



industriales
etsii

Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Superficies mínimas y su aplicación en ingeniería

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

Autor: Abad Sánchez, Juana María
Director: Molina Legaz, Roque
Codirector:

Cartagena, 2022



Universidad
Politécnica
de Cartagena

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero dar las gracias a mi familia, en particular a mis padres y a mi hermana, por el apoyo que me han dado a lo largo de estos años. Por apoyarme en cada una de mis decisiones y por haber estado ahí siempre que lo he necesitado. No estaría escribiendo estas líneas si no fuera por ellos.

También dar las gracias a mis amigos, a los de antes y a los que la universidad me ha dado. A los primeros, por haber aceptado la cancelación de planes sin rechistar cada vez que tenía que estudiar y por haberme escuchado sin saber siquiera de lo que hablaba. A los segundos, porque juntos hemos conseguido aprobar muchas asignaturas y si no hubiera sido por ellos algún que otro trabajo no hubiera tenido tan buen resultado.

Por otro lado, mostrar mi más sincera gratitud a la Universidad Politécnica de Cartagena, por darme la oportunidad de estudiar en ella, y, en particular, gracias a los profesores que a lo largo de todo este tiempo me han dado clase, por los conocimientos que he adquirido de ellos y que me han permitido crecer intelectualmente. Gracias también a la universidad por las prácticas profesionales que me ha ayudado a obtener, sin ellas, a día de hoy no hubiera conseguido el puesto de trabajo que tengo.

Finalmente, gracias a todas aquellas personas que han pasado por mi vida a lo largo de la carrera y que han aportado su granito de arena para que esto fuera posible.

Gracias a todos, por estar ahí y dejarme ser quien soy.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	5
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	6
2.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.....	6
2.2. CONTEXTO HISTÓRICO.	11
3. SOLUCIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA	15
3.1. REQUISITOS MATEMÁTICOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA.	15
3.2. CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES.....	19
4. APLICACIONES	33
4.1. EL IMPACTO EN LA ARQUITECTURA.....	34
4.2. EL IMPACTO EN LA INGENIERÍA.	35
ANEXO	39
1. REPRESENTACIÓN DE UNA CATENOIDE	39
2. REPRESENTACIÓN DE UN HELICOIDE	40
3. REPRESENTACIÓN DE LA PRIMERA SUPERFICIE DE SCHERK	41
4. REPRESENTACIÓN DE LA SEGUNDA SUPERFICIE DE SCHERK	42
5. REPRESENTACIÓN DE LA SUPERFICIE DE ENNEPER.....	43
6. REPRESENTACIÓN DE LA SUPERFICIE DE CATALAN.....	44
7. REPRESENTACIÓN DE LA SUPERFICIE DE HENNEBERG.	45
8. REPRESENTACIÓN DE LA SUPERFICIE DE SCHWARZ	46
9. REPRESENTACIÓN DE UN GIROIDE.....	47
10. REPRESENTACIÓN DE UN LIDINOIDE.....	48
BIBLIOGRAFÍA.....	49

ILUSTRACIONES

Ilustración 1 – Cómo sostener una porción de pizza.	6
Ilustración 2 – Curvatura de un trozo de pizza.....	8
Ilustración 3 – Hipódromo de la Zarzuela.	8
Ilustración 4 – Forma chimenea nuclear.....	10
Ilustración 5 – Forma patata frita Pringles.....	10
Ilustración 6 – Leyes de Plateau ³	14
Ilustración 7 – Círculo tangente a la curva en un punto p. ⁵	16
Ilustración 8 - Triedro de Frenet-Serret. ⁶	16
Ilustración 9 – Curvaturas principales y secciones normales de una superficie. ⁸	17
Ilustración 10 - Representación gráfica de un catenoide.....	21
Ilustración 11 - Representación gráfica de un helicoide.	22
Ilustración 12 - Representación gráfica de la primera superficie de Scherk (1)	23
Ilustración 13 - Representación gráfica de la primera superficie de Scherk (2)	24
Ilustración 14 - Segunda superficie de Scherk (1).	25
Ilustración 15 - Segunda superficie de Scherk (2).	25
Ilustración 16 - Representación gráfica de la superficie de Enneper.....	26
Ilustración 17 - Representación gráfica de la superficie de Catalan.	28
Ilustración 18 - Representación gráfica de la superficie de Henneberg.	29
Ilustración 19 - Representación gráfica de la superficie de Schwarz P.	29
Ilustración 20 - Representación gráfica de la superficie de Schwarz D.....	30
Ilustración 21 - Representación gráfica de un giroide.	30
Ilustración 22 - Representación gráfica de un lidinoide.....	31
Ilustración 23 - Representación gráfica de la superficie de Bour. ¹¹	32
Ilustración 24 - Representación gráfica de la superficie de Costa. ¹²	32
Ilustración 25 - Ejemplo visual de tensión superficial en insectos ¹³	33
Ilustración 26 - Partes de un agujero negro (horizonte de sucesos). ¹⁴	33
Ilustración 27 - Escalera de la Sagrada Familia (helicoide). ¹⁵	34
Ilustración 28 - Estadio Olímpico de Múnich. ¹⁶	34
Ilustración 29 - Pabellón de Japón en la Expo 2000. ¹⁷	34
Ilustración 30 - Cristales fotónicos. ¹⁸	35
Ilustración 31 - Intercambiadores de calor. ¹⁸	36
Ilustración 32 - Batería de electrodos. ¹⁸	36
Ilustración 33 - Separadores. ¹⁸	37
Ilustración 34 - Reactores de biopelícula de lecho móvil. ¹⁸	37
Ilustración 35 - Convertidores catalíticos. ¹⁸	38
Ilustración 36 - Perspectiva de una sección de un segmento vertebral. ¹⁹	38

1. INTRODUCCIÓN

Desde hace más de 250 años, las superficies mínimas han sido objeto de investigación en las Matemáticas (especialmente en la rama de Geometría Diferencial). Pero no es hasta la publicación de los estudios de Lagrange sobre la minimización de áreas, cuando se empieza a trabajar en profundidad en este tema, y comienza a estudiarse su aplicación en problemas de Ingeniería.

Hemos de tener en cuenta que la naturaleza que nos rodea tiende a minimizar longitudes y superficies adaptadas al entorno, lo cual otorga belleza además de fuerza. Basándonos en lo que podemos observar en nuestro alrededor, lo cual es habitual en todos los estudios del ser humano, y teniendo como objetivo una evolución constructiva que complemente la estética con unas mejores propiedades físicas, podemos entender mejor cómo a lo largo de los años, este tema ha llamado la atención de numerosos eruditos, entre ellos, Plateau, quien planteó el primer problema en este campo. Y cómo tras la labor de Lagrange (al proponer por primera vez el término de superficie mínima, o superficie cuya área mínima es una curva cerrada dada como frontera), este tema se somete a un intenso estudio y evolución, de forma tal que el problema se incluye en la rama matemática de la variable compleja y en las ecuaciones en derivadas parciales; y, poco a poco, se desarrollan aplicaciones a otros campos tales como la geometría conforme, física matemática, arquitectura, biología, ingeniería, entre otras. No obstante, a día de hoy, muchos problemas siguen aún abiertos y se siguen abriendo otros campos de mayor complejidad.

El objeto de este trabajo es el de explicar el interés mostrado a lo largo de la historia en estas entidades geométricas, destacando a aquellos físicos y matemáticos que más estudiaron este campo y contribuyeron a su evolución, de forma que, las bases queden bien comprendidas para proceder a enfatizar aquellos resultados matemáticos más importantes acerca de las superficies mínimas, así como presentar las superficies más conocidas que se han desarrollado, apoyándonos en programas informáticos matemáticos para representar cada una de ellas. Finalmente, se expondrán las aplicaciones que otras ciencias han podido encontrar en esta geometría, para, de esta forma, enfatizar esa idea de versatilidad, transversalidad y amplitud que otorgan, haciendo especial énfasis, en aquellas aplicaciones de ingeniería que actualmente podemos encontrar, lo que nos permitirá analizar la evolución y el impacto de las superficies mínimas en este campo.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.

¿Cómo un genio de las matemáticas del siglo XIX nos enseñó la mejor manera de sostener una porción de pizza?



Ilustración 1 – Cómo sostener una porción de pizza.

A todos nos ha pasado. Tomamos una porción de pizza y estamos a punto de comer un bocado, pero la porción se cae y cuelga sin fuerzas de nuestros dedos. La corteza no es lo suficientemente rígida para soportar el peso de la porción. Tal vez deberíamos haber ido por una con un menor número de ingredientes. Pero no hay necesidad de desesperarse, porque los años de experiencia de comer pizza nos han enseñado cómo hacer frente a esta situación. Simplemente doblar la porción de pizza en forma de U (también conocido como el **agarre pliegue**) evitará que la porción se caiga y podamos disfrutar de la comida. Lo mismo puede comprobarse fácilmente con una simple hoja de papel.

Detrás de esta forma de actuar, podemos encontrar un importantísimo resultado matemático sobre superficies curvas, conocido como **Teorema Egregium de Gauss**, y que tendrá una esencial contribución en todo lo que pretendemos desarrollar en esta memoria.

Pero antes de pasar al enunciado de este teorema y ver sus aplicaciones al tema aquí considerado, hagamos unas consideraciones sobre el principal concepto relacionado con el mismo, y que no es otro que la **curvatura de una superficie**.

Para ello consideremos una hoja de papel que se enrolla en forma de cilindro. Parece obvio que el papel es plano, mientras que el cilindro es curvo. No obstante, Gauss consideró estos aspectos de una forma diferente: pretendía definir la curvatura de una superficie de una forma que ésta no cambiase, aunque doblásemos la superficie.

Observamos que, si pretendiésemos desplazarnos a lo largo de este cilindro, hay muchos caminos posibles a elegir: podemos hacerlo a través de una trayectoria curva (por ejemplo, un círculo sobre el cilindro), a través de una línea recta, a través de una hélice, etc.

La gran idea de Gauss fue definir lo que llamó curvatura de una superficie de tal forma que todas las posibles opciones estén consideradas: comenzando en cualquier punto, consideramos los dos caminos más extremos que se puedan elegir, es decir, el camino más cóncavo y el camino

más convexo; luego se multiplica la curvatura de esos dos caminos juntos (siendo ésta positiva si los caminos son cóncavos, cero para caminos planos, y negativa para caminos convexos); el número que se obtenga es la definición que dio Gauss de **curvatura en ese punto**.

Veamos algunos ejemplos. Si nos movemos en un cilindro, los dos caminos extremos son una trayectoria curva (en forma de círculo) y un camino recto. Pero al tener este último curvatura cero, nuevamente se obtendrá cero al multiplicar las dos curvaturas. Por esto se considera que un cilindro es plano (tiene curvatura gaussiana cero), lo que se refleja del hecho de que el mismo se puede obtener a partir de enrollar una hoja de papel.

En cambio, si nos movemos en una bola (esfera), no tendríamos caminos planos posibles, sino que todos los caminos son igualmente curvos, por lo que la curvatura de Gauss será un número positivo. De esta forma, se observa que las esferas están curvadas, mientras que los cilindros son planos.

Como veremos, el **Teorema Egregium de Gauss** afirmará que es posible determinar la curvatura de una determinada superficie con sólo medir distancias y haciendo un poco de matemáticas, y sin tener que salirnos de dicha superficie. También veremos, como consecuencia del mismo, que es posible tomar cualquier superficie y doblarla como se quiera (siempre que no se estire, encoja o rompamos la misma), y que la curvatura de Gauss se mantendrá constante (esto es debido a que la flexión no cambia las distancias entre puntos de la superficie).

Esta afirmación puede parecer abstracta, pero tiene importantes consecuencias en la vida real. Por ejemplo, si intentamos aplastar la piel de una naranja, ésta no se aplana formando un círculo, sino que la misma se rompe al aplastarla. Esto se debe a que una esfera y un plano tienen diferentes curvaturas de Gauss (lo mismo se observa cuando intentamos embalar como regalo una pelota; no importa cómo se doble el papel, siempre nos quedará por algún lado un rastro de su planitud original, por lo que siempre acabaremos con un desastre de regalo).

De igual forma, otra consecuencia de este teorema es que es imposible describir con precisión un mapa en un folio: cualquier mapa que podemos encontrar en un atlas representa los ángulos correctamente, pero distorsiona gravemente las áreas (mayor cuanto más grande sea la superficie considerada en el mapa).

¿Y qué tiene esto que ver con nuestro inicial trozo de pizza? Éste era plano antes de cogerlo (tiene curvatura de Gauss igual a cero). El teorema Egregium nos asegura que una dirección del corte siempre debe permanecer plana (no importa cómo se doble, la pizza siempre conservará un rastro de su planitud original). Cuando el trozo cae, la dirección plana (mostrada en rojo en la figura siguiente) se sitúa en perpendicular, lo que no es práctico para comerla; pero al doblar de lado la rebanada, estamos obligando a convertir en plana otra dirección (en este caso, la dirección que apunta hacia nuestra boca).

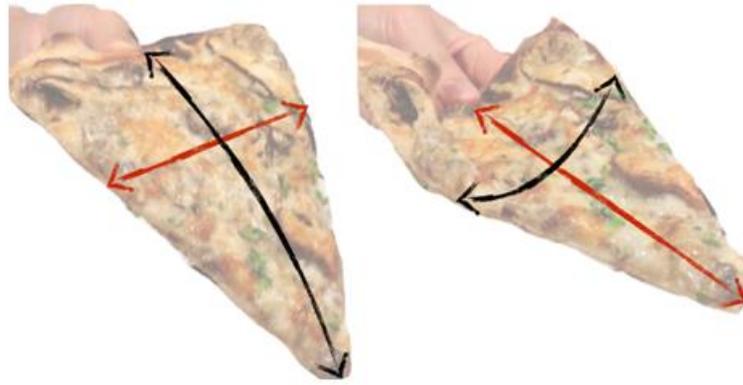


Ilustración 2 – Curvatura de un trozo de pizza.

Por curvar una hoja en una dirección, forzamos a volver rígida la otra. Una vez comprendida esta idea, podemos observar que la misma aparece por todas partes en la naturaleza. Por ejemplo, si miramos una brizna de hierba se observa que, a menudo, se pliega a lo largo de su vena central, para, de esta forma, añadir rigidez y evitar que la misma se caiga.

Por esta razón, los ingenieros utilizan con frecuencia la curvatura para añadir fuerza a sus estructuras. Un ejemplo de esto puede observarse en la cubierta de cualquier estructura grande, por ejemplo, en la cubierta del Hipódromo de la Zarzuela, ideada por el ingeniero estructural Eduardo Torroja, que diseñó un techo totalmente innovador, y que cubre una gran área sin dejar de ser de sólo unas pulgadas de espesor.



Ilustración 3 – Hipódromo de la Zarzuela.

Como podemos observar, la curvatura crea fuerza. Pensemos en lo siguiente: Podemos subirnos sobre una lata de conservas vacía que, fácilmente, va a soportar nuestro peso, a pesar de que la pared de la misma puede tener unas pocas milésimas de pulgada de espesor. El secreto de la increíble rigidez es su curvatura, lo que se puede probar de forma muy simple, ya que si

producimos una pequeña abolladura cuando estamos encima de ella, la misma se rendirá bajo nuestro peso.

Las láminas de metal corrugado utilizan esta misma idea. Formadas por materiales simples, su forma combina perfectamente con su función. Su alta resistencia y costo relativamente bajo han logrado que sean la base de cualquier estructura actual.

Hoy en día, estas láminas de metal corrugado difícilmente nos llaman la atención. Pero cuando se introdujeron por primera vez, muchos vieron el hierro corrugado como un material maravilla. Fue patentado en 1829 por Henry Palmer, ingeniero inglés a cargo de la construcción de los muelles de Londres. Palmer construyó la primera estructura de hierro corrugado del mundo, el cobertizo trementina en los muelles de Londres, y aunque no parezca sorprendente a los ojos modernos, relatamos como una revista de arquitectura de la época lo describió:

"Al pasar a través de los muelles de Londres hace poco tiempo, estábamos muy satisfechos de encontrarnos con una aplicación práctica del techado recién inventado por el Sr. Palmer. [...] Cada persona que pasa por ella, no puede dejar de impresionarse (considerándolo como un cobertizo) con su elegancia y sencillez, y con un poco de reflexión podrá convencerse de su eficacia y economía. Es, creemos, el techo más ligero y más fuerte (por su peso), que ha sido construido por el hombre, desde los tiempos de Adán. El espesor total de este techo nos parece a nosotros por una inspección hecha de cerca que no es más que una décima parte de pulgada."

Mientras que los materiales corrugados y latas de refrescos son bastante fuertes, hay una manera de hacer que los materiales sean aún más fuertes. Para descubrirlo por uno mismo, tomaremos un huevo. Si lo ponemos en la palma de la mano, envolvemos los dedos alrededor del huevo, y apretamos (nos aseguraremos de no estar usando un anillo), nos sorprenderemos de su fuerza.

¿Qué hace que los huevos sean tan fuertes? Las latas de refrescos y las láminas de metal corrugado están curvadas en una dirección, pero son planas en otra. Esta curvatura les da cierta rigidez, pero todavía pueden potencialmente ser aplanadas en las hojas planas de las cuales proceden. En contraste, las cáscaras de huevo están curvadas en ambas direcciones. Esta es la clave de su fuerza. Expresado en términos matemáticos, *estas superficies doblemente curvadas tienen curvatura gaussiana distinta de cero*. Al igual que la piel de naranja que nos encontramos antes (que nunca pueden ser aplanadas sin desgarrarse o estirarse), el teorema de Gauss nos asegura de este hecho, es decir, para romper un huevo, primero debes hacer una mella en él, ya que, si pierde su curvatura, pierde su fuerza.

Otro ejemplo lo tenemos en la forma de una torre de refrigeración de una central nuclear. Esta superficie también incorpora curvatura en ambas direcciones. Veremos con posterioridad que su forma, llamada hiperboloide, minimiza la cantidad de material necesario para construirlo. Así que podemos afirmar que las chimeneas regulares son bastante como latas de refrescos gigantes (son fuertes, pero también pueden pandearse con facilidad). Una chimenea en forma de hiperboloide resuelve este problema curvando en ambas direcciones. Esta doble curvatura bloquea la forma, dándole una rigidez extra de la que una chimenea normal carece.



Ilustración 4 – Forma chimenea nuclear.

Otra forma que obtiene su fuerza de su doble curvatura es la típica patata frita Pringles, que tiene la forma de un paraboloides hiperbólico.

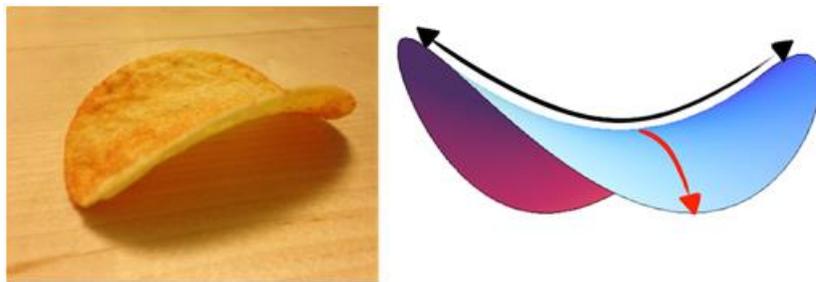


Ilustración 5 – Forma patata frita Pringles.

La naturaleza explota la fuerza de esta forma de modo impresionante. Pero ¿qué hace que esta forma sea la más resistente? Tiene que ver con cómo se equilibran los pesos y tensiones. Todas las estructuras tienen que soportar peso, y en última instancia transferir este peso hasta el suelo. Pueden hacerlo de dos maneras diferentes: hay **compresión** (el peso aprieta un objeto empujando hacia adentro; un arco es un ejemplo de una estructura que existe en compresión pura), y hay **tensión** (el peso tira de los extremos de un objeto, que se extiende separadamente). El paraboloides hiperbólico combina lo mejor de ambos mundos. La parte cóncava en forma de U se estira en tensión (mostrada en negro en la figura anterior) mientras que la parte en forma de arco convexo se aprieta en la compresión (mostrada en rojo). A través de la doble curvatura, esta forma logra un delicado equilibrio entre fuerzas de empuje y tracción, lo que le permite permanecer delgada pero sorprendentemente fuerte.

La fuerza a través de la curvatura es una idea que da forma a nuestro mundo, y tiene sus raíces en la geometría. Así que la próxima vez que tomemos una porción de pizza, pensemos un poco y podremos apreciar el vasto legado existente detrás de este simple truco que utilizamos para comer esta porción.

2.2. CONTEXTO HISTÓRICO.

Aunque hemos de remontarnos al tercer milenio a. C. para encontrar las primeras referencias de una matemática organizada y avanzada (como las utilizadas en Mesopotamia y en la cultura egipcia basadas principalmente en cálculos aritméticos), en el caso que nos ocupa, será en la Grecia antigua durante los siglos VI-IV a. C. donde, la geometría empieza a desarrollarse y es usada por los eruditos de la época para resolver problemas sociales, tales como calcular las áreas de parcelas y terrenos, medir distancias, entre otros.

Tales de Mileto (624 a. C. – 546 a. C.), influenciado por dichas culturas durante sus viajes, aportará las primeras demostraciones de teoremas geométricos mediante razonamiento lógico, lo cual sentará las bases en el estudio de la geometría para el resto de los eruditos de su época, entre los que cabe destacar a Pitágoras de Samos (569 a. C. – 475 a. C.) y a sus discípulos, quienes hicieron importantes descubrimientos en geometría (Teorema de Pitágoras) y en la teoría de los números y contribuyeron en el campo de la física, afirmando que la Tierra tenía forma esférica, ya que ésta era la forma perfecta según los principios de proporción, orden y armonía con los que trabajaban. Aunque más conocido en el campo de la filosofía, un siglo después Platón (427 a. C. - 347 a. C.) sugirió esta misma afirmación, lo cual aumentó la popularidad de la idea. Pero fue Aristóteles (384 a. C.) quien presentó las pruebas de esta afirmación y, más tarde, Eratóstenes (276 a. C. – 194 a. C.) quien determinó el tamaño de la Tierra observando la posición del sol midiendo la posición del mismo con un palo. Sin embargo, es Euclides (352 a. C. – 265 a. C.) el erudito conocido por ser el padre de la Geometría, quien, a través de su trabajo más conocido, "Los Elementos", recoge todos aquellos teoremas y demostraciones sobre geometría y aritmética. Entre ellos, cabe destacar el planteamiento del **problema isoperimétrico**, consistente en determinar la figura plana con idéntico perímetro que encierra la mayor área. Aunque la leyenda de la reina Dido sugiere la solución, no será hasta el siglo XIX cuando finalmente se demostrará que la solución a este problema es la circunferencia.

De igual forma, fueron los griegos los que, basándose en las paradojas filosóficas de Zenón de Elea (490 a. C. – 430 a. C.), empezaron a pensar en el concepto de infinito, viéndolo de dos formas, tanto para lo grande, como para lo pequeño. Y aunque Aristóteles (384 a. C. – 322 a. C.) prohibió su uso debido a que no existía una regularización sobre el mismo y no era posible considerar a un segmento como un conjunto de puntos infinitos, sí concluyó que era posible dividir un segmento por la mitad una y otra vez. Esto contribuyó a que otros eruditos como a Eudoxo de Cnido (390 a. C. – 337 a. C.) postularan que "toda magnitud finita puede ser agotada mediante la sustracción de una cantidad determinada", en ayuda al descubrimiento de los números irracionales. Gracias a esto, se logró calcular el área de círculos usando polígonos inscritos, y extrapolando, también el área de una esfera. Nació así lo que se conoce como el Cálculo Infinitesimal, aunque los cimientos de este campo fueron verdaderamente establecidos mediante los estudios de Arquímedes (287 a. C. – 212 a. C.), quien obtuvo valores cercanos al número π actual e hizo numerosos estudios sobre figuras planas y volúmenes en sólidos curvos y acercó la mecánica al uso de la geometría.

A pesar del gran avance ya obtenido, no es hasta el medievo en el siglo XIV, cuando las matemáticas vuelven a retomar su estudio, centrándose en la cuantificación de formas variables y utilizando por primera vez la representación gráfica de éstas - Oresme (1323 – 1382) – y quien con ello se acerca al concepto de tangente. Más tarde, Galileo (1564 – 1642), formuló las primeras

leyes sobre el movimiento, y Kepler (1571 – 1630), enunció las leyes sobre la órbita elíptica de los planetas.

Aunque es en el Renacimiento cuando la geometría griega resurge, gracias al nexo entre Geometría y Álgebra que establecen Descartes (1596 – 1650) y Fermat (1601 – 1665), y que sientan las bases de la geometría analítica y se empieza a vislumbrar el cálculo diferencial. Esto permite, más tarde, a Newton (1642 – 1727) idear finalmente el cálculo diferencial e integral, además de sus numerosas y conocidas aportaciones.

Algo más tarde, Leonard Euler (1707 – 1783), haciendo uso de todos los conocimientos conocidos hasta entonces, destacó por sus grandes aportaciones al campo de las matemáticas, en diferentes áreas de ésta como geometría, trigonometría, álgebra, cálculo y teoría de números, así como en física y astronomía. Aunque para el caso que nos ocupa, la obra que más influye en el desarrollo de lo que, posteriormente, se denominarán superficies mínimas, es la [1], donde, por primera vez, se hace uso del cálculo de variaciones como método que permita encontrar líneas curvas con propiedades de máximo o mínimo empezando, de esta forma, a esbozar una solución al problema isoperimétrico, ya expuesto en la antigua Grecia. Con todo esto, Euler descubre que al rotar la catenaria respecto a un eje horizontal externo surge la catenoide (o *alysseide*, según el autor), que es una superficie mínima, aunque este término no fue usado por él. Gracias a los nuevos métodos y técnicas descubiertas por Euler, que combinan las disciplinas de geometría pura y métodos diferenciales, se produce una gran evolución en esta disciplina en los años posteriores.

Fue, finalmente, Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813), quien propuso el problema de encontrar, haciendo uso de una función parametrizada de la forma $z = f(x, y)$, la superficie de menor área limitada por un contorno fijo, y que queda expuesto en su artículo [2], acuñando, de esta forma, la definición de superficie mínima y resolviendo definitivamente el problema isoperimétrico. Concluyó, pues, que para que la función f definida fuese un mínimo del funcional área debía cumplirse la ecuación en derivadas parciales siguiente:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0 \quad (1)$$

Esta ecuación, será conocida como **ecuación de Lagrange o ecuación de Euler-Lagrange**, debido a la colaboración de ambos, y son las soluciones a ésta las que nos interesarán para desarrollar el tema que nos concierne, las superficies mínimas.

Una vez que el término fue descubierto, surgió un interés importante en él, y el desarrollo de esta teoría sufrió una gran evolución. El principal matemático que contribuyó de forma notable en este campo fue Gaspard Monge (1746 – 1818), quien desarrolló una teoría de curvas y superficies recogida en su obra [3], donde se incluyen algunos de los cálculos de variaciones llevados a cabo y fórmulas para obtener las coordenadas de varias superficies mínimas. Se concluyó entonces que cualquier otra superficie que esté acotada por la misma curva de una superficie mínima tendrá mayor área que ésta. Posteriormente, Jean Baptiste Meusnier (1754 – 1793), discípulo de Monge, fue más allá en este estudio. No sólo demostró que tanto la catenoide y el helicoides satisfacían la ecuación (1) (queda recogido en su obra [4]) sino que también detectó la propiedad que caracteriza a estas superficies, la curvatura media cero¹, que demuestra la anulación de una cantidad geométrica según la forma en que esa superficie se curva en el espacio.

¹ Concepto que aparece gracias a la sugerencia hecha por Sophie Germain (1776 – 1831).

Otros matemáticos que contribuyeron a la teoría de superficies mínimas y que consiguieron obtener resultados para la ecuación (1), fueron Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), Sylvestre François Lacroix (1765 – 1843) y André-Marie Ampère (1775 – 1836), entre otros.

Después del gran auge de estas superficies en las matemáticas, su estudio se quedó estancado durante casi sesenta años, y fue Heinrich Ferdinand Scherk (1798 – 1885) quien en sus publicaciones [5] y [6], con una técnica de separación de variables encontró soluciones a la ecuación (1) dando lugar a la aparición de cinco nuevas superficies mínimas, conocidas como superficies de Scherk. Sus descubrimientos son el preámbulo de la Edad de Oro de las superficies mínimas, y tendrá su mayor evolución en la segunda mitad del siglo XIX. Aunque destaca el trabajo de Eugène Charles Catalan (1841 – 1894), quien demostró que la única superficie mínima generada por una recta es el helicoides; este campo tiene su máximo auge con el planteamiento que Joseph Plateau (1801 – 1883) propone y que será una revolución para desarrollar la ciencia actual.

Joseph Plateau realizó experimentos sencillos consistentes en crear pompas de jabón mojando diferentes formas creadas con alambre en una mezcla de agua y jabón. Gracias a estos experimentos, se percató de que dichas pompas obedecían un principio: *el área de éstas sería la mínima puesto que esto conferiría estabilidad al tener una energía potencial mínima*. Asimismo, afirmó que los resultados obtenidos en sus experimentos estaban, principalmente, causados por la tensión superficial de la pompa que se creaba, ya que su propia naturaleza buscaba crear el área mínima que demandase la mínima energía posible. De esta forma experimental, formuló el problema, más conocido como, "**problema de Plateau**", basado en determinar el área mínima de una superficie con unas condiciones de contorno establecidas, y cuyo estudio dio lugar a enunciar sus conocidas "*Leyes de Plateau*", las cuales quedan recogidas en la obra [7] de Jean Taylor, quien finalmente demostró estas leyes como consecuencia del principio de mínima energía. Estas leyes se establecen gracias a las condiciones de forma y configuración siguientes ²:

1. *"Las películas de jabón están formadas por superficies suaves (sin arrugas ni bultos) continuas (sin separaciones).*
2. *La curvatura media de una porción de película de jabón es siempre constante en cualquier punto de la misma porción de la película de jabón".*
3. *"Tres películas de jabón se intersecan a lo largo de una línea, formando un ángulo de $\arccos\left(\frac{-1}{2}\right) \approx 120^\circ$, llamada frontera de Plateau".*
4. *"Cuatro de las llamadas fronteras de Plateau, cada una formada por la intersección de tres películas, se intersecan en un punto formando un ángulo de $\arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109^\circ 28'$ (ángulo tetraédrico)."*

Y serán finalmente enunciadas de la siguiente forma ²:

"Primera Ley: *Tres superficies de jabón se intersecan a lo largo de una línea. El ángulo formado por los planos tangenciales a dos superficies que se intersecan, en cualquier punto a lo largo de la línea de intersección de las tres superficies, es de 120 grados."*

"Segunda Ley: *Cuatro de las líneas, todas formadas por la intersección de tres superficies, se intersecan en un punto y el ángulo formado por cada par de ellas es de 109 grados y 28 minutos."*

² Extraído de https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Plateau.

"Tercera Ley: Una película de jabón que puede moverse libremente sobre una superficie se interseca con ella formando un ángulo de 90 grados."

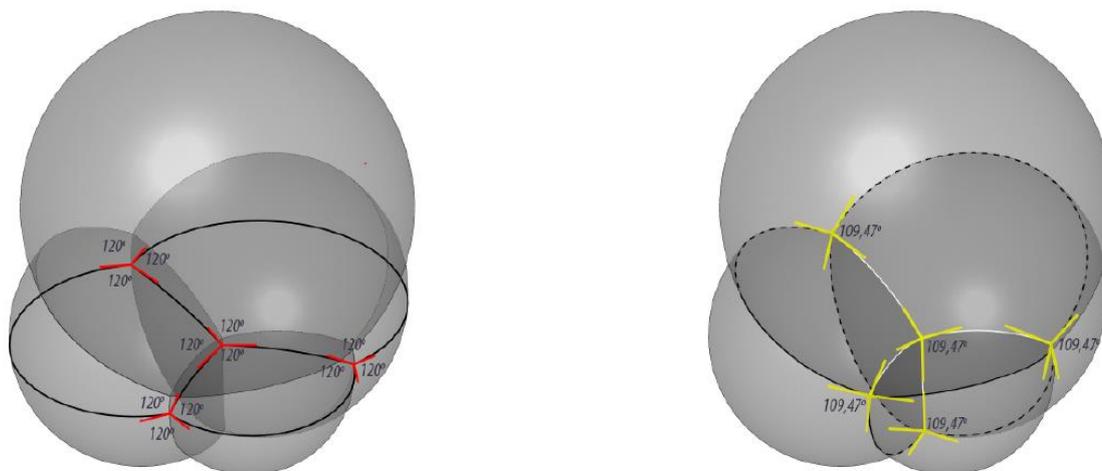


Ilustración 6 – Leyes de Plateau ³

Sin embargo, el estudio de este problema era complejo, y fue gracias a la aportación de Elwin Bruno Christoffel (1829 – 1900), quien descubrió que la aplicación de Gauss de las superficies mínimas en el espacio euclidiano permitía representarlas en el mismo. Esto hizo posible usar nuevas técnicas para obtener más ejemplos de superficies mínimas, así como sus propiedades. Algunos de los estudiosos que usaron estos métodos para encontrar soluciones al problema de Plateau fueron: Alfred Enneper (1830 – 1885), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921) y Karl Weierstrass (1815 – 1897). De entre ellos, Riemann, contribuyó a la evolución de este campo de estudio y al campo de la Topología gracias a su trabajo [8]. En él, usó el problema de Plateau con superficies mínimas que estaban bordeadas por una o varias líneas rectas, que se conocerán más adelante con el nombre de "ejemplos de Riemann". También, Lebrecht Henneberg (1850 – 1933) descubrió la primera superficie mínima no orientable. Esto puede encontrarse en sus publicaciones [9] y [10].

Otros estudios usaron también el problema de Plateau para demostrar la existencia de una superficie mínima pero esta vez en forma de disco. Fueron Tibor Radó (1895 – 1965) y, el más conocido, Jesse Douglas (1897 – 1965), quien también contribuyó en este campo resolviendo otros problemas recogidos en la obra [11].

En los últimos años, este campo de estudio ha evolucionado enormemente, hasta llegar al concepto de superficies mínimas completas, o aquellas superficies que se extienden de forma indefinida en el espacio al carecer de frontera y que fueron estudiadas por Robert Osserman (1926 – 2011) en sus obras [12] y [13]. Esto ha conseguido que esta teoría esté de nuevo en expansión e investigación dentro de la geometría diferencial.

³ Extraído de wewanttolearn.net.

3. SOLUCIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

Una vez comprendida la evolución histórica que este problema ha experimentado, desde la Antigua Grecia hasta nuestros días, vemos que los descubrimientos importantes en superficies mínimas han estado siempre ligados a las propiedades de éstas. Por tanto, en esta sección pasaremos a enumerar todos aquellos requisitos matemáticos cuya comprensión es necesaria para resolver el problema de Plateau.

Recordemos que fue Joseph Plateau quien formuló el problema que ha servido de base para poder encontrar nuevas superficies mínimas y que éste sigue estando en estudio. Este problema plantea cómo determinar la superficie mínima que contiene una curva cerrada en el espacio.⁴ Para ello, tendremos dos puntos conocidos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de un plano XY . Si tenemos en cuenta que $x_1 < x_2$, que los puntos P_1 y P_2 están unidos mediante la ecuación de la curva $y = y(x)$, tal que $y = y(x_1), y = y(x_2)$ y que haremos girar a esa curva alrededor del eje x , entonces llegaremos al problema de elegir aquella función $y(x)$ con un área de superficie de revolución mínima:

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

3.1. REQUISITOS MATEMÁTICOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA.

Teniendo en cuenta el planteamiento hecho en el problema de Plateau en el apartado anterior, podemos ver que el principal concepto para trabajar con este tipo de superficies será el de curvatura.

Se entiende por **curvatura** a aquella curva regular conexa cuyos vectores tangentes a la superficie que la contiene crean una dirección principal en ésta. Existirán dos tipos: **curvatura extrínseca** y **curvatura intrínseca**. De éstas, la primera en estudiarse fue la curvatura extrínseca en el espacio 3-dimensional y gracias a ella se consiguió describir completamente a toda curva del espacio según el punto inicial de ésta, la curvatura y torsión que presenta y la dirección que sigue, lo que queda recogido en las fórmulas de Frenet [14].

Con posterioridad, se estudiaron aquellas curvaturas del espacio bidimensional (2D) o de superficies. De ese estudio nacieron el concepto de **curvatura media** y el de **curvatura de Gauss**.

Pasemos pues a desarrollar estos conceptos para las curvas en el plano euclídeo y para las superficies en el espacio, de cara a entender mejor las diferencias de ambos tipos de curvatura (ver [15] y [16]).

a) Curvas en el plano euclídeo.⁵

Tengamos en cuenta que la curvatura de una curva γ viene definida por $\kappa(t) := \|\ddot{\gamma}(t)\|$, que será la longitud de su vector aceleración en el caso en el que γ se considera de velocidad máxima.

⁴ Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Plateau

⁵ Fuente: "Una introducción a la curvatura" por Eduardo García Río, Universidad de Santiago de Compostela.

Para curvas planas, la curvatura tiene la interpretación geométrica siguiente:

Dado un punto $p = \gamma(t)$, existirán numerosos círculos tangentes a γ en p . Es decir, círculos que presentarán una velocidad en p igual que en γ , o de igual forma, serán aquellos círculos cuyo centro pertenece a la recta que pasa por p y que es ortogonal a γ en ese punto. De todos los círculos que podemos encontrar, sólo habrá uno para el que su aceleración en p sea la misma que para γ . En el caso en el que la aceleración sea nula, $\ddot{\gamma}(t) = 0$, se considerará una recta en lugar de un círculo y se interpretará como un círculo cuyo radio es infinito.

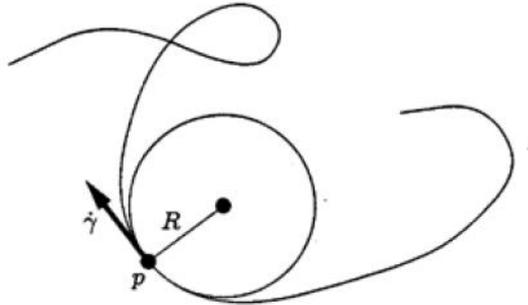


Ilustración 7 – Círculo tangente a la curva en un punto p .⁵

Podemos ver entonces que la curvatura podrá darse como $\kappa(t) = \frac{1}{R}$, siendo R el radio círculo oscilador. Para asignar el signo a esta curvatura, elegiremos un vector unitario normal N en la curva, de tal forma que si la curva gira hacia N, se le asignará un signo positivo de curvatura, y si gira en dirección contraria, entonces el signo de curvatura será negativo. A esta función, κ_N , se la llama "curvatura con signo" y tiene como función la de determinar la curva en el plano.

Por otro lado, las curvas en el espacio presentan una problemática, ya que también pueden retorcerse en el plano sin necesidad de cambiar su curvatura. De esta forma, aparece también el concepto de torsión y podremos asegurar que para determinar la curva en el espacio necesitaremos de ambos datos: curvatura y torsión. La relación de ambos puede verse en el triedro de Frenet - Serret y en el Teorema Fundamental de la Teoría de Curvas.

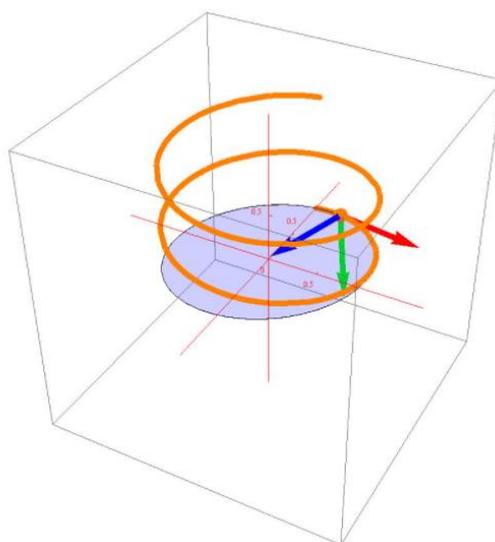


Ilustración 8 - Triedro de Frenet-Serret.⁶

⁶ Fuente: <http://matcalculus.wikidot.com/frenet>

b) Superficies en el espacio.⁷

Dada una superficie S de \mathbb{R}^3 de clase C^∞ orientable (es decir que en esta superficie S existe un campo global de vectores N , que es diferenciable, normal y unitario), y dado un punto $p \in S$ que pertenece a esa superficie, se considera un plano que toca tangencialmente $T_p S$ a la superficie S en el punto p .

Estudiar la curvatura de una superficie S en el punto p tratará, tal y como estudiaron Euler y el resto de los matemáticos, de considerar la curvatura en el punto p de aquellas curvas obtenidas al cortar de forma transversal la superficie por medio de planos perpendiculares a S . Hablamos de *secciones normales*.

Para entender esto, vamos a elegir en $T_p S$ un vector v que será tangente a la superficie S en el punto p y consideraremos un plano Π que pasa por ese mismo punto y que contendrá tanto la dirección del vector v como al vector normal a S en el punto p dado por la orientación de la superficie, siendo de esta forma el plano Π perpendicular a S .

La superficie será intersectada por el plano en una curva C , conocida como sección normal a lo largo de $v \in T_p S$, de forma tal que se cumplirá: $C = \Pi \cap S$. Si, además, parametrizamos por la longitud de arco de la curva C que viene dada por $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow C \subset S$, para unas condiciones iniciales de $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$ podemos ver que dado el producto interior en \mathbb{R}^3 , se definirá la curvatura normal de $C \subset S$ en $p = \alpha(0)$ de la siguiente forma: $\kappa_n(p) = \langle \alpha''(0), N(p) \rangle = \langle k(0)n(0), N(p) \rangle$. Veremos entonces que la curvatura se calculará para todos aquellos planos que contengan a N , definidos cada uno por la dirección de un vector del plano $T_p S$, y podremos definir como curvaturas principales de S en p a las direcciones de los vectores tangentes v_1 y v_2 (también conocidas como direcciones principales) cuya curvatura normal $\kappa_n(p)$ sea la mayor menor respectivamente, como queda reflejado en las siguientes expresiones:

$$\kappa_1(p) = \min\{\kappa_n\}$$

$$\kappa_2(p) = \max\{\kappa_n\}$$

En la figura siguiente vemos una representación de lo comentado anteriormente.

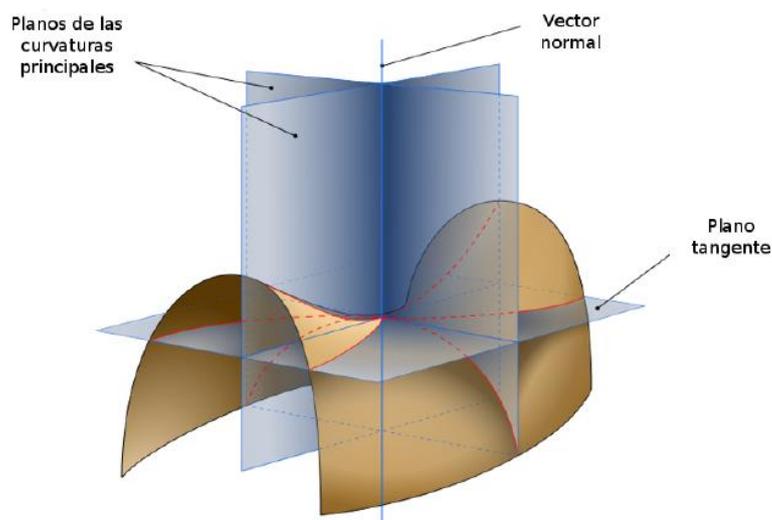


Ilustración 9 – Curvaturas principales y secciones normales de una superficie.⁸

⁷ Fuente: Ver bibliografía [16].

⁸ Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_diferencial_de_superficies.

Como podemos ver en la sección 3.2 de la publicación [17], $-\kappa_1, -\kappa_2$ son aquellos valores propios de la siguiente aplicación lineal $dN_p: T_p S \rightarrow T_p S \cong T_{N(p)} \mathbb{S}^2$, conocida como la diferencial de la aplicación de Gauss, y los vectores propios asociados a estos valores se corresponderán con las direcciones principales v_1 y v_2 .

Con todo esto estaremos ya en condiciones de presentar la definición de curvatura media: definiremos **curvatura media**, en adelante H , de una superficie S en el punto $p \in S$ como la media de las curvaturas principales, tal y como se muestra en la siguiente expresión:

$$H = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}$$

Usando la caracterización de H dada en la sección 3.3 de la publicación [17], podemos decir que la curvatura media es:

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} \quad (2)$$

siendo E, F y G , y e, f y g , aquellos coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de la superficie S .

De esta forma, queda explicada la curvatura tanto en el plano euclídeo como en la superficie en el plano. Se trata del requisito fundamental para comprender este tipo de superficies y nos permitirá dar una definición de lo que será una superficie mínima.

3.1.1. DEFINICIÓN DE SUPERFICIE MÍNIMA.⁹

Una **superficie mínima** es aquella superficie cuya curvatura media H se anula idénticamente, es decir, cuando la curvatura media es nula en un punto, las dos curvaturas principales tendrán el mismo valor absoluto en ese punto, pero con signo opuesto. Si representamos gráficamente a la superficie alrededor de ese punto, nos encontraremos con una forma de "silla de montar", de forma tal que una dirección iría hacia arriba y la otra iría hacia abajo de forma ortogonal con respecto a la primera, o, dicho de otra forma, se trata de una superficie con una tensión equilibrada que no necesita modificarse para reducir o aumentar esta.

Aunque el concepto de curvatura media ha permitido llegar a una definición de superficie mínima, se pueden obtener otras definiciones por medio de otros conceptos o experimentos. Algunas de estas definiciones son las siguientes:

a) Ecuación en derivadas parciales.

Como ya se mencionó en el capítulo 2, haciendo uso de una función parametrizada de la forma $z = f(x, y)$, la superficie de menor área o superficie mínima $S \subset \mathbb{R}^3$ limitada por un contorno fijo es mínima únicamente si puede expresarse de forma local como una solución de la ecuación en derivadas parciales siguiente, más conocida como *ecuación de Euler-Lagrange*:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0$$

⁹ Fuente: Ver bibliografía [16].

b) Menor área local.

También podemos decir que una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es mínima en el caso de que se cumpla que cada punto $p \in S$ tiene como entorno a aquella superficie de área mínima de todas las posibles con igual frontera.

Por medio de estas dos definiciones, se puede ver la relación que este campo de las matemáticas tiene con el cálculo de variaciones, y veremos a las superficies mínimas como una analogía bidimensional de la geometría de Riemann, al ser los arcos de menor longitud de una forma local.

c) Películas de jabón.

Si, por otro lado, nos basamos en el caso experimental de las pompas de jabón realizado por Plateau, podemos decir que una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es mínima únicamente si puede reproducirse con una membrana de jabón, es decir, si cada punto $p \in S$ tiene un entorno D_p igual a esa película con frontera ∂D_p .

Existen otras definiciones de superficie mínima, como son las dadas por medio de las funciones armónicas, de la aplicación de Gauss o por variaciones de área, además de otras que se relacionan con la teoría del potencial, pero no serán objeto de estudio en este trabajo.

3.2. CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES

Una vez que se tiene una idea general de lo que es una superficie mínima, el siguiente objetivo es el de construir aquellas superficies (algunas de ellas ya mencionadas en capítulos anteriores) que pueden considerarse mínimas.

En este capítulo se incluirán las representaciones de las distintas superficies estudiadas realizadas con ayuda de Matlab, aunque la obtención de éstas se incluye posteriormente en el Anexo al final del documento.

Para cada una de estas superficies se dará una parametrización de ellas para facilitar su representación. En los casos más sencillos, se llevarán a cabo los cálculos oportunos para demostrar que cumplen con la condición de superficie mínima, pero debido a la complejidad y extensión de las superficies más complejas estos cálculos no se incluirán, ya que no es el objetivo del trabajo. Podremos dirigirnos a todas aquellas publicaciones que han servido de apoyo para realizar este capítulo ([16], [18], [19], [20] y [21]).

Así, empezaremos, en primer lugar, caracterizando a las primeras superficies mínimas descubiertas: el catenoide y el helicoide, para las que ha de cumplirse que la curvatura media sea nula; con posterioridad se introducirán otras superficies mínimas: primera y segunda de Scherk, de Enneper, de Catalan, de Henneberg, de Schwarz, giroide, lidinoide, de Bour y la superficie mínima de Costa.

3.2.1 PRIMERAS SUPERFICIES MÍNIMAS.

Ejemplo 1: Catenoide.

Si rotamos una catenaria cuya ecuación es $x = \frac{1}{a} \cosh(az)$, siendo a una constante no negativa, alrededor de su directriz, eje z , en el plano xz obtendremos una superficie: la catenoide.

Esta superficie, encontrada y demostrada por Leonhard Euler en 1744 y, más tarde, estudiada por Jean Baptiste Meusnier, es la única superficie de revolución mínima, o de curvatura media cero, es decir, será la única superficie mínima que junto con el plano es invariante al rotar alrededor de un eje.

Para poder representar esta superficie, haremos una parametrización de la forma siguiente:

$$x(u, v) = (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, u)$$

Donde se cumple que $u \in \mathbb{R}$ y $v \in [0, 2\pi]$. Si, además, por simplicidad, consideramos que la constante $a = 1$, entonces tendremos que:

$$x(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

Para poder demostrar que la catenoide es, efectivamente, una superficie mínima comprobaremos si su curvatura media es nula. Para ello, necesitaremos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}x_u &= (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1) \\x_v &= (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0) \\x_u \wedge x_v &= (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \sinh u \cosh u) \\N &= (-\operatorname{sech} u \cos v, -\operatorname{sech} u \sin v, \tanh u) \\x_{uu} &= (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0) \\x_{uv} &= (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0) \\x_{vv} &= (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0)\end{aligned}$$

En primer lugar, como hemos comentado, la ecuación de caracterización de curvatura media H (ecuación (2)) debe ser nula. Para ello, con los datos anteriores, obtendremos los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales para la función x , los cuales serán:

$$\begin{aligned}E &= \cosh^2 u & e &= -1 \\F &= 0 & f &= 0 \\G &= \cosh^2 u & g &= 1\end{aligned}$$

Si sustituimos ahora en la ecuación (2), entonces podremos concluir que $H = 0$ y que se cumple que es una superficie mínima y queda representada en la figura siguiente:

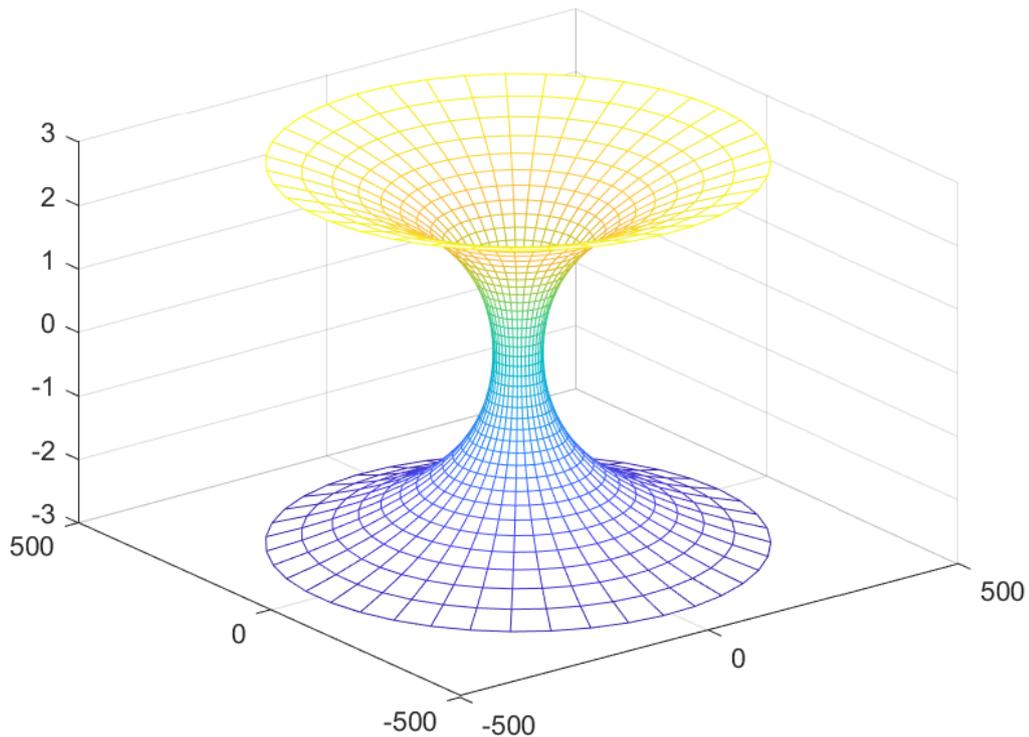


Ilustración 10 - Representación gráfica de un catenoide.

Referirse al punto 1 del anexo para ver las consideraciones tomadas al hacer la representación.

Ejemplo 2: Helicoide.

Un helicoide es una superficie reglada, es decir, esta superficie es generada por una recta que se mueve de forma simultánea alrededor del eje perpendicular a la recta y sobre el propio eje a velocidad constante, o bien, aquella que se mueve alrededor de una curva, que, en este caso, será una hélice.

Al igual que la catenoide, fue Jean Baptiste Meusnier, quien demostró que se trataba de una superficie mínima al comprobar de su curvatura media era nula.

Para poder representar esta superficie llevaremos a cabo una parametrización de la misma. En primer lugar, hemos de tener en cuenta que una hélice viene dada por la función vectorial siguiente:

$$x : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$v \mapsto x(v) = (\cos v, \sin v, \alpha v), \quad \alpha \neq 0$$

Consideraremos que el eje sobre el que gira la superficie es el eje z y que α es la velocidad de la recta sobre el eje z y ω es la velocidad angular de rotación de esa recta.

Además, tendremos en cuenta las siguientes condiciones: la recta comienza a moverse desde el eje x , el centro de la recta tendrá como posición $x(v) = (0, 0, \alpha v)$ y rotará un ángulo de ωv y su condición inicial es $x(0) = (u, 0, 0)$.

Con estas consideraciones obtendremos que la ecuación parametrizada del helicoide es:

$$x(u, v) = (u \cos \omega v, u \sin \omega v, \alpha v)$$

Para poder demostrar que el helicoides es una superficie mínima tendremos que comprobar que la curvatura media de ésta es nula. Para, primero, usando la parametrización, obtendremos los resultados siguientes:

$$\begin{aligned}
 x_u &= (\cos \omega v, \sin \omega v, 0) \\
 x_v &= (-u\omega \sin \omega v, -u\omega \cos \omega v, \alpha) \\
 x_u \wedge x_v &= (\alpha \sin \omega v, -\alpha \cos \omega v, \omega u) \\
 N &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2 u^2}} (\alpha \sin \omega v, -\alpha \cos \omega v, \omega u) \\
 x_{uu} &= (0,0,0) \\
 x_{uv} &= (-\omega \sin \omega v, \omega \cos \omega v, 0) \\
 x_{vv} &= (-\omega^2 u \cos \omega v, -\omega^2 u \sin \omega v, 0)
 \end{aligned}$$

Con los datos anteriores, obtendremos los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales para la parametrización x , los cuales serán:

$$\begin{aligned}
 E &= 1 & e &= 0 \\
 F &= 0 & f &= \frac{-\alpha\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2 u^2}} \\
 G &= \alpha^2 + \omega^2 u^2 & g &= 0
 \end{aligned}$$

Si sustituimos ahora en la ecuación (2), entonces podremos concluir que $H = 0$ y que se cumple que es una superficie mínima y queda representada en la figura siguiente:

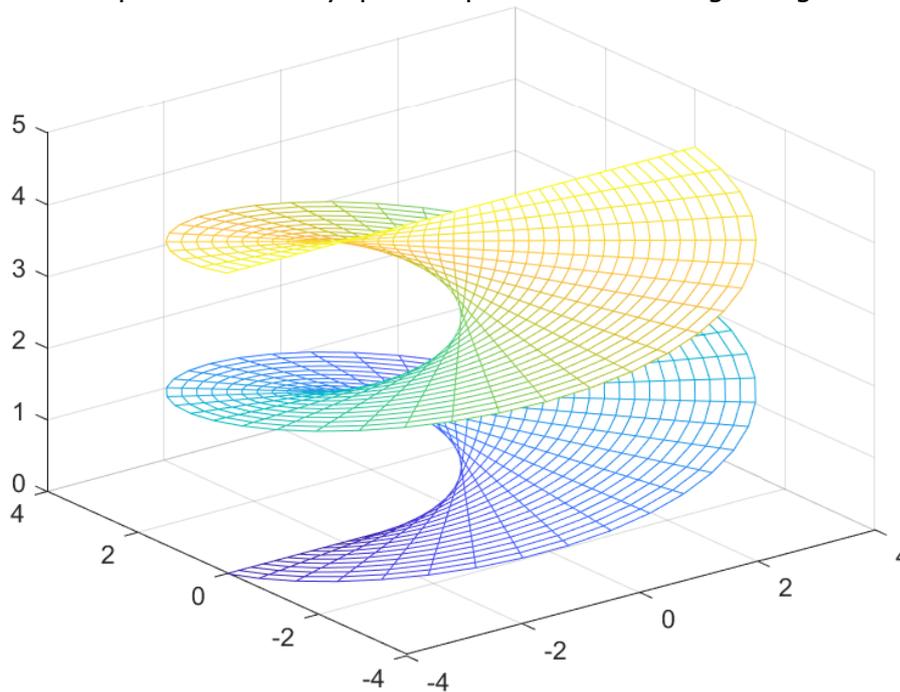


Ilustración 11 - Representación gráfica de un helicoides.

Referirse al punto 2 del anexo para ver las consideraciones tomadas al hacer la representación.

Tanto el helicoides como el catenoides satisfacen la condición de curvatura media nula y suponen los ejemplos más sencillos que pueden mostrarse de superficie mínima, sin embargo, existen muchas otras superficies más complejas. Para encontrar algunos de los casos más importantes podremos usar también la ecuación de Euler-Lagrange (1), además de la de curvatura media nula.

3.2.2 OTRAS SUPERFICIES MÍNIMAS.

Ejemplo 3: Primera Superficie Mínima de Scherk.

En 1835 Scherk descubre la primera superficie mínima que lleva su nombre. Para ello, le dará condiciones algebraicas a la ecuación de Euler-Lagrange para resolverla por medio de métodos elementales. Para ello, supone que la superficie viene dada por una función f que es de la siguiente forma: $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Si ahora incluimos esta función en la ecuación de Euler-Lagrange, obtendremos lo siguiente:

$$(1 + (h'(y))^2)g''(x) + (1 + (g'(x))^2)h''(y) = 0$$

Con lo cual, para que la condición de superficie mínima se cumpla, ha de ser:

$$\frac{g''(x)}{1 + (g'(x))^2} = -\frac{h''(y)}{1 + (h'(y))^2}$$

Obteniendo los valores de g y h al resolver la ecuación en derivadas parciales, llegamos al siguiente resultado para la función f :

$$f(x, y) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\cos ax}{\cos ay} \right)$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y la superficie periódica estará definida sólo si $\left(\frac{\cos ax}{\cos ay} \right) > 0$.

Su ecuación implícita será, por tanto:

$$e^z \cos x = \cos y$$

Si tenemos en cuenta que $z = f(x, y)$, y que $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ y $v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, y tomamos $a = 1$ entonces una parametrización de la función viene dada por:

$$x(u, v) = \left(u, v, \ln \left(\frac{\cos u}{\cos v} \right) \right)$$

Obtenida la parametrización, podremos obtener varias representaciones de esta superficie según los valores de los intervalos que usemos.

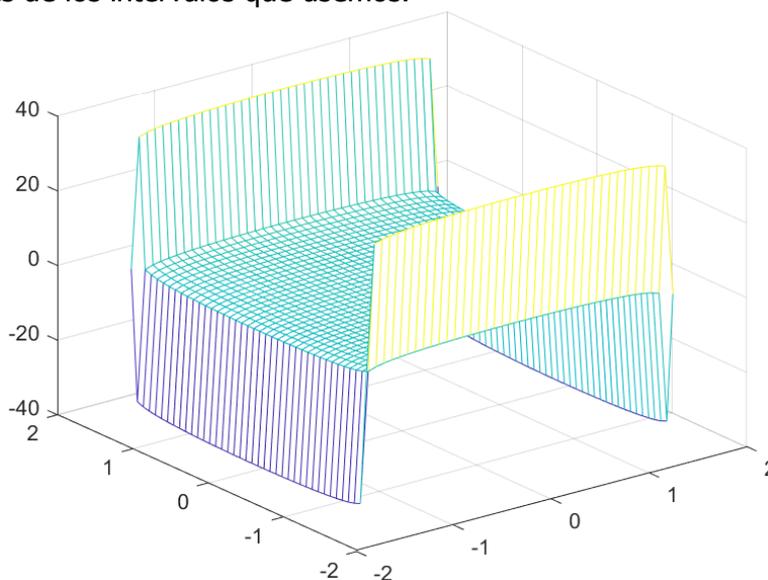


Ilustración 12 - Representación gráfica de la primera superficie de Scherk (1)

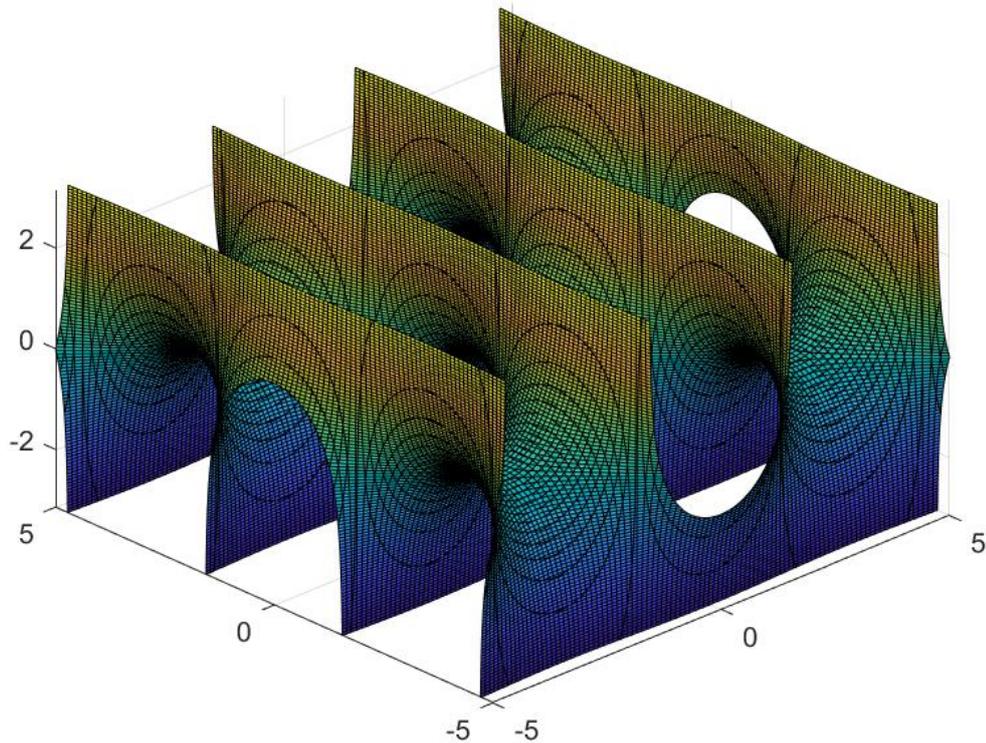


Ilustración 13 - Representación gráfica de la primera superficie de Scherk (2)

Referirse al punto 3 del anexo para ver las consideraciones tomadas al hacer las dos representaciones.

Ejemplo 4: Segunda superficie mínima de Scherk.

Más adelante, Scherk descubrió la segunda superficie que lleva su nombre. En este caso, la superficie se puede obtener por medio de la ecuación implícita de la forma:

$$\sin z = \sinh x \sinh y$$

Siendo, por otro lado, la ecuación paramétrica para esta superficie la siguiente:

$$x(u, v) = (\text{arc sinh } u, \text{arc sinh } v, \text{arc sin } uv)$$

Ambas ecuaciones pueden utilizarse para realizar una representación de la segunda superficie de Scherk.

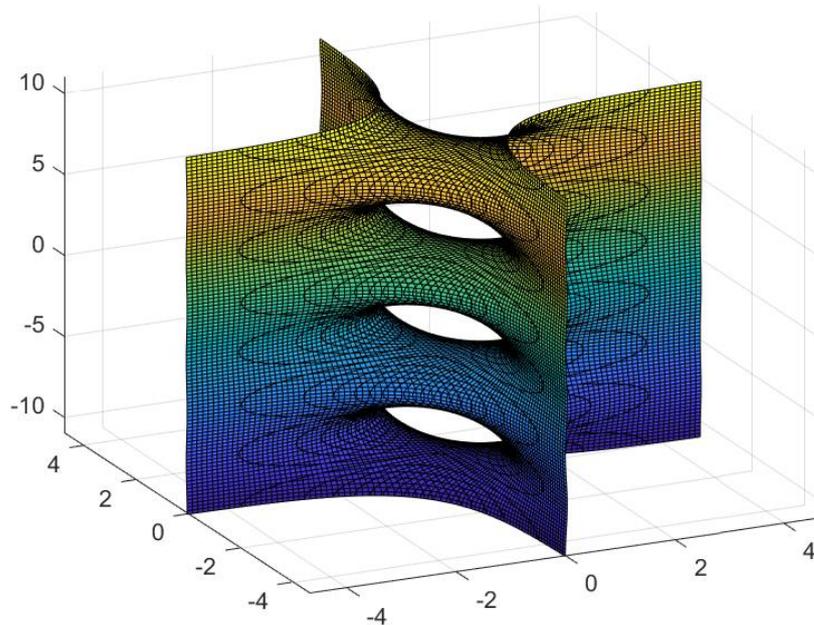


Ilustración 14 - Segunda superficie de Scherk (1).

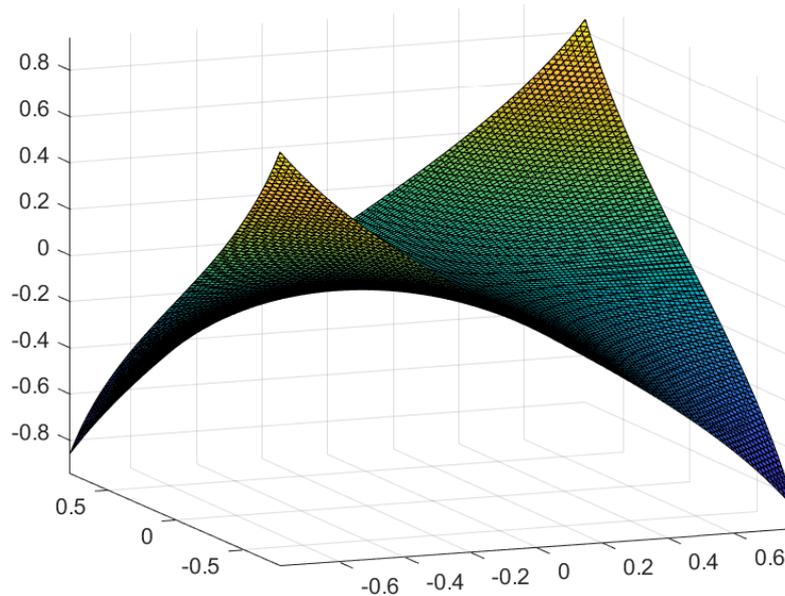


Ilustración 15 - Segunda superficie de Scherk (2).

Referirse al punto 4 del anexo para ver las consideraciones tomadas al hacer las dos representaciones.

Ejemplo 5: Superficie mínima de Enneper.

En 1864, Enneper formula una representación local a partir de dos funciones homofocales dentro de un plano complejo, dando lugar a la superficie que lleva su nombre. De esta forma, partiendo de dos parábolas que pertenecen a planos perpendiculares y que son **homofocales** (el foco de la primera parábola es el vértice de la segunda y viceversa), diremos que la superficie es la envolvente de los planos ortogonales a los segmentos que en cada una de las parábolas están delimitados por un punto y que pasan por el punto medio de dicho segmento.

Esta superficie, a diferencia de las anteriores, se trata de una superficie algebraica, que parte de la ecuación de una parábola de la forma:

$$z = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}$$

Para la que se cumple que su vértice es $V = (0,0,-\frac{1}{2})$ y su foco es $F = (0,0,\frac{1}{2})$, de tal forma que la segunda parábola homofocal será:

$$z = -\frac{y^2}{4} + \frac{1}{2}$$

Si parametrizamos llegaremos a la siguiente ecuación:

$$x(u, v) = (u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2)$$

Para poder demostrar que es una superficie mínima tendremos que comprobar que la curvatura media de ésta es nula. Para ello, usando la parametrización, obtendremos los resultados siguientes:

$$\begin{aligned} x_u &= (1 - u^2 + v^2, 2vu, 2u) \\ x_v &= (2uv, 1 + u^2 - v^2, -2v) \\ x_u \wedge x_v &= (-2u - 2u^3 - 2uv^2, 2v + 2u^2 + 2v^3, 1 - u^4 - 2u^2v^2 - v^4) \\ N &= \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (-2u - 2u^3 - 2uv^2, 2v + 2u^2 + 2v^3, 1 - u^4 - 2u^2v^2 - v^4) \\ x_{uu} &= (-2u, 2v, 2) \\ x_{uv} &= (2v, 2u, 0) \\ x_{vv} &= (2u, -2v, -2) \end{aligned}$$

Con los datos anteriores, obtendremos los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales para la función x , los cuales serán:

$$\begin{aligned} E &= 4u^2v^2 + (-u^2 + v^2 + 1)^2 + 4u^2 & e &= 2 \\ F &= 0 & f &= -2 \\ G &= 4u^2v^2 + (u^2 - v^2 + 1)^2 + 4v^2 & g &= 0 \end{aligned}$$

Si sustituimos ahora en la ecuación (2), entonces podremos concluir que $H = 0$ y que se cumple que es una superficie mínima y queda representada en la figura siguiente:

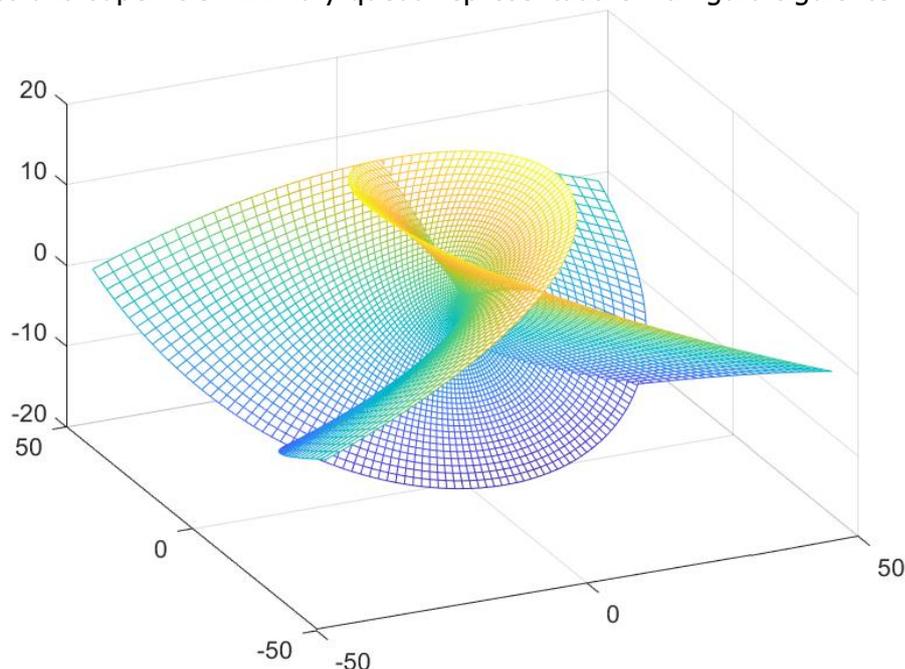


Ilustración 16 - Representación gráfica de la superficie de Enneper.

Referirse al punto 5 del anexo para ver las consideraciones tomadas al hacer la representación.

Ejemplo 6: Superficie mínima de Catalan.

En 1855, el matemático belga Eugène Charles Catalan halla una superficie mínima, que contiene a una familia de parábolas y tiene como particularidad que contiene como curva geodésica¹⁰ al cicloide o curva descrita por medio de un punto en una circunferencia que rueda a lo largo de una línea recta.

Parametrizando esta superficie, obtendremos la expresión siguiente:

$$x(u, v) = (u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, -4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2})$$

Para poder demostrar que es una superficie mínima tendremos que comprobar que la curvatura media de ésta es nula. Para ello, usando la parametrización, obtendremos los resultados siguientes:

$$x_u = (1 - \cos u \cosh v, \sin u \cosh v, -2 \cos \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2})$$

$$x_v = (-\sin u \sinh v, -\cos u \sinh v, -2 \sin \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2})$$

$$x_u \wedge x_v = (\cos \frac{3u}{2} \cosh \frac{v}{2} - \cos \frac{u}{2} \cosh \frac{3v}{2}, \sin \frac{u}{2} (2 \cosh \frac{v}{2} + \cosh \frac{3v}{2}) - \sin \frac{3u}{2} \cosh \frac{v}{2}, \sinh v (\cos v - \cos u))$$

$$N = \frac{1}{2 \cosh^2 \frac{v}{2} (\cosh v - \cos u)} (\cos \frac{3u}{2} \cosh \frac{v}{2} - \cos \frac{u}{2} \cosh \frac{3v}{2}, \sin \frac{u}{2} (2 \cosh \frac{v}{2} + \cosh \frac{3v}{2}) - \sin \frac{3u}{2} \cosh \frac{v}{2}, \sinh v (\cos v - \cos u))$$

$$x_{uu} = (\sin u \cosh v, \cos u \cosh v, \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2})$$

$$x_{uv} = (-\cos u \sinh v, \sin u \sinh v, -\cos \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2})$$

$$x_{vv} = (-\sin u \cosh v, -\cos u \cosh v, -\sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2})$$

Con los datos anteriores, obtendremos los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales para la parametrización x , los cuales serán:

$$E = 2 \cosh^2 \frac{v}{2} (\cosh v - \cos u)$$

$$F = 0$$

$$G = 2 \cosh^2 \frac{v}{2} (\cosh v - \cos u)$$

$$e = -\sin \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2}$$

$$f = \cos \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}$$

$$g = \sin \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2}$$

Vemos que $E = G$ y que $e = -g$. Si sustituimos ahora en la ecuación (2), entonces podremos concluir que $H = 0$ y que se cumple que es una superficie mínima y queda representada en la figura siguiente:

¹⁰ Una curva es geodésica si está en una superficie regular y si su aceleración es perpendicular a esa superficie.

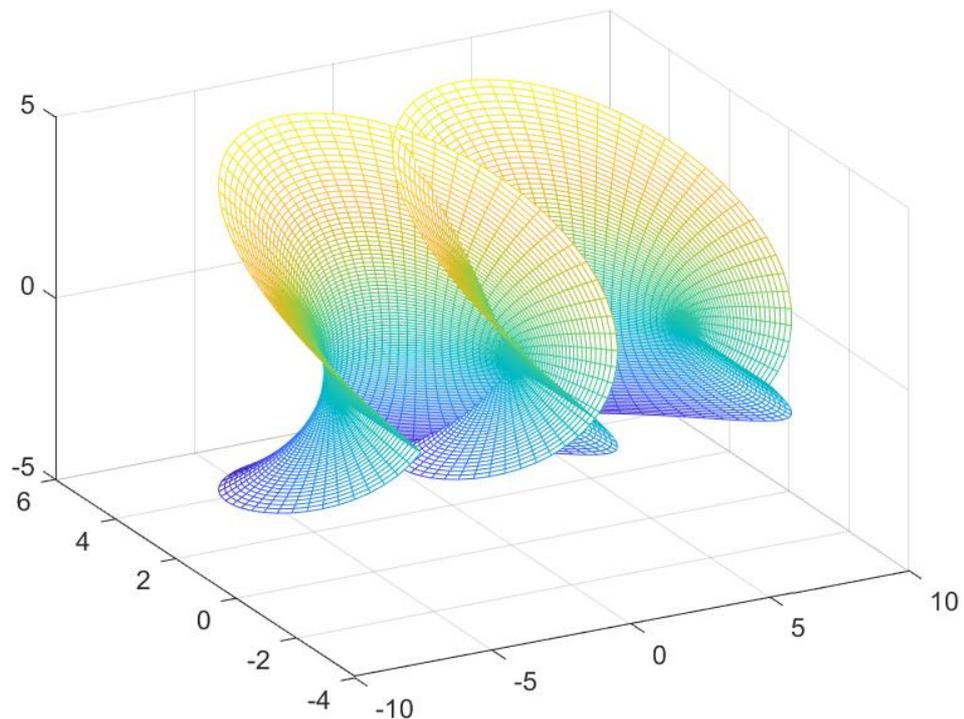


Ilustración 17 - Representación gráfica de la superficie de Catalan.

Referirse al punto 6 del anexo para ver las consideraciones tomadas al hacer la representación.

Ejemplo 7: Superficie mínima de Henneberg.

Esta superficie mínima fue descubierta por Henneberg en 1875 y fue hasta 1981 la única superficie mínima no orientable, es decir, la elección del vector normal a la superficie no es consistente en cada punto. De forma que, puede ser vista como una inmersión del plano proyectivo sin tener un punto en \mathbb{R}^3 .

Parametrizando esta superficie, obtendremos la expresión siguiente:

$$x(u, v) = \left(2 \cos v \sinh u - \frac{2}{3} \cos 3v \sinh 3u, 2 \sin v \sinh u - \frac{2}{3} \sin 3v \sinh 3u, 2 \cos 2v \cosh 2u \right)$$

Usando la expresión anterior, podremos hacer la representación de esta superficie.

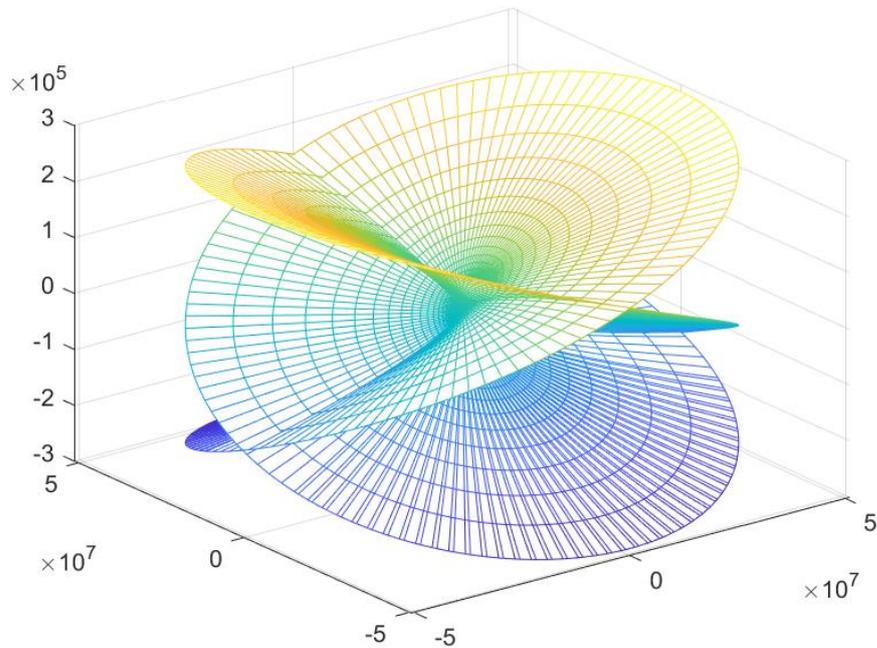


Ilustración 18 - Representación gráfica de la superficie de Henneberg.

Referirse al punto 7 del anexo para ver las consideraciones tomadas al hacer la representación.

Ejemplo 8: Superficie mínima de Schwarz.

Schwarz, en 1865, descubre varias superficies mínimas al resolver el problema de Plateau fijando un contorno rectangular y comprobando que pueden cumplirse propiedades de simetría, con lo que surgen las **superficies mínimas periódicas**.

Principalmente, se conocen dos superficies de Schwarz: la superficie Schwarz P o "Primitiva" y la superficie Schwarz D o "Diamante". Ambas pueden ser aproximadas y representadas según las ecuaciones implícitas siguientes:

$$\text{Schwarz P: } \cos x + \cos y + \cos z = 0$$

$$\text{Schwarz D: } \sin x \sin y \sin z + \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \sin z = 0$$

Usando esas expresiones, podremos hacer la representación de ambas superficies.

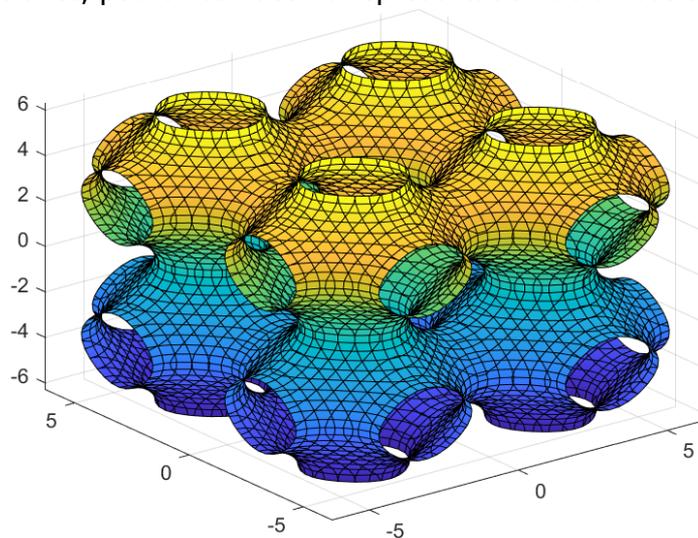


Ilustración 19 - Representación gráfica de la superficie de Schwarz P.

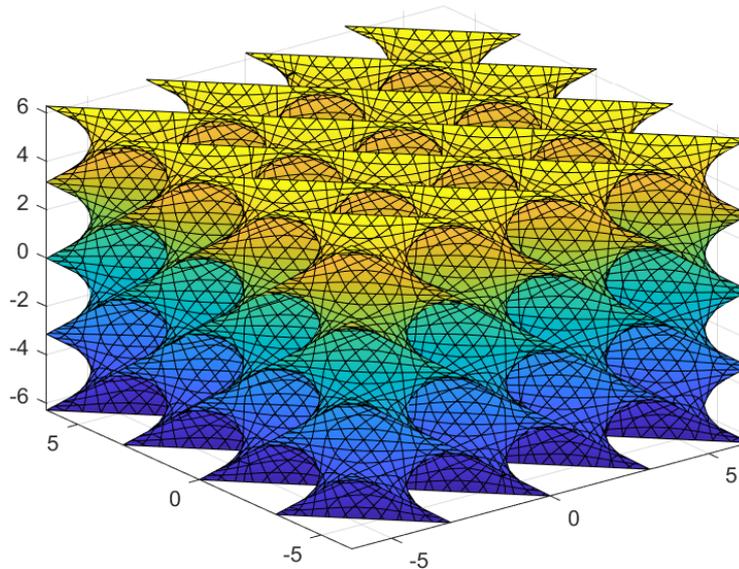


Ilustración 20 - Representación gráfica de la superficie de Schwarz D.

Referirse al punto 8 del anexo para ver las consideraciones tomadas al hacer las representaciones.

Ejemplo 9: Giroide.

Partiendo de los estudios de Schwarz sobre superficies periódicas, en 1970, Schoen, descubre una nueva superficie, el giroide. Esta superficie es infinitamente conexa y triplemente periódica y se caracteriza porque el espacio se ve dividido en dos laberintos que tienen idénticos pasajes.

Esta superficie puede aproximarse mediante la ecuación implícita trigonométrica siguiente:

$$\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x = 0$$

Por medio de esta expresión, obtendremos la representación gráfica siguiente:

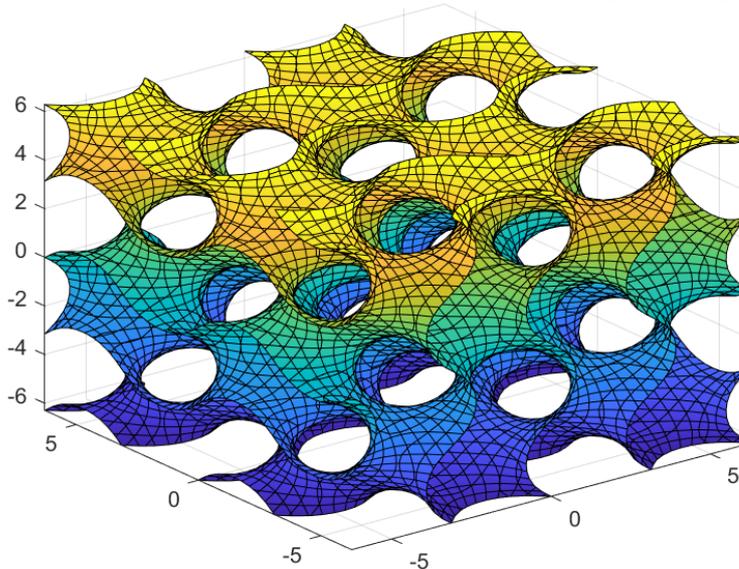


Ilustración 21 - Representación gráfica de un giroide.

Referirse al punto 9 del anexo para ver las consideraciones tomadas al hacer la representación.

Ejemplo 10: Lidinoide.

Fue descubierto por Sven Lidin. Se trata de una superficie mínima triplemente periódica y está asociado a la superficie de Schwarz P.

El lidinoide puede expresarse como un conjunto de niveles por medio de la expresión siguiente:

$$\left(\frac{1}{2}\right) [\sin 2x \cos y \sin z + \sin 2y \cos z \sin x + \sin 2z \cos x \sin y] - \left(\frac{1}{2}\right) [\cos 2x \cos 2y + \cos 2y \cos 2z + \cos 2z \cos 2x] + 0.15 = 0$$

Por medio de esta expresión, obtendremos la representación gráfica siguiente:

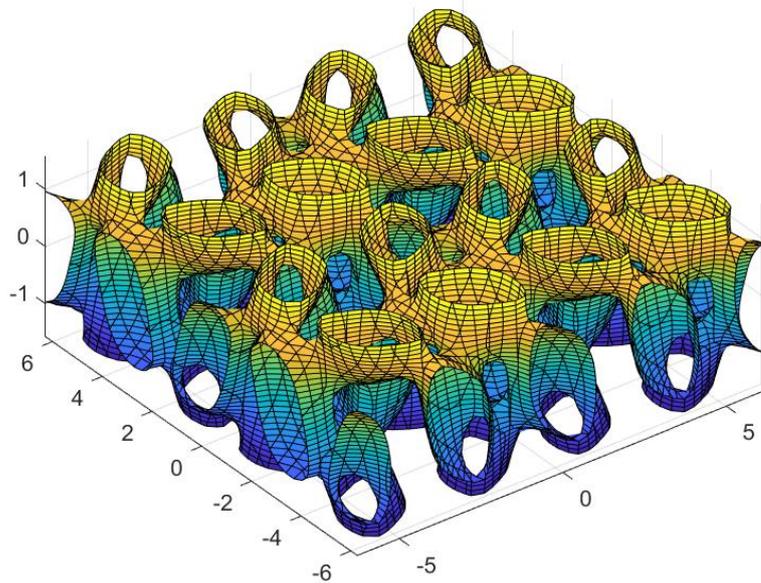


Ilustración 22 - Representación gráfica de un lidinoide.

Referirse al punto 10 del anexo para ver las consideraciones tomadas al hacer la representación.

Ejemplo 11: Superficie mínima de Bour.

En 1861, Edmond Bour descubrió la superficie que lleva su nombre. Se trata de un caso particular de la superficie generalizada de Enneper, la cual se corta a sí misma por medio de tres rayos coplanares que parten de un origen llevando el mismo ángulo y que dividirán a la superficie en seis hojas, siendo éstas equivalentes a semiplanos, topológicamente hablando.

La representación paramétrica de esta superficie puede darse por medio de coordenadas polares de la forma siguiente:

$$x(r, \phi) = \left(r \cos \phi - \frac{1}{2}(r^2) \cos 2\phi, -r \sin \phi (r \cos \phi + 1), \frac{4}{3} \left(r^{\frac{3}{2}}\right) \cos \frac{3}{2} \phi\right)$$

donde se cumple que $r = [0, 2\pi]$ y $\phi = [0, 1]$.

Por medio de esta expresión, obtendremos la representación gráfica siguiente:

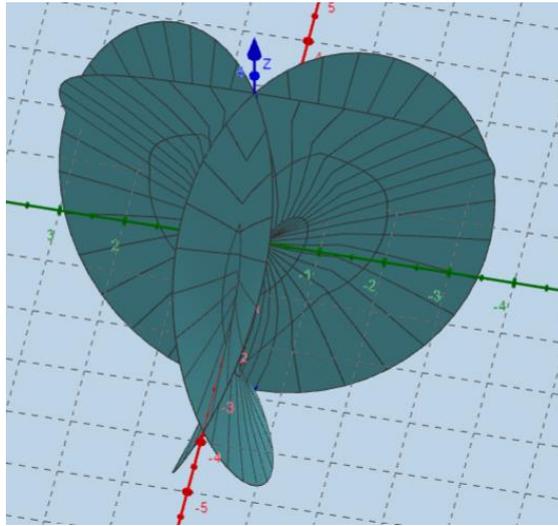


Ilustración 23 - Representación gráfica de la superficie de Bour.¹¹

Ejemplo 12: Superficie mínima de Costa.

Esta superficie mínima fue descubierta por Costa en 1982 y se trata de una superficie sin frontera ni intersecciones que se forma perforando a una superficie compacta. En el caso que nos ocupa, partiremos de un toro y éste se va deformando hasta que el extremo plano se va convirtiendo en catenoidal, o, dicho de otro modo, tendremos un toro al que se le quitan 3 puntos.

Debido a la complejidad de esta superficie, no se va a mencionar la ecuación paramétrica, sólo tener en cuenta que para facilitar su representación es recomendable hacerlo mediante la representación de Weierstrass.

La forma de esta superficie sería como la que sigue:

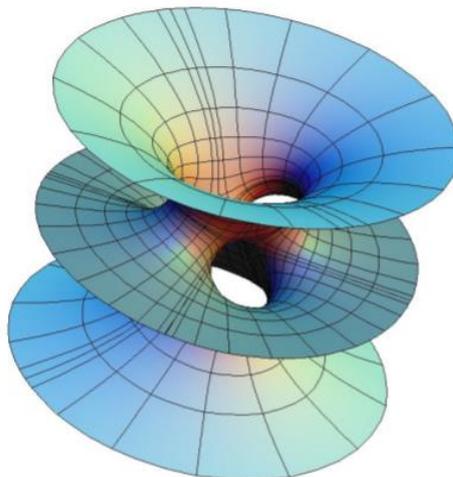


Ilustración 24 - Representación gráfica de la superficie de Costa.¹²

¹¹ Imagen extraída de <https://www.geogebra.org/m/suNGeSS3>

¹² Imagen extraída de www.3d-xplormath.org

4. APLICACIONES

Como hemos visto en capítulos anteriores, las superficies mínimas han sido objeto de estudio desde la antigua Grecia hasta nuestros días, permitiendo aportar resultados matemáticos para dar soluciones a muchos problemas concretos de física, química o biología, entre otras. De entre estos resultados, podemos destacar que, gracias a la búsqueda y demostración de estas superficies mediante los experimentos de Plateau con pompas de jabón, en el campo de la **física**, se ha llegado al concepto de **tensión superficial** (cantidad de energía necesaria para aumentar la superficie de un líquido por unidad de área).



Ilustración 25 - Ejemplo visual de tensión superficial en insectos¹³

También podemos encontrar aplicaciones importantes en estudios recientes sobre **Relatividad General**. Por ejemplo, el horizonte aparente de un agujero negro no es sino una hipersuperficie mínima, lo que permite relacionar así a las superficies marginalmente atrapadas con la teoría clásica de las superficies mínimas.



Ilustración 26 - Partes de un agujero negro (horizonte de sucesos).¹⁴

Sin embargo, el ahorro de energía y la belleza que este tipo de superficies otorga, han provocado que la evolución y aplicación de éstas se haga especialmente notable en campos como la arquitectura y la ingeniería, como veremos a continuación.

¹³Fuente: <https://www.abadiadigital.com/la-tension-superficial-del-agua-reflejada-en-una-espectacular-fotografia/>

¹⁴Fuente: ¹³https://www.abc.es/ciencia/abci-primera-foto-agujero-negro-horizonte-sucesos-201904101216_noticia.html

4.1. EL IMPACTO EN LA ARQUITECTURA.

Toda creación arquitectónica es una apología a la geometría. De ello se deduce el interés que estas superficies han generado en este campo, ya que como su propio nombre indica, se buscarán superficies con área mínima cuya consecuencia directa será la de reducir el peso de las construcciones y, por tanto, a reducir la cantidad de material utilizado. Además de quedar patente la belleza que pueden aportar y aumentar el interés por su uso después de que el conocido arquitecto Antonio Gaudí las utilizara en sus obras (ver imagen siguiente).



Ilustración 27 - Escalera de la Sagrada Familia (helicoide).¹⁵

A día de hoy, gracias a la aplicación del concepto de tensión superficial y haciendo uso de programas informáticos, se busca el equilibrio de estructuras (cada vez más complejas) compuestas por curvas, llegando incluso a un nuevo tipo de arquitectura, la **arquitectura textil**.

Algunos ejemplos conocidos de aplicación de estas superficies en arquitectura son los siguientes:

- **Estadio Olímpico de Múnich.** Diseño de Frei Otto, que usa membranas tensadas por cables y sujetas al suelo por medio de postes que estabilizan la estructura.
- **Pabellón de Japón en la Expo 2000 (Hamburgo).** Diseño de Frei Otto y Shigeru Ban, que imita una forma de catenoide periódico.

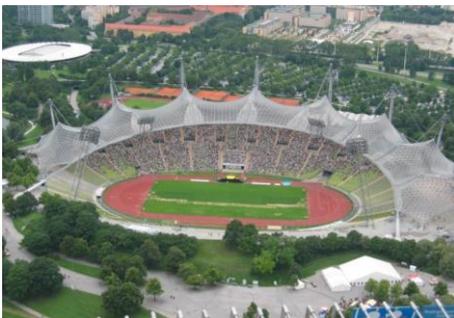


Ilustración 28 - Estadio Olímpico de Múnich.¹⁶



Ilustración 29 - Pabellón de Japón en la Expo 2000.¹⁷

¹⁵ Fuente: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sagrada_Fam%C3%ADlia._Torres_\(escales_helico%C3%AFdals\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sagrada_Fam%C3%ADlia._Torres_(escales_helico%C3%AFdals).jpg)

¹⁶ Fuente: <https://entretinajones.wordpress.com/2012/06/01/de-olimpia-a-londres-2012-xx/>

¹⁷ Fuente: <https://es.wikiarquitectura.com/edificio/pabellon-de-japon-expo-2000-en-hannover/>

4.2. EL IMPACTO EN LA INGENIERÍA.

Otro campo que ha sufrido una gran evolución debido a los descubrimientos hechos sobre superficies mínimas ha sido el campo de la ingeniería. De una forma paralela a la arquitectura, la ingeniería de la edificación y, en particular, el cálculo de estructuras, se han visto afectados e influenciados por estas superficies, como hemos podido ver en los ejemplos de estructura textil, o como vimos al principio en la construcción de las chimeneas de las centrales nucleares.

En los últimos años estas superficies han cobrado una especial importancia en otras áreas de la ingeniería como son la ingeniería molecular y de materiales, con aplicaciones en el ensamblaje de materiales complejos como nanoestructuras periódicas o superficies equipotenciales en el estudio cristalográfico. En particular, debido a las altas prestaciones que otorgan, las superficies que más han contribuido a este avance han sido las superficies periódicas (las superficies de Schwarz y el giroide estudiadas en capítulos anteriores de esta memoria). A continuación, mencionaremos algunos campos de estudio en ingeniería y algunas de sus aplicaciones:

- **Óptica.** Investigaciones recientes han demostrado que algunos insectos siguen patrones de superficies triplemente periódicas (como el giroide) en sus alas y caparazones, lo que ha llevado a estudiar el comportamiento de la luz en cristales fotónicos (materiales que pueden dirigir de forma selectiva longitudes de onda de luz) que tengan diseños similares. Esto puede conllevar una mejora en la fabricación de lentes y espejos, así como pinturas y tintas que cambien de color. Asimismo, se pueden fabricar fibras microestructurales que mejoren las propiedades de las fibras ópticas más convencionales. O bien incluso seguir estudiando el desarrollo del ordenador óptico.

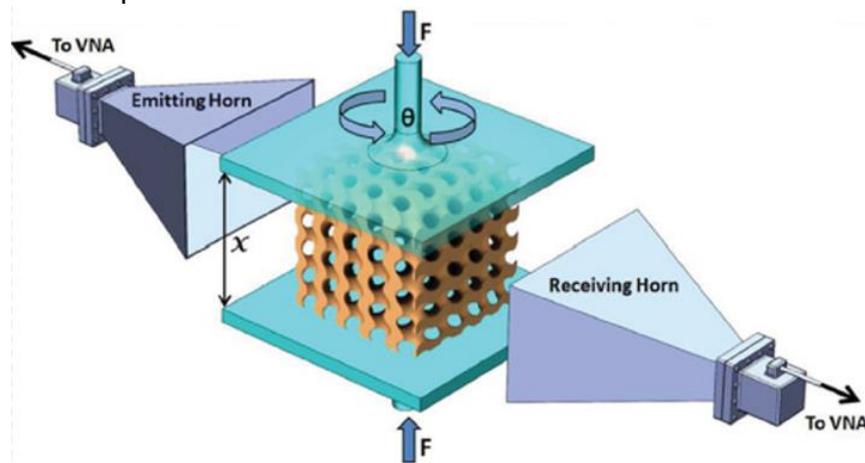


Ilustración 30 - Cristales fotónicos. ¹⁸

- **Diseño de materiales.** Por las propiedades mecánicas que presentan (isotropía, deformación homogénea frente a esfuerzos, alta resistencia, baja densidad, alta conductividad, entre otras) este tipo de superficies pueden emplearse para imprimir objetos en 3D que puedan usarse en campos que van desde la industria aeroespacial a la biomedicina. Algunas aplicaciones, estudiadas en la publicación [22], podrían ser:

- **Construcción de nuevos intercambiadores de calor.** Gracias a superficies como el giroide o la superficie de Schwarz-D, se mejora considerablemente la transmisión de calor y la eficiencia del ciclo de trabajo.

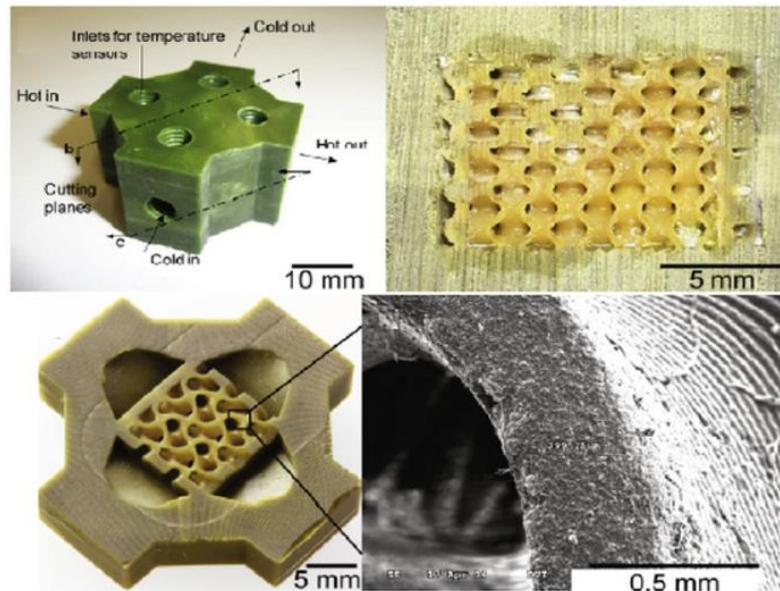


Ilustración 31 - Intercambiadores de calor.¹⁸

- **Creación de nuevas baterías de electrodos.** Las superficies como la superficie de Schwarz-P ofrecen mejoras en la densidad de energía y densidad de potencia y, por tanto, en el rendimiento de la batería, especialmente cuando se someten a altas corrientes de descarga.

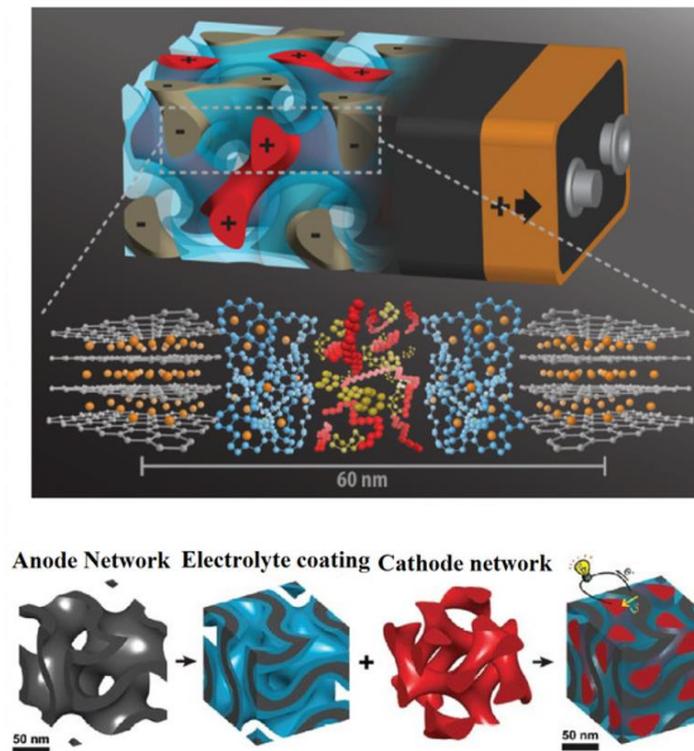


Ilustración 32 - Batería de electrodos.¹⁸

- **Construcción de nuevos separadores.** Por medio de estas superficies se puede optimizar el flujo de fluido y la transferencia de calor, de forma que la estructura aumente la turbulencia mientras que la superficie minimiza la caída de presión, así como reduciría los lugares disponibles para la fijación de contaminantes. De esta forma, podemos optimizar sistemas de desalinización y de tratamiento de aguas al crear membranas que mejoren procesos de ósmosis inversa, ultrafiltración y destilación por membrana. Otro ejemplo sería la mejora de reactores de biopelícula de lecho móvil para eliminar sustancias orgánicas y nitrificación, con sus diferentes usos en industria farmacéutica.

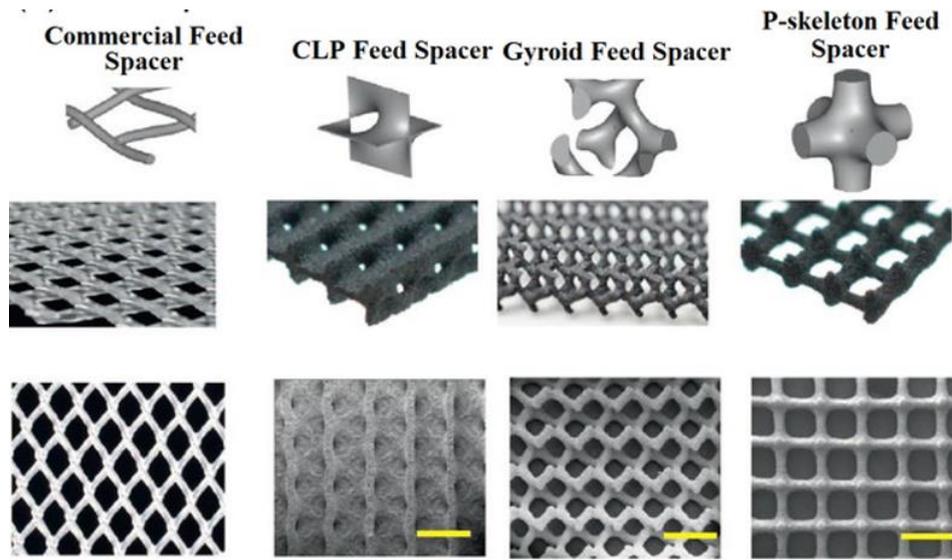


Ilustración 33 - Separadores.¹⁸

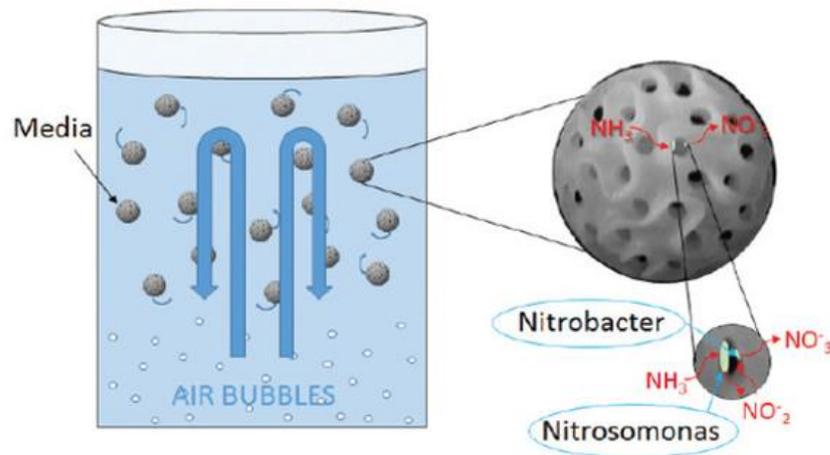


Ilustración 34 - Reactores de biopelícula de lecho móvil.¹⁸

- **Construcción de mejores convertidores catalíticos.** Gracias a la mejora de las propiedades físicas de estas superficies, los sistemas de escape en todo tipo de vehículos (terrestres, marítimos y aéreos), los generadores eléctricos, incluso algunas estufas pueden verse optimizados.

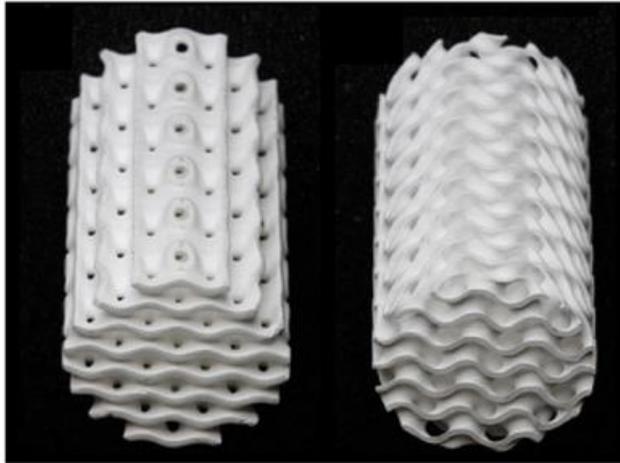


Ilustración 35 - Convertidores catalíticos.¹⁸

- **Impresión 3D de rellenos de prótesis en biomedicina.** Debido a la morfología que la estructura ósea presenta en su interior y su similitud con las superficies mínimas triplemente periódicas, se pueden obtener rellenos de prótesis médicas personalizadas.

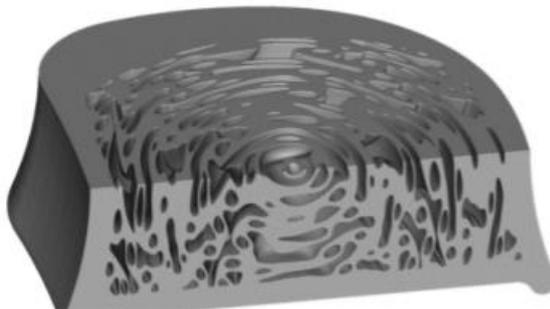


Ilustración 36 - Perspectiva de una sección de un segmento vertebral.¹⁹

Aunque estos sólo son algunos ejemplos que están en estudio, las superficies minimales suponen una mejora considerable en las propiedades físicas de los materiales usados en todas las áreas de la ingeniería. Si unimos a esto la gran evolución que ha sufrido la impresión 3D, podemos estimar que en los próximos años estas superficies van a sufrir una nueva Edad de Oro.

¹⁸ Fuente: Multifunctional Mechanical Metamaterials Based on Triply Periodic Minimal Surface Lattices. Oraib Al-Ketan, Rashid K. Abu Al-Ru. 2019.

¹⁹ Fuente: TFG. Porosidad y superficies mínimas. Aplicación a la fabricación digital. Jorge Pol Segura. 2021.

ANEXO

En este anexo se incluyen las diferentes representaciones de las superficies mínimas estudiadas en el documento y su programación en el programa informático MATLAB.

1. REPRESENTACIÓN DE UNA CATENOIDE

Para poder representar la catenoide, utilizaremos la ecuación paramétrica siguiente:

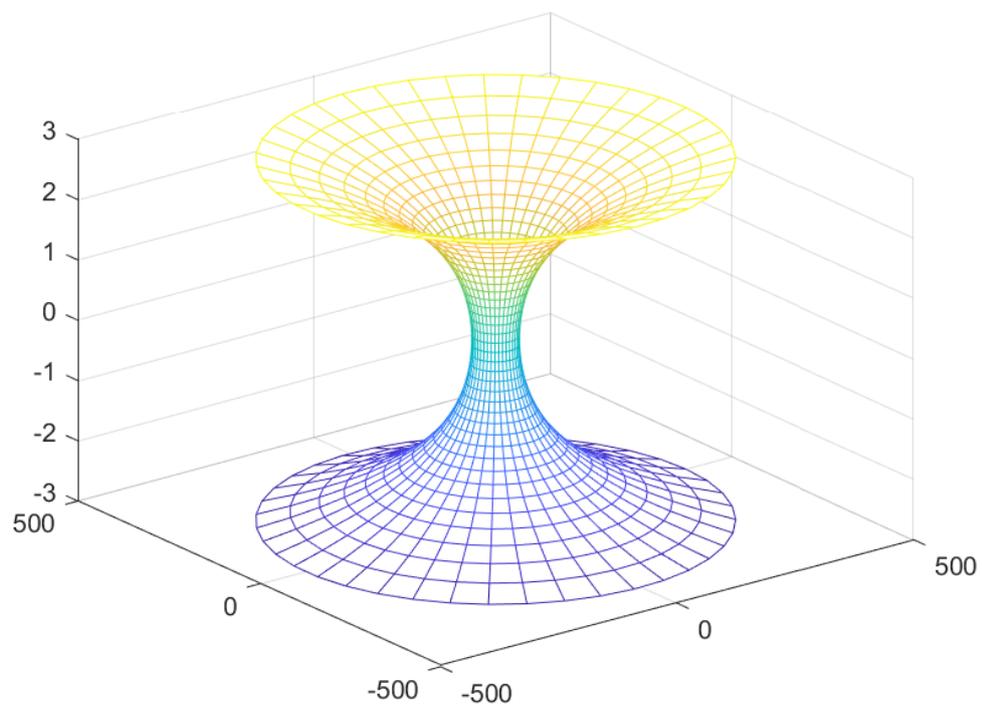
$$x(u, v) = (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, u)$$

donde si consideramos que la constante $a = 1$, la ecuación quedará de la forma:

$$x(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

El código que nos permite visualizar esta superficie mínima es el siguiente:

```
% Representación de un
catenoide
%Límites
u=linspace(-3,3,40);
v=linspace(0,2*pi,40);
%Ecuación
[u,v]=meshgrid(u,v);
x=cos(v)*cosh(u);
y=sin(v)*cosh(u);
z=u;
mesh(x,y,z)
```



2. REPRESENTACIÓN DE UN HELICOIDE

Para poder representar el helicoide, utilizaremos la ecuación paramétrica siguiente:

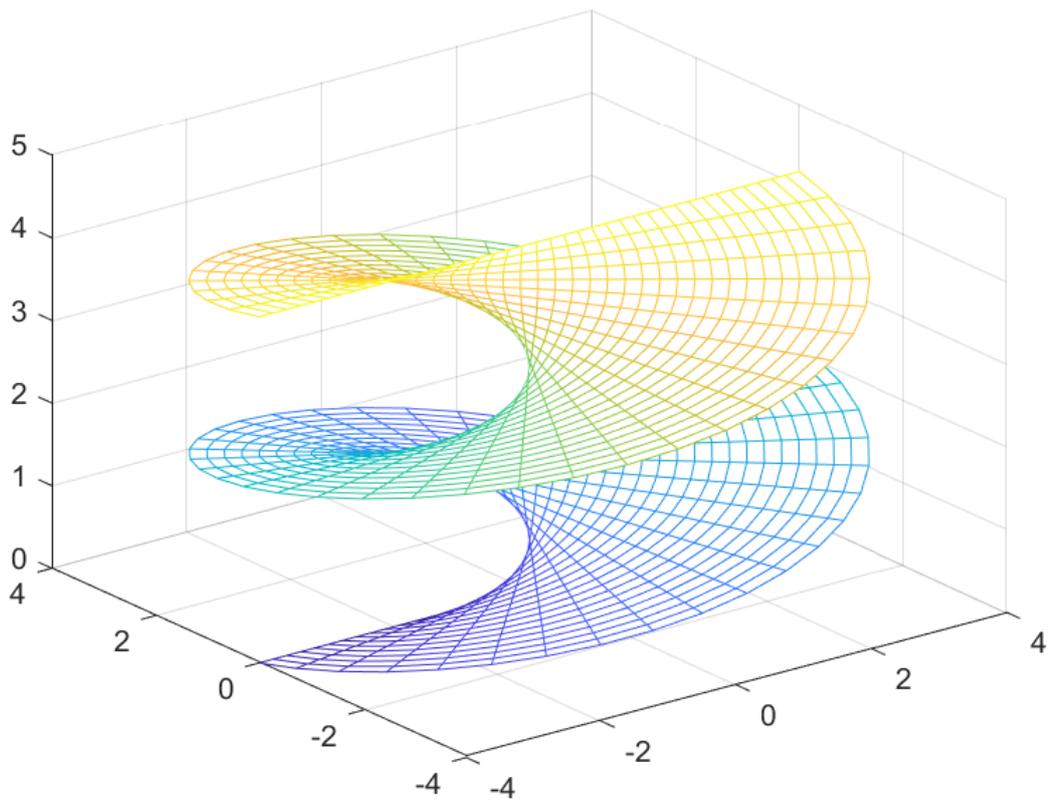
$$x(u, v) = (u \cos \omega v, u \sin \omega v, \alpha v)$$

por lo que si consideramos que la velocidad angular es $\omega = 1$ y que la velocidad de la recta sobre el eje z es de $\alpha = 2/3$, entonces quedará como:

$$x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \frac{2}{3}v)$$

El código que nos permite visualizar esta superficie mínima es el siguiente:

```
% Representación de un helicoide
%Límites
u=linspace(-4,4,40);
v=linspace(0,2*pi,40);
%Ecuación
[u,v]=meshgrid(u,v);
x=u.*cos(v);
y=u.*sin(v);
z=(2/3)*v;
mesh(x,y,z)
```



3. REPRESENTACIÓN DE LA PRIMERA SUPERFICIE DE SCHERK

Para poder representar la primera superficie de Scherk, utilizaremos primero la ecuación paramétrica siguiente:

$$x(u, v) = \left(u, v, \ln\left(\frac{\cos u}{\cos v}\right) \right)$$

Después, para aumentar la complejidad de la superficie buscada, utilizaremos la ecuación implícita siguiente:

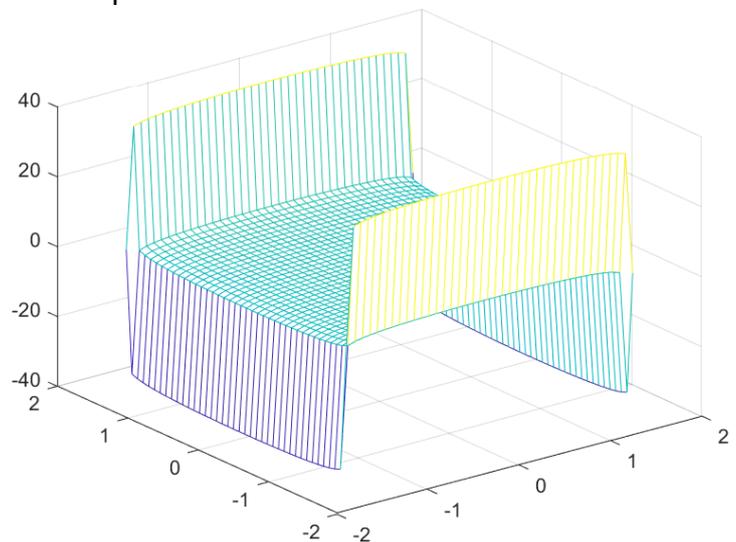
$$e^z \cos x = \cos y$$

De esta forma, tendremos las dos representaciones incluidas a continuación.

- a) Para la ecuación paramétrica tenemos que si $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y $v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, usaremos el código siguiente para visualizar esta superficie mínima:

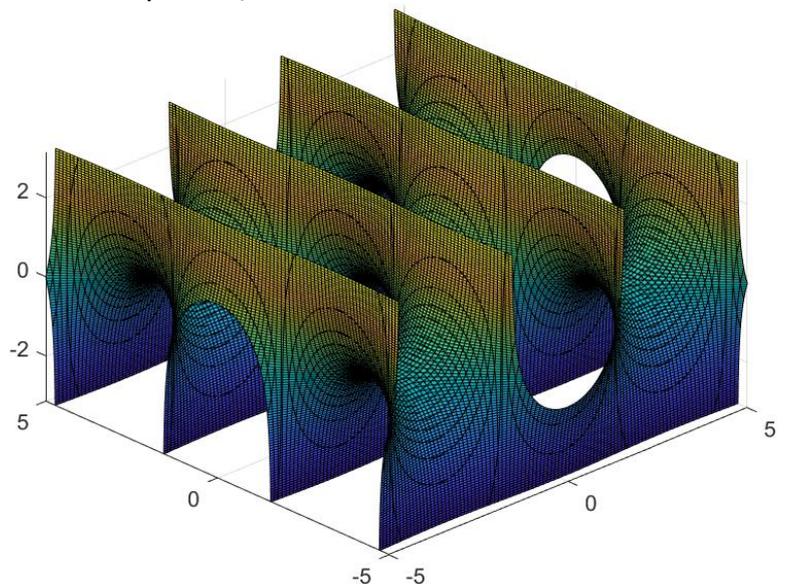
```
%Representación de la primera
superficie de Scherk

%Límites
u=linspace((-pi/2),(pi/2),40);
v=linspace((-pi/2),(pi/2),40);
%Ecuación
[u,v]=meshgrid(u,v);
x=u;
y=v;
z=log(cos(u))-log(cos(v));
mesh(x,y,z)
```



- b) Si usamos la ecuación implícita de la superficie, entonces:

```
%Representación de la primera
superficie de Scherk
%Límites
x_sc_l=-5;
x_sc_u=5;
y_sc_l=-5;
y_sc_u=5;
z_sc_l=-pi;
z_sc_u=pi;
MD_sc=100;
%Ecuación implícita
f_sc=@(x,y,z)cos(y)-
(exp(z)*cos(x));
fimplicit3(f_sc,[x_sc_l x_sc_u
y_sc_l y_sc_u z_sc_l
z_sc_u], 'meshdensity',MD_sc)
```



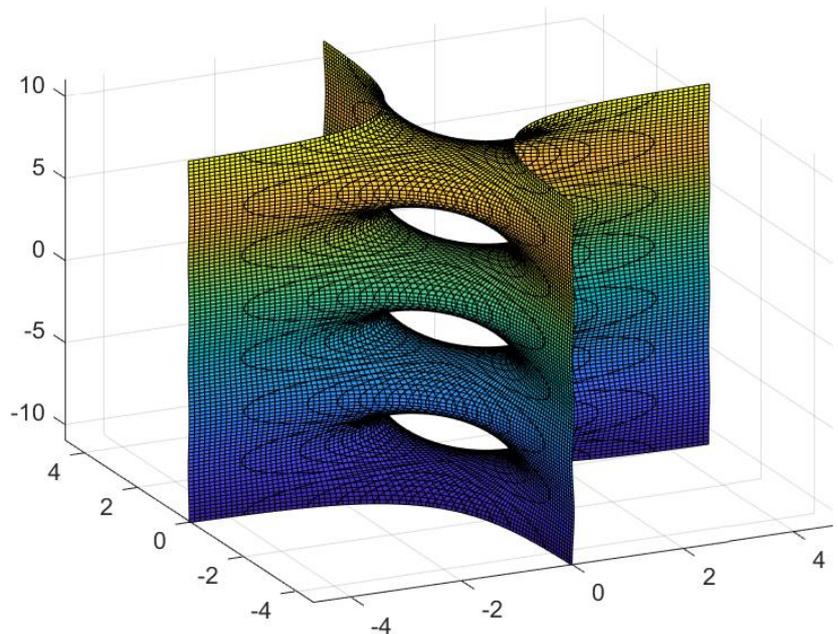
4. REPRESENTACIÓN DE LA SEGUNDA SUPERFICIE DE SCHERK

Para poder representar la segunda superficie de Scherk, utilizaremos la ecuación implícita siguiente:

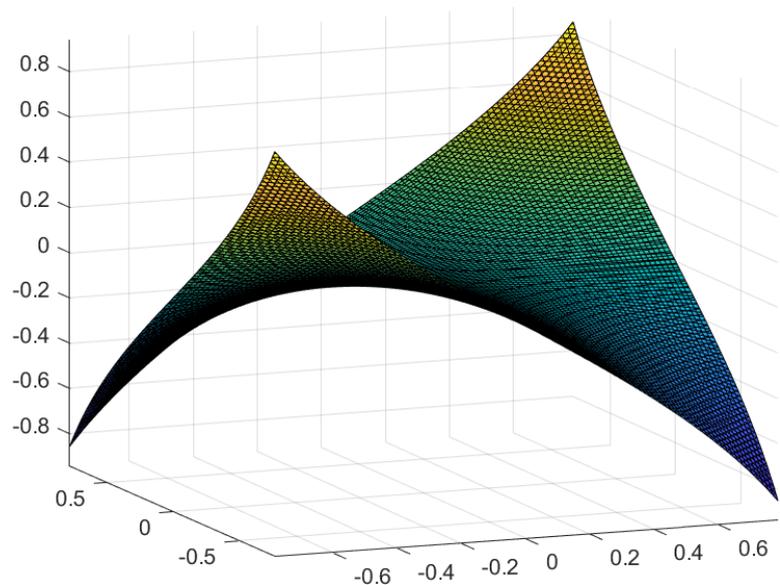
$$\sin z = \sinh x \sinh y$$

Cambiando los valores de las variables, tendremos las dos representaciones incluidas a continuación:

```
%Representación de la
segunda superficie de Scherk
%Límites
x_sc_l=-(3/2)*pi;
x_sc_u=(3/2)*pi;
y_sc_l=-(3/2)*pi;
y_sc_u=(3/2)*pi;
z_sc_l=-(7/2)*pi;
z_sc_u=(7/2)*pi;
MD_sc=100;
%Ecuación implícita
f_sc=@(x,y,z)sinh(x).*sinh(y)
-sin(z);
fimplicit3(f_sc,[x_sc_l
x_sc_u y_sc_l y_sc_u z_sc_l
z_sc_u], 'meshdensity',MD_sc)
```



```
%Representación de la
segunda superficie de Scherk
%Límites
x_sc_l=-pi/4;
x_sc_u=pi/4;
y_sc_l=-pi/4;
y_sc_u=pi/4;
z_sc_l=-pi/2;
z_sc_u=pi/2;
MD_sc=100;
%Ecuación implícita
f_sc=@(x,y,z)sinh(x).*sinh(y)
-sin(z);
fimplicit3(f_sc,[x_sc_l
x_sc_u y_sc_l y_sc_u z_sc_l
z_sc_u], 'meshdensity',MD_sc)
```



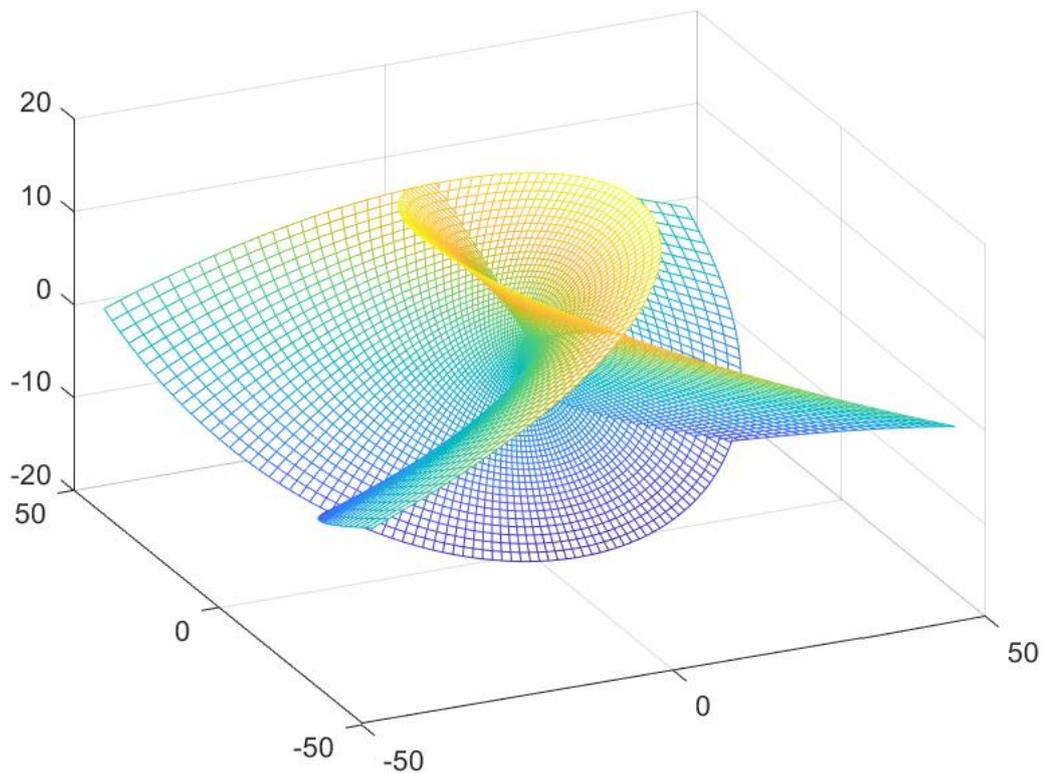
5. REPRESENTACIÓN DE LA SUPERFICIE DE ENNEPER.

Para poder representar a la superficie de Enneper, utilizaremos la ecuación paramétrica siguiente:

$$x(u, v) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2\right)$$

El código que nos permite visualizar esta superficie mínima es el siguiente:

```
% Representación de la
superficie de Enneper
%Límites
u=linspace(-4,4,100);
v=linspace(-4,4,100);
%Ecuación
[u,v]=meshgrid(u,v);
x=u-((1/3)*u.^3)+(u.*(v.^2));
y=v-((1/3)*v.^3)+(v.*(u.^2));
z=(u.^2)-(v.^2);
mesh(x,y,z)
```



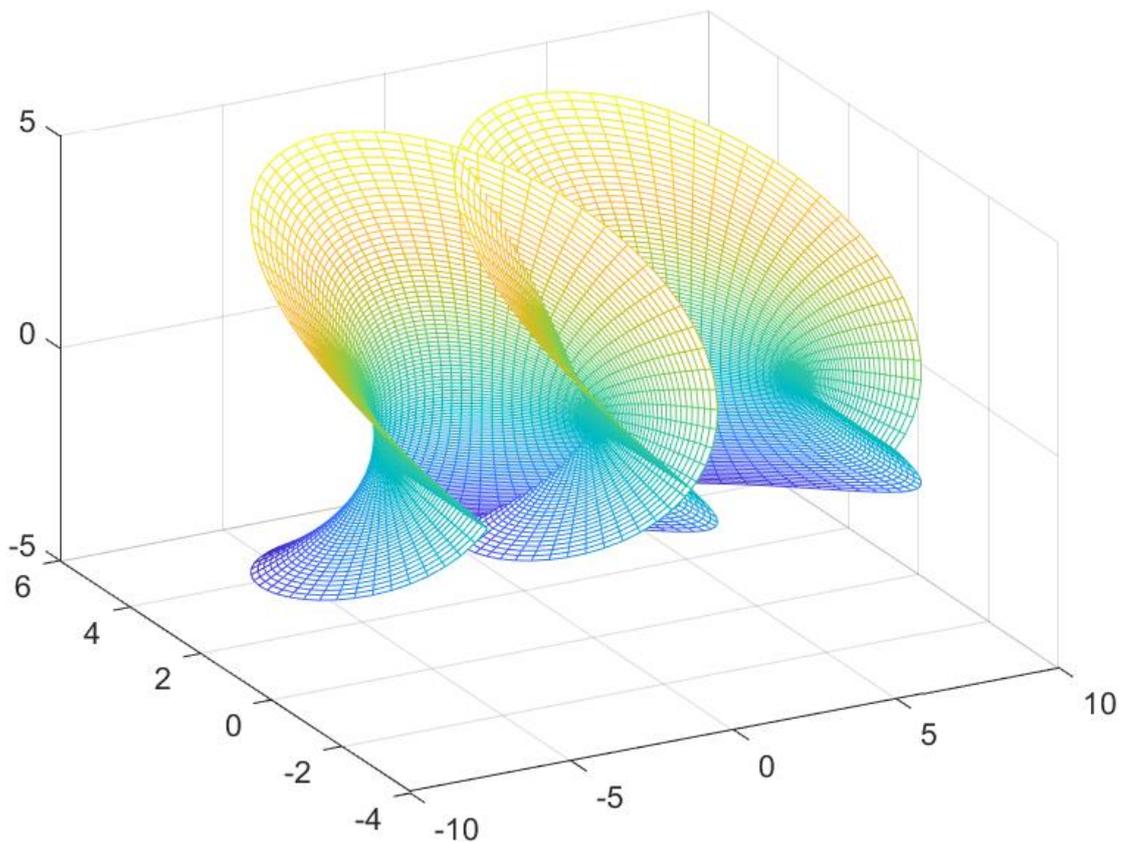
6. REPRESENTACIÓN DE LA SUPERFICIE DE CATALAN.

Para poder representar a la superficie de Catalan, utilizaremos la ecuación paramétrica siguiente:

$$x(u, v) = (u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, -4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2})$$

El código que nos permite visualizar esta superficie mínima es el siguiente:

```
% Representación de la
superficie de Catalan
%Límites
u=linspace(-2*pi,2*pi,100);
v=linspace(-2,2,100);
%Ecuación
[u,v]=meshgrid(u,v);
x=u-(sin(u).*cosh(v));
y=1-(cos(u).*cosh(v));
z=-4*(sin(u/2).*sinh(v/2));
mesh(x,y,z)
```



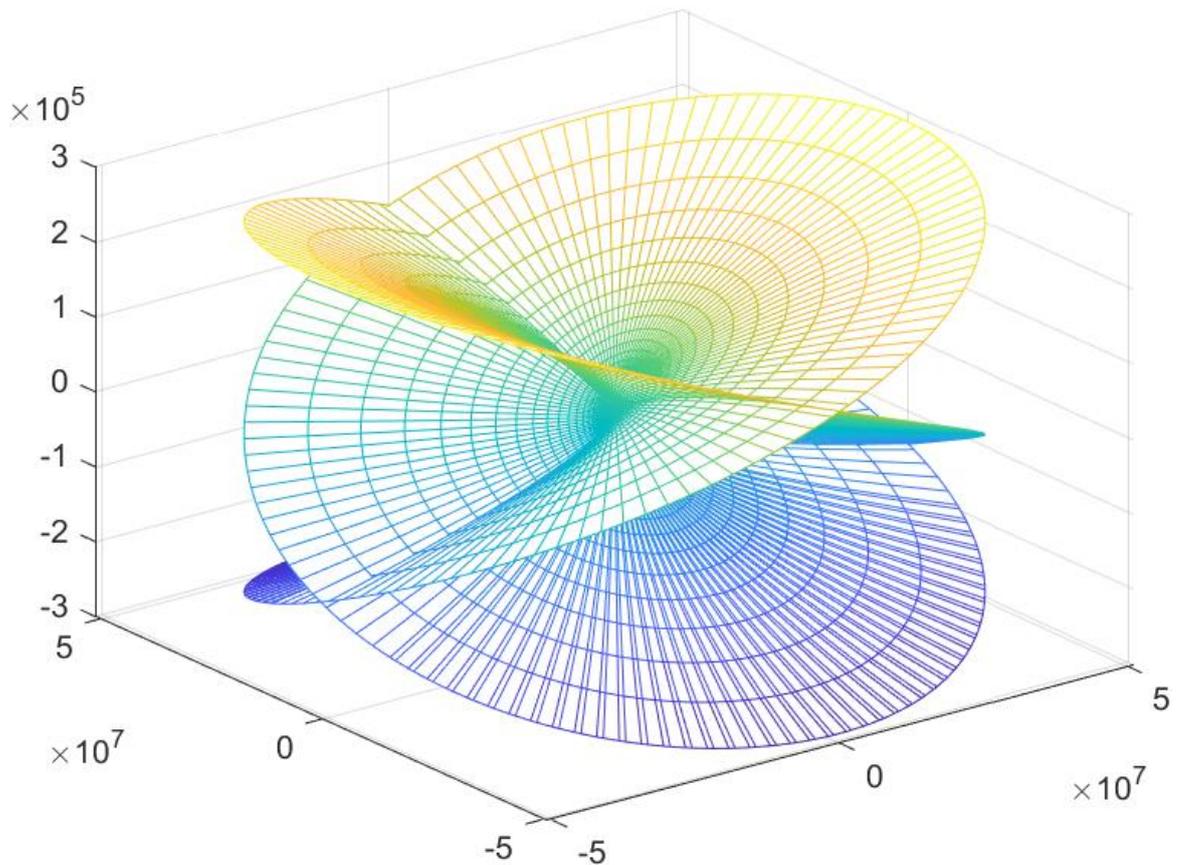
7. REPRESENTACIÓN DE LA SUPERFICIE DE HENNEBERG.

Para poder representar a la superficie de Henneberg, utilizaremos la ecuación paramétrica siguiente:

$$x(u, v) = \left(2 \cos v \sinh u - \frac{2}{3} \cos 3v \sinh 3u, 2 \sin v \sinh u - \frac{2}{3} \sin 3v \sinh 3u, 2 \cos 2v \cosh 2u \right)$$

El código que nos permite visualizar esta superficie mínima es el siguiente:

```
% Representación de la
superficie de Henneberg
%Límites
u=linspace(-2*pi,2*pi,200);
v=linspace(-2,2,200);
%Ecuación
[u,v]=meshgrid(u,v);
x=(2*cos(v).*sinh(u))-
((2/3)*cos(3*v).*sinh(3*u));
y=(2*sin(v).*sinh(u))-
((2/3)*sin(3*v).*sinh(3*u));
z=2*(cos(2*v).*cosh(2*u));
mesh(x,y,z)
```



8. REPRESENTACIÓN DE LA SUPERFICIE DE SCHWARZ

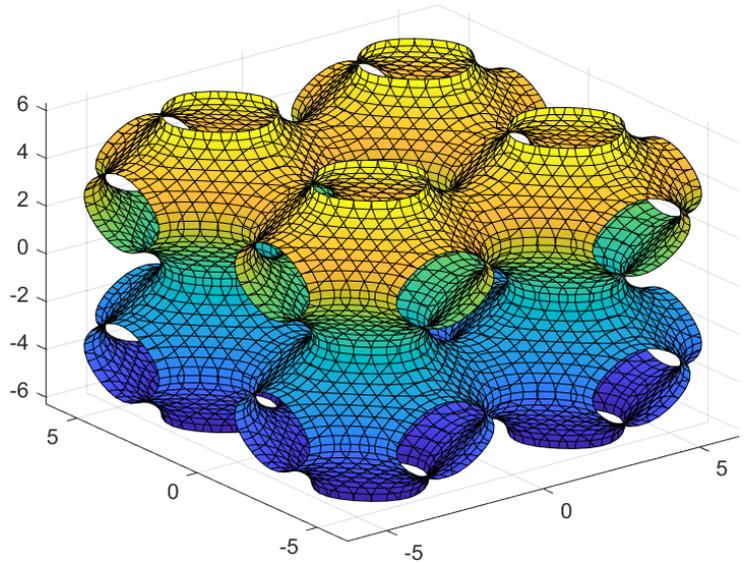
Para poder representar las superficies de Schwarz, utilizaremos las dos ecuaciones implícitas siguientes:

$$\text{Schwarz } P: \quad \cos x + \cos y + \cos z = 0$$

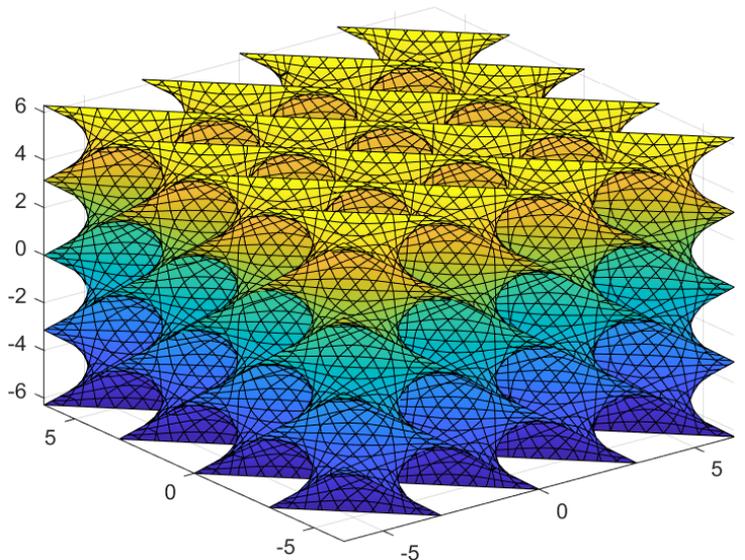
$$\text{Schwarz } D: \quad \sin x \sin y \sin z + \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \sin z = 0$$

De forma que para visualizar cada una de estas superficies, escribiremos los siguientes códigos:

```
%Representación de la
superficie de Schwarz P
%Límites
x_sc_l=-2*pi;
x_sc_u=2*pi;
y_sc_l=-2*pi;
y_sc_u=2*pi;
z_sc_l=-2*pi;
z_sc_u=2*pi;
MD_sc=40;
%Ecuación implícita
f_sc=@(x,y,z)cos(x)+cos(y)+c
os(z);
fimplicit3(f_sc,[x_sc_l
x_sc_u y_sc_l y_sc_u z_sc_l
z_sc_u],'meshdensity',MD_sc)
```



```
%Representación de la
superficie de Schwarz D
%Límites
x_sc_l=-2*pi;
x_sc_u=2*pi;
y_sc_l=-2*pi;
y_sc_u=2*pi;
z_sc_l=-2*pi;
z_sc_u=2*pi;
MD_sc=40;
%Ecuación implícita
f_sc=@(x,y,z)(sin(x).*sin(y)
.*sin(z))+sin(x).*cos(y).*c
os(z))+cos(x).*sin(y).*cos(
z))+cos(x).*cos(y).*sin(z))
;
fimplicit3(f_sc,[x_sc_l
x_sc_u y_sc_l y_sc_u z_sc_l
z_sc_u],'meshdensity',MD_sc)
```



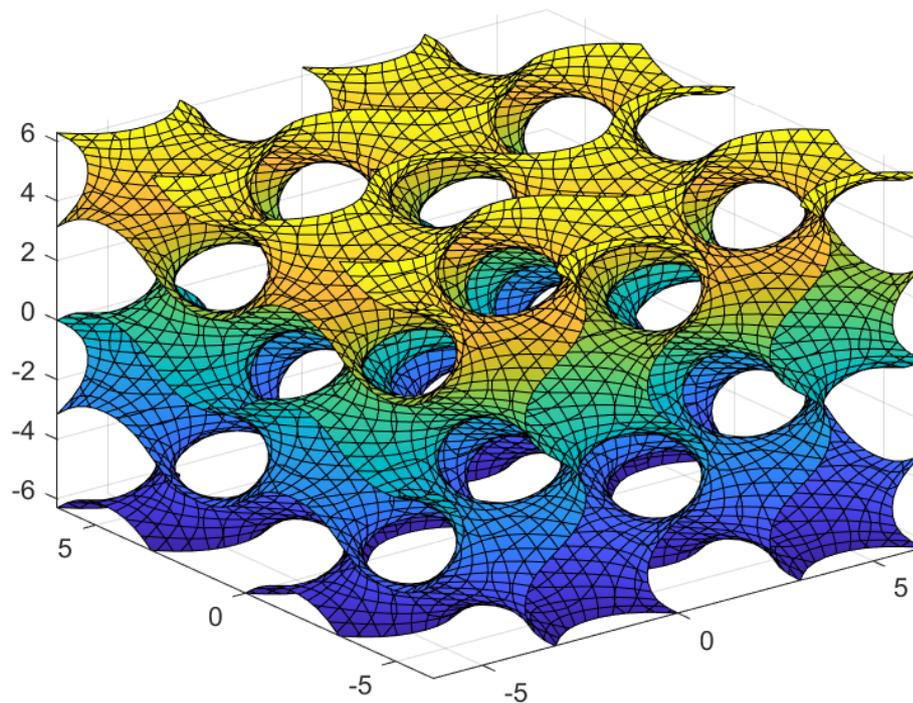
9. REPRESENTACIÓN DE UN GIROIDE

Para poder representar un giroide, utilizaremos la ecuación implícita siguiente:

$$\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x = 0$$

De forma que, para visualizar a esta superficie, escribiremos el siguiente código:

```
%Representación de un giroide
%Límites
x_sc_l=-2*pi;
x_sc_u=2*pi;
y_sc_l=-2*pi;
y_sc_u=2*pi;
z_sc_l=-2*pi;
z_sc_u=2*pi;
MD_sc=40;
%Ecuación implícita
f_sc=@(x,y,z)(sin(x).*cos(y))+(sin(y).*cos(
z))+sin(z).*cos(x));
fimplicit3(f_sc,[x_sc_l x_sc_u y_sc_l
y_sc_u z_sc_l z_sc_u],'meshdensity',MD_sc)
```



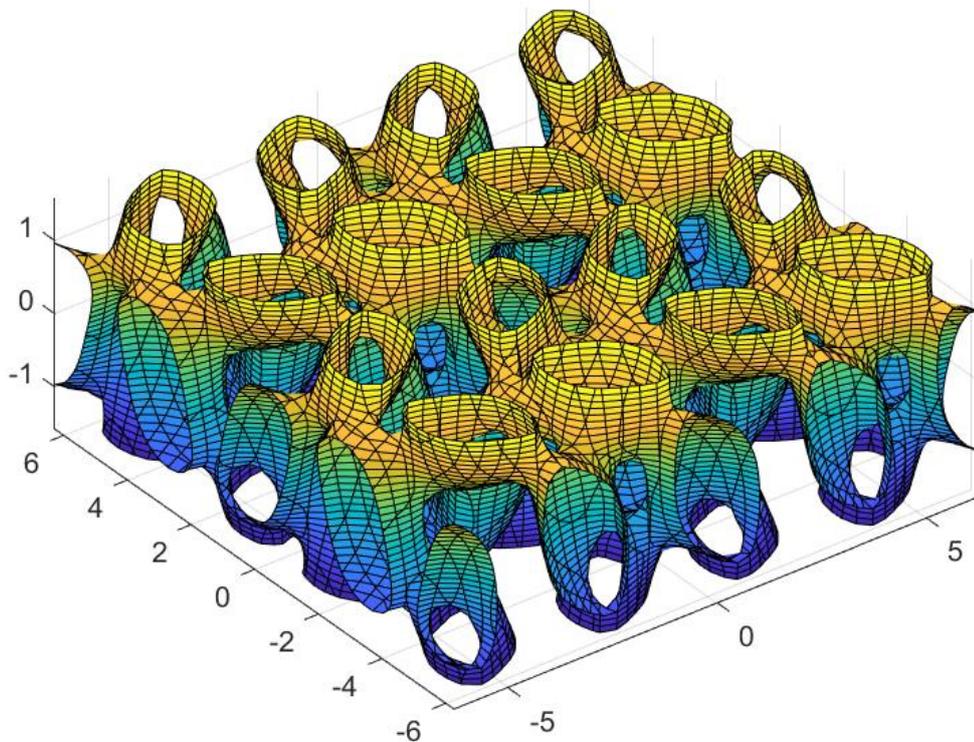
10. REPRESENTACIÓN DE UN LIDINOIDE

Para poder representar a un lidinoide utilizaremos la ecuación implícita siguiente:

$$\left(\frac{1}{2}\right) [\sin 2x \cos y \sin z + \sin 2y \cos z \sin x + \sin 2z \cos x \sin y] - \left(\frac{1}{2}\right) [\cos 2x \cos 2y + \cos 2y \cos 2z + \cos 2z \cos 2x] + 0.15 = 0$$

De forma que, para visualizar a esta superficie, escribiremos el código siguiente:

```
%Representación de un lidinoide
%Límites
x_sc_l=-2*pi;
x_sc_u=2*pi;
y_sc_l=-2*pi;
y_sc_u=2*pi;
z_sc_l=-0.5*pi;
z_sc_u=0.5*pi;
MD_sc=40;
%Ecuación implícita
f_sc=@(x,y,z)0.5*((sin(2*x).*cos(y).*sin(z)
)+(sin(2*y).*cos(z).*sin(x)))+(sin(2*z).*cos
(x).*sin(y)))-
0.5*(((cos(2*x).*cos(2*y)))+(cos(2*y).*cos(2
*z)))+(cos(2*z).*cos(2*x))))+0.15;
fimplicit3(f_sc,[x_sc_l x_sc_u y_sc_l
y_sc_u z_sc_l z_sc_u],'meshdensity',MD_sc)
```



BIBLIOGRAFÍA

- [1] Euler, L. (1744) : Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.
- [2] Lagrange, J. L. (1761) : Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies.
- [3] Monge, G. (1809) : Application d'analyse à la géométrie.
- [4] Meusnier, J. B. (1776) : Mémoire sur la courbe des surfaces.
- [5] Scherk, H. F. (1832) : De proprietatibus superficiei, quae hac continetur aequatione $(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$ disquisitiones analyticae.
- [6] Scherk, H. F. (1835) : Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen.
- [7] Taylor, J. E. (1976) : The Structure of Singularities in Soap-Bubble-Like and Soap-Film-Like Minimal Surfaces. The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 103, No. 3), pp. 489-539.
- [8] Riemann, B. (1867) : Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung.
- [9] Henneberg, L. (1876) : Über diejenige Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat.
- [10] Henneberg, L. (1875) : Über solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben.
- [11] Douglas, J. (1939) : Minimal surfaces of higher topological structure.
- [12] Osserman, R. (1963) : Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n .
- [13] Osserman, R. (1989) : A survey of Minimal Surfaces.
- [14] Frenet, F. (1847) : Sur les courbes à double courbure (PDF), Thèse, Toulouse. Resumen en Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 17, 1852.
- [15] García Rio, E. : Una introducción a la curvatura. Universidad de Santiago de Compostela.
- [16] Mota Sánchez, E. (2015): Superficies minimales. Historia, desarrollo y aplicaciones a otras ciencias (TFG). Universidad Complutense de Madrid.
- [17] do Carmo, M. P. (1976): Geometría diferencial de curvas y superficies.
- [18] Pineda Ramos, J. F. (2019): Geometría de superficies minimales (TFG). Universidad de la Laguna.
- [19] Muna, N. and Patterson, A. E. : Simple 3-D Visualization of Some Common Mathematical Minimal Surfaces using MATLAB.

[20] Monasterios Huanca, N. (2021): La representación de Weierstrass de superficies mínimas en \mathbb{R}^3 (TFG). Universidad Mayor de San Andrés.

[21] Fonseca Veitía, M. (2016): Superficies mínimas en \mathbb{R}^3 (TFG). Universidad distrital Francisco José de Caldas.

[22] Oraib Al-Ketan, R. K. and Al-Ru, A. (2019): Multifunctional Mechanical Metamaterials Based on Triply Periodic Minimal Surface Lattices.

[23] Pol Segura, J. (2021): Porosidad y superficies mínimas (TFG). Aplicación a la fabricación digital. Univ. Politécnica de Madrid.