



## TRABAJO FIN DE GRADO

Pasarela a Grado de Ingeniería Civil

UPCT

# **CARACTERIZACIÓN ADIMENSIONAL DE PROBLEMAS DE CONSOLIDACIÓN 2-D EN GEOMETRÍAS RECTANGULARES DE MEDIOS ANISÓTROPAS**

**Alumno: Jesús Enrique López de Pablo Gallego**

**Director: Iván Alhama Manteca**

**Codirector: Gonzalo García Ros**

# ÍNDICE

Capítulo 1. Introducción .....	págs. 3 - 4.
Capítulo 2. Fundamentos teóricos .....	págs. 5 - 15.
Capítulo 3. Caracterización de los grupos mediante los grupos adimensionales.....	págs. 16 - 20.
3.1 Geometría rectangular 1D.....	págs. 18 - 19.
3.2 Geometría rectangular 2D.....	pág. 20.
Capítulo 4. Aplicación. Simulaciones.....	págs. 21 - 40.
4.1 El método de simulación por redes.....	págs. 21-27.
4.2 PSPICE.....	págs. 27 - 28.
4.3 Modelo en red.....	pág. 28.
4.3.1 Generalidades.....	pág. 28.
4.3.2 Modelo de consolidación rectangular 2D.....	págs. 28 - 31.
4.4 Condiciones de contorno.....	págs. 31 - 34.
4.5 Supuesto concreto de consolidación lineal 2D.....	págs. 35 - 41.
Capítulo 5. Conclusiones.....	págs. 42 - 43.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

El trabajo que se desarrolla a continuación consiste, dentro del área de estudio de los fenómenos de la consolidación de terrenos, en presentar un modelo de caracterización adimensional de problemas de consolidación lineal en dos dimensiones ( 2D ) en unas condiciones concretas de geometría rectangular en medios anisótropos.

En primer lugar repasaremos los fundamentos teóricos en los que esta basado el problema que se aborda, la teoría del problema de consolidación lineal 1D y 2D de Terzaghi (Terzaghi & Frölich, 1933).

A continuación haremos una introducción al método de simulación por redes (González Fernández, 2002), dado que este método es la herramienta numérica utilizada para la resolución de las ecuaciones de gobierno y se definirá el modelo en red del problema estudiado para, posteriormente, comentar los resultados.

El objetivo principal del presente trabajo es la adimensionalización de la ecuación de gobierno 2D en un escenario rectangular concreto, aplicando los conceptos de discriminación espacial (Alhama & Madrid, 2012) al caso 2D.

Para ello ha sido necesario conocer las técnicas del método de redes para el diseño de circuitos, aplicadas al software de resolución de circuitos Pspice (PSPICE, 1994) así como familiarizarse con los métodos de adimensionalización discriminada de ecuaciones en derivadas parciales.

En definitiva, se ha estudiado la evolución espacial y temporal del exceso de presión intersticial y del grado medio de consolidación (ambos con la ecuación de gobierno en su forma clásica, definida por el coeficiente de consolidación) en una situación bien definida de consolidación 2D en un medio rectangular.

En medios rectangulares la adimensionalización discriminada ha permitido reducir a dos el número de parámetros adimensionales que controlan la solución del problema (la adimensionalización clásica es controlada por tres parámetros adimensionales).

En última instancia se pretende que los resultados sirvan de utilidad a la hora de llegar a unas conclusiones firmes, una vez se tenga una visión suficientemente global de los fenómenos de consolidación estudiados mediante los métodos de simulación de redes (tanto los casos de consolidación lineal 1D y 2D como en los casos de consolidación radial).

## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### **2.1 La teoría de la consolidación**

De todo el conjunto de las propiedades mecánicas del terreno, son dos las propiedades que es necesario conocer mas profundamente al tratar problemas de diseño en el ámbito de la consolidación en ingeniería civil: la resistencia, que indica cuánto esfuerzo es capaz de soportar un suelo, y la rigidez, que condiciona las variaciones de volumen que se dan lugar cuando el terreno es sometido a cargas externas.

En suelos saturados poco permeables, principalmente arcillosos, cuando se aplican cargas en superficie se produce de forma casi inmediata un exceso de presión intersticial. Al ser el agua incapaz de resistir esfuerzos cortantes, el exceso de presión se elimina mediante un flujo de agua hacia el exterior. La permeabilidad del terreno es la propiedad mecánica que define si, dicha evacuación del agua del terreno, se produce con mayor o menos rapidez.

A medida que el sistema pierde volumen de agua se produce, lógicamente, una reducción del volumen de poros, lo que supone una disminución del volumen del suelo. Por otro lado, a medida que se produce esta disminución de la presión intersticial se produce un aumento del esfuerzo efectivo y con ello una disminución de la resistencia al corte.

Al proceso de disipación del agua del terreno es lo que se conoce como proceso de consolidación en el ámbito de la geotecnia, y el estudio de esta debe ser capaz de responder a dos cuestiones fundamentales: en que medida se produce la deformación del terreno objeto de estudio y cuanto tiempo tarda este proceso en llevarse a cabo.

## **2.2 Consolidación unidimensional**

La consolidación unidimensional (1D) implica que el flujo de agua sólo tiene lugar en sentido vertical. En este caso, el espesor del estrato de suelo que consolida debe ser pequeño en relación con la superficie de apoyo de la carga de forma que cuando cambia la tensión total en superficie, debido a la aplicación de una carga, todos los puntos del estrato arcilloso experimentan igual incremento inicial de presión intersticial. Estas condiciones se reproducen en el ensayo edométrico, donde el confinamiento lateral de la muestra en la célula edométrica impide que el agua fluya o que el terreno se desplace en sentido horizontal.

En la figura que se muestra a continuación podemos ver el esquema físico utilizado para la consolidación. En un suelo de arcilla saturada de espesor  $H$  se considera un elemento de volumen de espesor  $dz$ . El origen de coordenadas se sitúa en la cota inferior del suelo que se asume impermeable, mientras que la cota superior ( $z = H$ ) mantiene una presión atmosférica (constante) tras la aplicación de la carga. Bajo estas condiciones, en cualquier elemento de volumen del dominio, el agua entra por la cota inferior y sale por la superior y, teniendo en cuenta que el contenido de agua de cada elemento disminuye progresivamente, la

cantidad de agua que sale del suelo es siempre mayor que la cantidad que entra. Se asume una sección transversal constante de valor A.

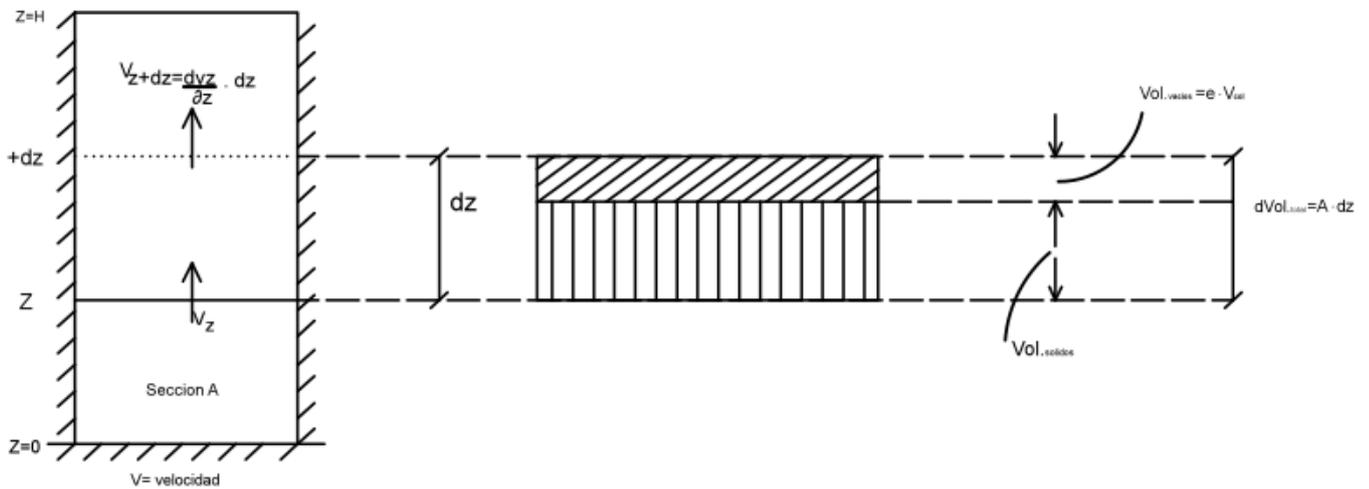


Figura 2.1 Geometría del proceso de consolidación 1D

Si llamamos  $V_v$ ,  $V_s$  y  $V_t$  a los volúmenes de vacíos, sólidos y total (vacíos + sólidos), respectivamente, y partiendo de la definición del índice de poros

$$e = \frac{V_v}{V_s}$$

Se obtiene

$$V_v = e \times V_s = \frac{e}{\frac{V_t}{V_s}} \times V_t = \frac{e}{1+e} (dz) A \quad (1)$$

La ecuación diferencial de la consolidación unidimensional se plantea bajo varios supuestos:

- a) El suelo se encuentra completamente saturado (los intersticios entre partículas están llenos de agua)
- b) Las partículas de suelo son incompresibles
- c) El agua es incompresible

Una vez expuesto lo anterior, la ecuación de consolidación se obtiene al igualar el cambio temporal del volumen de agua en un elemento de suelo con el cambio temporal del volumen de vacíos en dicho elemento. Este balance, junto con la ecuación constitutiva que relaciona las variables flujo y gradiente de presión (Ley de Darcy), y con las expresiones de carácter empírico que relacionan los parámetros del problema con la variable dependiente (el exceso de presión intersticial,  $u$ ), permiten deducir la ecuación de consolidación en el caso general (procesos lineales o no lineales), como una ecuación diferencial en derivadas parciales (ecuación de difusión) de una sola variable dependiente ( $u$ ), y dos independientes (la posición y el tiempo).

En los casos lineales, dicha ecuación tiene solución analítica o semi-analítica en forma de series de funciones matemáticas de convergencia más o menos lenta, para todas las geometrías, mientras que para los casos no lineales, se precisa la utilización de herramientas de cálculo numérico.

Resumiendo, siendo

$q_{\text{agua}}$  : cambio de volumen en el elemento de volumen  $A$  ( $dz$ )

$q_{\text{vacíos}}$  : cambio de volumen de vacíos en el elemento de volumen  $A$  ( $dz$ )

obtenemos

$$q_{\text{agua}} = \frac{dV_w}{dt} = Av_z - A \left( V_z + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz \right) = -A \frac{\partial V_z}{\partial z} dz \quad (2)$$

Usando la expresión (1)

$$q_{\text{vacíos}} = \frac{dV_v}{dt} = A (dz) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e}{1+e} \right) \quad (3)$$

Igualando sendas expresiones (2) y (3) tenemos,

$$- \frac{\partial V_z}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e}{1+e} \right) \quad (4)$$

Ésta es la ecuación que formula la igualdad en cualquier elemento de volumen entre el cambio temporal del contenido del agua y el cambio de volumen de vacíos. Aplicando la ley de Darcy y la ecuación de Bernouille,

$$V_z = - \frac{k}{\gamma_w} \frac{du}{dz} \quad (5)$$

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación (4) de la siguiente forma,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k}{\gamma_w} \frac{du}{dz} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{1+e} \right) = \frac{1}{(1+e)^2} \left( \frac{\partial e}{\partial t} \right) \quad (6a)$$

donde k y e son parámetros que dependen de la tensión efectiva (  $\sigma'$  ). Ésta es la ecuación mas generalizada del proceso de consolidación.

Terzaghi simplifica la expresión anterior a la forma:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k}{\gamma_w} \frac{du}{dz} \right) = \frac{1}{1+e_0} \left( \frac{\partial e}{\partial t} \right) \quad (6b)$$

Para expresar esta ecuación en función del exceso de presión intersticial y reducir la ecuación anterior a la de Terzaghi se hace necesario introducir algunas hipótesis:

1º) La relación de tensiones de Terzaghi  $\sigma = \sigma' + u$ ; dónde  $\sigma$  es la tensión total del suelo y  $\sigma'$  es la tensión efectiva del mismo, como tenemos que  $\sigma$  es constante durante todo el proceso de consolidación, se deduce la relación:

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial \sigma'} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} = - \frac{\partial e}{\partial \sigma'} \frac{\partial u}{\partial t}$$

2º) De la expresión de la deformación unitaria (  $\varepsilon$  ) en función del índice de poros y la definición del índice de compresibilidad volumétrica (  $m_v$  ) o del coeficiente de compresibilidad (  $a_v$  ):

$$\varepsilon = - \left( \frac{\Delta e}{1+e} \right), m_v = \frac{av}{(1+e_0)} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma'} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \sigma'} = - \left( \frac{1}{1+e} \right) \frac{\partial e}{\partial \sigma'} \quad (7)$$

que nos permiten escribir

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial \sigma'} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} = m_v (1 + e) \frac{\partial \sigma'}{\partial t}$$

De ésta manera, la ecuación de consolidación (6b) puede reescribirse de la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k}{\gamma_w} \frac{du}{dz} \right) = m_v (1 + e) \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \quad (8)$$

Terzaghi también asume que las variaciones en el índice de poros son pequeñas, es decir,  $(1 + e) \cong (1 + e_0)$ ; así mismo asume que la conductividad hidráulica es constante, lo que permite simplificar la ecuación de consolidación a la forma

$$\frac{k (1+e_0)}{\gamma_w av} \frac{\partial^2 u}{dz^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{dz^2} \quad (9)$$

El término  $\frac{k (1+e_0)}{\gamma_w av}$  recibe el nombre de coeficiente de consolidación ( $c_v$ )

Y tiene las dimensiones típicas de un parámetro de difusividad ( $m^2 / s$ ).

Éste parámetro nos otorga información acerca de la velocidad de disipación del exceso de presión intersticial en el dominio de estudio.

En la siguiente figura se presenta, de forma esquemática, un diagrama de bloques de la deducción de la ecuación.

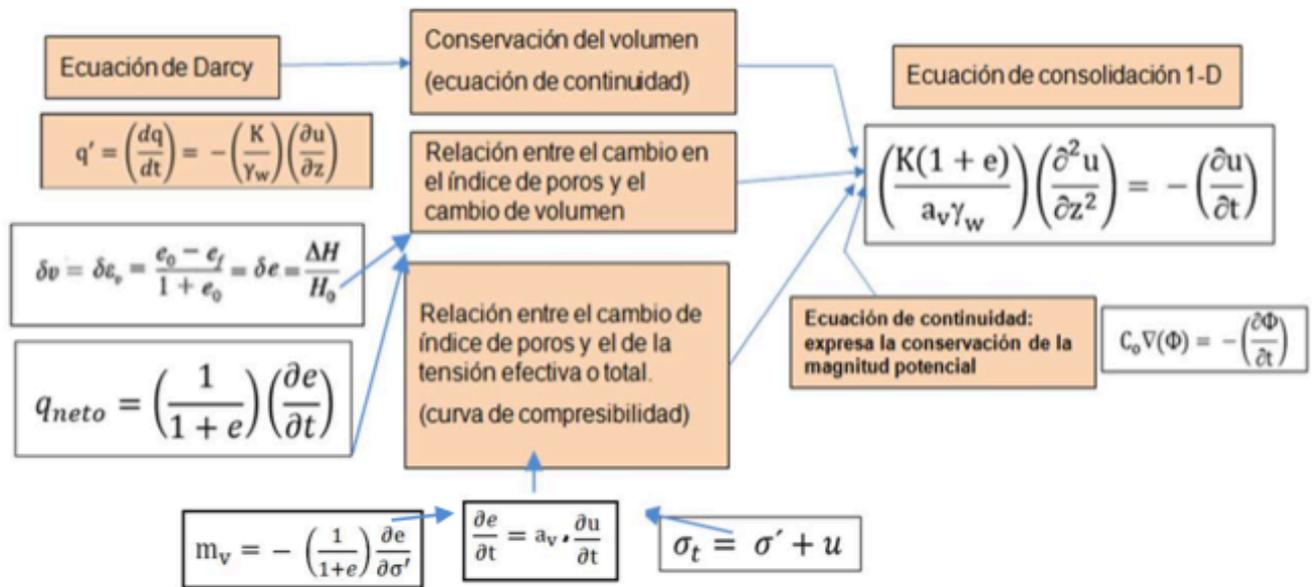


Figura 2.2 Esquema general de la deducción de la ecuación de consolidación

Para obtener la solución analítica se eliminan tres variables ( $K$ ,  $e$ ,  $a_v$ ), dejando de esta manera como única variable dependiente el exceso de presión intersticial sobre la hidrostática  $u(z, t)$ .

La ecuación de consolidación es una ecuación de difusión de  $u$  hacia zonas de menos presión. Por lo general,  $c_v$  no es constante, ya que tampoco lo son  $K$ ,  $e$  y  $a_v$ ; sin embargo, estos tres coeficientes, en especial  $K$  y  $a_v$ , disminuyen a lo largo de todo el proceso compensándose parcialmente su influencia en  $c_v$ , de manera que puede considerarse constante.

Por otra parte, Terzaghi asume que el índice de poros inicial es el de partida de los ensayos, y no lo introduce como variable al no actualizarse su valor durante el ensayo.

Así, la solución analítica de la ecuación considera las hipótesis siguientes:

- 1) El parámetro  $c_v$  permanece constante
- 2)  $\Delta u$  inicial =  $\Delta \sigma'$  (Terzaghi)
- 3) La coordenada  $z$  de cualquier punto no varía con el tiempo

Su expresión es de la forma

$$u(z, t) = \Delta \sigma \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left( \frac{4}{(2n+1) \cdot \pi} \right) \left( \text{sen} \left[ \frac{(2n+1) \cdot \pi \cdot z}{2 \cdot H} \right] \right) \left( e^{-\frac{(2n+1)^2 \cdot \pi^2 \cdot C_v \cdot t}{4 \cdot H^2}} \right) \right\} \quad (10)$$

donde,

u: exceso de presión sobre la presión hidrostática ( N / m<sup>2</sup> )

H: longitud del dren ( m )

K: conductividad hidráulica ( m / s ),  $K = k \cdot \gamma_w / \mu$

$\gamma_w$ : peso específico del agua ( N / m<sup>3</sup> )

e: índice de poros (adimensional)

$a_v$ : coeficiente de compresibilidad ( m<sup>2</sup> / N )

$c_v$ : coeficiente de consolidación (m<sup>2</sup> / s )

Para poder resolver problemas relacionados con los tiempos de consolidación, los autores definen los siguientes parámetros adimensionales:

$$T = \left( \frac{t \cdot C_v}{H^2} \right) \quad (11)$$

$$U_{z,t} (\%) = \left( \frac{\Delta \sigma - U_{zt}}{\Delta \sigma} \right) \cdot 100 \quad (12)$$

$$U_t (\%) = \left( \frac{\int_0^H (\Delta \sigma - U_{zt}) \cdot dz}{H \cdot \Delta \sigma} \right) \cdot 100 \quad (13)$$

Donde,

T: Tiempo

$U_{zt}$ : Grado de consolidación (%)

$U_t$ : Grado de consolidación medio o global (%)

En base a ellos, se puede expresar la ecuación anterior (10) como

$$U_{z,t} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \text{sen} \left[ M \cdot \left( 1 - \frac{z}{H} \right) \right]^{(-M \wedge T)} \quad (14)$$

En la cual,

$$M = \frac{\pi}{2} (2m + 1)$$

Para poder entender los conceptos de grado de consolidación y grado de consolidación medio, en la siguiente figura se representa un esquema de la variación de la presión intersticial con la profundidad transcurrido un tiempo  $t$  desde que se aplica una carga de valor  $\Delta p$  en superficie

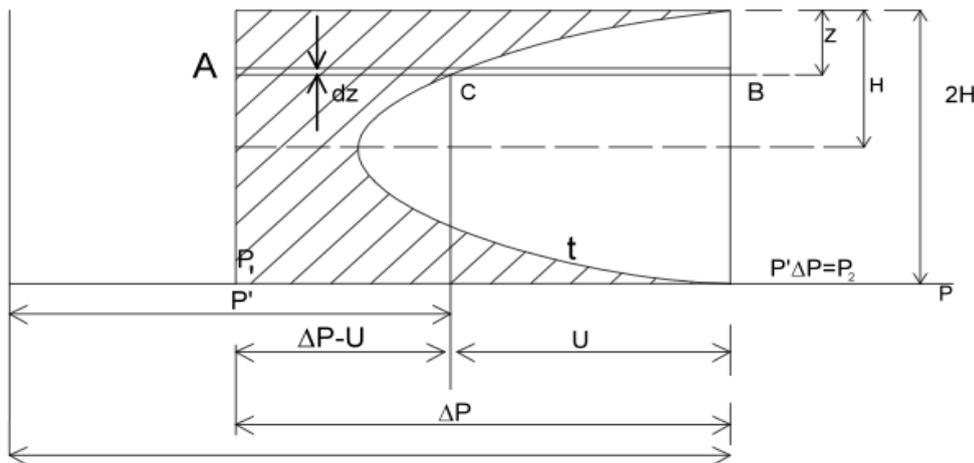


Figura 2.3 Esquema de variación de la presión intersticial

El cociente  $AC / AB = (\Delta p - u) / u$  nos da el grado de consolidación  $U_{tz}$ , y el cociente entre el área rayada y el área en blanco representa el grado de consolidación medio,  $U_t$ , para un tiempo  $t$ . Aplicando la teoría de Terzaghi se pueden establecer relaciones entre  $T$  y  $U_t$ , y  $T$  y  $U_{tz}$ . En la figura 2.4 se muestran gráficos que relacionan, por un lado, la profundidad normalizada con el grado de consolidación local y el factor tiempo y, por otro lado, el grado de consolidación global con el factor tiempo.

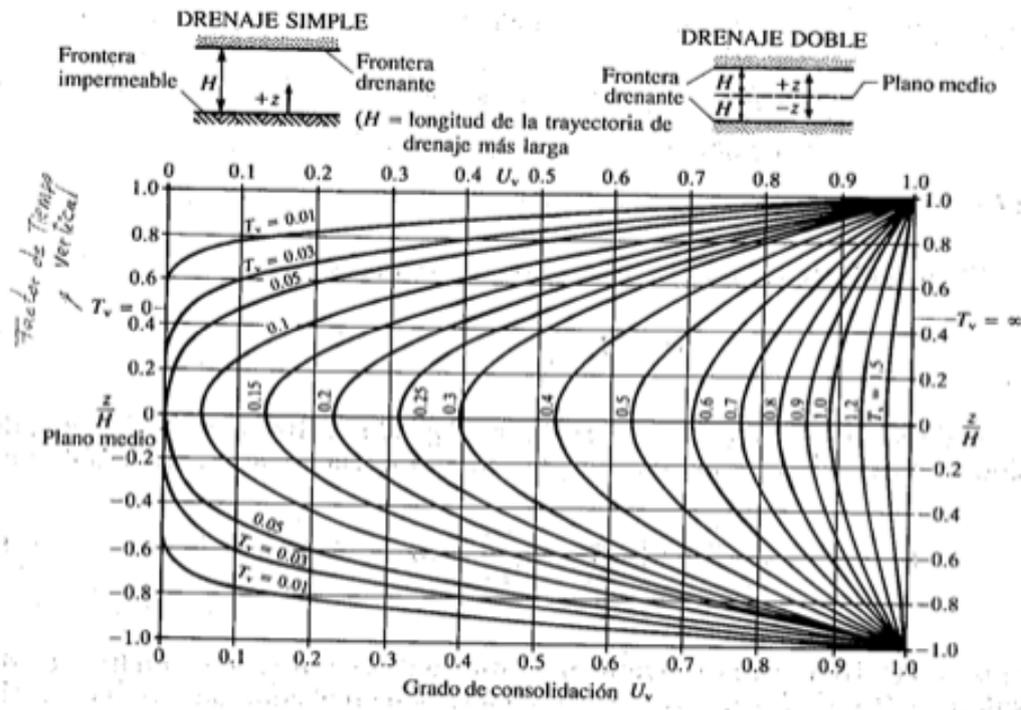


Figura 2.4 Relación de los parámetros T y  $U_t$  y T y  $U_{zt}$ . Figura extraída del libro "Mecánica del suelo" (Berry & Reid, 1993).

Las soluciones analíticas para escenarios de espesor muy elevado (H teóricamente infinito), dan un grado de consolidación global que depende del factor tiempo en la forma:

$$U_t (\%) = \sqrt{\frac{4 \cdot T}{\pi}} \quad (15)$$

Esta expresión puede aplicarse a escenarios finitos siempre que el factor  $T$  (tiempo) no supere un valor de, aproximadamente, 0.6. En el caso de tiempos superiores a este valor, el grado de consolidación viene dado por esta otra expresión:

$$U_t(\%) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \cdot e^{-2.4674 \cdot T} \quad (16)$$

## 2.2 Consolidación bidimensional

Habiendo sido expuesta la teoría de la consolidación en una dirección, la del eje vertical, por considerarla necesaria para entender el caso de la consolidación en dos dimensiones; vamos a proceder ahora a comentar las particularidades de la consolidación en dos dimensiones ya que es supuesto que vamos a abordar en el presente trabajo.

En dominios bidimensionales rectangulares la ecuación de Terzaghi la encontramos en la siguiente forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_{v,z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + C_{v,x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (17)$$

Siendo  $C_{v,z}$  y  $C_{v,x}$  los coeficientes de consolidación en las direcciones vertical y horizontal, respectivamente. Esta ecuación tiene su aplicación en aquellos escenarios en los que el agua drena hacia las superficies superior y lateral debido a la existencia de drenes corridos o zanjas.

En ambas ecuaciones, tanto la ecuación 1D (6b) como en el caso de la 2D (17), sus soluciones analíticas dependen de las condiciones de frontera iniciales y las podemos encontrar en la mayoría de los libros publicados que abordan el fenómeno de la consolidación de terrenos.

### CARACTERIZACIÓN DE ECUACIONES MEDIANTE LOS GRUPOS ADIMENSIONALES

Para el tratamiento adimensional de la ecuación de consolidación se sigue la técnica denominada análisis de escala (Bejan, 2013) combinada con conceptos de discriminación adimensional introducidos por Alhama y Madrid ( Alhama & Madrid, 2012).

Hacemos un paréntesis para acordar la nomenclatura a utilizar en adelante:

$t$  : tiempo real ( s )

$z, x$  : coordenadas espaciales vertical y horizontal ( m )

$t'$  : tiempo adimensional

$z', x'$  : coordenadas adimensionales vertical y horizontal

$C_{v,z}$  : coeficiente de consolidación vertical (  $m^2 / s$  )

$C_{v,x}$  : coeficiente de consolidación horizontal (  $m^2 / s$  )

$H$  : profundidad del dominio hasta la condición de impermeabilidad ( m )

$t_0$  : tiempo característico del proceso de adimensionalización ( s )

$u_0$  : incremento de presión intersticial inicial ( Pa )

La mayoría de los autores que han sido consultados para la realización de éste trabajo coinciden a la hora de proceder, exponiendo formalmente la

deducción de la ecuación de consolidación así como su solución analítica en suelos con un espesor finito para, posteriormente, dar nombre al factor resultante como argumento de la solución,  $C_v \cdot t / H^2$ .

La técnica normalizada de adimensionalización utilizaremos se puede resumir en los siguientes pasos:

- Elección de las magnitudes de referencia para las variables dependientes e independientes de tal manera que el rango de valores de las variables adimensionales definidas a partir de éstas este confinado y cubra el intervalo  $[0,1]$ . En el caso de no existir referencias explícitas en el enunciado del problema se introducen referencias incógnitas (llamadas magnitudes ocultas).

Como consecuencia de esta norma, las variables de carácter vectorial se discriminan, es decir, sus referencias no van a ser necesariamente las mismas.

- Sustitución de las variables dimensionales por las nuevas adimensionales en la ecuación.

- Separación de cada término de la ecuación en dos factores, uno que contiene las variables adimensionales y sus cambios (sucesivas derivadas) y otro formado por agrupación de parámetros geométricos y físicos del problema con la misma ecuación dimensional en cada término.

- Listado de los coeficientes formados por los parámetros (tantos como términos tenga la ecuación). Asumiendo que, en cada término de la nueva ecuación adimensional, los factores asociados a las variables adimensionales y sus cambios son de orden de magnitud unidad, merced al primer paso, se deriva que los coeficientes anteriores han de ser del mismo orden de magnitud.

- Deducción del conjunto completo de grupos numéricos adimensionales de los que depende el problema dividiendo pares independientes de estos

coeficientes. Existirán tantos grupos de números como coeficientes menos uno y serán éstos adimensionales y de orden de magnitud unidad. Es ésta última propiedad de los grupos la que permite determinar el orden de magnitud de las incógnitas introducidas en la definición de las variables adimensionales.

### 3.1 Geometría rectangular 1D

En aquellos casos en los que la ecuación de gobierno tiene varios términos el problema se complica pero, en el caso 1D ( en éste caso solo hay dos términos ) emerge un único coeficiente y del mismo emerge el orden de magnitud de la incógnita que se introduce (  $t_0$  ). Las tres referencias fundamentales son:

$H$  : espesor del dominio

$u_0$  : presión aplicada, que es la diferencia de tensiones efectivas al final y al inicio del proceso de consolidación del suelo

$t_0$  : tiempo estimado de duración del proceso

Se hace necesario el establecimiento de un tiempo característico, bastará con realizar un razonamiento físico elemental del problema para obtenerlo.

Las variables adimensionales, confinadas al rango de valores (0,1), son

$$u' = \frac{u}{u_0} \qquad z' = \frac{z}{H} \qquad t' = \frac{t}{t_0}$$

la ecuación adimensional resultante será:

$$\frac{u_0}{t_0} \frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{c_v u_0}{H^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{1}{t_0} \frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{c_v}{H^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \qquad (18)$$

Como podemos observar no aparece en estas expresiones la variable  $u_0$ , que es típica en cualquier proceso de difusión lineal, lo cual hace que tanto los valores de la solución  $u(z,t)$  como el valor de la incógnita  $t_0$  no sean dependientes del exceso de presión intersticial  $u_0$  (la misma causa por la que se explica que las aceleraciones en un problema de dinámica en el que únicamente intervienen las fuerzas de peso y de inercia, sean independientes de la masa o de que el periodo en un movimiento armónico tampoco sea dependiente de la masa).

En esta ecuación se asume que, en promedio, las variaciones de  $u'$ ,  $z'$  y  $t'$  son de orden de magnitud unidad lo que obliga a que los coeficientes  $\frac{t}{t_0}$  y  $\frac{cv}{H^2}$  sean del mismo orden de magnitud. De su división obtenemos el único grupo dimensional que rige la solución del problema, esta es

$$\pi = \frac{t_0 cv}{H^2} \quad (19)$$

que, al ser de orden de magnitud unidad, permite deducir el orden de magnitud de la incógnita

$$t_0 \simeq \frac{H^2}{cv} \quad (20)$$

Esta expresión puede ser transformada en una igualdad haciendo una única prueba para deducir el factor de proporcionalidad entre  $t_0$  y  $H^2 / cv$ . Para lo que, al tratarse de un proceso asintótico hay que elegir también un criterio asociando a  $t_0$ , una fracción sensible de la variación de alguna de las variables dentro de su rango de valores. Por ejemplo, podemos asociar  $t_0$  al tiempo transcurrido para que el exceso de presión intersticial en la frontera impermeable (o grado de consolidación en esta cota) caiga hasta el 80 o el 90 % de su valor inicial, o bien al tiempo transcurrido para que el grado de consolidación medio sea del 80 o 90 %.

### 3.2 Geometría rectangular 2D

Para esta geometría, con dominio de dimensiones L (horizontal) x H (vertical), las referencias para adimensionalizar z y x `discriminadamente` son, respectivamente H y L.

Con esta elección, las variables adimensionales z' y x' están acotadas y abarcan completamente el intervalo [0,1]. La sustitución de u' = u / u<sub>0</sub>, z' = z / H, x' = x / L y t' = t / t<sub>0</sub> en la ecuación expuesta anteriormente (17) y una vez que hemos simplificado el resultado conduce a

$$\frac{1}{t_0} \frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{Cv,z}{H^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} + \frac{Cv,x}{L^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \quad (21)$$

cuyos coeficientes son

$$\frac{1}{t_0}, \quad \frac{Cv,z}{H^2}, \quad \frac{Cv,x}{L^2}$$

Los monomios independientes y adimensionales que se derivan de estos coeficientes son:

$$\pi_1 = \frac{t_0 Cv,z}{H^2} \quad y \quad \pi_2 = \frac{Cv,z}{H^2} \frac{L^2}{Cv,x} \quad (22)$$

por lo que la solución del problema es  $\pi_1 = \Psi (\pi_2)$ , y el valor de la incógnita:

$$t_0 = \frac{H^2}{Cv,z} \Psi \left( \frac{Cv,z}{H^2} \frac{L^2}{Cv,x} \right) \quad (23)$$

siendo  $\Psi$  una función desconocida del segundo monomio.

Por norma general, existe una división de la manera de proceder cuando estudiamos los distintos autores; algunos de ellos recurren al análisis dimensional y otros recurren a la adimensionalización, para deducir los grupos adimensionales que rigen la solución de un problema y obtener soluciones similares a la que hemos expuesto en la ecuación anterior (22).

### APLICACIÓN. SIMULACIONES

#### **4.1 El método de simulación por redes**

El método de simulación por redes es una técnica con la que se pueden estudiar muchos procesos físicos que se pueden definir por medio de un modelo matemático. Partiendo de dicho modelo matemático, el procedimiento consta de dos etapas fundamentales:

- 1) La elaboración del “modelo en red” o circuito eléctrico que sea equivalente al proceso que se pretende simular (analogía).
- 2) La simulación numérica del modelo a través de un programa que sea adecuado para la resolución de circuitos eléctricos.

Podemos encontrar en el libro de González-Fernández (González Fernández, 2002) una descripción detallada del método, con numerosas aplicaciones a los campos de transporte mediante membranas, transferencia de calor y sistemas electroquímicos.

Este método lleva, desde hace unos años, aplicándose con éxito en diferentes campos de la ingeniería tales como ondas elásticas, resistencia de materiales, corrosión, flujo y transporte etc. Siendo por ello objeto de un gran número de publicaciones científicas.

La base de la equivalencia entre el modelo en red y el proceso físico reside en que ambos se rigen por las mismas ecuaciones discretizadas en el espacio, o lo que es lo mismo, ambos modelos se rigen por las mismas ecuaciones referidas a un elemento de volumen o celda, y mediante las mismas ecuaciones discretizadas para las condiciones de contorno.

En consecuencia, los errores provenientes de la simulación son solo achacables al mallado geométrico que, para un número de celdas aceptable (del orden de 60), son muy inferiores al 1% en problemas lineales. Los potentes códigos de computación integrados en los actuales paquetes de resolución numérica de circuitos proporcionan la solución exacta de estos gracias a una precisa selección de los pasos temporales de computación.

Para la elaboración de un modelo en red el primer paso consiste en reticular el espacio en elementos de volumen o celdas elementales; una vez aplicadas las ecuaciones en derivadas parciales, se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales (en el tiempo), en diferencias finitas (en el espacio), que se constituyen en el punto de partida para la obtención del modelo en red correspondiente a la celda. Para que esto sea posible, es necesario establecer una correspondencia entre las diferentes variables dependientes del problema y las variables eléctricas del circuito, tensiones e intensidades. La asociación de celdas, en sintonía con la geometría del problema, configura el modelo en red correspondiente a todo el dominio, cuya precisión aumenta a medida que aumenta el número de celdas.

Las condiciones (de contorno e iniciales) suelen implementarse en el modelo mediante componentes eléctricas sencillas.

El método de redes basa su planteamiento y su desarrollo en la “teoría de redes” de Peusner, en la que se apoya su “termodinámica de redes” (Peusner,1987) . Para este autor, los modelos en red son una representación exacta de las características matemáticas de los procesos que describen. Las variables flujos y fuerzas características del mismo deben estar en sintonía con las leyes de Kirchhoff y sus relaciones determinan los elementos de circuito del modelo. De esta manera, las relaciones entre flujo y fuerza asociados a una rama y sus nudos, que pueden incluir o no variaciones temporales de estas variables, definen los elementos concretos del circuito equivalente a esa rama.

Resumiendo, el método de simulación por redes puede ser considerado como un método numérico de tal manera que no diseña únicamente un modelo preciso del problema sino que lo simula por medio de un software suficientemente fiable y contrastado, proporcionando la solución numérica del mismo.

## **Elementos pasivos y elementos activos**

A la red o modelo se le asocia un conjunto de flujos que obedecen a una ley de balance (o conservación) local y un conjunto de fuerzas que satisfacen la condición de unicidad en el dominio. Por otro lado, las relaciones entre un par flujo-fuerza se conocen como ecuaciones constitutivas y definen los elementos de circuito que expresan características específicas de cada proceso. En los procesos típicos de difusión lineal, el modelo matemático está regido por ecuaciones en derivadas parciales y únicamente requiere de dos elementos de circuito para la implementación del modelo en red correspondiente a un volumen finito del dominio o celda elemental para el caso específico de estudio de geometrías rectangulares.

En aquellos casos en los que las relaciones constitutivas se establecen entre un par flujo-fuerza se habla de mono puertas (elemento de circuito con dos nodos). Una primera clasificación de estas mono puertas responde a lo que en electricidad se conoce como elementos activos y elementos pasivos.

Los **elementos pasivos**, sean lineales o no, no son generadores de potencia, sino que la disipan o la almacenan; mientras que los **elementos activos** son fuentes o generadores de dos nodos. Los dos elementos lineales pasivos que más nos interesan son la resistencia como elemento disipador de energía y el condensador como elemento almacenador de energía.

La resistencia es un elemento de circuito de valor constante, designado por **R**, que relaciona las variables flujo (**J**) y fuerza (**X**) de una misma rama en la forma  $X(t) = R J(t)$ . Su acción es instantánea, carecen de memoria, lo que quiere decir que no dependen de los estados anteriores de las variables. En su analogía física representan efectos disipativos, fricciones,

efectos viscosos, energías de reacción, etc. Su representación simbólica se muestra a continuación.



Figura 4.1 Representación simbólica de una resistencia lineal

El condensador lineal (de valor constante), designado por  $C$ , es un elemento de circuito asociado a una relación entre la variable flujo y la derivada temporal de la variable fuerza, es decir  $J(t) = C dX(t) / dt$ .

En este elemento se produce algún tipo de almacenamiento, sin pérdidas (no hay disipación de energía), y su estado, que no cambia instantáneamente, a diferencia de la resistencia, tiene memoria (tiene en cuenta todas las operaciones llevadas a cabo en el pasado). En su analogía, representa procesos físicos en los que se produce algún tipo de almacenamiento. Su representación simbólica se muestra a continuación.



Figura 4.2 Representación simbólica de un condensador lineal.

Los procesos de almacenamiento y disipación de energía, bajo la hipótesis de continuidad del medio, se originan en todos los puntos del sistema. Los elementos  $R$  y  $C$  se identifican con regiones pequeñas pero finitas del medio y sus conexiones con los elementos de las otras regiones se realizan con enlaces ideales de energía, esto quiere decir que se realizan con elementos conductores de resistencia nula. El hecho de que cada elemento pueda ser caracterizado por un par de variables conjugadas con una única ecuación constitutiva entre ellas es una hipótesis básica del método de redes. Físicamente equivale a decir que es posible elegir un elemento de volumen suficientemente pequeño como para que su tiempo de relajación interna sea mucho menor que el del sistema global, pero suficientemente

grande como para que las fluctuaciones de las variables que describe el sistema en él sean despreciables.

Los **elementos activos** son aquellos en los que se produce una aportación o extracción de energía al sistema. Podemos distinguir:

1) Fuentes constantes o dependientes del tiempo. Son elementos de dos terminales que especifican un flujo o fuerza constante o dependiente del tiempo y se corresponden eléctricamente a pilas o generadores de tensión o de corriente.

2) Fuentes controladas de tensión o de corriente. Son de dispositivos eléctricos de más de dos terminales. En general tienen dos terminales por donde entra la lectura de la variable de control y otros dos por donde sale la señal controlada. La expresión que relaciona la señal de salida con la de entrada (tensión o corriente) puede ser cualquier función matemática que se introduce como software en la especificación de la fuente.

La conexión de los terminales de salida de estas fuentes al modelo se realiza en serie o en paralelo en función de si se trata de fuentes de corriente o de tensión. Las librerías de los programas de simulación de circuitos disponen de un completo espectro de este tipo de fuentes que incluye, por un lado, la posibilidad de elegir como variables de control tanto corrientes como tensiones y, por otro lado, la posibilidad de elegir mas de una variable de control para una misma fuente (una salida definida como función de varias entradas). Existen cuatro tipos de fuentes: de corriente controlada por corriente, de corriente controlada por tensión, de tensión controlada por corriente y de tensión controlada por tensión.

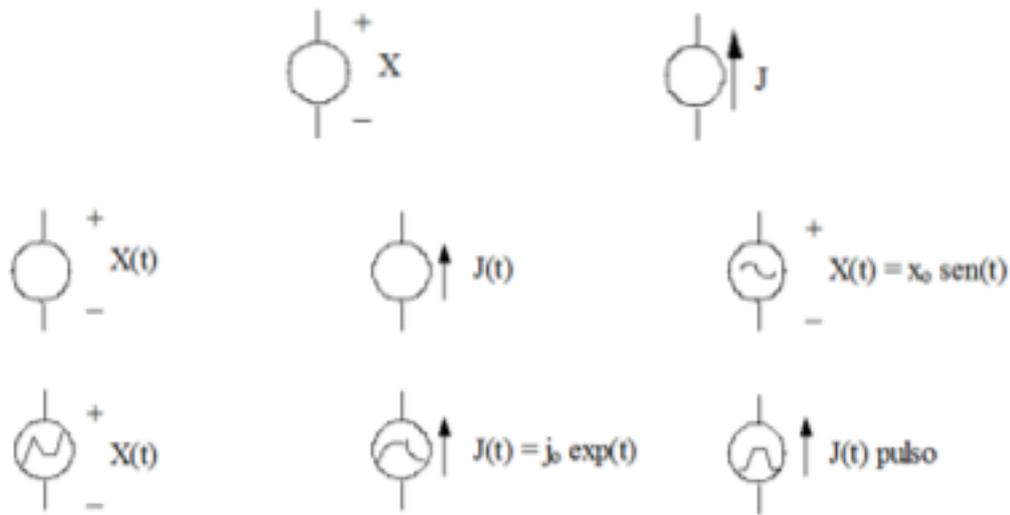


Figura 4.3 Representación simbólica de las fuentes constantes

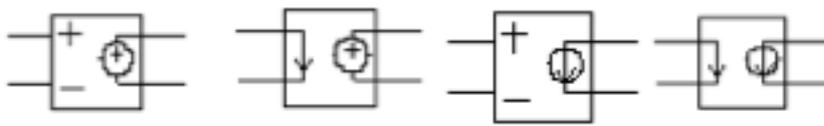


Figura 4.4 Representación simbólica de las fuentes controladas

La existencia de las fuentes controladas permite asumir cualquier tipo de no linealidad de las ecuaciones de modelo, así como cualquier tipo de acoplamiento en el mismo, aunque para ello a veces se necesitan implementar circuitos auxiliares dependiendo del caso; para lo cual lo único que hay que hacer es seguir un proceso fácil e intuitivo que solo precisa del conocimiento de las reglas elementales de la teoría de circuitos.

En términos de componentes eléctricos, el software elegido para la realización del presente trabajo y dentro del mismo para la parte del proceso de simulación es PSPICE, 1994; el cual es capaz de reconocer un gran catálogo de componentes eléctricos.

Éste método, como método numérico que es, siempre parte desde el modelo matemático de un cierto proceso, o lo que es lo mismo, siempre parte de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales espacio-

temporales. Las ecuaciones diferenciales (en el tiempo) en diferencias finitas (en el espacio) derivadas de la discretización espacial del modelo matemático es el punto de partida para la implementación o diseño del modelo en red de la celda elemental. La que acabamos de exponer constituye la única manipulación directa que se hace de las ecuaciones de gobierno. La interconexión de celdas elementales, de acuerdo con la geometría del modelo, más la implementación de las componentes eléctricas asociadas a las condiciones de contorno y a las condiciones iniciales, permiten configurar el modelo en red completo del problema.

De esta manera, el modelo en red es el formato que se da al modelo matemático para que pueda ser utilizado como fichero de entrada en un programa de resolución de circuitos eléctricos, PSPICE® (PSPICE, 1994; Kielowsky, 1994) en este caso. Este software es el encargado de resolver las ecuaciones de la red y proporcionar la solución numérica al modelo matemático. En definitiva, dado que la simulación del modelo en red mediante ordenador implica la resolución numérica de sus ecuaciones, el método de simulación por redes es, por tanto, un método numérico.

## **4.2 PSPICE**

PSPICE es uno de los miembros de la familia de programas de simulación de circuitos SPICE2 (Nagel, 1975). Éste, a diferencia de sus predecesores, es mucho más potente y rápido; fue desarrollado en un principio por el Grupo de Circuitos Integrados del Laboratorio Electrónico de Investigación de la Universidad de California en los años setenta, en Berkeley, acabando la primera versión del programa en el año 1992.

Desde esa fecha, se han distribuidos muchas copias a universidades y empresas.

Es un programa con un amplísimo campo de aplicación y las nuevas versiones del mismo, garantizan su aplicación a una gran variedad de problemas de simulación de circuitos en los que se hace uso de las ventajas de los potentes, eficientes y fiables algoritmos numéricos implementados en el mismo.

Cabe decir, que la analogía eléctrica que se desarrolla en numerosos libros e incluso en montajes experimentales en la época de los sesenta, no tiene nada que ver con el método de simulación por redes, ya que la citada analogía se refiere fundamentalmente a problemas lineales y no acoplados. Dicho esto y teniendo en cuenta que la consolidación estudiada en este trabajo es un proceso lineal sí que podemos referirnos a este proceso como una analogía eléctrica del proceso de consolidación de suelos.

## **4.3 Modelo en red**

### **4.3.1 Generalidades**

El proceso de consolidación se trata de un modelo matemático definido por una sola ecuación en derivadas parciales, la ecuación de difusión del exceso de presión intersticial. Es por ello que el modelo en red de la celda elemental, independientemente de la geometría del problema y de su número de dimensiones espaciales, está constituido por un solo circuito. Es en el nodo central común a todo el circuito donde se hace balance de tantas corrientes procedentes de ambas ramas como número de términos disponga la ecuación resultante de la discretización espacial de la ecuación de consolidación, una vez separadas las segundas derivadas en sus componentes avanzada y atrasada de la primera derivada de la misma.

### **4.3.2 El Modelo de Consolidación Rectangular 2D**

Llamamos consolidación rectangular en dos dimensiones al proceso en el cual el agua fluye en el eje vertical en dirección ascendente, es decir, con  $z$  creciente; así mismo el agua fluye en el eje horizontal y hacia la dirección del límite no adiabático,  $x$  creciente. En la situación concreta que nos ocupa se dan condiciones de impermeabilidad en las fronteras inferior y derecha, y condiciones de presión nula en las fronteras restantes, superior por fluir el agua hacia la zona externa del terreno; e izquierda por la existencia de un dren.

La ecuación de consolidación y condiciones de contorno e iniciales vienen dadas por el siguiente modelo matemático:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_{v,z} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + C_{v,x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (24)$$

Con,

- Condición de flujo libre:  $u_{(z=H,x)} = u_{(z,x=L)} = 0$  (25)

- Condición de impermeabilidad:  $\frac{\partial u}{\partial x}_{(z=0)} = \frac{\partial u}{\partial x}_{(x=0)} = 0$  (26)

-  $u_{(t=0,x,z)} = u_0$  (27)

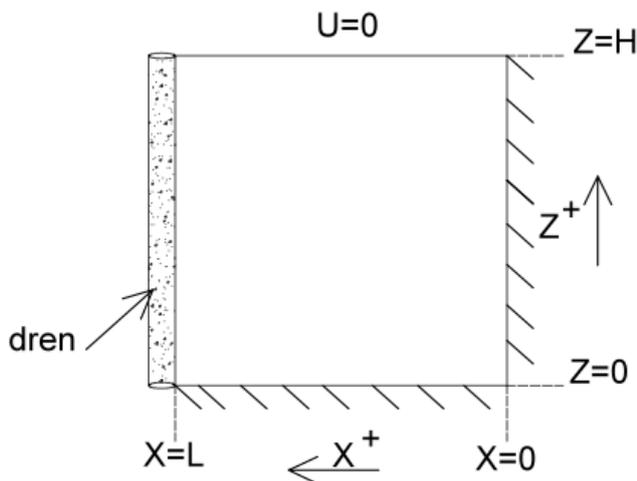


Figura 4.5 Esquema físico del proceso de consolidación 2D

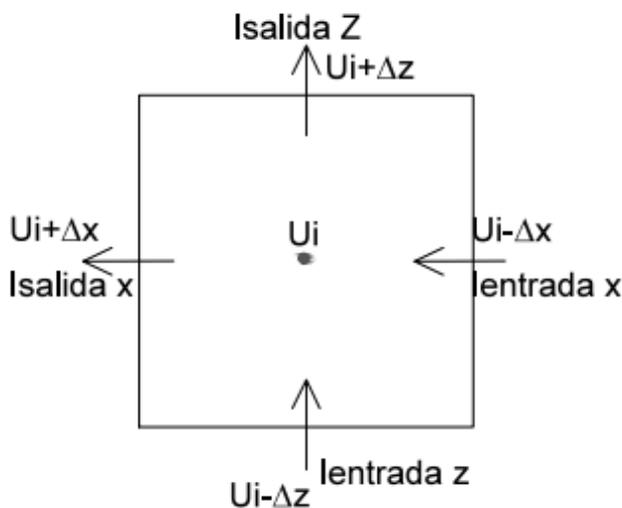


Figura 4.6 Nomenclatura de la celda elemental

Podemos expresar la ecuación anterior (24) en términos de la primera derivada espacial como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_{v,z} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right] (z+) - \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right] (z-) \right\} + C_{v,x} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right] (x+) - \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right] (x-) \right\} \quad (28)$$

donde los términos  $z^+$  y  $z^-$  expresan las posiciones de las regiones de entrada y salida en la dirección  $z$ , y  $x^+$  y  $x^-$  expresan también las respectivas posiciones de las regiones de entrada y salida en la dirección  $x$ .

También podemos expresar la ecuación anterior (28) en términos de diferencias finitas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[ \frac{U_{i+\Delta z} - U_i}{\frac{(\Delta z)^2}{2C_{v,z}}} \right] - \left[ \frac{U_i - U_{i-\Delta z}}{\frac{(\Delta z)^2}{2C_{v,z}}} \right] + \left[ \frac{U_{i+\Delta x} - U_i}{\frac{(\Delta x)^2}{2C_{v,x}}} \right] - \left[ \frac{U_i - U_{i-\Delta x}}{\frac{(\Delta x)^2}{2C_{v,x}}} \right] \quad (29)$$

Dónde cada uno de los términos esta asociado a un flujo eléctrico, siendo el término  $j_c = \frac{\partial u}{\partial t}$  el término asociado al condensador y todos los restantes son los términos asociados a las resistencias (4 resistencias, superior, inferior, izquierda y derecha). Dicho esto, la ecuación 29 puede escribirse como balance de estos flujos en el nodo central de la celda:

$$j_c = j_{R+\Delta z} - j_{R-\Delta z} + j_{R+\Delta x} - j_{R-\Delta x}$$

Usando la misma analogía entre las variables dependientes del proceso físico y eléctrico, el término de la derivada temporal,  $i_c = \frac{\partial u}{\partial t}$  se implementa mediante un condensador de valor unidad, mientras que los restantes términos se implementan mediante las correspondientes resistencias de valores que se exponen a continuación:

$$R_{i-\Delta z} = \frac{(\Delta z)^2}{2C_{v,z}}, \quad R_{i-\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2}{2C_{v,x}} \quad (30)$$

Única y exclusivamente en el caso de que las celdas tengan una geometría cuadrada y el medio objeto de estudio sea isótropo, el valor de las resistencias será el mismo.

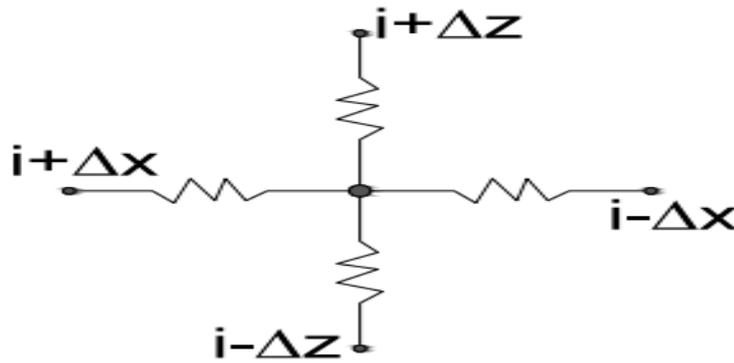


Figura 4.7 Modelo en red de la celda elemental (2D rectangular)

#### 4.4 Condiciones de contorno

Son dos las condiciones de contorno mas usuales: presión intersticial nula en las fronteras drenantes y flujo nulo en las fronteras impermeables:

Condición de primera clase o de Dirichlet:  $U_{\text{(frontera de drenaje)}} = 0$ , esta condición puede definirse análogamente como una pila a tierra de  $V = 0$ .

Condición de segunda clase o de Newman:  $\partial u / \partial n_{\text{(frontera impermeable)}} = 0$ , Cuya analogía en términos de electricidad sería la de una resistencia interna a tierra.

La primera condición se implementa considerando la frontera en contacto con el nodo de referencia (de tensión cero). Mientras que la segunda se implementa colocando una resistencia de valor considerablemente alto (infinito en teoría) entre los nodos frontera y de referencia.

Debido a este valor tan alto de la resistencia, los cambios espaciales del exceso de presión intersticial son prácticamente nulos y el valor de esta variable se ajusta para satisfacer la condición de impermeabilidad. Es habitual implementar una fuente de tensión nula, que actúa como amperímetro, entre la frontera de drenaje y el nodo de referencia. El valor cero de esta fuente no altera la solución numérica del problema.

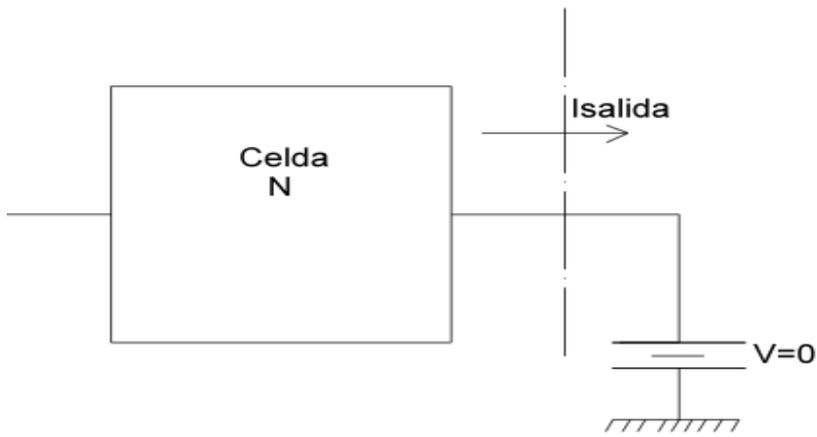
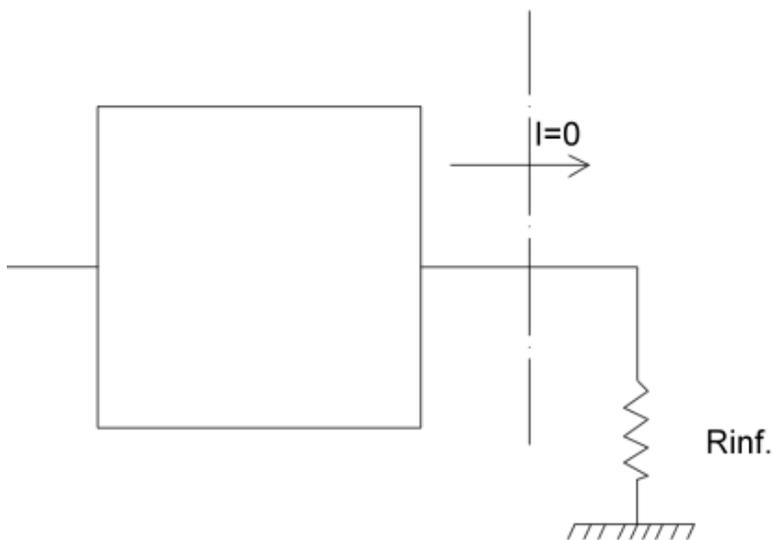


Figura 4.8 Elemento asociado a las condiciones de frontera drenante



4.9 Elemento asociado a las condiciones de frontera impermeable

El valor de las corrientes en la frontera (1D) o fronteras (2D) de drenaje puede integrarse para calcular la corriente total de salida acumulada hasta un instante cualquiera del proceso. Dicha corriente, proporcional al flujo de agua, permite representar directamente el grado medio de consolidación.

El circuito auxiliar único, con independencia del número de celdas se muestra en la siguiente figura. La fuente de corriente,  $F_{aux}$ , proporciona una corriente de salida en cada instante igual a la corriente de la fuente  $V_{nula}$  de la frontera de drenaje. La corriente de salida de esta fuente se acumula en un condensador auxiliar de capacidad unidad conectado a sus extremos. Si llamamos  $J_{n, sal}$  a la corriente de salida de la celda de la frontera de drenaje, la carga acumulada en este condensador en cada instante,  $Q_{acu(t)} = C_{aux}V_{aux} = V_{aux(t)}$  tiene un valor de

$$Q_{acu(t)} = V_{aux(t)} = \int_0^t J_{n, sal} dt$$

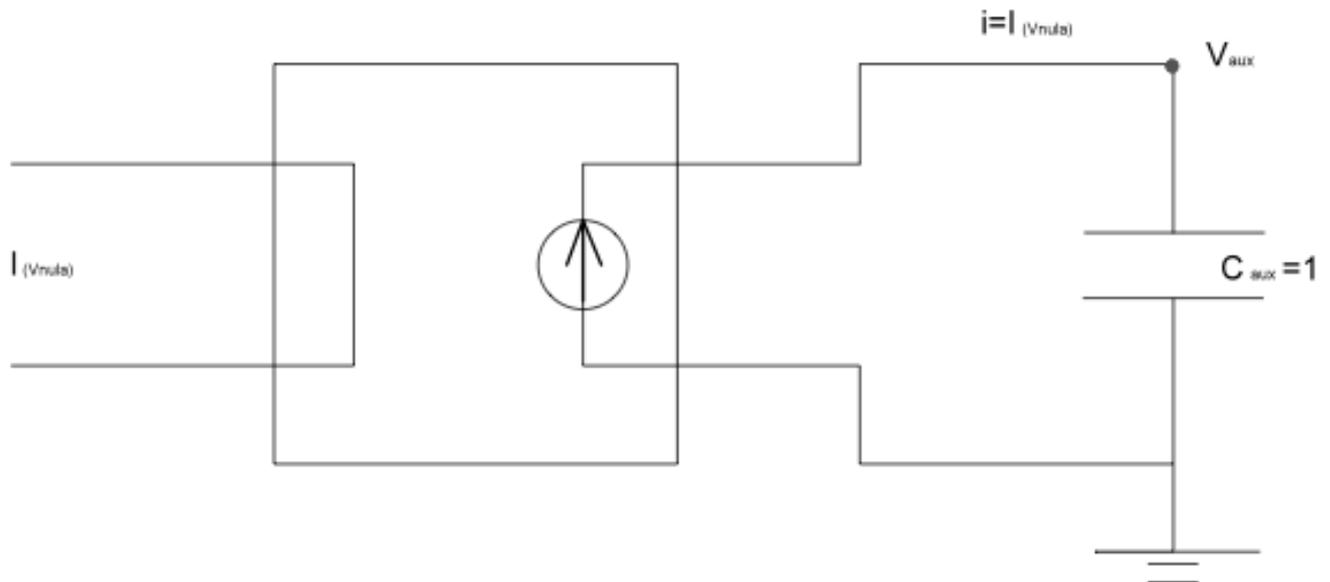


Figura 4.10 Circuito auxiliar integrador de la corriente de drenaje

Las fronteras entre capas de suelo con diferente coeficiente de consolidación no requieren implementación de componentes especiales. La conexión eléctrica ideal entre los nudos frontera comunes a estas capas imponen un mismo valor de exceso de presión intersticial en estos nudos.

Por último se impone la condición inicial normalizada al valor unidad, al referirla a la carga exterior aplicada. Para ello basta con imponer una carga inicial unidad a los condensadores de las celdas, o bien una tensión inicial unidad. En algunos casos, debido a la disposición de las capas de arcilla en el terreno, la condición inicial no es homogénea en todo el medio; en tal caso es necesario ajustar las tensiones iniciales de cada condensador por separado al valor aproximado que tenga el exceso de presión intersticial inicial en la celda, calculado de la gráfica o de la expresión matemática  $u_{(t=0)} = u_{(t=0)}(z)$ . La evolución del proceso de consolidación (tiempos totales y el grado medio de consolidación) a menudo tienen una solución analítica compleja mientras que el modelo en red proporciona una solución fiable con tiempos de computación mínimos.

#### 4.5 Supuesto específico de consolidación lineal 2D

Los datos con los cuales ha sido realizado este proceso de simulación son:

Espesor del terreno	$H = 5 \text{ m}$
Longitud de estudio	$L = 5 \text{ m}$
Coefficientes de consolidación	$C_{vz} = 1 \text{ m}^2 / \text{a}$ $C_{vx} = \text{variable } 0,07 \leq C_{vx} \leq 10$
Cambio de la presión intersticial	$\Delta u (\text{carga}) = 1 \text{ kPa}$
Tiempo de simulación	$t = 25 \text{ años}$
Parámetros de reticulación	Nº de celdas horizontales $N_h = 40$ Nº de celdas verticales $N_v = 40$ Tamaño de la celda $1 \times 0,5 \text{ m}$

Figura 4.11 Tabla de valores del proceso de simulación

Los bordes superior ( $z = H$ ) y derecho ( $x = 0$ ), son las fronteras drenantes en contraposición con las fronteras inferior ( $z = 0$ ) e izquierda ( $x = L$ ) las cuales son impermeables.

A continuación se muestran un par de figuras resultadas de procesar los datos de simulación con el programa Matlab, en ellas podemos apreciar la evolución de exceso de presión intersticial en el centro de todas las celdas para los tiempos  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 3$ ,  $t_3 = 6$ ,  $t_4 = 6$ ,  $t_5 = 10$  y  $t_6 = 15$  (Curvas en sentido decreciente) y considerando un coeficiente de consolidación horizontal unidad.

En la esquina inferior derecha, la que encuentra mas alejada de los planos de drenaje, la disipación se produce con mayor retardo, como puede apreciarse en la figura. Para el tiempo  $t_{\text{final}} = 16$  años, la consolidación global es prácticamente del 100 %.

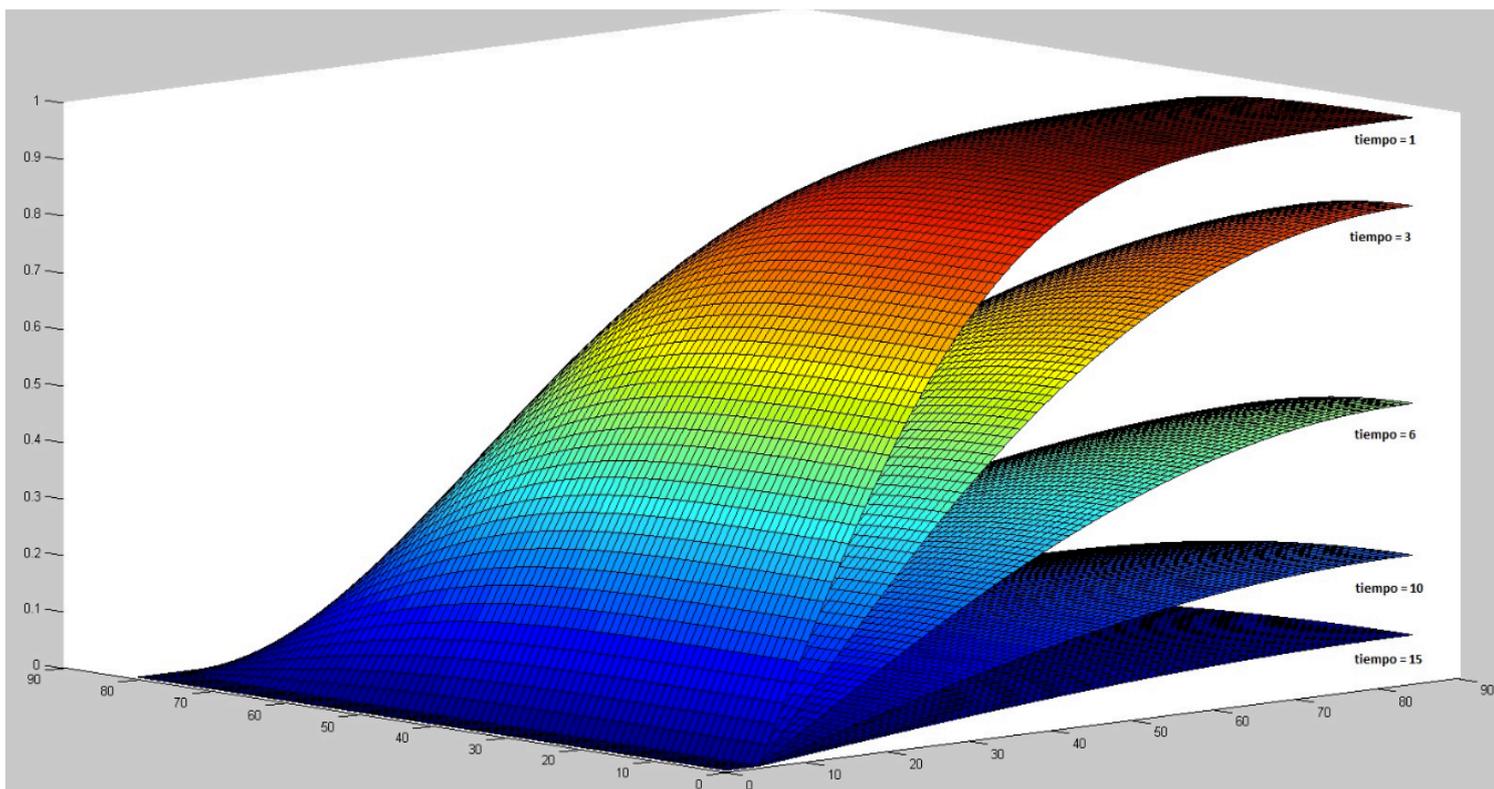


Figura 4.12 Evolución temporal del exceso de presión intersticial vista desde el borde inferior izquierdo (dren).

La siguiente figura muestra la evolución temporal del exceso de presión intersticial en el centro de la celda situada en la parte inferior derecha, extremo donde la disipación se produce de manera mas lenta. Si asociamos  $t_0$  al tiempo para el que la disipación del exceso de presión intersticial es del 80% en la posición anterior, la simulación proporciona a partir de esta figura un valor de  $t_{0(80\%)} = 10,67$  años. Si en lugar de haber elegido un  $t$  al 80%, se hubiese elegido un  $t$  al 90%, el resultado sería  $t_{0(90\%)} = 14$  años, considerando en todos estos casos un coeficiente de consolidación horizontal de valor uno  $C_{vx} = 1$ .

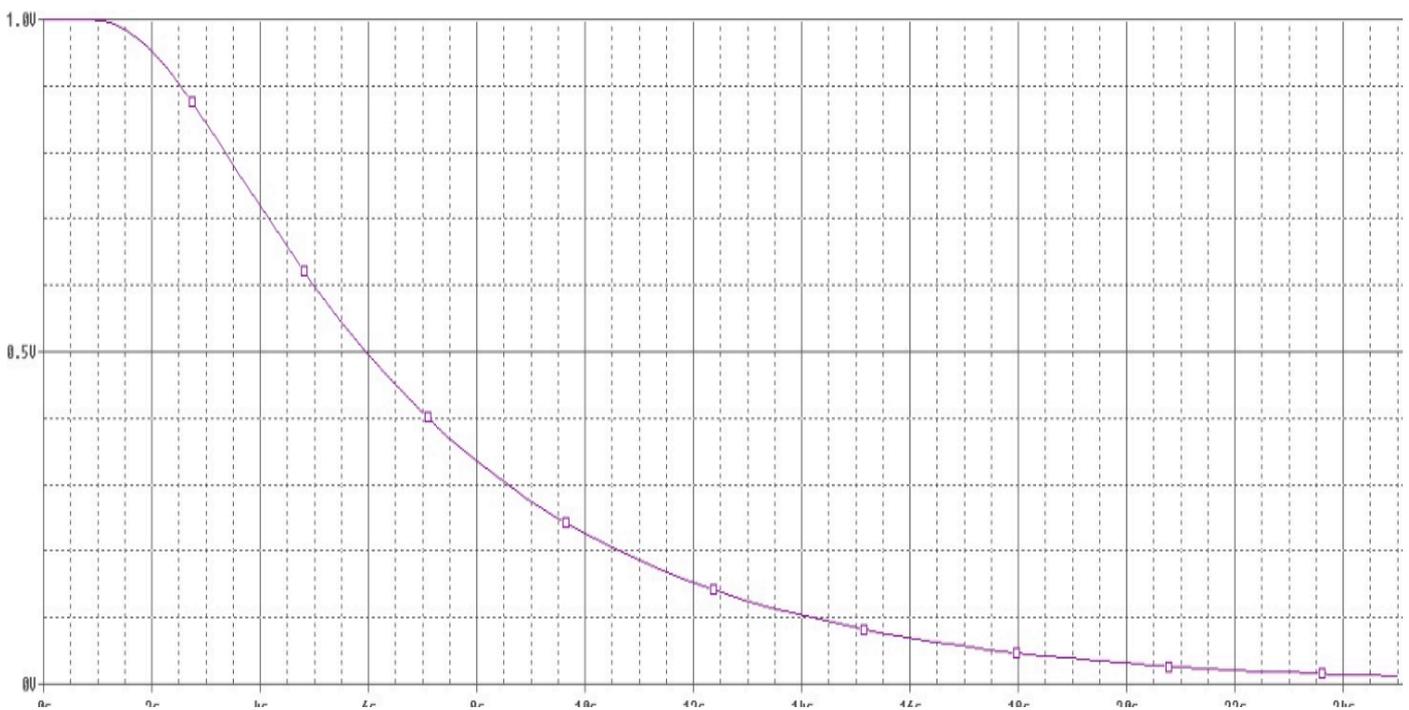


Figura 4.13 Evolución temporal del exceso de presión intersticial en la celda del extremo inferior derecho. Caso  $C_{vx} = 1$ .

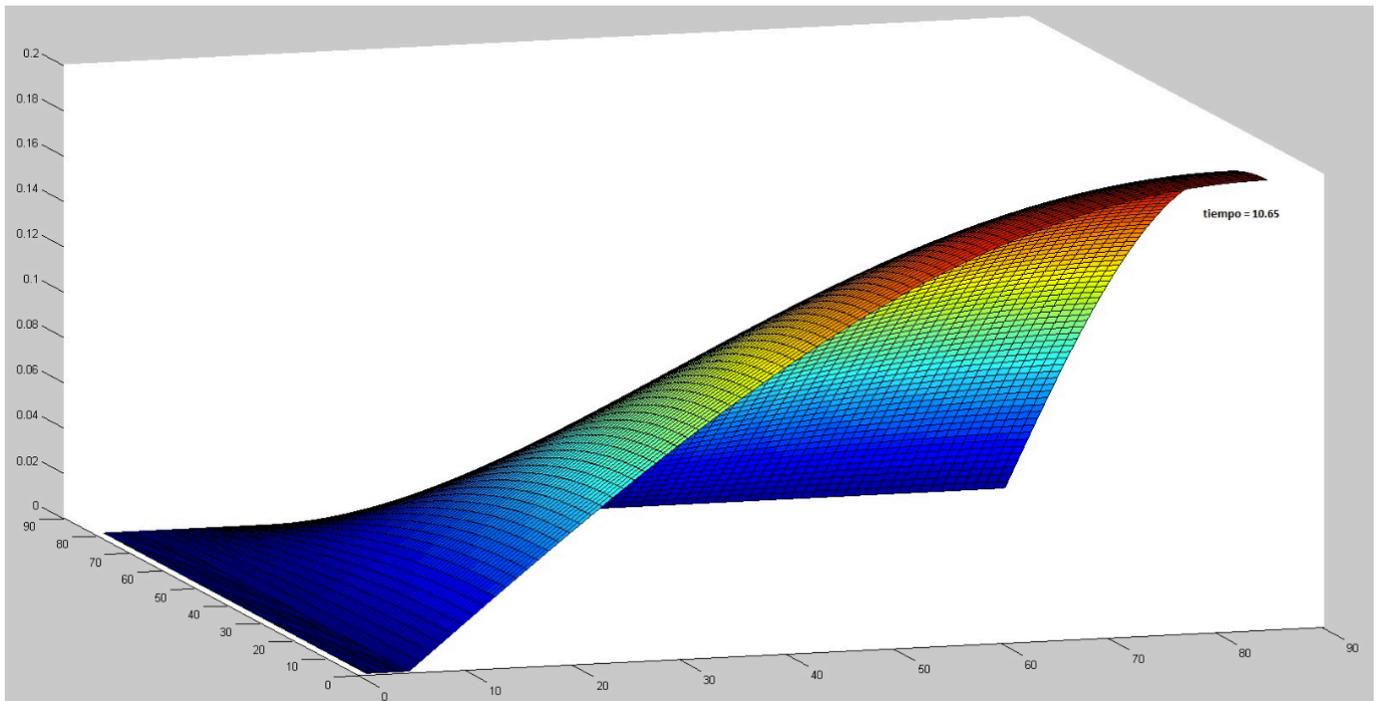


Figura 4.14 Exceso de presión intersticial en el dominio para un tiempo de 10.65 años

Para finalizar nos basaremos en la siguiente ecuación, ya expuesta anteriormente (ecuación 23)

$$t_0 = \frac{H^2}{Cv,z} \Psi \left( \frac{Cv,z}{H^2} \frac{L^2}{Cv,x} \right)$$

Vamos a proceder a simular una serie de escenarios diferentes, veintitrés concretamente, para lo cual mantendremos constante el coeficiente vertical  $C_{vz} = 1$  dándole unos valores al coeficiente horizontal  $C_{vx}$  entre 0,07 y 10.

Tal y como se muestra en la figura 4.11 los valores del contorno geométricos  $H$  y  $L$  serán también constantes, ambos iguales a 5 m.

En lo referente a la división de la geometría en celdas, hemos considerado que con 40 celdas tanto en la vertical como en la horizontal nos darán unos resultados suficientemente precisos.

El monomio  $\pi_1$  se calculará de acuerdo a la expresión expuesta en las páginas anteriores del presente trabajo:

$$\pi_1 = \frac{t_0 Cv,z}{H^2}$$

Dónde  $t_0$  será el correspondiente al 80% del proceso de consolidación.

Así mismo el monomio  $\pi_2$  será calculado de acuerdo a la expresión, también mostrada con anterioridad:

$$\pi_2 = \frac{C_{v,z}}{H^2} \frac{L^2}{C_{v,x}}$$

En resumen, se va a estudiar el comportamiento del sistema variando únicamente el valor del coeficiente de consolidación horizontal  $C_{vx}$ .

Vamos a comprobar como afecta la variación de este parámetro al monomio  $\pi_1$  para, posteriormente, comparar en forma de gráfica de puntos la correlación entre  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

A continuación se muestra la tabla creada para facilitar la lectura de soluciones en los diferentes escenarios:

Caso	Cvx	Cvz	H	Nv	L	Nh	H <sup>2</sup> /Cvz	$\pi_2$	t0 (80%)	$\pi_1$
1	1	1	5	40	5	40	25	1	10,64	0,43
2	1,11	1	5	40	5	40	25	0,9	10,09	0,40
3	1,25	1	5	40	5	40	25	0,8	9,48	0,38
4	1,43	1	5	40	5	40	25	0,7	8,78	0,35
5	1,67	1	5	40	5	40	25	0,6	8	0,32
6	2,00	1	5	40	5	40	25	0,5	7,14	0,29
7	2,50	1	5	40	5	40	25	0,4	6,14	0,25
8	3,33	1	5	40	5	40	25	0,3	4,98	0,20
9	5,00	1	5	40	5	40	25	0,2	3,62	0,14
10	10,00	1	5	40	5	40	25	0,1	2,02	0,08
11	0,67	1	5	40	5	40	25	1,5	12,72	0,51
12	0,50	1	5	40	5	40	25	2	14,14	0,57
13	0,40	1	5	40	5	40	25	2,5	15,13	0,61
14	0,33	1	5	40	5	40	25	3	15,91	0,64
15	0,25	1	5	40	5	40	25	4	16,87	0,67
16	0,20	1	5	40	5	40	25	5	17,49	0,70
17	0,17	1	5	40	5	40	25	6	17,86	0,71
18	0,14	1	5	40	5	40	25	7	18,2	0,73
19	0,13	1	5	40	5	40	25	8	18,3	0,73
20	0,11	1	5	40	5	40	25	9	18,48	0,74
21	0,10	1	5	40	5	40	25	10	18,56	0,74
22	0,08	1	5	40	5	40	25	12	18,67	0,75
23	0,07	1	5	40	5	40	25	15	18,72	0,75

Figura 4.15 Tabla de datos del escenario de simulación (2D lineal en geometría rectangular)

Figura 4.16 Gráfico de dependencia  $\pi_1 = f(\pi_2)$

$\pi_2$	$\pi_1$
1	0,4256
0,9	0,4036
0,8	0,3792
0,7	0,3512
0,6	0,32
0,5	0,2856
0,4	0,2456
0,3	0,1992
0,2	0,1448
0,1	0,0808
1,5	0,5088
2	0,5656
2,5	0,6052
3	0,6364
4	0,6748
5	0,6996
6	0,7144
7	0,728
8	0,732
9	0,7392
10	0,7424
12	0,7468
15	0,7488

Figura 4.17 Tabla de datos  $\pi_1$  VS  $\pi_2$

Se muestran a continuación las gráficas del grado de consolidación para en una par de casos que junto con la mostrada anteriormente (figura 4.13) representan todo el intervalo de  $C_{vx}$  estudiado.

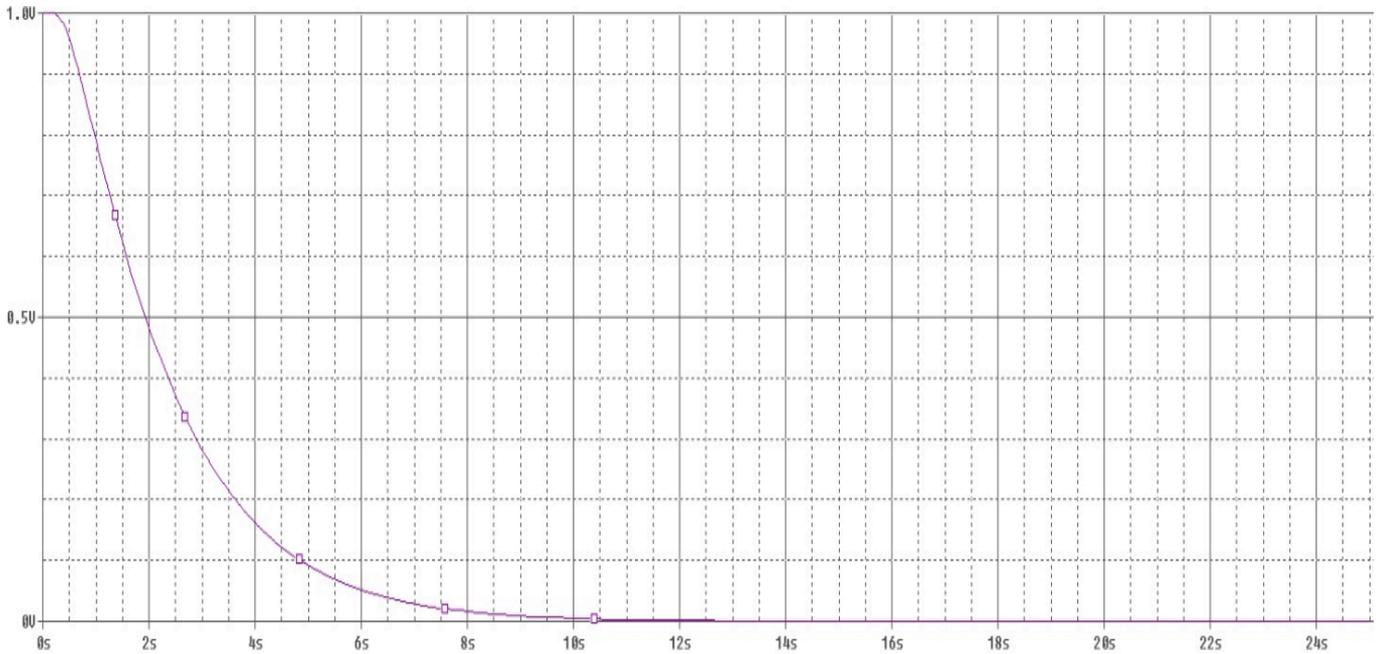


Figura 4.18 Evolución temporal del exceso de presión intersticial en la celda del extremo inferior derecho. Caso 9  $C_{vx} = 5$ .



Figura 4.19 Evolución temporal del exceso de presión intersticial en la celda del extremo inferior derecho. Caso 21  $C_{vx} = 0,10$ .

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES

En primer lugar, ha sido aplicada la técnica de adimensionalización discriminada a las ecuaciones de gobierno para obtener expresiones del tiempo característico, es decir, para obtener la duración del proceso de adimensionalización ; una vez repasada la teoría de la consolidación.

La adimensionalización en el sentido estricto pero en su forma clásica, es decir sin discriminación, es aplicada únicamente por Scott en el supuesto de entornos de geometría unidimensional (1D).

En el presente trabajo fin de grado, siguiendo la estela del grupo de investigación del método redes de la Universidad Politécnica de Cartagena, ha sido aplicada esta adimensionalización a una geometría en dos dimensiones con unos valores muy concretos de las diferentes variables.

Al introducir la discriminación, ha sido posible obtener valores de los diferentes monomios que rigen la solución del problema de anisotropía así como la expresión del tiempo característico a partir de los datos físicos, coeficientes de consolidación, y geométricos, dimensiones del escenario del problema.

Así, el problema de caracterización del tiempo característico de consolidación queda únicamente determinado por el valor de estos dos grupos adimensionales ( $\pi_1$  y  $\pi_2$ ), dejando en un plano secundario el valor de los parámetros geométricos del terreno así como los parámetros de consolidación del mismo.

De esta manera el tiempo característico pasa a considerarse, exclusivamente, como una función de estos dos grupos adimensionales.

## **BIBLIOGRAFÍA**

Alhama Manteca, I., Alhama, F., Rodríguez Estrella, T. "Chemical and physical parameters as trace markers of anthropogenic-induced salinity in the Agua Amarga coastal aquifer (southern Spain)", Hydrogeology Journal, 133(3) 40-50 (2012)

Alhama, I., Alhama, F. y Soto, A. "Mathematical characterization of scenarios of fluid flow and solute transport in porous media by discriminated non-dimensionalization". Int. J. Eng. Science, 50 1-9 (2012)

Alhama I., Soto A. and Alhama F. "Simulador de flujo y transporte FATSIM-A.", Servicio de publicaciones UPCT, Cartagena (2010)

Alhama, F., Zueco, J. "Application of a lumped model to solids with linearly temperature-dependent thermal conductivity". Applied Mathematical Modelling 31, 302-310 (2007)

Atkinson, J. "The Mechanics of Soils and Foundations", Taylor and Francis, New York (2007)

Azizi, F. "Applied analyses in geotechnics." Taylor and Francis, New York (2000)

Bejan A. "Convection heat transfer", 3<sup>a</sup> ed. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey (2005)

Berry, P.L. Reid, D. "An Introduction to Soil Mechanics", McGraw-Hill, New York (1993)

Castro, E., García Hernandez, M.T. y Gallego, A. "Transversal waves in beams via the network simulation method". Journal of Sound and Vibration (2004)

Chapman, J.A. "Heat transfer", Mcmillan Publishing Company, New York (1984)

Das, B.M. "Advanced Soil Mechanics." Taylor and Francis, New York (2008)

EPSNET\_10 Elasticity problems simulation network. Alhama, F., Morales, J.L, y Moreno, J.A. 2011)

FAHET Flow and Heat Transport simulator Alhama, I., Soto, A., y Alhama, F. (2011)

FATSIM-A Fluid Flow and Solute Transport simulator Alhama, I., Soto, A., Alhama, F. (2010)

Gonzalez-Fernández, C.F., García Hernández, M.T. y Horno, J. “Computer simulation of a square scheme with reversible and irreversible charge transfer by the network method”, J. Electroanal. Chem., 395, 39-44 (1995)

González-Fernandez, C.F.,. Horno J. “Heat Transfer and the Network Simulation Method”.  
Research Signpost, Kerala (2002)

González de Vallejo, L., “Ingeniería Geológica”, Pearson Educación, Madrid (2002)

GeoStudio2012. GeoSlope International, Calgary, Canada (2013)

Horno, J., Gonzalez Caballero, A., Hayas, A. y Gonzalez-Fernandez, C.F., “The effect of previous convective flux on the nonstationary diffusion through membranes”. J. Membr. Sci, 48, 67-77(1990)

Incropera, F.P. and DeWitt, D.P. “Introduction to heat transfer”, John Wiley, New York (1996)

Harr, M. E. “Groundwater and Seepage”, McGraw-Hill, New York (1962)

Horno, J., García Hernández, M.T., y González Fernandez, C.F. “”Digital simulation of electrochemical processes by network approach”, Journal Electroanal. Chem. 352, 8397 57-64 (2012)

López-García, J.J., Moya, A.A., Horno, J., Delgado, A. Y González-Caballero, F. “A network model of the electrical double layer around a colloid particle”. J. Colloid Interface Sci. 183, 124-130 (1996)

Mandel, J. "Écoulement de l'eau sous une ligne de palplanches: Abaque pour la condition de renard." Travaux, 197, pp.273-281 (1951)

Mareca, P., Alcover, V. y Alhama, F. "Una herramienta docente para analizar el caos en circuitos electrónicos." Conferencia Ibérica de Sistemas y Tecnología de la Información (2010)

Marín, F., Alhama, F., Moreno, J.A. "Modelling of stick-slip behaviour with different hypotheses on friction forces". International Journal of Engineering Science (2012)

MATLAB 6. Matworks, Natic, MA (1997)

Mills, A.F. "Heat and Mass Transfer", Irvin, New York (1995)

Morales, J.L., Moreno, J.A. Alhama, F. "Numerical Solutions of 2-D Linear Elastostatic Problems by Network Method", CMES 76 (1) 1-18 (2011)

Morales, J.L., Alhama, I., Alcaraz, M. y Alhama, F. "Numerical simulation of 2-D transversal seismic waves by network method" CMES 94(3) 261-277 (2013)

Nagel, L.W., "SPICE (Simulation program with integrated circuit emphasis)", Berkeley, CA; University of California, Electronics Res. Lab., ERL-M382 (1977)

Peusner, L. "The principles of network thermodynamics. Theory and biophysical application" Ph. D. Thesis. Harvard Univ., Cambridge, Massachusetts, (1970)

Potter, M. C. y Wiggert, D. C. Mechanics of fluids. Prentice Halls, New York (1997)

PROCCA-09 Programa de conducción de calor Alhama, I. Soto, A. y Alhama, F. (2005)

PSPICE, version 6.0: Microsim Corporation, 20 fairbanks, Irvine, California 92718 (1994)

Sanchez, J.F., Alhama, F. y Moreno Nicolás, J.A. "An efficient and reliable model based on network method to simulate CO<sub>2</sub> corrosion with protective iron carbonate films", Computers and Chemical Engineering, 39 57-64 (2012)

Sanchez, J.F., Alhama, F. y Moreno Nicolás, J.A. "Numerical simulation of high temperature oxidation of lubricants using the network method", Chemical engineering Communications (2014)

Soto Meca, A. Alhama, F., González Fernández, C.F. "An efficient model for solving density driven groundwater flow problems based on the network simulation method.", J. Hydrology 339, 39-56 (2007)

Taylor, D.J. "Fundamentals of soils mechanics", John and Wiley, New York (1948)

Vladimirescu, A. "The spice book", J. Wiley & Sons, Inc., New York (1994)

Zueco, J., Alhama, F. "Estimación de propiedades térmicas de aleaciones con problema inverso". Revista Española de Metalurgia, 41, 227-232 (2005).