



industriales  
etsii

Escuela Técnica  
Superior  
de Ingeniería  
Industrial

# UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Industrial

## ESTUDIO NUMÉRICO DE LA FUNCIÓN DE DEGRADACIÓN EN LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE FRACTURA FRÁGIL CON EL MÉTODO PHASE-FIELD

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS  
INDUSTRIALES

**Autor:** Daniel Blanco Benavides  
**Director:** Jesús Martínez Frutos  
**Codirector:** Rogelio Ortigosa Martínez

Cartagena, noviembre 2020



Universidad  
Politécnica  
de Cartagena

# Índice

RESUMEN .....	6
1. INTRODUCCIÓN .....	7
1.1. Motivación .....	7
1.2. Objetivos.....	8
1.3. Estructura del proyecto.....	9
2. MECÁNICA DE CONTINUO .....	11
2.1. Cinemática.....	11
2.2. Gradiente de deformaciones .....	12
2.3. Deformación .....	14
2.4. Campo de desplazamientos .....	16
2.5. Descomposición espectral de $\varepsilon$ .....	18
3. LEY CONSTITUTIVA EN ELASTICIDAD LINEAL ISÓTROPA .....	20
3.1. Energía elástica.....	20
3.2. Tensor de tensiones de Cauchy .....	20
3.3. Tensor de elasticidad .....	23
3.4. Ecuación de equilibrio en elasticidad lineal.....	23
4. MECÁNICA DE FRACTURA .....	25
4.1. Problema unidimensional de fractura .....	25
4.2. Extensión multidimensional.....	29
4.3. Problema de fractura acoplado.....	30
5. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA .....	34
5.1. Formulación staggered.....	34
6. IMPLEMENTACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS .....	37
6.1. Elementos finitos P1 .....	37
6.2. Discretización del problema de fractura: formulación staggered .....	38
7. SIMULACIÓN DEL PROBLEMA DE FRACTURA .....	43
7.1. Cuerpo rectangular .....	43
7.1.1. Influencia de la malla.....	44
7.1.2. Influencia del número de incrementos.....	47
7.1.3. Tensiones de Von Misses.....	50

<b>7.2. Cuerpo en forma de L .....</b>	<b>51</b>
7.2.1. Comparación entre las distintas $g(s)$ .....	52
7.2.1. Tensiones de Von Misses.....	54
<b>7.3. Cuerpo rectangular con grieta inducida.....</b>	<b>55</b>
7.3.1. Comparación con/sin recuperación del material .....	56
7.3.2. Tensiones de Von Misses.....	58
<b>7.4. Probeta de ensayo de tracción.....</b>	<b>59</b>
7.4.1. Propagación de la fractura.....	60
7.4.2. Tensiones de Von Misses.....	61
<b>7.5. Biela .....</b>	<b>62</b>
7.5.1. Propagación de la fractura.....	64
7.5.2. Tensiones de Von Misses.....	66
<b>7.6. Pistón .....</b>	<b>67</b>
7.6.1. Propagación de la fractura.....	69
7.6.2. Tensiones de Von Misses.....	71
<b>8. CONCLUSIONES.....</b>	<b>72</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>74</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>75</b>
<b>Anexo 1: Cuerpo rectangular .....</b>	<b>75</b>
<b>Anexo 2: Cuerpo en forma de L .....</b>	<b>78</b>
<b>Anexo 3: Cuerpo rectangular con grieta inducida.....</b>	<b>81</b>
Con irreversibilidad de la fractura.....	81
Sin irreversibilidad de la fractura.....	83
<b>Anexo 4: Probeta de ensayo de tracción.....</b>	<b>85</b>
<b>Anexo 5: Biela.....</b>	<b>88</b>
<b>Anexo 6: Pistón.....</b>	<b>91</b>

## Índice de Figuras

Figura 1.1. Fractura de un barco Liberty en la II GM.....	7
Figura 1.2. Ejemplos de fractura: a) avión; b) fémur; c) biela; d) pistón; e) tubería.....	8
Figura 2.1. Configuración inicial y final.....	11
Figura 2.2. Enfoque Lagrangiano .....	12
Figura 2.3. Enfoque Euleriano.....	12
Figura 2.4. Vectores $dX$ y $dx$ del ejemplo 1.....	14
Figura 2.5. Vector desplazamiento $u$ .....	16
Figura 3.1. Movimiento entre las configuraciones Lagrangiana y Euleriana .....	23
Figura 4.1. Barra expandida infinitamente sobre el eje X.....	25
Figura 4.2. Representación parámetro $s(x)$ .....	25
Figura 4.3. Representación parámetro $s(x)$ regularizado .....	26
Figura 4.4. Fractura multidimensional.....	29
Figura 4.5. Funciones de degradación $g(s)$ cuadrática a) y $g(s)$ cúbica b).....	31
Figura 6.1. Funciones de forma parametrizadas respecto a coordenadas de área triangulares a) y tetraédricas b) .....	37
Figura 6.2. Funciones de forma triangulares .....	37
Figura 6.3. Coordenadas físicas a) y coordenadas de área b).....	39
Figura 7. 1. Geometría y condiciones de contorno del ejemplo 1 .....	43
Figura 7. 2. Mallas del ejemplo 1 .....	44
Figura 7. 3. Propagación de la fractura del ejemplo 1 en el incremento 135 .....	45
Figura 7. 4. Propagación de la fractura del ejemplo 1 en el incremento 165 .....	45
Figura 7. 5. Propagación de la fractura del ejemplo 1 en el incremento 200.....	46
Figura 7. 6. Curvas fuerza de reacción de fractura - desplazamiento para diferentes mallas .....	47
Figura 7. 7. Propagación de la fractura para N=50.....	48
Figura 7. 8. Propagación de la fractura para N=100.....	48
Figura 7. 9. Propagación de la fractura para N=200.....	49
Figura 7. 10. Curvas fuerza de reacción - desplazamiento para diferentes incrementos	49
Figura 7. 11. Tensiones de Von Misses del ejemplo 1 .....	50
Figura 7. 12. Geometría y condiciones de contorno del ejemplo 2.....	51
Figura 7. 13. Malla del ejemplo 2.....	52
Figura 7. 14. Propagación de la fractura del ejemplo 2 en el incremento 173 .....	52

Figura 7. 15. Propagación de la fractura del ejemplo 2 en el incremento 202 .....	52
Figura 7. 16. Propagación de la fractura del ejemplo 2 en el incremento 275 .....	53
Figura 7. 17. Propagación de la fractura del ejemplo 2 en el incremento 500 .....	53
Figura 7. 18. Curvas fuerza de reacción de fractura - desplazamiento para diferentes g(s) .....	54
Figura 7. 19. Tensiones de Von Misses del ejemplo 2 .....	54
Figura 7. 20. Geometría y condiciones de contorno del ejemplo 3 .....	55
Figura 7. 21. Malla del ejemplo 3.....	56
Figura 7. 22. Propagación de la fractura del ejemplo 3 en el incremento 42 .....	56
Figura 7. 23. Propagación de la fractura del ejemplo 3 en el incremento 54.....	56
Figura 7. 24. Propagación de la fractura en el ejemplo 3 en el incremento 59 .....	57
Figura 7. 25. Propagación de la fractura del ejemplo 3 en el incremento 69 .....	57
Figura 7. 26. Propagación de la fractura del ejemplo 3 en el incremento 300 .....	57
Figura 7. 27. Tensiones de Von Misses del ejemplo 3 .....	58
Figura 7. 28. Dimensiones de la probeta.....	59
Figura 7. 29. Vista tridimensional a) y malla b) de la probeta .....	59
Figura 7. 30. Propagación de la fractura en la probeta en los incrementos: 91 a); 111 b); 113 c); 116 d).....	60
Figura 7. 31. Encuellamiento probeta real .....	60
Figura 7. 32. Curvas fuerza de reacción de fractura – desplazamiento de la probeta para diferentes g(s) .....	61
Figura 7. 33. Tensiones de Von Misses en la probeta .....	61
Figura 7. 34. Dimensiones de la biela.....	62
Figura 7. 35. Vista tridimensional a) y malla b) de la biela .....	63
Figura 7. 36. Defecto inicial de la biela a) y su mallado b) .....	63
Figura 7. 37. Propagación de la fractura en las bielas en los incrementos: 85 a); 96 b); 110 c); 135 d); 138 e); 141 d).....	64
Figura 7. 38. Curvas fuerza de reacción de fractura – desplazamiento de las bielas.....	65
Figura 7. 39. Tensiones de Von Misses en las bielas en los incrementos: 85 a); 96 b); 110 c); 135 d); 138 e); 141 d).....	66
Figura 7. 40. Dimensiones del pistón.....	67
Figura 7. 41. Vista tridimensional a) y malla b) del pistón .....	68
Figura 7. 42. Malla de un cuarto de pistón.....	68
Figura 7. 43. Propagación de la fractura en el pistón en los incrementos: 133 a); 155 b); 165 c); 173 d).....	69

Figura 7. 44. Curva fuerza de reacción de fractura – desplazamiento del pistón.....	70
Figura 7. 45. Tensiones de Von Misses en el pistón.....	71
Figura 8. 1. Propagación de la fractura con funciones de degradación cuadrática a) y cúbica b).....	73

## RESUMEN

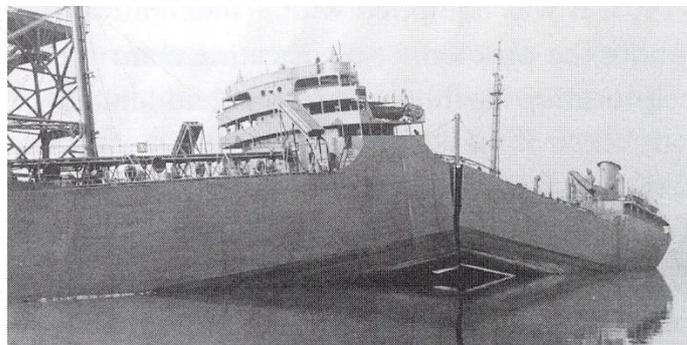
La simulación numérica con el objeto de predecir mecanismos de fallo asociados a la iniciación y propagación de fractura es de extrema importancia en el sector industrial. Los métodos numéricos actuales empleados en mecánica de fractura pueden ser clasificados en dos grupos principales: métodos discretos y métodos regularizados. En el enfoque discreto cabe destacar el método llamado eXtended Finite Element Method (XFEM), donde la fractura es tratada como una discontinuidad fuerte que se propaga a través de los elementos de la malla de elementos finitos. Esto se consigue con un enriquecimiento del campo de desplazamientos en dichos elementos, añadiendo grados de libertad extra y funciones de forma enriquecidas que satisfacen la partición de unidad (partition of unity principle). Las principales desventajas de los métodos discretos son: (i) necesitan de un criterio ad hoc para la nucleación y propagación de la fractura; (ii) la dificultad inherente para la simulación de patrones geométricos complejos de fractura. En este TFE emplearemos el método llamado phase-field, perteneciente al segundo grupo mencionado (métodos regularizados). En este método, la fractura es aproximada por un parámetro escalar llamado phase-field, que suaviza (regulariza) discontinuidades sobre una región pequeña. La implementación computacional de este método es considerablemente más sencilla que la del método XFEM. Además, el método de phase-field no presenta las dos desventajas comentadas anteriormente y asociadas al XFEM.

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1. Motivación

La problemática de los fenómenos de fractura existe desde que el ser humano comenzó a construir estructuras, pero en los últimos siglos el problema se ha agravado debido a que la tecnología es más compleja. Por ejemplo, un accidente aéreo no sería posible sin la tecnología aeroespacial moderna. Afortunadamente, en los últimos años, sobre todo después de la Segunda Guerra Mundial, se comprendieron los modos de falla de los materiales por fractura y se estudiaron procedimientos para evitar tales fallas. Sin embargo, el fenómeno de fractura es complejo y queda mucho por aprender de él, haciendo que hoy en día se produzcan fallos catastróficos que llevan a grandes pérdidas económicas, humanas y materiales.

La mayoría de las fallas estructurales son debidas generalmente por negligencia durante el diseño, construcción u operación de la estructura y por la aplicación de un nuevo diseño o material, produciéndose un resultado inesperado. Esta última causa es la más difícil de detectar, ya que se supone que se introduce un diseño mejorado y con materiales que pueden ofrecer grandes ventajas, pero que a su vez introducen otros tipos de problemas. Un ejemplo son los barcos Liberty de la Segunda Guerra Mundial, los cuales fueron los primeros en tener cascos totalmente soldados, posibilitando que fueran fabricados más rápida y económicamente frente a los diseños remachados anteriores. Sin embargo, un gran número de estos barcos sufrieron grandes fracturas debido al cambio de diseño (Figura 1.1).



*Figura 1. 1. Fractura de un barco Liberty en la II GM*

En el Laboratorio de Investigación Naval en Washington D.C. se estudió este problema, naciendo el campo conocido como mecánica de fractura durante la década posterior a la guerra. Años después se motivó e incentivó a seguir investigando sobre la fractura con el fin de garantizar los protocolos de seguridad en la industria nuclear en Estados Unidos y en instalaciones petrolíferas en Reino Unido. En los últimos años, gracias a los grandes avances informáticos, se llevan a cabo simulaciones numéricas para analizar el comportamiento en servicio de estructuras, ya que se ha demostrado que no sólo basta con evitar defectos de fabricación iniciales debido a que pueden aparecer pequeñas grietas que se van propagando durante la puesta en servicio a causa de fatiga, fluencia, corrosión, etc. Hoy en día, estas simulaciones pueden realizarse tridimensionalmente en ordenadores ordinarios de cierta potencia de cómputo, aunque el fenómeno de fractura es complejo y se sigue investigando sobre él.

La aplicación del campo de mecánica de fractura permite estudiar el diseño de las estructuras, tanto geométrica como materialmente, con el fin de obtener la mayor seguridad y los mejores resultados económicos posibles. Estas simulaciones numéricas han cobrado gran importancia, sobre todo para estudiar el comportamiento de materiales innovadores en la industria aeronáutica, nuclear, eólica, petrolífera, etc. Tanto es así que grandes empresas desarrollan su propio software para el estudio de la propagación de la fractura. Algunos ejemplos de fractura pueden ser los mostrados en la Figura 1.2:

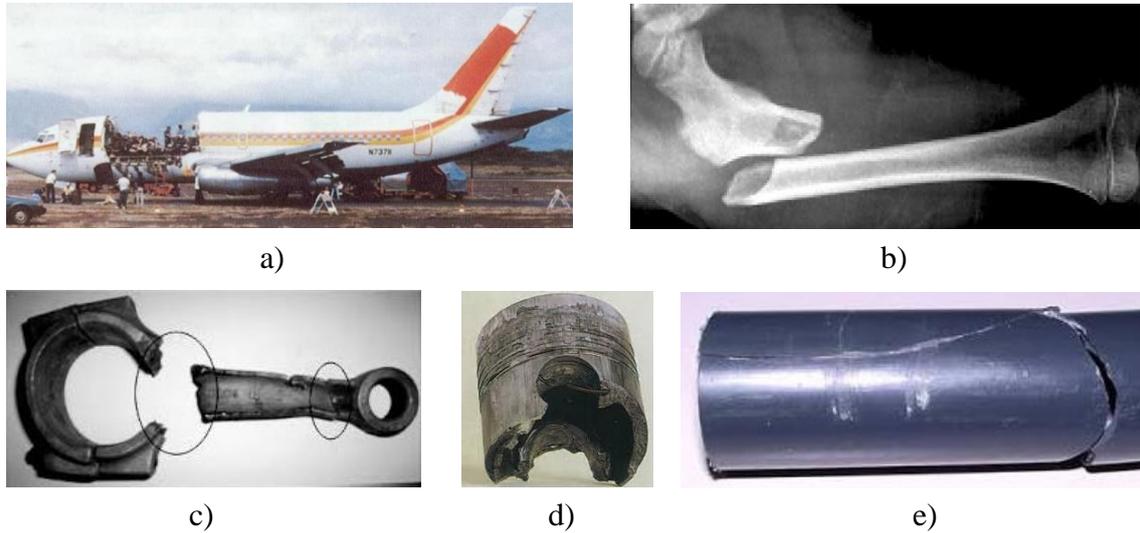


Figura 1. 2. Ejemplos de fractura: a) avión; b) fémur; c) biela; d) pistón; e) tubería

El método más adecuado para tratar problemas con geometría y condiciones de contorno genéricas es el llamado método de elementos finitos, el cual vamos a utilizar en este trabajo para estudiar el fenómeno de fractura. Una forma de resolver este problema es a través de un método discreto llamado método de los elementos finitos extendidos (XFEM), ya que se tienen en cuenta las discontinuidades tales como pliegues y saltos, pero esto lleva a que la resolución del problema sea más compleja. Por ello, haremos uso del método regularizado del parámetro *phase-field*, el cual suaviza discontinuidades sobre regiones pequeñas.

## 1.2. Objetivos

Los objetivos previstos para este trabajo son los siguientes:

- **Objetivo 1:** Adquisición de conocimientos básicos en elasticidad lineal, específicamente con:
  - Definición de medidas de deformación.
  - Ecuaciones constitutivas en elasticidad lineal particularizadas a deformación plana, tensión plana y problemas tridimensionales.
  - Problema de contorno asociado a la elasticidad lineal (sistema de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) y condiciones de contorno).
  - Forma débil del problema de elasticidad.

- **Objetivo 2:** Adquisición de conocimientos sobre el modelado de fractura frágil a través del método de *phase-field*, familiarizándose con los siguientes conceptos:
  - Problema de minimización asociado a la propagación de fractura.
  - Formas débiles asociadas al problema de fractura.
- **Objetivo 3:** Adquisición de conocimientos sobre el método de los Elementos Finitos, familiarizándose con la versión discretizada de las formas débiles asociadas al problema de fractura.
- **Objetivo 4:** Implementación del problema de fractura en el software de simulación numérica FreeFem. El problema de fractura a través del método de *phase-field* es equivalente a un problema de minimización de energía. Por tanto, las ecuaciones de gobierno (formas débiles asociadas a las EDPs del problema) se pueden obtener a través de un principio variacional. Por ello, una vez se esté familiarizado con las formas débiles, se estará en disposición de implementarlas en FreeFem.
- **Objetivo 5:** Incorporación de la irreversibilidad de la fractura en la formulación.
- **Objetivo 6:** Implementación de distintas funciones de degradación.
- **Objetivo 7:** Simulación de problemas benchmark (problemas tipo) para testear la validez de la implementación llevada a cabo en objetivo 2.
- **Objetivo 8:** Simulación de la propagación de fractura en aplicaciones industriales.

### 1.3. Estructura del proyecto

Este proyecto se divide en seis capítulos, donde en cada uno de ellos trataremos los siguientes conceptos:

- **Capítulo 2: Mecánica de continuo.** En este capítulo comenzaremos introduciendo el concepto de *mapping de deformaciones*, el cual relaciona puntos de la configuración inicial con puntos de la configuración final. Además, comentaremos los dos enfoques principales de la mecánica de continuo, siendo estos el enfoque Lagrangiano y el enfoque Euleriano. Presentaremos el tensor de deformaciones, que permite transformar vectores infinitesimales entre las configuraciones material y espacial. Este tensor de deformaciones lo relacionaremos con el vector de desplazamiento y este, a su vez, con el tensor de pequeñas deformaciones o *small strain tensor*.
- **Capítulo 3: Ley constitutiva en elasticidad lineal isótropa.** Aquí introduciremos el concepto de energía elástica, el cual depende del primer y segundo módulo de Lamé, que están relacionados con las propiedades del material a tratar. Seguidamente comentaremos el tensor de tensiones de Cauchy y el tensor de elasticidad, teniendo este último gran importancia física debido a que encapsula las propiedades materiales de un material. Por último, trataremos la EDP y las

condiciones de contorno que gobiernan el comportamiento de un sólido en su configuración no deformada.

- **Capítulo 4: Mecánica de fractura.** En este capítulo trataremos el fenómeno de fractura e introduciremos el concepto de *phase-field* y su formulación regularizada para el caso unidimensional. Seguidamente, extenderemos el problema de fractura al caso multidimensional, comentaremos el problema de fractura acoplado al problema mecánico junto a las funciones de degradación y, por último, trataremos su resolución mediante la minimización de un funcional de energía.
- **Capítulo 5: Implementación numérica.** En este capítulo introduciremos el método de resolución utilizado, el cual será el llamado *incremental + staggered*. Procederemos a describir la resolución de las formas débiles del problema y, por último, comentaremos el fenómeno de irreversibilidad de la fractura.
- **Capítulo 6: Implementación de elementos finitos.** Primeramente, introduciremos las funciones de forma para elementos finitos P1, los cuales son elementos triangulares y tetraédricos. Por último, discretizaremos el problema de fractura mediante elementos finitos.
- **Capítulo 7: Simulación del problema de fractura.** En este capítulo realizaremos la simulación problemas de fractura, concretamente de tres bidimensionales y tres tridimensionales. Comprobaremos que los resultados de la propagación de la fractura son lógicos y que el modelo matemático funciona correctamente. Además, compararemos la influencia que tiene en el problema utilizar distintos *load increments*, mallas, funciones de degradación, etc.

## 2. MECÁNICA DE CONTINUO

### 2.1. Cinemática

Consideremos el sistema de coordenadas cartesianas  $(X_1, X_2, X_3)$  de la Figura 2.1, donde está representado un continuo definido por una configuración inicial, no deformada o Lagrangiana de dominio  $\Omega_0$ . Su contorno es  $\partial\Omega_0$  y el vector normal exterior a dicho contorno es  $N$ . Una vez desarrollado el movimiento, el continuo ocupa una configuración final, deformada o Euleriana definida por el dominio  $\Omega$ , cuyo contorno es  $\partial\Omega$  y el vector normal exterior a dicho contorno es  $n$ .

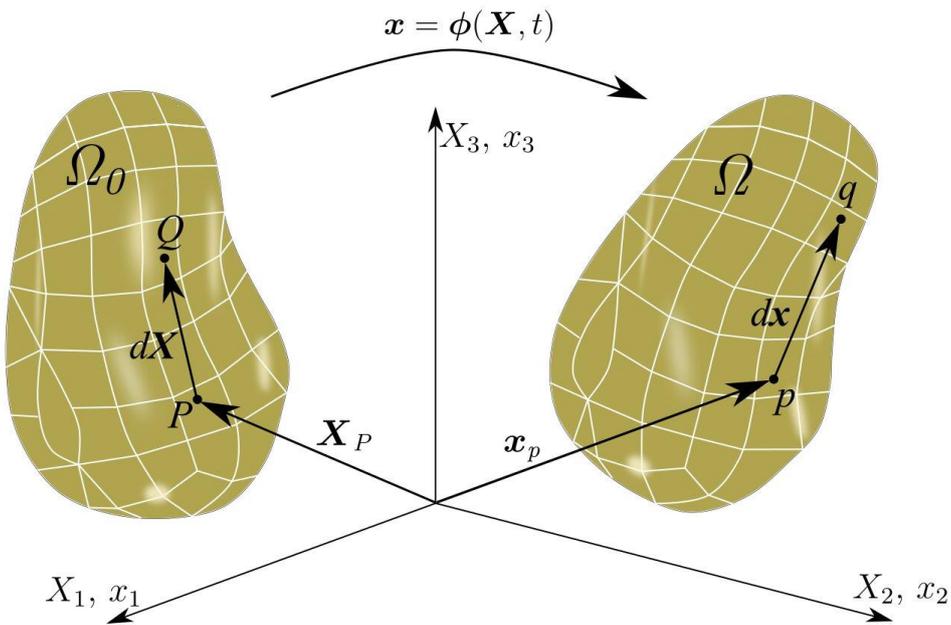


Figura 2. 1. Configuración inicial y final

El movimiento del continuo es descrito mediante la función **mapping de deformaciones**  $\phi$ , la cual relaciona un punto material de la configuración inicial,  $X \in \Omega_0$ , con un punto material de la configuración final,  $x \in \Omega$ . Entendemos por punto material una partícula que puede ocupar distintos puntos espaciales en su movimiento a lo largo del tiempo, es decir:

$$x = \phi(X, t) \quad (2. 1)$$

En este trabajo vamos a considerar las hipótesis de elasticidad lineal, según las cuales, ambas configuraciones inicial y final están muy próximas, por lo que no se hace distinción entre ellas ni entre los vectores normales  $N$  y  $n$ .

Para estudiar el comportamiento del continuo  $\Omega_0$  representado en la Figura 2.1, se pueden adoptar dos enfoques completamente distintos: el enfoque *Lagrangiano* y el enfoque *Euleriano*. En el primero podemos considerar un punto material que en el instante inicial  $t = t_0$  está situado en un punto  $r_0$  y posteriormente seguir su evolución con el tiempo. De esta forma, en el instante  $t \neq t_0$  la posición  $r(t)$  del punto material dependerá del tiempo y de su posición inicial. Este punto de vista es apropiado para seguir la historia de las magnitudes asociadas al punto material en su movimiento.

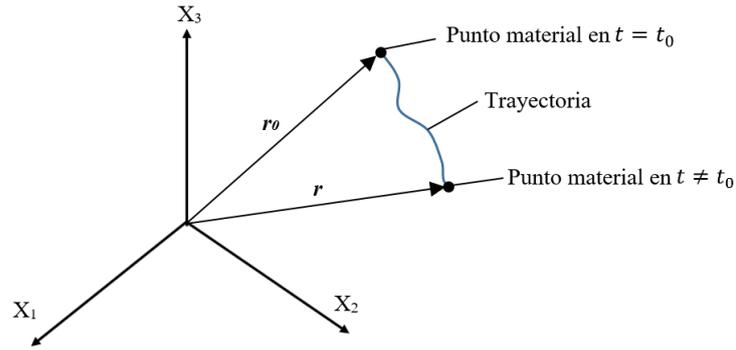


Figura 2. 2. Enfoque Lagrangiano

Con el enfoque *Euleriano* especificamos el campo en puntos fijos del espacio en distintos instantes. En este caso las coordenadas  $r$  y el tiempo  $t$  son variables independientes, y la información del campo no está ligada a cada punto material en particular.

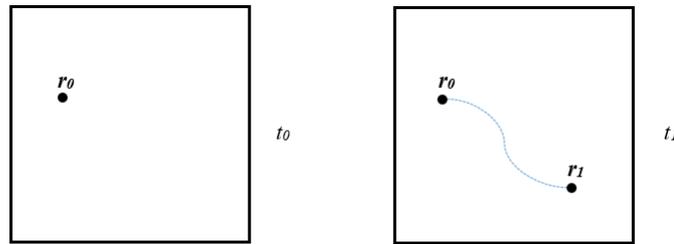


Figura 2. 3. Enfoque Euleriano

Utilizaremos el enfoque *Lagrangiano* para el desarrollo de este trabajo, como es típico en mecánica de sólidos.

## 2.2. Gradiente de deformaciones

Consideremos las partículas  $P$  y  $Q$  en la configuración Lagrangiana en la Figura 2.1. Ambas partículas las denotamos como  $p$  y  $q$  en la configuración Euleriana. Estas partículas están situadas infinitesimalmente próximas entre ellas, por lo que podemos definir la posición relativa entre ambas partículas entre ambas configuraciones mediante los vectores infinitesimales  $dx$  y  $dX$ , es decir:

$$dX = X_Q - X_P \quad dx = x_q - x_p \quad (2. 2)$$

Aplicando la función *mapping de deformaciones*, ecuación (2.1), en la expresión (2.2) tenemos que,

$$dx = \phi(X_Q) - \phi(X_P) = \phi(X_P + dX) - \phi(X_P) \quad (2. 3)$$

Sabiendo que el desarrollo de Taylor de primer orden para una función continua  $f: R \rightarrow R$  es de la siguiente forma:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 \quad (2. 4)$$

Entonces podremos obtener la posición de la partícula  $X_Q$  tomando  $f(x) = \phi(X)$ ,  $x_0 = X_P$  y  $(x - x_0) = dX$ :

$$\phi_Q = \phi(\mathbf{X}_P - d\mathbf{X}) \approx \phi(\mathbf{X}_P) + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} + o(d\mathbf{X}^2) \quad (2.5)$$

Sustituyendo la expresión (2.5) en (2.3) obtenemos que,

$$d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}_P) + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} + o(d\mathbf{X}^2) - \phi(\mathbf{X}_P) \quad (2.6)$$

y operando nos queda:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} + o(d\mathbf{X}^2) \quad (2.7)$$

En esta última expresión podemos identificar el **gradiente de deformaciones  $F$** , el cual queda definido como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_0 \phi \quad (2.8)$$

El subíndice  $0$  de  $\nabla$  nos indica que la derivada es con respecto a  $\mathbf{X}$ .

Sustituyendo (2.8) en (2.7) y para un  $d\mathbf{X}$  infinitesimal, o en el caso de que la dependencia de  $\phi(\mathbf{X})$  sea lineal, tenemos la siguiente expresión:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.9)$$

Esta función es de suma importancia debido a que nos permite transformar los vectores infinitesimales  $d\mathbf{X}$  del material en su configuración no deformada en los vectores  $d\mathbf{x}$  de la configuración deformada.

#### Ejemplo 1:

Dada la siguiente función  $\phi$ , calcularemos el gradiente de deformaciones  $F$ .

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(20 + 6X_1 + 9X_2) \\ \frac{1}{3}(16 + 9X_2) \end{bmatrix}$$

Aplicando la expresión (2.8) obtenemos el gradiente de deformaciones:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Si conocemos el vector  $d\mathbf{X}$  en la configuración inicial, podemos obtener el vector  $d\mathbf{x}$  en su configuración final. Supongamos el siguiente vector  $d\mathbf{X}$ .

$$d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación (2.9) tenemos que:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Observamos que el gradiente de deformaciones  $\mathbf{F}$  produce un cambio en el módulo y rota el vector  $d\mathbf{X}$ . Este efecto lo podemos ver en la Figura 2.4, donde se representa el vector  $d\mathbf{X}$  de la configuración inicial y el vector  $d\mathbf{x}$  de la configuración final.

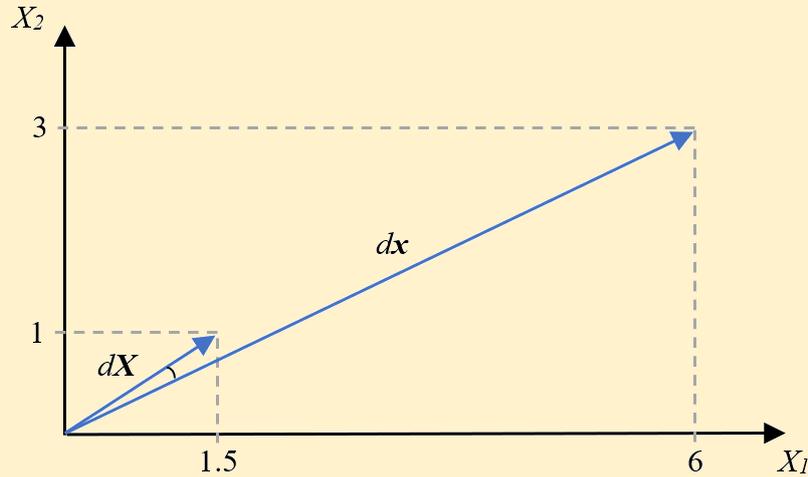


Figura 2. 4. Vectores  $d\mathbf{X}$  y  $d\mathbf{x}$  del ejemplo 1

### 2.3. Deformación

Existe un tensor simétrico llamado *Right Cauchy-Green deformation tensor*  $\mathbf{C}$  (2.10), el cual está asociado al gradiente de deformaciones  $\mathbf{F}$ . Este tensor  $\mathbf{C}$  permite introducir una medida de deformación o “strain” llamada *Green-Lagrange E* (2.11), donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.10)$$

Con el fin de comprobar la importancia de este tensor  $\mathbf{E}$  vamos a considerar un vector  $d\mathbf{X}$  en su configuración inicial y el vector análogo  $d\mathbf{x}$  en su configuración final, cuyos módulos son  $dL$  y  $dl$  respectivamente, es decir:

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dL^2 \quad d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dl^2 \quad (2.12)$$

La diferencia de estos módulos es, por tanto,

$$dl^2 - dL^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.13)$$

Introduciendo la expresión (2.9) y aplicando propiedades de matrices nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned} dl^2 - dL^2 &= \mathbf{F}d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Agrupando términos y utilizando la ecuación (2.10) en primer lugar y finalmente la ecuación (2.11) llegamos a:

$$\begin{aligned} dl^2 - dL^2 &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I})d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E}d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dividiendo ambos términos de la ecuación por  $dL^2$  obtenemos la expresión que se muestra a continuación:

$$\frac{1}{2} \frac{dl^2 - dL^2}{dL^2} = \frac{d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E}d\mathbf{X}}{dL^2} \quad (2.16)$$

Según esta última ecuación, el tensor  $\mathbf{E}$  nos informa de los cambios relativos en longitud de los vectores de la configuración final respecto a la configuración inicial. Sin embargo, no sólo nos informa de esto, sino también de la distorsión angular (cambio entre las proyecciones de los vectores). Para comprobar esto último vamos a considerar dos vectores en la configuración no deformada,  $d\mathbf{X}_1$  y  $d\mathbf{X}_2$ , y dos vectores en la configuración deformada,  $d\mathbf{x}_1$  y  $d\mathbf{x}_2$ . Realizando un desarrollo análogo al anterior obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 - d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 &= \mathbf{F}d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X}_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 \\ &= d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X}_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{I} d\mathbf{X}_2 \\ &= d\mathbf{X}_1 \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{X}_2 \\ &= d\mathbf{X}_1 \cdot 2\mathbf{E}d\mathbf{X}_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

### Ejemplo 2:

Recogiendo los resultados obtenidos en el Ejemplo 1, calcularemos el tensor  $\mathbf{E}$ .

Aplicando la ecuación (2.10) tenemos que el *Right Cauchy-Green deformation tensor*  $\mathbf{C}$  es:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$$

Calculamos el tensor *Green-Lagrange*  $\mathbf{E}$  mediante la expresión (2.11):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3/2 & 3 \\ 3 & 17/2 \end{bmatrix}$$

La longitud al cuadrado del vector  $d\mathbf{X}$  es:

$$dL^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3.25$$

Ahora podremos calcular la longitud del vector en la configuración deformada:

$$dl^2 - dL^2 = d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E}d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 2 \begin{bmatrix} 3/2 & 3 \\ 3 & 17/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} = 41.75$$

$$dl = \sqrt{41.75 + dL^2} = \sqrt{41.75 + 3.25} = 6.708$$

Efectivamente, si calculamos el módulo del vector  $d\mathbf{x}$  obtenido en el Ejemplo 1 con la siguiente expresión observamos que coinciden los resultados:

$$dl = \sqrt{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}} = 6.708$$

## 2.4. Campo de desplazamientos

Consideramos el sistema de coordenadas  $(X_1, X_2, X_3)$  de la Figura 2.5 en el que están representadas la configuración inicial  $\mathbf{X} \in \Omega_0$  y la configuración final  $\mathbf{x} \in \Omega$ . El **vector de desplazamiento**  $\mathbf{u}$  viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.18)$$

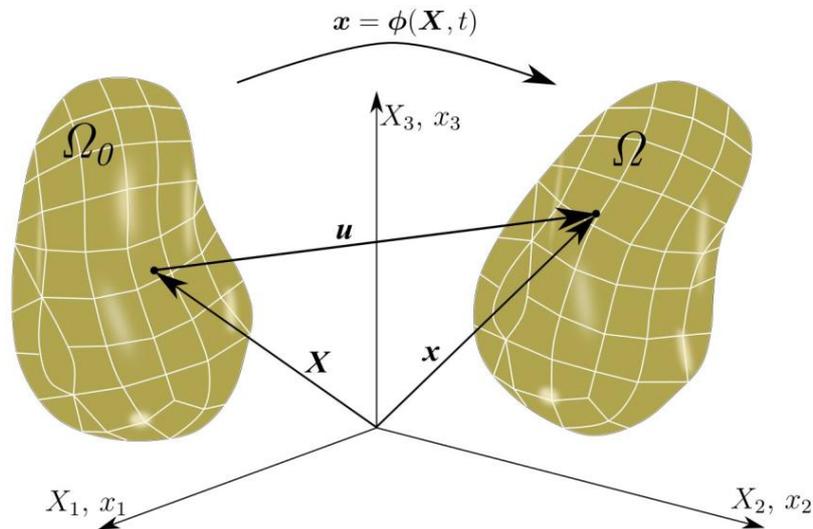


Figura 2. 5. Vector desplazamiento  $\mathbf{u}$

El gradiente de dicho vector es el siguiente:

$$\nabla_0 \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.19)$$

Como sabemos,

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}) \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I}$$

Sustituyendo en (2.19) tenemos que:

$$\nabla_0 \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (2.20)$$

Observamos en la ecuación anterior que el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$  está relacionado con el gradiente de deformaciones  $\mathbf{F}$ , por lo que podemos expresar el tensor  $\mathbf{E}$  en función del vector  $\mathbf{u}$  mediante el siguiente procedimiento (2.21): Primero sustituimos el tensor  $\mathbf{C}$  en la ecuación (2.10) en (2.11), posteriormente despejamos el gradiente de deformaciones  $\mathbf{F}$  de (2.20) con el fin de sustituirlo en el resultado obtenido anteriormente y operamos. Aplicando dicho procedimiento llegamos a:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2} ((\nabla_0 \mathbf{u} + \mathbf{I})^T (\nabla_0 \mathbf{u} + \mathbf{I}) - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}^T + \nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0 \mathbf{u}^T \nabla_0 \mathbf{u} - \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Por último, agrupamos términos:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla_0 \mathbf{u}^T + \nabla_0 \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \nabla_0 \mathbf{u}^T \nabla_0 \mathbf{u} \quad (2.22)$$

En el contexto de elasticidad lineal podemos despreciar el término no lineal  $\nabla_0 \mathbf{u}^T \nabla_0 \mathbf{u}$  del tensor  $\mathbf{E}$ . Dicha simplificación en la ecuación (2.22) da lugar al tensor de **pequeñas deformaciones** o *small strain tensor*  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla_0 \mathbf{u}^T + \nabla_0 \mathbf{u}) \quad (2.23)$$

Además, dada la proximidad entre las configuraciones inicial y final, podemos expresar  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en función del gradiente espacial de los desplazamientos, es decir:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}) \quad (2.24)$$

Este tensor lo podemos dejar en función del gradiente de deformaciones introduciendo la expresión (2.20), quedando como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left( (\mathbf{F} - \mathbf{I})^T + (\mathbf{F} - \mathbf{I}) \right) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) - \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.25)$$

### Ejemplo 3:

Con el tensor  $\mathbf{F}$  calculado en los dos anteriores ejemplos, calcularemos el tensor de pequeñas deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3/2 & 3 \\ 3 & 17/2 \end{bmatrix}$$

Aplicando la expresión (2.24) obtenemos el tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) - \mathbf{I} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^T \right) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{bmatrix}$$

Dado que este tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es una aproximación del tensor  $\mathbf{E}$  calculado en el ejemplo 2, vamos a comprobar el error relativo  $\beta$  cometido en dicha aproximación. Para ello, tomaremos para el cálculo del error el término  $a_{22}$  de ambos tensores, ya que es el término donde más diferencia encontramos:

$$\beta = \frac{\left| 2 - \frac{17}{2} \right|}{\frac{17}{2}} \cdot 100 = 76.47 \%$$

El error cometido es bastante alto debido a que los desplazamientos asociados a la función *mapping de deformaciones*  $\boldsymbol{\phi}$  son demasiado elevados. Ahora vamos a comprobar el error cometido en el caso de que el *mapping de deformaciones* sea más ajustado a la hipótesis de elasticidad lineal:

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}(15 + 5X_1 + 10^{-3}X_2) \\ \frac{1}{5}(10 + 5.05X_2) \end{bmatrix}$$

Aplicando la expresión (2.8) obtenemos el gradiente de deformaciones:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 1.01 \end{bmatrix}$$

Con la ecuación (2.10) tenemos que el *Right Cauchy-Green deformation tensor*  $\mathbf{C}$  es:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 1.01 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 1.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 10^{-4} \\ 2 \cdot 10^{-4} & 1.0201 \end{bmatrix}$$

Calculamos el tensor *Green-Lagrange*  $\mathbf{E}$  y el tensor de pequeñas deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$  mediante las expresiones (2.11) y (2.25) respectivamente:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 10^{-4} \\ 2 \cdot 10^{-4} & 1.0201 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \cdot 10^{-4} \\ 1 \cdot 10^{-4} & 0.01005 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left( (\mathbf{F} - \mathbf{I})^T + (\mathbf{F} - \mathbf{I}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 1.01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^T + \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 1.01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 10^{-4} \\ 10^{-4} & 10^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En este caso coinciden todos los términos de los tensores excepto los  $a_{22}$ . El error relativo cometido en este caso es:

$$\beta = \frac{|10^{-2} - 1.005 \cdot 10^{-2}|}{1.005 \cdot 10^{-2}} \cdot 100 = 0.498\%$$

En conclusión, vemos que para el caso en el que se produzcan pequeñas deformaciones el tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es una buena aproximación del tensor  $\mathbf{E}$ .

## 2.5. Descomposición espectral de $\boldsymbol{\varepsilon}$

El tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  definido en la expresión (2.23) es simétrico, ya que, como podemos comprobar, su traspuesta coincide con él mismo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^T &= \left( \frac{1}{2} (\nabla_0 \mathbf{u}^T + \nabla_0 \mathbf{u}) \right)^T \\ &= \frac{1}{2} ((\nabla_0 \mathbf{u}^T)^T + \nabla_0 \mathbf{u}^T) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_0 \mathbf{u}^T + \nabla_0 \mathbf{u}) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Por ello, este tensor admite una descomposición espectral que nos permite obtener sus valores propios  $\varepsilon_\alpha$  y sus vectores propios  $\mathbf{n}_\alpha$ , siendo estos últimos unitarios y ortogonales entre sí. La descomposición espectral tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^n \varepsilon_\alpha \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \qquad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j \qquad (2. 27)$$

La descomposición espectral del tensor de deformaciones es de gran importancia en el contexto de fractura, pues permite identificar tracciones y compresiones a lo largo de las direcciones principales, y por tanto, introducir distintos criterios de fractura en función del estado de deformación del material. Esto es especialmente útil cuando el comportamiento del material respecto de la fractura depende del estado de deformaciones. Un ejemplo es el hormigón, cuya resistencia a fractura en tracción es muy inferior con respecto a un estado de compresión.

**Ejemplo 4:**

En el Ejemplo 3 obtuvimos el siguiente tensor de pequeñas deformaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 10^{-4} \\ 10^{-4} & 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Los valores propios de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  son,

$$\varepsilon_1 = 1.0001 \cdot 10^{-2}$$

$$\varepsilon_2 = -1 \cdot 10^{-6}$$

y los vectores propios,

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} 9.995 \cdot 10^{-3} \\ 0.995 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} -0.999 \\ 9.998 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

El valor propio  $\varepsilon_1$ , de signo positivo, nos indica que en la dirección principal  $\mathbf{n}_1$  tenemos un cambio de longitud relativo positivo; mientras que el valor propio  $\varepsilon_2$ , de signo negativo, nos indica que en la dirección principal  $\mathbf{n}_2$  tenemos un cambio de longitud relativo negativo.

## 3. LEY CONSTITUTIVA EN ELASTICIDAD LINEAL ISÓTROPA

### 3.1. Energía elástica

Para el caso de elasticidad lineal isótropa (mismo comportamiento en todas las direcciones), definimos la **energía elástica por unidad de volumen**  $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})$  como,

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 \quad (3.1)$$

Donde  $\lambda$  es el primer módulo de Lamé, el cual está relacionado con cambios volumétricos, y  $\mu$  es el segundo módulo de Lamé o módulo de cizalladura, el cual informa sobre la resistencia a cortante del material. Estos módulos de Lamé están relacionados con el módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ , los cuales dependen de la naturaleza del material a estudiar, es decir:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.2)$$

Por otro lado,  $\operatorname{tr}$  es el operador traza. Su cálculo se realiza sumando las componentes de la diagonal principal de la matriz:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1} A_{ii} \quad (3.3)$$

Aplicando el operador traza al tensor de pequeñas deformaciones, en el caso bidimensional, obtenemos:

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \operatorname{tr} \left( \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \right) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \quad (3.4)$$

Sustituyendo la expresión (3.2) en (3.1) nos queda:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{E}{2(1+\nu)} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{Ev}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 \quad (3.5)$$

### 3.2. Tensor de tensiones de Cauchy

Entendemos por ley constitutiva a la relación entre el **tensor de tensiones de Cauchy**  $\boldsymbol{\sigma}$  y el tensor de pequeñas deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , es decir:

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.6)$$

Esta relación viene dada por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.7)$$

Por lo tanto, derivando la expresión (3.1) respecto a  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , el tensor de tensiones de Cauchy queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left( \mu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 \right) \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 \\ &= \mu \frac{\partial(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}))}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\partial(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned}\quad (3.8)$$

El término  $\frac{\partial(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}))}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  es una matriz, y toda matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se puede escribir como:

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.9)$$

Si  $n=2$ , entonces  $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Por lo tanto,

$$\mathbf{A} = \frac{\partial(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}))}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad A_{ij} = \frac{\partial(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}))}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.10)$$

Luego podemos concluir que:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = A_{11} + A_{22} = A_{ij} \delta_{ij} = A_{ii} \quad (3.11)$$

El producto  $\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}$  se puede escribir como:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon})_{pq} = (\varepsilon_{pm} \varepsilon_{mq}) \quad (3.12)$$

Y como sabemos que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es simétrico, la ecuación (3.12) se puede expresar tal que así:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon})_{pq} = (\varepsilon_{pm} \varepsilon_{qm}) \quad (3.13)$$

Entonces,

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon})_{pq} = (\varepsilon_{pm} \varepsilon_{qm}) \delta_{pq} = \varepsilon_{pm} \varepsilon_{qm} = \varepsilon_{pm}^2 \quad (3.14)$$

En consecuencia, nos queda que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \frac{\partial \varepsilon_{pm}^2}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\varepsilon_{pm} \frac{\partial \varepsilon_{pm}}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\varepsilon_{pm} \delta_{pi} \delta_{mj} \\ \frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}} &= 2\varepsilon_{ij}\end{aligned}\quad (3.15)$$

Finalmente,

$$\frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = 2(\varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = 2\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.16)$$

En cuanto al desarrollo del término  $\frac{\partial(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ ,

$$\frac{\partial(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))}{\partial \varepsilon_{ij}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.17)$$

Siendo,

$$\frac{\partial(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial(\varepsilon_{pq} \delta_{pq})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial(\varepsilon_{pp})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{pi} \delta_{pj} = \delta_{ij} \quad (3.18)$$

Así pues,

$$\frac{\partial(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{I} \quad (3.19)$$

Podemos establecer la ley constitutiva que relaciona el tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  y el tensor de pequeñas deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sustituyendo las expresiones (3.15) y (3.19) en la ecuación (3.8), quedando lo siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} \quad (3.20)$$

### Ejemplo 5:

Considerando el tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  obtenido en el ejemplo 3,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 10^{-4} \\ 10^{-4} & 10^{-2} \end{bmatrix}$$

calcularemos el tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .

La traza del tensor de pequeñas deformaciones es:

$$\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 + 10^{-2} = 10^{-2}$$

Aplicando la expresión (3.20),

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \begin{bmatrix} 0 & 10^{-4} \\ 10^{-4} & 10^{-2} \end{bmatrix} + 10^{-2} \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos a considerar un acero cuyo módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson son:

$$E \approx 210 \text{ GPa} = 210 \cdot 10^9 \text{ Pa} \quad \nu = 0.3$$

Calculamos el primer y segundo parámetro de Lamé mediante las expresiones (3.2):

$$\lambda = \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 0.3}{(1 + 0.3)(1 - 2 \cdot 0.3)} = 121.15 \text{ GPa} \quad \mu = \frac{210 \cdot 10^9}{2(1 + 0.3)} = 80.77 \text{ GPa}$$

Sustituyendo estos valores en el tensor de tensiones de Cauchy queda:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1.2115 & 0.01615 \\ 0.01615 & 2.8269 \end{bmatrix}$$

Podemos obtener sus autovalores:

$$\sigma_1 = 2.827 \text{ GPa} \quad \sigma_2 = 1.211 \text{ GPa}$$

Y sus direcciones principales:

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} 9.998 \cdot 10^{-3} \\ 0.999 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} -0.999 \\ 9.996 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Dado que estamos considerando que el material es isótropo, las direcciones principales de tensión coinciden con las direcciones principales de deformación obtenidas en el ejemplo 4.

### 3.3. Tensor de elasticidad

Un tensor de gran relevancia física que encapsula las propiedades materiales de un material es el llamado **tensor de elasticidad  $\mathcal{C}$** . La expresión de dicho tensor es:

$$\mathcal{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.21)$$

Sustituyendo la expresión del tensor de tensiones de Cauchy (3.20) en la ecuación anterior obtenemos la clásica expresión del tensor de elasticidad  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C} = 2\mu \mathfrak{I}^{sym} + \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad \mathfrak{I}^{sym} = \frac{1}{2} (\mathfrak{I} + \mathfrak{I}^T) \quad (3.22)$$

Donde,

$$\mathfrak{I}_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \quad \mathfrak{I}_{ijkl}^T = \delta_{il}\delta_{ju} \quad (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{ul} \quad (3.23)$$

### 3.4. Ecuación de equilibrio en elasticidad lineal

Recordemos el sólido descrito en el capítulo 2, cuyo movimiento entre las configuraciones Lagrangiana y Eurliana está dado en la Figura 3.1:

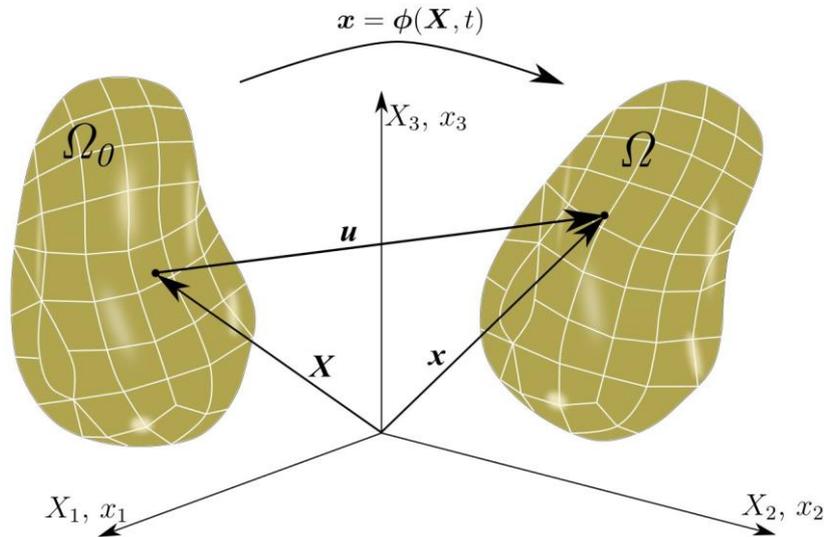


Figura 3. 1. Movimiento entre las configuraciones Lagrangiana y Eurliana

La Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) que gobierna el comportamiento del sólido  $\Omega_0$  se corresponde con la conservación de cantidad de movimiento o equilibrio traslacional, y es la siguiente:

$$\nabla_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{f} = 0 \quad (3.24)$$

Si multiplicamos por  $\delta \mathbf{u}$  (*función test*) y aplicamos integración por partes obtenemos la forma débil asociada a la ecuación de equilibrio (3.24):

$$D\Pi(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}] = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_0 : \nabla \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad (3.25)$$

Donde  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{t}$  representan las fuerzas que actúan sobre el sólido por unidad de volumen y por unidad de superficie respectivamente.

Es posible demostrar que la forma débil en (3.25) es en realidad el punto crítico o el mínimo del siguiente funcional de energía:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, dA = 0 \quad (3.26)$$

La primera integral representa la **energía interna**, mientras que las dos últimas representan la **energía asociada a las fuerzas externas**.

Aplicando integración por partes y el teorema de la divergencia en la forma débil (3.25) se obtiene de hecho la EDP en (3.24), que volvemos a expresar a continuación junto con las condiciones de contorno asociadas:

$$\begin{aligned} \nabla_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{f} &= 0 & \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t} & \text{en } \partial\Omega_N \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* & \text{en } \partial\Omega_D \end{aligned} \quad (3.27)$$

Donde  $\partial\Omega_N$  y  $\partial\Omega_D$  se refieren a la parte del contorno  $\partial\Omega$  donde se aplican condiciones de contorno Neumann y de Dirichlet respectivamente. En esta última se aplica un desplazamiento impuesto  $\mathbf{u}^*$ .

De esta forma observamos la relación existente entre la forma fuerte (3.27) y la forma débil (3.25), y que en realidad, la EDP del problema proviene de la minimización energética en ecuación (3.26).

## 4. MECÁNICA DE FRACTURA

El estudio de la propagación de la fractura en este proyecto se realizará por medio de la aproximación de la fractura mediante el método *phase-field*. Para explicar esta formulación, inicialmente desarrollaremos el modelo unidimensional.

### 4.1. Problema unidimensional de fractura

Consideremos la barra  $\Omega$  extendida infinitamente en la dirección del eje  $x$  (Figura 4.1), a la cual se le aplica una fuerza suficiente para romper con un área de fractura  $\Gamma$ .

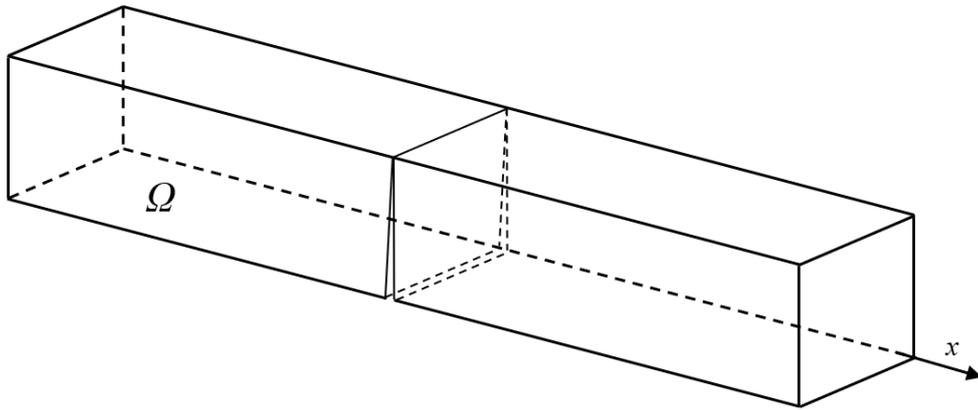


Figura 4. 1. Barra extendida infinitamente sobre el eje  $X$

Asumiendo que la barra rompe en la posición  $x=0$ , podemos definir un parámetro  $s$  que nos indique si el material está fracturado o no. El parámetro *phase-field*  $s$  viene definido por:

$$s(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (4. 1)$$

Por lo tanto, cuando  $s = 1$ , diremos que el material está fracturado y, cuando  $s = 0$ , el material lo no estará. La representación de este parámetro es la siguiente:

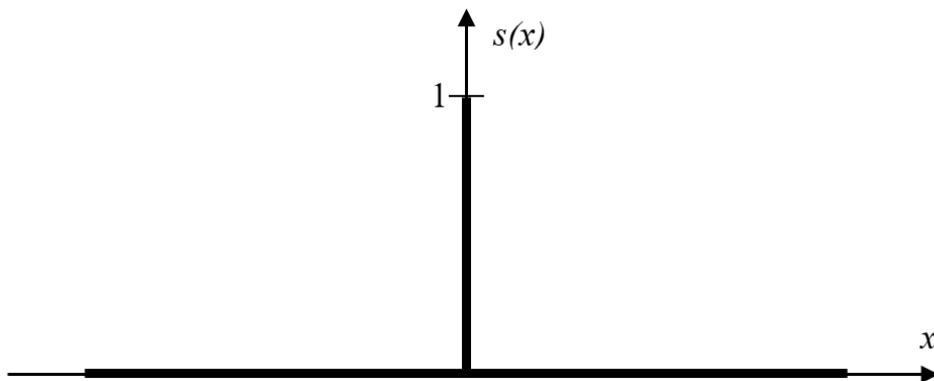


Figura 4. 2. Representación parámetro  $s(x)$

Sin embargo, esta expresión (4.1) no es derivable como podemos observar en la Figura 4.2, por lo que se propone realizar una regularización del parámetro  $s$ , la cual viene dada por la siguiente expresión:

$$s(x) = e^{-\frac{|x|}{l}} \quad (4.2)$$

La representación de la expresión (4.2) se puede observar en la Figura 4.3:

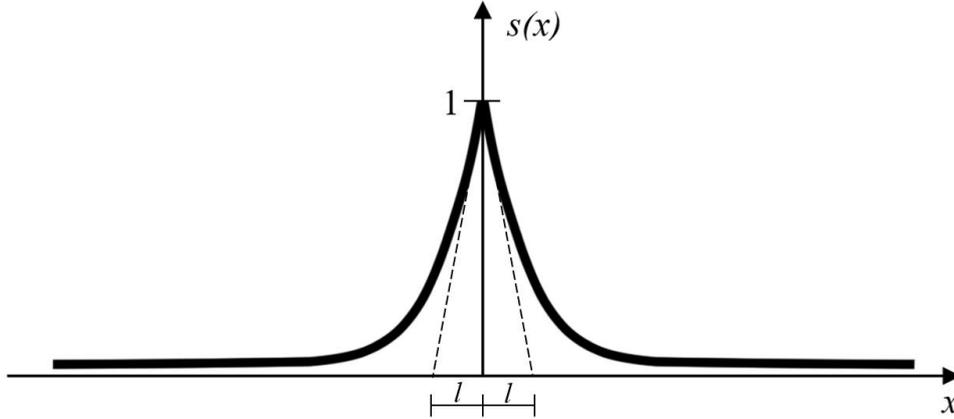


Figura 4.3. Representación parámetro  $s(x)$  regularizado

Cuanto más próximo a 0 sea el **parámetro de escala  $l$**  de la expresión (4.2), mayor será la similitud con la fractura real (expresión (4.1)). Sin embargo, debemos tomar un valor óptimo que haga que la simulación se aproxime lo máximo posible al caso real y, además, que nos permita realizar elementos finitos, ya que un valor demasiado pequeño de  $l$  puede provocar un alto coste computacional.

Esta expresión exponencial (4.2) tiene las siguientes características:

$$s(0) = 1 \quad s(\pm\infty) = 0 \quad (4.3)$$

Podemos observar que la expresión regularizada del parámetro  $s$  (4.2) permite la existencia de valores entre 0 y 1, los cuales corresponderían a un determinado estado de dañado. Dicha expresión (4.2) es la solución de la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$\begin{aligned} s(x) - l^2 s''(x) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ s(\pm\infty) &= 0 \\ s(0) &= 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

La condición de contorno  $s(\pm\infty) = 0$  se puede escribir como  $s'(x) = 0$  en  $\partial\Omega$  (es decir, en  $x = \pm\infty$ ). Por lo tanto, la EDO queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} s(x) - l^2 s''(x) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ s'(x) &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \\ s(0) &= 1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

### Comentario 1: Naturaleza variacional del problema de fractura.

Se puede demostrar que la ecuación (4.5) es el punto crítico del siguiente funcional energético,

$$I(s) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (s^2 + l^2 s'^2) dV \quad (4.6)$$

con lo que se puede plantear el problema de fractura como un problema de minimización energética.

El punto crítico de (4.6) es:

$$\begin{aligned} DI[\delta s] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (2s Ds[\delta s] + 2l^2 s' Ds'[\delta s]) dV \\ &= \int_{\Omega} (s\delta s + l^2 s' \delta s') dV = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$Df[\delta s]$  representa la derivada direccional de  $f$  en la dirección de  $\delta s$ , es decir,

$$Df[\delta s] = \left. \frac{d}{d\varepsilon} f(s + \varepsilon \delta s) \right|_{\varepsilon=0} \quad (4.8)$$

El producto  $s' \delta s$  de la expresión (4.7) podemos expresarlo como:

$$s' \delta s = \frac{ds}{dx} \frac{d\delta s}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{ds}{dx} \delta s \right) - \frac{d^2 s}{dx^2} \delta s \quad (4.9)$$

Sustituyendo (4.9) en (4.7) nos queda que:

$$DI[\delta s] = \int_{\Omega} s\delta s dV + \int_{\Omega} l^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{ds}{dx} \delta s \right) dV - \int_{\Omega} l^2 \frac{d^2 s}{dx^2} \delta s dV = 0 \quad (4.10)$$

Haciendo uso del teorema de la divergencia de Gauss en la expresión (4.10) obtenemos:

$$DI[\delta s] = \int_{\Omega} s\delta s dV + \int_{\partial\Omega} l^2 \frac{ds}{dx} \delta s da - \int_{\Omega} l^2 \frac{d^2 s}{dx^2} \delta s dV = 0 \quad (4.11)$$

Atendiendo a la condición de contorno de la expresión (4.5), el segundo término es nulo, por lo que finalmente tenemos:

$$\begin{aligned} DI[\delta s] &= \int_{\Omega} s\delta s dV - \int_{\Omega} l^2 \frac{d^2 s}{dx^2} \delta s dV = 0 \\ &= \int_{\Omega} (s - l^2 s'') \delta s dV = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

## Comentario 2: Sentido físico del funcional $I(s)$ .

Por otro lado, podemos comprobar el sentido físico de  $I(s)$  sustituyendo  $s(x) = e^{-\frac{|x|}{l}}$  en dicho funcional:

$$\begin{aligned} I\left(s = e^{-\frac{x}{l}}\right) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (s^2 + l^2 s'^2) dV \\ &= \frac{\Gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (s^2 + l^2 s'^2) dx \\ &= \frac{\Gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left(e^{-\frac{x}{l}}\right)^2 + \frac{l^2 \left(e^{-\frac{x}{l}}\right)^2}{l^2} \right) dx \\ &= \Gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{x}{l}}\right)^2 dx = \Gamma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x}{l}} dx \\ &= 2\Gamma \int_0^{\infty} e^{-\frac{2x}{l}} dx \\ &= 2\Gamma \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\frac{2x}{l}} dx \end{aligned} \quad (4.13)$$

Donde,

$$\int e^{-\frac{2x}{l}} dx = -\frac{l}{2} e^{-\frac{2x}{l}} \quad (4.14)$$

Entonces,

$$I\left(s = e^{-\frac{x}{l}}\right) = 2\Gamma \left(-\frac{l}{2}\right) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{2t}{l}} - 1\right) = -\Gamma l \left(\frac{1}{\infty} - 1\right) = \Gamma l \quad (4.15)$$

Por lo tanto, el funcional  $I\left(s = e^{-\frac{x}{l}}\right)$  está relacionado con el área de fractura  $\Gamma$ . Podemos definir el funcional  $\Gamma_s(s)$ , el cual tiene la siguiente forma:

$$\Gamma(s) = \frac{I(s)}{l} = \frac{1}{2l} \int_{\Omega} (s^2 + l^2 s'^2) dV \quad (4.16)$$

Si  $s = e^{-\frac{|x|}{l}}$  tenemos que,

$$\Gamma_s\left(s = e^{-\frac{x}{l}}\right) = \Gamma \quad (4.17)$$

Por lo que el funcional  $\Gamma_s$  evaluado en  $s = e^{-\frac{|x|}{l}}$  coincide con el área de fractura.

## 4.2. Extensión multidimensional

En este apartado extenderemos la formulación unidimensional anterior al caso multidimensional (Figura 4.4).

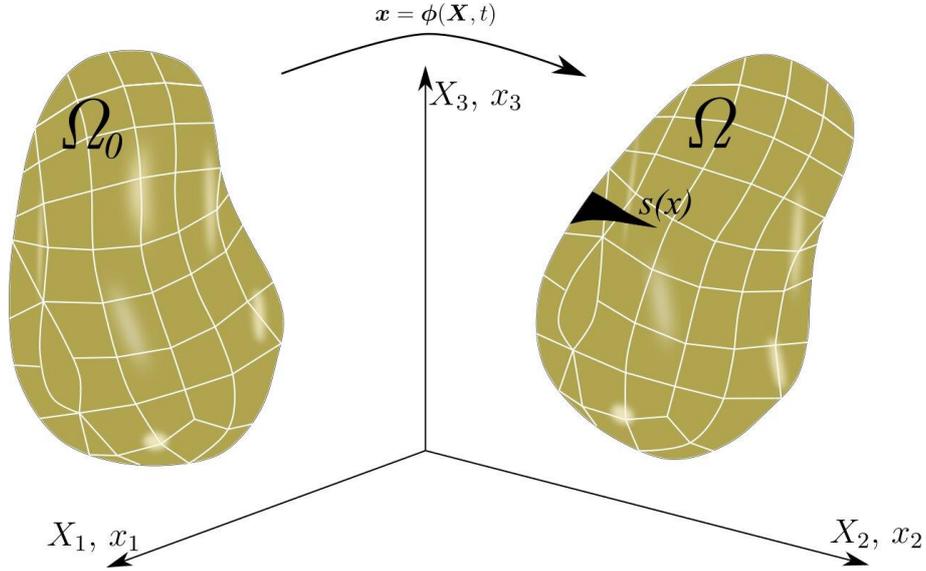


Figura 4. 4. Fractura multidimensional

Para el caso multidimensional, el funcional  $\Gamma_s$  es:

$$\Gamma_s(s) = \frac{1}{2l} \int_{\Omega} (s^2 + l^2 \nabla s \cdot \nabla s) dV \quad (4.18)$$

Siendo  $\nabla s$  el gradiente de  $s$ , es decir:

$$\nabla s = \left( \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y} \right) \quad (2D)$$

$$\nabla s = \left( \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial z} \right) \quad (3D) \quad (4.19)$$

El punto crítico del funcional  $\Gamma_s$  (4.18) será:

$$\begin{aligned} D\Gamma_s(s)[\delta s] &= \frac{1}{2l} \int_{\Omega} D(s^2 + l^2 \nabla s \cdot \nabla s)(\delta s) dV \\ &= \frac{1}{2l} \int_{\Omega} (2s \delta s + 2l^2 \nabla s \cdot \nabla \delta s) dV \\ &= \frac{1}{l} \int_{\Omega} s \delta s + l^2 (\nabla s \cdot \nabla \delta s) dV \end{aligned} \quad (4.20)$$

El producto  $\nabla s \cdot \nabla \delta s$  lo podemos expresar como:

$$\nabla s \cdot \nabla \delta s = \frac{\partial s}{\partial x_i} \frac{\partial \delta s}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial s}{\partial x_i} \delta s \right) - \frac{\partial^2 s}{\partial x_i^2} \delta s \quad (4.21)$$

Por lo tanto, sustituyendo (4.21) en (4.20) llegamos a:

$$\int_{\Omega} l^2 (\nabla s \cdot \nabla \delta s) dV = \int_{\Omega} l^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial s}{\partial x_i} \delta s \right) dV - \int_{\Omega} l^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x_i^2} \delta s dV \quad (4.22)$$

Haciendo uso del teorema de divergencia de Gauss en (4.22) obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} l^2 (\nabla s \cdot \nabla \delta s) dV &= \int_{\partial\Omega} l^2 \frac{\partial s}{\partial x_i} \delta s n_i dA - \int_{\Omega} l^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x_i^2} \delta s dV \\ &= \int_{\partial\Omega} l^2 (\nabla s \cdot \mathbf{n}) dA - \int_{\Omega} l^2 \Delta s \delta s dV \end{aligned} \quad (4.23)$$

Sustituyendo lo obtenido en la expresión (4.20) tenemos que:

$$\begin{aligned} D\Gamma_s(s)[\delta s] &= \frac{1}{l} \int_{\Omega} s \delta s dV + \int_{\partial\Omega} l^2 (\nabla s \cdot \mathbf{n}) dA - \int_{\Omega} l^2 \Delta s \delta s dV \\ &= \frac{1}{l} \int_{\Omega} (s - l^2 \Delta s) \delta s dV - l \int_{\partial\Omega} (\nabla s \cdot \mathbf{n}) dA \end{aligned} \quad (4.24)$$

Al igual que para el caso unidimensional, teniendo en cuenta la condición de contorno, el segundo término es nulo, por lo que nos queda finalmente:

$$D\Gamma_s(s)[\delta s] = \frac{1}{l} \int_{\Omega} (s - l^2 \Delta s) \delta s dV \quad (4.25)$$

En conclusión, la Ecuación en Derivadas Parciales (forma fuerte) que gobierna la fractura en el caso multidimensional es:

$$\begin{aligned} s - l^2 \Delta s &= 0 & \text{en } \Omega \\ \nabla s \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.26)$$

### 4.3. Problema de fractura acoplado

El problema de fractura que vamos a resolver en este proyecto lo obtenemos como resultado de minimizar este funcional de energía:

$$\Pi(x) = \int_{\Omega} \Psi(\varepsilon) dV + \int_{\Gamma(x)} G_c d\Gamma(x) \quad (4.27)$$

El término  $G_c$  es la energía de fractura, es decir, la energía necesaria para que un material fracture, mientras que  $\Gamma(x)$  es la superficie de fractura. Como hemos visto anteriormente, esta superficie de fractura podemos sustituirla por el funcional  $\Gamma_s(s(x))$ , quedando la segunda integral de (4.27) como:

$$\begin{aligned} \int G_c d\Gamma(x) &= G_c \int d\Gamma(x) \approx G_c \Gamma_s(s) \\ &= \frac{G_c}{2l} \int (s^2 + l^2 \nabla s \cdot \nabla s) dV \end{aligned} \quad (4.28)$$

Debido a la regularización de la fractura real, el parámetro  $s$  tomará valores comprendidos entre 0 y 1. Esto significa que el material puede no estar totalmente fracturado, pero sí presentar un daño, de manera que debemos debilitar el material cuando se presente un daño en este. Para llevar esto a cabo penalizamos la energía elástica mediante una **función de degradación  $g(s)$** , la cual tiene que satisfacer estas condiciones:

$$g(s = 0) = 1 \quad g(s = 1) = 0 \quad g'(s = 1) = 0 \quad (4. 29)$$

Unas funciones que cumplen estas condiciones son:

$$g(s) = (1 - s)^2 \quad g(s) = (2 - a_g)(s - 1)^3 + (3 - a_g)(s - 1)^2 \quad (4. 30)$$

En la Figura 4.5. podemos observar la curva a), asociada a la función cuadrática, y las curvas b), que son las asociadas a la función cúbica. Para el caso b), podemos observar tres curvas diferentes dependiendo del valor de  $a_g$ . Dichos valores son 0.1 (azul), 0.5 (rojo) y 1 (naranja), que son los que usaremos a la hora de realizar las simulaciones.

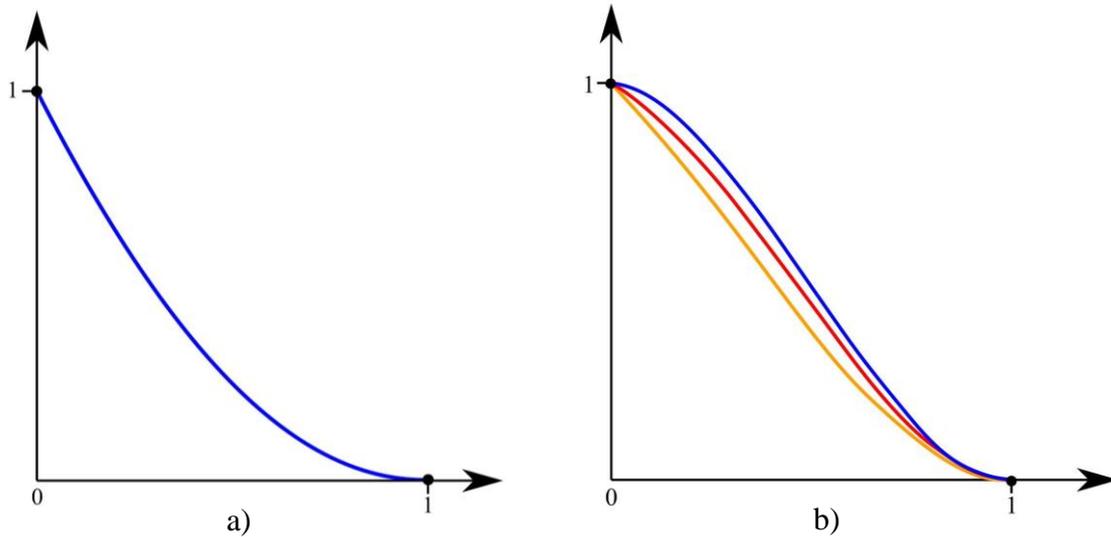


Figura 4. 5. Funciones de degradación  $g(s)$  cuadrática a) y  $g(s)$  cúbica b)

Si consideramos que  $\Psi_0$  es la energía elástica en su estado inicial, es decir, cuando el material no está dañado,

$$\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 \quad (4. 31)$$

Entonces la **energía elástica degradada  $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, s)$**  será:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, s) = (g(s) + k) \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4. 32)$$

La aplicación de (3.7) a (4.32) permite obtener el tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$ , definido como:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, s) = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, s)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (g(s) + k) \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4. 33)$$

El parámetro  $k$  tiene un valor muy pequeño cuya inclusión se debe a evitar que el material tenga una rigidez nula cuando la fractura sea total. De esta manera se evitan problemas de condicionamiento en el sistema de ecuaciones.

El problema de fractura será planteado como la minimización con respecto a  $\mathbf{u}$  y  $s$  del siguiente funcional:

$$\Pi(\mathbf{u}, s) = \underbrace{\int_{\Omega} (g(s) + k) \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) dV}_{\text{Energía interna}} + \underbrace{\frac{G_c}{2l} \int_{\Omega} (s^2 + l^2 \nabla s \cdot \nabla s) dV}_{\text{Energía de fractura}} - \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dA}_{\text{Energía fuerzas externas}} \quad (4.34)$$

Obteniendo los puntos críticos del funcional (4.34) tenemos que las dos formas débiles asociadas al problema de fractura son:

$$D\Pi(\mathbf{u}, s)[\delta\mathbf{u}] = \int_{\Omega} (g(s) + k) \sigma_0 : \nabla \delta\mathbf{u} dV - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} dA = 0 \quad (4.35a)$$

$$D\Pi(\mathbf{u}, s)[\delta s] = \int_{\Omega} g'(s) \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \delta s dV + \frac{G_c}{l} \int_{\Omega} (s \delta s + l^2 \nabla s \cdot \nabla \delta s) dV = 0 \quad (4.35b)$$

Aplicando integración por partes y el teorema de la divergencia en las formas débiles (4.35a) y (4.35b) se obtienen las Ecuaciones en Derivadas Parciales acopladas (4.36a) y (4.36b), respectivamente, del problema de fractura:

$$\begin{aligned} \nabla_0((g(s) + k)\boldsymbol{\sigma}_0) + \mathbf{f} &= 0 & \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t} & \text{en } \partial\Omega_N \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* & \text{en } \partial\Omega_D \end{aligned} \quad (4.36a)$$

$$\begin{aligned} g'(s) \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{G_c}{l} (s - l^2 \nabla s) &= 0 & \text{en } \Omega \\ \nabla s \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (4.36b)$$

Como vimos en el capítulo 3,  $\partial\Omega_N$  y  $\partial\Omega_D$  se refieren a la parte del contorno  $\partial\Omega$  donde se aplican condiciones de contorno tipo Neumann y Dirichlet respectivamente. En esta última se aplica un desplazamiento impuesto  $\mathbf{u}^*$ .

### Comentario 3: “Anisotropic split”.

Como se comentó en el capítulo 2, hay materiales que ofrecen un comportamiento distinto con respecto a fractura cuando están sometidos a estados de deformación de tracción o de compresión, como por ejemplo el hormigón. Esta distinción de comportamiento frente a fractura puede embeberse en la formulación del problema a través del denominado “*anisotropic split*” de la energía elástica del sólido. Si la fractura ocurre principalmente en tracción, el *anisotropic split* implica la definición de la energía elástica de la siguiente forma:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, s) = (g(s) + k)\Psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + \Psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4.37)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\Psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{\lambda}{2} (\langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_+)^2 + \mu \text{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}_+^2] \\ \Psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{\lambda}{2} (\langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_-)^2 + \mu \text{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}_-^2]\end{aligned}\quad (4.38)$$

Siendo:

$$\langle x \rangle_+ = \frac{(x + |x|)}{2} \quad \langle x \rangle_- = \frac{(x - |x|)}{2} \quad (4.39)$$

Y donde  $\boldsymbol{\varepsilon}_+$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_-$  se calculan siguiendo la descomposición espectral de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en función de sus autovalores positivos y negativos, respectivamente, es decir:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_+ + \boldsymbol{\varepsilon}_- = \sum_{\alpha=1}^n \varepsilon_\alpha \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \\ \boldsymbol{\varepsilon}_+ &= \sum_{\alpha=1}^n \langle \varepsilon_\alpha \rangle_+ \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \quad \boldsymbol{\varepsilon}_- = \sum_{\alpha=1}^n \langle \varepsilon_\alpha \rangle_- \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha\end{aligned}\quad (4.40)$$

Por lo tanto, el tensor de tensiones asociado al *anisotropic split* es:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, s) = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, s)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (g(s) + k) [\lambda \langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_+ \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_+] + \lambda \langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_- \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_- \quad (4.41)$$

En este trabajo no se tendrá en cuenta el comportamiento diferenciado del material frente a tracción o compresión y, por tanto, consideraremos que la tensión  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, s)$  viene dada por la expresión (4.33).

## 5. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

El método utilizado para la resolución de las formas débiles acopladas al problema de fractura (4.35) será el llamado *formulación staggered*. En el apartado a continuación se describirán las características de este método.

### 5.1. Formulación staggered

Dado que tenemos un problema no lineal acoplado, la estrategia de resolución será la llamada *incremental + staggered*. Con este método lo que conseguimos es desacoplar las dos EDP y hacer que sean lineales en cada incremento, es decir, la EDP puramente mecánica (4.36a) lo será si se fija el parámetro  $s$  y la EDP de fractura (4.36b) lo será si se fija el desplazamiento  $\mathbf{u}$ .

Por razones de estabilidad las condiciones de contorno son de **tipo Dirichlet**, es decir evitamos explícitamente el uso de condiciones Neuman dado que la matriz de rigidez del problema se vuelve singular. En una zona del contorno los desplazamientos serán fijos y en otra parte del contorno ordenaremos desplazamientos distintos de cero. Estos últimos desplazamientos serán aplicados de manera incremental, de manera que para un desplazamiento impuesto máximo  $\mathbf{u}^*$  y para un número de incrementos  $N$ , el desplazamiento impuesto correspondiente al incremento  $i$ , desplazamiento  $\mathbf{u}_i$ , será:

$$\mathbf{u}_i = \frac{i}{N} \mathbf{u}^* \quad (5.1)$$

El procedimiento para obtener la solución con este método es el siguiente:

- a) Para un incremento  $i+1$  y fijado el valor del parámetro *phase-field*  $s_i$ , se calcula el campo de desplazamiento  $\mathbf{u}_{i+1}$  asociado a la forma débil puramente mecánica (ecuación 4.35a) de la siguiente forma:

$$D\Pi(\mathbf{u}^i, s^i)[\delta\mathbf{u}] + D^2\Pi(\mathbf{u}^i, s^i)[\delta\mathbf{u}; \Delta\mathbf{u}^{i+1}] = 0 \quad (5.2)$$

Donde:

$$D\Pi(\mathbf{u}^i, s^i)[\delta\mathbf{u}] = \int_{\Omega} (g(s) + k)\sigma_0 : \nabla \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} \, dA \quad (5.3)$$

$$D^2\Pi(\mathbf{u}^i, s^i)[\delta\mathbf{u}; \Delta\mathbf{u}^{i+1}] = \int_{\Omega} (g(s) + k)(\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}_0 : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \, dV \quad (5.4)$$

Siendo:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) \quad (5.5)$$

$\mathbf{C}_0$  para un material isótropo se obtiene como:

$$\mathbf{C}_0 = 2\mu \boldsymbol{\mathfrak{I}}^{sym} + \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad \boldsymbol{\mathfrak{I}}^{sym} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mathfrak{I}} + \boldsymbol{\mathfrak{I}}^T) \quad (5.6)$$

Donde,

$$\mathfrak{I}_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \quad \mathfrak{I}_{ijkl}^T = \delta_{il}\delta_{ju} \quad (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{ul} \quad (5.7)$$

La solución de (5.2) nos permite actualizar el nuevo valor del campo de desplazamientos  $\mathbf{u}^{i+1}$  de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}^{i+1} = \Delta \mathbf{u}^{i+1} + \mathbf{u}^i \quad (5.8)$$

- b) Para el mismo incremento  $i+1$  y fijado el valor de desplazamiento  $u_{i+1}$ , se calcula el nuevo valor del parámetro de *phase-field*  $s_{i+1}$  asociado a la forma débil de fractura (4.35b) tal que así:

$$D\Pi(\mathbf{u}^{i+1}, s^i)[\delta s] + D^2\Pi(\mathbf{u}^{i+1}, s^i)[\delta s; \Delta s^{i+1}] = 0 \quad (5.9)$$

Donde:

$$D\Pi(\mathbf{u}^{i+1}, s^i)[\delta s] = \int_{\Omega} g'(s) \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \delta s \, dV + \frac{G_c}{l} \int_{\Omega} (s \delta s + l^2 \nabla s \cdot \nabla \delta s) \, dV \quad (5.10)$$

$$D^2\Pi[\delta s; \Delta s^{i+1}] = \int_{\Omega} g''(s) \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \delta s \Delta s \, dV + \frac{G_c}{l} \int_{\Omega} (\delta s \Delta s + l^2 \nabla \delta s \cdot \nabla \Delta s) \, dV \quad (5.11)$$

Donde el nuevo campo de *phase-field*  $s^{i+1}$  se obtiene como sigue:

$$s^{i+1} = \Delta s^{i+1} + s^i \quad (5.12)$$

Un ingrediente fundamental en nuestra formulación es la incorporación de la **irreversibilidad de la fractura**. El planteamiento variacional de la fractura presentado en el capítulo 4, permite que la fractura, o mejor dicho, el *phase-field*, pueda recuperarse. Desde un punto de vista matemático, esto implica que una vez que el material ha alcanzado un valor de 1 (estado fracturado), la remisión de la sollicitación externa conllevaría una reducción del *phase-field* hasta un valor de 0. Esto no es naturalmente físico. La razón subyacente tiene que ver con que el fenómeno de fractura es en realidad irreversible, y por lo tanto, ingredientes adicionales deben incorporarse en el planteamiento variacional de la misma. Para ello, en este trabajo hemos decidido incorporar la irreversibilidad de la fractura de manera simple a través de un sencillo *cut-off value*. Esto quiere decir que una vez que ecuación (5.9) es resuelta y el campo de *phase-fields* es actualizado, chequeamos en cada nodo de la malla de *phase-field* el valor del mismo y lo comparamos con respecto al del anterior *load-increment*. Si dicho valor ha decrecido, entonces congelamos el valor del *phase-field* y lo dejamos igual que en el *load-increment* anterior. Esto se expresa matemáticamente a través de la siguiente expresión:

$$s^{i+1} = \max(s^{i+1}, s^i) \quad (5.13)$$

A continuación, mostramos un pequeño pseudo-código del esquema *incremental-staggered* descrito en esta sección y que ha sido implementado en FreeFEM:

```

for (int i=0; i<NumberOfLoadIncrements; i++)
{
//Cálculo incremental del campo de desplazamientos
elasticidad;
u1=u1+du1;
u2=u2+du2;
u3=u3+du3;

sold=s;
//Cálculo incremental valor del campo phase-field
fractura;
s=s+ds;
s=min (s, 1);
s=max (s, 0);
s=max (s, sold);
}

```

```

problem elasticidad ([du1,du2,du3], [v1,v2,v3]) = int3d(Th) (
g(s)*(stress(du1,du2,du3)*epsilonMatrix(v1,v2,v3)))
+int3d(Th) (g(s)*(stress(u1,u2,u3)*epsilonMatrix(v1,v2,v3)))
//Condiciones de contorno
+ on (1, du2=du)
+ on (2, du1=0,du2=0,du3=0)

```

```

problem fractura (ds,vs)= int3d(Th) (FractureDiff(ds,vs) +
gprimaprima(s)*ds*Welastic(u1,u2,u3)*vs)
+ int3d(Th) (FractureDiff(s,vs) +
vs*gprima(s)*Welastic(u1,u2,u3));

```

## 6. IMPLEMENTACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

A continuación se describirán las nociones elementales sobre elementos finitos P1, tanto bidimensional como tridimensionalmente. Estos elementos son los que vamos a utilizar a la hora de resolver el problema.

### 6.1. Elementos finitos P1

Bidimensionalmente son elementos triangulares, mientras que tridimensionalmente los elementos son tanto tetraedros como triángulos. Las funciones de forma parametrizadas respecto a coordenadas de área de cada uno de estos elementos son las que se ilustran en la Figura 6.1.

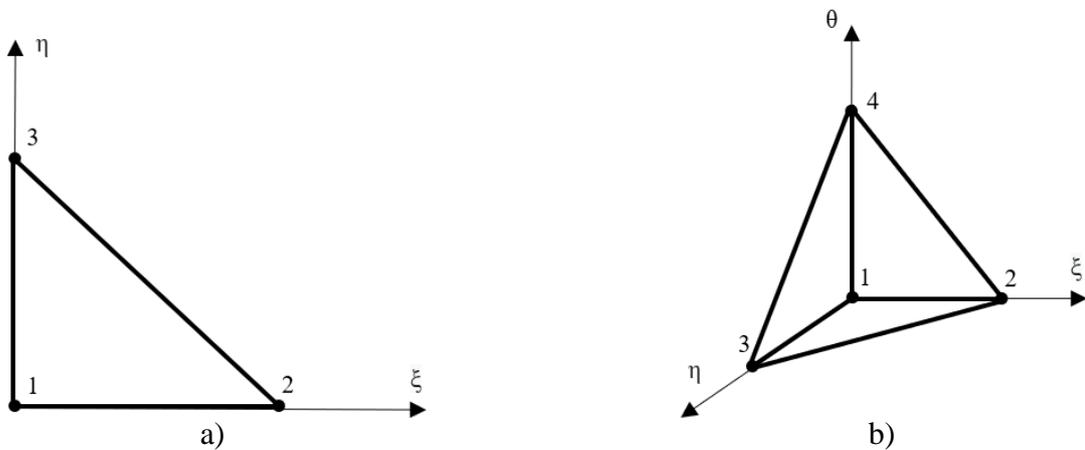


Figura 6. 1. Funciones de forma parametrizadas respecto a coordenadas de área triangulares a) y tetraédricas b)

La expresión y la representación de las funciones de forma para el caso bidimensional podemos observarlas en la expresión (6.1) y en la Figura 6.2, respectivamente.

$$N_1 = 1 - \xi - \eta \quad N_2 = \xi \quad N_3 = \eta \quad (6.1)$$

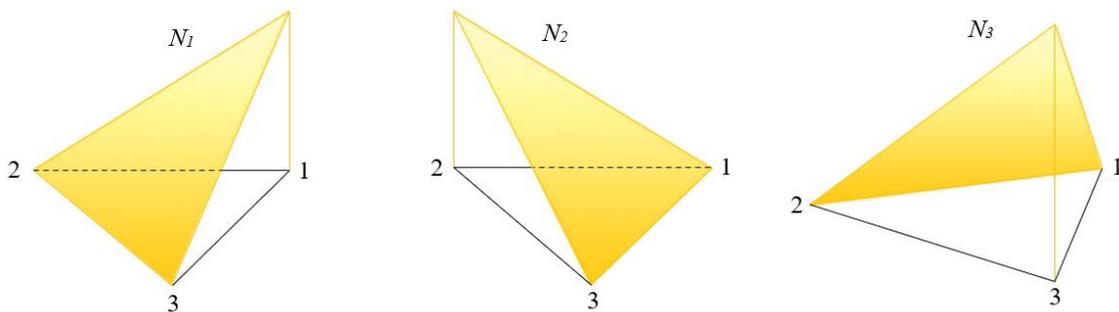


Figura 6. 2. Funciones de forma triangulares

Por otro lado, las funciones de forma para el caso tridimensional tienen la siguiente expresión:

$$N_1 = 1 - \xi - \eta - \theta \quad N_2 = \xi \quad N_3 = \eta \quad N_4 = \theta \quad (6.2)$$

## 6.2. Discretización del problema de fractura: formulación staggered

En este apartado se procederá a la discretización de las ecuaciones (5.2) y (5.9) mediante el uso del método de elementos finitos, concretamente con elementos tipo P1 como hemos expuesto anteriormente. Esto nos lleva a poder expresar los desplazamientos y el *phase-field* en cualquier elemento de la malla en función de sus valores nodales y de las funciones de forma características del elemento P1 de la siguiente forma:

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{N_n} \mathbf{u}^a N^a \quad s = \sum_{a=1}^{N_n} s^a N^a \quad (6.3)$$

Donde  $N_n$  son el número de nodos del elemento P1, concretamente 3 para el caso bidimensional y 4 para el caso tridimensional.

Si observamos las expresiones (5.2) y (5.9) nos damos cuenta de que debemos obtener también las expresiones discretizadas de  $\mathbf{u}$  y de  $s$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \sum_{a=1}^{N_n} \frac{1}{2} (\mathbf{u}^a \otimes \nabla N^a + \nabla N^a \otimes \mathbf{u}^a) \quad (6.4)$$

$$\nabla s = \sum_{a=1}^{N_n} s^a \nabla N^a \quad (6.5)$$

$\nabla N^a$  es el gradiente de la función de forma  $N^a$  del nodo  $a$  con respecto a la configuración espacial (coordenadas físicas). Sin embargo, las funciones de forma  $N^a$  están parametrizadas con respecto a las coordenadas del elemento (coordenadas de área), por lo que para obtener  $\nabla N^a$  hacemos uso de la regla de la cadena:

$$\nabla N^a = \frac{\partial N^a}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^{-T} \left( \frac{\partial N^a}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) \quad (6.6)$$

El término  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}}$  se calcula de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} (\mathbf{X}^b N^b) = \mathbf{X}^b \otimes \frac{\partial N^b}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (6.7)$$

La relación entre coordenadas físicas y coordenadas de área pueden observarse en la Figura 6.3:

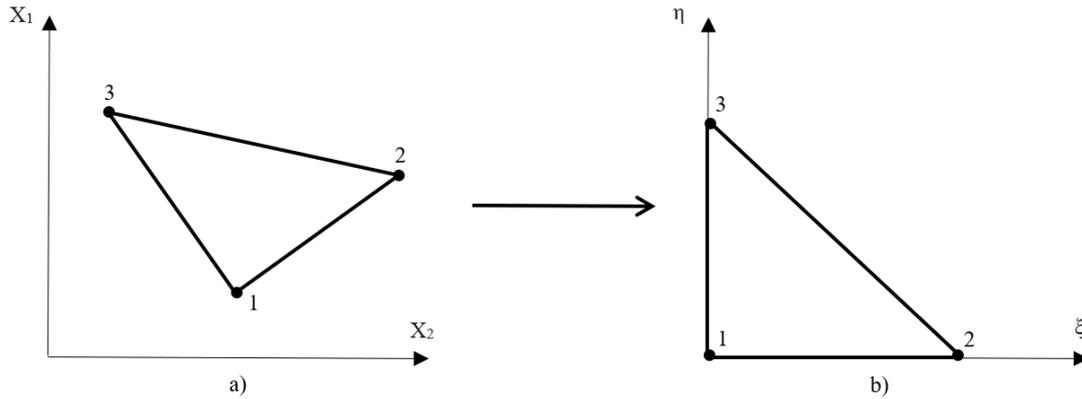


Figura 6. 3. Coordenadas físicas a) y coordenadas de área b)

Prosiguiendo con el desarrollo de discretización, tanto las funciones test  $\delta \mathbf{u}$  y  $\delta s$  como sus gradientes se discretizan igual que  $\mathbf{u}$  y  $s$  en el método de Galerkin:

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{a=1}^{N_n} \delta \mathbf{u}^a N^a \quad \delta s = \sum_{a=1}^{N_n} \delta s^a N^a \quad (6.8)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \delta \mathbf{u} + \nabla \delta \mathbf{u}^T) = \sum_{a=1}^{N_n} \frac{1}{2} (\delta \mathbf{u}^a \otimes \nabla N^a + \nabla N^a \otimes \delta \mathbf{u}^a) \quad (6.9)$$

$$\nabla \delta s = \sum_{a=1}^{N_n} \delta s^a \nabla N^a \quad (6.10)$$

Con estos desarrollos obtenidos podemos comenzar con la discretización de las formas débiles de la *formulación staggered*. Para el caso de la forma débil mecánica (ecuación (5.2)) tenemos que:

$$D\Pi(\mathbf{u}^i, s^i)[\delta \mathbf{u}^a N^a] + D^2\Pi(\mathbf{u}^i, s^i)[\delta \mathbf{u}^a N^a; \Delta \mathbf{u}^{i+1^b} N^b] = 0 \quad (6.11)$$

Donde  $\Delta \mathbf{u}^{i+1^a} = \mathbf{u}^{i+1^a} - \mathbf{u}^{i^a}$ .

Desarrollando el primer término nos queda que:

$$\begin{aligned} D\Pi[\delta \mathbf{u}^a N^a] &= \int_{\Omega} (g(s) + k) \boldsymbol{\sigma}_0 : \frac{1}{2} (\delta \mathbf{u}^a \otimes \nabla N^a + \nabla N^a \otimes \delta \mathbf{u}^a) dV - \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{f} \delta \mathbf{u}^a N^a dV - \int_{\Omega} \mathbf{t} \delta \mathbf{u}^a N^a dV \\ &= \delta \mathbf{u}^a \cdot \left( \int_{\Omega} (g(s) + k) \boldsymbol{\sigma}_0 : \nabla N^a dV - \int_{\Omega} \mathbf{f} N^a dV - \int_{\Omega} \mathbf{t} N^a dV \right) \\ &= \delta \mathbf{u}^a \cdot \mathbf{R}_u^a \end{aligned} \quad (6.12)$$

Donde  $\mathbf{R}_u^a$  representa las componentes del residuo asociadas con los grados de libertad del desplazamiento para el nodo a de un elemento finito de la malla:

$$\mathbf{R}_u^a = \int_{\Omega} (g(s) + k) \boldsymbol{\sigma}_0 : \nabla N^a dV - \int_{\Omega} \mathbf{f} N^a dV - \int_{\Omega} \mathbf{t} N^a dV \quad (6.13)$$

En cuanto al desarrollo del segundo término de la forma débil mecánica:

$$\begin{aligned} D^2 \Pi \left[ \delta \mathbf{u}^a N^a; \Delta \mathbf{u}^{i+1b} N^b \right] &= \int_{\Omega} (g(s) + k) \frac{1}{2} (\delta \mathbf{u}^a \otimes \nabla N^a + \nabla N^a \otimes \delta \mathbf{u}^a) dV : \\ &: \int_{\Omega} \mathbf{c}_{pqrs} \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{u}^{i+1b} \otimes \nabla N^b + \nabla N^b \otimes \Delta \mathbf{u}^{i+1b})_{rs} dV \\ &= \delta \mathbf{u}_p^a \left( \int_{\Omega} (g(s) + k) \nabla N_q^a \nabla N_s^b \mathbf{c}_{pqrs} dV \right) \Delta \mathbf{u}_r^{i+1b} \\ &= \delta \mathbf{u}_p^a \cdot (\mathbf{K}_{uu}^{ab})_{pr} \Delta \mathbf{u}^{i+1b} \end{aligned} \quad (6.14)$$

$(\mathbf{K}_{uu}^{ab})_{pr}$  representa la matriz de rigidez elemental asociado a los grados de libertad de desplazamiento para los nodos a y b de un elemento:

$$(\mathbf{K}_{uu}^{ab})_{pr} = \int_{\Omega} (g(s) + k) \nabla N_q^a \nabla N_s^b \mathbf{c}_{pqrs} dV \quad (6.15)$$

Adoptando una dotación matricial Voigt podemos expresar  $\mathbf{K}_{uu}^{ab}$  tal que así:

$$(\mathbf{K}_{uu}^{ab})_{pr} = \int \mathbf{B}^{aT} \mathbf{D} \mathbf{B}^b dV \quad (6.16)$$

Podemos ver las formas de  $\mathbf{B}^a$  y  $\mathbf{D}$  en la expresión (6.17) para el caso bidimensional y en la expresión (6.18) para el caso tridimensional:

$$\mathbf{B}^a = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^a}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^a}{\partial y} \\ \frac{\partial N^a}{\partial y} & \frac{\partial N^a}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$\mathbf{B}^a = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^a}{\partial x} & & & & & \\ & \frac{\partial N^a}{\partial y} & & & & \\ & & \frac{\partial N^a}{\partial z} & & & \\ \frac{\partial N^a}{\partial y} & \frac{\partial N^a}{\partial x} & & & & \\ & \frac{\partial N^a}{\partial z} & \frac{\partial N^a}{\partial x} & & & \\ \frac{\partial N^a}{\partial z} & & & \frac{\partial N^a}{\partial y} & & \\ & & & & \frac{\partial N^a}{\partial x} & \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

*simétrica*

El ensamblaje sobre todos los elementos de la malla de  $\mathbf{K}_{uu}^{ab}$  y del residuo  $\mathbf{R}_u^a$  permite expresar la forma débil como el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{K}_{uu} \Delta \mathbf{u}^{i+1} = -\mathbf{R}_u \quad (6.19)$$

Donde  $\mathbf{K}_{uu}$  y  $\mathbf{R}_u$  son resultado del ensamblaje realizado sobre la matriz y el residuo respectivamente.

Para el caso de la forma débil de fractura (ecuación (5.9)) tenemos que:

$$D\Pi(\mathbf{u}^{i+1}, s^i)[\delta s^a N^a] + D^2\Pi(\mathbf{u}^{i+1}, s^i)[\delta s^a N^a; \Delta s^{i+1^b} N^b] = 0 \quad (6.20)$$

Donde  $\Delta s^{i+1^a} = s^{i+1^a} - s^{i^a}$ .

Desarrollando el primer término nos queda que:

$$\begin{aligned} D\Pi[\delta s^a N^a] &= \left[ \int_{\Omega} \left( g'(s)\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})N^a + \frac{G_c}{l}(sN^a + l^2\nabla s \cdot \nabla N^a) \right) dV \right] \delta s^a \\ &= \mathbf{R}_s^a \delta s^a \end{aligned} \quad (6.21)$$

Donde  $\mathbf{R}_s^a$  es la componente del *phase-field* del residuo:

$$\mathbf{R}_s^a = \int_{\Omega} \left( g'(s)\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})N^a + \frac{G_c}{l}(sN^a + l^2\nabla s \cdot \nabla N^a) \right) dV \quad (6.22)$$

El desarrollo del segundo término de la forma débil de fractura es el siguiente:

$$\begin{aligned} D^2\Pi[\delta s^a N^a; \Delta s^{i+1^a} N^b] &= \delta s^a \Delta s^{i+1^a} \int_{\Omega} (g''(s)\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})N^a N^b + \\ &+ \frac{G_c}{l}(sN^a N^b + l^2\nabla s \cdot \nabla N^a \cdot \nabla N^b)) dV \\ &= \delta s^a \mathbf{K}_{SS}^{ab} \Delta s^{i+1^a} \end{aligned} \quad (6.23)$$

$\mathbf{K}_{ss}^{ab}$  representa la componente de *phase-field* de la matriz de rigidez asociada a los nodos a y b de un elemento:

$$\mathbf{K}_{ss}^{ab} = \int_{\Omega} \left( g''(s) \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) N^a N^b + \frac{G_c}{l} (s N^a N^b + l^2 \nabla s \cdot \nabla N^a \cdot \nabla N^b) \right) dV \quad (6.24)$$

El ensamblaje sobre todos los elementos de la malla de  $\mathbf{K}_{ss}^{ab}$  y del residuo  $\mathbf{R}_s^a$  permite expresar la forma débil como el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{K}_{ss} \Delta s^{i+1} = -\mathbf{R}_s \quad (6.25)$$

Donde  $\mathbf{K}_{ss}$  y  $\mathbf{R}_s$  son resultado del ensamblaje realizado sobre la matriz y el residuo respectivamente.

## 7. SIMULACIÓN DEL PROBLEMA DE FRACTURA

Con el fin de verificar la validez de la implementación, en este capítulo se realizará la simulación de varios ejemplos, concretamente de tres bidimensionales y tres tridimensionales. El código generado en FreeFem para la resolución de los problemas viene recogido en los Anexos al final de este trabajo.

Las geometrías tridimensionales han sido realizadas en SOLIDWORKS, las cuales han sido exportadas al software Gmsh posteriormente para su mallado.

### 7.1. Cuerpo rectangular

- **Objetivo:** Simulación de un caso sencillo para estudiar la influencia del refinamiento de la malla y del número de incrementos  $N$ .

Este ejemplo consiste en un cuerpo rectangular cuya base inferior está empotrada y, por lo tanto, los desplazamientos están restringidos en ella, mientras que en la base superior aplicaremos un desplazamiento total  $u_d$ . Este estudio lo realizaremos con la  $g(s)$  cuadrática mostrada en el capítulo 4. La geometría y las condiciones de contorno están representadas en la Figura 7.1:



Figura 7. 1. Geometría y condiciones de contorno del ejemplo 1

Los datos necesarios para la resolución del problema están recogidos en la Tabla 7.1:

Dato	Valor
Longitud a	3 m
Longitud b	1 m
Desplazamiento ( $u_d$ )	0.5 m
Módulo de Young ( $E$ )	1 Pa
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.4
Rigidez residual ( $k$ )	$1 \cdot 10^{-5}$
Energía de fractura ( $G_c$ )	$5 \cdot 10^{-4}$ J/m <sup>2</sup>
Parámetro $h$	$0.1/n_x$ m
Parámetro de escala ( $l$ )	$2h$

Tabla 7. 1. Datos del ejemplo 1

Nótese que el módulo de Young tiene un valor excesivamente bajo y para nada realista. Esto se hace con el fin de comprobar si el modelo matemático se lleva a cabo correctamente. Para los ejemplos 3D, los cuales son más ilustrativos, sí se utilizarán unos valores más acordes con los reales.

### 7.1.1. Influencia de la malla

Para estudiar la influencia que tiene la malla en el problema vamos a realizar tres simulaciones con un número de incrementos  $N$ , el cual será de 200 para estos tres casos: La malla a) de 50x150 elementos, la malla b) de 100x300 elementos y la malla c) de 200x600 elementos. Estas tres mallas están representadas en la Figura 7.2:

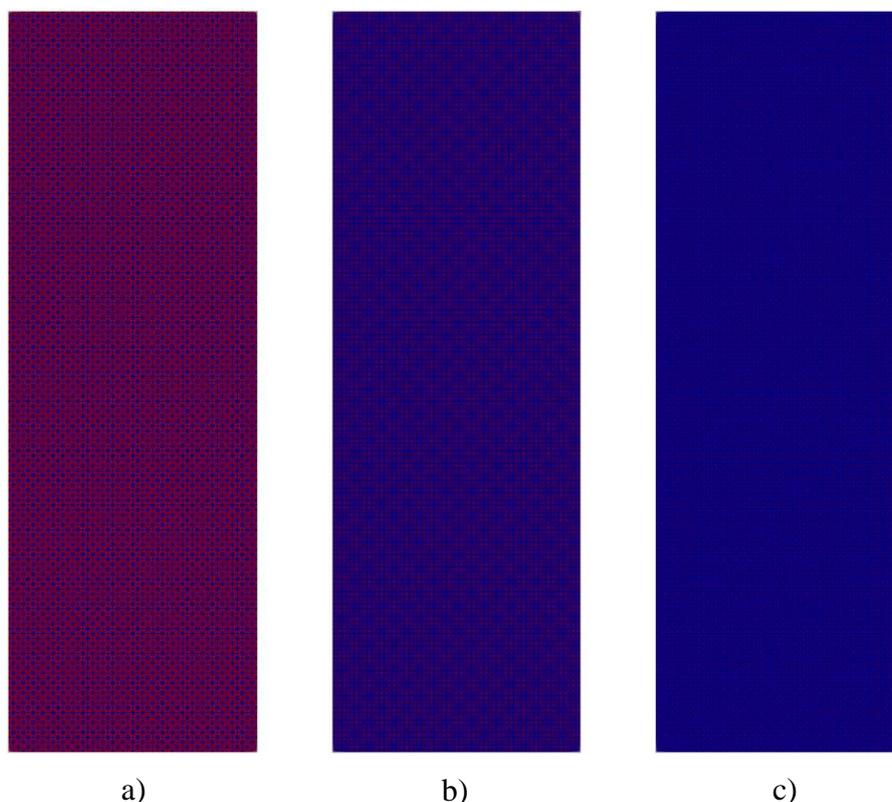


Figura 7. 2. Mallas del ejemplo 1

Dado que el número de incrementos es el mismo para las tres simulaciones, lo que haremos será comparar la propagación de la fractura (*phase-field*) en cada malla en unos determinados  $N_i$ . Esta comparación la podemos observar en las siguientes figuras:

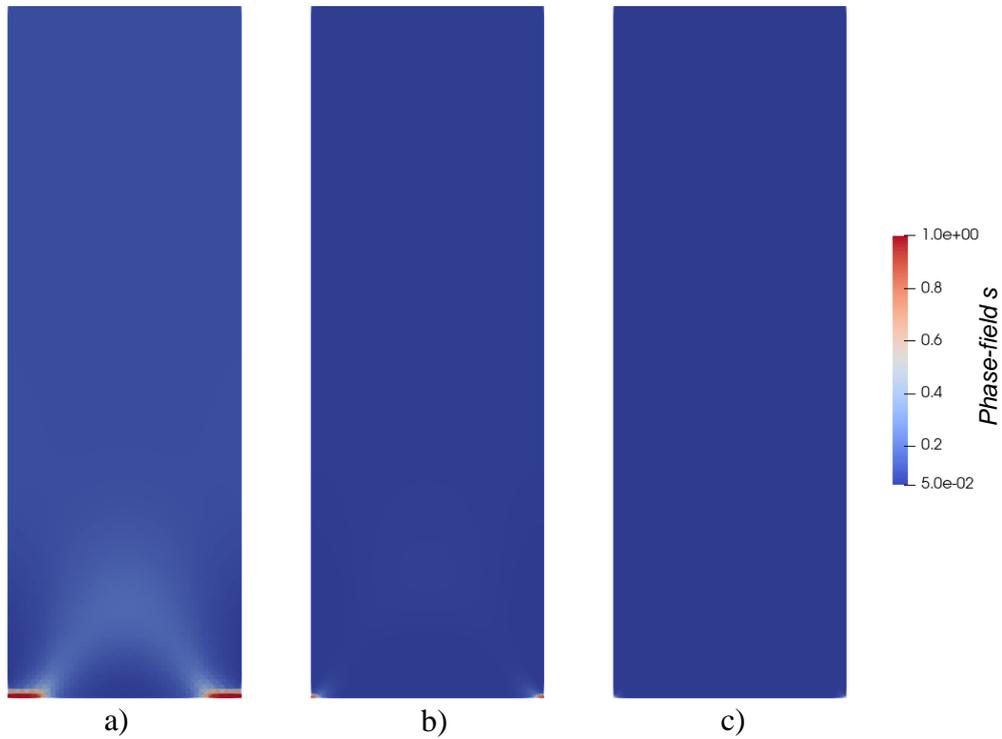


Figura 7. 3. Propagación de la fractura del ejemplo 1 en el incremento 135

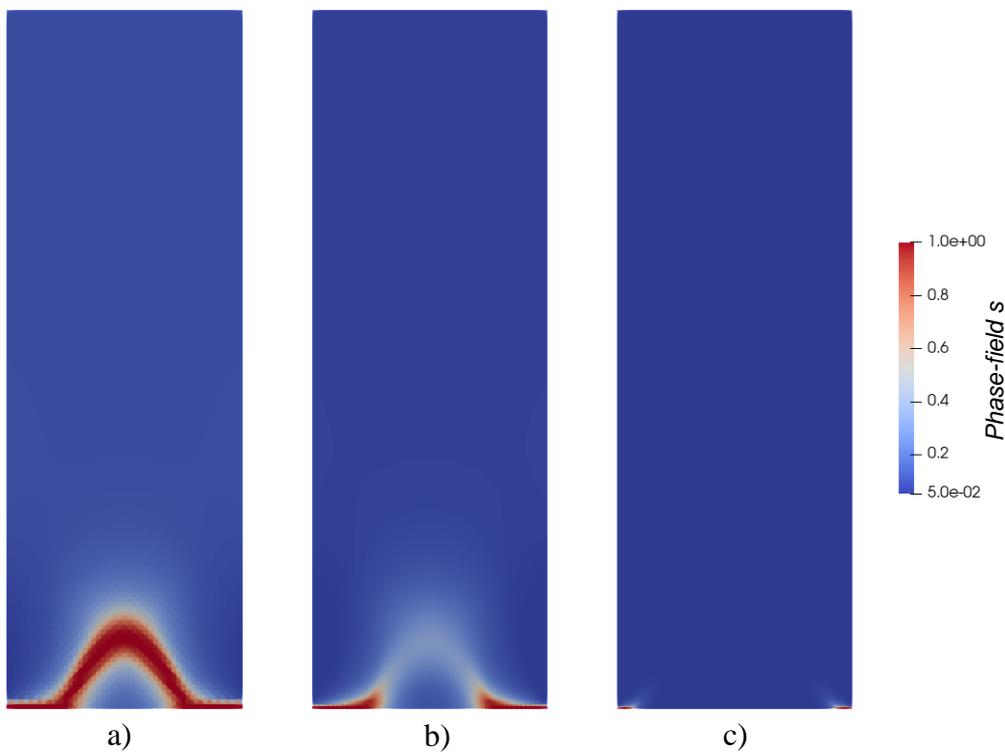


Figura 7. 4. Propagación de la fractura del ejemplo 1 en el incremento 165

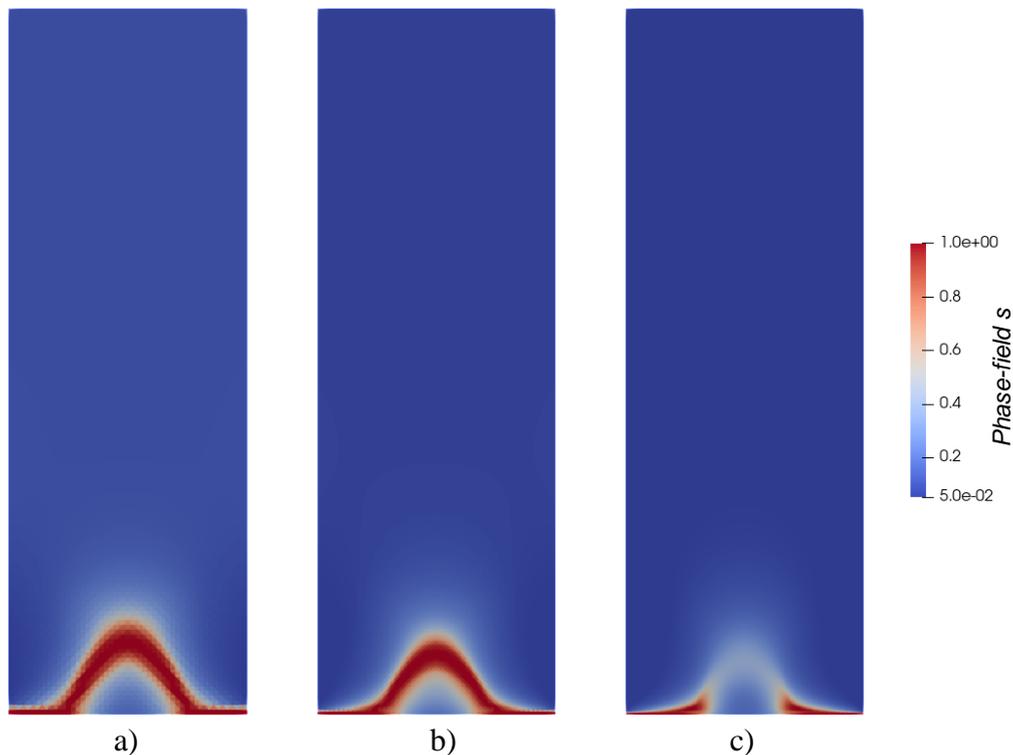


Figura 7. 5. Propagación de la fractura del ejemplo 1 en el incremento 200

Podemos observar en la Figura 7.3 que en la malla a), la cual es la más gruesa, se produce un dañado visible en la parte inferior, mientras que en la malla b) apenas podemos apreciarlo en los extremos de la base y en la malla c) no ha comenzado aun la propagación de la fractura. En la Figura 7.4 vemos que en la malla a) se ha llegado muy rápidamente a la completa rotura del material. En cambio, en la malla b) observamos que la fractura se propaga más lentamente, mientras que en la malla c) apenas acaba de comenzar a dañarse en los extremos de la base. Para finalizar, en la Figura 7.5 se muestra el último incremento, es decir, el fin de la simulación. Podemos ver que en la malla b) el material ha fracturado por completo. Por el contrario, en la malla c) se ha propagado una pequeña cantidad la fractura y se ha producido un dañado en el material en la zona donde previsiblemente iba a fracturar, pero no se llega a la rotura completa. Otras diferencias apreciables son el tamaño de la fractura, el cual es mayor cuanto más gruesa sea la malla, y el color azul más claro (lo que significa un pequeño dañado) en zonas alejadas a la fractura en la malla a) frente a las mallas b) y c).

Para comprobar lo que hemos visto, es decir, si el material ha fracturado completamente o no, vamos a representar gráficamente la fuerza de reacción frente al desplazamiento. En la Figura 7.6 podemos ver las curvas obtenidas para cada malla:

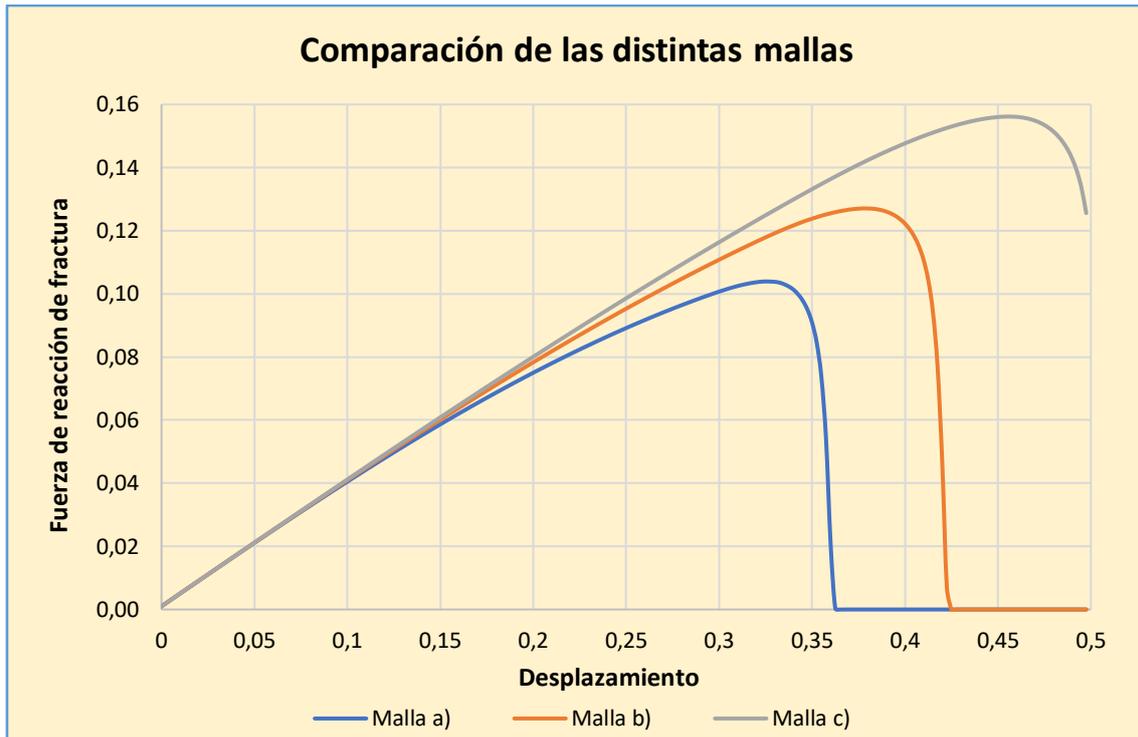


Figura 7. 6. Curvas fuerza de reacción de fractura - desplazamiento para diferentes mallas

El momento en el que se fractura completamente el material es cuando la fuerza de reacción de fractura disminuye rápidamente hasta hacerse 0. Por lo tanto, confirmamos lo visto anteriormente, es decir, la malla a) rompe en primer lugar para un desplazamiento de 0.35, después fractura por completo la malla b) para un desplazamiento de 0.4 y por último no se produce la fractura total de la malla c), aunque podemos ver que estaba a punto de hacerlo debido a que la curva comenzaba a descender. Por lo tanto, en mallas más refinadas hay un mayor número de elementos y, a causa de esto, la fuerza de reacción de fractura será mayor.

### 7.1.2. Influencia del número de incrementos

Con el fin de analizar la influencia del número de incrementos en la simulación, lo que haremos será comparar la propagación de la fractura para una misma malla, concretamente la b), con diferentes números de incrementos.

En la Figura 7.7 se muestra la propagación de la fractura para  $N=50$ :

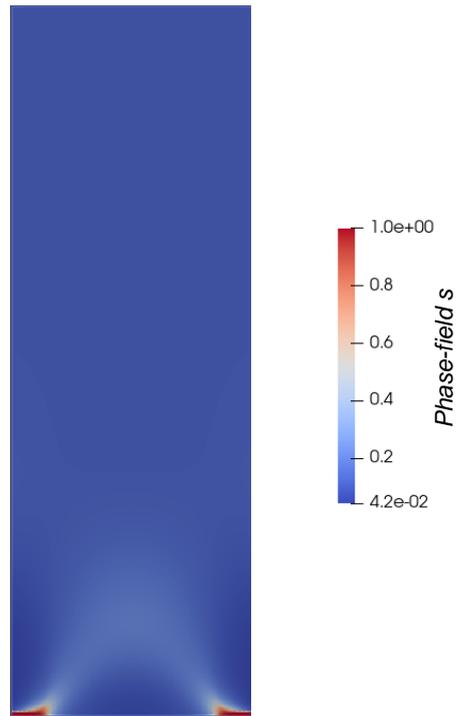


Figura 7. 7. Propagación de la fractura para  $N=50$

Para  $N=100$  la propagación de la fractura es la mostrada en la Figura 7.8:

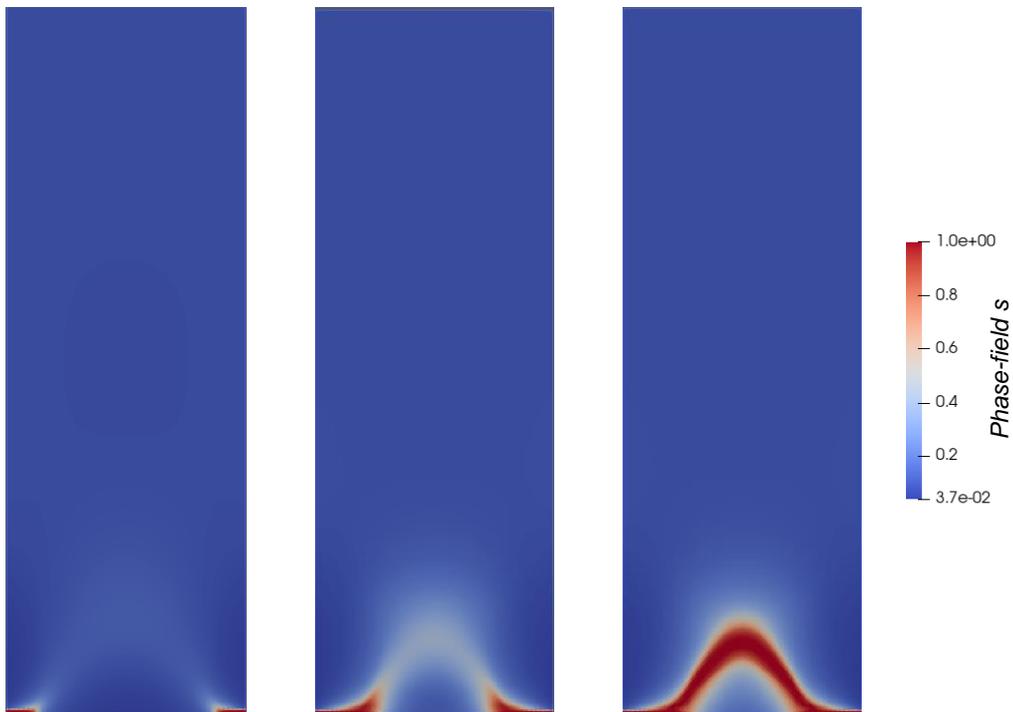


Figura 7. 8. Propagación de la fractura para  $N=100$

Por último, en la Figura 7.9 podemos ver la propagación de la fractura con  $N=200$ :

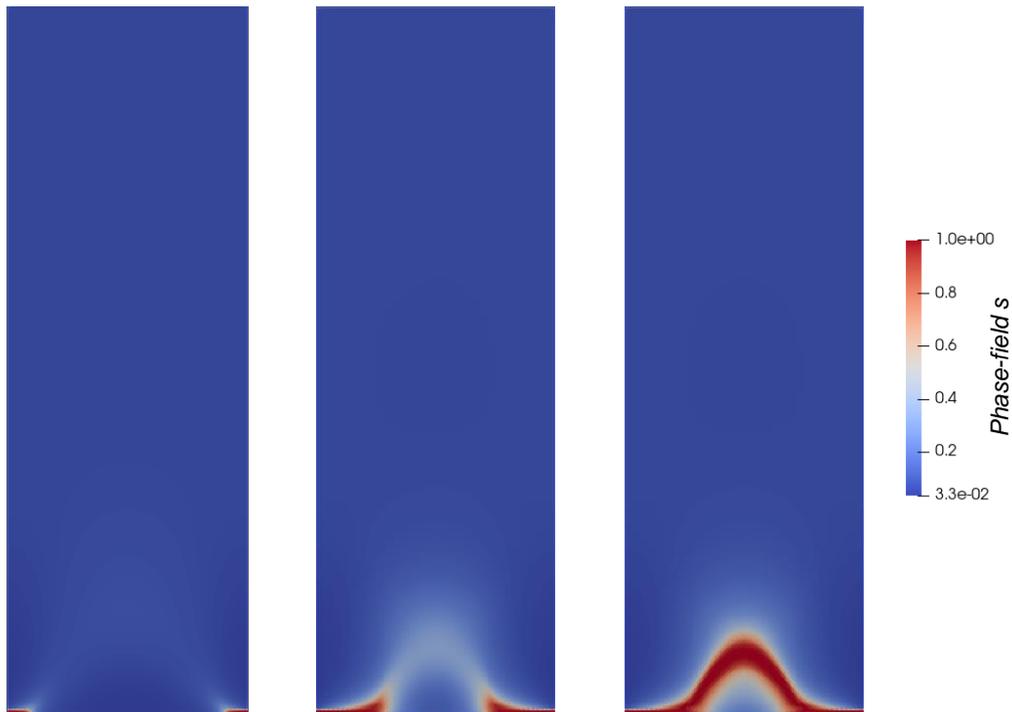


Figura 7. 9. Propagación de la fractura para  $N=200$

Para visualizar con mayor detalle las diferencias existentes entre estos tres casos vamos a recurrir a la representación gráfica de fuerza de reacción de fractura – desplazamiento (Figura 7.10):

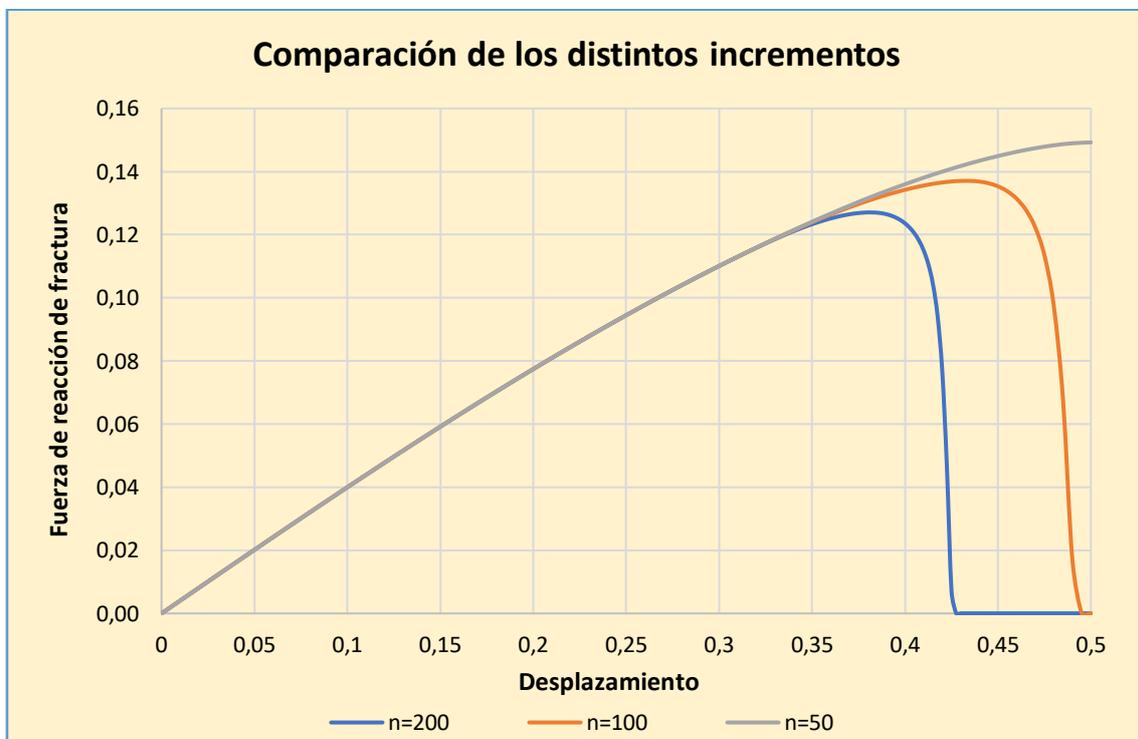


Figura 7. 10. Curvas fuerza de reacción - desplazamiento para diferentes incrementos

En este gráfico vemos que para un número de 50 incrementos el material no fractura por completo y sólo lo hace en las esquinas inferiores como podemos observar en la Figura 7.7. En cambio, para un número de incrementos de 100 y 200 sí que fractura por completo (Figura 7.8 y Figura 7.9, respectivamente). La diferencia entre estos dos últimos casos radica en que para  $N=100$  la rotura completa del material se produce cuando el desplazamiento impuesto ha alcanzado el valor de 0.47 aproximadamente, mientras que para  $N=200$  se produce aproximadamente para un valor de 0.42. Además, en la Figura 7.10 podemos percatarnos de que un mayor número de incrementos implica una fuerza de reacción de fractura menor debido a que el desplazamiento se impone más progresivamente.

### 7.1.3. Tensiones de Von Misses

Para visualizar el campo de tensiones de Von Misses en el material vamos a tomar el caso de la malla b) con 200 incrementos, cuya propagación de la fractura ya hemos representado en la Figura 7.9. A continuación se muestra la evolución de las tensiones de Von Misses en distintos incrementos:

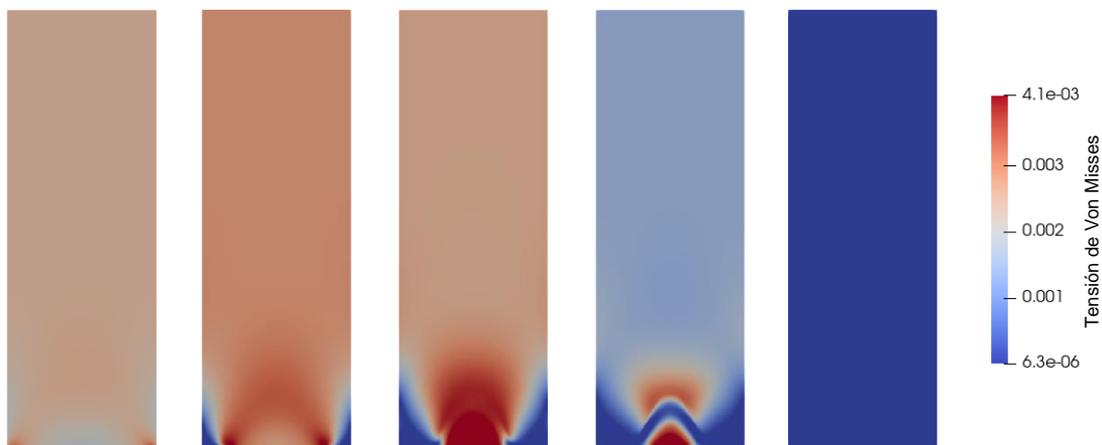


Figura 7. 11. Tensiones de Von Misses del ejemplo 1

En la primera imagen de la Figura 7.11 podemos observar como la pieza está tensionada en su totalidad, sobre todo en los extremos donde comenzará a aparecer la grieta. Seguidamente, en la segunda y tercera imagen vemos que conforme se propaga la grieta las tensiones alrededor de ella se van rebajando excepto en la parte central, donde se aprecia un aumento del valor de las tensiones ya que es por donde se concluirá la fractura. En la cuarta ilustración las tensiones se rebajan en gran medida debido a que el cuerpo está apunto de romper completamente. Para finalizar, en la última imagen se ha producido la fractura completa del material, por lo que el cuerpo deja de estar tensionado como era de esperar.

## 7.2. Cuerpo en forma de L

- **Objetivo:** Comparación de la propagación de la fractura dependiendo de si la función de degradación es cuadrática o cúbica. Las expresiones de estas funciones son las que encontramos en (4.30), es decir,  $g(s) = (1 - s)^2$  y  $g(s) = (2 - a_g)(s - 1)^3 + (3 - a_g)(s - 1)^2$ .

Este ejemplo consiste en un cuerpo en forma de L cuya arista lateral más larga está empotrada y, por lo tanto, los desplazamientos están restringidos en ella, mientras que en la arista lateral menor aplicaremos un desplazamiento total  $u_d$ . La geometría y las condiciones de contorno están representadas en la Figura 7.11:

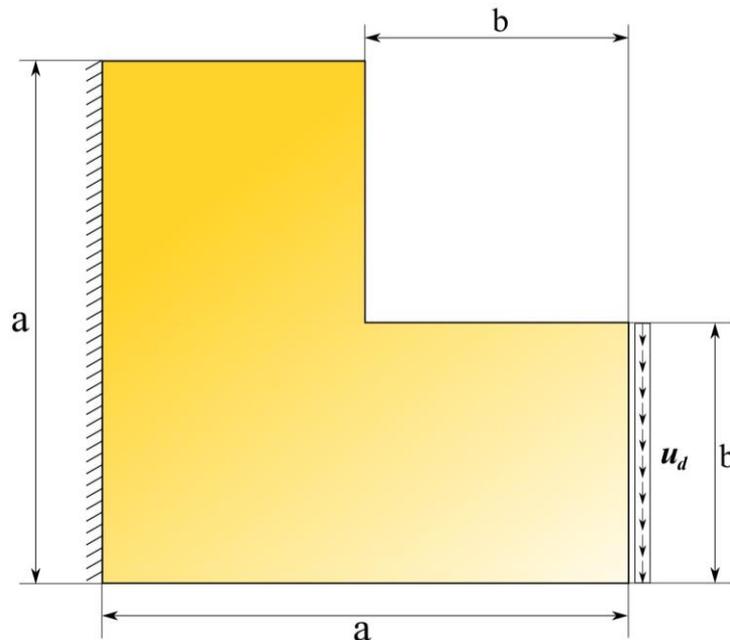


Figura 7. 12. Geometría y condiciones de contorno del ejemplo 2

Los parámetros de este ejemplo están recogidos en la Tabla 7.2:

Dato	Valor
Longitud a	2 m
Longitud b	1 m
Desplazamiento ( $u_d$ )	1 m
Módulo de Young ( $E$ )	1 Pa
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.4
Rigidez residual ( $k$ )	$1 \cdot 10^{-5}$
Energía de fractura ( $G_c$ )	$5 \cdot 10^{-4}$ J/m <sup>2</sup>
Parámetro de escala ( $l$ )	$5 \cdot 10^{-3}$
Load increments ( $N$ )	500

Tabla 7. 2. Datos del ejemplo 2

La malla generada en FreeFEM es la siguiente:

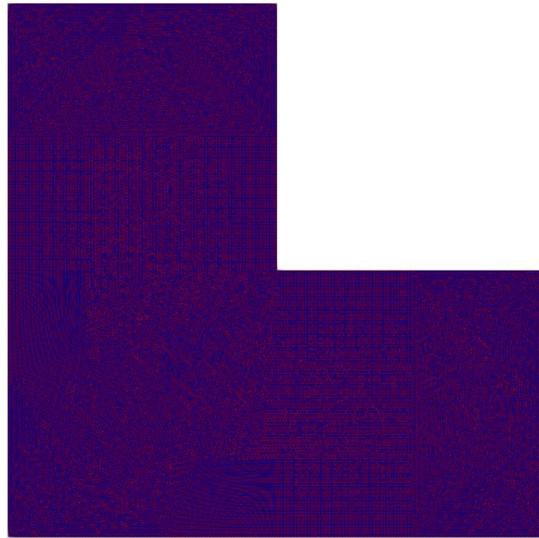


Figura 7. 13. Malla del ejemplo 2

### 7.2.1. Comparación entre las distintas $g(s)$

Lo que haremos será comparar en determinados incrementos como se ha propagado la fractura para estos casos: función de degradación cuadrática a) y funciones de degradación cúbicas b), c) y d), donde para estos tres últimos  $a_g$  toma el valor de 1, 0.5 y 0.1 respectivamente.

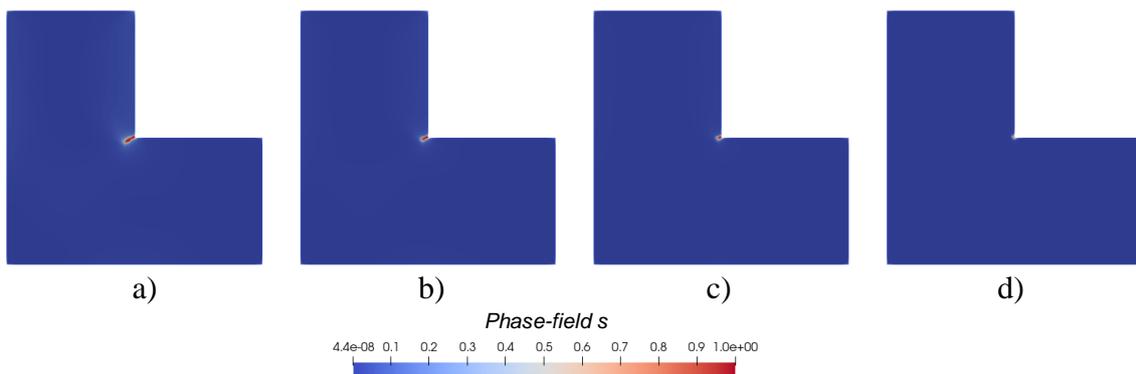


Figura 7. 14. Propagación de la fractura del ejemplo 2 en el incremento 173

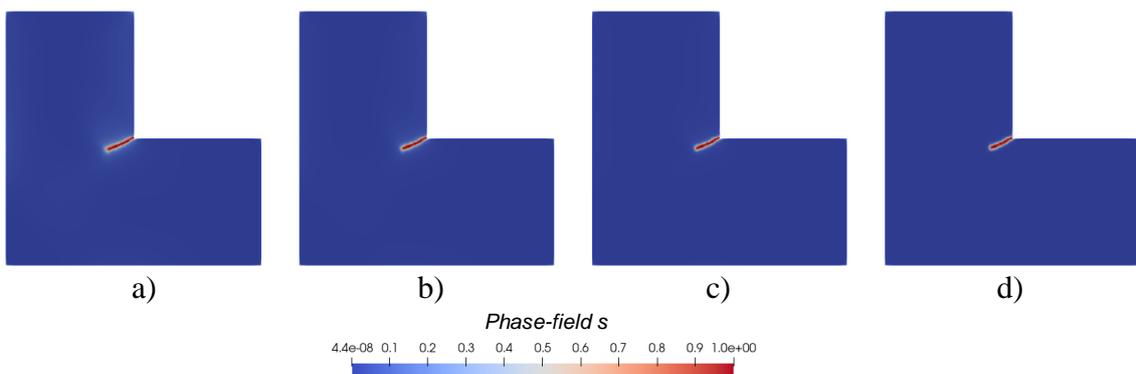


Figura 7. 15. Propagación de la fractura del ejemplo 2 en el incremento 202

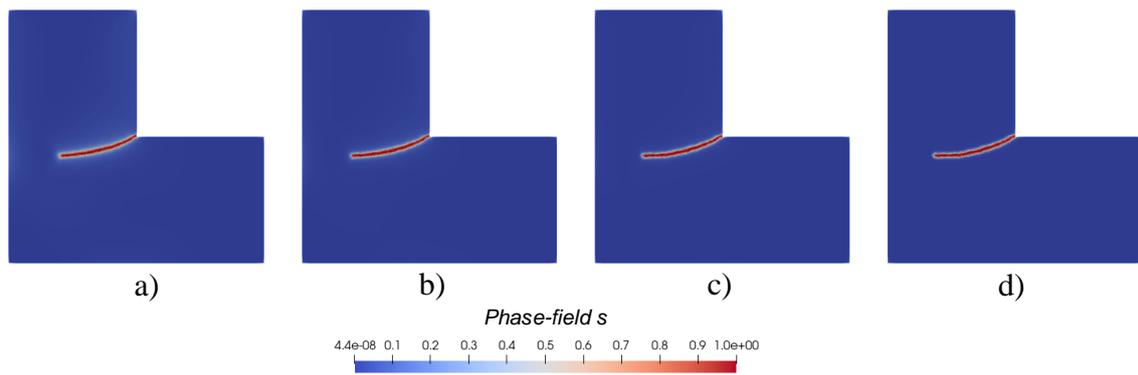


Figura 7. 16. Propagación de la fractura del ejemplo 2 en el incremento 275

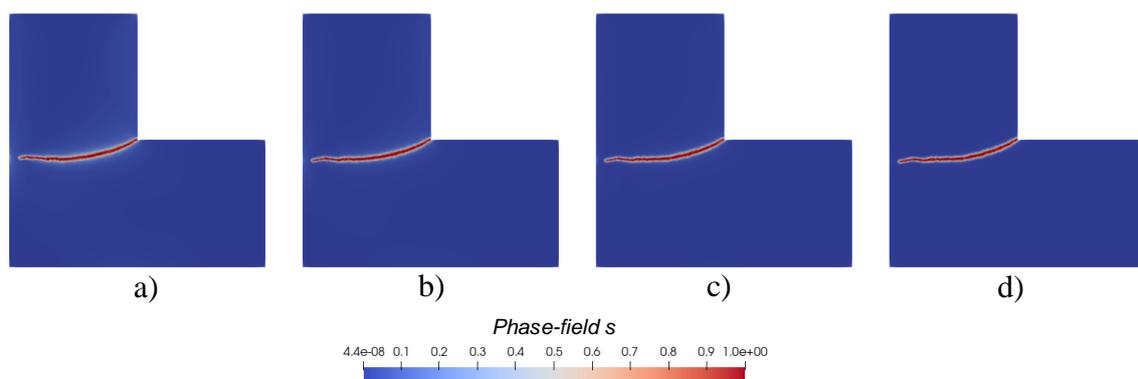


Figura 7. 17. Propagación de la fractura del ejemplo 2 en el incremento 500

En la Figura 7.14 es donde podemos ver la mayor diferencia entre estos cuatro casos, ya que se puede apreciar claramente que la longitud de la fractura es mayor en a) que en b), c) y d), donde en este último apenas acaba de comenzar a producirse la fractura. En la Figura 7.15 vemos que ocurre algo similar a la Figura anterior, pero siendo más difícil de apreciar la diferencia de longitud entre un caso y otro. Por último, en las Figuras 7.16 y 7.17 observamos como se va propagando la fractura lentamente, llamando especialmente la atención como para el caso a) se produce mayor daño en zonas alejadas a la fractura, ya que el tono es un azul más claro. De igual manera ocurre para los tres últimos casos, produciéndose mayor daño en b) que en c) y en c) que en d), donde vemos que para este último caso el color es azul oscuro, por lo que no se ha producido apenas daño en zonas lejanas a la fractura.

En conclusión, el orden de mayor a menor degradación sobre el material es: a), b), c) y d). Esto es lógico si tenemos en cuenta las gráficas de cada una de estas funciones de degradación (Figura 4.5), ya que para un mismo valor de  $s$  la función de degradación toma valores menores en a) que en b), en b) que en c) y en c) que en d).

En la Figura 7.18 están representadas las curvas fuerza de reacción de fractura – desplazamiento de estos cuatro casos:

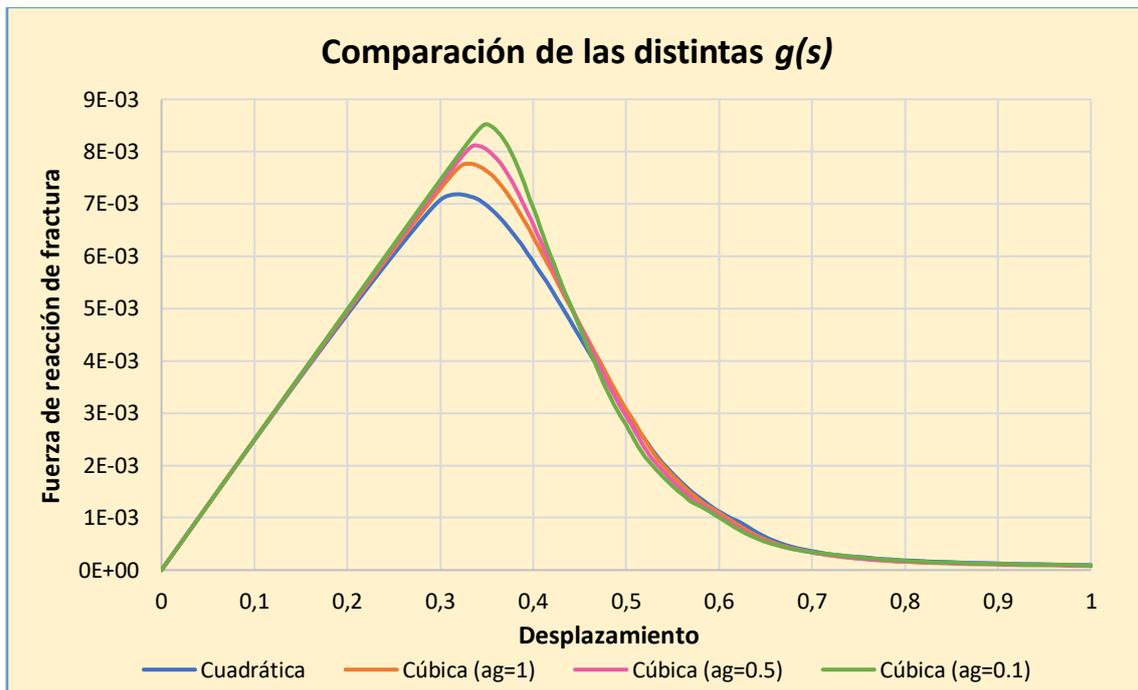


Figura 7. 18. Curvas fuerza de reacción de fractura - desplazamiento para diferentes  $g(s)$

En esta última gráfica podemos reafirmar lo comentado anteriormente, ya que podemos observar que la curva para el caso de utilizar una función cuadrática comienza a disminuir antes que para los casos en los que la función es cúbica, es decir, la fractura comienza antes para el primer caso comentado. Además, también podemos ver que la fuerza de reacción de fractura es menor para el caso a) que para los demás, siendo esto consecuencia de que la  $g(s)$  cuadrática provoca una mayor degradación en el material.

### 7.2.1. Tensiones de Von Misses

Al igual que hicimos para el primer ejemplo, vamos a mostrar en la Figura 7.19 la evolución de las tensiones producidas conforme la fractura progresa:

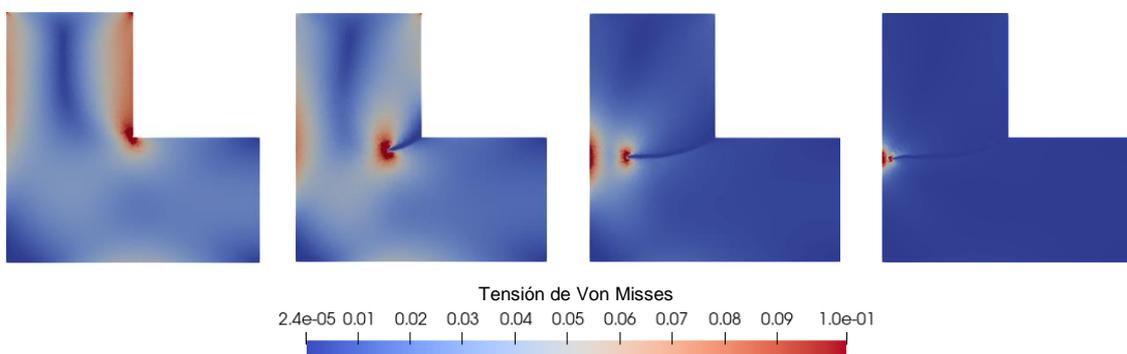


Figura 7. 19. Tensiones de Von Misses del ejemplo 2

Al igual que en el ejemplo 1, podemos ver que un área considerable de la pieza está tensionada antes de que se inicie la fractura. El máximo valor de tensión se localiza donde la fractura va a iniciarse y en la arista donde los desplazamientos están restringidos. En la segunda y tercera secuencia de la Figura 7.19 observamos que donde pieza ha roto las

tensiones son nulas y que los valores máximos de tensión están en el extremo de la rotura y en la arista empotrada. En la última ilustración, que es cuando la fractura se propaga muy lentamente, vemos que la tensión se rebaja en toda el área de la pieza excepto en el extremo de la grieta y en la zona central de la arista empotrada, ya que la rotura no es completa.

### 7.3. Cuerpo rectangular con grieta inducida

- **Objetivo:** Comparación del *phase-field* entre el caso de impedir que el material se recupere frente al caso contrario.

Este ejemplo consiste en una pieza rectangular donde en uno de sus lados menores se ha inicializado una grieta. En ambos extremos de la pieza se establecerán apoyos y se les impondrán a sus dos lados mayores un desplazamiento de tracción. La función de degradación  $g(s)$  utilizada será cuadrática y la geometría y las condiciones de contorno se muestran a continuación:

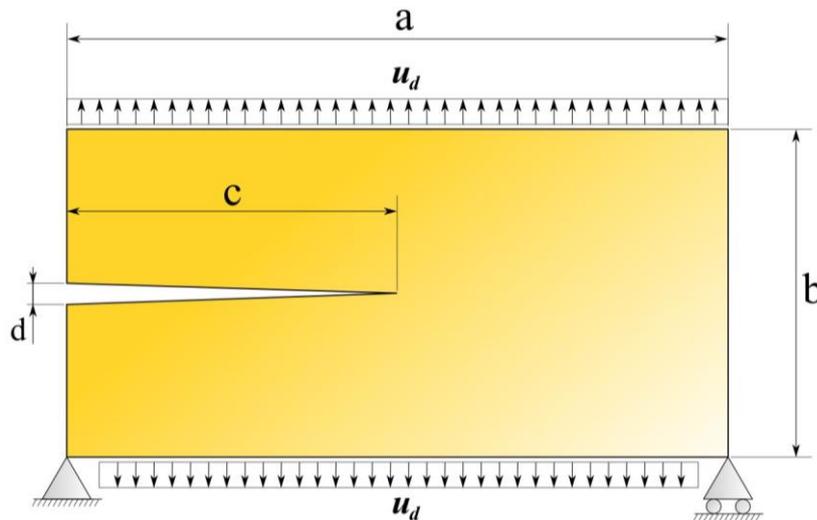


Figura 7. 20. Geometría y condiciones de contorno del ejemplo 3

Los datos de este ejemplo están recogidos en la Tabla 7.3:

Dato	Valor
Longitud a	1 m
Longitud b	0.5 m
Longitud c	0.5 m
Longitud d	0.004 m
Desplazamiento ( $u_d$ )	0.2 m
Módulo de Young ( $E$ )	1 Pa
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.4
Rigidez residual ( $k$ )	$1 \cdot 10^{-5}$
Energía de fractura ( $G_c$ )	$5 \cdot 10^{-4} \text{ J/m}^2$
Parámetro de escala ( $l$ )	$5 \cdot 10^{-3}$
Load increments ( $N$ )	300

Tabla 7. 3. Datos del ejemplo 3

La malla es la mostrada en la Figura 7.21:

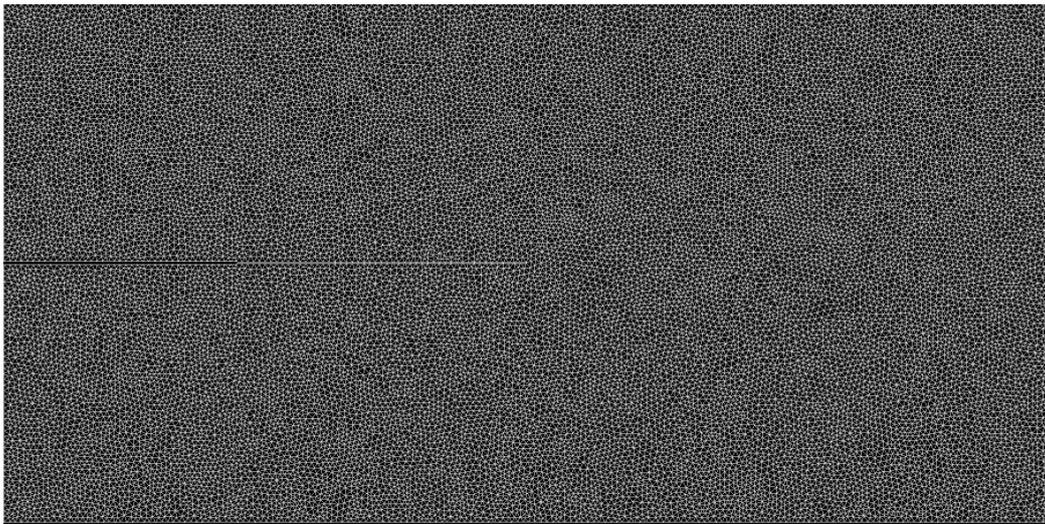


Figura 7. 21. Malla del ejemplo 3

### 7.3.1. Comparación con/sin recuperación del material

Para visualizar las diferencias vamos a proceder a ilustrar varias figuras para determinados incrementos. El caso a) es cuando se impide la recuperación del material y el caso b) es el contrario:

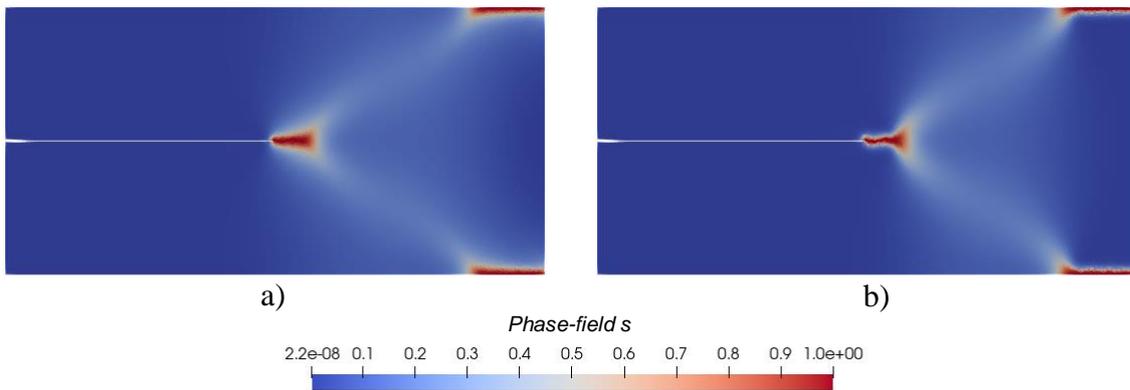


Figura 7. 22. Propagación de la fractura del ejemplo 3 en el incremento 42

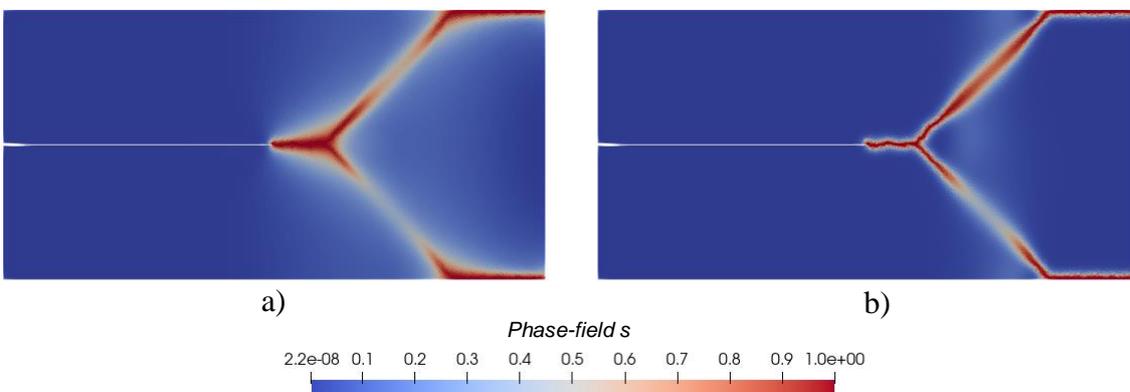


Figura 7. 23. Propagación de la fractura del ejemplo 3 en el incremento 54

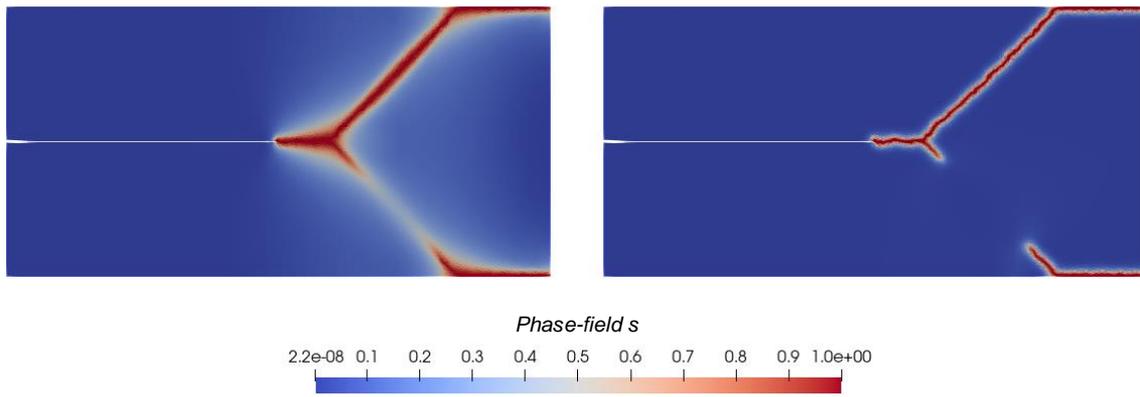


Figura 7.24. Propagación de la fractura en el ejemplo 3 en el incremento 59

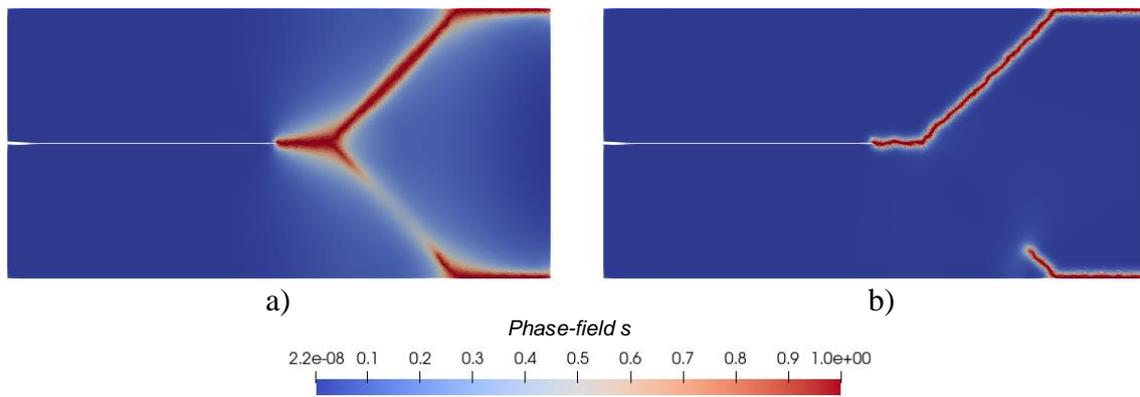


Figura 7.25. Propagación de la fractura del ejemplo 3 en el incremento 69

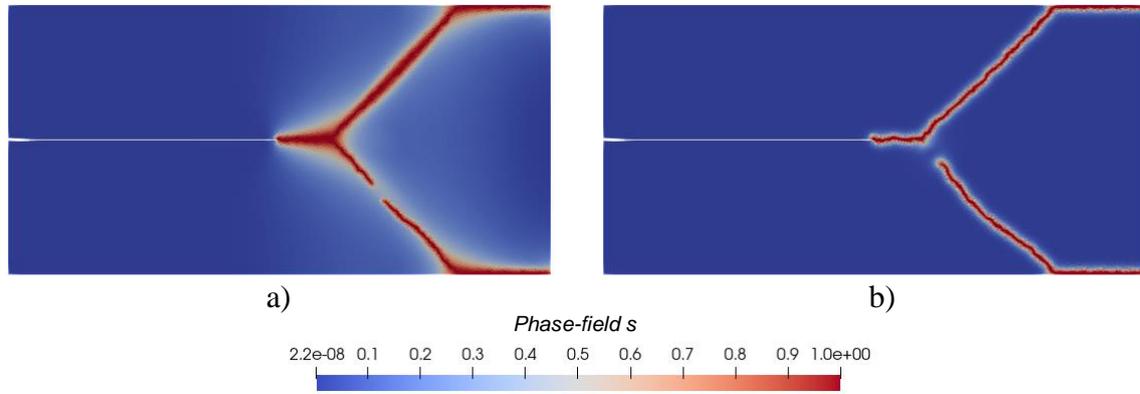


Figura 7.26. Propagación de la fractura del ejemplo 3 en el incremento 300

En las Figuras 7.22 y 7.23 podemos observar la iniciación y la progresión de la fractura respectivamente. Apenas podemos encontrar diferencias entre el caso a) y b) en lo que respecta a la zona fractura, sin embargo, en la transición entre estas Figuras vemos que se produce una disminución del parámetro *phase-field* en la zona cercana a la fractura en el caso b), es decir, se produce la recuperación del material, mientras que en el caso a) esto no ocurre. Esta recuperación del material se puede ver con mucha más claridad si nos fijamos en las Figuras 7.23, 7.24 y 7.25, donde se aprecia que la fractura sufrida anteriormente va desapareciendo. Destacar que esto solo ocurre en una parte simétrica del material, ya que en una se produce la fractura completa y en la otra no debido a que la malla no es simétricamente perfecta. Finalmente, en la Figura 7.26 vemos como se ha propagado la fractura, destacando otra vez como gran parte del material en el caso b) tiene

un *phase-field* nulo, mientras que para el caso a) se aprecia un dañado en zonas cercanas a la fractura.

### 7.3.2. Tensiones de Von Misses

En este apartado vamos a ilustrar las tensiones de Von Misses producidas para el caso en que el material no presenta recuperación. En la Figura 7.27. podemos visualizarlas:

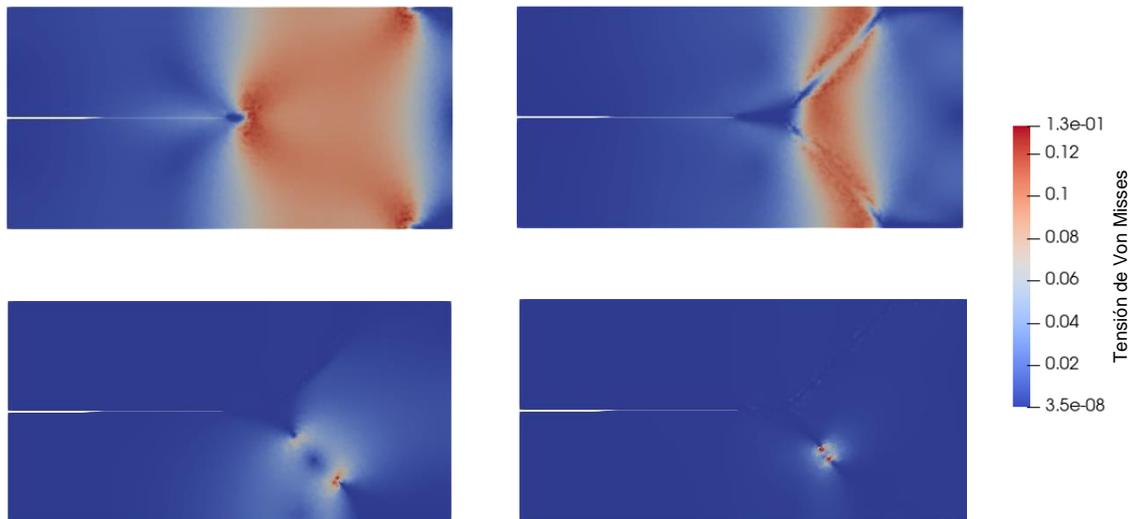


Figura 7. 27. Tensiones de Von Misses del ejemplo 3

Al igual que ocurría en los dos anteriores ejemplos, podemos observar como en la iniciación de la grieta se producen grandes tensiones cercanas a donde va a fracturar la pieza. A medida que la fractura progresa, las tensiones se rebajan y se localizan en una zona cercana a donde se va a producir la rotura. Por último, en las dos imágenes inferiores podemos ver que la parte simétrica superior del material ha fracturado por completo, lo que produce que dicha zona las tensiones se anulen. Por otro lado, en la parte simétrica inferior observamos que las tensiones se limitan únicamente a los extremos por donde la fractura se propaga. Destacar, como hemos dicho anteriormente, que la fractura debería ser simultánea en ambas partes a un lado y otro de la grieta inducida, pero la no simetría de la malla ocasiona que una parte fracture antes que la otra.

## 7.4. Probeta de ensayo de tracción

- **Objetivo:** Comprobación de obtención de resultados cualitativamente similares a un caso real.

Este ejemplo tridimensional consistirá en la simulación de un ensayo de tracción con una probeta de acero, es decir, uno de los cabezales de la probeta estará fijado mediante una mordaza (impedimos los desplazamientos), mientras que el otro cabezal será sometido a un desplazamiento axial de tracción. Además, compararemos la carga de rotura obtenida en caso de utilizar la función de degradación cuadrática o la cúbica. Las dimensiones de la probeta (en mm) las podemos ver a continuación:

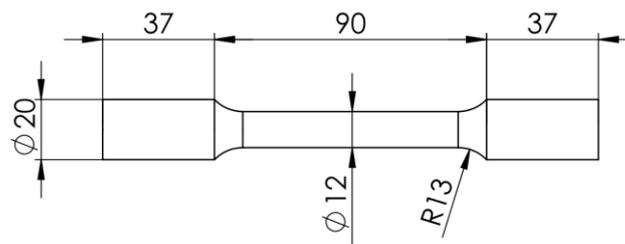


Figura 7. 28. Dimensiones de la probeta

Su aspecto tridimensional y su malla están el representados en la Figura 7.29:



Figura 7. 29. Vista tridimensional a) y malla b) de la probeta

Las características del acero utilizado y los demás datos se muestran en la Tabla 7.4:

Dato	Valor
Módulo de Young ( $E$ )	210 MPa
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.3
Desplazamiento ( $u_d$ )	28 mm
Rigidez residual ( $k$ )	$1 \cdot 10^{-5} \cdot E$
Energía de fractura ( $G_c$ )	$5 \cdot 10^{-4} \text{ J/m}^2$
Parámetro de escala ( $l$ )	$1 \cdot 10^{-5}$
Load increments ( $N$ )	150

Tabla 7. 4. Datos de la probeta

### 7.4.1. Propagación de la fractura

Al igual que hicimos en el ejemplo 2 bidimensional, vamos a comparar los valores del *phase-field* en determinados incrementos para las siguientes situaciones: Función de degradación cuadrática (probeta superior) y función de degradación cúbica con  $a_g = 0.1$  (probeta inferior). La simulación la podemos ver en la Figura 7.30:

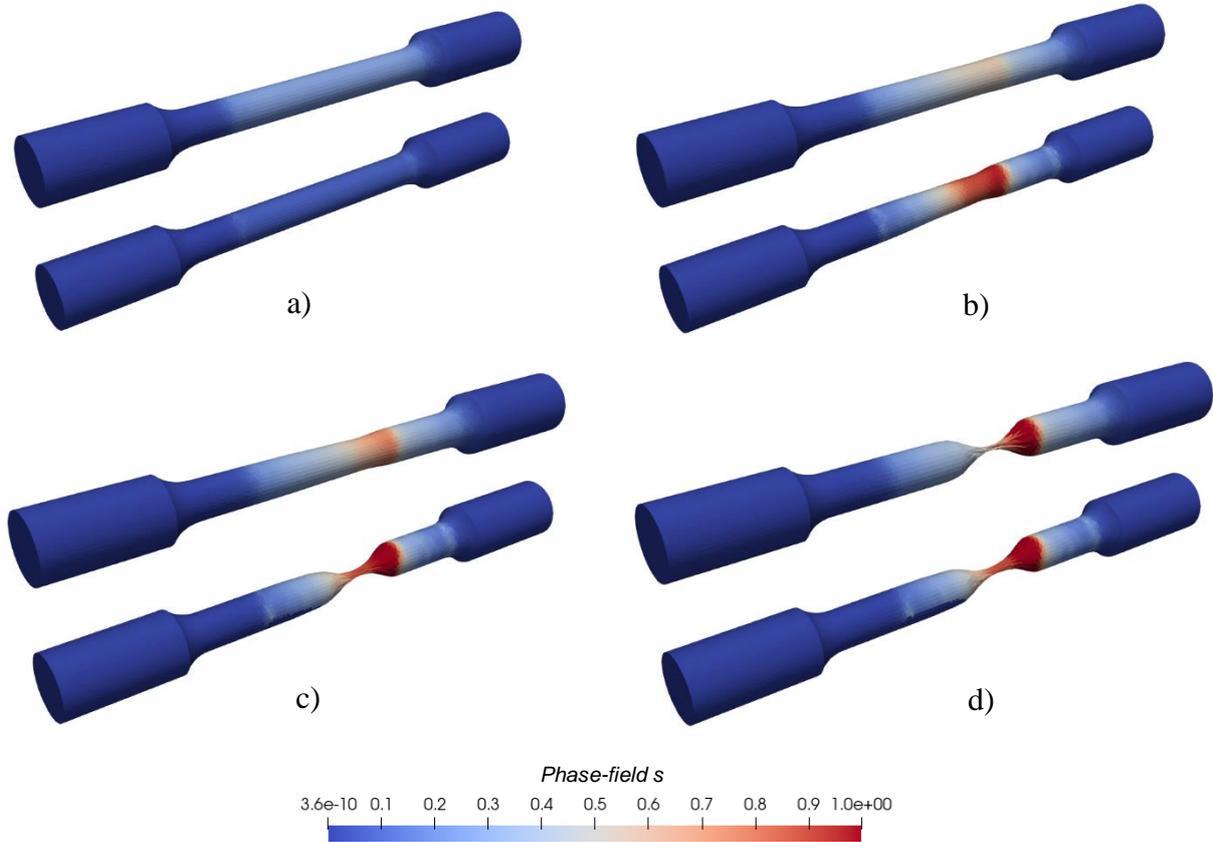


Figura 7. 30. Propagación de la fractura en la probeta en los incrementos: 91 a); 111 b); 113 c); 116 d)

Podemos observar que primero se produce un daño en la parte central de la probeta y que en un pequeño intervalo de desplazamientos se produce una reducción de la sección y la rotura completa del material. Es decir, al igual que en un caso real (Figura 7.31), se produce el típico fenómeno de encuellamiento en la zona cercana al cabezal de la probeta que está fijo:

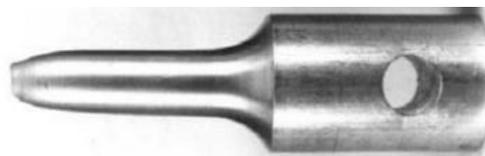


Figura 7. 31. Encuellamiento probeta real

Para apreciar en detalle las diferencias entre la simulación realizada con la función  $g(s)$  cuadrática frente a la cúbica, vamos a representar en la Figura 7.32 las curvas fuerza de reacción de fractura – desplazamiento:

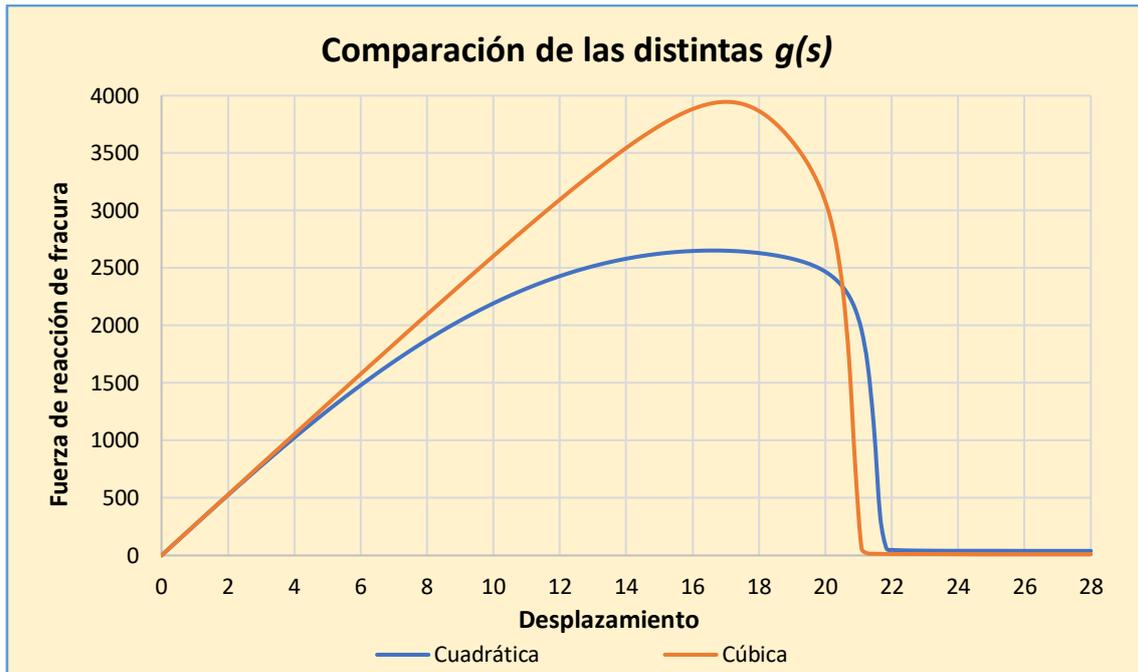


Figura 7. 32. Curvas fuerza de reacción de fractura – desplazamiento de la probeta para diferentes  $g(s)$

Como observamos en los ejemplos bidimensionales, la función de degradación cuadrática provoca una mayor degradación en el material. La diferencia más apreciable que podemos ver en la gráfica es que la tensión de rotura en el caso de utilizar una función de degradación cúbica es un 48.75% mayor que el caso de tener una  $g(s)$  cuadrática.

#### 7.4.2. Tensiones de Von Misses

En caso de utilizar la función de degradación cuadrática anterior, la evolución del campo de tensiones está representada en la Figura 7.33:

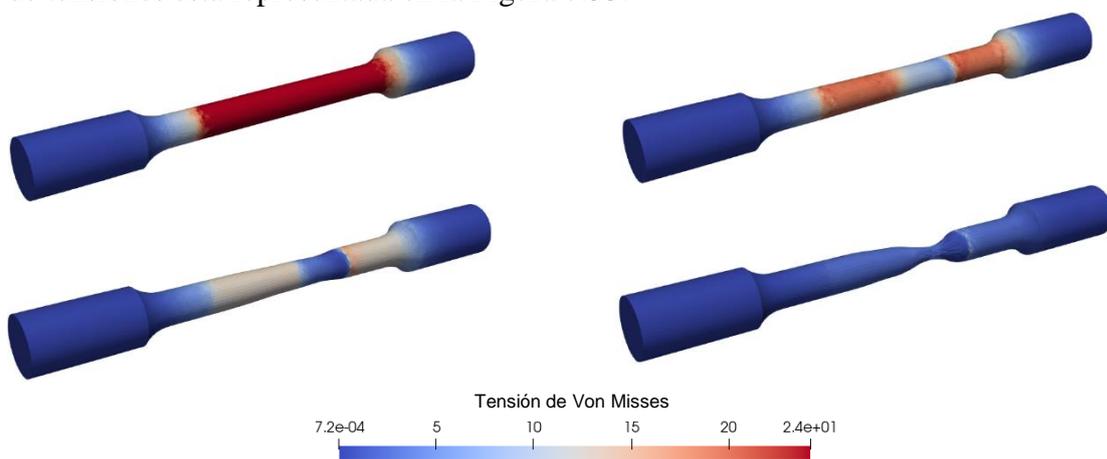


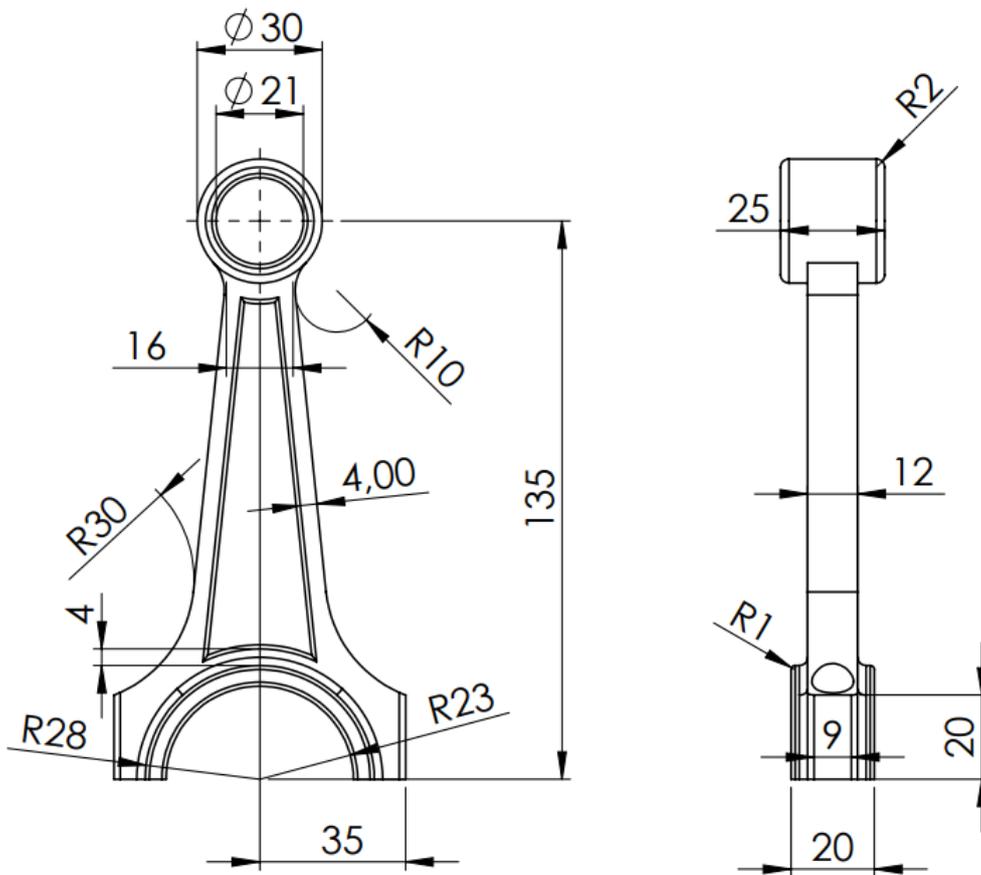
Figura 7. 33. Tensiones de Von Misses en la probeta

Podemos observar como la tensión en toda la parte central de la probeta es alta durante el proceso de tracción hasta que comienza a estrecharse la sección, es decir, a producirse el fenómeno de encuellamiento. Esto supone una rápida disminución de las tensiones en toda la probeta, sobre todo en la zona donde se produce dicho encuellamiento. Como era de esperar, una vez la probeta ha fracturado, las tensiones se anulan en todo el cuerpo.

## 7.5. Biela

- **Objetivo:** Comparación de las curvas de fuerza de reacción de fractura – desplazamiento en caso de tener una biela sin un defecto superficial con otra biela que si lo tendrá.

En este ejemplo tridimensional vamos a estudiar cómo se propaga la fractura en una biela de un motor de combustión. Esta pieza será un acero forjado, ya que tiene que ser resistente a las tensiones y temperaturas, teniendo un módulo de Young de 210 MPa y un coeficiente de Poisson de 0.3. Concretamente, impondremos un desplazamiento de tracción en el pie de la biela y restringiremos los desplazamientos en la cabeza de esta. En la Figura 7.34 podemos ver las dimensiones (en mm) de la biela:



Todos los redondeos no acotados son de 2 mm

Figura 7. 34. Dimensiones de la biela

Su vista tridimensional y su malla están representadas a continuación:

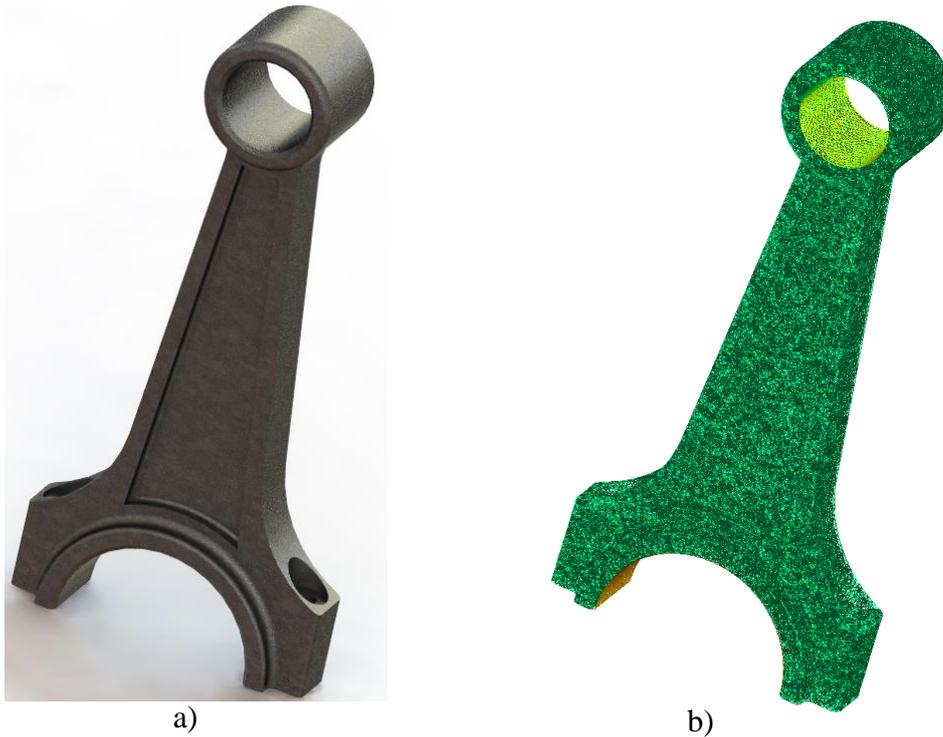


Figura 7. 35. Vista tridimensional a) y malla b) de la biela

El defecto inicial que tendrá la otra biela y su mallado es el mostrado en la Figura 7.36:



Figura 7. 36. Defecto inicial de la biela a) y su mallado b)

Los datos necesarios para la resolución del problema se muestran en la Tabla 7.5:

Dato	Valor
Módulo de Young ( $E$ )	210 MPa
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.3
Desplazamiento ( $u_d$ )	10 mm
Rigidez residual ( $k$ )	$1 \cdot 10^{-5} \cdot E$
Energía de fractura ( $G_c$ )	$1.5 \cdot 10^{-4} \text{ J/m}^2$
Parámetro de escala ( $l$ )	$1 \cdot 10^{-5}$
Load increments ( $N$ )	150

Tabla 7. 5. Datos de la biela

### 7.5.1. Propagación de la fractura

Para observar con claridad las diferencias del campo *phase-field* entre tener una biela sin un defecto inicial y tenerlo, vamos a representar varias Figuras en determinados instantes de la simulación. La función de degradación utilizada es cuadrática. A la izquierda se situará la biela sin defecto y a la derecha la que lo tiene:

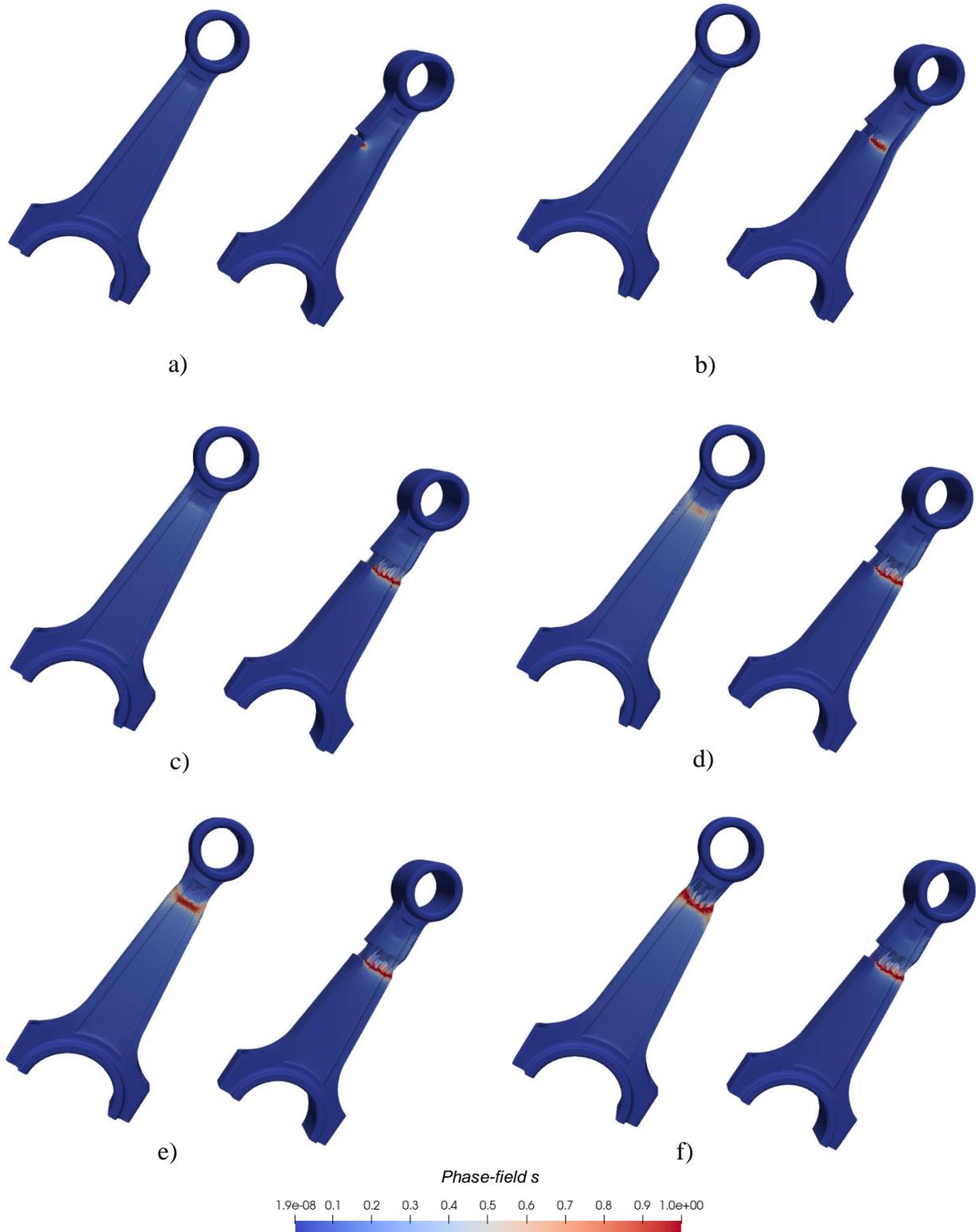


Figura 7. 37. Propagación de la fractura en las bielas en los incrementos: 85 a); 96 b); 110 c); 135 d); 138 e); 141 d)

Observando los incrementos representados en la Figura 7.37 podemos sacar las siguientes conclusiones: En a) y b) podemos ver la iniciación y propagación de la fractura en el defecto inducido, respectivamente, mientras que la biela que no presenta ningún defecto apenas se ha producido daño, es decir, presenta valores muy bajos de *phase-field*. Además, en b) podemos percatarnos de como el pie y parte del cuerpo de la biela se doblan debido a la grieta inducida. En c) ya se ha producido la total rotura de la biela que presentaba la grieta inicial. Por otro lado, en la biela sin defecto inicial ya se comienza a apreciar más claramente un dañado donde se va a producir la fractura. Por último, d), e) y f) representan un intervalo de desplazamiento pequeño, ya que comprenden del incremento 135 al 141. Observamos primeramente un dañado importante en d), que aumenta en e) y que rápidamente lleva a la rotura completa de la biela en f).

Como siempre, para ver dar consistencia a lo mencionado, vamos a representar a continuación gráficamente las curvas de fuerza de reacción de fractura – desplazamiento para ambos casos:

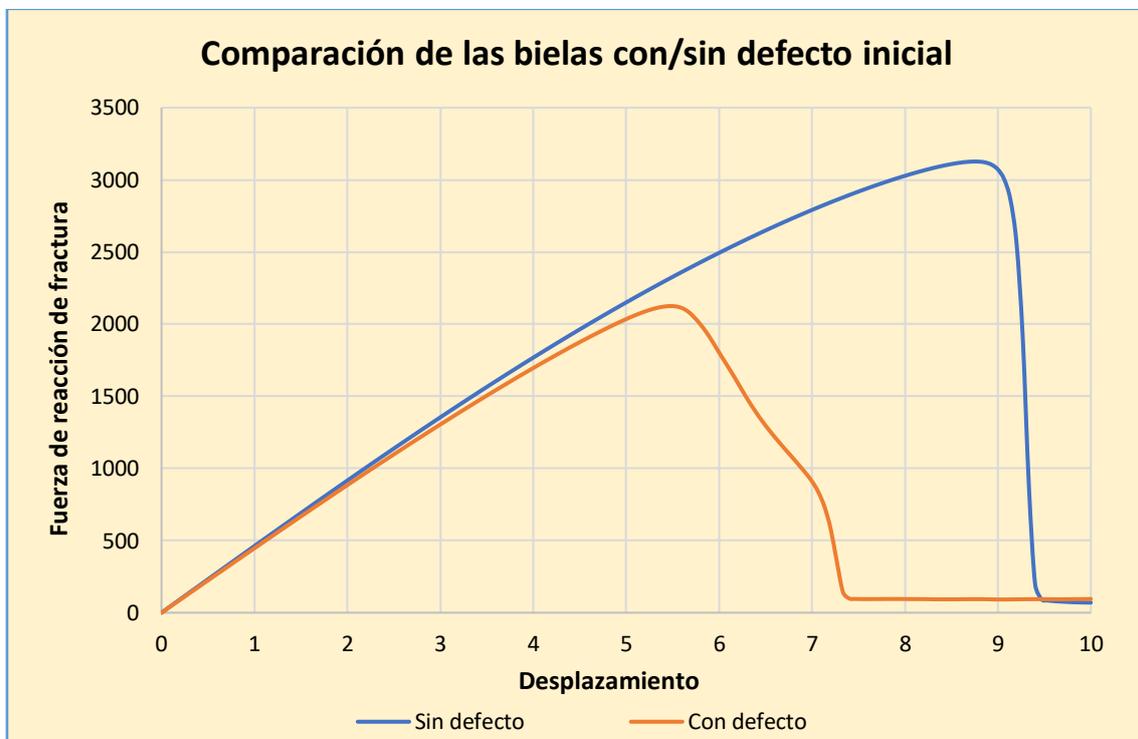


Figura 7. 38. Curvas fuerza de reacción de fractura – desplazamiento de las bielas

Tener un defecto inicial supone que la carga de rotura se vea reducida un 32% y que se llegue a la rotura total del material para un desplazamiento inferior, tal y como hemos visto en la Figura 7.37. Además, atendiendo a la curva de la biela con defecto podemos observar que se presentan dos pendientes descendientes. Esto se debe a que la grieta progresa en primer lugar por la zona del defecto inicial, pero finalmente acaba uniéndose a la fractura que se va ocasionando en el lado contrario a dicho defecto.

### 7.5.2. Tensiones de Von Mises

Al igual que hemos procedido en el apartado anterior, vamos a comparar el campo de tensiones de Von Mises en ambas bielas. A la izquierda se situará la biela sin defecto y a la derecha la que lo tiene:

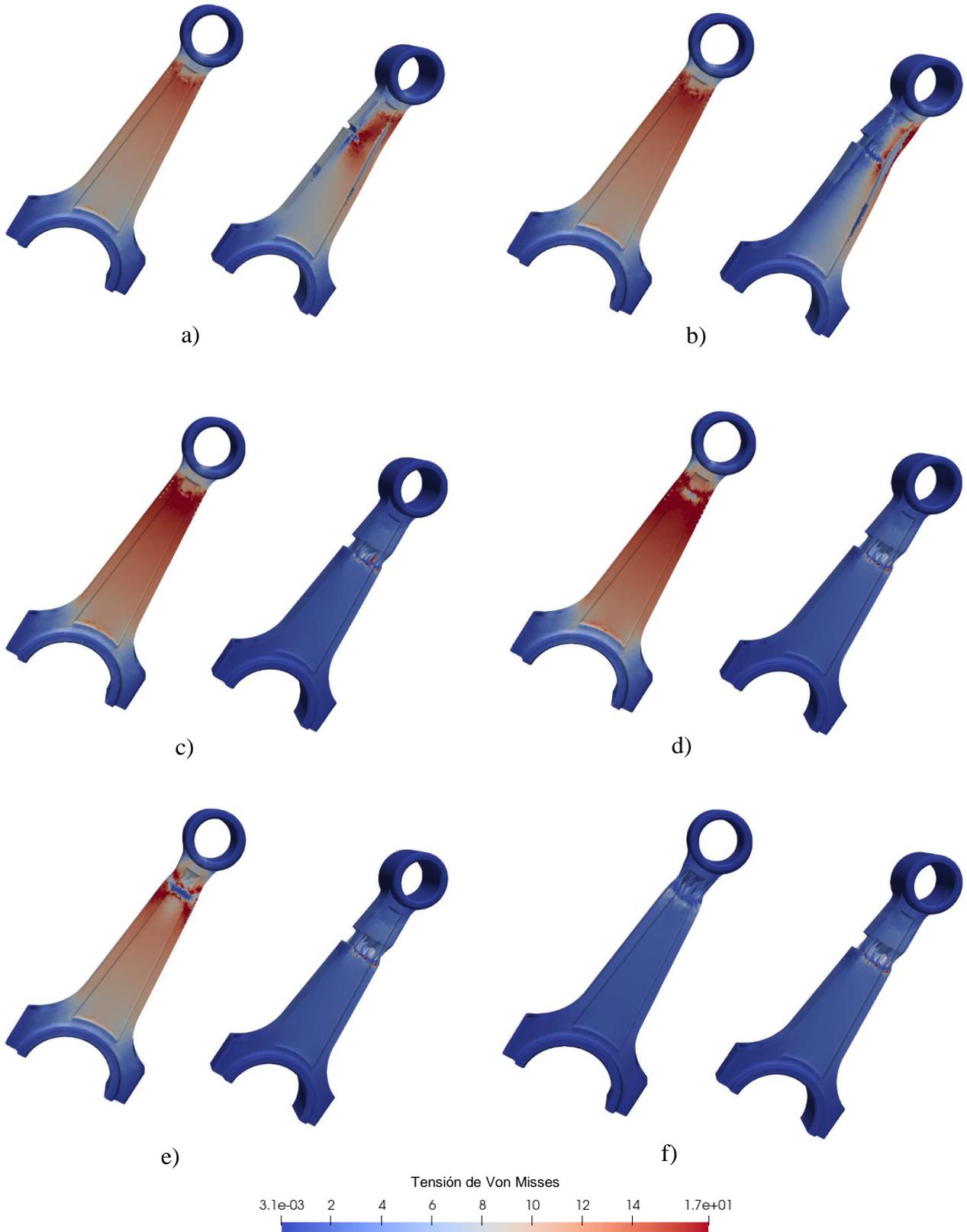


Figura 7. 39. Tensiones de Von Mises en las bielas en los incrementos: 85 a); 96 b); 110 c); 135 d); 138 e); 141 d)

En la Figura 7.39 hemos representado el campo de tensiones de Von Mises en los mismos incrementos en los que representamos anteriormente el *phase-field* en el apartado anterior con el fin de establecer una relación. Como vimos, en a) se produce la iniciación de la fractura en el defecto inducido, produciéndose grandes tensiones alrededor de este. En b), cuando la biela con el defecto inicial está a punto de fracturar completamente, se produce una disminución de las tensiones en gran parte de la biela, concentrándose estas en la zona contraria al defecto que, como comentamos anteriormente, es donde produce la unión de las fracturas. En c), al producirse la fractura completa el campo de tensiones de anula. Para la biela sin defecto vemos que de a) a c) únicamente se produce un aumento de las tensiones en el cuerpo de la biela, sobre todo donde se va a ocasionar la fractura. En d) podemos ver que únicamente en la zona con un dañado alto se han rebajado las tensiones, ya que la fractura comienza a producirse. En e), cuando la fractura completa es casi inminente, el campo de tensiones se rebaja en todo el cuerpo de la biela excepto en la zona por donde la fractura está progresando. En f), como era de esperar, el campo de tensiones se anula al fracturar completamente el material.

## 7.6. Pistón

- **Objetivo:** Aplicación de simetría con el fin de obtener una malla refinada para un tiempo de cómputo alto.

Como último ejemplo en este trabajo vamos a someter a tracción un pistón de un motor de combustión. El material utilizado será una aleación de aluminio-silicio, ya que los pistones deben soportar presiones y temperaturas elevadas, además de velocidades y aceleraciones muy altas. Por ello, se escoge este material de peso específico bajo con el fin de disminuir la energía cinética que se genera en los desplazamientos. La simulación consistirá en restringir los desplazamientos en la cabeza del pistón e imponer un desplazamiento a tracción en la superficie inferior de la falda del pistón. Las dimensiones (en mm) del pistón son las mostradas a continuación:

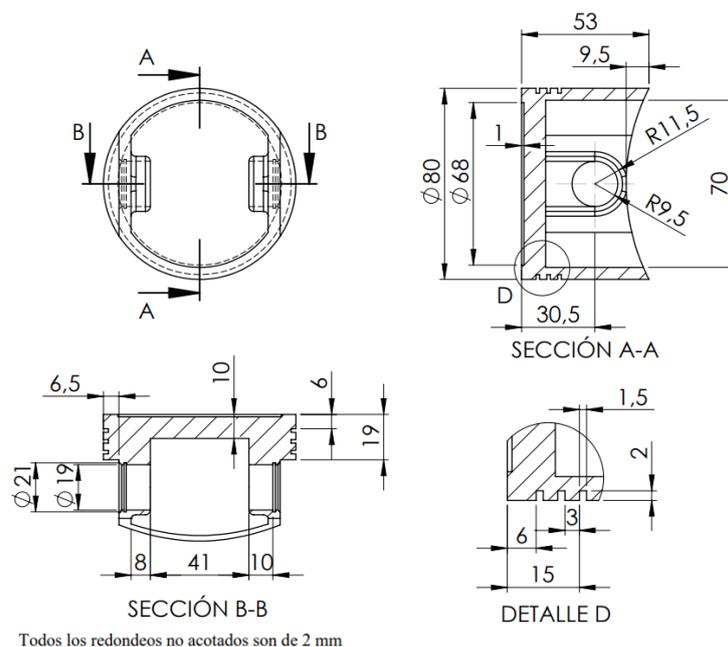


Figura 7. 40. Dimensiones del pistón

Su vista tridimensional y su malla están representadas en la Figura 7.41:

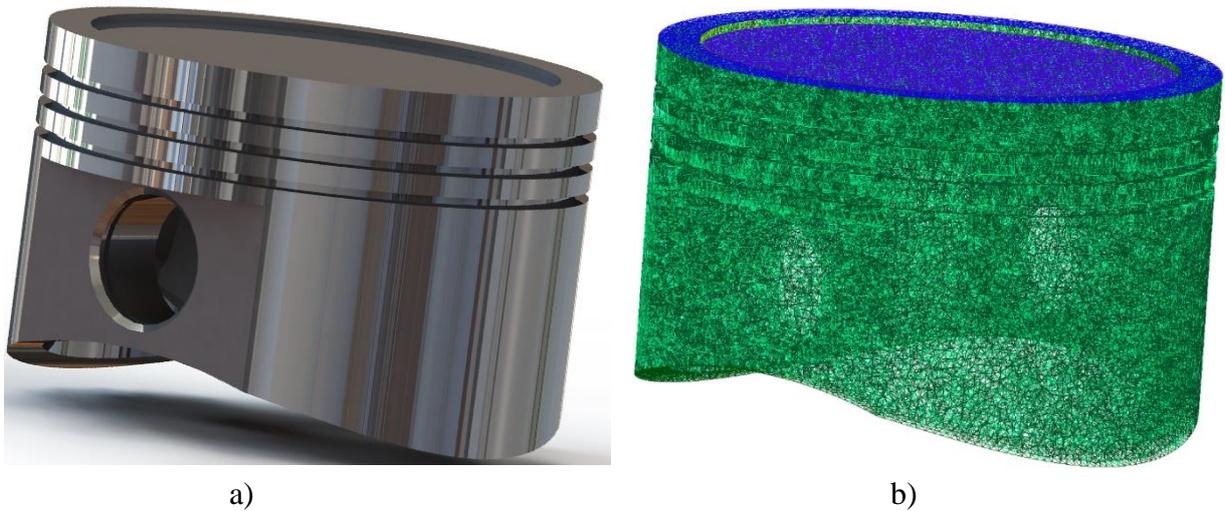


Figura 7. 41. Vista tridimensional a) y malla b) del pistón

Sin embargo, podemos realizar simetría dos veces, ya que la geometría del pistón y las condiciones de contorno nos lo permiten. Con esto conseguimos obtener una malla mucho más refinada y el tiempo de cómputo sería aproximadamente el mismo. A continuación se muestra la malla de un cuarto del pistón:

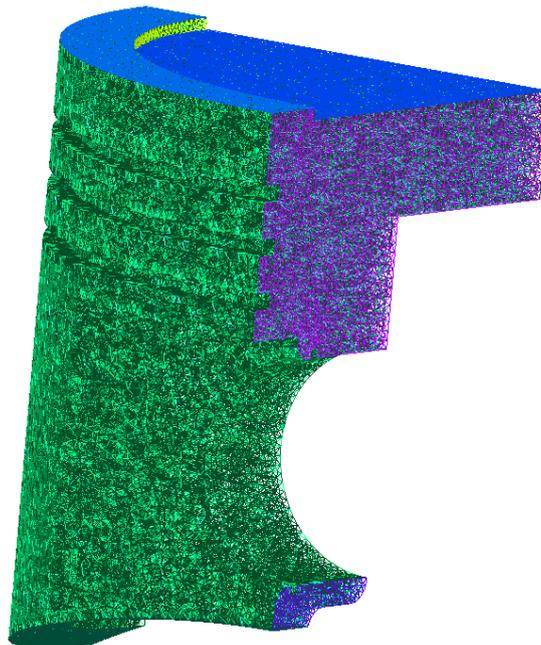


Figura 7. 42. Malla de un cuarto de pistón

La malla del pistón completo está formada por 233388 tetraedros y 10618 triángulos, mientras que la malla de un cuarto de pistón está compuesta por 229639 tetraedros y 12937 triángulos. En conclusión, tenemos casi el mismo número de elementos en un cuarto del espacio inicial y sin verse apenas afectado el tiempo de cómputo.

Las características de la aleación de aluminio-silicio y los datos necesarios para llevar a cabo la simulación se recogen en la Tabla 7.6:

Dato	Valor
Módulo de Young ( $E$ )	70 MPa
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.34
Desplazamiento ( $u_d$ )	5 mm
Rigidez residual ( $k$ )	$1 \cdot 10^{-5} \cdot E$
Energía de fractura ( $G_c$ )	$5 \cdot 10^{-5} \text{ J/m}^2$
Parámetro de escala ( $l$ )	$1 \cdot 10^{-5}$
Load increments ( $N$ )	200

Tabla 7. 6. Datos del pistón

### 7.6.1. Propagación de la fractura

En este apartado vamos a representar varios instantes de la simulación para observar cómo se propaga la fractura. La simulación del problema se ha realizado con la función cúbica que menos degradación ocasiona, es decir, con  $a_g = 0.1$ . En la Figura 7.43 hemos representado determinados instantes de la simulación:

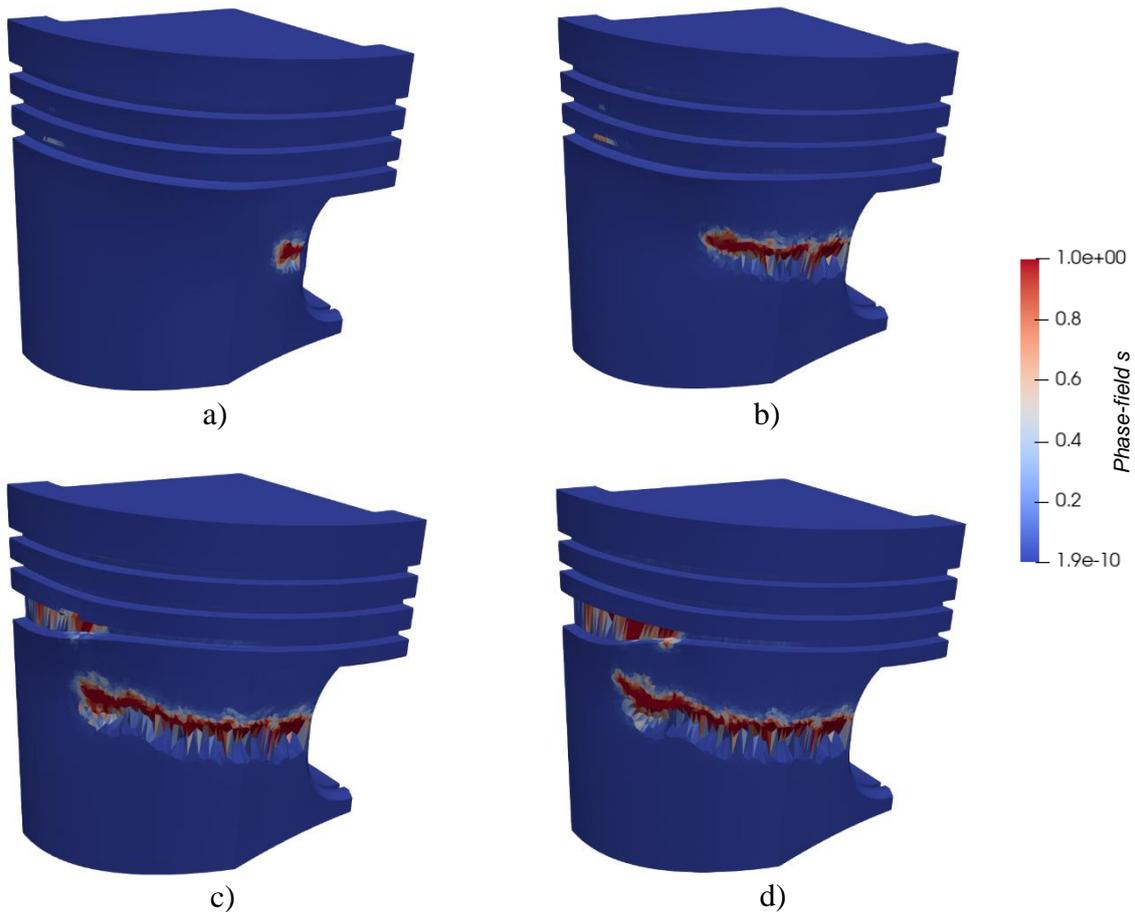


Figura 7. 43. Propagación de la fractura en el pistón en los incrementos: 133 a); 155 b); 165 c); 173 d)

De la Figura 7.43 podemos sacar las siguientes conclusiones: En a) vemos que la iniciación de la fractura tiene lugar en el orificio donde se aloja el perno, además de que se aprecia un pequeño dañado en la ranura de compresión inferior. En la ilustración b) se aprecia como se ha propagado la fractura que se inició en el orificio donde se aloja el perno rápidamente, mientras que en la ranura de compresión aumenta el dañado. En c) comienza a iniciarse la fractura en la ranura de compresión, además de que podemos ver como se ha deformado esta. Por último, en d) podemos observar como la fractura que comenzó a propagarse en el orificio donde se aloja el perno se une a la fractura que se propaga por la ranura de compresión inferior, ocasionando la rotura total del pistón. Aunque no se aprecie la unión de ambas grietas en la malla deformada, sabemos que la rotura total ha tenido lugar debido a que el *phase-field* no varía del incremento 173 al 200. Para corroborar esto representaremos la curva fuerza de reacción de fractura – desplazamiento obtenida para esta simulación:

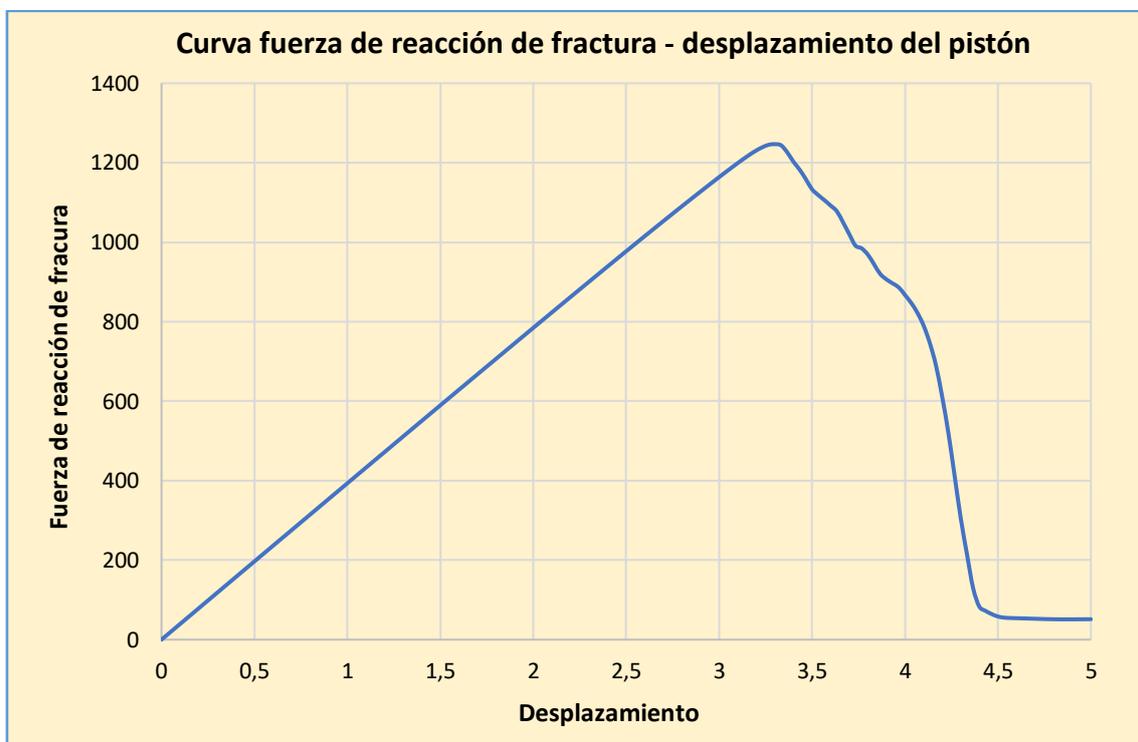


Figura 7. 44. Curva fuerza de reacción de fractura – desplazamiento del pistón

Dado que en cada incremento se produce un desplazamiento de 0.025 mm, en el incremento 173 se ha desplazado la superficie inferior de la falda del pistón un total de 4.325 mm, que es aproximadamente cuando la curva comienza a disminuir rápidamente, es decir, cuando se produce la rotura total. Al igual que ocurría en la simulación de la biela, se aprecian dos pendientes negativas diferentes debido a la proximidad de dos fracturas (la del orificio donde se aloja el perno y la de la ranura de compresión). En la Figura 7.43 c) se puede observar cómo las fracturas están muy próximas. Esto ocurre en el incremento 165, es decir, cuando el desplazamiento impuesto tiene un valor de 4.125 mm. Si observamos la gráfica podemos ver que aproximadamente el cambio de pendiente concuerda cuando el desplazamiento impuesto ha alcanzado dicho valor.

### 7.6.2. Tensiones de Von Mises

A continuación representaremos la evolución del campo de tensiones en el pistón a medida que se va produciendo el desplazamiento en la superficie inferior de la falda.

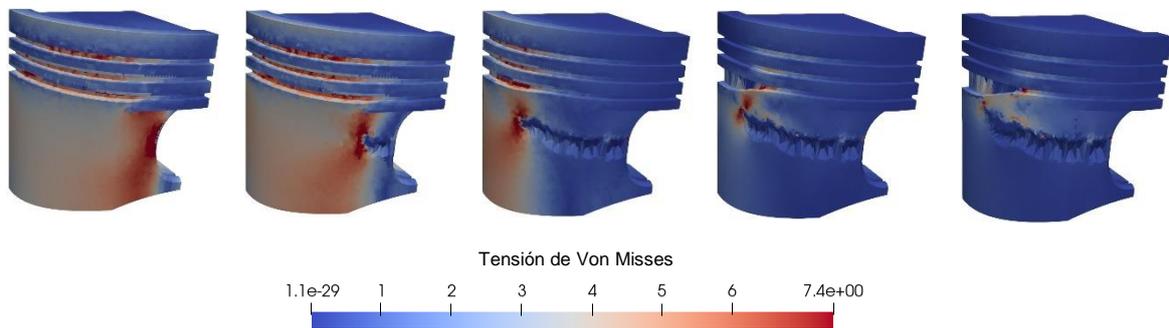


Figura 7. 45. Tensiones de Von Mises en el pistón

En la primera ilustración de la Figura 7.45 gran parte del pistón está tensionado previamente a la aparición de la fractura. Los valores de tensión más altos se encuentran donde va a comenzar la fractura y en casi la totalidad de las tres ranuras de compresión. En la segunda imagen, una vez la fractura se ha iniciado, las tensiones más altas se localizan en el extremo por donde la fractura se está propagando, además de en las ranuras de compresión. En la tercera imagen vemos como el área tensionada en las ranuras de compresión se ha reducido, localizándose en la zona deformada y donde se iniciará la segunda fractura. En las dos últimas ilustraciones se aprecia como el material se relaja debido a la proximidad de las dos fracturas hasta que la rotura es total y las tensiones se anulan.

## 8. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos adquirido los conocimientos necesarios para la resolución del problema de fractura mediante el método *phase-field* gracias a lo expuesto en los capítulos teóricos. Primeramente, hemos aprendido la cinemática y la mecánica de continuo y, posteriormente, la mecánica de fractura junto con el método *phase-field*, siendo estas las bases para la resolución del problema. Mencionar también que este problema acoplado podríamos haberlo resuelto mediante un método discretizado como es el XFEM, pero la resolución del hubiese sido más compleja. Una vez planteadas las EDPs de ambos problemas procedimos a la obtención de las formas débiles de estas para utilizar el método de resolución *incremental + staggered* y, posteriormente, introducimos las nociones básicas de los elementos finitos. Por último, aprendimos cómo implementar el problema acoplado en FreeFem para llevar a cabo su resolución.

En el capítulo 7 hemos expuesto los resultados obtenidos de las distintas simulaciones. Primero, hemos realizado varias simulaciones con geometrías sencillas en dos dimensiones con el fin de comparar la influencia de distintos factores, como son el grosor de la malla, el número de incrementos, las distintas funciones de degradación y la existencia de la irreversibilidad de la fractura o no. Analizando los resultados obtenidos podemos decir que todos estos factores tienen una gran influencia en la propagación de la fractura, sobre todo el grosor de la malla, que cuanto menor en tamaño sean los elementos, más cercana a la realidad será la propagación de la fractura. El número de *load increments* también tiene una influencia considerable, ya que el desplazamiento impuesto en realidad se llevaría a cabo progresivamente poco a poco y no en grandes cantidades de desplazamiento entre cada incremento, por lo que un mayor número de incrementos sería lo ideal para simular un caso real. Destacar la implementación de la irreversibilidad de la fractura, ya que en zonas del material dañadas, incluso áreas completamente fracturadas, se producía una disminución del *phase-field*, algo que no es posible en la realidad. En cuanto a las diferencias observadas en los resultados por el uso de unas funciones de degradación u otras, mencionar que la función de degradación cuadrática es más conservadora a la hora de verificar cuando el material comienza a dañarse, ya que en las simulaciones podemos ver que la pieza comienza a fracturar primero en este caso, además de que mayor área del material presenta un leve dañado, cosa que ocurre en menor medida cuando utilizamos una función de degradación cúbica. Además, las simulaciones realizadas con una  $g(s)$  cuadrática son más simples debido a que cuando se lleva a cabo el método *staggered*, hace que el problema mecánico y de fractura sean lineales. Por el contrario, el uso de una función de degradación cúbica otorga resultados más cercanos a la realidad, pero hace que la resolución sea más compleja y que el problema de fractura no sea lineal. Por tanto, deberíamos haber implementado un Newton-Raphson para resolverla, por eso, algunos resultados obtenidos con la  $g(s)$  cúbica pueden resultar extraños si el número de incrementos es bajo. En el ejemplo 1 nos encontramos con este inconveniente, vamos a mostrar a continuación la fractura producida para ambos tipos de funciones de degradación:

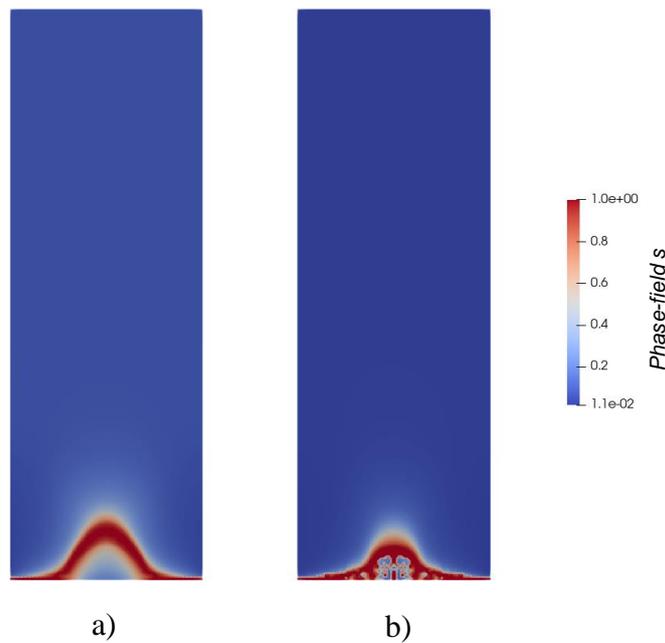


Figura 8. 1. Propagación de la fractura con funciones de degradación cuadrática a) y cúbica b)

Finalmente, hemos realizado la simulación de geometrías en 3D dentro el ámbito industrial. En los tres casos realizados podemos ver que se han obtenido resultados coherentes, tal es así que podemos ver como se produce el fenómeno de encuellamiento en la probeta al igual que en un ensayo de tracción real. En la simulación de la biela también observamos como influyen los defectos de fabricación en el comportamiento de los materiales industriales, haciendo que la pieza se dañe antes y para una carga menor.

Mencionar que nos hubiera gustado realizar geometrías mucho más complejas, así como mallados muy finos y utilizando un gran número de incrementos para obtener resultados más realistas, pero los medios computacionales son limitados y el tiempo necesario para la realización de esas simulaciones hubiese sido muy extenso.

En conclusión, los objetivos propuestos en este proyecto han sido realizados de manera satisfactoria, profundizando en el campo de elementos finitos, el cual es utilizado en numerosos problemas de ingeniería para el diseño y mejora de productos y aplicaciones industriales, ya sea en transmisión del calor, aeronáutica, análisis estructural, mecánica de fluidos, etc. Tal es así que se han desarrollado gran cantidad de softwares que se basan en el método de elementos finitos para resolver problemas ingenieriles.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] T. L. Anderson, *Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications*, 2005, pages 3-12.
- [2] X. Oliver Olivella, C. Agelet de Saracibar Bosch, *Mecánica de medios continuos para ingenieros*, 2000, pág. 1.
- [3] G.A. Francfort, J.-J. Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, *J. Mech. Phys. Solids* 46 (1998) 1319–1342.
- [4] C. Miehe, L.M. Schänzel, H. Ulmer, Phase field modeling of fracture in multiphysics problems. Part I. Balance of crack surface and failure criteria for brittle crack propagation in thermo-elastic solids, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 294 (2015) 449–485.
- [5] C. Hesch, S. Schuß, M. Dittmann, M. Franke, K. Weinberg, Isogeometric analysis and hierarchical refinement for higher-order phase-field models, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 303 (2016) 185–207.
- [6] J. Bonet, A.J. Gil, R.D. Wood, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis: Statics*, Cambridge University Press, 2016.
- [7] Pandolfi, K. Weinberg, A numerical approach to the analysis of failure modes in anisotropic plates, *Eng. Fract. Mech.* 78 (2011) 2052–2069.
- [8] C. Hesch, K. Weinberg, Thermodynamically consistent algorithms for a finitodeformation phase-field approach to fracture, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 99 (2014) 906–924.
- [9] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *El método de los elementos finitos. Formulación básica y problemas lineales*.
- [10] C. Miehe, M. Hofacker, F. Welschinger, A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199 (2010) 2765–2778.
- [11] C. Hesch, A.J. Gil, R. Ortigosa, M. Dittmann, C. Bilgend, P. Betsch, M. Franke, A. Janz, K. Weinbergd, A framework for polyconvex large strain phase-field methods to fracture, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 317, 2017, pages 649-683.
- [12] Eduardo Araujo, Blog ESSS, 2016.
- [13] J. T. Celigüeta Lizarza, *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural*, págs. 91-93.

## ANEXOS

### Anexo 1: Cuerpo rectangular

```
load "iovtk"; //Paquete para poder procesar los datos en Paraview
```

```
//MALLA
```

```
int nx=100;
```

```
int ny=300;
```

```
real lx=1.0;//longitud eje x
```

```
real ly=3.0;//longitud eje y
```

```
mesh Th=square(nx,ny,[x*lx,y*ly],flags=1);
```

```
plot(Th);
```

```
//PARÁMETROS FISICOS DEL PROBLEMA
```

```
real E=1, nu=0.4;
```

```
real lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu)),mu=E/(2*(1+nu));
```

```
real sqrt2=sqrt(2.);
```

```
real k=1e-5*E;
```

```
real Gc=5.0e-4; //energía de fractura
```

```
real h=0.1/nx;
```

```
real l=2.0*h;
```

```
int n=200; //load increments
```

```
real ud=0.5; //desplazamiento impuesto
```

```
real du=ud/n;
```

```
real [int] Fvec(n);
```

```
real w;
```

```
real F;
```

```
//ESPACIO DE ELEMENTOS FINITOS
```

```
fespace Vh(Th,P1);
```

```
Vh u1,u2,v1,v2,du1,du2;
```

```
fespace Vhs(Th,P1);
```

```
Vhs s,ds,vs,sold;
```

```
fespace Wh(Th,P1);
```

```
Wh sigmavm;
```

```
//CREACION DE MACROS
```

```
macro div(u1,u2) (dx(u1)+dy(u2)) //EOM
```

```
macro epsilon(u1,u2) [dx(u1),dy(u2),(dy(u1)+dx(u2))/sqrt2] //EOM
```

```
macro grads(s) [dx(s),dy(s)]//EOM
```

```
macro IdentityMatrix [1.0, 0.0, 0.0, 1.0] //EOM
```

```
macro Trace(a) (a[0] + a[3]) //EOM
```

```
macro epsilonmatrix(u1,u2) [dx(u1), 0.5*(dy(u1) + dx(u2)), 0.5*(dy(u1) + dx(u2)),  
dy(u2)] //EOM
```

```

macro stress (u1,u2)(lambda*IdentityMatrix*Trace(epsilon(u1,u2)) +2.
*mu*epsilon(u1,u2))/EOM
macro g(s) ((1-s)^2+k)/EOM
macro gprima(s) (2*(s-1)) //EOM
macro gprimaprima(s) 2//EOM
macro FractureDiff(s,vs) (Gc*1*(grads(s)*grads(vs))+(Gc/l)*s*vs) //EOM
macro Welastic(u1,u2) 0.5*(stress(u1,u2)*epsilon(u1,u2)) //EOM

```

```
//PLANTEAMIENTO DE LA FORMULACION VARIACIONAL
```

```

problem elasticidad([du1,du2], [v1,v2])= int2d(Th)(
g(s)*(stress(du1,du2)*epsilon(v1,v2)))
+int2d(Th)(g(s)*(stress(u1,u2)*epsilon(v1,v2)))
+ on (3,du2=du) //Condiciones de contorno
+ on( 1,du1=0,du2=0);

```

```

problem fractura (ds,vs)= int2d(Th)(
FractureDiff(ds,vs) + gprimaprima(s)*ds*Welastic(u1,u2)*vs)
+ int2d(Th)(FractureDiff(s,vs) + vs*gprima(s)*Welastic(u1,u2));

```

```
ofstream ff("F.dat");
```

```
//RESOLUCION DEL PROBLEMA
```

```

for(int i=0;i<n;i++)
{
elasticidad;
u1=u1+du1;
u2=u2+du2;

```

```

sold=s;
fractura;
s=s+ds;
s=min(s,1);
s=max(s,0);
s=max(s,sold);

```

```

w=int2d(Th)((1-s)^2*stress(u1,u2)*epsilon(u1,u2));
F=w/(ud*(i+1)/n);
Fvec[i]=F;
ff<<F<<endl;

```

```
//TENSION DE VON MISSES
```

```

sigmavm=g(s)*(sqrt(stress(u1,u2)[0]*stress(u1,u2)[0]
+ stress(u1,u2)[3]*stress(u1,u2)[3]
-stress(u1,u2)[0]*stress(u1,u2)[3] +
3*stress(u1,u2)[1]*stress(u1,u2)[1]));

```

```
savevtk("Ejemplo1_DegQuadratic_n="+nx+"_n="+ny+"_LoadIncrements_"+n+"_"+i+
".vtk",Th,[u1,u2],i,s,signmvm);
//savevtk("Ejemplo1_DegCubic_nx="+nx+"_n="+ny+"_LoadIncrements_"+n+"_"+i+
".vtk",Th,[u1,u2],i,s,signmvm);
}
```

## Anexo 2: Cuerpo en forma de L

load "iovtk"; //Paquete para poder procesar los datos en Paraview

//MALLA

border a1(t=0,1){x=2\*t;y=0;label=1;}

border a2(t=0,1){x=2;y=t;label=2;}

border a3(t=0,1){x=2-t;y=1;label=3;}

border a4(t=0,1){x=1;y=1+t;label=4;}

border a5(t=0,1){x=1-t;y=2;label=5;}

border a6(t=0,1){x=0;y=2-2\*t;label=6;}

real n1=20;//resolución aristas largas

real n2=10;//resolución aristas cortas

mesh

buildmesh(a1(n1\*10)+a2(n2\*10)+a3(n2\*10)+a4(n2\*10)+a5(n2\*10)+a6(n1\*10));

plot(Th);

Th=

//PARÁMETROS FISICOS DEL PROBLEMA

real E=1, nu=0.4;

real lambda = E\*nu/((1+nu)\*(1-2\*nu)),mu=E/(2\*(1+nu));

real sqrt2=sqrt(2.);

real k=1e-5;

real Gc=5.0e-4; //energía de fractura

real l=5.0e-3;

int n=500; //load increments

real ud=-1; //desplazamiento impuesto

real du=ud/n;

real [int] Fvec(n);

real w;

real F;

real ag=0.1;

//ESPACIO DE ELEMENTOS FINITOS

fespace Vh(Th,P1);

Vh u1,u2,v1,v2,du1,du2;

fespace Vhs(Th,P1);

Vhs s,ds,vs,sold;

fespace Wh(Th,P1);

Wh sigmavm;

//CREACION DE MACROS

macro div(u1,u2) (dx(u1)+dy(u2)) //EOM

macro epsilon(u1,u2) [dx(u1),dy(u2),(dy(u1)+dx(u2))/sqrt2] //EOM

macro grads(s) [dx(s),dy(s)]//EOM

macro IdentityMatrix [1.0, 0.0, 0.0, 1.0] //EOM

macro Trace(a) (a[0] + a[3]) //EOM

```

macro epsilonmatrix(u1,u2) [dx(u1), 0.5*(dy(u1) + dx(u2)), 0.5*(dy(u1) + dx(u2)),
dy(u2)] //EOM
macro stress (u1,u2)(lambda*IdentityMatrix*Trace(epsilonmatrix(u1,u2)) +2.
*mu*epsilonmatrix(u1,u2))//EOM
macro g(s) ((2-ag)*(s-1)^3+(3-ag)*(s-1)^2+k)//EOM
macro gprima(s) (3*(2-ag)*(s-1)^2+2*(3-ag)*(s-1)) //EOM
macro gprimaprima(s) (6*(2-ag)*(s-1)+2*(3-ag)) //EOM
macro FractureDiff(s,vs) (Gc*1*(grads(s)*grads(vs))+(Gc/l)*s*vs) //EOM
macro Welastic(u1,u2) 0.5*(stress(u1,u2)*epsilonmatrix(u1,u2)) //EOM

```

//PLANTEAMIENTO DE LA FORMULACION VARIACIONAL

```

problem elasticidad([du1,du2], [v1,v2])= int2d(Th)(
g(s)*(stress(du1,du2)*epsilonmatrix(v1,v2)))
+int2d(Th)(g(s)*(stress(u1,u2)*epsilonmatrix(v1,v2)))
+ on (2,du2=du) //Condiciones de contorno
+ on (5,du1=0,du2=0);

```

```

problem fractura (ds,vs)= int2d(Th)(
FractureDiff(ds,vs) + gprimaprima(s)*ds*Welastic(u1,u2)*vs)
+ int2d(Th)(FractureDiff(s,vs) + vs*gprima(s)*Welastic(u1,u2));

```

```

ofstream ff("F.dat");

```

//RESOLUCION DEL PROBLEMA

```

for(int i=0;i<n;i++)
{
elasticidad;
u1=u1+du1;
u2=u2+du2;

```

```

sold=s;
fractura;
s=s+ds;
s=min(s,1);
s=max(s,0);
s=max(s,sold);

```

```

w=int2d(Th)((1-s)^2*stress(u1,u2)*epsilonmatrix(u1,u2));
F=w/(ud*(i+1)/n);
Fvec[i]=F;
ff<<F<<endl;

```

```
//TENSION DE VON MISSES
sigmavm=g(s)*(sqrt(stress(u1,u2)[0]*stress(u1,u2)[0]
+ stress(u1,u2)[3]*stress(u1,u2)[3]
-stress(u1,u2)[0]*stress(u1,u2)[3] +
3*stress(u1,u2)[1]*stress(u1,u2)[1]));

savevtk("Ejemplo2_DegCubic_LoadIncrements_"+n+"_"+i+".vtk",Th,[u1,u2],i,s,sigma
vm);
}
```

## Anexo 3: Cuerpo rectangular con grieta inducida

### Con irreversibilidad de la fractura

```
load "gmsch"; //Paquete para poder cargar una malla de GMSH
load "iovtk"; //Paquete para poder procesar los datos en Paraview
```

```
//MALLA
```

```
mesh Th = gmshload("EJ3.msh");
plot(Th,wait=true);
```

```
//PARÁMETROS FISICOS DEL PROBLEMA
```

```
real E=1, nu=0.4;
real lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu)),mu=E/(2*(1+nu));
real sqrt2=sqrt(2.);
real k=1e-5;
real Gc=5.0e-4; //energía de fractura
real l=5.0e-3;
int n=300; //load increments
real ud=0.2; //desplazamiento impuesto
real du=ud/n;
real [int] Fvec(n);
real w;
real F;
```

```
//ESPACIO DE ELEMENTOS FINITOS
```

```
fespace Vh(Th,P1);
Vh u1,u2,v1,v2,du1,du2;
fespace Vhs(Th,P1);
Vhs s,ds,vs,sold;
fespace Wh(Th,P1);
Wh sigmavm;
```

```
//CREACION DE MACROS
```

```
macro div(u1,u2) (dx(u1)+dy(u2)) //EOM
macro epsilon(u1,u2) [dx(u1),dy(u2),(dy(u1)+dx(u2))/sqrt2] //EOM
macro grads(s) [dx(s),dy(s)]//EOM
```

```
macro IdentityMatrix [1.0, 0.0, 0.0, 1.0] //EOM
```

```
macro Trace(a) (a[0] + a[3]) //EOM
```

```
macro epsilonmatrix(u1,u2) [dx(u1), 0.5*(dy(u1) + dx(u2)), 0.5*(dy(u1) + dx(u2)),
dy(u2)] //EOM
```

```
macro stress (u1,u2)(lambda*IdentityMatrix*Trace(epsilonmatrix(u1,u2)) +2.
*mu*epsilonmatrix(u1,u2))//EOM
```

```
macro g(s) ((1-s)^2+k)//EOM
```

```
macro gprima(s) (2*(s-1)) //EOM
```

```
macro gprimaprima(s) 2//EOM
```

```
macro FractureDiff(s,vs) (Gc*1*(grads(s)*grads(vs))+(Gc/l)*s*vs) //EOM
```

```

macro Welastic(u1,u2) 0.5*(stress(u1,u2)*epsilon(u1,u2)) //EOM

//PLANTEAMIENTO DE LA FORMULACION VARIACIONAL
problem elasticidad([du1,du2], [v1,v2])= int2d(Th)(
g(s)*(stress(du1,du2)*epsilon(v1,v2)))
+int2d(Th)(g(s)*(stress(u1,u2)*epsilon(v1,v2)))
+ on (9,du2=du) //Condiciones de contorno
+ on (10,du2=-du) + on(11,du2=0) + on(12,du1=0);

problem fractura (ds,vs)= int2d(Th)(
FractureDiff(ds,vs) + gprima(s)*ds*Welastic(u1,u2)*vs)
+ int2d(Th)(FractureDiff(s,vs) + vs*gprima(s)*Welastic(u1,u2));

ofstream ff("F.dat");

//RESOLUCION DEL PROBLEMA
for(int i=0;i<n;i++)
{
elasticidad;
u1=u1+du1;
u2=u2+du2;

sold=s;
fractura;
s=s+ds;
s=min(s,1);
s=max(s,0);
s=max(s,sold);

w=int2d(Th)((1-s)^2*stress(u1,u2)*epsilon(u1,u2));
F=w/(ud*(i+1)/n);
Fvec[i]=F;
ff<<F<<endl;

//TENSION DE VON MISSES
sigmavm=g(s)*(sqrt(stress(u1,u2)[0]*stress(u1,u2)[0]
+ stress(u1,u2)[3]*stress(u1,u2)[3]
-stress(u1,u2)[0]*stress(u1,u2)[3] +
3*stress(u1,u2)[1]*stress(u1,u2)[1]));

savevtk("Ejemplo3_ LoadIncrements_" + n + "_" + i + ".vtk", Th, [u1,u2], i, s, sigmavm);
}

```

## Sin irreversibilidad de la fractura

```
load "gmsht"; //Paquete para poder cargar una malla de GMSH
load "iovtk"; //Paquete para poder procesar los datos en Paraview
```

```
//MALLA
```

```
mesh Th = gmshload("EJ3.msh");
plot(Th,wait=true);
```

```
//PARÁMETROS FISICOS DEL PROBLEMA
```

```
real E=1, nu=0.4;
real lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu)),mu=E/(2*(1+nu));
real sqrt2=sqrt(2.);
real k=1e-5;
real Gc=5.0e-4; //energía de fractura
real l=5.0e-3;
int n=300; //load increments
real ud=0.2; //desplamiento impuesto
real du=ud/n;
real [int] Fvec(n);
real w;
real F;
```

```
//ESPACIO DE ELEMENTOS FINITOS
```

```
fespace Vh(Th,P1);
Vh u1,u2,v1,v2,du1,du2;
fespace Vhs(Th,P1);
Vhs s,ds,vs;
fespace Wh(Th,P1);
Wh sigmavm;
```

```
//CREACION DE MACROS
```

```
macro div(u1,u2) (dx(u1)+dy(u2)) //EOM
macro epsilon(u1,u2) [dx(u1),dy(u2),(dy(u1)+dx(u2))/sqrt2] //EOM
macro grads(s) [dx(s),dy(s)]//EOM

macro IdentityMatrix [1.0, 0.0, 0.0, 1.0] //EOM
macro Trace(a) (a[0] + a[3]) //EOM
macro epsilonmatrix(u1,u2) [dx(u1), 0.5*(dy(u1) + dx(u2)), 0.5*(dy(u1) + dx(u2)),
dy(u2)] //EOM
macro stress (u1,u2)(lambda*IdentityMatrix*Trace(epsilonmatrix(u1,u2)) +2.
*mu*epsilonmatrix(u1,u2))//EOM
macro g(s) ((1-s)^2+k)//EOM
macro gprima(s) (2*(s-1)) //EOM
macro gprimaprima(s) 2//EOM
macro FractureDiff(s,vs) (Gc*1*(grads(s)'*grads(vs))+(Gc/l)*s*vs) //EOM
macro Welastic(u1,u2) 0.5*(stress(u1,u2)*epsilonmatrix(u1,u2)) //EOM
```

```
//PLANTEAMIENTO DE LA FORMULACION VARIACIONAL
```

```
problem elasticidad([du1,du2], [v1,v2])= int2d(Th)(  
g(s)*(stress(du1,du2)*epsilonmatrix(v1,v2)))  
+int2d(Th)(g(s)*(stress(u1,u2)*epsilonmatrix(v1,v2)))  
+ on (9,du2=du) //Condiciones de contorno  
+ on (10,du2=-du) + on(11,du2=0) + on(12,du1=0);
```

```
problem fractura (ds,vs)= int2d(Th)(  
FractureDiff(ds,vs) + gprimaprima(s)*ds*Welastic(u1,u2)*vs)  
+ int2d(Th)(FractureDiff(s,vs) + vs*gprima(s)*Welastic(u1,u2));
```

```
ofstream ff("F.dat");
```

```
//RESOLUCION DEL PROBLEMA
```

```
for(int i=0;i<n;i++)  
{  
elasticidad;  
u1=u1+du1;  
u2=u2+du2;
```

```
fractura;  
s=s+ds;  
s=min(s,1);  
s=max(s,0);
```

```
w=int2d(Th)((1-s)^2*stress(u1,u2)*epsilonmatrix(u1,u2));  
F=w/(ud*(i+1)/n);  
Fvec[i]=F;  
ff<<F<<endl;
```

```
//TENSION DE VON MISSES
```

```
sigmavm=g(s)*(sqrt(stress(u1,u2)[0]*stress(u1,u2)[0]  
+ stress(u1,u2)[3]*stress(u1,u2)[3]  
-stress(u1,u2)[0]*stress(u1,u2)[3] +  
3*stress(u1,u2)[1]*stress(u1,u2)[1]));
```

```
savevtk("Ejemplo3_LoadIncrements_"+n+"_"+i+".vtk",Th,[u1,u2],i,s,sigmavm);  
}
```

## Anexo 4: Probeta de ensayo de tracción

```
load "gmsH"; //Paquete para poder cargar una malla de GMSH
load "msh3"; //Paqueta para poder crear una malla 3D
load "iovtk";

//CREACIÓN DE LA MALLA//
mesh3 Th = gmsHload3("probeta.msh");
plot(Th,wait=true);

//PARAMETROS FISICOS Y CARGAS
real E=210, nu=0.3;
real lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu)),mu=E/(2*(1+nu));
real sqrt2=sqrt(2.);
real k=1e-5*E;
real Gc=2.5e-4; //energía de fractura
real l=1e-5;
int n=150; //load increments
real ud=28; //desplazamiento impuesto
real du=ud/n;
real [int] Fvec(n);
real w;
real F;
real ag=0.1;

//ESPACIO DE ELEMENTOS FINITOS
fespace Vh(Th,P1);
Vh u1,u2,u3,v1,v2,v3,du1,du2,du3;
fespace Vhs(Th,P1);
Vhs s,ds,vs,sold;
fespace Wh(Th,P1); // elementos P1
Wh sigmavm;
Wh FS;

//MACROS
macro div(u1,u2,u3) (dx(u1)+dy(u2)+dz(u3)) //EOM
macro epsilon(u1,u2,u3)
[dx(u1),dy(u2),dz(u3),(dz(u2)+dy(u3))/sqrt2,(dz(u1)+dx(u3))/sqrt2,(dy(u1)+dx(u2))/sqrt
2] // EOM
macro grads(s) [dx(s),dy(s),dz(s)]//EOM
macro IdentityMatrix [1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0] //EOM
macro Trace(a) (a[0] + a[4] + a[8]) //EOM

macro epsilonmatrix(u1,u2,u3)
[dx(u1),0.5*(dy(u1)+dx(u2)),0.5*(dz(u1)+dx(u3)),0.5*(dy(u1)+dx(u2)),dy(u2),0.5*(dy(
u3)+dz(u2)),0.5*(dz(u1)+dx(u3)),0.5*(dy(u3)+dz(u2)),dz(u3)] //EOM
```

```
macro stress (u1,u2,u3)(lambda*IdentityMatrix*Trace(epsilon(u1,u2,u3)) +2.
*mu*epsilon(u1,u2,u3))//EOM
```

```
macro g(s) ((2-ag)*(s-1)^3+(3-ag)*(s-1)^2+k)//EOM
```

```
macro gprima(s) (3*(2-ag)*(s-1)^2+2*(3-ag)*(s-1)) //EOM
```

```
macro gprimaprima(s) (6*(2-ag)*(s-1)+2*(3-ag)) //EOM
```

```
macro FractureDiff(s,vs) (Gc*1*(grads(s)*grads(vs))+(Gc/l)*s*vs) //EOM
```

```
macro Welastic(u1,u2,u3) 0.5*(stress(u1,u2,u3)*epsilon(u1,u2,u3)) //EOM
```

```
//PLANTEAMIENTO DE LA FORMULACION VARIACIONAL
```

```
problem elasticidad([du1,du2,du3], [v1,v2,v3])= int3d(Th)(
g(s)*(stress(du1,du2,du3)*epsilon(v1,v2,v3)))
+int3d(Th)(g(s)*(stress(u1,u2,u3)*epsilon(v1,v2,v3)))
+ on (24,du3=du)
+ on(25,du1=0,du2=0,du3=0);
```

```
problem fractura (ds,vs)= int3d(Th)(
FractureDiff(ds,vs) + gprimaprima(s)*ds*Welastic(u1,u2,u3)*vs)
+ int3d(Th)(FractureDiff(s,vs) + vs*gprima(s)*Welastic(u1,u2,u3));
```

```
ofstream ff("F.dat");
```

```
//RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA
```

```
for(int i=0;i<n;i++)
```

```
{
elasticidad;
u1=u1+du1;
u2=u2+du2;
u3=u3+du3;
```

```
sold=s;
fractura;
s=s+ds;
s=min(s,1);
s=max(s,0);
s=max(s,sold);
```

```
w=int3d(Th)((1-s)^2*(lambda*div(u1,u2,u3)*div(u1,u2,u3)+2.
*mu*(epsilon(u1,u2,u3)*epsilon(u1,u2,u3))));
```

```
F=w/(ud*(i+1)/n);
```

```
Fvec[i]=F;
```

```
ff<<<F<<<endl;
```

```

sigmavm=g(s)*sqrt(stress(u1,u2,u3)[0]*stress(u1,u2,u3)[0]
+ stress(u1,u2,u3)[4]*stress(u1,u2,u3)[4]
+ stress(u1,u2,u3)[8]*stress(u1,u2,u3)[8]
-stress(u1,u2,u3)[0]*stress(u1,u2,u3)[4]
-stress(u1,u2,u3)[4]*stress(u1,u2,u3)[8]
-stress(u1,u2,u3)[0]*stress(u1,u2,u3)[8] +
3*stress(u1,u2,u3)[1]*stress(u1,u2,u3)[1] +
3*stress(u1,u2,u3)[2]*stress(u1,u2,u3)[2] +
3*stress(u1,u2,u3)[5]*stress(u1,u2,u3)[5]);

```

```

mesh3 Thd = movemesh3(Th, transfo=[x+u1, y+u2, z+u3]); // malla deformada
savevtk("Fractura3D_Probeta_" + i + ".vtk", Thd, [u1, u2, u3], i, s, sigmavm);
}

```

## Anexo 5: Biela

```
load "gmsh"; //Paquete para poder cargar una malla de GMSH
load "msh3"; //Paqueta para poder crear una malla 3D
load "iovtk";

//CREACIÓN DE LA MALLA//
mesh3 Th = gmshload3("biela.msh");
plot(Th,wait=true);

//PARAMETROS FISICOS Y CARGAS
real E=210, nu=0.30;
real lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu)),mu=E/(2*(1+nu));
real sqrt2=sqrt(2.);
real k=1e-5*E;
real Gc=1.5e-4; //energía de fractura
real l=1e-5;
int n=150; //load increments
real ud=10; //desplazamiento impuesto
real du=ud/n;
real [int] Fvec(n);
real w;
real F;

//ESPACIO DE ELEMENTOS FINITOS
fespace Vh(Th,P1);
Vh u1,u2,u3,v1,v2,v3,du1,du2,du3;
fespace Vhs(Th,P1);
Vhs s,ds,vs,sold;
fespace Wh(Th,P1); // elementos P1
Wh sigmavm;
Wh FS;

//MACROS
macro div(u1,u2,u3) (dx(u1)+dy(u2)+dz(u3)) //EOM
macro epsilon(u1,u2,u3)
[dx(u1),dy(u2),dz(u3),(dz(u2)+dy(u3))/sqrt2,(dz(u1)+dx(u3))/sqrt2,(dy(u1)+dx(u2))/sqrt
2] // EOM
macro grads(s) [dx(s),dy(s),dz(s)]//EOM
macro IdentityMatrix [1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0] //EOM
macro Trace(a) (a[0] + a[4] + a[8]) //EOM

macro epsilonmatrix(u1,u2,u3)
[dx(u1),0.5*(dy(u1)+dx(u2)),0.5*(dz(u1)+dx(u3)),0.5*(dy(u1)+dx(u2)),dy(u2),0.5*(dy(
u3)+dz(u2)),0.5*(dz(u1)+dx(u3)),0.5*(dy(u3)+dz(u2)),dz(u3)] //EOM
```

```
macro stress (u1,u2,u3)(lambda*IdentityMatrix*Trace(epsilon(u1,u2,u3)) +2.
*mu*epsilon(u1,u2,u3))//EOM
```

```
macro g(s) ((1-s)^2+k)//EOM
```

```
macro gprima(s) (2*(s-1)) //EOM
```

```
macro gprimaprima(s) 2//EOM
```

```
macro FractureDiff(s,vs) (Gc*1*(grads(s)*grads(vs))+(Gc/l)*s*vs) //EOM
```

```
macro Welastic(u1,u2,u3) 0.5*(stress(u1,u2,u3)*epsilon(u1,u2,u3)) //EOM
```

```
//PLANTEAMIENTO DE LA FORMULACION VARIACIONAL
```

```
problem elasticidad([du1,du2,du3], [v1,v2,v3])= int3d(Th)(
g(s)*(stress(du1,du2,du3)*epsilon(v1,v2,v3)))
+int3d(Th)(g(s)*(stress(u1,u2,u3)*epsilon(v1,v2,v3)))
+ on (188,du2=du)
+ on(187,du1=0,du2=0,du3=0);
```

```
problem fractura (ds,vs)= int3d(Th)(
FractureDiff(ds,vs) + gprimaprima(s)*ds*Welastic(u1,u2,u3)*vs)
+ int3d(Th)(FractureDiff(s,vs) + vs*gprima(s)*Welastic(u1,u2,u3));
```

```
ofstream ff("F.dat");
```

```
//RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA
```

```
for(int i=0;i<n;i++)
```

```
{
elasticidad;
u1=u1+du1;
u2=u2+du2;
u3=u3+du3;
```

```
sold=s;
fractura;
s=s+ds;
s=min(s,1);
s=max(s,0);
s=max(s,sold);
```

```
w=int3d(Th)((1-s)^2*(lambda*div(u1,u2,u3)*div(u1,u2,u3)+2.
*mu*(epsilon(u1,u2,u3)*epsilon(u1,u2,u3))));
```

```
F=w/(ud*(i+1)/n);
```

```
Fvec[i]=F;
```

```
ff<<F<<endl;
```

```

sigmavm=g(s)*sqrt(stress(u1,u2,u3)[0]*stress(u1,u2,u3)[0]
+ stress(u1,u2,u3)[4]*stress(u1,u2,u3)[4]
+ stress(u1,u2,u3)[8]*stress(u1,u2,u3)[8]
-stress(u1,u2,u3)[0]*stress(u1,u2,u3)[4]
-stress(u1,u2,u3)[4]*stress(u1,u2,u3)[8]
-stress(u1,u2,u3)[0]*stress(u1,u2,u3)[8] +
3*stress(u1,u2,u3)[1]*stress(u1,u2,u3)[1] +
3*stress(u1,u2,u3)[2]*stress(u1,u2,u3)[2] +
3*stress(u1,u2,u3)[5]*stress(u1,u2,u3)[5]);

```

```

mesh3 Thd = movemesh3(Th, transfo=[x+u1, y+u2, z+u3]); // malla deformada
savevtk("Fractura3D_Biela_" + i + ".vtk", Thd, [u1, u2, u3], i, s, sigmavm);
}

```

## Anexo 6: Pistón

```
load "gmsh"; //Paquete para poder cargar una malla de GMSH
load "msh3"; //Paqueta para poder crear una malla 3D
load "iovtk";

//CREACIÓN DE LA MALLA//
mesh3 Th = gmshload3("piston.msh");
plot(Th,wait=true);

//PARAMETROS FISICOS Y CARGAS
real E=70, nu=0.34;
real lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu)),mu=E/(2*(1+nu));
real sqrt2=sqrt(2.);
real k=1e-5*E;
real Gc=5e-5; //energía de fractura
real l=1e-5;
int n=200; //load increments
real ud=-5; //desplazamiento impuesto
real du=ud/n;
real [int] Fvec(n);
real w;
real F;
real ag=0.1;

//ESPACIO DE ELEMENTOS FINITOS
fespace Vh(Th,P1);
Vh u1,u2,u3,v1,v2,v3,du1,du2,du3;
fespace Vhs(Th,P1);
Vhs s,ds,vs,sold;
fespace Wh(Th,P1); // elementos P1
Wh sigmavm;
Wh FS;

//MACROS
macro div(u1,u2,u3) (dx(u1)+dy(u2)+dz(u3)) //EOM
macro epsilon(u1,u2,u3)
[dx(u1),dy(u2),dz(u3),(dz(u2)+dy(u3))/sqrt2,(dz(u1)+dx(u3))/sqrt2,(dy(u1)+dx(u2))/sqrt
2] // EOM
macro grads(s) [dx(s),dy(s),dz(s)]//EOM
macro IdentityMatrix [1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0] //EOM
macro Trace(a) (a[0] + a[4] + a[8]) //EOM

macro epsilonmatrix(u1,u2,u3)
[dx(u1),0.5*(dy(u1)+dx(u2)),0.5*(dz(u1)+dx(u3)),0.5*(dy(u1)+dx(u2)),dy(u2),0.5*(dy(
u3)+dz(u2)),0.5*(dz(u1)+dx(u3)),0.5*(dy(u3)+dz(u2)),dz(u3)] //EOM
```

```
macro stress (u1,u2,u3)(lambda*IdentityMatrix*Trace(epsilon(u1,u2,u3)) +2.
*mu*epsilon(u1,u2,u3))//EOM
```

```
macro g(s) ((2-ag)*(s-1)^3+(3-ag)*(s-1)^2+k)//EOM
```

```
macro gprima(s) (3*(2-ag)*(s-1)^2+2*(3-ag)*(s-1)) //EOM
```

```
macro gprimaprima(s) (6*(2-ag)*(s-1)+2*(3-ag)) //EOM
```

```
macro FractureDiff(s,vs) (Gc*1*(grads(s)*grads(vs))+(Gc/l)*s*vs) //EOM
```

```
macro Welastic(u1,u2,u3) 0.5*(stress(u1,u2,u3)*epsilon(u1,u2,u3)) //EOM
```

```
//PLANTEAMIENTO DE LA FORMULACION VARIACIONAL
```

```
problem elasticidad([du1,du2,du3], [v1,v2,v3])= int3d(Th)(
g(s)*(stress(du1,du2,du3)*epsilon(v1,v2,v3)))
+int3d(Th)(g(s)*(stress(u1,u2,u3)*epsilon(v1,v2,v3)))
+ on (2,du2=du)
+ on(3,du1=0,du2=0,du3=0)+ on(4,du1=0,du3=0);
```

```
problem fractura (ds,vs)= int3d(Th)(
FractureDiff(ds,vs) + gprimaprima(s)*ds*Welastic(u1,u2,u3)*vs)
+ int3d(Th)(FractureDiff(s,vs) + vs*gprima(s)*Welastic(u1,u2,u3));
```

```
ofstream ff("F.dat");
```

```
//RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA
```

```
for(int i=0;i<n;i++)
```

```
{
```

```
elasticidad;
```

```
u1=u1+du1;
```

```
u2=u2+du2;
```

```
u3=u3+du3;
```

```
sold=s;
```

```
fractura;
```

```
s=s+ds;
```

```
s=min(s,1);
```

```
s=max(s,0);
```

```
s=max(s,sold);
```

```
w=int3d(Th)((1-s)^2*(lambda*div(u1,u2,u3)*div(u1,u2,u3)+2.
```

```
*mu*(epsilon(u1,u2,u3)*epsilon(u1,u2,u3))));
```

```
F=w/(ud*(i+1)/n);
```

```
Fvec[i]=F;
```

```
ff<<F<<endl;
```

```
sigmavm=g(s)*sqrt(stress(u1,u2,u3)[0]*stress(u1,u2,u3)[0]
```

```
+ stress(u1,u2,u3)[4]*stress(u1,u2,u3)[4]
```

```
+ stress(u1,u2,u3)[8]*stress(u1,u2,u3)[8]
```

```
-stress(u1,u2,u3)[0]*stress(u1,u2,u3)[4]
-stress(u1,u2,u3)[4]*stress(u1,u2,u3)[8]
-stress(u1,u2,u3)[0]*stress(u1,u2,u3)[8] +
3*stress(u1,u2,u3)[1]*stress(u1,u2,u3)[1] +
3*stress(u1,u2,u3)[2]*stress(u1,u2,u3)[2] +
3*stress(u1,u2,u3)[5]*stress(u1,u2,u3)[5];
```

```
mesh3 Thd = movemesh3(Th, transfo=[x+u1, y+u2, z+u3]); // malla deformada
savevtk("Fractura3D_"+i+".vtk",Thd,[u1,u2,u3],i,s,signvm);
}
```