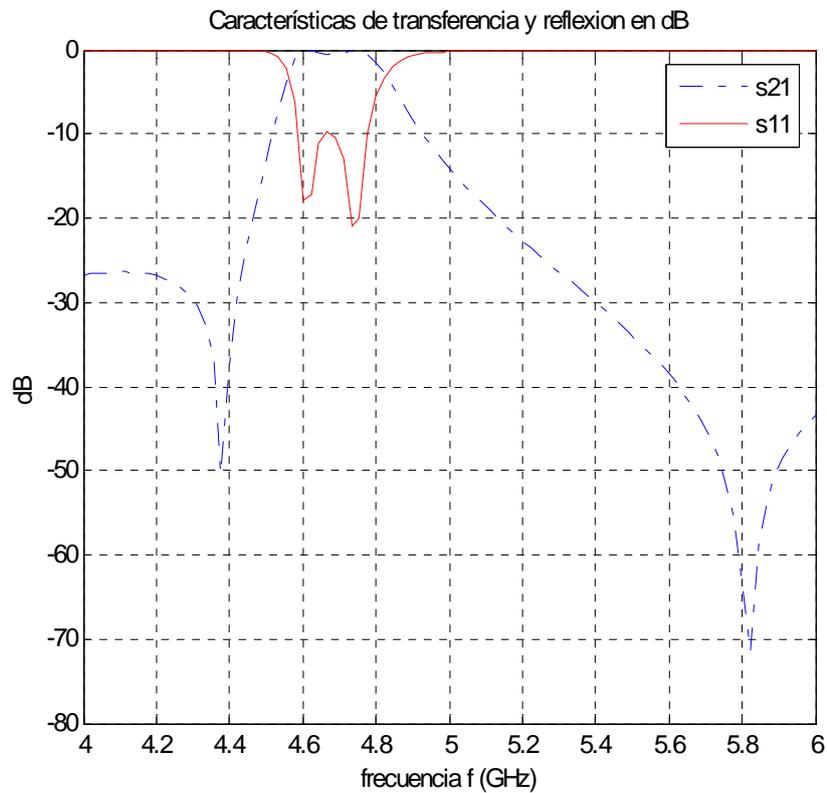


Figura 6. 49. Respuesta frecuencial obtenida a partir del análisis de la estructura mostrada en la figura 6.48

## 6.7.2 Diseño con dos ceros de transmisión simétricos

El segundo filtro que vamos a diseñar, será un filtro paso banda con un ancho de banda de 77.5 Mhz, y con dos ceros de transmisión situados simétricamente alrededor de la frecuencia central  $f_c = 4.72$  Ghz. Estos ceros estarán situados exactamente a las frecuencias  $f_1 = 4.225$  Ghz y  $f_2 = 5.1$  Ghz. Transformando estas especificaciones a sus valores normalizados mediante la ecuación (2.251) se obtiene:

Tipo	Paso Banda
Orden	2
Pérdidas de retorno	15.25 dB
Ceros de transmisión	$-j \cdot 13.5225$ $j \cdot 9.4411$

Tabla 6. 11. Especificaciones del filtro

Realizando la síntesis que nos conduce a la matriz de acoplamiento transversal  $N + 2$  obtenemos:

	S	1	2	L
S	0	0.7197	-0.7509	0.0112
1	0.7197	-1.3122	0	0.7197
2	-0.7509	0	1.2971	0.7509
L	0.0112	0.7197	0.7509	0

Figura 6. 50. Matriz de acoplo transversal

Analizando ahora la matriz de acoplo y desnormalizando los resultados, se obtiene, efectivamente, la respuesta frecuencial dada por las especificaciones de la tabla 6.11:

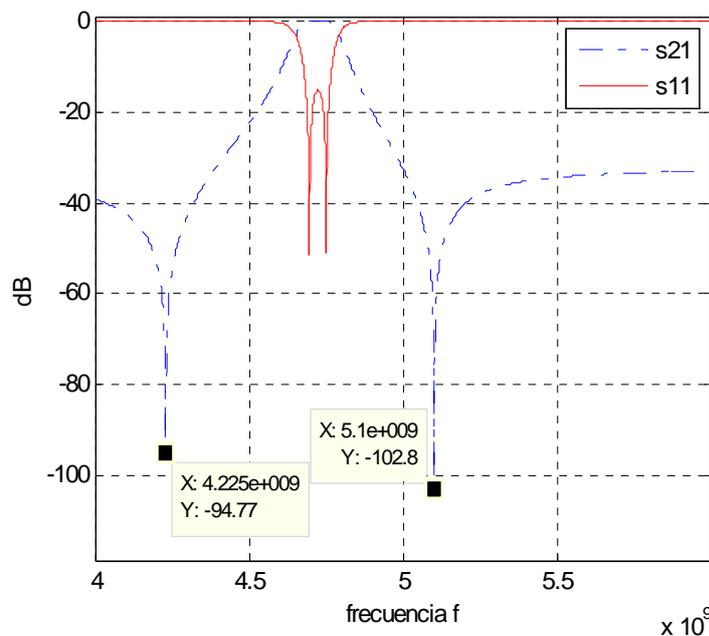


Figura 6. 51. Respuesta frecuencial del filtro, dada por el análisis de la matriz de acoplo

La estructura con la que vamos a implementar este filtro, es de nuevo la mostrada en la figura 6.45 sin embargo, las dimensiones son ahora las siguientes :

$$\begin{aligned}
 a &= 40\text{mm} & h_1 &= 2.4\text{mm} \\
 b &= 40\text{mm} & h_2 &= 3.0\text{mm}
 \end{aligned}$$

El circuito impreso en tecnología microstrip estará situado en este caso según las coordenadas que se indican:

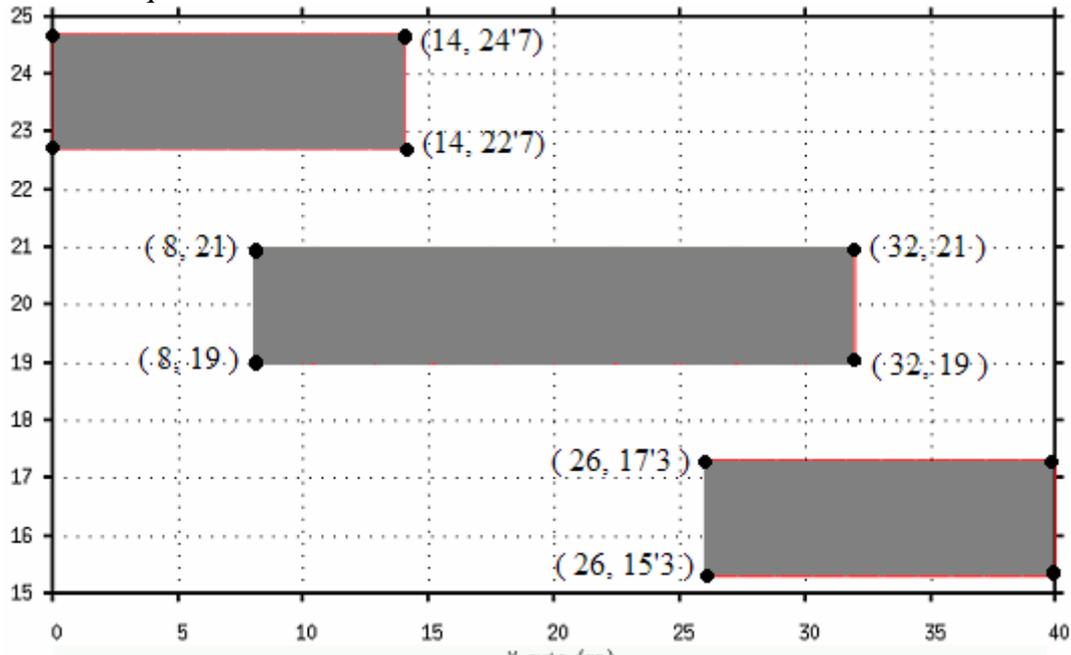


Figura 6. 52. Vista superior del circuito impreso en la estructura

De nuevo, para obtener la respuesta frecuencial de esta estructura, utilizaremos el software desarrollado en [14]. La respuesta, como vemos, coincide con la especificada (figura 6.51):

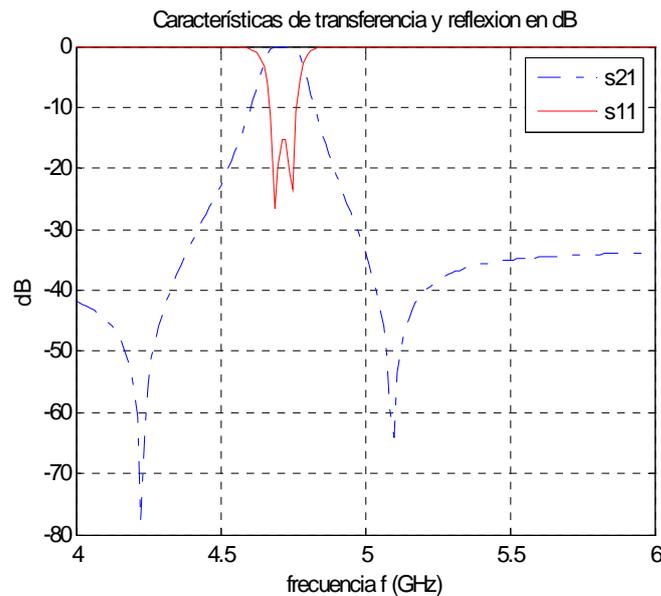


Figura 6. 53. Respuesta frecuencial obtenida a partir del análisis de la estructura

Si representamos simultáneamente la característica especificada (figura 6.51) en línea continua y la que se obtiene a partir del circuito (figura 6.53) en línea discontinua, podemos observar mejor su concordancia. De hecho, las gráficas son prácticamente indistinguibles:

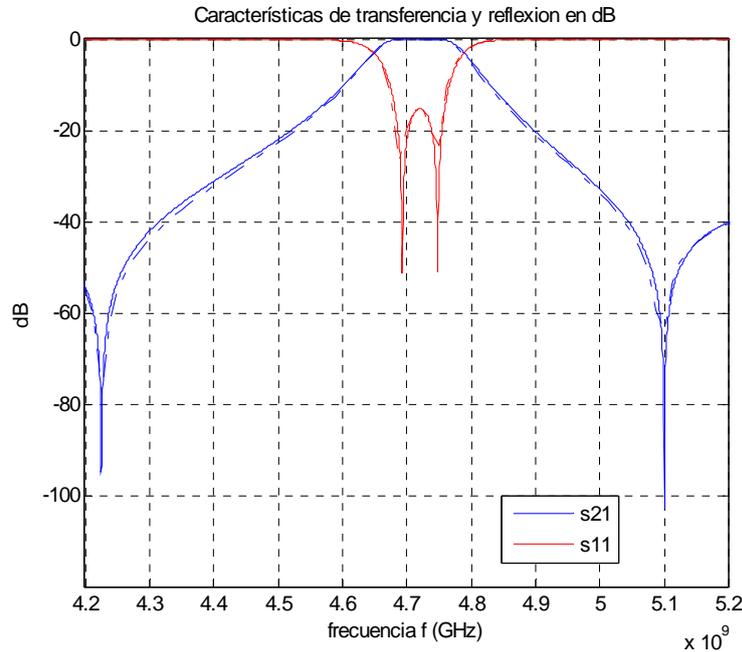


Figura 6. 54. Comparación entre la respuesta frecuencial especificada y la obtenida analizando el circuito en tecnología híbrida.

### 6.7.3 Diseño con todos los ceros de transmisión situados en el infinito

El tercer y último filtro que vamos a diseñar utilizando tecnología híbrida, consiste en un filtro paso banda de segundo orden con todos sus ceros de transmisión situados a frecuencias infinitas. Este filtro estará centrado a una frecuencia central de 4.815 GHz con un ancho de banda de 0.083 GHz. Transformando estas especificaciones a sus valores normalizados mediante la ecuación (2.251) se obtiene:

<i>Tipo</i>	Paso Banda
<i>Orden</i>	2
<i>Pérdidas de retorno</i>	14 dB
<i>Ceros de transmisión</i>	Todos situados a frecuencias infinitas

Tabla 6. 12. Especificaciones del filtro

Mediante la síntesis que nos conduce a la matriz de acoplamiento transversal  $N + 2$  llegamos a la matriz que se muestra a continuación:

	<b>S</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>L</b>
<b>S</b>	0	0.7076	-0.7076	0
<b>1</b>	0.7076	-1.2260	0	0.7076
<b>2</b>	-0.7076	0	1.2260	0.7076
<b>L</b>	0	0.7076	0.7076	0

Figura 6. 55. Matriz de acoplo transversal

Analizando esta matriz de acoplo y desnormalizando los resultados, se obtiene, la respuesta frecuencial dada por las especificaciones que se muestran en la tabla 6.12:

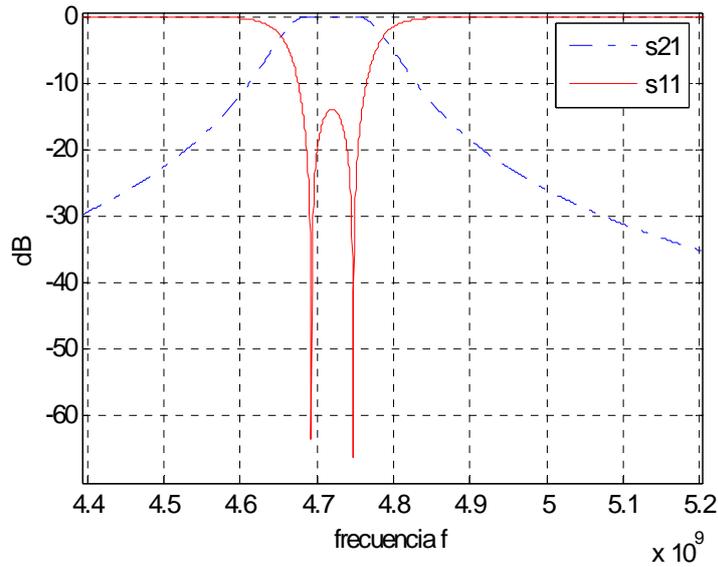


Figura 6. 56. Respuesta frecuencial del filtro, dada por el análisis de la matriz de acoplo

La estructura con la que vamos a implementar este filtro, es también la mostrada en la figura 6.45 pero con las siguientes dimensiones :

$$\begin{aligned}
 a &= 40\text{mm} & h_1 &= 2.4\text{mm} \\
 b &= 37\text{mm} & h_2 &= 3.0\text{mm}
 \end{aligned}$$

El circuito impreso en tecnología microstrip estará situado según las coordenadas indicadas en la siguiente figura:

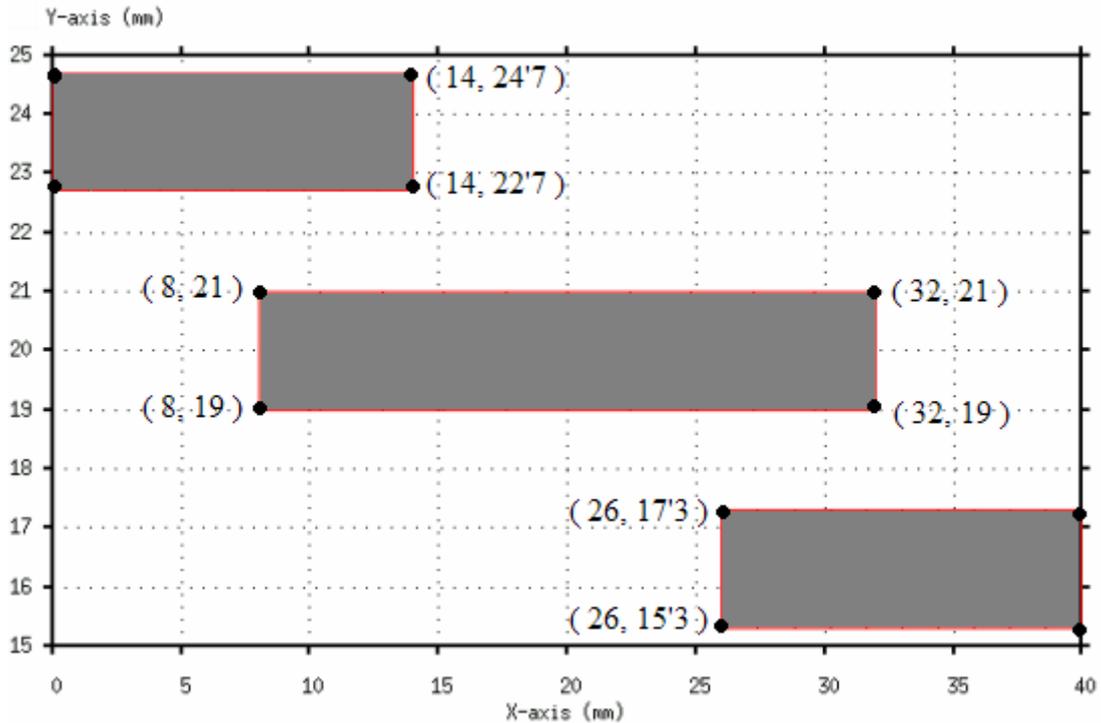
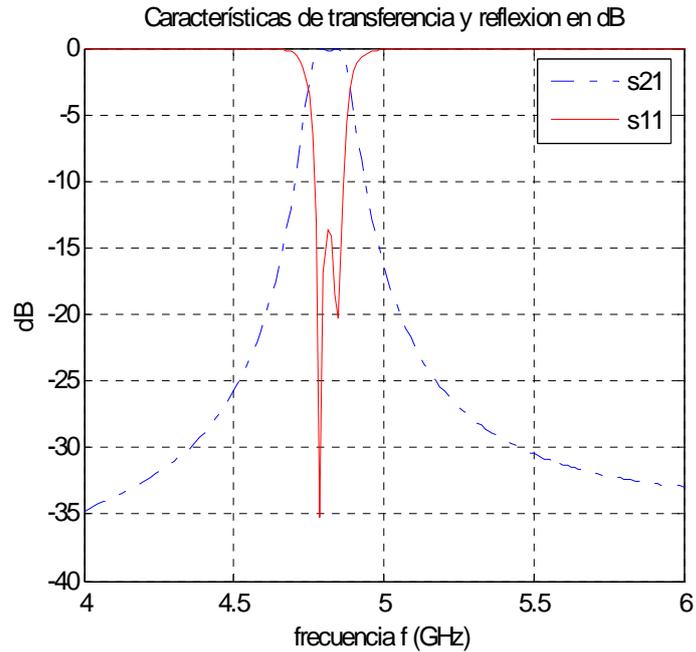


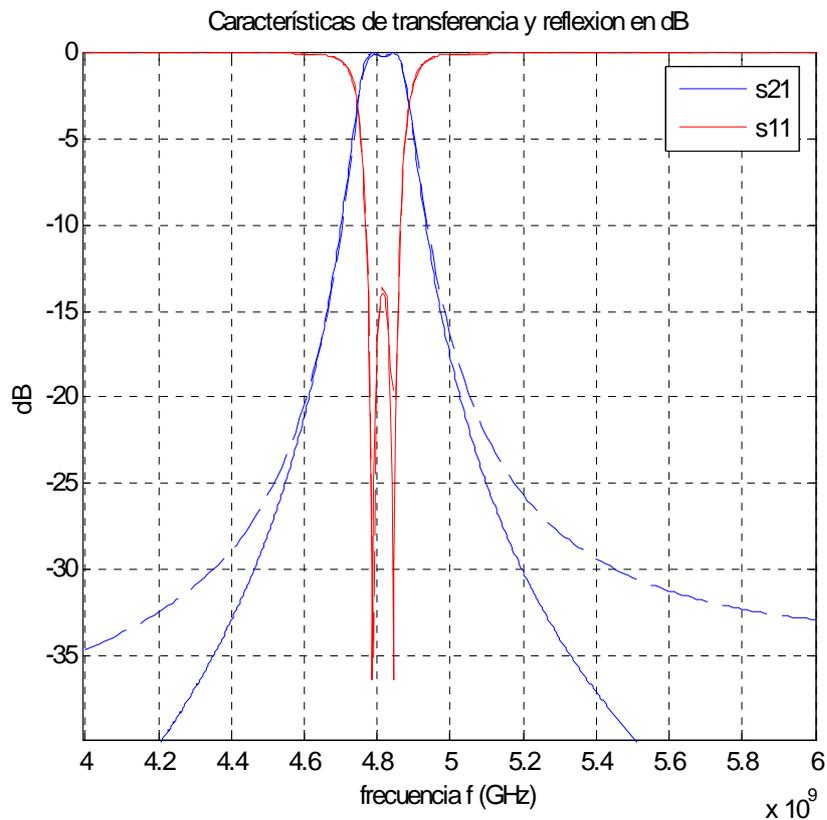
Figura 6. 57. Vista superior del circuito impreso en la estructura

Utilizando el software desarrollado en [14], podemos obtener la respuesta frecuencial de la estructura anterior, que coincide con la especificada (figura 6.56):



**Figura 6. 58. Respuesta frecuencial obtenida a partir del análisis de la estructura**

Representando simultáneamente la característica especificada en línea continua y la que se obtiene a partir del circuito en línea discontinua, podemos compararlas mejor:



**Figura 6. 59. Comparación entre la respuesta frecuencial especificada y la obtenida analizando el circuito en tecnología híbrida.**

## 6.8 Conclusiones

En este capítulo hemos desarrollado diferentes ejemplos que ponen de manifiesto la utilidad de todos los métodos de síntesis de la matriz de acoplo y de las transformaciones aplicadas sobre ésta, en el diseño de filtros de microondas. Por tanto, en este capítulo damos aplicación práctica a toda la teoría desarrollada en los capítulos anteriores del presente proyecto.

Partiendo de las especificaciones dadas para cada filtro concreto, hemos sido capaces de obtener su matriz de acoplo y transformar ésta en otra que se corresponda con la topología que deseábamos implementar. Además, hemos propuesto diferentes circuitos físicos para realizar cada uno de los diseños. En algunos casos, incluimos también la estructura diseñada con las medidas reales que implementan el circuito en cuestión.

## Capítulo 7

# Conclusiones y líneas futuras de investigación

## 7.1 Conclusiones

En este proyecto hemos abordado, de forma general, la síntesis de filtros de microondas, mediante el método de la matriz de acoplo.

En primer lugar, hemos formulado la teoría necesaria para obtener la matriz de acoplo  $N \times N$  de un filtro paso banda de Chebyshev cualquiera, ya sea de orden par o impar. Asimismo, hemos determinado los pasos necesarios para obtener la respuesta frecuencial del filtro a partir de la matriz obtenida, con el fin de comprobar su validez.

En segundo lugar, hemos extendido la teoría desarrollada, de forma que se puedan diseñar filtros *fully canonical*, superando así ésta y otras desventajas del método basado en la matriz de acoplo  $N \times N$ . Así pues, hemos presentado la teoría necesaria para conseguir matrices de acoplo transversales  $N + 2$ , que permiten la existencia de múltiples acoplos de entrada/salida en filtros paso banda. Además, incluimos la extensión de esta formulación al caso de filtros de banda rechazada, así como ejemplos de cada caso.

En tercer lugar, hemos presentado diferentes secuencias de transformación que aplicadas sobre la matriz de acoplo del filtro, nos conducen a distintas topologías. Concretamente, nos hemos centrado en las transformaciones que nos conducen a las topologías *folded canonical form*, *cul de sac*, y *parallel connected*. Hemos presentado también distintos ejemplos que prueban la validez de los métodos empleados en cada caso, así como del software desarrollado.

En cuarto lugar, hemos abordado la síntesis de filtros con ceros de transmisión a frecuencias finitas arbitrariamente situados, utilizando nodos no resonantes (*NRN*). Asimismo, hemos realizado distintos ejemplos de diseño para validar los métodos de síntesis desarrollados.

Finalmente, en el último capítulo hemos planteado la implementación de distintos e interesantes ejemplos de aplicación práctica de todos los procesos de síntesis desarrollados a lo largo del proyecto, así como de las distintas transformaciones que aplicadas sobre la matriz de acoplo conducen a una u otra topología. Incluimos también estructuras reales que implementan los filtros diseñados, probando la validez y utilidad de todo el trabajo realizado.

## 7.2 Líneas futuras de investigación

Durante la elaboración de este proyecto, han surgido diferentes líneas de trabajo con las que se puede seguir el mismo:

- La extensión más directa de la síntesis presentada en los capítulos 2 y 3 para obtener la matriz de acoplo  $N \times N$  y la matriz de acoplo  $N + 2$ , consiste en formular la teoría necesaria para que ésta pueda utilizarse en dispositivos pasivos de microondas con múltiples puertos de entrada y salida.
- Por otra parte, vimos en el cuarto capítulo una serie de secuencias de transformación que aplicadas sobre la matriz de acoplo conducían a distintas topologías. Una investigación más profunda en este campo permitiría alcanzar novedosas y diferentes configuraciones partiendo de la matriz de acoplo inicial.
- En cuanto a los métodos que utilizan nodos no resonantes (*NRN*) que abordamos en el quinto capítulo, sería interesante llegar a un método de síntesis basado en matrices, válido para un número genérico de nodos no resonantes (*NRN*).
- Finalmente, la gran cantidad de aplicaciones prácticas que presenta la síntesis de filtros de microondas, da lugar a distintas líneas de investigación. En primer lugar, ha de profundizarse en los métodos para transformar los elementos del modelo teórico en elementos físicos. En segundo lugar, existen muchas estructuras posibles en tecnología microstrip aún por diseñar y fabricar, comprobando posteriormente su funcionamiento real. Por último, el diseño de un filtro en tecnología híbrida que hemos introducido en el séptimo capítulo, mezclando los conceptos de la tecnología microstrip y la tecnología guiada, puede extenderse a otros muchos diseños en guías de onda con forma arbitraria y utilizando otras estructuras alternativas para el circuito impreso en tecnología microstrip. Asimismo, estos diseños se pueden fabricar y medir, para conseguir filtros de microondas reales que prueben la validez de los diseños realizados.

## Anexo A

Vamos a estudiar de forma detallada, el comportamiento de la función de filtrado para los distintos valores que puede tomar la frecuencia  $|\omega|$ . Ésta función, como sabemos, tiene una forma concreta para la función de Chebyshev:

$$C_N(\omega) = \cosh \left[ \sum_{n=1}^N \cosh^{-1} \left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} \right) \right] = \cosh \left[ \sum_{n=1}^N \cosh^{-1}(x_n) \right] \quad (\text{A.1})$$

donde  $j.\omega_n = s_n$  es la posición del n-ésimo cero de transmisión en el plano complejo.

En primer lugar, si evaluamos la función  $C_N(\omega)$  en  $|\omega| = 1$ , comprobamos que  $C_N = 1$ :

$$C_N(\omega) = \cosh \left[ \sum_{n=1}^N \cosh^{-1} \left( \frac{1 - 1/\omega_n}{1 - 1/\omega_n} \right) \right] = \cosh \left[ \sum_{n=1}^N \cosh^{-1}(1) \right] \quad (\text{A.2})$$

$$C_N(\omega) = \cosh \left[ \sum_{n=1}^N 0 \right] = \cosh(0) = 1 \quad (\text{A.3})$$

Queda por tanto ver qué ocurre para valores mayores y menores que  $|\omega| = 1$ .

Observando la función  $C_N(\omega)$ , vemos que está formada por el coseno hiperbólico del sumatorio de una cantidad. Este sumatorio al que llamaremos 'y', puede ser un valor real, imaginario puro o bien un valor complejo con parte real e imaginaria distintas de cero.

Existen pues, tres casos:

➤ Primer caso:  $y = \sum_{n=1}^N \cosh^{-1} \left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} \right) = \alpha$ , siendo  $\alpha$  un valor real.

En este caso, la función de filtrado  $C_N(\omega)$ , será el coseno hiperbólico de una cantidad real, por lo que se obtendrá como resultado un valor de  $C_N(\omega)$  real y mayor que la unidad, como podemos ver gráficamente:

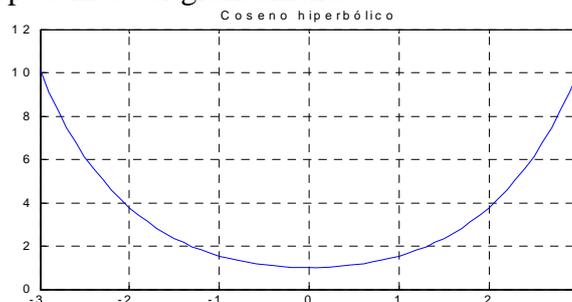


Figura A. 1. Función coseno hiperbólico

➤ Segundo caso:  $y = \sum_{n=1}^N \cosh^{-1} \left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} \right) = j \cdot \beta$ , siendo  $\beta$  un valor real.

En este caso, podemos utilizar la primera de las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cosh(j \cdot \beta) &= \cos(\beta) \\ \sinh(j \cdot \beta) &= j \cdot \sin(\beta) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

de donde se deduce que:

$$C_N(\omega) = \cosh \left( \sum_{n=1}^N \cosh^{-1} \left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} \right) \right) = \cosh(j \cdot \beta) = \cos(\beta) \quad (\text{A.5})$$

por lo que en este caso, el valor de  $C_N(\omega)$  viene dado por el coseno trigonométrico, y por tanto será real y estará comprendido entre -1 y 1.

➤ Tercer caso:  $y = \sum_{n=1}^N \cosh^{-1} \left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} \right) = \alpha + j \cdot \beta$

Para este último caso, tendremos que calcular el coseno hiperbólico de un valor complejo con parte real e imaginaria distintas de cero. Vamos a utilizar entonces la siguiente igualdad:

$$\cosh(\alpha + j \cdot \beta) = \cosh(\alpha) \cdot \cosh(j \cdot \beta) + \sinh(\alpha) \cdot \sinh(j \cdot \beta) \quad (\text{A.6})$$

que utilizando (A.4), se transforma en:

$$\cosh(\alpha + j \cdot \beta) = \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sinh(\alpha) \cdot j \cdot \sin(\beta) \quad (\text{A.7})$$

Si además tenemos en cuenta, como veremos más adelante que cuando ‘y’ tome valores complejos, siempre será en la forma  $\alpha + j \cdot \beta = \alpha + j \cdot \pi$ , la ecuación anterior se particulariza a:

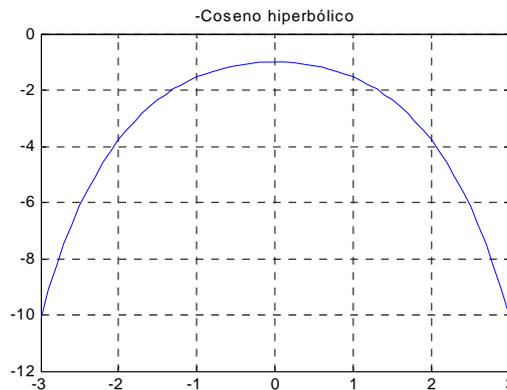
$$\begin{aligned} \cosh(\alpha + j \cdot \pi) &= \cosh(\alpha) \cdot \cos(\pi) + \sinh(\alpha) \cdot j \cdot \sin(\pi) \\ \cosh(\alpha + j \cdot \pi) &= -\cosh(\alpha) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Por lo que  $C_N(\omega)$  tomará la forma:

$$C_N(\omega) = \cosh \left( \sum_{n=1}^N \cosh^{-1} \left( \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} \right) \right) = \cosh(\alpha + j \cdot \pi) \quad (\text{A.9})$$

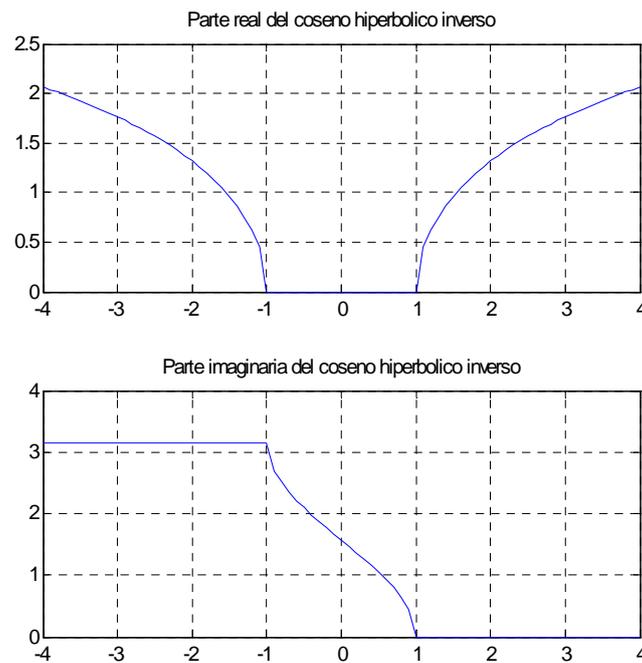
$$C_N(\omega) = \cosh(\alpha + j \cdot \pi) = -\cosh(\alpha) \quad (\text{A.10})$$

que corresponderá a un valor real y menor que la unidad, como comprobamos gráficamente:



**Figura A. 2. Función coseno hiperbólico negativo**

Una vez conocido el comportamiento del coseno hiperbólico, estudiemos ahora el comportamiento del coseno hiperbólico inverso en función de su argumento, que según podemos ver en la ecuación (A.1), será  $x_n = (\omega - 1/\omega_n)/(1 - \omega/\omega_n)$ :



**Figura A. 3. Función coseno hiperbólico inverso**

Vemos que existen tres regiones. En la primera, para un argumento  $x_n < -1$ , el coseno hiperbólico inverso tiene parte real variable, y parte imaginaria constante igual a  $\pi$ . En la segunda región, para un argumento  $-1 < x_n < 1$ , el coseno hiperbólico es imaginario puro, mientras que en la tercera, para un argumento  $x_n > 1$ , es real puro.

Por tanto, sólo nos queda determinar qué valor tomará el argumento  $(\omega - 1/\omega_n)/(1 - \omega/\omega_n)$  en función de  $|\omega|$ , concretamente, para valores mayores y menores que  $|\omega| = 1$ , como queríamos inicialmente.

□ **Comportamiento si  $|\omega| < 1$**

En este caso, partimos de la premisa:

$$|\omega| < 1 \Rightarrow -1 < \omega < 1 \quad (\text{A.11})$$

por lo que trataremos de ver en cual de las tres regiones de la figura A.3 se encuentra  $x_n = (\omega - 1/\omega_n)/(1 - \omega/\omega_n)$ .

a) *¿Se cumple  $x_n < -1$ ?*

Para que esto se cumpla, debería ocurrir que:

$$\frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} < -1 \quad (\text{A.12})$$

$$\omega - 1/\omega_n < -1 + \omega/\omega_n \quad (\text{A.13})$$

$$\omega \cdot \omega_n - 1 < -\omega_n + \omega \quad (\text{A.14})$$

$$\omega \cdot (\omega_n - 1) < -(\omega_n - 1) \quad (\text{A.15})$$

$$\omega < -1 \quad (\text{A.16})$$

sin embargo, esto se contradice con la condición (A.11), por lo que en este caso  $x_n$  no pertenece a la primera región de la figura A.3.

b) *¿Se cumple  $x_n > 1$ ?*

Para que esto se cumpla, debería ocurrir que:

$$\frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} > 1 \quad (\text{A.17})$$

$$\omega - 1/\omega_n > 1 - \omega/\omega_n \quad (\text{A.18})$$

$$\omega \cdot \omega_n - 1 > \omega_n - \omega \quad (\text{A.19})$$

$$\omega \cdot (\omega_n + 1) > (\omega_n + 1) \quad (\text{A.20})$$

$$\omega > 1 \quad (\text{A.21})$$

sin embargo, esto se contradice con la condición (A.11), por lo que en este caso  $x_n$  tampoco pertenece a la tercera región de la figura A.3.

c) ¿Se cumple  $-1 < x_n < 1$ ?

Para que esto se cumpla, debería ocurrir que:

$$\frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} > -1 \quad \text{y} \quad \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} < 1 \quad (\text{A.22})$$

lo que conduce, operando de forma similar que en las anteriores condiciones, a la condición:

$$\omega > -1 \quad \text{y} \quad \omega < 1 \quad (\text{A.23})$$

Vemos que esta condición no se contradice con la condición (A.11), por lo que en este caso  $x_n$  sí pertenece a la segunda región, o región central, de la figura A.3.

**Primera conclusión**  $\rightarrow$  Si  $|\omega| < 1$ , entonces se cumple que  $-1 < \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} < 1$ , por lo

que el coseno hiperbólico inverso de dicho valor, al estar éste comprendido entre  $-1$  y  $1$ , tendrá un valor imaginario puro, como vimos en la figura A.3. Por tanto, al calcular el coseno hiperbólico de dicho valor, obtendremos un valor de  $C_N(\omega)$  real, comprendido entre  $-1$  y  $1$ , como vimos en (A.5).

#### □ **Comportamiento si $|\omega| > 1$**

En este caso, partimos de la premisa:

$$|\omega| > 1 \quad \Rightarrow \quad \omega < -1 \quad \text{y} \quad \omega > 1 \quad (\text{A.24})$$

por lo que también aquí, trataremos de ver en cual de las tres regiones de la figura A.3 se encuentra  $x_n = (\omega - 1/\omega_n)/(1 - \omega/\omega_n)$ .

a) ¿Se cumple  $x_n < -1$ ?

Para que esto se cumpla, debería ocurrir, como demostramos en (A.12)-(A.16) que:

$$\omega < -1 \quad (\text{A.25})$$

Esta condición no se contradice con la condición (A.24), por lo que en este caso  $x_n$  sí pertenece a la primera región de la figura A.3.

b) ¿Se cumple  $x_n > 1$ ?

Para que esto se cumpla, debería ocurrir, como demostramos en (A.12)-(A.16) que:

$$\omega > 1 \quad (\text{A.26})$$

Esta condición no se contradice con la condición (A.24), por lo que en este caso  $x_n$  sí pertenece a la tercera región de la figura A.3.

c) ¿Se cumple  $-1 < x_n < 1$ ?

Para que esto se cumpla, debería ocurrir que:

$$\frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} > -1 \quad \text{y} \quad \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} < 1 \quad (\text{A.27})$$

lo que conduce, a la condición:

$$\omega > -1 \quad \text{y} \quad \omega < 1 \quad (\text{A.28})$$

Vemos que estas condiciones se contradicen con la condición (A.24), por lo que en este caso,  $x_n$  no pertenece a la región central de la figura A.3.

**Segunda conclusión** → Si  $|\omega| > 1$ , acabamos de comprobar que se cumple que o bien

$$\frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} < -1, \text{ o bien } \frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} > 1, \text{ por lo que :}$$

- Si  $\frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} < -1$ , su coseno hiperbólico inverso tendrá parte real variable, y

parte imaginaria constante igual a  $\pi$ , según la figura A.3. El sumatorio de N valores con la forma ' $\alpha + j \cdot \pi$ ' será un valor complejo con una parte imaginaria múltiplo de  $\pi$ , por lo que el coseno hiperbólico de dicho sumatorio, esto es,  $C_N(\omega)$ , según vimos en (A.10), será real y menor que  $-1$ .

- Si  $\frac{\omega - 1/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n} > 1$ , su coseno hiperbólico inverso será real, como vimos en la

figura A.3. El sumatorio de N valores reales será de nuevo un valor real, y por tanto, el coseno hiperbólico del sumatorio, esto es,  $C_N(\omega)$ , según vimos en la figura A.1, será real y mayor que 1.

Por tanto, unificando ambas conclusiones, si  $|\omega| > 1$ , entonces  $C_N(\omega)$  será real, y mayor que 1 o menor que  $-1$ .

Resumiendo, hemos llegado a la conclusión de que la función de filtrado, en función de la frecuencia, se comporta de la siguiente manera:

$ \omega  < 1$	$-1 < C_N(\omega) < 1$	$\rightarrow  C_N(\omega)  < 1$
$ \omega  = 1$	$C_N(\omega) = 1$	$\rightarrow  C_N(\omega)  = 1$
$ \omega  > 1$	$C_N(\omega) < -1$ y $C_N(\omega) > 1$	$\rightarrow  C_N(\omega)  > 1$

**Tabla A. 1. Regiones del comportamiento de la función de filtrado  $C_N(\omega)$**

## Anexo B

Es importante asegurar que los parámetros de transferencia y reflexión son ortogonales para satisfacer las condiciones de unitariedad de la matriz de scattering. Una matriz unitaria [9, pág. 253] es la que satisface la siguiente condición:

$$[S]^t \cdot [S]^* = [U] \quad (\text{B.1})$$

por lo que para una red de dos puertos:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* \\ S_{21}^* & S_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

de donde se deduce, de forma inmediata que:

$$S_{11} \cdot S_{11}^* + S_{21} \cdot S_{21}^* = 1 \quad (\text{B.4})$$

$$S_{11} \cdot S_{12}^* + S_{21} \cdot S_{22}^* = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$S_{12} \cdot S_{11}^* + S_{22} \cdot S_{21}^* = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$S_{12} \cdot S_{12}^* + S_{22} \cdot S_{22}^* = 1 \quad (\text{B.7})$$

Pero además, expresando la ecuación (B.5) en términos de módulo y fase y desarrollando, tendremos que :

$$|S_{11}| \cdot \exp(j \cdot \theta_1) \cdot (|S_{12}| \cdot \exp(j \cdot \phi))^* + |S_{21}| \cdot \exp(j \cdot \phi) \cdot (|S_{22}| \cdot \exp(j \cdot \theta_2))^* = 0$$

$$\phi = \text{Fase de } S_{12}(s) = \text{Fase de } S_{21}(s) \quad (\text{B.8})$$

$$\theta_1 = \text{Fase de } S_{11}(s)$$

$$\theta_2 = \text{Fase de } S_{22}(s)$$

$$|S_{11}| \cdot \exp(j \cdot \theta_1) \cdot |S_{12}| \cdot \exp(-j \cdot \phi) + |S_{21}| \cdot \exp(j \cdot \phi) \cdot |S_{22}| \cdot \exp(-j \cdot \theta_2) = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$|S_{11}| \cdot |S_{12}| \cdot \exp(j \cdot (\theta_1 - \phi)) + |S_{21}| \cdot |S_{22}| \cdot \exp(j \cdot (\phi - \theta_2)) = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$|S_{21}| \cdot |S_{22}| \cdot \exp(j \cdot (\phi - \theta_2)) = -|S_{11}| \cdot |S_{12}| \cdot \exp(j \cdot (\theta_1 - \phi)) \quad (\text{B.11})$$

$$|S_{21}| \cdot |S_{22}| \cdot \exp(j \cdot (\phi - \theta_2)) = \exp(j \cdot (2 \cdot k \pm 1) \cdot \pi) \cdot |S_{11}| \cdot |S_{12}| \cdot \exp(j \cdot (\theta_1 - \phi)) \quad (\text{B.12})$$

Si ahora igualamos las fases de ambos términos:

$$\phi - \theta_2 = \pi \cdot (2 \cdot k \pm 1) + \theta_1 - \phi \quad (\text{B.13})$$

$$2 \cdot \phi = \pi \cdot (2 \cdot k \pm 1) + \theta_1 + \theta_2 \quad (\text{B.14})$$

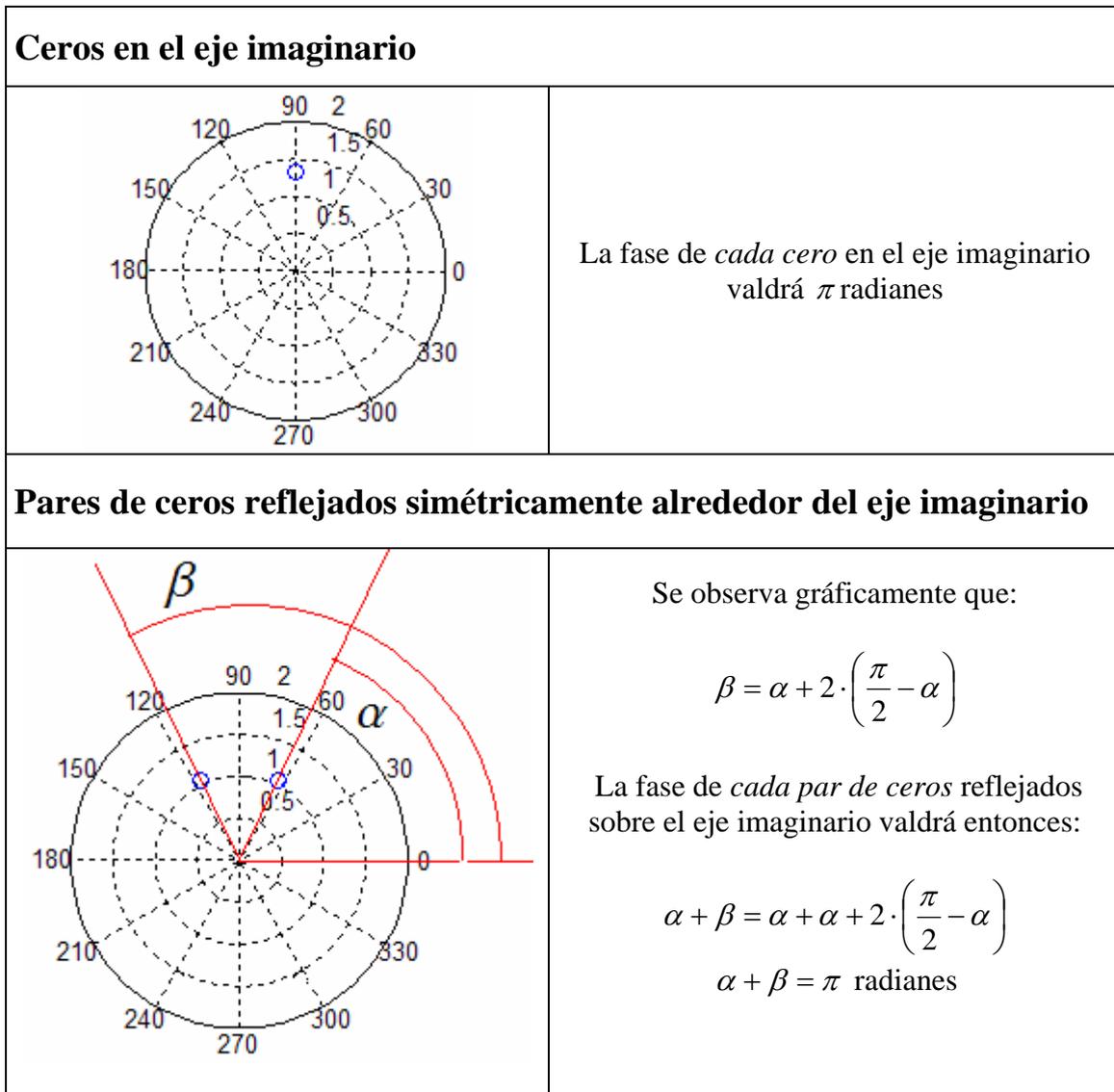
$$\phi = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot k \pm 1) + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad (\text{B.15})$$

llegamos a la siguiente condición de fase:

$$\Delta\varphi = \left[ \phi - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] = \frac{\pi}{2} (2 \cdot k \pm 1) \quad (\text{B.16})$$

Vemos que la diferencia  $\Delta\varphi$  entre la fase del vector  $S_{21}(s)$ , y la media de las fases de los vectores  $S_{11}$  y  $S_{22}$ , debe ser un múltiplo impar de  $\pi/2$  radianes. Para que esta condición se satisfaga a cualquier valor de la variable frecuencial  $s$ , los ceros de  $S_{21}(s)$ ,  $S_{22}(s)$  y  $S_{11}(s)$  deben cumplir unas condiciones dadas. Veamos a continuación en qué consisten.

La primera condición, obliga a que los *nfz* ceros de transmisión de  $S_{21}(s)$  se sitúen simétricamente alrededor del eje imaginario  $j \cdot \omega$ , o bien en el mismo eje imaginario. De esta forma, cada cero en el eje imaginario aportará una fase de  $\pi/2$  radianes a la fase total de  $S_{21}(s)$ , mientras que cada par de ceros reflejados tendrá una fase conjunta de  $\pi$  radianes, como vemos a continuación:



**Figura B. 1.** Fase de los ceros de  $S_{21}(s)$

Fijándonos en lo que acabamos de decir, y suponiendo que existen de forma general, un número  $x$  de ceros en el eje imaginario, y por tanto, un conjunto de  $\frac{nfz - x}{2}$  pares de ceros reflejados, la fase total de  $S_{21}(s)$  será entonces un múltiplo de  $\pi/2$  radianes:

$$\phi = x \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{nfz - x}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2} \cdot nfz \quad (\text{B.17})$$

La segunda condición, nos lleva a que el patrón de los  $N$  ceros de  $S_{22}(s)$  deba ser o bien coincidente con los de  $S_{11}(s)$  en el eje imaginario, o bien formar pares reflejados sobre el eje imaginario con los ceros de  $S_{11}(s)$ .

<b>Ceros en el eje imaginario</b>	
	<p>Si existe un cero de <math>S_{22}(s)</math> coincidente con un cero de <math>S_{11}(s)</math> en el eje imaginario, la fase total de ambos será:</p> $\alpha + \beta = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$
<b>Pares de ceros reflejados simétricamente alrededor del eje imaginario</b>	
	<p>Se observa gráficamente que:</p> $\beta = \alpha + 2 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ <p>La fase de cada par de ceros reflejados sobre el eje imaginario valdrá:</p> $\alpha + \beta = \alpha + \alpha + 2 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ $\alpha + \beta = \pi \text{ radianes}$

**Figura B. 2. Fases de los ceros de  $S_{11}(s)$  y  $S_{22}(s)$**

Fijándonos en lo que acabamos de decir, y suponiendo que existen de forma general, un número ‘ $y$ ’ de ceros en el eje imaginario para  $S_{11}(s)$  coincidentes con una cantidad igual de ceros de  $S_{22}(s)$ , así como un número ‘ $N - y$ ’ de ceros de  $S_{11}(s)$  que forman pares reflejados con otros ‘ $N - y$ ’ ceros de  $S_{22}(s)$ , la suma de fases de  $S_{11}(s)$  y  $S_{22}(s)$  será entonces un múltiplo de  $\pi$  radianes:

$$\theta_1 + \theta_2 = y \cdot \pi + (N - y) \cdot \pi \tag{B.18}$$

$$\theta_1 + \theta_2 = N \cdot \pi \tag{B.19}$$

Y sabiendo que  $\theta_1 = \theta_2$ , se cumple:

$$\theta_1 = N \cdot \frac{\pi}{2} = \theta_2 \tag{B.20}$$

## Anexo C

Si estamos trabajando en el eje real, podemos expresar la condición (2.60) como:

$$S_{11}(\omega) \cdot S_{11}(\omega)^* + S_{21}(\omega) \cdot S_{21}(\omega)^* = 1 \quad (\text{C.1})$$

Además, según demostramos en el Anexo B, la condición de ortogonalidad unitaria nos lleva a una condición de fase según la cual, la diferencia de fases entre  $P(\omega)$ , y la semisuma de  $F(\omega)$  y  $F_{22}(\omega)$  debe ser un múltiplo impar de  $\pi/2$ . Como al trabajar en  $\omega$  los coeficientes de los polinomios  $P(\omega)$ ,  $F(\omega)$  y  $F_{22}(\omega)$  son todos reales, debemos multiplicar  $P(\omega)$  por  $j$ , con el fin de añadirle una fase de  $\pi/2$  y asegurar que se cumple la citada condición de fase.

Así pues, considerando lo que acabamos de decir, y desarrollando la ecuación anterior:

$$\left( \frac{F(\omega)}{\varepsilon_R \cdot E(\omega)} \right) \cdot \left( \frac{F(\omega)}{\varepsilon_R \cdot E(\omega)} \right)^* + \left( \frac{j \cdot P(\omega)}{\varepsilon \cdot E(\omega)} \right) \cdot \left( \frac{j \cdot P(\omega)}{\varepsilon \cdot E(\omega)} \right)^* = 1 \quad (\text{C.2})$$

$$\left( \frac{F(\omega) \cdot F(\omega)^*}{\varepsilon_R^2} \right) + \left( \frac{P(\omega) \cdot P(\omega)^*}{\varepsilon^2} \right) = E(\omega) \cdot E(\omega)^* \quad (\text{C.3})$$

$$\left( \varepsilon^2 \cdot F(\omega) \cdot F(\omega)^* \right) + \left( \varepsilon_R^2 \cdot P(\omega) \cdot P(\omega)^* \right) = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(\omega) \cdot E(\omega)^* \quad (\text{C.4})$$

Vamos a continuación a sumar y restar la siguiente cantidad  $\varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(\omega)^* \cdot j \cdot F(\omega) + \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(\omega) \cdot j \cdot F(\omega)^*$ , y de nuevo reagrupamos:

$$\begin{aligned} & \left( \varepsilon^2 \cdot F(\omega) \cdot F(\omega)^* \right) + \left( \varepsilon_R^2 \cdot P(\omega) \cdot P(\omega)^* \right) \\ & + \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(\omega)^* \cdot j \cdot F(\omega) + \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(\omega) \cdot j \cdot F(\omega)^* \\ & - \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(\omega)^* \cdot j \cdot F(\omega) - \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot P(\omega) \cdot j \cdot F(\omega)^* = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(\omega) \cdot E(\omega)^* \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_R \cdot P(\omega) \cdot \left[ \varepsilon_R \cdot P(\omega)^* + j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)^* \right] \\ & - \varepsilon \cdot j \cdot F(\omega) \cdot \left[ \varepsilon_R \cdot P(\omega)^* + j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)^* \right] \\ & + j \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_R \cdot \left[ P(\omega)^* \cdot F(\omega) - P(\omega) \cdot F(\omega)^* \right] = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(\omega) \cdot E(\omega)^* \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\hspace{10em}}_{\downarrow \downarrow} \\ & \text{Para que este término se anule:} \\ & P(\omega)^* \cdot F(\omega) = P(\omega) \cdot F(\omega)^* \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Por otra parte, la condición de ortogonalidad unitaria se puede expresar en el plano  $\omega$  de la siguiente manera:

$$S_{11}(\omega) \cdot S_{12}(\omega)^* + S_{21}(\omega) \cdot S_{22}(\omega)^* = 0 \quad (\text{C.8})$$

por lo que desarrollando la expresión, tendremos:

$$\frac{F(\omega)}{\varepsilon_R \cdot E(\omega)} \cdot \left( \frac{j \cdot P(\omega)}{\varepsilon \cdot E(\omega)} \right)^* + \frac{j \cdot P(\omega)}{\varepsilon \cdot E(\omega)} \cdot \left( \frac{F_{22}(\omega)}{\varepsilon_R \cdot E(\omega)} \right)^* = 0 \quad (\text{C.9})$$

$$-j \cdot F(\omega) \cdot P(\omega)^* + j \cdot P(\omega) \cdot F_{22}(\omega)^* = 0 \quad (\text{C.10})$$

$$P(\omega) \cdot F_{22}(\omega)^* - F(\omega) \cdot P(\omega)^* = 0 \quad (\text{C.11})$$

Observamos entonces, que para que se cumplan simultáneamente las condiciones (C.7) y (C.11), debe ocurrir que:

$$F_{22}(\omega) = F(\omega) \quad (\text{C.12})$$

Por lo que la única posibilidad es que *todos los ceros de  $F(\omega)$ , que serán reales, coincidan con los de  $F_{22}(\omega)$* . Por tanto, si los ceros de  $F(\omega)$  y  $F_{22}(\omega)$  cumplen la condición  $F_{22}(\omega) = F(\omega)$ , la ecuación (C.6) se reduce a:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_R \cdot P(\omega) \cdot \left[ \varepsilon_R \cdot P(\omega)^* + j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)^* \right] \\ & - \varepsilon \cdot j \cdot F(\omega) \cdot \left[ \varepsilon_R \cdot P(\omega)^* + j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)^* \right] = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(\omega) \cdot E(\omega)^* \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\left[ \varepsilon_R \cdot P(\omega) - \varepsilon \cdot j \cdot F(\omega) \right] \cdot \left[ \varepsilon_R \cdot P(\omega)^* + j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega)^* \right] = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(\omega) \cdot E(\omega)^* \quad (\text{C.14})$$

$$\left[ \varepsilon_R \cdot P(\omega) - \varepsilon \cdot j \cdot F(\omega) \right] \cdot \left[ \varepsilon_R \cdot P(\omega)^* + (-j)^* \cdot \varepsilon^* \cdot F(\omega)^* \right] = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(\omega) \cdot E(\omega)^* \quad (\text{C.15})$$

Así pues, se llega a la ecuación que queríamos demostrar:

$$\left[ \varepsilon_R \cdot P(\omega) - j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega) \right] \cdot \left[ \varepsilon_R \cdot P(\omega) - j \cdot \varepsilon \cdot F(\omega) \right]^* = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_R^2 \cdot E(\omega) \cdot E(\omega)^* \quad (\text{C.16})$$

## Anexo D

En primer lugar, vamos a calcular el valor de la impedancia de entrada del siguiente circuito:

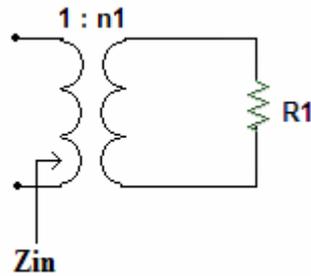


Figura D. 1. Transformador

Para ello, definimos las siguientes tensiones y corrientes:

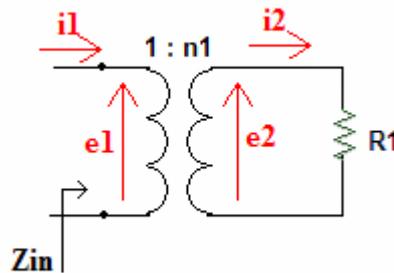


Figura D. 2. Definición de tensiones y corrientes

La relación entre ellas, según vimos en la tabla 2.8, vendrá dada por:

$$n_1 = \frac{e_2}{e_1} = \frac{i_1}{i_2} \quad (\text{D.1})$$

Si nos fijamos en el circuito, se verifica también que:

$$e_2 = i_2 \cdot R_1 \quad (\text{D.2})$$

por lo que:

$$n_1 = \frac{i_2 \cdot R_1}{e_1} = \frac{i_1}{n_1} \cdot \frac{R_1}{e_1} \quad (\text{D.3})$$

A continuación, despejamos el valor de la impedancia de entrada en esta última ecuación, que vendrá dada por  $e_1/i_1$ :

$$Z_{in} = \frac{e_1}{i_1} = \frac{R_1}{n_1^2} \quad (\text{D.4})$$

En segundo lugar, vamos a calcular el valor de la impedancia de entrada del siguiente circuito:

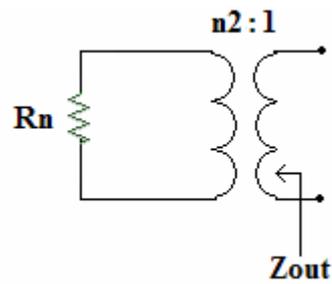


Figura D. 3. Transformador

Para ello definimos las siguientes tensiones y corrientes en el circuito:

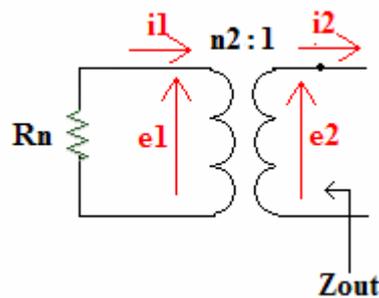


Figura D. 4. Definición de tensiones y corrientes

La relación entre ellas (ver tabla 2.8) vendrá dada por:

$$n_2 = \frac{e_1}{e_2} = \frac{i_2}{i_1} \quad (\text{D.5})$$

Si nos fijamos en el circuito, se verifica también que:

$$e_1 = -i_1 \cdot R_n \quad (\text{D.6})$$

por tanto:

$$n_2 = \frac{-i_1 \cdot R_n}{e_2} = -\frac{i_2}{n_2} \cdot \frac{R_n}{e_2} \quad (\text{D.7})$$

A continuación, despejamos el valor de la impedancia de entrada en esta última ecuación, que vendrá dada por  $-e_2/i_2$ :

$$Z_{in} = -\frac{e_2}{i_2} = \frac{R_n}{n_2^2} \quad (\text{D.8})$$

---

## Bibliografía

- [1] R. J. Cameron “General Coupling Matrix Synthesis Methods for Chebyshev Filtering Functions”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 47, No. 2, April 1999, pp. 433-44
- [2] R. J. Cameron, “Advanced Coupling Matrix Synthesis Techniques for Microwave Filters”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 51, No. 1, January 2003, pp. 1-10
- [3] S. Amari, U. Rosenberg, “Direct Synthesis of a New Class of Bandstop Filters”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 52, No. 2, February 2004, pp. 607-616
- [4] S. Amari, U. Rosenberg, “A third order in-line pseudoelliptic filter with a transmission zero extracted at its center”, IEEE MTT-S Int.Microwave Symp. Dig., Jun 2004, pp. 459-462.
- [5] S. Amari, Giuseppe Macchiarella, “Synthesis of Inline Filters With Arbitrarily Placed Attenuation Poles by Using Nonresonating Nodes”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 53, No. 10, October 2005, pp. 3075-3081
- [6] D. Cañete-Rebenaque, F. Quesada Pereira, J. Pascual Garcia, A. Alvarez-Melcon and Marco Guglielmi, “Two Compact Configurations for Implementing Transmission Zeros in Microstrip Filters”, IEEE Microwave and Wireless Components Letters, Vol. 14, No. 10, October 2004, pp. 475-477
- [7] D. Cañete-Rebenaque, F. Quesada Pereira, J. L. Gomez Tornero, A. Alvarez-Melcón and Marco Guglielmi, “A new Family of Microstrip Open-Loop Resonator Filters for High Selectivity Applications”, Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 43, No. 5, December 2004, pp. 450-455.
- [8] Jose Luis Gómez Tornero. Apuntes de la asignatura “Transmisión por Soporte Físico”, 4º Ingeniería Superior de Telecomunicaciones, UPCT.
- [9] Robert E.Collin “Foundations for microwave engineering”. Segunda edición.
- [10] María José Madero Ayora. “Análisis de redes de microondas”. Capítulo III. Cuadro de equivalencias entre los distintos parámetros.

- [11] Antonio Garvín. Universidad de Málaga “Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt”.
- [12] Jia-Sheng Hong & M.J.Lancaster. “Microstrip for RF/Microwave applications”. Pag 8.
- [13] Pozar, David M. “Microwave Engineering”.
- [14] Alejandro Álvarez Melcon, “Applications of the integral equation technique to the analysis and synthesis of multilayered printed shielded microwave circuits and cavity backed antennas” Thèse EPFL, no 1901 (1998), Département d'électricité. Dir.: Juan Mosig.