



industriales
etsii

Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Optimización con restricciones en problemas de diseño. Planteamiento y resolución de algunos problemas en Ingeniería Industrial

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES



Universidad
Politécnica
de Cartagena

Autor: Juan Antonio Cánovas Rebollo
Director: Roque Molina Legaz

Cartagena, 31 de Mayo de 2018

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción. | 3 |
| 2. Modelado y diseño. | 7 |
| 2.1. Modelo y modelado. | 7 |
| 2.1.1. Etapas en el desarrollo de un modelo. | 8 |
| 2.2. El proceso de diseño. | 9 |
| 2.3. Descripción de un problema. | 10 |
| 2.4. Modelado del problema. | 12 |
| 3. Métodos de optimización. | 17 |
| 3.1. Búsqueda exhaustiva. | 18 |
| 3.2. Multiplicadores de Lagrange | 19 |
| 3.3. Otros métodos. | 22 |
| 3.3.1. Métodos de descenso (optimización sin restricciones). | 23 |
| 3.3.2. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. | 24 |
| 3.3.3. Método de Newton-Raphson con restricciones. Funciones de penalización. | 25 |
| 3.4. Codificación de problemas de optimización: Modelado en GAMS. | 25 |
| 3.5. Conclusiones. | 26 |
| 4. Planteamiento y resolución de algunos problemas en Ingeniería Industrial. | 29 |
| 4.1. Algunos ejemplos de ingeniería mecánica. | 29 |
| 4.1.1. Construcción de un voladizo. | 29 |
| 4.1.2. Diseño de una estructura de dos barras. | 30 |
| 4.1.3. Diseño de una columna sometida a pandeo. | 31 |
| 4.1.4. Diseño de un sistema de vigas y cuerdas. | 33 |
| 4.2. Algunos ejemplos de ingeniería eléctrica. | 34 |
| 4.2.1. Estimación de estado en sistemas eléctricos. | 34 |
| 4.2.2. Reparto óptimo de carga. | 36 |
| 4.3. El problema de la asignación del tráfico. | 38 |
| 4.4. Otros problemas. | 41 |
| 4.4.1. Diseño de una cubierta de dirigible. | 41 |
| 4.4.2. Diseño de una armadura plana. | 44 |
| 4.4.3. Diseño de una dirección por piñón y cremallera. | 45 |
| 4.4.4. Diseño de un tobogán para un parque acuático. | 48 |
| 5. Bibliografía. | 51 |
| 6. Anexo. | 53 |



Capítulo 1

Introducción.

La **Optimización**, dentro de la ingeniería, va destinada sobre todo, a utilizar de forma eficiente recursos limitados y que pueden ser asignados a actividades alternativas; en otras palabras, la optimización tiene como propósito analizar e identificar la mejor solución posible, entre todas las soluciones potenciales. Otro de sus objetivos será la mejora continua de un proceso, utilizando la mínima cantidad de recursos y minimizando los costes de operación, lo que vendría a ser un aumento de la productividad. La idea de aplicar diferentes métodos de optimización es facilitar el entendimiento y el manejo de los parámetros que componen un sistema, procedimiento u objeto. Sin embargo, rara vez el proceso de optimización da lugar a un sistema realmente óptimo, ya que a menudo no existe una solución de diseño que funcione bien en todos los casos y, para poder optimizar la solución, los ingenieros deben tomar los atributos de mayor interés. Para poder encontrar esa solución que es mejor que otra, necesitamos imponer lo que denominaremos *criterio*.

Para que el ingeniero industrial pueda tomar este criterio, necesitará estar dotado de una serie de conocimientos relativos al área que pertenezca el proceso a optimizar. Sólomente conociendo el proceso en su totalidad se puede proceder a la operación del mismo y a las operaciones para su mejora. Será indispensable que posea conocimientos básicos sobre la planificación y mantenimiento industrial, así como conocimientos sobre manufactura y de automatización de procesos de producción.

Cabe resaltar que la toma de decisiones se va tornando cada vez más difícil según el tamaño y complejidad de las empresas, sus problemas o por la cantidad de variables que manejan, en especial cuando se tienen varios productos, materias primas y plantas de producción. Por lo tanto, saber dónde producir, qué productos, y a qué clientes tener en cuenta, se convierte en un tema en donde es necesario la aplicación de la investigación de operaciones y de modelos matemáticos, los cuales ayudan a la disminución y optimización de las actividades a realizar. Optimizar puede ser una tarea difícil de llevar a cabo pero realizable, lo que requerirá la colaboración y apoyo de todo el personal de la empresa encargado de dicho proceso.

Los problemas de optimización se componen principalmente de los siguientes tres elementos:

- **Función objetivo:** Es la medida cuantitativa del funcionamiento del sistema que se desea optimizar (maximizar o minimizar). Como ejemplo de funciones objetivo se pueden mencionar: la minimización de los costes variables de operación de un sistema eléctrico, la maximización de los beneficios netos de venta de ciertos productos, la minimización del cuadrado de las desviaciones con respecto a unos valores observados, la minimización del material utilizado en la fabricación de un producto, etc.

- **Variables:** Representan las decisiones que se pueden tomar para afectar el valor de la función objetivo. Desde un punto de vista funcional, se pueden clasificar en variables *independientes* (o *principales* o *de control*) y variables *dependientes* (o *auxiliares* o *de estado*), aunque matemáticamente, se trabaja con todas de igual forma. En el caso de un sistema eléctrico, serán los valores de producción de los grupos de generación o los flujos por las líneas; en el caso de la venta, la cantidad de cada producto fabricado y vendido; en el caso de la fabricación de un producto, sus dimensiones físicas, etc.

- **Restricciones:** Representan el conjunto de relaciones (que vendrán expresadas mediante ecuaciones y/o inecuaciones) que ciertas variables están obligadas a satisfacer. Por ejemplo, las potencias máxima y mínima de operación de un grupo de generación, la capacidad de producción de la fábrica para los diferentes productos, las dimensiones del material bruto del producto, etc.

El término *optimización* se emplea en aquellos casos en que se maximiza o minimiza la función objetivo, y **resolver un problema de optimización** consiste en encontrar el valor que deben tomar las variables para hacer óptima la función objetivo, satisfaciendo el conjunto de restricciones. Así, por ejemplo, muchos sistemas dinámicos pueden ser caracterizados por ecuaciones diferenciales, de forma que se puede obtener la respuesta de un sistema, si se resuelven éstas.

Los métodos de optimización se pueden clasificar en: métodos *clásicos* (que son los algoritmos que habitualmente se explican en las clases y/o en los libros de optimización; y que alguno de los cuales se estudian en alguna de las asignaturas del Grado de Tecnologías Industriales) y métodos *metaheurísticos* (que aparecieron ligados a lo que se denominó inteligencia artificial e imitan fenómenos sencillos observados en la naturaleza). Dentro de los primeros, se pueden destacar problemas de **optimización lineal** (y sus variantes), **optimización no lineal** (con y sin restricciones), etc. En el segundo grupo se incluyen los **algoritmos evolutivos** (genéticos, entre otros), las **búsquedas heurísticas** (método tabú, búsqueda aleatoria, etc.) o los **sistemas multiagente**. De forma muy general y aproximada, se puede decir que los métodos clásicos buscan y garantizan un óptimo local, mientras que los metaheurísticos tienen mecanismos específicos para alcanzar un óptimo global aunque no garantizan su alcance.

A continuación se muestran las expresiones matemáticas generales de algunos tipos de problemas de optimización dentro de los métodos clásicos. Básicamente, los problemas se distinguen por el carácter de las funciones que intervienen (lineales o no lineales) y de las variables (reales/continuas o enteras/discretas):

Programación Lineal (Linear Programming) PL

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x, c, b \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{array} \right.$$

Programación Cuadrática (Quadratic Programming) QP

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x, c, b \in \mathbb{R}^n, A, Q \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{array} \right.$$

Programación No Lineal (Non Linear Programming) NLP

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x f(x) \\ g(x) = 0 \\ h(x) \leq 0 \\ l \leq x \leq u \\ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

En este TFG nos centramos en estudiar casos de NLP.

El primer paso y el más importante en el análisis de un sistema dinámico es elaborar su **modelo matemático**, es decir, describir matemáticamente las características dinámicas del sistema. Los modelos matemáticos pueden tomar muchas formas, según sea el sistema particular que se está analizando y, según sean sus circunstancias, una representación matemática determinada o solución puede ser más adecuada que otras para un mismo sistema.

El interés en la optimización se concentra en la solución de problemas reales, los cuales deben ser representados matemáticamente. La optimización de la representación matemática de procesos reales presenta dos tipos de problemas:

1. **Formulación del modelo matemático:** Es el proceso en el cual se debe representar la función a ser optimizada, es decir, la función objetivo.

2. **Técnica de solución:** Es el paso en donde se suponen que los coeficientes y variables del modelo no son variables aleatorias. Otro problema a tener en cuenta son los errores de redondeo de la aritmética punto flotante.

Dentro del mundo de la Ingeniería, uno de los objetivos es evitar los fallos. Sin embargo, una máquina o un proceso siempre puede fallar, variando los resultados constantemente. Con cada éxito surgirán más preguntas de cómo se podría optimizar aquello que ya se ajustó, es decir, que es un proceso de **mejora constante**. Muchas veces la complejidad de un problema hace imposible que por simple intuición se puedan ver todas las alternativas o posibilidades que se tiene enfrente. Por esa razón, en la ingeniería es importante el uso de modelos matemáticos para ayudar la toma de decisiones para hacer frente a esa complejidad.

La optimización abarca muchos ámbitos de la ingeniería, como por ejemplo sistemas complejos. La ingeniería tiene la necesidad de mejorar los procesos de las empresas constantemente para que puedan ser competitivas en el mercado actual, ya sea de producción o de servicio. Por esta razón se les ha dado mayor importancia a las técnicas y herramientas que ayuden a lograr esos cambios favorables. Los métodos de optimización como procesos y como herramientas se crearon para el beneficio de las organizaciones y se han popularizado en empresas que buscan ser exitosas, no solo en términos de la competencia que presenta el mercado, sino también a partir de los beneficios que las mismas generan para la administración en general.

Por otro lado, y dentro del análisis matemático, la programación lineal y no lineal han venido demostrando ser una herramienta sumamente eficaz, tanto en la modelización de problemas de la vida real como en la teoría matemática. Los programas lineales facilitan la resolución de

problemas, debido a que la solución es siempre uno de los vértices. Además, gracias a que la cantidad de vértices es limitada, todo lo que se debe hacer es buscar todos los vértices factibles y luego evaluar la función objetivo en dichos vértices para encontrar el punto óptimo.

Sin embargo, existen muchos problemas de optimización que son no lineales y llevar un análisis de estos problemas involucra una relación entre el álgebra lineal, el análisis matemático, el análisis numérico y las técnicas de computación. En el caso de problemas no lineales, los mismos son mucho más difíciles de resolver porque la solución podría estar en cualquier parte dentro de la región factible o en un vértice. No obstante, la programación no lineal se usa ampliamente en ciencias aplicadas, tales como el diseño en la ingeniería, el control de inventario y en la exploración geográfica.

No cabe duda de que la optimización de procesos tiene varios matices, unos a favor y otros en contra, pero lo cierto es que el término optimización dentro de la ingeniería puede llegar a ser muy ambicioso, sobre todo para las empresas que actualmente se han visto obligadas a *ajustarse* al entorno, nuevos estándares, innovación tecnológica normativas legales o simplemente a una escalada hacia una constante optimización de procesos exitosos. Por esta razón, optimizar procesos puede llegar a ser un desafío muy costoso o incluso doloroso para la industria, pero sin duda necesario.

Para finalizar este capítulo introductorio, comentar que el tema principal que se desarrolla en este TFG es el de analizar diferentes métodos de optimización con restricciones (ilustrándolos con ejemplos sencillos) en el contexto del diseño, así cómo la aplicación de los mismos nos lleva a resolver determinados problemas reales que pueden encontrarse en el trabajo habitual de un ingeniero industrial. Al mismo tiempo, también hemos querido poner en realce alguna de las técnicas y métodos, relacionados con estos temas, y que hemos estudiado en diferentes asignaturas del Grado de Tecnologías Industriales, especialmente en asignaturas del área de Matemática Aplicada. Así, y para estudiar estos temas, en el capítulo siguiente de este TFG realizaremos una descripción formal del proceso de diseño, formulando un problema tipo y construyendo modelos de éste; en el capítulo 3, proporcionaremos un análisis general de los principales métodos de optimización no lineal con restricciones (ya sean de igualdad o desigualdad); y finalizaremos, en el capítulo 4, formulando y/o resolviendo un conjunto de problemas de diseño cuyas soluciones requieren de los conceptos y métodos introducidos en los capítulos anteriores. Por último, se incluye una reseña sobre la bibliografía que hemos consultado para poder realizar este trabajo, así como un último capítulo en el que se han incluido los códigos de programación que se han utilizado para resolver alguno de los problemas de los capítulos anteriores.

Capítulo 2

Modelado y diseño.

2.1. Modelo y modelado.

Modelo: *Esquema teórico, generalmente de forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja (por ejemplo, la evolución económica de un país), que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.* Diccionario de la Lengua Española, RAE.

Un **modelo** es una representación matemática simplificada de una realidad compleja. **Modelar** es la acción de construir un modelo, de encorsetar la realidad. Implica la relación entre dos figuras (no necesariamente encarnadas por personas únicas sino por equipos): el *modelador* (encargado de la especificación y desarrollo del modelo) y el **experto** sobre la realidad (conocedor del problema real). La mayoría de las veces, el desarrollo de un modelo puede involucrar a un conjunto de expertos en diferentes disciplinas que aportan sus diferentes puntos de vista y conocimiento a la hora de representar la realidad. Un modelo debe equilibrar todos los detalles con la factibilidad de encontrar técnicas de solución adecuadas.

Por tanto, un modelo es una herramienta de ayuda a la toma de decisiones y los resultados obtenidos deberán ser inteligibles y útiles. Modelar es una ciencia que se basa en un conjunto de procesos estructurados: análisis y detección de las relaciones entre los datos, establecimiento de las suposiciones y aproximaciones en la representación de los problemas, y desarrollo o uso de algoritmos específicos para obtener la solución. La forma de resolver dependerá también del estilo de la persona encargada tanto en la especificación, desarrollo como en la documentación. El desarrollo del modelo se hará mediante ciencias básicas o herramientas de apoyo.

Entre los beneficios explícitos o implícitos, tanto para modelador como experto, derivados del procesos de modelado en sí mismo, se pueden mencionar:

- Ayuda a establecer un diálogo con intercambio de información entre modelador y experto.
- Organiza los datos, la información disponible sobre el sistema.
- Organiza, estructura y mejora la comprensión del sistema.
- Internaliza la estructura organizativa de la empresa.
- Permite compartir supuestos y resultados entre modelador y experto.
- Proporciona un entorno ágil para el análisis y la sensibilidad.
- Indica la decisión de mejora en las decisiones.

2.1.1. Etapas en el desarrollo de un modelo.

Las etapas que componen el ciclo de vida de un modelo son las siguientes:

► **Identificación del problema:** Se trata de la etapa de recolección y análisis de la información relevante para el problema, en el intercambio de información entre modelador y experto, en establecer un vínculo asociativo y una estrecha coordinación entre ambos.

Los problemas reales por lo general están definidos de forma vaga e imprecisa, lo que hace necesario traducir e interpretar todos los detalles para convertirlos en ecuaciones matemáticas. Aquí se establecen y documentan los supuestos realizados que en posteriores etapas se deben validar.

Esta etapa es fundamental de cara a que las decisiones, soluciones y conclusiones adoptadas sean las correctas. Los datos suelen ser vitales para conseguir un realismo o aplicabilidad en las soluciones.

► **Especificación matemática y formulación:** Escritura matemática del problema de optimización, definiendo sus variables, sus ecuaciones, su función objetivo, sus parámetros. En esta etapa se analiza el tamaño del problema, la estructura de las restricciones, su tipo (LP, NLP, etc.). Es una etapa de creación donde se debe prestar especial atención a la precisión en la formulación y a la escritura de las ecuaciones que describen el problema.

En LP la elección de una formulación de un problema, aunque importante, no afecta de manera significativa a la resolución del mismo. Sin embargo, en NLP la elección de la formulación es crucial, ya que pueden existir diversas alternativas de modelado que afectan de manera fundamental en la resolución del mismo, existiendo un desarrollo cada vez mayor en la reformulación de problemas.

Mientras que la caracterización de un problema LP resulta difícil según su tamaño, pero ha sufrido un gran cambio desde los desarrollos de los algoritmos simplex mejorados, y sobre todo desde la aparición de los métodos de punto interior, en los problemas de NLP si siquiera se pueden dar criterios generales de tamaño, ya que la dificultad de resolución no tiene por qué estar ligada al tamaño del mismo (puede ser incluso preferible reformular un problema aunque aumenten las dimensiones, siempre que se logre una resolución más eficiente).

► **Resolución:** Se trata en esta fase de lograr implantar un algoritmo de obtención de la solución numérica óptima o cuasióptima. El algoritmo será de propósito general (método simplex) o específico. Se podrán utilizar varios métodos para su solución y por ello, el tiempo de resolución dependerá de cómo se haya formulado. La solución óptima debe ser lo suficiente satisfactoria ya que es una guía de actuación para el experto.

► **Verificación, validación y refinamiento:** En esta etapa se eliminarán los errores en la codificación, de forma que el modelo haga lo que se ha especificado matemáticamente en la etapa de resolución mediante su escritura en un lenguaje informático. Hay que comprobar la validez de las simplificaciones realizadas a través de los resultados obtenidos, incluso contrastando éstos con situaciones reales ya transcurridas o comprobando que los resultados son coherentes con respecto a lo que sucedería en la realidad.

Esta etapa da lugar también a nuevas necesidades de refinamiento en el modelado para mejorar la capacidad de representación del sistema, como por ejemplo eliminar la linealidad y hacer el modelo no lineal. Además, también se puede abordar el refinamiento matemático en la formulación para hacerla más eficaz.

► **Interpretación y análisis de los resultados:** Esta etapa consiste en proponer soluciones. Permite conocer en detalle el comportamiento de modelo al hacer un análisis de sensibilidad en los parámetros de entrada, estudiar diferentes escenarios plausibles de los parámetros, detectar soluciones alternativas cuasióptimas pero suficientemente atractivas, comprobar la robustez de la solución óptima.

► **Implantación, documentación y mantenimiento:** Esta etapa es fundamental en el desarrollo de modelo para garantizar su amplia difusión. La documentación debe ser clara, precisa y completa. El manual de usuario deberá incluir la especificación técnica funcional, matemática e informática. El código debe incluir una adecuada documentación para facilitar la tarea de mantenimiento. Hay que tener en cuenta que la mayor parte del ciclo de vida de un modelo no está en el desarrollo sino en sus fases de uso y mantenimiento. Además, es importante añadir en esta etapa la tarea de formación para los usuarios del modelo.

2.2. El proceso de diseño.

Diseño: *Proyecto, plan que configura algo (por ejemplo, plan urbanístico).* Diccionario de la Lengua Española, RAE.

En ingeniería, el **diseño** es la función más importante a desarrollar por parte del ingeniero, debido a que es lo primero a abordar al crear un ente (un objeto, un sistema, procedimiento, etc.) para realizar una función específica. Algunas de las operaciones susceptibles a mejorar en un proceso industrial pueden ser operaciones de cuello de botella, actividades que consumen mucho tiempo, trabajos repetitivos, tareas que requieren largos recorridos o simplemente un mejor aprovechamiento del espacio. El diseño de éste será esencial ya que todos los procesos posteriores tales como producción, transformación, comercialización que se realicen derivarán de este proceso. Para ello, el ingeniero deberá estructurar todas las fases de cara a lograr el diseño más óptimo a la situación problemática que se le plantea.

El diseño se puede describir como el proceso mediante el cual es posible proporcionar suficiente información sobre el ente para permitir su realización. Una vez que se completa el proceso, también habrá que valorar el resultado obtenido y comprobar si éste es viable.

En muchas ocasiones, los problemas que se presentan en una industria no se muestran de forma explícita sino que se deben llevar a cabo una serie de actividades e investigaciones con el fin de detectar el problema que afecta realmente a la producción o a una determinada área de la empresa. Por ello, se precisa de habilidad de síntesis de información, capacidad analítica, creatividad y liderazgo, entre otras.

Cuando esto se haga y el problema quede identificado, se procederá a estudiar cuidadosamente las restricciones dadas, tanto por el medio que nos rodea como por la propia empresa o persona que nos esté solicitando el diseño.

Una vez hecho esto y con toda la documentación respecto al problema planteado con todas sus restricciones del caso bien contextualizadas, se procederá a generar el mayor número de ideas que sean posibles como soluciones del problema. Posteriormente y con el mayor número

de soluciones posibles, se debe seleccionar las que cumplan de la mejor manera posible los criterios de selección y las restricciones impuestas, lo que llevará al inmediato descarte de las soluciones no viables y a estudiar detenidamente las que queden. Una idea viable será aquella que su desempeño técnico, coste, tiempo y esfuerzo humano que lleva implementarla esté dentro de lo aceptable. Por tanto, la solución que se llevará a cabo finalmente será la de mayor viabilidad después de realizar un proceso iterativo comprobando todas las soluciones que habíamos generado como válidas.

Los conceptos fundamentales del **proceso de diseño** desde el punto de vista matemático se describen en las etapas siguientes, las cuales están abiertos a una interpretación relativamente amplia dependiendo del problema específico a resolver:

1. Definir el problema.
2. Decidir qué datos de salida se necesitan para especificar una solución del problema.
3. Decidir qué datos de entrada se necesitan para plantear el problema.
4. Desarrollar modelos que se puedan usar para obtener los resultados requeridos a través de los datos de entrada.
5. Usar los modelos con los que se obtendrá una solución para un conjunto dado de datos de entrada.
6. Evaluar la solución en términos de las restricciones y los criterios.
7. Repetir tantas partes del proceso como sea necesario para obtener una solución satisfactoria.

A continuación, y como ejemplo de los procesos de modelado y diseño, se analiza un problema que se usará como caso de estudio mediante algunos de los métodos de optimización que estudiaremos en este TFG. En las dos siguientes secciones se presentará el problema (corresponde con lo descrito en el paso 1 anterior) y se establecerán los modelos matemáticos del mismo (corresponderá a lo descrito en los pasos 2, 3 y 4).

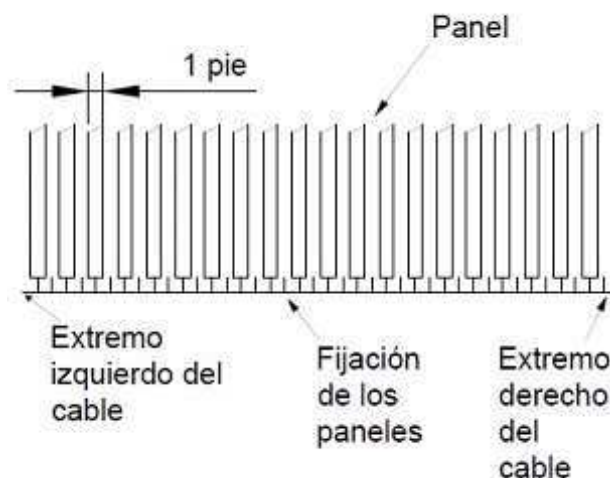
2.3. Descripción de un problema.

Supongamos que se pretende construir un gran concentrador solar parabólico, y que el ancho s de la parábola se ha elegido igual a 40 pies. La parábola debe enfocar la energía solar en un tubo colector cuyo eje está en el foco de la parábola.

Para su construcción, vamos a suponer que se ha tomado la decisión de formar la parábola con paneles planos de 1 pie de ancho (intentar construir la parábola en una sola pieza podría haber sido rechazada al ser demasiado engorrosa; en total sería sobre 12 metros de ancho). Además, supondremos que la forma parabólica se debe obtener sujetando los paneles en los puntos medios de su ancho a cables de soporte de modo que los cables formen parábolas cuando estén suspendidos. Los paneles han de estar alineados con las tangentes a la parábola en los puntos de sujeción.

En la siguiente figura se muestra una disposición plana del sistema de paneles la cual se encuentra sin suspender, es decir, con el cable extendido en línea recta. En la imagen sólo se muestra un cable (el otro es paralelo al visible y está al otro lado de los paneles) y se han retirado los paneles alternos. Sin embargo, se han preservado todos los dispositivos de sujeción.

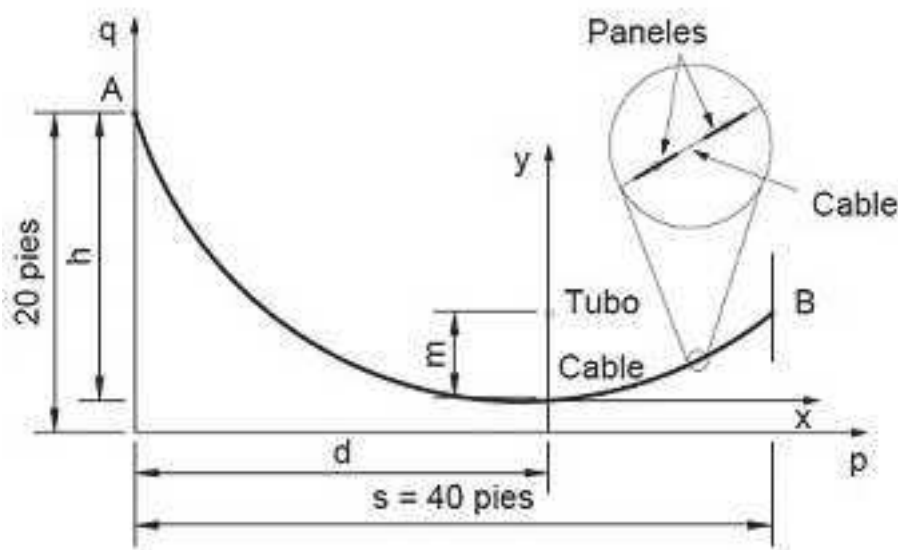
En esta configuración, las distancias entre los puntos de sujeción no son iguales.



La forma parabólica se obtendrá cuando los cables estén suspendidos de modo que la distancia horizontal entre los extremos derecho e izquierdo sea igual al ancho s de la parábola. En la configuración suspendida, el extremo izquierdo A está a 20 pies por encima del suelo mientras que el extremo B lo estará cuando mucho a 20 pies por arriba del suelo. En esta configuración, la separación horizontal entre las sujeciones del panel es constante e igual a 1 pie, debido a que para obtener la forma parabólica se requiere una carga uniforme del cable. A continuación, en la figura siguiente se muestra una vista del sistema suspendido. En ella, se incluyen dos sistemas de coordenadas. El sistema de coordenadas (p, q) es un sistema físico en donde p coincide con el suelo y el eje q pasa por el extremo izquierdo A . Si los paneles se enumeran desde 1 hasta 40 empezando por la izquierda, la carga uniforme requiere que la coordenada p del panel j sea $(j - 0,5)$ pies. Por otro lado, el sistema de coordenadas (x, y) es un sistema auxiliar con origen en el punto inferior de la parábola. Este origen es ubicado por la distancia horizontal d y por la distancia vertical h , y la distancia focal de la parábola se denota por m ; el tubo colector se debe localizar en el foco.

La condición operativa es cuando el sol está en el cenit. Puesto que la potencia solar incidente se pierde a través de los espacios que hay entre los paneles, el concentrador solar no es tan eficaz como uno que esté formado por una sola pieza. Esta potencia solar disponible será proporcional a la proyección horizontal total de los anchos del panel, por lo que es posible definir la *eficacia de captación* η de la parábola como la razón de la proyección horizontal total sobre el ancho s .

El objetivo del diseño para nuestro concentrador es maximizar la eficacia de captación η .



Con lo explicado hasta ahora, el problema quedaría ampliamente definido y el siguiente paso sería abordar especificaciones adicionales y proporcionar un resumen descriptivo de la definición.

Una vez especificado que el ancho s de parábola es de 40 pies, que la altura del extremo A mide 20 pies y que la del extremo B puede ser como mucho igual a 20 pies, resulta evidente que el tubo colector debe quedar dentro de los 40 pies de ancho y que tendrá que estar por arriba del punto inferior de la parábola. Impondremos la condición adicional de que no debe estar por encima de 18 pies del suelo. Además, suponemos que la carga se debe al peso de los paneles y que el peso del cable se desprecia. La tensión máxima del cable no excederá de 900 lb. Se calcula que la carga w en cada una de las 40 sujeciones es de 25 lb. Por tanto, la distribución de carga es uniforme a 25 lb. por pie horizontal. Así, se puede resumir el problema de la siguiente manera:

- **Objetivo y criterios principales:** Proporcionar detalles suficientes sobre la ubicación de los puntos de sujeción de los paneles de forma que se pueda lograr la construcción de un concentrador solar parabólico. Se debe maximizar la eficacia de captación η .

- **Restricciones:** El extremo A del cable ha de tener coordenadas físicas (p, q) iguales a $(0, 20)$ pies y no debe ser más bajo que el otro extremo B . El foco de la parábola no estará más alto de 18 pies con respecto al suelo y no debe caer fuera del ancho s entre extremos A y B . Los cables deben estar suspendidos y están sujetos a una tensión máxima de 900 lb.

Como hemos podido observar, en esta primera parte se ha detallado la primera etapa del proceso de diseño y no el inicio de todo el proceso de diseño. Esta etapa ha sido el resultado de la parte que implica mediciones y decisiones sobre la construcción del concentrador solar.

2.4. Modelado del problema.

Ahora se van a considerar los datos de salida y entrada del problema y los modelos a los que se van a vincular, es decir, los pasos 2, 3 y 4 del proceso de diseño. Un conjunto de datos

de salida evidentes serán los datos de salida de la ubicación de los puntos de sujeción. La ubicación del punto de sujeción para el panel j se podrá definir como la distancia λ_j a lo largo del cable desde el extremo A . Para evaluar una solución en términos de restricciones también se requiere la distancia focal m y la tensión máxima $T_{m\acute{a}x}$. Además, para nuestro criterio se requiere definir la eficacia como η . Otros datos de salida que necesitaremos serán la longitud del cable L , la altura q_b del extremo B y las ubicaciones del panel en las coordenadas del sistema físico (p, q) para describir la forma de la parábola.

Por otro lado, los datos de entrada van a ser variables que hagan que los modelos produzcan los resultados deseados. Estos datos de entrada que optimizan el problema también se pueden considerar como parte del resultado. Dos variables suficientes para describir la parábola son las distancias d y h descritas en la última gráfica anterior, las cuales además son fáciles de entender. Las demás restricciones se pueden satisfacer considerando el espacio libre entre suelo y el cable, la elevación del punto B y la ubicación horizontal del foco imponiendo restricciones sencillas directamente sobre los valores posibles de d y h . Los otros datos de entrada son la carga w del panel (25 lb), el ancho s (40 pies) y las coordenadas p para la sujeción de los paneles de modo que la carga horizontal sea uniforme. Estas coordenadas están dadas por

$$p_j = j - 0,15; \quad j = 1, 2, \dots, 40 \quad (2.1)$$

Ahora ya podemos considerar los modelos que permiten obtener los datos de salida para los valores de entrada d y h . Primeramente, se observará que el foco está localizado directamente arriba del punto más bajo de la parábola y que el valor mínimo de d es $\frac{s}{2}$ cuando los extremos A y B están en la misma elevación. Si B está más abajo que A , el punto más bajo de la parábola está a la derecha del punto medio del ancho. También se ve que con un valor nulo de h se obtiene un cable horizontal cuyo foco está en el infinito. La imposición de estas condiciones

$$\frac{s}{2} \leq d \leq s; \quad 0 < h < 20 \text{ pies} \quad (2.2)$$

asegura una distancia focal finita y satisface las restricciones de modo que A no estará debajo de B , que el foco deberá estar en alguna parte sobre el ancho s , y que el cable debe estar arriba del suelo. Estas condiciones no tienen porqué satisfacer otras restricciones del problema.

El modelo para la parábola en coordenadas auxiliares (x, y) es

$$y = \frac{x^2}{4m} \quad (2.3)$$

El punto A tendrá coordenadas (x, y) iguales a $(-d, h)$, mientras en el punto B serán $(s - d, y_b)$, con y_b que habrá que determinar como parte del diseño. Estos datos y la ecuación de la parábola (2,3) se usan para obtener la distancia focal m y la coordenada y_b como

$$m = \frac{d^2}{4h}; \quad y_b = \frac{(s - d)^2}{4m} \quad (2.4)$$

La restricción sobre la altura del foco se puede expresar en términos de h y m como

$$h - m \geq 2 \text{ pies} \quad (2.5)$$

Los modelos relacionados con la tensión del cable los obtendremos a través de los principios de la Mecánica. Para una carga uniforme w por pie horizontal, la componente será constante e igual a

$$T_0 = 2mw \quad (2.6)$$

La tensión T en cualquier punto del cable será tangente al cable a un ángulo θ con respecto a la horizontal. Así, quedará relacionada con T_0 de la siguiente forma

$$T = \frac{T_0}{\cos(\theta)} \quad (2.7)$$

donde θ lo obtenemos mediante la derivación de la fórmula de la parábola

$$\theta = \arctan\left[\frac{dy}{dx}\right] = \arctan\left[\frac{x}{2m}\right] \quad (2.8)$$

Como se puede ver, la tensión máxima se dará cuando θ sea lo más grande posible, es decir, cuando esté en el punto más alto sobre A posible. Por tanto, la restricción sobre la tensión máxima se podrá escribir como

$$T_{\text{máx}} = \frac{2mw}{\cos(\theta_a)} = wd\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2} \leq 900 \text{ lb} \quad (2.9)$$

Las coordenadas x que corresponde a las coordenadas físicas p de la ecuación son

$$x_j = p_j - d; \quad j = 1, 2, \dots, 40 \quad (2.10)$$

y las coordenadas y que corresponden a la ecuación (2,3) son

$$y_j = \frac{(x_j)^2}{4m}; \quad j = 1, 2, \dots, 40 \quad (2.11)$$

La relación entre las coordenadas q e y proporciona q_b y q_j como

$$q_b = y_b + 20 - h; \quad q_j = y_j + 20 - h, \quad j = 1, 2, \dots, 40 \quad (2.12)$$

La proyección horizontal del panel j de 1 pie de ancho es simplemente el ancho multiplicado por el coseno de θ en (x_j, y_j) , a la que denotamos por

$$\xi_j = \cos\left(\arctan\left(\frac{x_j}{2m}\right)\right); \quad j = 1, 2, \dots, 40 \quad (2.13)$$

por lo que la eficacia de captación η se calcula como

$$\eta = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{40} \xi_j \quad (2.14)$$

El resto de cantidades de salida son las longitudes del arco λ_j desde el punto A hasta los puntos de sujeción del panel, y la longitud L del cable. Se pueden encontrar a partir de las integraciones de longitudes de arco

$$\lambda_j = \int_{-d}^{x_j} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx; \quad L = \int_{-d}^{s-d} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2.15)$$

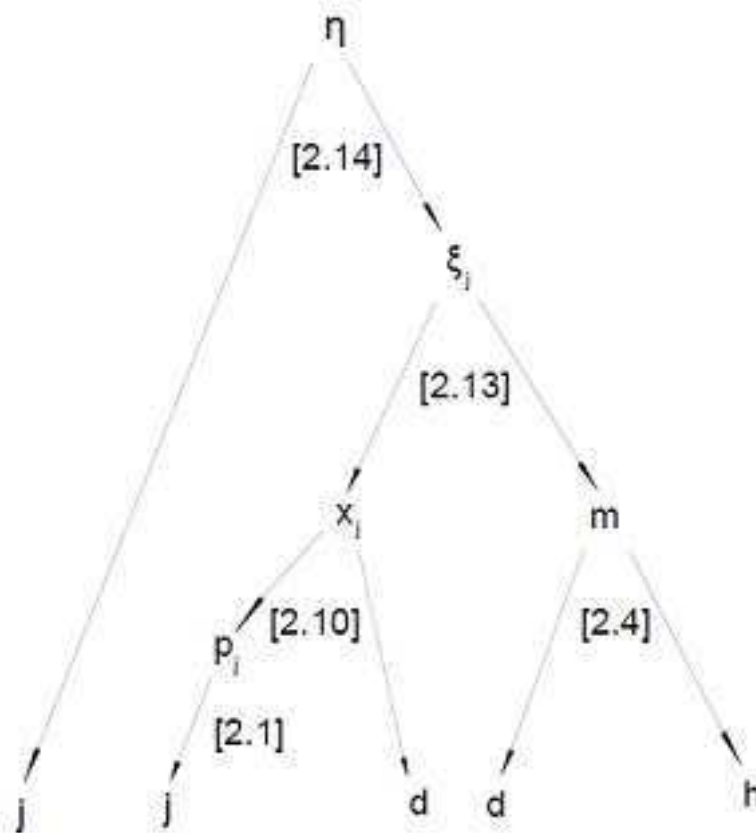
siendo los resultados de las integrales

$$\lambda_j = f(x_j) - f(d); \quad L = f(s - d) - f(-d) \quad (2.13)$$

donde $f(x)$ se define como

$$f(x) = \frac{x\zeta(x)}{4m} + m \ln[x + \zeta(x)]; \quad \zeta(x) = \sqrt{(x^2 + 4m^2)} \quad (2.17)$$

Para este problema se puede observar que se ha generado un gran número de modelos. Algunos son modelos usados como pasos previos de cara a obtener otros modelos. Cuando hacemos usos de modelos para a través de ellos llegar al resultado deseado, se usa lo que se conoce como **análisis descendente**. Este análisis comienza con lo que se desea y se procede mediante los modelos apropiados hasta llegar a los datos de entrada. El análisis descendente para calcular la función de criterio η se resume mediante el siguiente árbol.



La cantidad η en la parte superior es la raíz del árbol, y los extremos inferiores son datos de entrada. Las flechas muestran cómo una cantidad depende de otras situadas más abajo en el árbol. El cálculo de η , que se realiza en orden inverso a partir de los datos proporcionados, se denomina **análisis ascendente**.

Las restricciones del problema se deben comprobar también. La ecuación (2,5) se usa con los valores de h y m para verificar la restricción del foco, y la tensión máxima $T_{m\acute{a}x}$ se calcula a partir de w , d y h para verificar la restricción (2,9). Otros datos de interés son la longitud L de cable y las longitudes de arco λ_j , la altura q_b a la que se encuentra suspendido el extremo B de los cables y las coordenadas físicas (p, q) del sistema suspendido. Para obtener su resultado,

L y λ_j se hallan mediante (2,16), q_b a partir de (2,4) y (2,12), y las coordenadas (p, q) se hallarán con las ecuaciones (2,1), (2,11) y (2,9).

Una vez desarrollado esto habremos finalizado los puntos 2, 3 y 4 del proceso de diseño y podemos pasar al punto 5 del proceso escribiendo y probando un código para obtener datos que satisfagan las ecuaciones (2,2), (2,5) y (2,11). El código se usará para hallar los valores de entrada d y h que maximizarán la función de criterio $\eta(d, h)$. En el siguiente apartado, estudiaremos los distintos métodos para optimizar la solución.

Capítulo 3

Métodos de optimización.

En la optimización de un diseño a menudo se utilizan los pasos 5, 6 y 7 del proceso de diseño. Por normal general, es necesario determinar una solución para un conjunto de valores de entrada e iterar con un óptimo con base en evaluaciones de soluciones previas.

En este TFG nos centraremos en algunos de los métodos más utilizados para la resolución de problemas de programación no lineal, por lo que será necesario estudiar criterios y métodos de optimización más generales para resolver problemas en las que restricciones y/o función objetivo son no lineales. Además, nos servirá para destacar las ventajas que tiene el modelar un problema de manera que tanto restricciones como función objetivo sean lineales. Para enfrentarnos al problema, hemos que tener un criterio general de optimalidad (local): *Para que un punto factible sea óptimo se necesita que la función objetivo no sea mejor en un entorno factible del punto*, es decir, que todas las direcciones en que se mejora la función objetivo, son infactibles. Este criterio toma formas mas especializadas para estructuras de problemas mas específicas.

Para hacer el estudio un poco mas ordenado, dividiremos la materia en 2 partes diferenciadas: *Optimización sin restricciones* y *Optimización con restricciones*.

La **optimización irrestricta** es aquella en la que no tenemos restricciones de diseño, por lo que un típico planteamiento del mismo suele venir dado en la forma

$$\begin{cases} \text{mín } f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a. } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Para que un punto \mathbf{x}^* sea óptimo, se requiere, como bien hemos estudiado, que $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$. Por ello, necesitamos de algún procedimiento eficiente para encontrar **puntos estacionarios** (es decir, puntos solución de $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$). Es aquí donde aparece el concepto de **métodos de descenso**, dentro de los cuales existen métodos iterativos que nos permiten llegar a óptimos locales (puntos estacionarios). Dentro de estos métodos se pueden destacar, por ejemplo, el método del gradiente y el método de Newton.

Por otro lado se tiene la **optimización restringida**, que, como podemos imaginar, es la optimización en la cual tenemos restricciones de diseño. En este caso, la condición $\nabla f(\vec{x}_k) = 0$ no nos sirve pues el óptimo puede estar en la frontera de nuestro espacio de soluciones factibles donde ella no necesariamente se cumple. De esta forma surgen, entre otros, el **método de los multiplicadores de Lagrange** y las **condiciones de Karusk Khun-Tucker (KKT)**.

En este capítulo expondremos algunos métodos para resolver un problema de **optimización global con restricciones**. Algunos de éstos solamente utilizarán búsquedas evaluando la función objetivo, aunque el método más clásico requiere una solución del sistema de ecuaciones que se obtiene igualando a cero las derivadas parciales de esta función. La presencia de restricciones rige el método directo de derivadas iguales a cero, ya que la solución óptima del problema restringido en general no coincide con un punto estacionario de la función objetivo. En vez de ello, a menudo se encuentra un valor óptimo con derivadas diferentes de cero en un punto sobre una o más fronteras de las restricciones.

A continuación, se analizarán los métodos de *búsqueda exhaustiva* y el *método de los multiplicadores de Lagrange* como opción a los métodos de búsqueda y como medio para explicar por qué es útil la búsqueda en la frontera de las restricciones. Por último nos referiremos brevemente a otros métodos que pueden ser interesantes para la optimización global. Entre éstos, destacar los métodos (numéricos) del gradiente y el de Newton. En la última sección de este capítulo, nos referiremos brevemente al *modelado en GAMS*, que es un típico lenguaje de modelado utilizado para resolver todo tipo de problemas de optimización, y del cual existe una amplia biblioteca de programas implementados, y que son fácilmente adaptables a los problemas que se estudiarán en el capítulo siguiente. De hecho, la mayoría de ellos los hemos resuelto utilizando este lenguaje.

3.1. Búsqueda exhaustiva.

La búsqueda exhaustiva es un método de *fuerza bruta*, en donde se usa una resolución relativamente alta para buscar una región donde se obtenga una solución óptima que satisfaga las restricciones. El mismo se va a aplicar a nuestro problema de estudio introducido como ejemplo en el capítulo anterior. En el mismo, la ecuación (2,2) proporciona fronteras posibles para una región de búsqueda. Una inspección de la ecuación (2,5) rápidamente nos permite reducir el intervalo de h aún más incluso ($2 \text{ pies} < h < 20 \text{ pies}$) porque m es positivo. En el pseudocódigo mostrado en el capítulo 6 se proporciona un código de estudio (que hemos elaborado en **Java** y ejecutado en **NetBeans IDE 8.2**) para nuestro caso particular. En este código se incluye sólo el procedimiento necesario para restricciones y función objetivo.

Si se usa una resolución de 0,5 pies para d y h , los valores de entrada serán:

$$d_{min} = 20,0, \quad d_{max} = 40,0, \quad n_d = 41; \quad h_{min} = 2,5, \quad h_{max} = 19,5, \quad n_h = 35$$

Por consiguiente, el programa realizará la búsqueda en un total de 1435 puntos (resultado de realizar $n_d \cdot n_h$, donde cada uno de estos factores representan el número de puntos que se han considerado en el intervalo donde varía la correspondiente variable d o h). Los resultados de la búsqueda dan un η máximo de 0,8951 en $(d_{opt}, h_{opt}) = (26,5, 14,5)$ pies. De los 1435 puntos buscados, tan sólo 220 no han violado al menos una restricción.

Es evidente que este método es ineficaz. Es posible lograr una eficacia mayor mejorada mediante una variación en la que se se realicen búsquedas consecutivas comenzando con una malla de baja resolución y acabando con una de alta resolución. La resolución de la búsqueda inicial debe seguir siendo suficientemente aceptable para retener las características de comportamiento de la función objetivo. En la tabla siguiente se muestran los detalles y resultados

de tres búsquedas consecutivas para obtener de manera más eficaz los mismos resultados que antes:

| Número de búsqueda | 1 | 2 | 3 |
|--------------------|--------|--------|--------|
| d_{\min} (pies) | 20 | 20 | 23 |
| d_{\max} (pies) | 40 | 28 | 27 |
| n_d | 11 | 9 | 9 |
| h_{\min} (pies) | 4 | 10 | 12 |
| h_{\max} (pies) | 18 | 18 | 16 |
| n_h | 8 | 9 | 9 |
| Resolución (pies) | 2,0 | 1,0 | 0,5 |
| η_{\max} | 0,8793 | 0,8892 | 0,8951 |
| d_{opt} (pies) | 24 | 25 | 26,5 |
| h_{opt} (pies) | 14 | 14 | 14,5 |
| Puntos válidos | 13 | 44 | 46 |
| Puntos totales | 88 | 81 | 81 |

En la tabla se observa que en las tres búsquedas sucesivas se analizaron 250 puntos, y que el número de puntos válido fue de 103, lo que es mucho menor que los 1435 analizados y los 220 de la búsqueda original. La regla empírica que se usó para las búsquedas segunda y tercera fue establecer límites de d y h a dos espacios de malla a cualquier lado de los valores óptimos obtenidos en la búsqueda previa. La suficiencia de esta regla se debe parcialmente al hecho de que en la región de valores d y h válidos no existen máximos locales múltiples para η .

Los resultados de las búsquedas, si bien no siempre permiten resolver el problema fácilmente, sí que señalan las propiedades que se pueden utilizar para solucionar problemas de optimización restringidos; a saber, en un problema cuya solución óptima está limitada por las restricciones, la búsqueda del óptimo puede estar restringida a las fronteras de las mismas. Para buscar entonces este óptimo en la frontera, vamos a utilizar un resultado conocido (entre otras cosas, por haberlo estudiado y aplicado en alguna de las asignaturas de Matemáticas del Grado): el *método de los multiplicadores de Lagrange*, que se desarrolla (y se aplica a nuestro problema) en la siguiente sección.

3.2. Multiplicadores de Lagrange

Para problemas de optimización con restricciones de igualdad, el **método de los multiplicadores de Lagrange** proporciona condiciones necesarias que deben cumplirse en el óptimo. Como en el anterior método, usaremos de ejemplo el problema de la sección del proceso de diseño establecido en el capítulo anterior. El objetivo de este método es convertir el problema en otro sin restricciones, para lo que se amplía el problema inicial (con variables x_1, x_2, \dots, x_n) en m variables λ_j (que son los **multiplicadores de Lagrange**), tal que su solución coincida en las variables x_i con el primitivo y cumpla las restricciones $h(\mathbf{x}) = 0$. El problema general para este método es optimizar una función de n variables sujetas a m restricciones con m no mayor que n :

Dada la función de criterio y las restricciones expresadas por

$$\begin{aligned} \text{Función:} & \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{Restricciones:} & \quad z_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \text{con } m \leq n \end{aligned}$$

el procedimiento para optimizar esta función empieza con la formación de una nueva función G a partir de la inicial y de las restricciones, y que vendrá dada por

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j z_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donde las constantes λ_j son los multiplicadores de Lagrange antes mencionados. A esta función se le llama **función langrangiana**.

Posteriormente, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0; & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda_j} = 0; & j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

se resuelve para los valores x_i y λ_j , y entre las soluciones obtenidas para las variables (x_1, x_2, \dots, x_n) (puede existir más de un conjunto de soluciones) se encuentran los valores que optimizan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Las derivadas de G con respecto a λ_j son simplemente las funciones $z_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que especifican las restricciones. Por consiguiente, si m es igual a n , la solución óptima ocurre en la intersección de todas las restricciones. En este caso, el método de los multiplicadores de Lagrange es igual a encontrar x_i a partir del sistema reducido de ecuaciones

$$z_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, m = n$$

A continuación, se aplica este método de los multiplicadores de Lagrange al estudio del caso considerado:

Recordamos que el problema por resolver en nuestro estudio es el caso de la maximización de la función de dos variables $\eta(d, h)$ sujeta a las restricciones (2,2), (2,5) y (2,9). Se supondrá que la solución buscada estará en alguna parte de las fronteras de las restricciones. El paso preliminar en la resolución del problema mediante multiplicadores de Lagrange es la determinación de estas fronteras.

Las fronteras que correspondían a la ecuación (2,2) son las rectas $d = 20$, $d = 40$, $h = \epsilon$ y $h = 20 - \epsilon$, donde ϵ es una cantidad positiva arbitrariamente pequeña. Las fronteras correspondientes a las otras dos ecuaciones (2,5) y (2,9) están representadas por igualdades en las restricciones y se pueden expresar en forma funcional como

$$z_1(d, h) = h - d^2/(4h) - 2 = 0 \tag{3.18}$$

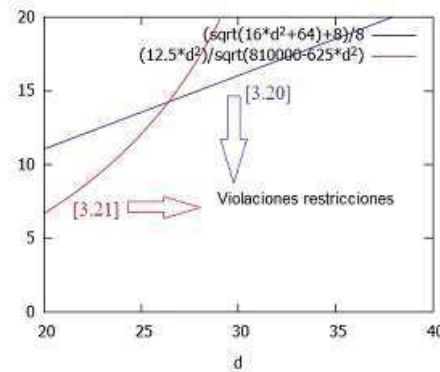
$$z_2(d, h) = (wd)^2(1 + [d^2/(2h)]^2) - 900^2 = 0 \tag{3.19}$$

Es fácil por tanto obtener d en términos de h a partir de la primera ecuación y h en términos de d a partir de la tercera. Las fronteras de las restricciones son, por tanto,

$$d = 2\sqrt{h^2 - 2h} \tag{3.20}$$

$$h = \frac{\frac{wd^2}{2}}{\sqrt{900^2 - (wd)^2}} \tag{3.21}$$

Como la función objetivo $\eta(d, h)$ tiene dos variables, no se podrá tratar con más de dos restricciones a la vez. Como se observa en la figura siguiente el estudio tiene cuatro fronteras de restricción significativas.



Así, se elegirán las dos fronteras donde se espere que esté la solución. Si suponemos que estas fronteras son aquellas para la distancia focal y la tensión máxima definidas por las ecuaciones (3,19) y (3,20), el problema a resolver consta de

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial d} = 0 = \frac{\partial G}{\partial h} \\ z_1(d, h) = 0 = z_2(d, h) \end{cases} \quad (3.22)$$

con G definida como

$$G(d, h, \lambda_1, \lambda_2) = \eta(d, h) + \lambda_1 z_1(d, h) + \lambda_2 z_2(d, h) \quad (3.23)$$

De inmediato se ve que la solución se encuentra en la intersección de las dos fronteras de las restricciones, y, si se halla la misma, ésta viene dada por $(d_{opt}; h_{opt}) = (26,40; 14,24)$, con valor óptimo dado por $\eta_{opt} = \eta(26,40; 14,24) = 0,8973$. Se puede observar que el resultado obtenido es muy similar al encontrado a través del método de búsqueda exhaustiva realizado en la sección anterior.

Ahora, vamos a suponer que se permite una tensión máxima de 1200 lb. Si usamos el mismo planteamiento de los multiplicadores de Lagrange, obtenemos de nuevo una solución en la intersección de las fronteras de restricciones, pero esta solución NO correspondería al valor máximo de η que es permitido en el problema de diseño. Por ello, es importante distinguir entre los planteamientos del problema de diseño y el de los multiplicadores de Lagrange. Recordamos que en el problema de diseño modificado se pretende maximizar η de forma que T_{max} **no exceda** los 1200 lb y de modo que $(h - m)$ **no sea menor** que 2 pies; sin embargo con la aplicación del método de multiplicadores de Lagrange, se ha maximizado η de modo que T_{max} **es igual** a 1200 lb y con $h - m$ **exactamente igual** a 2. Por tanto, al elegir los multiplicadores de Lagrange, se presupone que la solución óptima está realmente en las fronteras de las restricciones de diseño elegidas.

El problema modificado con 1200 lb como límite superior para T_{max} tiene una solución óptima sobre la frontera definida por la ecuación (3,20). Así, el problema a resolver para el caso de multiplicadores de Lagrange se compondrá de un sistema de tres ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial d} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial h} = 0 \\ z_1(d, h) = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

con

$$G(d, h, \lambda_1) = \eta(d, h) + \lambda_1 z_1(d, h) \quad (3.25)$$

La solución a la ecuación (3,24) se hará mediante el método de Newton-Raphson, que explicaremos en la sección siguiente. Este método evalúa la primera y segunda derivada parcial de η y z_1 con respecto a d y h . Las derivadas de z_1 las expresaremos analíticamente, pero las de η se deberán encontrar numéricamente. Hemos realizado los cálculos con wxMaxima (el código correspondiente se ha incluido en el último capítulo), y se han obtenido los siguientes resultados (en la siguiente tabla no se incluye el valor que se ha obtenido para λ_1):

| $\vec{x}_k = (d, h)$ | $G(\vec{x}_k)$ |
|--|-----------------------------|
| ----- (25, 14) | ----- 0,8891577845463412 |
| (27,2987818802697, 14,6750513244775) | 0,8980790308577401 |
| (27,97904029091228, 15,02520820643025) | 0,8982942044048834 |
| (28,05061513418478, 15,06091198592811) | 0,8982692834685484 |
| (28,01974245524274, 15,04551496417471) | 0,8982696161117387 |
| ----- | |
| $G(\vec{x}_k) - G(\vec{x}_{k-1})$ | $\eta(\vec{x}_k)$ |
| ----- - | ----- 0,8891577845463412 |
| 0,0089212463113989 | 0,898190411654284 |
| $2,151735471432881 \cdot 10^{-4}$ | 0,8982691040879086 |
| $1,902526108082947 \cdot 10^{-4}$ | 0,8982692858727861 |
| $3,326431903261096 \cdot 10^{-7}$ | 0,8982696165358409 |

Otra opción para encontrar una solución directa de (3,24) será buscar a lo largo de la frontera de las restricciones. Debido a que la definición de (3,25) presupone que el óptimo está sobre la frontera de la restricción descrita por $z_1(d, h) = 0$, la búsqueda se puede restringir a esta frontera. La elección entre una solución directa y una búsqueda en la frontera será dictada por la facilidad de ejecución, el esfuerzo computacional requerido y el nivel de exactitud deseado.

La búsqueda de un método óptimo sobre una frontera de las restricciones es más eficaz que buscar en la región acotada por las fronteras. Sin embargo, no se sabe a priori si el óptimo ocurrirá en la frontera. Una estrategia para tratar con esta situación es buscar primero la solución en la frontera y luego intentar una optimización global. Si la optimización conduce fuera de las fronteras de las restricciones, entonces la solución en la frontera que se encontró antes es la que se desea.

3.3. Otros métodos.

En esta sección se comentan (a modo de esquema de aplicación) otros métodos que también se suelen emplear para optimizar problemas no lineales, con y sin restricciones. Entre los mismos, podemos destacar (por comodidad, siempre se introducen para problemas de minimización; de forma análoga podría hacerse para problemas de maximización).

3.3.1. Métodos de descenso (optimización sin restricciones).

Dentro del marco de la optimización sin restricciones, existen métodos iterativos que permiten llegar a óptimos locales (puntos estacionarios). Entre los mismos, se destacan: método del gradiente y método de Newton-Raphson.

Método del gradiente.

Este método se basa en el hecho que la dirección de máximo ascenso de una función está dado por su gradiente (y por tanto, la de mayor descenso viene dado por menos (-) el gradiente). La fórmula que se suele aplicar de recursión es la dada por:

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = \vec{\mathbf{x}}_k - \lambda_k \nabla f(\vec{\mathbf{x}}_k) \quad (3.26)$$

con λ_k determinado por la minimización de la siguiente función de variable λ :

$$h(\lambda) = f(\vec{\mathbf{x}}_k - \lambda_k \nabla f(\vec{\mathbf{x}}_k)) \quad (3.27)$$

Nota: Si el problema fuese de encontrar el máximo, λ_k vendría determinado por la maximización de la función de variable λ :

$$h(\lambda) = f(\vec{\mathbf{x}}_k + \lambda_k \nabla f(\vec{\mathbf{x}}_k)) \quad (3.28)$$

Método de Newton.

Este método se basa en una aproximación de Taylor de 2do orden de la función objetivo. Luego se minimiza (o maximiza) esta aproximación igualando su gradiente a cero. A partir de ésto, se llega a la siguiente fórmula de recursión:

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = \vec{\mathbf{x}}_k - \{J_f(\vec{\mathbf{x}}_k)\}^{-1} f(\vec{\mathbf{x}}_k) \quad (3.29)$$

donde $J_f(\vec{\mathbf{x}}_k)$ representa la matriz jacobiana de la función en los puntos $\vec{\mathbf{x}}_k$.

La aplicación de este método requiere que $J_f(\vec{\mathbf{x}}_k)$ sea invertible para todo k y en la práctica se suele presentar en la forma

$$J_f(\vec{\mathbf{x}}_k) (\vec{\mathbf{x}}_{k+1} - \vec{\mathbf{x}}_k) = -f(\vec{\mathbf{x}}_k) \quad (3.30)$$

De esta forma, si se denota $\vec{\mathbf{y}}_k = \vec{\mathbf{x}}_{k+1} - \vec{\mathbf{x}}_k$, el método consiste en hallar $\vec{\mathbf{y}}_k$ verificando el sistema lineal

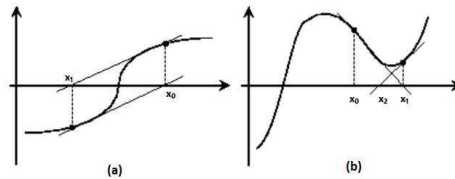
$$J_f(\vec{\mathbf{x}}_k) \vec{\mathbf{y}}_k = -f(\vec{\mathbf{x}}_k) \quad (3.31)$$

y obtener la aproximación siguiente a través de

$$\vec{\mathbf{x}}_{k+1} = \vec{\mathbf{x}}_k + \vec{\mathbf{y}}_k \quad (3.32)$$

El método de Newton es muy rápido y eficiente ya que la convergencia es de tipo cuadrático, lo que significa que el número de cifras significativas se duplica en cada iteración. Sin embargo, la convergencia depende en gran medida de la forma que adopta la función en las proximidades del punto de iteración. En la figura siguiente se muestran dos situaciones (para el caso de

funciones con una sola variable) en las que este método no es capaz de alcanzar la convergencia (figura (a)) o bien converge hacia un punto que no es un cero de la ecuación (figura (b)).



En problemas complicados es mejor usar diferenciación numérica para calcular las derivadas de la función criterio. Si se acepta exactitud de segundo orden, para toda la segunda derivada son necesarios tres valores de la función. A pesar de ello, un método rápidamente convergente puede ser menos costoso que la búsqueda exhaustiva.

En la siguiente subsección se verá como este método también puede extenderse al caso de optimización con restricciones.

El método del máximo gradiente suele converger rápidamente al principio, pero luego se vuelve lento a medida que se aproxima a la solución. El método de Newton Raphson converge rápidamente una vez que está en un entorno de la solución. Así, se podrían combinar los dos métodos, empezando con el del gradiente y cambiando finalmente al de Newton Raphson. En cualquier caso, el intento de optimización global se abandona tan pronto como resulta evidente que llevará fuera de las fronteras de las restricciones.

3.3.2. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Se puede emplear en el caso de optimización con restricciones de desigualdad.

Condición necesaria de KKT.

Para que \mathbf{x}^* , punto factible sea solución local del problema,

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\text{sujeto a } g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

necesariamente han de existir $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_i \geq 0$ tales que

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (3.33)$$

y

$$\mu_i \cdot g_i(x) = 0 \quad \forall i = 1 \dots m \quad (3.34)$$

Condición suficiente de KKT.

Si $f(\mathbf{x})$ y $g_i(\mathbf{x})$ son convexas (lo que ocurre si, por ejemplo, sus hessianos son semidefinidos positivos), entonces la condición necesaria de KKT se transforma en suficiente. En otras palabras, en un problema en el que la funciones son convexas, un punto que cumple con KKT es un mínimo global.

3.3.3. Método de Newton-Raphson con restricciones. Funciones de penalización.

Como ya se ha visto, el método de Newton dado por la ecuación (3,29) se puede utilizar para funciones con varias variables (siempre que las mismas sean diferenciables y con el hessiano no nulo en cada punto) y en problemas sin restricciones. Sin embargo, cuando en nuestro problema de optimización se tengan restricciones, se suelen introducir **funciones de penalización**, que sirven para penalizar puntos no factibles y para no penalizar a los puntos que sean factibles. Con la introducción de estas funciones, se intenta transformar problemas no lineales con restricciones en problemas no lineales sin restricciones y, por tanto, y poder aplicar los métodos métodos anteriores. Dependiendo del tipo de restricción las funciones de penalización serán de una forma u otra:

| Restricción | \longmapsto | Función de penalización |
|------------------------|---------------|--|
| $g(\mathbf{x}) \leq 0$ | \longmapsto | $\mu [\text{máx}\{0, g(\mathbf{x})\}]^r$ |
| $h(\mathbf{x}) = 0$ | \longmapsto | $\mu h(\mathbf{x}) ^r$ |

La función de penalización de un problema con restricciones vendría dada por

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m (\text{máx}\{0, g_i(\mathbf{x})\})^r + \sum_{j=1}^p |h_j(\mathbf{x})|^r \quad (3.35)$$

3.4. Codificación de problemas de optimización: Modelado en GAMS.

Como ya se ha referenciado anteriormente, a la hora de la resolución de un problema de optimización suele ser habitual tener que recurrir a implantar un algoritmo que conduzca a la solución numérica (muy próxima a la solución matemática) óptima o cuasióptima. En la actualidad, las principales alternativas para el desarrollo de modelos de optimización suelen ser:

- ▶ Lenguajes de programación de propósito general (C, C++, Java, Visual Basic, ...).
- ▶ Lenguajes o entornos de cálculo numérico o simbólico (Excell, MATLAB, MATHEMATICA, MAXIMA, ...).
- ▶ Lenguajes algebraicos de modelado.

Éstos últimos son las alternativas más complejas y potentes por su capacidad de indexación de las variables y ecuaciones, y permiten cambiar sin dificultad las dimensiones del modelo y de forma natural separan datos de resultados. Desde el punto de vista del modelador permiten la detección de errores de consistencia en la definición y verificación del modelo. Desde el punto de vista del usuario simplifican drásticamente su mantenimiento. Entre estos lenguajes de modelado más conocidos destaca, entre otros, GAMS (www.gams.com), y cuya versión free se ha utilizado en varias de las soluciones que se incluyen en problemas analizados en el capítulo 4 de este TFG.

GAMS (General Algebraic Modeling System) es un lenguaje de programación que permite el modelado, análisis y resolución de diversos problemas de optimización. Aunque inicialmente el manejo y comprensión de sus estructuras requiere cierto esfuerzo, una vez entendidas se dispone de una herramienta muy versátil capaz de resolver problemas de programación matemática. A

pesar de ser una magnífica herramienta, se debe ser consciente de las limitaciones impuestas por el estado del arte existente en programación matemática.

Otros lenguajes similares a GAMS son AMPL y AIMMS. Todos ellos presentan características análogas y, en general, no hay razón alguna para elegir uno u otro. En este TFG se opta por GAMS dada la gran cantidad de problemas tipo que se pueden encontrar formulados en este lenguaje.

Entre las características más importantes de GAMS cabe destacar:

1. Su capacidad para pasar de resolver problemas de pequeña dimensión (decenas de variables y restricciones) a problemas mayores (miles de variables y restricciones) sin variar el código sustancialmente. El manejo eficiente de sus índices permite escribir de manera compacta restricciones similares mediante una sola restricción.

2. Separa el proceso de modelado del proceso de resolución del problema. Así, el usuario de GAMS debe ser capaz de conseguir una formulación consistente del problema, y una vez la expresa en la notación de GAMS, este lenguaje hace uso de alguno de los optimizadores disponibles para obtener su solución. De esta manera, el usuario sólo ha de centrarse en obtener un modelo del problema y puede ignorar el funcionamiento interno del algoritmo que se necesita para resolverlo. La separación de estas dos tareas permite cambiar el modelo para mejorarlo o completarlo cómodamente.

3. La forma en que GAMS representa un problema de optimización coincide, prácticamente, con la descripción matemática de ese problema. Por tanto, el código GAMS es sencillo de comprender para aquellas personas familiarizadas con la optimización.

4. Además, GAMS proporciona los mecanismos necesarios para resolver problemas de optimización con estructuras similares, como son aquellos derivados de las técnicas de descomposición.

El usuario de GAMS debe ser cuidadoso con las reglas “gramaticales” de GAMS. El incumplimiento de una sola de ellas puede provocar muchos errores de compilación. Entre la bibliografía que se puede encontrar relacionada con este lenguaje de programación cabe destacar el manual de GAMS que se obtiene directamente desde su web (www.gams.com), cuyo segundo capítulo ofrece un resumen con las características principales para empezar a programar en este lenguaje.

En el capítulo siguiente, se plantearán y resolverán varios problemas de optimización, en los que se muestran las características básicas de este lenguaje (la codificación en lenguaje GAMS para estos problemas, así como la solución obtenida mediante la aplicación del mismo, se han incluido en el último capítulo de este TFG).

3.5. Conclusiones.

El problema de diseño usado como ejemplo hasta ahora es relativamente sencillo. Todos los modelos se han podido expresar de forma analítica, y los métodos numéricos han sido necesarios sólo para la búsqueda de una solución óptima. Problemas más complicados en general requieren el empleo de métodos numéricos y/o de lenguajes algebraicos de modelado para obtener algunos de los datos requeridos. En estos casos, un proceso de optimización ineficaz puede ser muy costoso.

El ejemplo de estudio desarrollado en este capítulo pone de manifiesto el papel de las restricciones en un problema de diseño característico. En general, siempre será esencial una buena comprensión del problema de diseño para identificar las restricciones que probablemente limiten la función objetivo; con posterioridad, el esfuerzo de optimización se puede reducir centrando la búsqueda de una solución óptima en las fronteras de las restricciones.

A partir del estudio del caso del concentrador parabólico se dispone de un ejemplo de identificación de las restricciones importantes. Se sabe que una eficacia de captación ideal a 1 sólo ocurre cuando los paneles concentradores cubren el claro de 40 pies; es decir, cuando el cable está sujeto a los dos extremos a la misma elevación y no se cuelga. Esta configuración produciría evidentemente un foco en el infinito y una tensión infinita en el cable. Para lograr valores reales de la altura focal y de la tensión del cable es necesario aceptar algo de pérdida en la eficacia de captación. Así, es fácil ver que las restricciones sobre el foco y la tensión del cable son las potencialmente importantes en la función objetivo.

Aunque es posible identificar las restricciones más importantes, puede no ser posible concluir que limitan simultáneamente la función objetivo, a menos que se tenga algo de experiencia previa con el problema o evidencias a partir de investigaciones preliminares. Si se cuenta con éstas, es posible restringir la búsqueda de las intersecciones de las fronteras de las restricciones; en caso contrario, es necesario buscar en todas las fronteras.

Una alternativa al método de búsqueda es el método de los multiplicadores de Lagrange. El planteamiento del sistema de ecuaciones para este método contiene hipótesis implícitas sobre los papeles de las restricciones. Las restricciones del problema de los multiplicadores de Lagrange no necesariamente son las restricciones del problema de diseño; en vez de ello, son las fronteras de las restricciones del problema de diseño sobre las que se espera que esté la solución óptima. El número de restricciones que se pueden incluir en cualquier planteamiento de multiplicadores de Lagrange también está limitado por el número de variables independientes de la función objetivo.

Una vez que sobre las fronteras de las restricciones se encuentra una solución óptima, se puede efectuar un intento de optimización global mediante un método como el de Newton-Raphson o el método del máximo gradiente. El intento global se abandona si conduce fuera de las restricciones.

Para concluir, nuevamente se menciona que el estudio del caso considerado es sólo una parte del problema global de diseño. La iteración en el paso 7 del proceso de diseño es válida para todo el diseño y no sólo para su parte de optimización. En general, las soluciones obtenidas mediante la elección de un método particular se pueden quedar cortas con respecto a las expectativas o el proceso usado para encontrar una solución puede mostrar características que conducen a variaciones en el método o a modificaciones en las restricciones y los criterios.

Capítulo 4

Planteamiento y resolución de algunos problemas en Ingeniería Industrial.

A continuación se procederá a plantear y/o resolver algunos problemas de diseño donde interviene la optimización con restricciones y donde al menos se usa uno de los métodos visto en el capítulo anterior. Estos problemas provienen de una amplia gama de disciplinas de la ingeniería. La principal intención de resolver estos problemas será dar especial relevancia a la aplicación de métodos computacionales a problemas de diseño ingenieriles, así como seguir poniendo en valor muchos de los conceptos y métodos matemáticos estudiados a lo largo del Grado de Tecnologías Industriales. Por tanto, los temas de los diseños serán de tal forma que nos proporcionen información contextual necesaria para el planteamiento matemático de los problemas.

4.1. Algunos ejemplos de ingeniería mecánica.

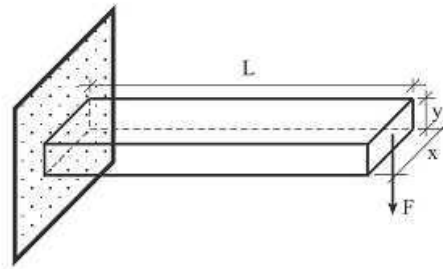
En esta sección se describen algunos problemas de optimización no lineal de carácter mecánico y que pueden resolverse analíticamente y/o numéricamente. Algunos de los siguientes serán resueltos y otros, simplemente planteados. En todos los casos, se observarán claramente tanto la función objetivo a optimizar, como las correspondientes restricciones.

4.1.1. Construcción de un voladizo.

Se precisa diseñar un voladizo de sección rectangular y longitud dada para conseguir un peso mínimo, y a la vez asegurar una deformación máxima transversal bajo la acción de una carga vertical que actúa sobre el extremo libre. El material para construirlo tiene un peso específico conocido.

Sean x e y la anchura y la altura (ver figura siguiente) que se han de determinar. Se denotan por L la longitud, por F la carga en el extremo libre, S la deformación máxima permitida y γ

el peso específico.



Como el objetivo declarado es el de minimizar el peso, se tendrá una función objetivo dada por

$$W(x, y) = \gamma Lxy \quad (4.1)$$

Se considera que la anchura x debe ser mayor que 0,5 (metros) y, de acuerdo con la teoría de *resistencia de materiales*, la deformación en el extremo libre viene dada por $\frac{FL^3}{3EI}$, donde E es el módulo de Young del material del voladizo, e $I = \frac{xy^3}{12}$ es el correspondiente momento de inercia de la sección rectangular. Por tanto, nuestro problema viene dado por

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & W(x, y) = \gamma Lxy \\ \text{suje}to \ a \quad & : \begin{cases} \frac{4FL^3}{Exy^3} \leq S \\ x \geq 0,5 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

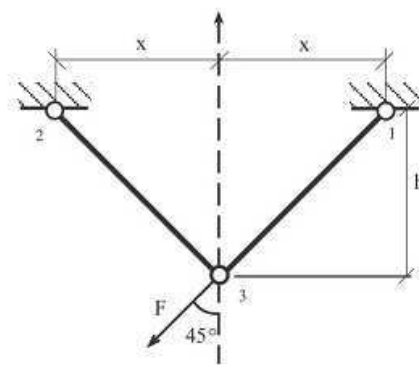
La solución a este problema, tomando como parámetros iniciales $L = 1$, $E = 10^6$, $F = 100$, $S = 1$ y $\gamma = 100$, y utilizando GAMS, es

$$Z = 4,642; \quad x = 0,5; \quad y = 0,093$$

(el código GAMS programado se ha incluido en el capítulo 6).

4.1.2. Diseño de una estructura de dos barras.

Supongamos que deseamos diseñar la estructura con dos barras de la figura siguiente según tres objetivos diferentes: peso mínimo, la tensión máxima no ha de exceder de un cierto umbral, y el desplazamiento en el pivote 3 no debe superar un cierto valor.



El conjunto de datos del problema es:

γ : Peso específico del material de las barras.

E : Módulo de Young del material de la estructura.

F : Carga que actúa en el pivote fijo con un ángulo de 45° a la izquierda del eje Y .

S_0 : Tensión máxima admisible.

D_0 : Desplazamiento máximo admisible para el pivote 3.

h : Altura de la estructura.

Las variables que se necesitan para determinar el diseño óptimo son:

x : Distancia entre los pivotes fijos al eje Y .

z : Área de la sección de los brazos de la estructura.

D : Desplazamiento del pivote 3.

S^1 : Tensión en el pivote 1.

S^2 : Tensión en el pivote 2.

Z : Peso total de la estructura.

Por tanto el problema de optimización viene dado por

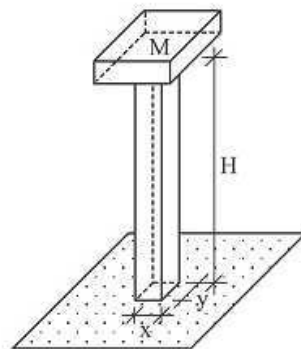
$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z(x, z) &= 2\gamma z\sqrt{x^2 + h^2} & (4.3) \\ \text{sujeto a } : & \begin{cases} D(x, z) = \frac{F}{Eh^2 2\sqrt{2}} \frac{(h^2+x^2)^{3/2}(h^4+x^4)^{1/2}}{x^2 z} \leq D_0 \\ S^1(x, z) = \frac{F}{2\sqrt{2}h} \frac{(x+h)\sqrt{x^2+h^2}}{xz} \leq S_0 \\ S^2(x, z) = \frac{F}{2\sqrt{2}h} \frac{(h-x)\sqrt{x^2+h^2}}{xz} \leq S_0 \\ x, z \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

También en el capítulo 6 se ha incluido el código para un fichero de entrada GAMS que resuelve este problema. Así, utilizando este programa, y a partir de los datos $\gamma = 100$, $E = 10^6$, $F = 15000$, $S_0 = 60000$, $D_0 = 10^{-1}$ y $h = 1$, la solución óptima obtenida viene dada por

$$Z = 63,829; \quad x = 0,657; \quad y = 0,267$$

4.1.3. Diseño de una columna sometida a pandeo.

Supongamos ahora que se desea diseñar una columna uniforme de sección rectangular y de altura dada que soporte una masa dada en su extremo. Por un lado, se quiere minimizar la cantidad de material a usar, pero por otro lado, también es deseable maximizar la frecuencia natural de las vibraciones transversales. Se trata, por tanto, de encontrar las dimensiones óptimas de dicha columna evitando el colapso debido a la compresión y al pandeo (fallo de estabilidad) (véase la figura siguiente).



El conjunto de datos del problema viene dado por:

M : Masa que debe soportar la columna.

H : Altura de la columna.

D : Peso específico del material que debe emplearse.

E : Módulo de Young del mismo material.

S : Máxima tensión permitida (fuerza por unidad de superficie).

Las variables de diseño serán las dos dimensiones, x e y , de la sección transversal de la columna.

El primer objetivo consiste en minimizar la masa total de la columna $W(x, y) = DHxy$.

El segundo objetivo es maximizar la frecuencia de la vibración transversal que, según se conoce de la *Mecánica*, viene dada por

$$\left(\frac{Exy^3}{4H^3 \left(M + \frac{33}{140} DHxy \right)} \right)^{1/2}$$

(obsérvese que maximizar esta cantidad es equivalente a minimizar su opuesto).

Las restricciones que deben respetarse tienen que ver con las tensiones. Por un lado, la tensión no debe superar un cierto máximo S . Por otro lado, debe ser inferior a la tensión de pandeo. La tensión de compresión es $\frac{Mg}{xy}$, donde g es la gravedad, mientras que la tensión de pandeo es $\frac{\pi^2 Ey^2}{48H^2}$. En definitiva, deben exigirse las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \frac{Mg}{xy} \leq S \\ \frac{Mg}{xy} \leq \frac{\pi^2 Ey^2}{48H^2} \\ x, y \geq 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Suponiendo entonces que ningún objetivo prevalece, debe minimizarse

$$Z = DHxy - \left(\frac{Exy^3}{4H^3 \left(M + \frac{33}{140} DHxy \right)} \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

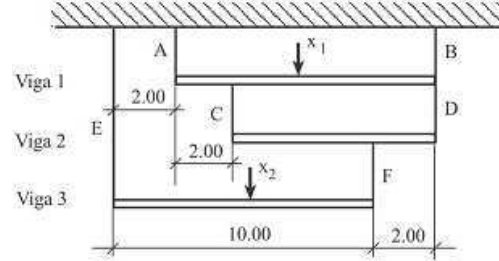
bajo las anteriores restricciones (4,4).

En el capítulo 6 se ha incluido el código para un fichero de entrada GAMS que resuelve este problema. Así, utilizando este programa, y a partir de los datos $M = 100$, $H = 10$, $D = 100$, $E = 10^6$, $S = 60000$, $G = 9,8$ y $\pi = 3,141592$, se obtiene como solución óptima

$$Z = 19989,8; \quad x = 2; \quad y = 10$$

4.1.4. Diseño de un sistema de vigas y cuerdas.

El sistema consta de varias cuerdas y vigas conectadas de un modo particular. Varias cargas externas actúan en el punto medio de algunas vigas. El problema consiste en determinar la carga total admisible que puede soportar el sistema sin colapsar, bajo equilibrio de fuerzas y de momentos, si se supone que el peso de las cuerdas y las vigas es despreciable.



Los datos que intervienen en este problema son:

I : conjunto de cargas.

S : conjunto de cuerdas.

B : conjunto de vigas.

T_s : carga máxima permitida en la cuerda $s \in S$.

Ω_b : conjunto de cargas aplicadas en el punto medio de la viga b ; obsérvese que $\Omega_b \subset I$ y consiste en una sola carga, o ninguna.

Ψ_b : conjunto de cuerdas que soportan la viga b ; es un subconjunto de S y normalmente consta de dos elementos.

Θ_b : conjunto de cuerdas que cuelgan de la viga b .

dr_s : distancia de la cuerda s al punto izquierdo de la viga b que soporta. $s \in \Psi_b$.

l_b : longitud total de la viga $b \in B$.

Las variables involucradas son x_i (carga i), t_s (tensión generada en la cuerda s bajo la acción de las cargas x_i , $i \in I$) y xl_i (distancia del punto de la viga b donde se aplica la carga i , $i \in \Omega_b$).

En cuanto a las restricciones, la condición de equilibrio de fuerzas en cada viga lleva al conjunto de ecuaciones

$$\sum_{s \in \Psi_b} t_s = \sum_{i \in \Omega_b} x_i + \sum_{x \in \Theta_b} t_s \quad (4.6)$$

para cada $b \in B$, y la condición de equilibrios de momentos (tomados con respecto a los extremos izquierdos de cada viga) se escribe como

$$\sum_{s \in \Psi_b} dr_s t_s = \sum_{i \in \Omega_b} xl_i x_i + \sum_{x \in \Theta_b} dr_s t_s \quad (4.7)$$

para cada viga $b \in B$.

También se debe respetar la tensión máxima permitida en cada cuerda, $0 \leq t_s \leq T_s$, para cada $s \in S$; que ha de ser $0 \leq xl_i \leq l_b$, para cada $i \in \Omega_b$, y la no negatividad de cada carga i , $x_i \geq 0$.

Por último, la función a optimizar es hallar el máximo de la carga total

$$Z = \sum_i x_i \quad (4.8)$$

En particular, si para el caso concreto de la figura anterior se permite que las cargas x_1 y x_2 se apliquen en los puntos que distan x_3 y x_4 desde el extremo izquierdo de las vigas 1 y 3, respectivamente, las ecuaciones de equilibrio se transforman en

$$\begin{cases} t_E + t_F = x_2 \\ 10t_F = x_4x_2 \\ t_C + t_D = t_F \\ 8t_D = 6t_F \\ t_A + t_B = x_1 + t_C + t_D \\ 10t_B = 2t_C + 10t_D + x_1x_3 \end{cases}$$

Si se expresan las tensiones en las cuerdas en términos de las variables independientes del problema, se concluye que se deben respetar las restricciones no lineales dadas por

$$\begin{cases} t_F = \frac{x_2x_4}{10} \leq 100 \\ t_E = x_2 - \frac{x_2x_4}{10} \leq 100 \\ t_D = \frac{3x_2x_4}{40} \leq 200 \\ t_C = \frac{x_2x_4}{40} \leq 200 \\ t_B = \frac{x_1x_3}{10} - \frac{2x_2x_4}{50} \leq 300 \\ t_A = x_1 - \frac{x_1x_3}{10} + \frac{x_2x_4}{50} \leq 300 \\ 0 \leq x_3, x_4 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

La solución que se obtiene con GAMS es

$$Z = 700 \text{ en el punto } x_1 = 585,433, x_2 = 114,567, x_3 = 6,925, x_4 = 1,271$$

y las correspondientes tensiones en las cuerdas son

$$t_A = 300, t_B = 300, t_C = 3,642, t_D = 10,925, t_E = 100, t_F = 14,567$$

(los códigos GAMS con los que se han obtenido estos resultados se han incluido en el capítulo 6).

4.2. Algunos ejemplos de ingeniería eléctrica.

4.2.1. Estimación de estado en sistemas eléctricos.

Los sistemas de energía eléctrica son los encargados de asegurar el suministro eléctrico a la industria, negocios y hogares. A lo largo de esta red se encuentran situados diversos aparatos de medida como los voltímetros, los cuales miden la tensión o voltaje en los nudos de la instalación. El estado de la red de potencia se determina por los voltajes en los nodos. Este valor en cada nodo es un número complejo, expresado normalmente en forma polar. Mediante estos valores de tensión podemos obtener medidas sobre la potencia activa y reactiva en los extremos de una línea eléctrica.

La potencia activa desde un nudo k a un nudo l a través de una línea $k - l$ vendrá dada por

$$p_{kl}(v_k, v_l, \delta_k, \delta_l) = \frac{v_k^2}{z_{kl}} \cos \theta_{kl} - \frac{v_k v_l}{z_{kl}} \cos(\theta_{kl} + \delta_k + \delta_l)$$

mientras que la potencia reactiva será

$$q_{kl}(v_k, v_l, \delta_k, \delta_l) = \frac{v_k^2}{z_{kl}} \sin \theta_{kl} - \frac{v_k v_l}{z_{kl}} \sin(\theta_{kl} + \delta_k + \delta_l)$$

El conjunto de datos del problema son los siguientes:

\widehat{v}_i : la magnitud medida del voltaje en el nudo i .

σ_i^v : la calidad de la medida del voltaje.

\widehat{p}_{kl} : la medida de la potencia activa desde el nudo k hacia el nudo l de la línea $k-l$.

\widehat{q}_{kl} : la medida de la potencia reactiva desde el nudo k hacia el nudo l de la línea $k-l$.

σ_{kl}^p : el grado de precisión de \widehat{p}_{kl} .

σ_{kl}^q : el grado de precisión de \widehat{q}_{kl} .

Ω : el conjunto de nudos de la red.

Ω_{kl} : el conjunto de nudos conectados al nudo k .

z_{kl} : la magnitud de la impedancia asociada a la línea $k-l$.

θ_{kl} : el ángulo de la impedancia asociado a la línea $k-l$.

Las variables del proceso serán v_i , que es la magnitud del voltaje en el nudo i ; y el ángulo del voltaje δ_i en el nudo i . En este caso particular no existen restricciones, por lo que es un problema de programación no lineal sin restricciones de diseño.

La función a minimizar para estimar el estado de la red de potencia tratará de minimizar el error cuadrático de cada medida con respecto a su estimación

$$\sum_{i \in \Omega} \frac{1}{\sigma_i^v} (v_i - \widehat{v}_i)^2 + \sum_{k \in \Omega, l \in \Omega_k} \frac{1}{\sigma_{kl}^p} (p_{kl}(v_k, v_l, \delta_k, \delta_l) - \widehat{p}_{kl})^2 + \sum_{k \in \Omega, l \in \Omega_k} \frac{1}{\sigma_{kl}^q} (q_{kl}(v_k, v_l, \delta_k, \delta_l) - \widehat{q}_{kl})^2$$

Supongamos un circuito de dos nudos y una única línea conectándolos. La línea se caracteriza por la constante $z_{12} \angle \theta_{12} = 0,15 \angle 90^\circ$. Las magnitudes de las mediciones de los voltajes en los nudos 1 y 2 son respectivamente 1,07 y 1,01. Las mediciones de potencia activa en ambos extremos de la línea son respectivamente 0,83 y 0,81, y las medidas de potencia reactiva en ambos extremos son respectivamente 0,73 y 0,58. El origen para los ángulos se toma en el nudo 2.

El problema de la estimación del estado de dicho circuito con los datos definidos se formula minimizando

$$\begin{aligned} Z = & (v_1 - 1,07)^2 + (v_2 - 1,01)^2 + \left(\frac{1}{0,15} v_1 v_2 \sin \delta_1 - 0,83 \right)^2 + \\ & + \left(-\frac{1}{0,15} v_1 v_2 \sin \delta_1 - 0,81 \right)^2 + \left(\frac{1}{0,15} v_1^2 - \frac{1}{0,15} v_1 v_2 \cos \delta_1 - 0,73 \right)^2 + \\ & + \left(\frac{1}{0,15} v_2^2 - \frac{1}{0,15} v_1 v_2 \cos \delta_1 - 0,58 \right)^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

recordamos, sin ninguna restricción. La solución al problema es

$$Z = 2,203 \text{ para los valores } v_1 = 1,045, v_2 = 1,033, \delta_1 = 0,002$$

El código GAMS con el que se ha obtenido esta solución está incluido en el capítulo 6.

4.2.2. Reparto óptimo de carga.

El objetivo de una red de transmisión de potencia es transportar la potencia eléctrica desde los generadores hasta los puntos de demanda. Para ello, el problema del flujo de potencia óptima consiste en determinar la producción de potencia de cada generador de modo que toda la demanda se satisfice con coste mínimo al tiempo que se respetan las restricciones propias de la red. Además de satisfacer la demanda, los valores del voltaje a lo largo de la red debe mantenerse en unos niveles aceptables. La potencia reactiva debe transmitirse a lo largo de la red, y su demanda debe ser satisfecha.

La potencia activa neta, que es la generada menos la demandada, que llega a un nudo, debe expresarse como función de todos los voltajes y ángulos en la red de la siguiente forma

$$p_{Gi} - P_{Di} = v_i \sum_{k=1}^n y_{ik} v_k \cos(\delta_i - \delta_k - \theta_{ki})$$

De forma análoga, la potencia reactiva neta que llega a un nudo i será

$$q_{Gi} - Q_{Di} = v_i \sum_{k=1}^n y_{ik} v_k \sin(\delta_i - \delta_k - \theta_{ki})$$

Los datos que formarán parte del problema son:

n : el número de nudos en la red.

(y_{ik}, θ_{ik}) : un número complejo que tiene módulo y_{ik} , y argumento θ_{ik} el cual depende de la topología y estructura física de la red.

P_{Gi} : la demanda de potencia activa en el nudo i .

Q_{Di} : la demanda de potencia reactiva en el nudo i .

\underline{V}_i : la cota inferior para el módulo del voltaje en el nudo i .

\overline{V}_i : la cota superior para el módulo del voltaje en el nudo i .

\underline{P}_{Gi} : la potencia activa de salida mínima del generador i .

\overline{P}_{Gi} : la potencia activa de salida máxima del generador i .

\underline{Q}_{Gi} : la potencia reactiva de salida mínima del generador i .

\overline{Q}_{Gi} : la potencia reactiva de salida máxima del generador i .

C_i : el precio por unidad de potencia activa en el generador i .

mientras que las variables que tendremos son:

v_i : el voltaje en el nudo i .

δ_i : el ángulo en el nudo i .

p_{Gi} : la potencia activa generada en el nudo i .

q_{Gi} : la potencia reactiva generada en el nudo i .

Por otro lado, nos encontraremos distintos tipos de restricciones que iremos desglosando a continuación:

- Equilibrio de potencia activa:

$$p_{Gi} - P_{Di} = v_i \sum_{k=1}^n y_{ik} v_k \cos(\delta_i - \delta_k - \theta_{ki}); \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

- Equilibrio de potencia reactiva:

$$q_{Gi} - Q_{Di} = v_i \sum_{k=1}^n y_{ik} v_k \sin(\delta_i - \delta_k - \theta_{ki}); \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

- Cotas para variables:

$$\begin{aligned} \underline{V}_i &\leq v_i \leq \overline{V}_i, & \forall i = 1, 2, \dots, n \\ \underline{P}_{Gi} &\leq p_{Gi} \leq \overline{P}_{Gi}; & \forall i = 1, 2, \dots, n \\ \underline{Q}_{Gi} &\leq q_{Gi} \leq \overline{Q}_{Gi}; & \forall i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

- Cotas para los ángulos:

$$-\pi \leq \delta_i \leq \pi; \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

El origen de los ángulos se puede situar de forma arbitraria en cualquier nudo. Por ejemplo, en el nudo k , $\delta_k = 0$.

La función a minimizar teniendo en cuenta estas restricciones será

$$Z = \sum_{i=1}^n C_i p_{Gi}$$

A continuación, un ejemplo: Considérese una red con 3 nudos y 3 líneas. Los parámetros de tal red son

$$\begin{aligned} y_{11} &= 22,97 & \theta_{11} &= -1,338 \\ y_{22} &= 21,93 & \theta_{22} &= -1,347 \\ y_{33} &= 20,65 & \theta_{33} &= -1,362 \\ y_{12} = y_{21} &= 12,13 & \theta_{12} = \theta_{21} &= 1,816 \\ y_{13} = y_{31} &= 10,85 & \theta_{13} = \theta_{31} &= 1,789 \\ y_{23} = y_{32} &= 9,81 & \theta_{23} = \theta_{32} &= 1,768 \end{aligned}$$

El nudo 1 es un generador con cotas inferior y superior para la potencia activa generada de 0 y 3, respectivamente, y para la potencia reactiva de -1 y 2, respectivamente. Las cotas para la generación de potencia activa para el generador 2 son, respectivamente, 0 y 3, y para la potencia reactiva -1 y 2, respectivamente. El nudo 3 es de consumo con una demanda de 4.5 y 1.5. Los límites permitidos para el módulo del voltaje en los nudos 2 y 3 son, respectivamente, 0.95 y 1.10, y para el nudo 1 son 0.95 y 1.13, respectivamente. El precio de producción en el generador en el nudo 1 es 6 y en el generador del nudo 2 es 7. Supóngase un periodo de 1 hora y póngase el origen de voltajes en el nudo 3. La función a minimizar será por tanto

$$Z = 6p_{G1} + 7p_{G2} \quad (4.11)$$

sujeto a las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} 0 &= p_{G1} - 22,97v_1^2 \cos(1,338) - 12,13v_1v_2 \cos(\delta_1 - \delta_2 - 12,127) - 10,85v_1v_3 \cos(\delta_1 - \delta_3 - 10,846) \\ 0 &= p_{G2} - 21,93v_2^2 \cos(1,347) - 12,13v_2v_1 \cos(\delta_2 - \delta_1 - 12,127) - 9,81v_2v_3 \cos(\delta_2 - \delta_3 - 9,806) \\ 0 &= -4,5 - 20,65v_3^2 \cos(1,362) - 10,85v_3v_1 \cos(\delta_3 - \delta_1 - 10,846) - 9,81v_3v_2 \cos(\delta_3 - \delta_2 - 9,806) \\ 0 &= q_{G1} - 22,97v_1^2 \sin(1,338) - 12,13v_1v_2 \sin(\delta_1 - \delta_2 - 12,127) - 10,85v_1v_3 \sin(\delta_1 - \delta_3 - 10,846) \\ 0 &= q_{G2} - 21,93v_2^2 \sin(1,347) - 12,13v_2v_1 \sin(\delta_2 - \delta_1 - 12,127) - 9,81v_2v_3 \sin(\delta_2 - \delta_3 - 9,806) \\ 0 &= -1,5 - 20,65v_3^2 \sin(1,362) - 10,85v_3v_1 \sin(\delta_3 - \delta_1 - 10,846) - 9,81v_3v_2 \sin(\delta_3 - \delta_2 - 9,806) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} 0,95 &\leq v_1 \leq 1,13 \\ 0,95 &\leq v_2 \leq 1,10 \\ 0,95 &\leq v_3 \leq 1,10 \\ 0 &\leq p_{G1} \leq 3 \\ 0 &\leq p_{G2} \leq 3 \\ -1 &\leq q_{G1} \leq 2 \\ -1 &\leq q_{G2} \leq 2 \\ -\pi &\leq \delta_1 \leq \pi \\ -\pi &\leq \delta_2 \leq \pi \\ \delta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

La solución del óptimo local resolviendo mediante GAMS es $Z = 30,312$, con los valores

$$p_{G1} = 3,000, \quad p_{G2} = 1,759, \quad q_{G1} = 1,860, \quad q_{G2} = 0,746$$

$$v_1 = 1,130, \quad v_2 = 1,100, \quad v_3 = 0,979, \quad \delta_1 = 0,190, \quad \delta_2 = 0,174$$

como se aprecia en el código reseñado en el último capítulo.

4.3. El problema de la asignación del tráfico.

El modelo matemático de asignación del tráfico ayuda a planificar y predecir los efectos que determinados cambios en la red de tráfico tendrán en la buena marcha de la red. Para explicar el esquema de la planificación del transporte usado en las aplicaciones, se consideran cuatro etapas:

1. Fase de generación de viajes. En esta etapa se considera un sistema de zonificación y una serie de datos relativos a cada zona del estudio. En esta fase se estimará el número total de viajes generados y atraídos a cada zona bajo estudio.

2. Fase de distribución. La siguiente etapa consiste en la adjudicación de estos viajes entre orígenes y destinos, determinando la llamada *matriz de viajes origen-destino*.

3. Descomposición modal. Produce la adjudicación de viajes a modos diversos. En esta fase las matrices origen-destino se obtienen para cada modo de transporte. Sus elementos son el número total de viajes por modo de transporte para cada par origen-destino O-D ω .

4. Asignación. Finalmente, la última etapa requiere la asignación de estos viajes a la red de transporte. Este ejemplo trata sobre la asignación de automóviles privados a la red de tráfico.

El principio que gobierna en el modelo es que bajo condiciones de equilibrio, el tráfico se organiza en redes congestionadas de tal modo que ningún vehículo puede reducir el tiempo de viaje mediante un cambio de ruta. El problema de optimización para expresar las condiciones de equilibrio que se derivan del principio mencionado es un modelo que predice el nivel de uso de los diferentes arcos de la red. Así, puede usarse para responder cuestiones como qué ocurriría en el nivel de uso de la red si se construyera una nueva carretera o si la capacidad de una determinada ruta se modificara.

Los datos para este problema serán:

(N, A) : un grafo dirigido (N, A) , que se entiende como un modelo de la red de tráfico con un conjunto de nodos N , y un conjunto de arcos A que representan las calles. El conjunto de nodos N del grafo representan intersecciones o también los llamados centroides, que indican las zonas del estudio (orígenes y destinos).

W : el conjunto de pares orígenes–destinos.

d_ω : datos de entrada que representan el número de viajes en coche desde el origen i al destino j , para cada par origen–destino $\omega = (i, j)$. La matriz de pares origen–destino $\{d_\omega\}_{\omega \in W}$ se obtiene en la fase de distribución modal.

$C_a(f_a)$: una función de coste que indica el retraso en el arco $a \in A$, para cada arco $(i, j) \in A$, como función del flujo total f_a que lleva el mismo arco a .

R_ω : el conjunto de rutas para el par $\omega = (i, j)$.

Las variables de las que se compone el modelo son h_r , que es el flujo en la ruta r , y f_a que será el flujo en el arco a .

A su vez, habrá que considerar unas restricciones. En primer lugar, el número de usuarios de un par origen–destino ω es la suma del número total de usuarios en caminos distintos que satisfacen tal par:

$$\sum_{r \in R_\omega} h_r = d_\omega; \quad \forall \omega \in W$$

Además, como es lógico, el flujo de cada camino debe ser no negativo:

$$h_r \geq 0; \quad \forall r \in R_\omega; \quad \forall \omega \in W$$

Por otro lado, el flujo de cada arco a es la suma del flujo en todos los caminos que lo usan:

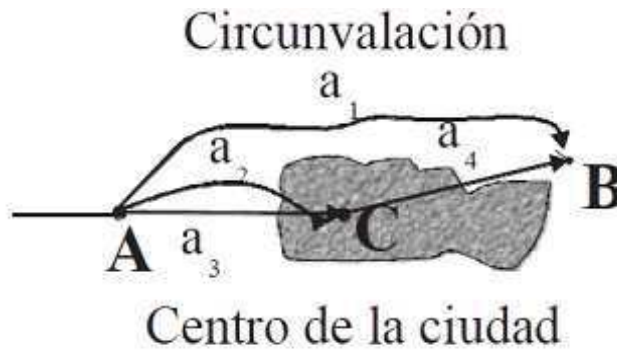
$$\sum_{\omega \in W} \sum_{r \in R_\omega} \delta_{a,r} h_r = f_a; \quad \forall a \in A$$

donde $\delta_{a,r} = 1$ si $r \in R_\omega$ contiene el arco a , y 0 en otro caso.

La función a minimizar el problema de asignación de tráfico es

$$Z = \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} C_a(x) dx$$

A continuación realizamos un ejemplo: Considérese el problema de una ciudad con una vía de circunvalación y varias rutas centrales según se ilustra en la siguiente imagen:



Supondremos que se realizan 4000 viajes desde A hasta B, y 2500 desde A hasta C. Las rutas disponibles para satisfacer la demanda del par $\omega_1 = (A, B)$ son $r_1 = a_1$, $r_2 = a_2 - a_4$, y $r_3 = a_3 - a_4$, y las rutas para el par $\omega_2 = (A, C)$ son $r_4 = a_2$ y $r_5 = a_3$. En este ejemplo $W = \{\omega_1, \omega_2\}$, y $R_{\omega_1} = \{r_1, r_2, r_3\}$ y $R_{\omega_2} = \{r_4, r_5\}$. Las variables de flujo en los caminos son h_1, \dots, h_5 , y las variables de flujo en los arcos son f_1, \dots, f_4 .

Como

$$\int_0^{f_a} C_a(x) dx = \int_0^{f_a} \left(c_a^0 + b_a \left(\frac{x}{k_a} \right)^{n_a} \right) dx = c_a^0 f_a + \frac{b_a}{n_a + 1} \left(\frac{f_a}{k_a} \right)^{n_a + 1}$$

la función a minimizar es

$$Z = \sum_{i=1}^4 \int_0^{f_{a_i}} C_{a_i}(x) dx = Z = \sum_{a \in A} c_{a_i}^0 f_{a_i} + \frac{b_{a_i}}{n_{a_i} + 1} \left(\frac{f_{a_i}}{k_{a_i}} \right)^{n_{a_i} + 1} \quad (4.14)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 + h_3 &= 4000 \\ h_4 + h_5 &= 2500 \\ h_1 &= f_1 \\ h_2 + h_4 &= f_2 \\ h_3 + h_5 &= f_3 \\ h_2 + h_3 &= f_4 \\ h_1, \dots, h_5 &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

En este ejemplo hemos usado los siguientes parámetros

| Enlace a | k_a | c_a^0 | b_a | n_a |
|------------|-------|---------|-------|-------|
| 1 | 500 | 5 | 1 | 4 |
| 2 | 400 | 7 | 1 | 4 |
| 3 | 400 | 10 | 1 | 4 |
| 4 | 500 | 2 | 1 | 4 |

y las soluciones son

| | <i>Flujo en los arcos</i> | | <i>Flujo en las rutas</i> |
|-------|---------------------------|-------|---------------------------|
| a_1 | 3845,913 | r_1 | 3845,913 |
| a_2 | 2354,419 | r_2 | 154,087 |
| a_3 | 299,667 | r_3 | 0,000 |
| a_4 | 154,087 | r_4 | 2200,333 |
| | | r_5 | 299,667 |

como puede verse en el último capítulo donde se ha formalizado el código GAMS para este problema particular.

4.4. Otros problemas.

4.4.1. Diseño de una cubierta de dirigible.

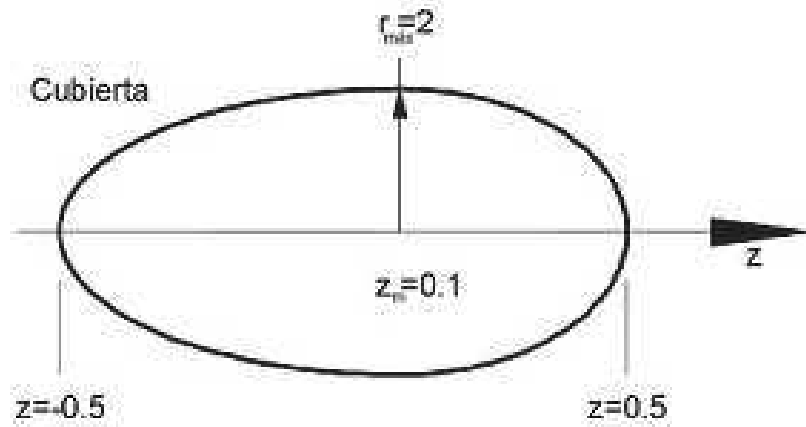
Los *dirigibles*, también denominados *globos dirigibles* o *aerostatos*, son vehículos más ligeros que el aire y que normalmente se utilizan para anunciar publicidad y dar cobertura televisiva en eventos. El mecanismo primario para su elevación es la flotabilidad que se obtiene al llenar con helio su superficie envolvente. La forma usual que tiene la envolvente de gas es semejante a un elipsoide. Por tanto, y para su modelo, consideraremos un cuerpo cuyo radio r varía con la coordenada z sobre el eje de revolución de la siguiente manera

$$r^2 = b^2 (1 - 4z^2) (0,5 - z)^c; \quad -0,5 \leq z \leq 0,5 \quad (4.16)$$

Las cantidades r y z son longitudes adimensionales con respecto a la longitud axial L de la envolvente. La cantidad b es un parámetro de finura que está relacionado con el radio máximo $r_{máx}$, mientras que c es un parámetro de forma relacionado con la ubicación z_m en la que el radio es máximo. Si c es igual a cero, la envolvente será un elipsoide con z_m igual a cero y $r_{máx}$ igual a b . Los valores positivos de z_m producirán valores negativos de c .

La forma de la envolvente se especifica mediante el máximo radio adimensional $r_{máx}$ y su ubicación adimensional z_m . El parámetro c lo obtendremos a partir de z_m igualando a cero la derivada $\frac{d(r^2)}{dz}$ cuando z es igual a z_m , y luego lo usaremos para calcular el parámetro b a partir de (4,16). En la figura siguiente se puede observar la envolvente, la cual deberá tener un volumen de $2000m^3$. El volumen V lo calculamos mediante

$$V = \pi \int_{-0,5}^{0,5} r^2 dz \quad (4.17)$$



Esta integral se puede resolver analíticamente realizando dos integraciones por partes. Entonces, la longitud L de la envolvente (en metros) está dada por

$$L^3 = \frac{2000}{V} \quad (4.18)$$

El área superficial no dimensional S de la envolvente se calcula a través de

$$S = 2\pi \int_{-0,5}^{0,5} r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} dz \quad (4.19)$$

Para resolver esta integral usamos el siguiente cambio de variable

$$z = -0,5 \cos(\theta)$$

donde la nueva variable de integración θ varía entre los límites 0 y π .

El costo del diseño es proporcional al área superficial real $(SL)^2$. Por tanto, el objetivo será maximizar la flotabilidad, que es proporcional al volumen real (VL^3) . A la misma vez, se desea reducir la resistencia de avance sobre el dirigible. Esta resistencia es proporcional a $C_d r_{\text{máx}}^2 L^2$, donde C_d es un coeficiente de resistencia adimensional. Una relación empírica para el comportamiento de C_d es

$$C_d = 0,1136 - f\{0,04858 - f(0,01170 - 0,0008167f)\}; \quad 2 \leq f \leq 5 \quad (4.20)$$

donde f es la razón de finura de la envolvente

$$f = \frac{1}{2r_{\text{máx}}} \quad (4.21)$$

Una función objetivo adecuada para el diseño de la envolvente de gas será una que maximice la flotabilidad y minimice el costo y la resistencia de avance. Por ello, se especifica una función del tipo

$$\phi = \frac{LC_d r_{\text{máx}}^2 S}{V} \quad (4.22)$$

Una de las restricciones del problema es que f debe encontrarse en el intervalo antes especificado en (4,20). La restricción equivalente en términos de $r_{m\acute{a}x}$ es

$$0,1 \leq r_{m\acute{a}x} \leq 0,25 \quad (4.23)$$

Por otro lado, y por estética, para evitar que la proa de la envolvente sea demasiado roma, se impone la condición de que la ubicación axial z_m de radio máximo estará restringida al intervalo

$$2r_{m\acute{a}x} - 0,5 \leq z_m \leq 0,5 - 2r_{m\acute{a}x} \quad (4.24)$$

Hay que fijarse que la restricción sobre z_m permite que cualquier extremo ($z = -0,5$ o $z = 0,5$) esté en la proa de la envolvente, y permite sólo un valor cero de z_m cuando $r_{m\acute{a}x}$ está en el límite superior del intervalo de la ecuación (4,23).

En resumen, el problema es diseñar la envolvente de gas de un dirigible según el perfil dado en la ecuación (4,16). El volumen real de la envolvente debe ser de $2000m^3$, se debe reducir la función objetivo de la ecuación (4,22) y se deben respetar las dos restricciones de diseño. Los valores que informan del estado final son $r_{m\acute{a}x}$ y z_m , la función de criterio ϕ , los parámetros de finura b y c , el volumen dimensional V , el área superficial S , la longitud L de la envolvente, la razón de finura f , el coeficiente de resistencia C_d y una tabla de r y z adimensionales.

Como verificación preliminar de los resultados para V y S pueden ser de utilidad las siguientes propiedades de un elipsoide con un eje mayor unitario y radio máximo $r_{m\acute{a}x}$. Los valores convenientes para un elipsoide (correspondientes a un valor cero de z_m) son

$$V_e = \frac{2\pi(r_{m\acute{a}x})^2}{3}$$

$$S_e = \pi \left(\frac{r_{m\acute{a}x}}{\beta} \right) \left[\sqrt{\beta^2 - 0,25} + 2\beta^2 \arcsin \left(\frac{0,5}{\beta} \right) \right]$$

$$\frac{1}{\beta} = 2\sqrt{1 - (2r_{m\acute{a}x})^2}$$

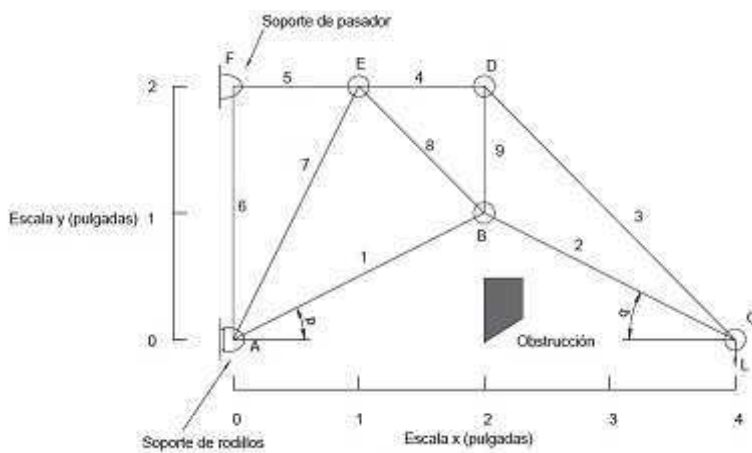
Otra manera de resolver el problema sería sin hacer uso de la ecuación (4,16), que da la forma del mismo. En tal caso también será requisito que la envolvente sea un cuerpo de revolución con pendientes infinitas $\frac{dr}{dz}$ en la proa y en la popa, y una ubicación z_m en la que $\frac{dr}{dz}$ sea cero. La función objetivo de la ecuación (4,22) y las restricciones anteriores sobre $r_{m\acute{a}x}$ y z_m en las ecuaciones (4,23) y (4,24) seguirían siendo válidas.

No obstante, será necesario introducir una nueva restricción para definir formas aceptables del cuerpo con objeto de sustituir la restricción inherente en la función de forma de la ecuación (4,16). Esta restricción requerirá que la envolvente sea no cóncava y esté definida por

$$\frac{d^2r}{dz^2} \leq 0; \quad -0,5 \leq z \leq 0,5 \quad (4.25)$$

4.4.2. Diseño de una armadura plana.

Las armaduras son estructuras ligeras que se usan para sostener cargas pesadas. Un ejemplo típico de armaduras son las que podemos ver en puentes y estructuras de techos. La armadura que se pretende diseñar está formada por seis nodos y nueve elementos, tal y como se muestra en la figura siguiente. Para identificar la figura, los nodos se identificarán por letras de la A a la F , mientras que los elementos con números del 1 al 9. Las longitudes estarán en pulgadas y las coordenadas (x, y) de todos los nodos excepto B están fijas como se puede observar.



$$\begin{aligned} (x_A, y_A) &= (0, 0); & (x_C, y_C) &= (4, 0); & (x_D, y_D) &= (2, 2); \\ (x_E, y_E) &= (1, 2); & (x_F, y_F) &= (0, 2) \end{aligned} \quad (4.26)$$

La carga externa L está en la dirección y negativa en el nodo C . La armadura tiene un soporte de pasador en el nodo F ; así, la fuerza externa en este nodo tendrá dos componentes. El apoyo en el nodo A es un soporte de rodillos; la fuerza externa en ese nodo tiene sólo componente x . La ubicación del nodo B se debe realizar de forma que los elementos 1 y 2 eviten una obstrucción. El espacio libre se satisface por las siguientes condiciones sobre los ángulos p y q :

$$p \geq 16^\circ; \quad q \geq 21^\circ \quad (4.27)$$

Además, el nodo B estará restringido a permanecer en la región formada por los elementos 3, 4 y 7, y no deberá estar más próximo que 0,5 pulgadas del eje central de cualquiera de estos elementos. El objetivo del diseño será maximizar la carga por peso de la armadura. Si $L_{máx}$ es la carga que puede soportar sin romperse y W su peso, entonces la función objetivo a maximizar será

$$\phi = \frac{L_{máx}}{W} \quad (4.28)$$

La armadura se construirá mediante varillas de acero de $\frac{1}{16}$ pulgadas de diámetro. Sea r_m la longitud del elemento m ; entonces el peso W (en libras) está dado por

$$W = 0,00087 \sum_{m=1}^9 r_m \quad (4.29)$$

Las longitudes r_m se pueden obtener aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos. Por otra parte, para determinar $L_{m\acute{a}x}$ habrá que calcular las fuerzas f_m en los elementos para una carga L igual a 1 lb, con las tensiones como fuerzas positivas y las compresiones como fuerzas negativas. Por tanto, para cada elemento, se debe calcular la fracción Q_m de la máxima carga segura que representa cada fuerza f_m . Los valores de Q_m para los nueve elementos se obtienen a través de

$$Q_m = \begin{cases} \frac{f_m}{250}; & f_m \geq 0 \\ -\left(\frac{f_m}{450}\right)(r_m)^2; & f_m < 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

El valor para f_m positiva es por ruptura bajo tensión, y el valor para f_m negativa es por ruptura bajo compresión debida a pandeo. La máxima carga externa $L_{m\acute{a}x}$ se puede calcular como

$$L_{m\acute{a}x} = \frac{1}{m\acute{a}x(Q_m)} \quad (4.31)$$

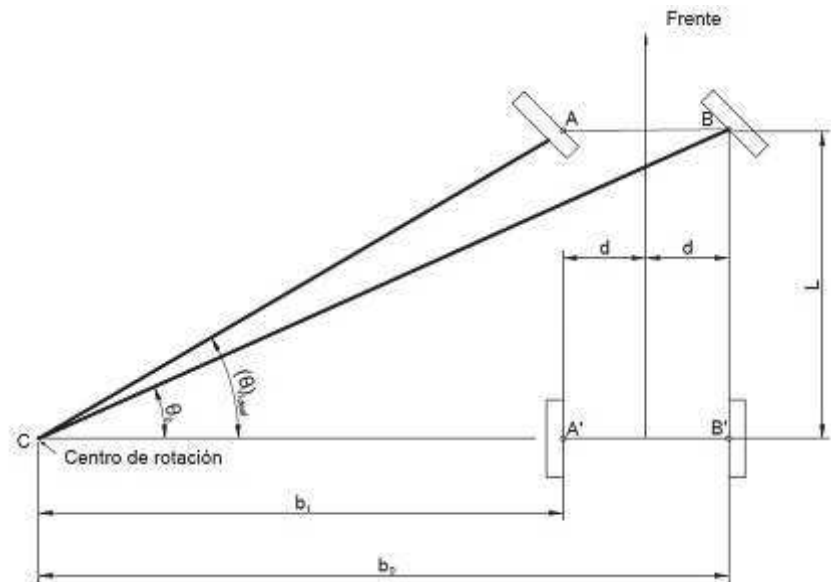
En una versión abierta de este problema se retienen las ubicaciones de los nodos A , C y F . Además, se retendrán las restricciones de la ecuación (4,27). El nuevo problema de diseño sería localizar los nodos restantes B , D y E de cara a maximizar $\frac{L_{m\acute{a}x}}{W}$. Se deberá preservar la forma geométrica básica de la armadura y ninguna longitud r_m debe ser menor de 0,5 pulgadas.

4.4.3. Diseño de una dirección por piñón y cremallera.

El control del automóvil suele realizarse mediante el giro de las ruedas delanteras. Si las ruedas tienen el mismo ángulo de dirección, los arcos circulares que intentan seguir las ruedas individuales tienen arcos distintos. Aunque los centros son diferentes, al automóvil trata de dar la vuelta con respecto a un centro común. Por tanto, los neumáticos deben experimentar algo de deformación o deslizamiento para poder realizar el movimiento. Tanto la deformación como el deslizamiento afectan nocivamente a la manipulación lateral del automóvil e imponen severos esfuerzos sobre los materiales y mecanismos de los ensamblajes de las ruedas.

Para evitar deformación y derrapamiento, las cuatro ruedas deben describir trayectorias circulares con respecto a un centro de rotación común. Con el objetivo de lograrlo, la rueda interior debe girar un mayor ángulo que la rueda exterior. El figura siguiente se ilustra el ángulo de dirección ideal $(\theta_i)_{ideal}$ de la rueda interior para un ángulo de dirección dado θ_0 de la rueda

exterior:



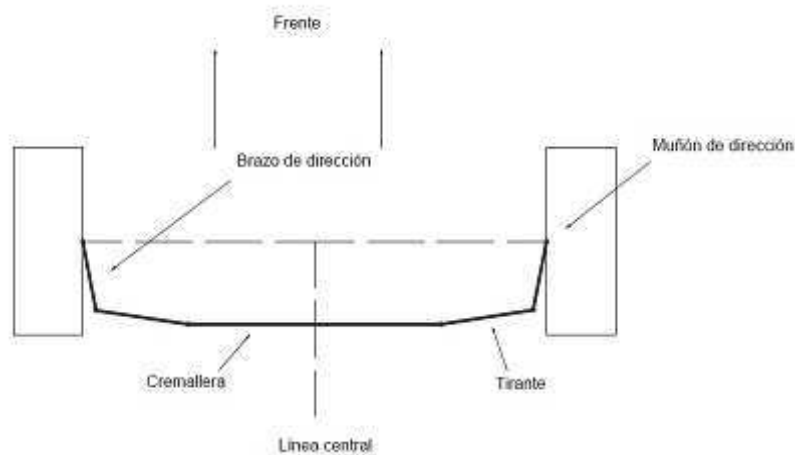
Los ángulos de dirección están relacionados a través de los triángulos rectángulos CAA' y CBB' de la figura anterior. Las ruedas pivotan respecto a los puntos A y B , cada uno de los cuales está a una distancia d de la línea central del automóvil. L es la base de la rueda del automóvil y representa una altura común a los dos triángulos; las bases son b_i para CAA' y b_o para CBB' . A partir de consideraciones geométricas se obtiene

$$\tan \theta_0 = \frac{L}{b_o}; \quad \tan (\theta_i)_{ideal} = \frac{L}{b_i}; \quad b_i = b_o - 2d$$

L se considera con valor $2,40 \text{ m}$ y d como $0,65 \text{ m}$. Cuando también especifica θ_0 , se tiene

$$\tan (\theta_i)_{ideal} = \frac{L}{\frac{L}{\tan(\theta_0)} - 2d} \quad (4.32)$$

Ahora se usará esta ecuación para diseñar un sistema de dirección por piñón y cremallera, como el que se ve en la figura siguiente y que se describe a continuación:



Una cremallera dentada está accionada por un pequeño engrane denominado **piñón**, que convierte la entrada de la rueda de dirección giratoria en movimiento lineal de la cremallera. La

operación de varillaje se describe en la figura siguiente. La cremallera está a una distancia fija h de la línea del eje de las ruedas delanteras. Cuando la cremallera está en una posición neutral, el nodo extremo está a una distancia c de una línea de referencia que pasa por la articulación de dirección. Un movimiento m de la cremallera produce ángulos de dirección reales θ_0 y θ_i (que dependen de la dirección) al pivotar todo el ensamblaje de la rueda y el brazo de dirección mediante tirantes de longitud l ; los tirantes son necesarios porque las trayectorias circulares de los brazos y la trayectoria lineal de la cremallera no son directamente compatibles. Cada brazo de dirección es de longitud s y tiene un ángulo hacia adentro σ .

Para este diseño, las longitudes c y h se fijan en $0,30$ m y $0,22$ m, respectivamente. Ahora se considerará cómo obtener la longitud t del tirante para entradas de s y σ , y como obtener el movimiento requerido m y el ángulo de dirección θ_i para un valor dado de θ_0 . Se considerará un sistema de coordenadas (x, y) con origen en la articulación derecha, x a la derecha y coincidente con la línea del eje, e y al frente y coincidente con la línea de referencia.

Se observa que los extremos del tirante están en el punto $(x, y) = (-c, -h)$ y en $(x, y) = (-s \sin \sigma, -s \cos \sigma)$, por lo que t se obtiene a partir de

$$t^2 = (c - s \sin \sigma)^2 + (h - c \cos \sigma)^2 \quad (4.33)$$

El movimiento m de la cremallera necesario para producir un ángulo de dirección θ_0 en la geometría de la vuelta a la izquierda requiere más manipulación. Se puede demostrar que m está relacionado con θ_0 por medio de

$$m = c - s \sin(\sigma - \theta_0) - \sqrt{t^2 - [h - s \cos(\sigma - \theta_0)]^2} \quad (4.34)$$

El ángulo de dirección θ_i producido por el mismo movimiento de cremallera se calcula a partir de la geometría de la vuelta hacia la derecha, y viene dado por

$$\alpha + \sigma + \theta_i = \sin^{-1} \left\{ \frac{[c + m]^2 + h^2 + s^2 - t^2}{2sp} \right\}; \quad (4.35)$$

$$p^2 = h^2 + (c + m)^2; \quad \tan \alpha = \frac{h}{c + m};$$

El objetivo del diseño es especificar s y σ de modo que la desviación de la raíz cuadrática media de θ_i con respecto a $(\theta_i)_{ideal}$ sea minimizada por θ_0 que variará de 0° a 30° . La desviación raíz cuadrática media d_{rcm} es la función objetivo y viene definida por

$$(d_{rcm})^2 = \left(\frac{1}{30} \right) \int_0^{30} [\theta_i - (\theta_i)_{ideal}]^2 d\theta_0 \quad (4.36)$$

Se requiere que la longitud del brazo de dirección s satisfaga

$$s \leq 0,22 \text{ m} \quad (4.37)$$

Para asegurar que los nodos no obstruyen el movimiento de la rueda, el ángulo σ debe cumplir que

$$s \sin \sigma \geq 0,22 m \quad (4.38)$$

En las restricciones anteriores, m denota metros y no el movimiento de la cremallera. Una restricción final garantiza que el varillaje es geoméricamente posible y que no estará sobreextendido. Se expresa como

$$\sqrt{s^2 - 0,0004} + \sqrt{t^2 - 0,0004} \geq \sqrt{h^2 + (c + m_{30})^2} \quad (4.39)$$

donde m_{30} es el movimiento de la cremallera necesario para un ángulo de dirección externo θ_0 igual a 30° .

Una versión que entrañaría más dificultad se obtendrá al incluir la longitud c como uno de los parámetros de diseño. Para ello, sería necesario incluir una restricción adicional a fin de asegurar que la cremallera es suficientemente larga para producir ángulos de dirección requeridos. Esta restricción se expresa como

$$d - c \geq m + 0,02 \quad (4.40)$$

4.4.4. Diseño de un tobogán para un parque acuático.

Una de las atracciones más comunes en un parque acuático son los toboganes. En ellos, la persona se desliza y se lanza horizontalmente sobre la superficie de una piscina que se encuentra al final del tobogán.

Para describir la ecuación del tobogán usaremos un sistema cartesiano (x, y) con x horizontal e y vertical. La parte superior del tobogán será igual a $(0, h)$ y la inferior se encontrará en $(L, 0)$. El usuario iniciará el recorrido del tobogán en la parte superior a una velocidad v_0 de $1,5m/s$, y lo abandonará por la parte inferior. Por tanto, la ecuación $y(x)$ que representa la forma del tobogán debe satisfacer las relaciones

$$y(0) = h; \quad y(L) = 0; \quad y'(0) = y'(L) = 0 \quad (4.41)$$

donde y' denota $\frac{dy}{dx}$. La ecuación que se usará para el tobogán estará dada por

$$\frac{y}{h} = a\xi^4 + b\xi^3 + c\xi^2 + 1; \quad \xi = \frac{x}{L} \quad (4.42)$$

El tobogán tiene una curvatura $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ negativa en la izquierda, y una curvatura positiva en la derecha, por lo que en algún punto esa curvatura es cero. La ubicación de este punto neutro se elige a través de un parámetro λ de modo que

$$y''(x) = 0 \text{ en } x = \lambda L \text{ (o en } \xi = \lambda) \quad (4.43)$$

y λ no es arbitrario, sino que se usará como parámetro para variar la forma del tobogán. Los coeficientes de la ecuación (4,43) que cumplen también (4,42) se pueden encontrar en términos de λ .

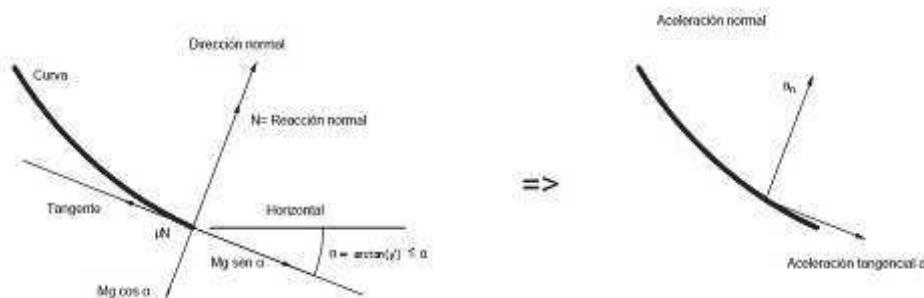
La elección de λ no es arbitraria. Para asegurarse que la rampa tiene una pendiente negativa en todos los puntos menos en la parte superior y en la parte inferior, la segunda derivada debe

ser negativa cuando ξ es 0, y debe ser positiva cuando ξ es igual a 1. La restricción que satisface el requisito de pendiente negativa es

$$\frac{1}{3} \leq \lambda \leq \frac{2}{3} \quad (4.44)$$

Para tener una descripción completa del tobogán bastará con especificar h , λ , y L . Para resolver el problema, se hará h igual a 5, y λ y L serán tratadas como variables independientes.

El siguiente paso será analizar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo de masa M a medida que avanza en la superficie del tobogán. Las fuerzas normales serán perpendiculares al tobogán mientras que las tangenciales actuarán a lo largo de la tangente del tobogán. Las fuerzas normales constarán de la componente del peso de cuerpo y la reacción del tobogán sobre éste y las tangenciales tendrán la componente del peso del cuerpo y de la resistencia de fricción. En la siguiente figura se muestra el diagrama de cuerpo libre y las aceleraciones:



La componente normal de peso será $Mg \cos \alpha$ mientras que la tangencial es $Mg \sin \alpha$, donde el ángulo negativo es

$$\alpha = \arctan(y') \quad (4.45)$$

La fuerza normal que ejerce el cuerpo se denota por N , y la de fricción por μN , con μ igual a 0,1, que denota el coeficiente de fricción. De la segunda ley de Newton tenemos la siguiente relación del movimiento normal

$$N - M \cos \alpha = \cos \alpha + \frac{a_n}{g}$$

Al reordenar y dividir entre Mg se obtiene

$$\Gamma = \frac{N}{Mg} = \cos \alpha + \frac{a_n}{g} \quad (4.46)$$

La cantidad Γ es el número de *fuerzas gravitacionales* experimentadas por el cuerpo. Este valor no deberá ser mayor de 1,5 en condiciones sin fricción.

La componente normal de la aceleración es

$$a_n = v^2 \rho \quad (4.47)$$

donde v es la velocidad de la persona que desciende por el tobogán y ρ el radio de curvatura definido por

$$\rho = \frac{(1 + (y')^2)^{1,5}}{y''} \quad (4.48)$$

La velocidad v sin fricción se obtiene por el principio de conservación de la energía

$$v^2 = (v_0)^2 + 2g(h - y); \quad g = 9,81m/s^2; \quad \mu = 0 \quad (4.49)$$

Así, la restricción sobre Γ es

$$\Gamma = \cos \alpha + \frac{(v_0)^2 + 2g(h - y)}{\rho g} \leq 1,5 \quad (4.50)$$

Ahora se considerará el movimiento tangencial para determinar la velocidad v cuando la fricción afecta al movimiento. La ecuación del movimiento tangencial es

$$a_t = \frac{d}{ds} \left[\frac{v^2}{2} \right] = g \sin \alpha - \frac{\mu N}{M}$$

donde s es la longitud del arco del tobogán, y

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Con N calculado a partir de (4,46), la ecuación diferencial ordinaria y la condición inicial del movimiento de la persona es

$$\begin{aligned} \frac{d(v^2)}{dx} &= 2 \left(g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \frac{\mu v^2}{\rho} \right) \sqrt{1 + (y')^2} \\ v^2 &= (v_0)^2 \text{ en } x = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

El objetivo del diseño será que el tobogán maximice la velocidad v_e de la persona cuando ésta llegue al final. Para que esto ocurra, la solución para v^2 no puede ser negativa para ningún valor x desde 0 a L .

Otra forma de hacer el diseño del tobogán sería sin restringir la forma del tobogán a la ecuación (4,42), de forma que carezca de sentido las referencias del parámetro de forma λ , pero sigan siendo negativas las pendientes en el intervalo $0 < x < L$. Sin esta restricción de forma, habría que imponer otra restricción para evitar que la persona se saliera del tobogán. Esta restricción sería

$$\Gamma = \cos \alpha + \frac{(v_0)^2 + 2g(h - y)}{\rho g} > 0 \quad (4.52)$$

Capítulo 5

Bibliografía.

- AKAY, T. J.: 1999. Métodos numéricos aplicados a la Ingeniería. *Ed. Limusa.*
- BONCOMPTE, M. y otros: Optimización económica. *Grupo de Innovación Docente en Matemática Económica y Optimización, Universidad de Barcelona.*
(<http://www.ub.edu/matheopt/optimizacion-economica/index.php>)
- CASTILLO, E. y otros: 2002. Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia.
(<http://www.dia.fi.upm.es/~jafernán/teaching/operational-research/LibroCompleto.pdf>)
- De PRADA, C.: Optimización con restricciones. *ISA-UVA.*
(<http://www.isa.cie.uva.es/~prada/KKT.pdf>)
- DUQUE, J. S.: Proceso de diseño en Ingeniería.
(<https://es.slideshare.net/jsduque/proceso-de-diseño-en-ingeniería>)
- ESPINOSA-PAREDES, G. y VÁZQUEZ, A.: 2016. Aplicaciones de programación no lineal. *OmniaScience* (open access).
(<http://dx.doi.org/10.3926/oss.21>)
- GAMS: <https://www.gams.com>
- MARCEL G. F.: Optimización de problemas no lineales. *Apuntes, Dpto de Ingeniería Industrial, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.*
(https://www.u-cursos.cl/ingeniería/2007/1/IN34A/1/material_docente/bajar?id_material=123665)
- MOCHOLÍ A., M.: Toma de decisiones con GAMS. *Dpto. Matemáticas para la Economía y Empresa. Univ. Valencia.*
(<https://www.uv.es/mmocholi/CGyF/APUNTES-GAMS-CGYF.pdf>)
- PERTUZ, M.: 2014. Enfoque de la optimización en el campo de la ingeniería. *Escuela de Ingeniería de Sistemas, Instituto Universitario Politécnico Santiago Mariño.*
(<https://es.slideshare.net/pertuzm/enfoque-de-la-optimización-en-el-campo-de-la-ingeniería>)
- RAMOS, A.: Optimización no lineal. *U. Pontificia Comillas.*
(<http://www.iit.comillas.edu/aramos/>)
- RAMOS, A. y otros: 2010. Modelos matemáticos de optimización. *U. Pontificia Comillas.*
(http://doi.icaei.upcomillas.es/intro_simio.htm)
- VANEGAS-A, d. y otros: 2011. Comparación de las técnicas de optimización por análisis de intervalos y la de enjambre de partículas para funciones con restricciones. *Ing. Univ. Bogotá (Colombia), 15 (1): 47-60, enero-junio de 2011. ISSN 0123-2126.*
- VITORIANO, B.: Programación matemática: Modelos de optimización. *Fac. C. Matemáticas, Univ. Complutense.*
(www.mat.ucm.es/~bvitoria)

Capítulo 6

Anexo.

En este anexo se incluyen los códigos que se han implementado para resolver determinados problemas de optimización incluidos en este TFG.

Código Java para la solución del problema de la sección 3.1 (Búsqueda exhaustiva):

```
package prueba;
import static java.lang.System.out;
public class Prueba {
public static void main(String[] args) {
double s = 40; //ancho
double w = 25; //carga
double p, x, e, n = 0.;
double m = 0.;
double Tmax = 0.;
double d = 0.;
double dmin = 20.0;
double dmax = 40.0;
double dopt = dmin;
int nd = 41;
double h = 0.;
double hmin = 2.5;
double hmax = 19.5;
double hopt = hmin;
int nh = 35;
double nmax = 0.;
double incrementod = (dmax - dmin)/(nd - 1);
double incrementoh = (hmax - hmin)/(nh - 1);
for (int kd = 0; kd < nd; kd++){
d = dmin + incrementod*(kd - 1);
for (int kh = 0; kh < nh; kh++) {
h = hmin + incrementoh*(kh - 1);
m = (Math.pow(d, 2))/(4*h);
if ( !( (h - m) < 2 ) ){
Tmax = w*d*Math.sqrt(1 + Math.pow(d/(2*h), 2));
```

```

if(! (Tmax > 900))
for (int j = 0; j < 40; j++){
p = j - 0.5;
x = p - d;
e = Math.cos(Math.atan(x/(2*m)));
n = n + e;
}
n = n/s;
if (n > nmax){
nmax = n;
dopt = d;
hopt = h;
}
}
}
}
System.out.println("dopt: " + dopt + "hopt: " + hopt + "nmax: " + nmax);
}
}
}
Solución: nmax = 0.8951; dopt = 26.5; hopt = 14.5

```

Código wxMaxima para resolución por Newton-Raphson del sistema dado por (3,22):

```

/* [wxMaxima: input start ] */
et(d,h):=1/40*sum (cos(atan(2*(i-0.5-d)*h/d^2)),
i, 1, 40);
G(d,h,l):=et(d,h)+l*(h-2-d^2/(4*h));
/*valor de G y de et en este punto inicial
x0=(d:25, h:14, l:0)*/
G(25,14,0);
et(25,14);
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*Comenzamos la 1ra iteracion a partir del punto inicial x0*/
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
matrix([diff(G(d,h,l),d,1)],[diff(G(d,h,l),h,1)],
[diff(G(d,h,l),l,1)])$
%, d:25, h:14, l:0$
f: %;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
jacobian([diff(G(d,h,l),d,1), diff(G(d,h,l),h,1),
diff(G(d,h,l),l,1)],[d,h,l])$

```

```

%, d:25, h:14, l:0$
J: %;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
J.matrix([d1],[d2],[d3])=-f;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
if numer#false then numer:false else numer:true;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
linsolve([- (25*d3)/28+7.528198990935961*10^-4*d2-
0.001936582372488524*d1=
-0.008827040528381057,
(1409*d3)/784-2.686715387110514*10^-5*d2+
7.528198990935959*10^-4*d1=
0.01154212353868103,
(1409*d2)/784-(25*d1)/28=-47/56],[d1,d2,d3]);
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*Se ha obtenido el punto x1(d,h,l) dado por
d=25+2.298781880269703; h=14+0.6750513244774962;
l=0+0.005469466386530561*/
d:25+2.298781880269703;
h:14+0.6750513244774962;
l:0+0.005469466386530561;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*valor de G y de et en este 1er punto iterado*/
G(27.2987818802697,14.6750513244775,0.005469466386530561);
et(27.2987818802697,14.67505132447751);
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*diferencia entre valores de G en los puntos hallados*/
/* entre x1 y x0*/
G(27.2987818802697,14.6750513244775,0.005469466386530561)-
G(25,14,0);
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*segunda iteracion a partir de x1*/
kill(all)$
et(d,h):=1/40*sum (cos(atan(2*(i-0.5-d)*h/d^2)), i, 1, 40);
G(d,h,l):=et(d,h)+l*(h-2-d^2/(4*h));
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
matrix([diff(G(d,h,l),d,1)],[diff(G(d,h,l),h,1)],
[diff(G(d,h,l),l,1)])$
%, d:27.2987818802697, h:14.6750513244775,
l:0.005469466386530561$
f: %;

```



```

/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
jacobian([diff(G(d,h,l),d,1), diff(G(d,h,l),h,1),
diff(G(d,h,l),l,1)], [d,h,l])$
%, d:27.2987818802697, h:14.6750513244775,
l:0.005469466386530561$
J: %;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
J.matrix([d1],[d2],[d3])=-f;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
linsolve(
[-0.9301085657784458*d3+8.116514184522252*10^-4*d2-
0.001432982027919873*d1=
-5.21978955759601*10^-4,
1.865101944134437*d3-6.788260324887256*10^-4*d2+
8.116514184522252*10^-4*d1=
-2.367602355222292*10^-5,
1.865101944134437*d2-0.9301085657784458*d1=0.02036410660063837],
[d1,d2,d3]);
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*Se ha obtenido el punto x2(d,h,l) dado por
d=27.2987818802697+0.6802584106425759;
h=14.6750513244775+0.3501568819527509;
l=0.005469466386530561-1.812839891154739*/
d:27.2987818802697+0.6802584106425759;
h:14.6750513244775+0.3501568819527509;
l:0.005469466386530561-1.812839891154739;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*valor de G y et en el segundo punto iterado*/
G(27.97904029091228,15.02520820643025,-1.807370424768209);
et(27.97904029091228,15.02520820643025);
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*diferencia entre valores de G y et en los puntos hallados*/
/* entre x1 y x0*/
G(27.97904029091228,15.02520820643025,-1.807370424768209)-
G(27.2987818802697,14.6750513244775,0.005469466386530561);
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*tercera iteracion. Se parten de los valores obtenidos para x2*/
kill(all)$
et(d,h):=1/40*sum (cos(atan(2*(i-0.5-d)*h/d^2)), i, 1, 40);
G(d,h,l):=et(d,h)+l*(h-2-d^2/(4*h));
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */

```

```

matrix([diff(G(d,h,l),d,1)],[diff(G(d,h,l),h,1)],
[diff(G(d,h,l),l,1)])$
%, d:27.97904029091228, h:15.02520820643025,
l:-1.807370424768209$
f: %;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
jacobian([diff(G(d,h,l),d,1), diff(G(d,h,l),h,1),
diff(G(d,h,l),l,1)],[d,h,l])$
%, d:27.97904029091228, h:15.02520820643025,
l:-1.807370424768209$
J: %;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
J.matrix([d1],[d2],[d3])=-f;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
linsolve([-0.9310699694310477*d3-0.1116048078294567*d2+
0.05905246834294651*d1=
-1.687752752351118,
1.866891287976332*d3+0.2085296517361189*d2-
0.1116048078294567*d1=
3.384060636809379,
1.866891287976332*d2-0.9310699694310477*d1=
1.388775462451974*10^-5],
[d1,d2,d3]);
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*Se obtiene el punto x3(d,h,l) dado por
d=27.97904029091228+0.07157484327250416
h=15.02520820643025+0.03570377949786227
l=-1.807370424768209+1.812962253631124*/
d=27.97904029091228+0.07157484327250416;
h=15.02520820643025+0.03570377949786227;
l=-1.807370424768209+1.812962253631124;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*valor de G y et en el tercer punto iterado*/
G(28.05061513418478,15.06091198592811,0.005591828862915094);
et(28.05061513418478,15.06091198592811);
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*Diferencia de G entre x3 y x2*/
G(28.05061513418478,15.06091198592811,0.005591828862915094)-
G(27.2987818802697,14.6750513244775,0.005469466386530561);
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*cuarta iteracion*/

```

```

kill(all)$
et(d,h):=1/40*sum (cos(atan(2*(i-0.5-d)*h/d^2)), i, 1, 40);
G(d,h,l):=et(d,h)+l*(h-2-d^2/(4*h));
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
matrix([diff(G(d,h,l),d,1)],[diff(G(d,h,l),h,1)],
[diff(G(d,h,l),l,1)])$
%, d:28.05061513418478, h:15.06091198592811,
l:0.005591828862915094$
f: %;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
jacobian([diff(G(d,h,l),d,1), diff(G(d,h,l),h,1),
diff(G(d,h,l),l,1)], [d,h,l])$
%, d:28.05061513418478, h:15.06091198592811,
l:0.005591828862915094$
J: %;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
J.matrix([d1],[d2],[d3])=-f;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
linsolve([-0.9312389302982902*d3+7.314941415936737*10^-
4*d2-0.001262202772544079*d1=
3.066144222069519*10^-4,
1.867205945303104*d3-6.688387167322568*10^-4*d2+
7.314941415936737*10^-4*d1=
-5.7152048414515*10^-4,
1.867205945303104*d2-0.9312389302982902*d1=
4.299555236286778*10^-7],
[d1,d2,d3]);
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*Se obtiene un nuevo punto x4(d,h,l) con
d=28.05061513418478-0.03087267894203872
h=15.06091198592811-0.01539702175339643
l=0.005591828862915094-2.995038796023141*10^-4*/
d=28.05061513418478-0.03087267894203872;
h=15.06091198592811-0.01539702175339643;
l=0.005591828862915094-2.995038796023141*10^-4;
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */
/*La función G y et en este nuevo punto toman un valor*/
G(28.01974245524274,15.04551496417471,
0.005292324983312779);
et(28.01974245524274,15.04551496417471);
/* [wxMaxima: input end ] */
/* [wxMaxima: input start ] */

```

```

/*Y la diferencia entre la función en el 4º punto y
en el tercero es*/
G(28.01974245524274,15.04551496417471,
0.005292324983312779)-
G(28.05061513418478,15.06091198592811,
0.005591828862915094);
/* [wxMaxima: input end ] */

```

Código GAMS para la resolución del problema de construcción de un voladizo (ecuación (4,2)):

```

CÓDIGO GAMS
4
5 SCALARS L longitud /1/
6          E modulo de Young /1e6/
7          F carga en el extremo libre /100/
8          S maxima deformacion permitida /1 /
9          gamma densidad /100/;
10
11 POSITIVE VARIABLES x,y;
12 FREE VARIABLE obj;
13
14 EQUATIONS
15          WEIGHT funcion objetivo
16          SMT restriccion impuesta por la teoria de la resistencia de los m
   ateriales
17          eq2 x mayor que 0.5;
18
19 WEIGHT.. obj =e= gamma*L*x*y;
20 SMT.. {4*F*POWER(L,3)}/{E*x*POWER(y,3)}=l= S;
21 eq2.. x=G=0.5
22
23 MODEL voladizo /ALL/;
24 x.lo=0.001; y.lo=0.001;
25 x.l=1; y.l=1;
26
27 SOLVE voladizo USING nlp MINIMIZING obj;

```

```

SOLUCIÓN GAMS

```

| | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL | |
|--------------|-------|-------|-------|----------|---|
| ---- VAR x | 0.001 | 0.500 | +INF | | . |
| ---- VAR y | 0.001 | 0.093 | +INF | | . |
| ---- VAR obj | -INF | 4.642 | +INF | | . |

Código GAMS para la resolución del problema de la estructura de dos barras (ecuación (4,3)):

```

CÓDIGO GAMS
2
3 SCALARS Gamma densidad del material de las barras /1e2/
4 E modulo de Young /1e6/
5 F carga sobre el pivote fijo /15e3/
6 S0 tension maxima admisible /6e4/
7 D0 desplazamiento maximo admisible del pivote 3 /1e-1/
8 h altura de la estructura /1/;
9
10 PARAMETER K constante;
11 K= F/(2*SQR(2)*h);
12
13 POSITIVE VARIABLES x,z;
14
15 FREE VARIABLE obj;
16
17 EQUATIONS
18 W funcion objetivo
19 D desplazamiento del pivote 3
20 S1 tension en el pivote 1
21 S2 tension en el pivote 2;
22
23 W.. obj =e= 2*Gamma*SQR(SQR(x)+SQR(h))*z;
24 D.. K*( (SQR(h)+SQR(x))**(3/2)) * SQR(h**4+x**4) / (E*h*SQR(x)*z) =1- D0;
25 S1.. K*((x+h)*SQR(SQR(x)+SQR(h))) / (x*z) =1- S0;
26 S2.. K*((h-x)*SQR(SQR(x)+SQR(h))) / (x*z)=1- S0;
27
28 MODEL estructura /ALL/;
29 x.lo=0.05; z.lo=0.001;
30 x.l=100; z.l=100;
31
32 SOLVE estructura USING nlp MINIMIZING obj;

```

| SOLUCIÓN GAMS | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL |
|---------------|-------|--------|-------|-----------|
| ---- VAR x | 0.050 | 0.657 | +INF | -1.791E-8 |
| ---- VAR z | 0.001 | 0.267 | +INF | . |
| ---- VAR obj | -INF | 63.829 | +INF | . |

Código GAMS para la resolución del problema de la columna sometida a pandeo (ecuaciones (4,4) – (4,5)):

```

CÓDIGO GAMS
2
3 SCALARS M masa a soportar por la columna /100/
4 H altura de la columna /10/
5 D densidad del material /100/
6 E modulo de Young del material /1e6/
7 S maxima tension permitida /6e4/
8 G constante gravitatoria /9.8/
9 Pi constante /3.141592/;
10
11 POSITIVE VARIABLES x,y;
12
13 FREE VARIABLE z;
14
15 EQUATIONS
16 W funcion objetivo
17 R1 restriccion de la tension de compresion
18 R2 restriccion de la tension de pandeo;
19
20 W.. z =e= D*H*x*y-SQR((E*x*(y**3))/(4*(H**3)*(M+(33/140)*D*H*x*y)));
21 R1.. (M*G)/(x*y) =1= S;
22 R2.. (M*G)/(x*y) =1= (SQR(Pi)*E*SQR(y))/(48*SQR(H));
23
24 MODEL columna /ALL/;
25
26 x.lo=0.001; y.lo=0.001;
27 x.l=10; y.l=10;
28
29 SOLVE columna USING nlp MINIMIZING z;

```

| SOLUCIÓN GAMS | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL |
|---------------|--------|---------|-------|----------|
| ---- VAR x | 0.001 | 2.000 | +INF | 3238.762 |
| ---- VAR y | 10.000 | 10.000 | +INF | . |
| ---- VAR z | -INF | 19989.8 | +INF | . |

Código GAMS para la resolución del problema de vigas y cuerdas (ecuaciones (4,8) – (4,9)):

```

CÓDIGO GAMS
2
3 SET
4     B conjunto de vigas /B1*B3/
5     R conjunto de cuerdas /RA, RB, RC, RD, RE, RF/
6     L conjunto de cargas /L1, L2/
7
8 UPP(B,R)
9     /B1.(RA, RB)
10    B2.(RC, RD)
11    B3.(RE, RF)/
12 DOWN(B,R)
13    /B1.(RC, RD)
14    B2.(RF)/
15 LOAD(B,L)
16    /B1.L1
17    B3.L2/;
18
19 PARAMETER LMAX(R) carga maxima en las cuerdas
20    / (RA, RB) 300
21    (RC, RD) 200
22    (RE, RF) 100/;
23
24 PARAMETER dr(R) coordenadas de la cuerda R
25    / RA 2
26    RB 12
27    RC 4
28    RD 12
29    RE 0
30    RF 10/;
31
32 VARIABLES
33     z valor de la funcion objetivo
34     x(L) carga de la viga
35     T(R) tension sobre la cuerda R
36     d(L) distancia de la carga L respecto al extremo izquierdo
37     de la viga;
38
39 POSITIVE VARIABLE d;
40 T.UP(R) = LMAX(R);
41
42 EQUATIONS
43     COST funcion objetivo
44     FORCES(B) restriccion de equilibrio de fuerzas
45     MOMENT(B) restriccion de equilibrio de momentos;
46 COST ..      z =E= SUM(L, x(L)) ;
47 FORCES(B)..  SUM(R$UPP(B,R),T(R))=E= SUM(L$LOAD(B,L),x(L))+
48              SUM(R$DOWN(B,R),T(R));
49 MOMENT(B)..  SUM(R$UPP(B,R),dr(R)*T(R))=E=SUM(L$LOAD(B,L),
50              d(L)*x(L))+SUM(R$DOWN(B,R),dr(R)*T(R));
51
52 MODEL vīgaycuerda /COST,FORCES,MOMENT/;
53
54 SOLVE vīgaycuerda USING nlp MAXIMIZING z;
    
```

SOLUCIÓN GAMS

| | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL |
|---------------------------------|---|---------|---------|----------|
| ---- VAR z | -INF | 700.000 | +INF | . |
| z: valor de la funcion objetivo | | | | |
| ---- VAR x | carga de la viga | | | |
| | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL |
| L1 | -INF | 585.433 | +INF | . |
| L2 | -INF | 114.567 | +INF | . |
| ---- VAR T | tension sobre la cuerda R | | | |
| | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL |
| RA | -INF | 300.000 | 300.000 | 1.000 |
| RB | -INF | 300.000 | 300.000 | 1.000 |
| RC | -INF | 3.642 | 200.000 | . |
| RD | -INF | 10.925 | 200.000 | . |
| RE | -INF | 100.000 | 100.000 | 1.000 |
| RF | -INF | 14.567 | 100.000 | . |
| ---- VAR d | distancia de la carga L respecto al extremo izquierdo | | | |
| | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL |
| L1 | . | 6.925 | +INF | . |
| L2 | . | 1.271 | +INF | EPS |

Código GAMS para la resolución del problema de la estimación de estado en sistemas eléctricos (ecuación (4,10)):

```

$title ESTIMACION DE ESTADO EN SISTEMAS ELECTRICOS
** En primer lugar se define el conjunto de nudos,

SET
  N      indice de nudos      /N1*N2/

** Se asignan los datos de entrada. La primera tabla representa los datos
** para cada linea. Los identificadores de las columnas no se han
** declarado como elementos que pertenecen a algun conjunto,
** por eso se utiliza el simbolo '*' en la definicion de la tabla.
** Igualmente ocurre en la segunda tabla.

TABLE LINE(N,N,*) datos de entrada de las lineas
      Z      PHI
      (Ohm)  (grados)
*
  N1.N2  0.15  90;

TABLE BUS(N,*) datos de entrada de los nudos
      V      P      Q
      (V)    (W)    (VAr)
*
  N1     1.07  0.83  0.73;
  N2     1.01  0.81  0.58;

** La constante PI se usa para convertir grados a radianes.

SCALAR
  PI  /3.1416/;

** Se declaran las variables de optimizacion.

VARIABLES
  z      valor de la funcion objetivo
  V(N)  modulo de la tension en el nudo N
  d(N)  angulo de la tension en el nudo N;

** El nudo 2 se toma como nudo de referencia, por
** eso se fija su angulo a cero
D.FX('N2')=0;

** El conjunto de nudos N se duplica para hacer referencias
** a distintos elementos del mismo dentro de la misma restriccion.
ALIAS(N,NP);

** A continuacion se convierten grados a radianes.
LINE(N,NP,'PHI')=LINE(N,NP,'PHI')*PI/180;

** Las matrices de datos Z y PHI se definen como simetricas mediante
** la condicion $(ORD(N) GT ORD(NP)) sobre los conjuntos N y NP.
LINE(N,NP,'Z')$(ORD(N) GT ORD(NP))=LINE(NP,N,'Z');
LINE(N,NP,'PHI')$(ORD(N) GT ORD(NP))=LINE(NP,N,'PHI');

EQUATION
  ERROR      funcion objetivo;

** La funcion objetivo se define en terminos de funciones no lineales
** como SQRT, COS y SIN. La condicion $(LINE(N,NP,'Z') NE 0) sirve
** para comprobar si los nudos N y NP estan conectados.

ERROR.. z =@= SQRT((SQR(V(N)-BUS(N,'V')) +SQR(NP$(LINE(N,NP,'Z') NE 0),
SQR((1/LINE(N,NP,'Z'))*
(SQR(V(N))*COS(LINE(N,NP,'PHI'))-V(N)*V(NP)*COS(d(N)-
d(NP)+LINE(N,NP,'PHI')))-BUS(N,'P'))+
SQR((1/LINE(N,NP,'Z'))*
(SQR(V(N))*SIN(LINE(N,NP,'PHI'))-V(N)*V(NP)*SIN(d(N)-
d(NP)+LINE(N,NP,'PHI')))-BUS(N,'Q'))));

** Los comandos siguientes definen el modelo de estimacion, y solicitan a GAMS
** que resuelva el problema mediante un optimizador no lineal.

MODEL estimacion /ERROR/;
SOLVE estimacion USING nlp MINIMIZING z;

```

| | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL |
|------------|-----------------------------------|-------|-------|----------|
| ---- VAR Z | -INF | 2.203 | +INF | . |
| Z | valor de la funcion objetivo | | | |
| ---- VAR V | modulo de la tension en el nudo N | | | |
| | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL |
| N1 | -INF | 1.045 | +INF | EPS |
| N2 | -INF | 1.033 | +INF | EPS |
| ---- VAR D | angulo de la tension en el nudo N | | | |
| | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL |
| N1 | -INF | 0.002 | +INF | EPS |
| N2 | . | . | . | EPS |

Código GAMS para la resolución del problema de reparto óptimo de carga (ecuaciones (4,11) – (4,12) – (4,13)):

```

$title PROBLEMA DEL FLUJO OPTIMO DE CARGAS

** Se definen los conjuntos G y N.
** Luego se define el conjunto MAP
** como un subconjunto de los conjuntos G y N.
** El subconjunto MAP establece las combinaciones
** validas entre los elementos de G y N.

SETS
  G      indice de generadores /G1*G2/
  N      indice de nudos /N1*N3/
  MAP(G,N) asocia generadores y nudos /G1.N1,G2.N2/;

** Se asignan los datos de entrada. La primera tabla representa los datos
** para cada generador. Los identificadores de las columnas no se han
** declarado como elementos que pertenecen a algun conjunto,
** por eso se utiliza el simbolo '*' en la definicion de la tabla.
** Igualmente ocurre en los de las dos tablas posteriores.

TABLE GDATA(G,*) datos de entrada de los generadores
      PMIN  PMAX  QMIN  QMAX  COST
      (W)   (W)   (VAr) (VAr) (E/Wh)
*
  G1     0.0   3.0   -1.0  2.0   6
  G2     0.0   3.0   -1.0  2.0   7;

TABLE BUS(N,*)
      VMIN  VMAX  PL  QL
      (V)   (V)  (W)  (VAr)
*
  N1     0.95  1.13
  N2     0.95  1.10
  N3     0.95  1.10  4.5  1.5;

** Constante PI util para limitar los angulos de tension.
SCALAR
  PI  /3.1416/;

** Se declaran las variables de optimizacion.
VARIABLES
  z      valor de la funcion objetivo
  p(G)  potencia activa generada por el generador G
  q(G)  potencia reactiva generada por el generador G
  v(N)  modulo de la tension en el nudo N
  d(N)  angulo de la tension en el nudo N;

** Se asignan los limites de las variables.
p.lo(G)=GDATA(G,'PMIN');  p.up(G)=GDATA(G,'PMAX');
q.lo(G)=GDATA(G,'QMIN');  q.up(G)=GDATA(G,'QMAX');
v.lo(N)=BUS(N,'VMIN');    v.up(N)=BUS(N,'VMAX');
d.lo(N)=-PI;              d.up(N)=PI;

```

```

** El nudo 3 se toma como nudo de referencia, por
** eso se fija su angulo a cero.
d.fx('N3')=0;

** El conjunto de nudos N se duplica para hacer referencia
** a distintos elementos del mismo dentro de la misma restriccion.
ALIAS(N,NP);

** Las matrices de datos Z y PHI se definen simetricas mediante
** la condicion $(ORD(N) GT ORD(NP)) sobre los conjuntos N y NP.
LINE(N,NP,'Y')$(ORD(N) GT ORD(NP))=LINE(NP,N,'Y');
LINE(N,NP,'PHI')$(ORD(N) GT ORD(NP))=LINE(NP,N,'PHI');

** Se declaran las restricciones.
EQUATIONS
COST      funcion objetivo
PBAL(N)   restricciones de balance de potencia activa
QBAL(N)   restricciones de balance de potencia reactiva;

** En las restricciones se emplea la condicion $MAP(G,N)
** para comprobar si el generador G esta ubicado en el nudo N.

COST..    z =e= SUM(G,GDATA(G,'COST')*p(G));
PBAL(N).. SUM($MAP(G,N),p(G))-BUS(N,'PL')=e=v(N)*
SUM(NP,LINE(N,NP,'Y')*v(NP)*COS(d(N)-d(NP)
-LINE(N,NP,'PHI')));
QBAL(N).. SUM($MAP(G,N),q(G))-BUS(N,'QL')=e= v(N)*
SUM(NP,LINE(N,NP,'Y')*v(NP)*SIN(d(N)-d(NP))-LINE(N,NP,'PHI'));

** Los comandos siguientes definen el modelo de flujo óptimo de cargas,
** y solicitan a GAMS que resuelva el problema mediante un optimizador no lineal.

MODEL foc /COST,PBAL,QBAL/;

SOLVE foc USING nlp MINIMIZING z;

```

| | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL |
|------------|---|--------|----------|----------|
| ---- VAR Z | -INF | 30.312 | +INF | . |
| Z | valor de la funcion objetivo | | | |
| ---- VAR P | potencia activa generada por el generador G | | | |
| LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL | |
| G1 | 3.000 | 3.000 | -0.927 | . |
| G2 | 1.759 | 3.000 | . | . |
| ---- VAR Q | potencia reactiva generada por el generador G | | | |
| LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL | |
| G1 | -1.000 | 1.860 | 2.000 | . |
| G2 | -1.000 | 0.746 | 2.000 | . |
| ---- VAR V | modulo de la tension en el nudo N | | | |
| LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL | |
| N1 | 0.950 | 1.130 | 1.130 | -0.533 |
| N2 | 0.950 | 1.100 | 1.100 | -3.303 |
| N3 | 0.950 | 0.979 | 1.100 | . |
| ---- VAR D | angulo de la tension en el nudo N | | | |
| LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL | |
| N1 | -3.142 | 0.190 | 3.142 | . |
| N2 | -3.142 | 0.174 | 3.142 | . |
| N3 | . | . | . | EPS |

Código GAMS para la resolución del problema de la asignación del tráfico (ecuaciones (4,14) – (4,15)):

```

$title EL PROBLEMA DE ASIGNACION DE TRAFICO

SETS
r rutas /r1-r5/
a arcos /a1-a4/
w demandas /w1-w2/;

PARAMETERS
D(w) demanda
/w1 4000
w2 2500/
K(a) capacidad del arco
/a1 500
a2 400
a3 400
a4 500/
b(a) parametro de congestion del arco
/a1 1.
a2 1.
a3 1.
a4 1./
n(a) parametro de congestion del arco
/a1 4.
a2 4.
a3 4.
a4 4./
CO(a) coste del arco sin flujo
/a1 5
a2 7
a3 10
a4 2/;

TABLE DELTAR_W(r,w) matriz de incidencias ruta-demanda
w1 w2
r1 1 0
r2 1 0
r3 1 0
r4 0 1
r5 0 1

TABLE DELTAR_L(r,a) matriz de incidencias ruta-arco
a1 a2 a3 a4
r1 1 0 0 0
r2 0 1 0 1
r3 0 0 1 1
r4 0 1 0 0
r5 0 0 1 0;

VARIABLES
H(r) flujo en la ruta r
F(a) flujo en el arco a
Z tiempo total en la red de transporte
POSITIVE VARIABLE H, F;

EQUATIONS
COST funcion objetivo
SD(w) restriccion sobre la demanda
CF(a) conservacion del flujo;

SD(w).. SUM(r,H(r)*DELTAR_W(r,w))=e= D(w);
CF(a).. SUM(r,H(r)*DELTAR_L(r,a))=e= F(a);
COST.. Z=e=SUM(a,CO(a)*F(a)+(b(a)/(n(a)+1.))*(F(a)/K(a))**(n(a)+1.));

MODEL PAT /all/;
SOLVE PAT using nlp minimizing Z;
DISPLAY H.L;
DISPLAY F.L;

```