

# UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA NAVAL Y OCEÁNICA



## PROYECTO DE FIN DE CARRERA

“ELECCIÓN DE PESOS EN SPLINES CÚBICOS  
SUAVIZANTES.”

Titulación: Ingeniería Naval y Oceánica.

Alumno: Alberto Candelas García.

Director: Dr. Juan Carlos Trillo Moya.

Cartagena, julio de 2014.

# **“ELECCIÓN DE PESOS EN SPLINES CÚBICOS SUAVIZANTES.”**

ALBERTO CANDELAS GARCÍA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA NAVAL Y OCEÁNICA

*Abuelo. Javi. Ya no estáis aquí, pero os llevo conmigo.*

# AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Juan Carlos Trillo Moya, por su supervisión y dedicación a la hora de dirigir este proyecto. Su inconmensurable ayuda y reflexiones a lo largo de este año han sido muy valiosas.

A mi familia. Sé que el camino ha sido demasiado largo pero finalmente todo tiene recompensa. Gracias por estar ahí siempre y no dejarme abandonar nunca.

A Cristina. Sin ti, todos estos años se hubieran hecho imposibles. Gracias por soportarme y tranquilizarme en los malos momentos y por hacer mejores los buenos momentos.



## ÍNDICE DEL CONTENIDO

<b>CAPÍTULO I: PRESENTACIÓN.</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación.	1
1.2. Introducción.	1
1.3. Objetivos.	2
1.4. Entorno de programación, Matlab.	2
<b>CAPÍTULO II: DEFINICIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL BUQUE.</b>	<b>4</b>
2.1. Planos y líneas de referencia del casco.	4
2.2. Zonas de referencia del casco de un buque.	6
2.3. Dimensiones principales del buque.	9
2.3.1. Eslora.	9
2.3.2. Manga.	10
2.3.3. Puntal.	11
2.3.4. Calado.	12
<b>CAPÍTULO III: REPRESENTACIÓN DE FORMAS MANUAL Y POR ORDENADOR.</b>	<b>13</b>
3.1. Conceptos básicos de la representación de formas.	13
3.1.1. Ejes de referencia.	13
3.1.2. Plano de formas y cartilla de trazado.	14
3.1.2.1. Proyección en un plano transversal, conteniendo a los ejes OY y OZ.	14
3.1.2.2. Proyección en un plano transversal, conteniendo a los ejes OX y OY.	15
3.1.2.3. Proyección en un plano transversal, conteniendo a los ejes OX y OZ.	15
3.1.2.4. Vagras o diagonales.	15
3.2. Cartilla de trazado.	16
3.3. Plano de formas.	17
3.4. Representación manual del plano de formas.	19
3.5. Representación de las formas de un buque mediante ordenador.	27
<b>CAPÍTULO IV: ALISADO DE FORMAS.</b>	<b>32</b>
4.1. Definición.	32
4.2. Métodos históricos de alisado de formas.	32
4.2.1. Alisado en gálibos.	32
4.2.2. Alisado a escala 1/10.	33



---

4.2.3. Inconvenientes de los métodos antiguos.	34
4.3. Alisado por métodos numéricos.	35
4.4. Métodos gráficos iterativos.	37
4.4.1. Modelos de alambre.	37
4.4.2. Modelos de superficie.	39
4.5. Modelos de comprobación del alisado.	40
<b>CAPÍTULO V: SPLINES.</b>	<b>44</b>
5.1. Definición de la función Spline.	45
5.2. Aplicaciones de los Splines.	46
5.3. Splines en el dibujo naval manual.	47
<b>CAPÍTULO VI: SPLINES CÚBICOS SUAVIZANTES.</b>	<b>51</b>
6.1. Problema de suavización.	51
6.2. Splines Cúbicos Suavizantes. Definición.	52
6.3. Condiciones de contorno.	53
6.4. Elección de las condiciones de contorno.	53
6.5. Construcción de la función Spline.	54
<b>CAPÍTULO VII: RECONSTRUCCIÓN PPH.</b>	<b>57</b>
7.1. Reconstrucción PPH.	57
7.2. Propiedades de la reconstrucción PPH.	62
7.3. Esquema de subdivisión PPH.	64
<b>CAPÍTULO VIII: CÁLCULO DE PESOS EN SPLINES CÚBICOS SUAVIZANTES.</b>	<b>66</b>
8.1. Funcional a minimizar.	66
8.2. Traslación.	70
8.3. Extensión a intervalos de n puntos.	70
<b>CAPÍTULO IX: RESULTADOS.</b>	<b>72</b>
9.1. Parábola.	73
9.1.1. Ordenadas originales.	73
9.1.2. Ordenadas perturbadas.	75
9.2. Polinomio de grado tres.	78
9.2.1. Ordenadas originales.	78
9.2.2. Ordenadas perturbadas.	81
9.3. Polinomio de grado cuatro.	83
9.3.1. Ordenadas originales.	83
9.3.2. Ordenadas perturbadas.	86

---



---

9.4. Función seno.	89
9.4.1. Ordenadas originales.	89
9.4.2. Ordenadas con perturbaciones aisladas.	91
9.4.3. Ordenadas con ruido pequeño.	94
9.4.4. Ordenadas con ruido medio.	96
9.4.5. Ordenadas con ruido grande.	99
9.5. Embarcación de recreo: línea de agua.	101
9.5.1. Ordenadas originales.	101
9.5.2. Ordenadas perturbadas.	104
9.6. Polinomio de grado cuatro con variación de pesos.	106
9.6.1. Ordenadas originales.	106
9.6.1.1. Coeficientes de peso $\rho_i = 0$ .	108
9.6.1.2. Coeficientes de peso $\rho_i = 0,4$ .	109
9.6.1.3. Coeficientes de peso $\rho_i = 0,8$ .	110
9.6.1.4. Coeficientes de peso $\rho_i = 1$ .	111
9.6.1.5. Coeficientes de peso $\rho_i = 2,5$ .	112
9.6.2. Ordenadas perturbadas.	113
9.6.2.1. Coeficientes de peso $\rho_i = 0$ .	114
9.6.2.2. Coeficientes de peso $\rho_i = 0,4$ .	115
9.6.2.3. Coeficientes de peso $\rho_i = 0,8$ .	116
9.6.2.4. Coeficientes de peso $\rho_i = 1$ .	117
<b>CAPÍTULO X: CONCLUSIONES.</b>	<b>120</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.</b>	<b>121</b>
<b>ANEXO I: OBTENCIÓN DE COEFICIENTES PPH MEDIANTE wxMaxima.</b>	<b>122</b>
<b>ANEXO II: SCRIPT DE MATLAB DE LA RECONSTRUCCIÓN PPH.</b>	<b>124</b>
<b>ANEXO III: SCRIPT DE MATLAB DEL ALGORITMO DE CÁLCULO DE PESOS.</b>	<b>127</b>



---

## LISTA DE TABLAS

---

Tabla IV.1. – Comparación entre los distintos tipos de líneas.

38





## LISTA DE FIGURAS

---

Figura II.1. – Planos de referencia del casco.	4
Figura II.2. – Líneas de referencia del casco.	5
Figura II.3. – Plano de formas de un buque.	6
Figura II.4. – Zonas principales de referencia del casco de un buque.	7
Figura II.5. – Sección transversal del casco.	7
Figura II.6. – Arrufo de cubierta.	9
Figura II.7. – Diferentes esloras del buque.	9
Figura II.8. – Manga, puntal y calado del buque.	10
Figura II.9. – Puntales de bodega y entrepuente.	11
Figura II.10. – Calados del buque.	12
Figura III.1. – Planos de referencia.	13
Figura III.2. – Secciones de trazado. Caja de cuadernas.	14
Figura III.3. – Líneas de agua.	15
Figura III.4. – Longitudinales.	15
Figura III.5. – Planos diagonales para obtención de vagras o diagonales.	16
Figura III.6. – Ejemplo de cartilla de trazado.	16
Figura III.7. – Plano de formas.	18
Figura III.8. – Junquillo y pesas.	19
Figura III.9. – Trazas del plano en las tres proyecciones.	20
Figura III.10. – Representación de cuadernas.	21
Figura III.11. – Representación del perfil longitudinal.	21
Figura III.12. – Representación de líneas de agua y perfil de cubierta en la vista longitudinal.	22
Figura III.13. – Obtención de un longitudinal en la zona de proa.	22
Figura III.14. – Longitudinal no alisado.	23
Figura III.15. – Alisado del longitudinal.	24
Figura III.16. – Líneas de agua después de restablecer la correspondencia entre las vistas en el alisado.	24
Figura III.17. – Obtención de longitudinales alisados.	25
Figura III.18. – Obtención de diagonales.	25
Figura III.19. – Plano de formas rotulado.	26
Figura III.20. – Curva NURBS.	27
Figura III.21. – Variación de la curva NURBS al mover el punto de control central.	28
Figura III.22. – Superficie con puntos de control que no pertenecen a la misma y líneas de unión.	29



Figura III.23. – Superficie en la que los puntos de control pertenecen a la misma.	30
Figura III.24. – Malla de puntos de control que pertenecen a la superficie.	30
Figura IV.1. – Plano de formas de un buque.	34
Figura IV.2. – Modelo de alambre de un buque.	38
Figura IV.3. – Portacontenedores definido por un modelo de superficie.	40
Figura IV.4. – Comprobación visual del alisado mediante renderizado.	41
Figura IV.5. – Comprobación del alisado mediante una superficie tipo cebrá.	41
Figura IV.6. – Comprobación del alisado mediante la Curvatura Gaussiana.	42
Figura IV.7. – Comprobación del alisado mediante la curvas de control – Cubierta no alisada.	42
Figura IV.8. – Comprobación del alisado mediante la curvas de control – Cubierta alisada.	43
Figura V.1. – Comparación de curva que realiza interpolación (superior) y curva que realiza un suavizamiento (inferior).	46
Figura V.2. – Comparación entre Spline Interpolante(discontinuo) y Spline Suavizante (continuo).	47
Figura V.3. – Junquillo no traccionado.	47
Figura V.4. – Junquillo traccionado.	48
Figura V.5. – Junquillo controlado por muelles.	49
Figura V.6. – Junquillo traccionado por muelles.	49
Figura VII.1. – Primer paso de la reconstrucción PPH con cuatro puntos.	63
Figura VII.2. – Reconstrucción PPH con cuatro puntos con valores modificados.	64
Figura IX.1. – Reconstrucción de una parábola – Pesos fijos.	73
Figura IX.2. – Reconstrucción de una parábola – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	74
Figura IX.3. – Reconstrucción de una parábola – Segunda derivada con pesos fijos.	74
Figura IX.4. – Reconstrucción de una parábola – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	75
Figura IX.5. – Reconstrucción de una parábola con perturbación – Pesos fijos.	76
Figura IX.6. – Reconstrucción de una parábola con perturbación – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	76
Figura IX.7. – Reconstrucción de una parábola con perturbación – Segunda derivada con pesos fijos.	77
Figura IX.8. – Reconstrucción de una parábola con perturbación – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	77
Figura IX.9. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres – Pesos fijos.	78



Figura IX.10. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	79
Figura IX.11. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres – Segunda derivada con pesos fijos.	79
Figura IX.12. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	80
Figura IX.13. – Polinomio de grado tres – Segunda derivada exacta.	80
Figura IX.14. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres con perturbaciones – Pesos fijos.	81
Figura IX.15. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres con perturbaciones – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	82
Figura IX.16. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres con perturbaciones – Segunda derivada con pesos fijos.	82
Figura IX.17. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres con perturbaciones – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	83
Figura IX.18. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos fijos.	84
Figura IX.19. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	84
Figura IX.20. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos fijos.	85
Figura IX.21. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	85
Figura IX.22. – Polinomio de grado cuatro – Segunda derivada exacta.	86
Figura IX.23. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos fijos.	87
Figura IX.24. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	87
Figura IX.25. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos fijos.	88
Figura IX.26. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	88
Figura IX.27. – Reconstrucción de la función seno – Pesos fijos.	89
Figura IX.28. – Reconstrucción de la función seno – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	90
Figura IX.29. – Reconstrucción de la función seno – Segunda derivada con pesos fijos.	90



---

Figura IX.30. – Reconstrucción de la función seno – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	91
Figura IX.31. – Reconstrucción de la función seno con perturbaciones – Pesos fijos.	92
Figura IX.32. – Reconstrucción de la función seno con perturbaciones – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	92
Figura IX.33. – Reconstrucción de la función seno con perturbaciones – Segunda derivada con pesos fijos.	93
Figura IX.34. – Reconstrucción de la función seno – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	93
Figura IX.35. – Reconstrucción de la función seno con ruido pequeño – Pesos fijos.	94
Figura IX.36. – Reconstrucción de la función seno con ruido pequeño – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	95
Figura IX.37. – Reconstrucción de la función seno con ruido pequeño – Segunda derivada con pesos fijos.	95
Figura IX.38. – Reconstrucción de la función seno con ruido pequeño – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	96
Figura IX.39. – Reconstrucción de la función seno con ruido medio – Pesos fijos.	97
Figura IX.40. – Reconstrucción de la función seno con ruido medio – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	97
Figura IX.41. – Reconstrucción de la función seno con ruido medio – Segunda derivada con pesos fijos.	98
Figura IX.42. – Reconstrucción de la función seno con ruido medio – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	98
Figura IX.43. – Reconstrucción de la función seno con ruido grande – Pesos fijos.	99
Figura IX.44. – Reconstrucción de la función seno con ruido grande – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	100
Figura IX.45. – Reconstrucción de la función seno con ruido grande – Segunda derivada con pesos fijos.	100
Figura IX.46. – Reconstrucción de la función seno con ruido grande – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	101
Figura IX.47. – Reconstrucción de una línea de agua – Pesos fijos.	102
Figura IX.48. – Reconstrucción de una línea de agua – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	102
Figura IX.49. – Reconstrucción de una línea de agua – Segunda derivada con pesos fijos.	103
Figura IX.50. – Reconstrucción de una línea de agua – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	103

---



Figura IX.51. – Reconstrucción de una línea de agua con una perturbación – Pesos fijos.	104
Figura IX.52. – Reconstrucción de una línea de agua con una perturbación – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	105
Figura IX.53. – Reconstrucción de una línea de agua con una perturbación – Segunda derivada con pesos fijos.	105
Figura IX.54. – Reconstrucción de una línea de agua con una perturbación – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	106
Figura IX.55. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	107
Figura IX.56. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	107
Figura IX.57. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos fijos con valor 0.	108
Figura IX.58. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos con valor 0.	108
Figura IX.59. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos fijos con valor 0,4.	109
Figura IX.60. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos con valor 0,4.	109
Figura IX.61. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos fijos con valor 0,8.	110
Figura IX.62. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos con valor 0,8.	110
Figura IX.63. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos fijos con valor 1.	111
Figura IX.64. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos con valor 1.	111
Figura IX.65. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos fijos con valor 2,5.	112
Figura IX.66. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos con valor 2,5.	112
Figura IX.67. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	113
Figura IX.68. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.	113



LISTA DE FIGURAS.

---

Figura IX.69. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos fijos con valor 0.	114
Figura IX.70. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos con valor 0.	114
Figura IX.71. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos fijos con valor 0,4.	115
Figura IX.72. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos con valor 0,4.	115
Figura IX.73. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos fijos con valor 0,8.	116
Figura IX.74. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos con valor 0,8.	116
Figura IX.75. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos fijos con valor 1.	117
Figura IX.76. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos con valor 1.	117
Figura IX.77. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos fijos con valor 2,5.	118
Figura IX.78. - Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos con valor 2,5.	118



# CAPÍTULO I

## PRESENTACIÓN.

---

### 1.1. Motivación.

Atendiendo al punto primero del Artículo 46 del Título XI: “Realización y presentación del Proyecto de Fin de Carrera” de la Normativa Académica de la Universidad Politécnica de Cartagena, se impone que en los planes de estudios estructurados en créditos, el Proyecto de Fin de Carrera (PFC en adelante) es una asignatura obligatoria situada en el último cuatrimestre de la carrera. Por tanto, la realización y presentación del PFC es un requisito de obligado cumplimiento en las enseñanzas técnicas para superar el Plan de Estudios, y poder obtener el título.

Este proyecto de carácter específico se ha realizado en el Departamento de Matemática Aplicada y Estadística de la Universidad Politécnica de Cartagena bajo la dirección de Dr. Juan Carlos Trillo Moya.

### 1.2. Introducción.

El desarrollo de NURBS empezó en 1950 por ingenieros que necesitaban la representación matemática precisa de superficies de forma libre como las usadas en carrocerías de automóviles, superficies de exteriores aeroespaciales y cascos de barcos, que pudieran ser reproducidos exacta y técnicamente en cualquier momento. Las anteriores representaciones de este tipo de diseños sólo podían hacerse con modelos físicos o maquetas realizadas por el diseñador o ingeniero.

Los pioneros en esta investigación fueron Pierre Bézier quien trabajaba como ingeniero en Renault, y Paul de Casteljaou quien trabajaba en Citroën, ambos en Francia. Bézier y Casteljaou trabajaron casi en paralelo, aunque ninguno de los dos conoció el trabajo que el otro desarrollaba. Bézier publicó primero sus trabajos y por



esta razón tradicionalmente se le ha asociado a las Bézier-Splines (Splines de Bézier, que son representadas con puntos de control describiendo a la curva misma), mientras que el nombre de Casteljau sólo es conocido por los algoritmos que desarrolló para la evaluación de superficies paramétricas. En la década de 1960 se desarrollaron las NURBS, y se convirtieron en la generalización de las Bézier Splines.

Las primeras NURBS fueron usadas en paquetes propietarios de diseño asistido por computadora de las compañías automotrices. Posteriormente formaron parte del estándar en paquetes de gráficos por computadora. En 1985, el primer modelador interactivo de NURBS para PC, llamado Macsurf (posteriormente Maxsurf), fue desarrollado por Formation Design Systems, una pequeña compañía en Australia. Maxsurf es un sistema de diseño para cascos, que pretendía la creación de barcos, botes y yates, para los diseñadores quienes tenían la necesidad de alta precisión en el esculpido de superficies. Actualmente las aplicaciones más profesionales de gráficos por computadora para equipos de escritorio ofrecen la tecnología.

### **1.3. Objetivos.**

El objetivo de este proyecto es desarrollar un algoritmo capaz de calcular los pesos adecuados a introducir en la expresión de Splines Cúbicos Suavizantes de manera que se mantenga la convexidad de las curvas que se requieran reconstruir.

Este objetivo surge como respuesta a la necesidad de automatizar el proceso de alisado de las formas de los cascos de las embarcaciones, el cual es indispensable para su proceso constructivo. A día de hoy, no existen herramientas informáticas que pongan a disposición de ingenieros y diseñadores un procedimiento fiable de alisado de formas. Este proyecto pretende ser un primer paso hacia la consecución de este objetivo.

### **1.4. Entorno de programación, Matlab.**

Matlab® es un lenguaje de alto nivel y un entorno interactivo para el cálculo numérico, la visualización y la programación. Mediante Matlab, es posible analizar datos, desarrollar algoritmos y crear modelos o aplicaciones. El lenguaje, las herramientas y las funciones matemáticas incorporadas permiten explorar diversos enfoques y llegar a una solución antes que con hojas de cálculo o lenguajes de programación tradicionales, como pueden ser C/C++ o Java™.





Matlab se puede utilizar en una gran variedad de aplicaciones, tales como procesamiento de señales y comunicaciones, procesamiento de imagen y vídeo, sistemas de control, pruebas y medidas, finanzas computacionales y biología computacional. Más de un millón de ingenieros y científicos de la industria y la educación utilizan Matlab, el lenguaje del cálculo técnico.



## CAPÍTULO II

### DEFINICIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL BUQUE.

---

#### 2.1. Planos y líneas de referencia del casco.

Se llama casco del buque al conjunto estructural del mismo formado por el forro exterior estanco y los refuerzos sobre los que se apoya. Estanco significa que es impermeable, es decir, no deja pasar el agua. El casco de un buque se puede cortar según un conjunto de tres planos perpendiculares entre sí, paralelos a los planos de un triedro.

**Plano de crujía:** es el plano de simetría del barco en sentido longitudinal, Figura II.1. La intersección de este plano con el casco se llama línea de crujía. Los planos paralelos al de crujía que cortan al casco del buque se llaman planos longitudinales, y a las líneas de corte de los mismos con el casco, se llaman longitudinales, Figura II.2.

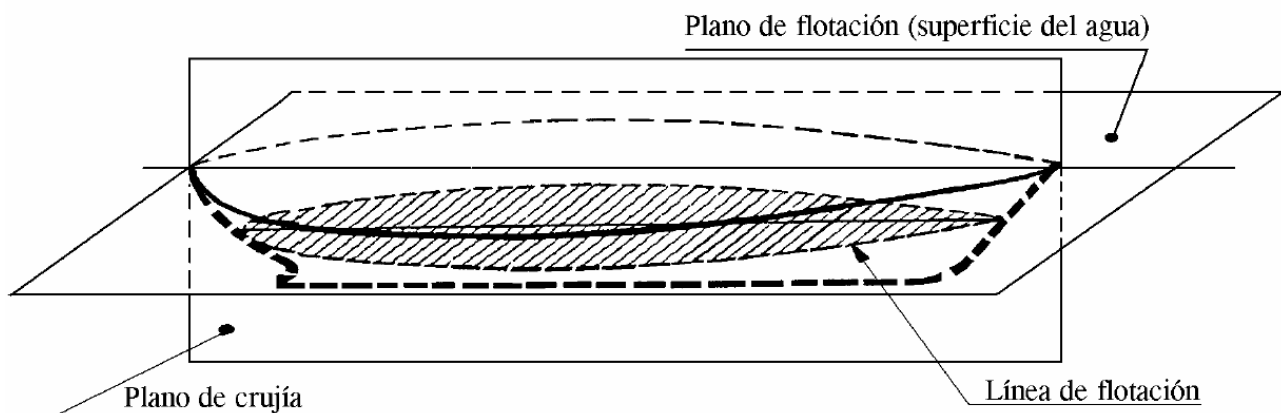


Figura II.1. – Planos de referencia del casco.



**Plano de flotación:** es el plano perpendicular al de crujía que representa la superficie del agua sin oleaje. El plano de flotación de trazado, o flotación de trazado, es el situado al calado de trazado o proyecto del buque. La intersección de este plano con el casco se llama línea de flotación de trazado, Figura II.1. Las intersecciones de planos paralelos al de flotación con el casco se llaman líneas de agua, ver Figura II.2. Se llama **plano base** al plano paralelo a la flotación de trazado que pasa por el canto superior de la quilla en la sección media. A la intersección del plano base con el de crujía se le llama línea base, ver Figura II.3.

**Plano transversal:** es un plano perpendicular a los dos anteriores. Las intersecciones de planos transversales con el casco se llaman cuadernas de trazado o secciones. El conjunto de cuadernas que representan las formas de un barco se llama caja de cuadernas, Figura II.2

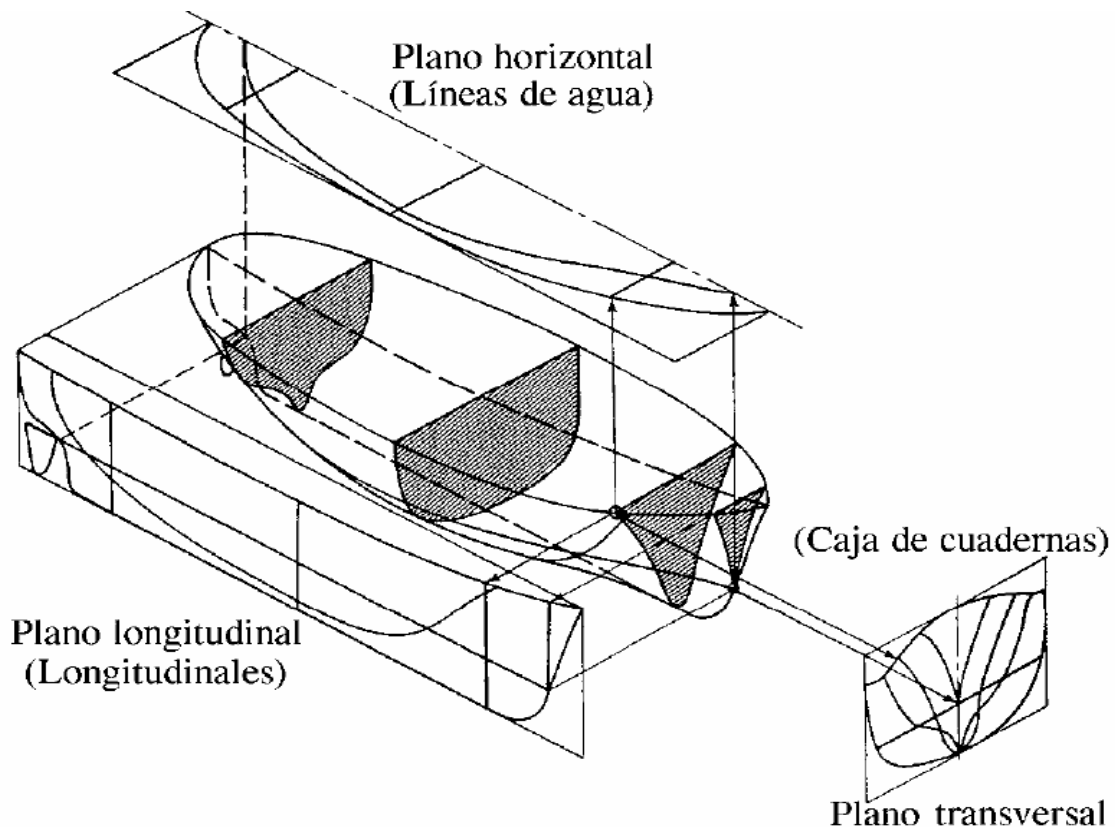


Figura II.2. – Líneas de referencia del casco.



Las formas del casco de un buque se representan mediante un conjunto de líneas de trazado según los tres tipos de planos anteriores, es decir, cuadernas, líneas de agua y longitudinales, formando el denominado plano de formas, Figura II.3.

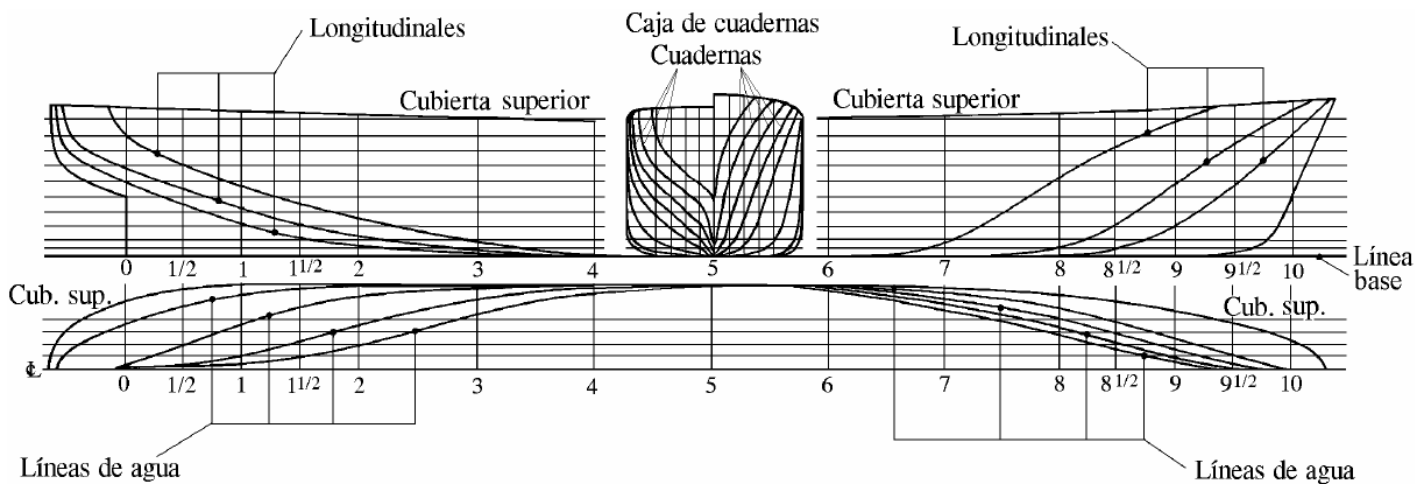


Figura II.3. – Plano de formas de un buque.

Hay que distinguir entre trazado fuera de miembros y fuera de forros. El trazado fuera de miembros se utiliza para representar las formas de buques realizados con materiales metálicos, y no tienen en cuenta el espesor del forro exterior, es decir, las dimensiones de las líneas de trazado excluyen el espesor del forro exterior. En el caso de embarcaciones de madera y fibra, el trazado se realiza fuera de forros, es decir, teniendo en cuenta el espesor del forro exterior.

## 2.2. Zonas de referencia del casco de un buque.

Las zonas principales de referencia en las que se divide el casco de un buque son las siguientes:

**Proa:** es la parte delantera del buque en el sentido normal del movimiento.

**Popa:** es la parte posterior del buque en el sentido normal del movimiento. Hay popas de diferente forma, llamándose las más comunes: popa de espejo (plana), y popa de crucero (redonda).

**Estribor (Er):** es la banda o costado del buque que queda a la derecha de un observador colocado mirando de popa hacia proa.



**Babor (Br):** es la banda o costado del buque que queda a la izquierda de un observador colocado mirando de popa hacia proa.

**Amura:** zona de los costados de proa del buque, y puede ser amura de babor o de estribor.

**Aleta:** Zona de los costados de popa del buque, y puede ser aleta de babor o de estribor.

**Través:** dirección perpendicular al costado del buque, y puede ser través de babor o de estribor.

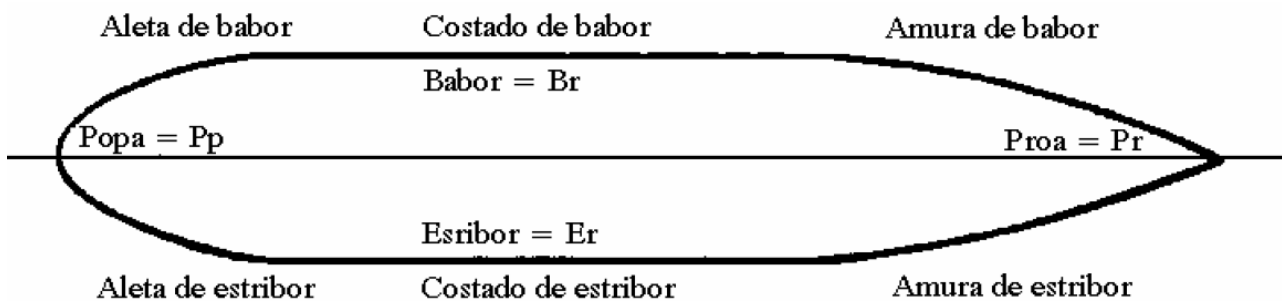


Figura II.4. – Zonas principales de referencia del casco de un buque.

En la siguiente figura se ve la nomenclatura que reciben las zonas del casco de un buque en sentido transversal:

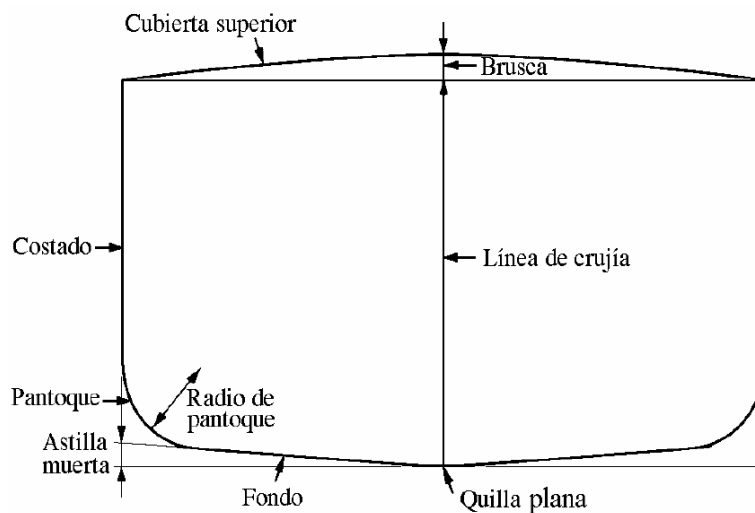


Figura II.5. – Sección transversal del casco.



**Cubierta superior:** Superficie de cierre superior del casco de un barco.

**Forro:** superficie que forma el cierre exterior del casco del barco. Según el material en el que se construya el casco, puede estar formada por planchas de acero, aluminio, listones de madera, o superficie de plástico reforzado con fibra de vidrio.

**Quilla plana:** zona inferior y en crujía del forro del casco.

**Fondo:** parte inferior del casco del barco, junto a la quilla.

**Pantoque:** zona curva de unión entre el fondo y el costado del barco.

**Costado:** Cada uno de los laterales del casco, entre el pantoque y la cubierta superior.

**Brusca:** es la curvatura transversal de la cubierta medida por la altura de la cuerda en crujía, desde la cara inferior de la cubierta hasta el punto más alto del costado.

**Astilla muerta:** elevación del fondo de la cuaderna sobre el plano base, medida en la mitad de la manga.

La nomenclatura que recibe el casco de un buque visto longitudinalmente es la siguiente:

**Roda:** es la zona más a proa del casco, donde se unen los costados. El perfil de roda más normal es el que forma la proa lanzada. A continuación de la roda seguiría la quilla a lo largo del plano de crujía, hasta su unión con el codaste.

**Codaste:** es la zona más a popa del casco, donde se unen los costados por debajo de la flotación. **Arrufo de cubierta:** es la curvatura estructural que se le da a la cubierta en sentido longitudinal, medida en el costado por la altura sobre una línea paralela a la flotación y tangente a la cubierta en el punto más bajo. El arrufo varía a lo largo de la eslora siendo mayor en los extremos.

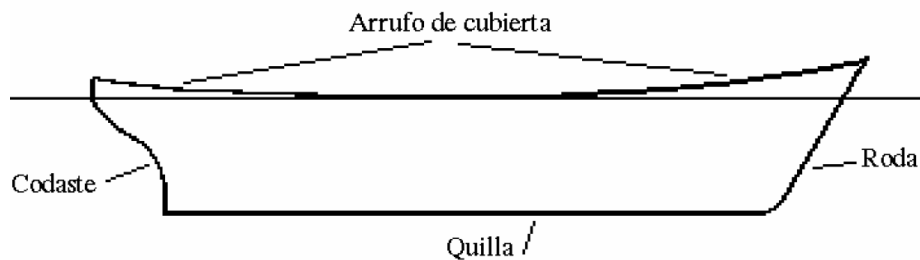


Figura II.6. – Arrufo de cubierta.

### 2.3. Dimensiones principales del buque.

**2.3.1. Esloza:** dimensión del barco en sentido longitudinal, es decir, de proa a popa. Se pueden considerar las siguientes eslozas:

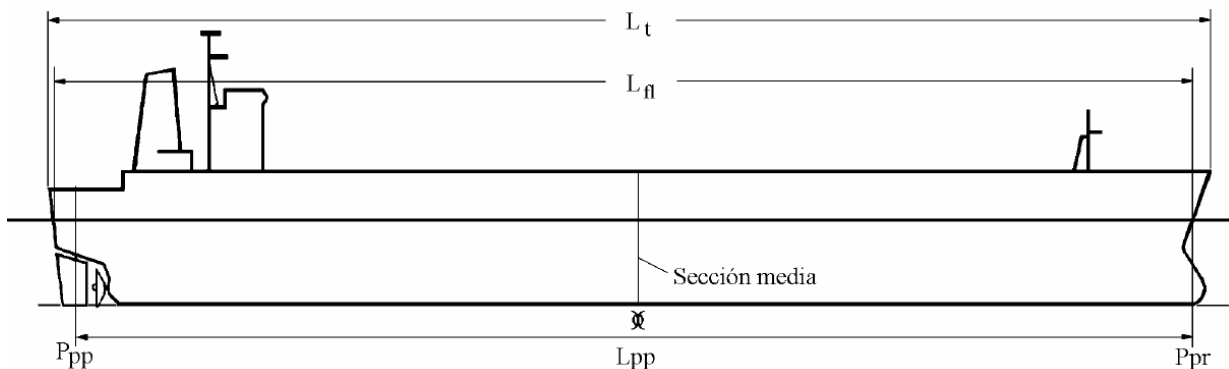


Figura II.7. – Diferentes eslozas del buque.

**Esloza entre perpendiculares:** se representa por **L<sub>pp</sub>**, y es la dimensión longitudinal de trazado del casco del buque, medida horizontalmente entre las perpendiculares de proa y de popa, siendo:

**Perpendicular de proa:** es la línea imaginaria perpendicular a la flotación de trazado o proyecto, que pasa por el punto de intersección de la roda con dicha flotación.

**Perpendicular de popa:** es la línea imaginaria perpendicular a la flotación de trazado o proyecto, que pasa por el eje del timón, o bien, por la cara de popa del codaste popel en caso de que el codaste sea cerrado, ver capítulo 6, figura 6.8.



La mitad del buque se considera que está en la mitad de la eslora entre perpendiculares, siendo la **sección media** la sección transversal que se encuentra en esa posición. **Línea base** es una línea paralela a la línea de flotación, que pasa por la intersección de la sección media con la cara alta de la quilla.

**Eslora en una flotación:** es la máxima longitud del buque en la intersección de esa flotación con la proa y popa del buque. Se representa por las letras **L<sub>f</sub>**.

**Eslora total:** es la máxima longitud del buque entre los puntos más alejados a proa y popa. Se representa por las letras **L<sub>t</sub>**.

**Eslora de Francobordo:** es el 96% de la eslora total en una flotación situada a una altura sobre el canto superior de la quilla igual al 85% del puntal de trazado, o bien, la eslora desde la cara de proa de la roda al eje de la mecha del timón en esa misma flotación, si este último valor es mayor.

**2.3.2. Manga:** dimensión del barco en sentido transversal. Se pueden considerar las siguientes mangas:

**Manga de trazado:** es la máxima dimensión transversal de trazado del casco del buque a lo largo de la eslora. Se representa por la letra **B**. Hay que recordar que en barcos de madera y de fibra las dimensiones de trazado son fuera de forros, y en barcos metálicos son fuera de miembros. Por tanto, en buques metálicos, la manga fuera de forros es igual a la manga de trazado más el espesor del forro por ambos costados.

**Manga en una flotación:** es la manga máxima en la flotación considerada.

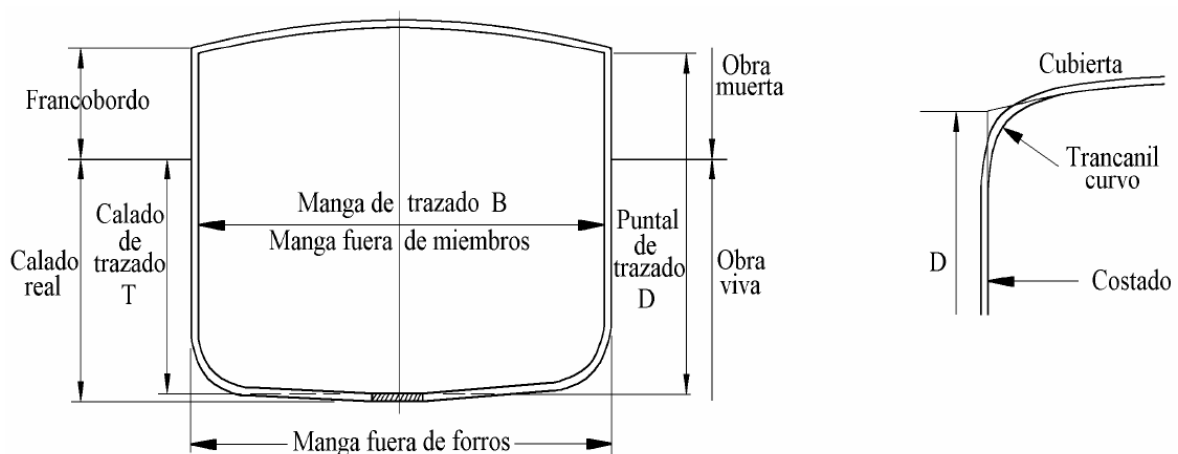


Figura II.8. – Manga, puntal y calado del buque.





**2.3.3. Puntal:** dimensión en sentido vertical del buque. Se pueden considerar los siguientes puntales:

**Puntal de trazado:** es la máxima distancia vertical de trazado del casco del buque, medida en el costado y en la sección media. Se representa por la letra **D**. En barcos de casco metálico, es la distancia desde la cara superior o canto alto de la quilla hasta la cara inferior de la cubierta superior.

En el caso de embarcaciones de madera, al ser las medidas de trazado fuera de forros, el punto inferior de medida en la quilla, está situado en el canto inferior del alefriz. Alefriz es la ranura lateral practicada próxima y paralela a la cara alta del tablón de quilla, y que sirve de alojamiento a los tablones del fondo llamados de aparadura.

Cuando el buque tenga trancanil curvo, el puntal se medirá hasta el punto de intersección de la línea de trazado de la cubierta con la del costado, prolongando imaginariamente las líneas. Trancanil es la zona de la cubierta en su unión con el costado del barco.

**Puntal de bodega:** distancia vertical desde la cara alta del fondo, o doble fondo, hasta la cara inferior de la cubierta más baja.

**Puntal de entrepuente:** distancia vertical entre dos cubiertas contiguas, dentro de una misma bodega. Entrepuente es la zona de bodega entre dos cubiertas de la misma, pues un barco puede tener más de una cubierta.

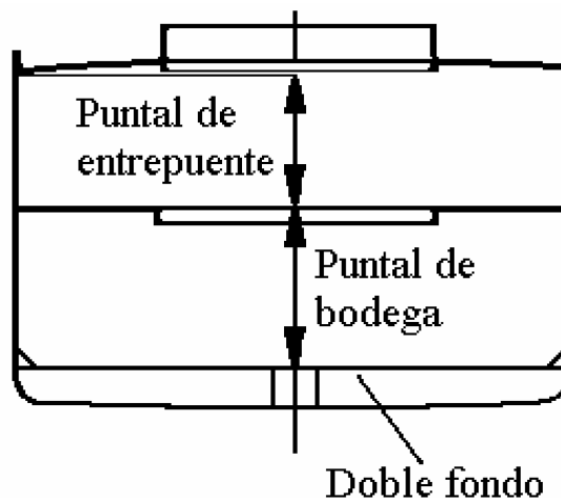


Figura II.9. – Puntales de bodega y entrepuente.



**2.3.4. Calado:** distancia vertical correspondiente a la parte sumergida del buque. Se pueden considerar los siguientes calados:

**Calado de trazado:** distancia vertical de trazado de la parte sumergida del casco del buque por debajo de la flotación de trazado o proyecto, medida en la sección media. Se representa por la letra **T**. En barcos metálicos va desde el canto alto o parte superior de la plancha de quilla, a la flotación de trazado.

**Calado en una flotación o calado real en esa flotación:** es el calado medido desde la cara inferior o exterior de la quilla hasta el nivel de la flotación correspondiente, ver figura 4.8.

**Calado a proa ( $T_{pp}$ ):** es el calado real del buque en la perpendicular de proa.

**Calado a popa ( $T_{pp}$ ):** es el calado real del buque en la perpendicular de popa.

**Calado en la sección media:** es el calado real en la sección media del buque.

**Calado medio:** es la semisuma de los calados a proa y popa.

**Asiento o trimado:** es la diferencia entre el calado de popa menos el calado de proa. Esa diferencia es mayor que cero cuando el calado de popa es mayor que el de proa, y se dice que el buque tiene asiento positivo. Cuando la diferencia es negativa se dice que el buque tiene asiento negativo.

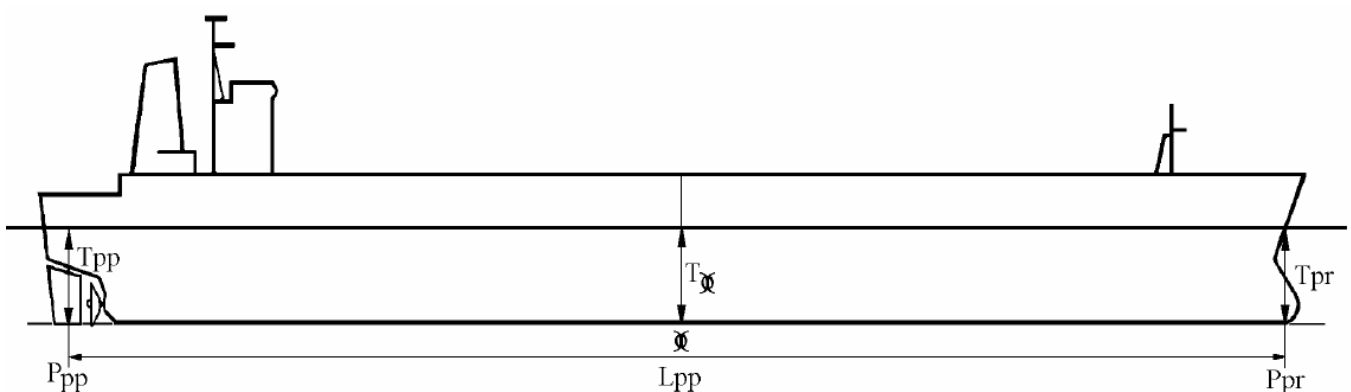


Figura II.10. – Calados del buque.



## CAPÍTULO III

### REPRESENTACIÓN DE FORMAS MANUAL Y POR ORDENADOR.

---

#### 3.1. Conceptos básicos de la representación de formas.

##### 3.1.1. Ejes de referencia.

La base fundamental para poder estudiar las características geométricas que definen el casco de un buque es tener la representación de sus formas trazadas a escala. Dicho trazado es lo que se denomina plano de formas. Constituye también el punto de partida para la fabricación del casco, lo cual requiere que esté alisado, es decir que sus formas sean suaves y no presenten discontinuidades que no formen parte del casco. Para su representación es necesario considerar un sistema de referencia tridimensional ortogonal asociado al barco, es decir, el triedro trirrectángulo de tres ejes perpendiculares entre sí.

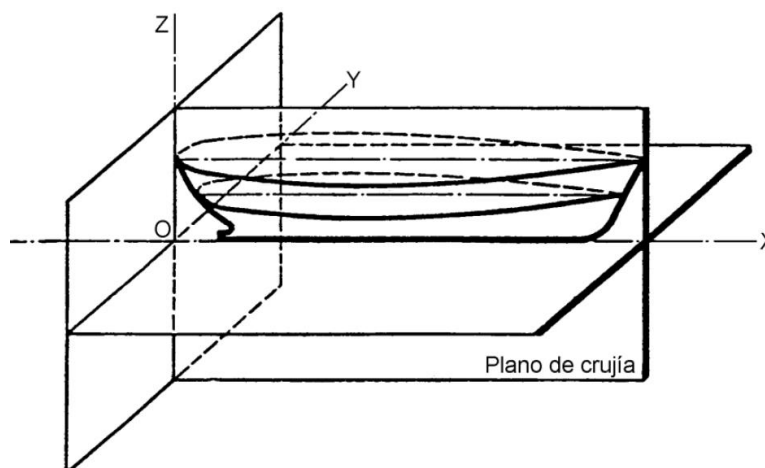


Figura III.1. – Planos de referencia.



Se consideran como ejes:

Eje OX: el de dirección Proa-Popa o sentido longitudinal.

Eje OY: el de dirección Estribor-Babor o sentido transversal.

Eje OZ: el de dirección Quilla-Cubierta o sentido vertical.

El origen de referencia será el resultante de la intersección de dichos tres ejes.

### 3.1.2. Plano de formas y cartilla de trazado.

El objetivo final de cualquier diseño es su construcción, y para poder llevarlo a cabo es necesario trasladar las formas y dimensiones del objeto en cuestión al proceso constructivo. La forma de representación del casco de un barco es mediante su Plano de Formas. Un plano de formas consta de un conjunto de líneas representadas en tres proyecciones ortogonales, obtenidas al cortar el buque por un sistema de planos paralelos a los tres planos del triedro trirrectángulo. Los nombres que reciben estas líneas en las tres proyecciones se recogen en los siguientes apartados.

#### 3.1.2.1. Proyección en un plano transversal, conteniendo a los ejes OY y OZ.

Los cortes del casco con planos transversales, se denominan cuadernas de trazado o secciones de trazado, y el conjunto de todas ellas se dispone en una vista del plano que se denomina caja de cuadernas.

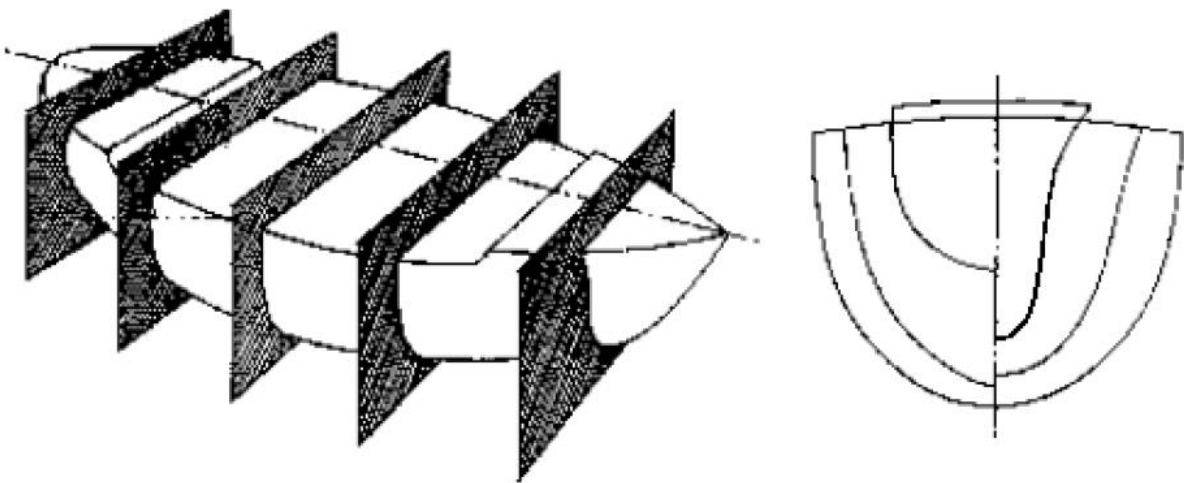


Figura III.2. – Secciones de trazado. Caja de cuadernas.



### 3.1.2.2. Proyección en un plano transversal, conteniendo a los ejes OX y OY.

Los cortes del casco con planos paralelos horizontales, paralelos a la flotación, se denominan Líneas de Agua. Sólo se representan en la mitad del barco por ser simétrico.

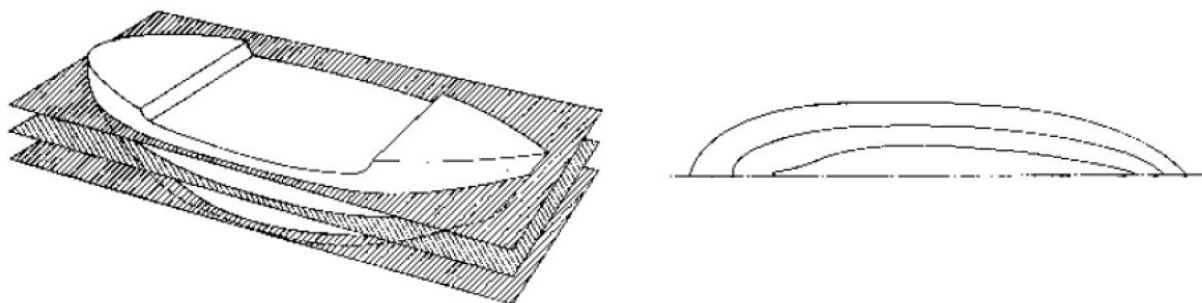


Figura III.3. – Líneas de agua.

### 3.1.2.3. Proyección en un plano transversal, conteniendo a los ejes OX y OZ.

Los cortes del casco con planos longitudinales paralelos al plano de crujía, y por tanto perpendiculares a los dos anteriores, se denominan Líneas Longitudinales o Longitudinales.

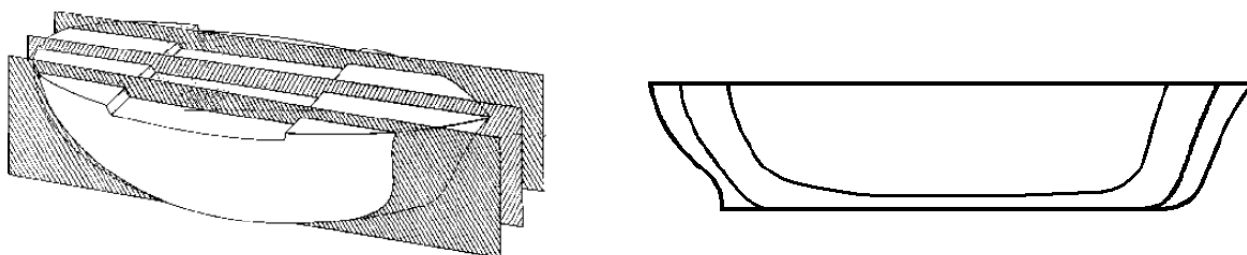


Figura III.4. – Longitudinales.

### 3.1.2.4. Vagras o diagonales.

Las vagras o diagonales resultan de cortar el buque por planos perpendiculares al transversal y que forman un ángulo determinado con el plano de crujía. Con ello se obtiene una mayor precisión en determinadas zonas del buque, normalmente aquellas



con una curvatura mayor como el pantoque, evitando cometer errores sustanciales que producirían algunas "abolladuras" en la superficie de trazado del casco.

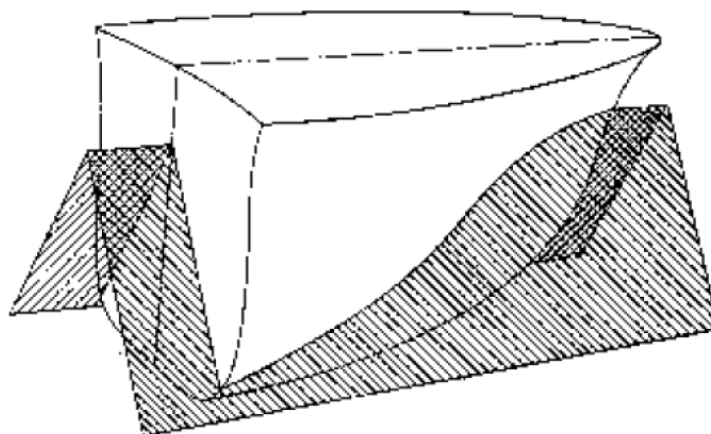


Figura III.5. – Planos diagonales para obtención de vagras o diagonales.

### 3.2. Cartilla de trazado.

Las formas de un barco quedan definidas mediante la cartilla de trazado, consistente en una serie de cifras que representan puntos en el espacio, consistentes en las semimangas que corresponden a la intersección de las líneas de agua con las secciones. Además, se dispone en la cartilla de trazado de los pies de cuadernas y de las intersecciones de la(s) cubierta(s) con las cuadernas, para tener definidos el principio y fin de las mismas. Es importante señalar que para una total definición de las formas es necesario disponer de croquis con los perfiles de proa y popa, para tener definida la parte superior de la roda, el codaste y la popa (espejo, crucero).

#### Secciones

	C0	C1/2	C1	C1 1/2	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
L.A. 0	-----	-----	-----	-----	0,15	0,46	0,6	0,2	-----	-----	-----	-----	-----
L.A. 1	-----	-----	-----	-----	0,46	1,91	3,11	3,16	2,49	1,61	0,83	0,31	-----
L.A. 2	-----	-----	-----	0,48	1,49	3,28	4,13	4,18	3,68	2,74	1,66	0,7	-----
L.A. 3	-----	-----	0,38	1,64	2,83	4,14	4,62	4,66	4,22	3,3	2,11	0,94	-----
L.A. 4	-----	-----	1,63	3,05	3,85	4,58	4,87	4,91	4,54	3,64	2,42	1,12	-----
L.A. 5	-----	1,92	3,28	3,98	4,43	4,81	4,98	5	4,72	3,9	2,66	1,27	-----
L.A. 6	-----	3,39	4,04	4,43	4,71	4,93	5,02	5,03	4,84	4,11	2,88	1,43	0
L.A. 7	-----	4,02	4,44	4,7	4,87	5,01	5,05	5,05	4,92	4,28	3,11	1,6	0,06
L.A. 8	-----	4,28	4,61	4,84	4,97	5,04	5,06	5,07	4,98	4,43	3,34	1,8	0,13
L.A. 9	-----	4,39	4,69	4,9	5,03	5,06	5,07	5,1	5,02	4,59	3,6	2,04	0,22
L.A. 10	3,99	4,46	4,76	4,94	5,05	5,09	5,1	5,11	5,05	4,76	3,89	2,32	0,35
Alt. Cub.	5,7	5,7	5,7	5,7	5,8	5,85	6,05	6,2	6,4	6,5	6,87	7,4	8,05
Sem. Cub.	4,02	4,48	4,78	4,95	5,06	5,1	5,12	5,12	5,1	5,05	4,7	3,77	1,62
Alt. Pie C.	-----	2,235	1,448	0,635	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,13	0,225	0,32	0,4	0,33
Sem. Pie C.	-----	0	0	0	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,15	0	0

Figura III.6. – Ejemplo de cartilla de trazado.



### 3.3. Plano de formas.

El plano diametral o plano de crujía en su intersección con los otros dos planos que forman el triedro de referencia da lugar a los ejes principales, denominándose Línea de Crujía a la intersección del casco con dicho plano, así como a su traza en las tres proyecciones. Se llama plano base al plano paralelo a la flotación de trazado que pasa por el canto superior de la quilla en la sección media. A la intersección del plano base con el de crujía se le llama línea base.

Con estas líneas de referencia, el conjunto de las proyecciones indicadas se disponen adecuadamente en un solo plano en lo que se denomina Plano de Formas. La caja de cuadernas se puede colocar en el centro de la proyección longitudinal, en el caso de barcos con cuerpo cilíndrico, donde esta situación no quita información sobre las formas. En caso contrario, la caja de cuadernas se coloca a la derecha de la proyección longitudinal.

Hay que tener presente que en las proyecciones longitudinal y horizontal el barco se dibuja con la proa a la derecha. En la proyección horizontal, que se sitúa en debajo de la proyección longitudinal, sólo se dibujan las líneas de agua de babor, al ser el barco simétrico. En la caja de cuadernas, se sitúan las secciones de proa a la derecha de la traza de la línea de crujía, y las de popa a la izquierda de la misma.

Se puede decir que no hay una normalización fija para todos los barcos, en cuanto al número de líneas de agua, secciones y cortes longitudinales que se representan en un plano de formas. Sin embargo si existen normas al respecto, con alguna diferencia entre barcos mercantes y embarcaciones menores.

La escala de dibujo será siempre una de las normalizadas (1/25, 1/50, 1/75, 1/100, ...), realizándose el plano de formas en papel de tamaño adecuado.

La caja de cuadernas o perfil transversal se traza dependiendo de la eslora del buque, dividiéndose ésta en diez (10) partes iguales si el buque es pequeño y en veinte partes en buques medianos o grandes, por lo que el número de secciones será de 11 y 21 respectivamente. Por el mismo motivo de la precisión del trazado, en las zonas extremas, al ser mayor las curvaturas, se trazan secciones auxiliares cuya separación son cuartos (1/4) o medios (1/2) del intervalo normal. La numeración de las secciones empieza por popa en Europa, desde la 0 a la 10 o desde la 0 a la 20, y por proa en EEUU. Como origen de las secciones se considera la perpendicular de popa (la de proa en EE.UU.), atendiendo al criterio de numeración elegido.



La línea de agua cero será la correspondiente al plano base y la línea de agua seis (6) se hace coincidir con la flotación de trazado o de proyecto, por lo que basta dividir el calado en seis partes iguales para obtener la separación entre ellas. En barcos de mayor calado se divide en diez partes en vez de seis, correspondiendo la flotación de trazado a la línea de agua número diez (10). En la zona más baja del buque y para aumentar la precisión del trazado se suele representar la línea de agua un medio (1/2), separada medio intervalo de la línea de base. Las líneas de agua por encima de la flotación, que sirven para representar la obra muerta, quedan a juicio del proyectista. Es frecuente ver en planos de formas de embarcaciones de vela, un número variable de líneas de agua equidistantes a lo alto del puntal.

Las líneas longitudinales son equidistantes y suelen ser tres (3) o cuatro (4), sin contar crujía, en buques mercantes y de guerra, aunque esta norma es flexible. En embarcaciones de vela puede haber hasta seis (6), también equidistantes a lo ancho de la semimanga. Se representan por números romanos.

El número de diagonales o vagras, y su ángulo, es variable, siendo práctico realizar al menos dos de ellas. Se representan en la proyección horizontal por la parte inferior de crujía, para no mezclarse con las líneas de agua.

En el plano de formas también se representan las cubiertas, denominadas vagras de doble curvatura. Su representación se hace de forma completa en la proyección transversal y en la longitudinal mediante las líneas resultantes de la intersección de la(s) cubierta(s) con el costado y con el plano de crujía.

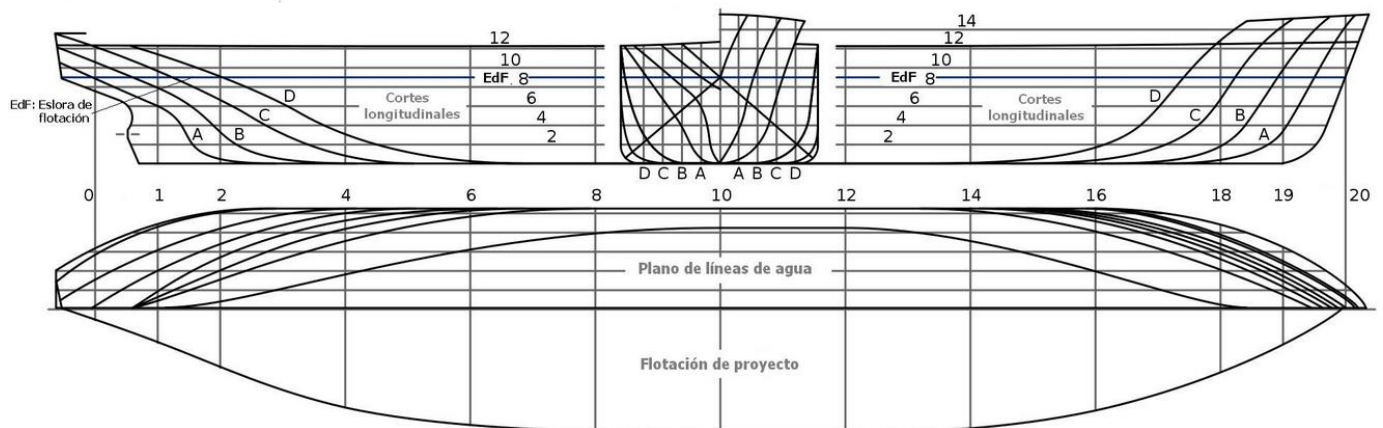


Figura III.7. – Plano de formas.





### 3.4. Representación manual del plano de formas.

El dibujo manual de las líneas del plano de formas se realiza mediante el empleo de reglas de gran tamaño, plantillas, y junquillos que se mantienen en posición mediante pesas para trazar las líneas curvas de gran curvatura, figura 8. Los junquillos se realizan en un material flexible como talco, y tiene diferentes secciones rectangulares en función de la curvatura de la línea a dibujar.

Hoy en día este proceso se ha visto simplificado con la aparición de programas de ordenador que permiten de forma muy sencilla trabajar con el casco de forma tridimensional, y realizar a su superficie los distintos cortes con los planos referidos anteriormente. Estos cortes permiten obtener las distintas líneas sin dibujar ninguna, quedando el rotulado como única operación a realizar también en un programa de diseño. Existen diversos programas específicos de diseño naval, como Maxsurf, Prosurf, Prolines, Autoship, y diversos programas de dibujo auxiliares, como AutoCad, Rhinoceros y Microstation, algunos de ellos con aplicaciones navales. Nunca hay que olvidar que a la hora de construir el barco a tamaño real, o cualquier modelo para su ensayo, es imprescindible una representación de sus formas trazadas a escala.

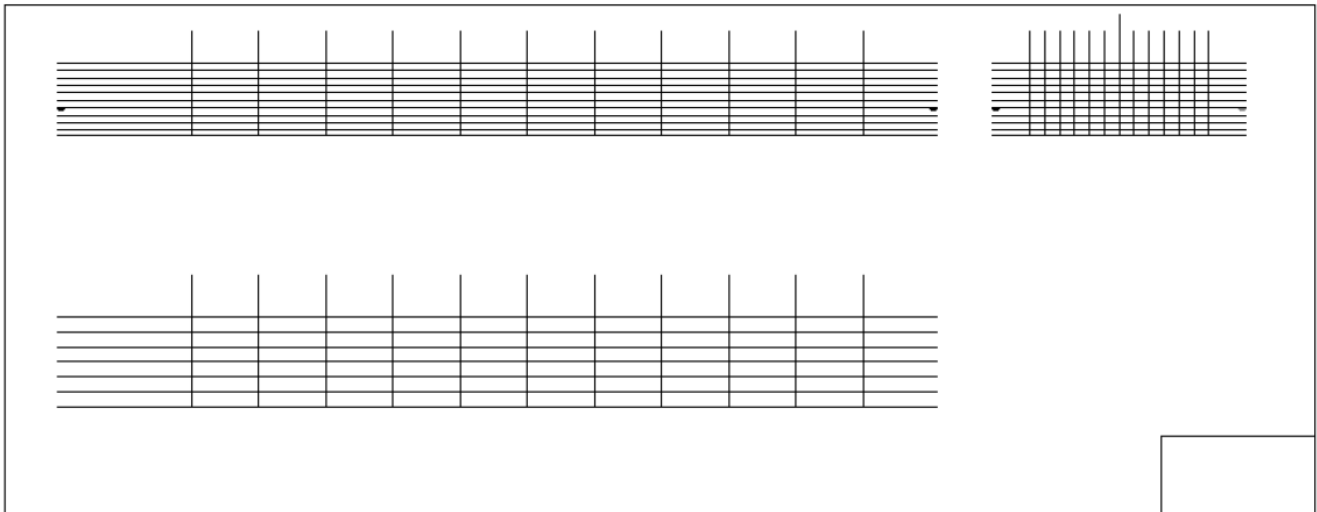


*Figura III.8. – Junquillo y pesas.*

Partiendo de la cartilla de trazado y de los croquis de proa y popa, se procede a dibujar el plano de formas en varias etapas.



La primera etapa es el dibujo de las trazas del plano, es decir, las líneas rectas que van a representar en las tres proyecciones, las intersecciones del conjunto de planos perpendiculares entre sí y paralelos respectivamente a cada uno de los planos de referencia del triedro trirrectángulo. Estas trazas definen el número de líneas en cada proyección.



*Figura III.9. – Trazas del plano en las tres proyecciones.*

La segunda etapa corresponde al dibujo de la caja de cuadernas en la proyección transversal, a partir de las semimangas contenidas en la cartilla de trazado. Las cuadernas de proa se representan a la derecha de crujía, y las de popa a la izquierda. Para representar una cuaderna, se toman las cifras contenidas en la columna correspondiente de la cartilla, Figura III.6., pues representan las semimangas del corte de dicha cuaderna con todas las líneas de agua a las que corta más el pie de cuadernas y el punto de corte con la cubierta. La coordenada vertical que corresponde a cada semimanga es la altura de la línea de agua correspondiente.

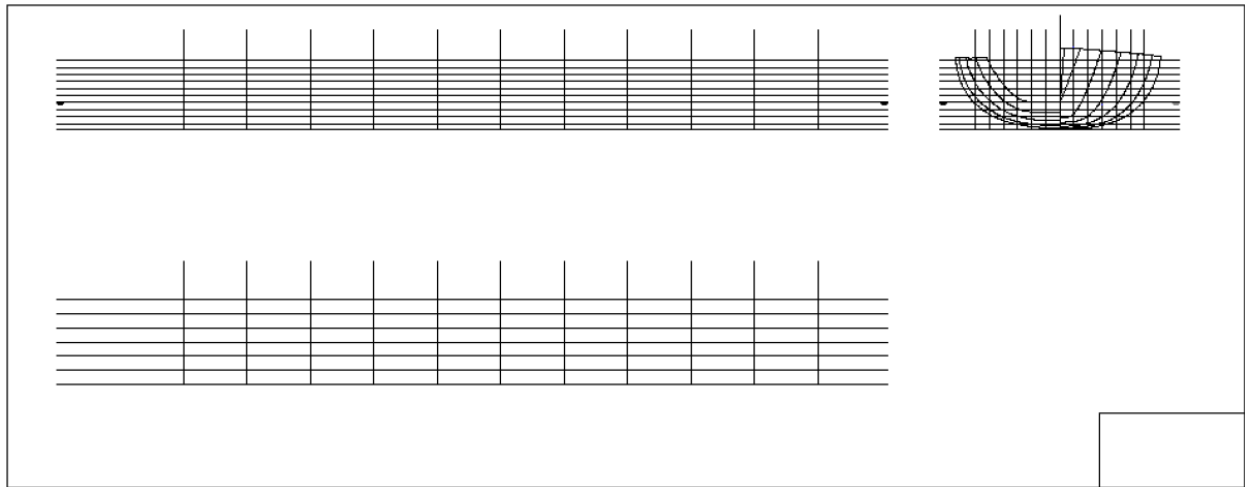


Figura III.10. – Representación de cuadernas.

La tercera etapa consiste en la representación del perfil del casco en la proyección longitudinal, Figura III.11. Para ello se utilizan las alturas y semimangas de los pies de cuaderna y de cubierta, obtenidos de la cartilla de trazado, así como los croquis de proa y popa.

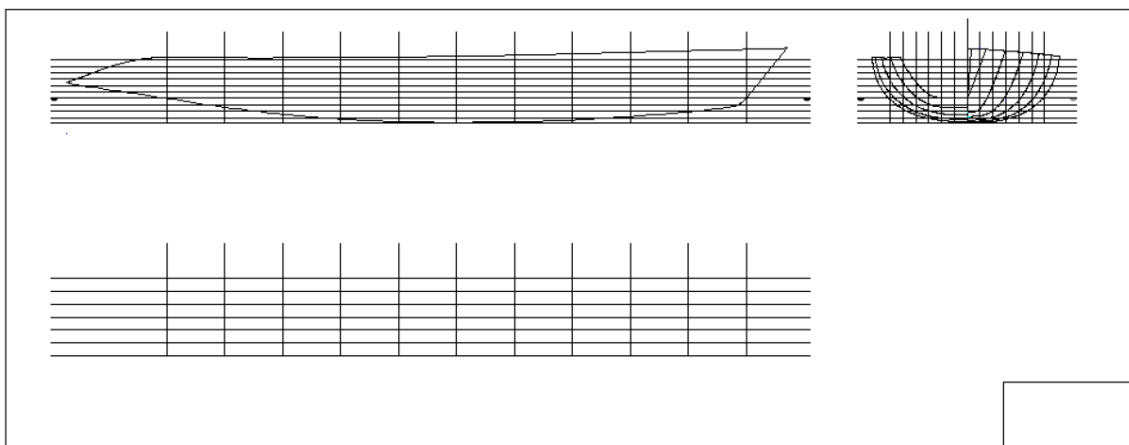


Figura III.11. – Representación del perfil longitudinal.

En la cuarta etapa se dibujan las líneas de agua y el perfil de cubierta en la proyección horizontal. Para ello, se utilizan nuevamente las semimangas de la cartilla de trazado, pero ahora en el sentido horizontal, ya que se están dibujando líneas de agua. Los extremos de proa y popa donde terminan las líneas de agua se obtienen de la proyección longitudinal, en los puntos de corte de la traza correspondiente a cada línea de agua con el perfil longitudinal. Análogamente se procede con el dibujo de la cubierta, donde sólo se utilizarán las semimangas correspondientes a cada cuaderna, reflejadas en la cartilla, y los extremos se obtendrán de sus correspondientes en la proyección longitudinal, Figura III.12.

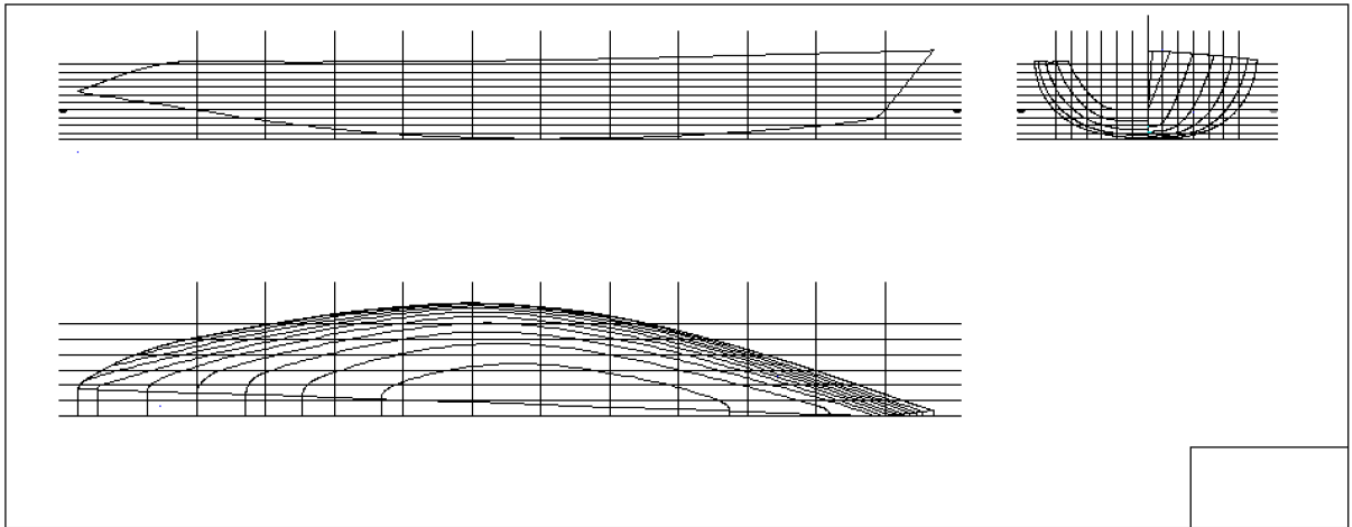


Figura III.12. – Representación de líneas de agua y perfil de cubierta en la vista longitudinal.

A partir de la quinta etapa, se prescinde de la cartilla de trazado y se obtienen los longitudinales basándose en lo ya dibujado, según se representa en la Figura III.13. El procedimiento consiste, por un lado, en proyectar sobre la vista longitudinal los puntos de corte de la traza del longitudinal que se quiere dibujar, con las secciones a las que corte en la caja de cuadernas. Por otro lado, se proyectan también los puntos de corte de la traza del mismo longitudinal con las líneas de agua a las que corte en la proyección horizontal. Los puntos obtenidos definen el longitudinal correspondiente.

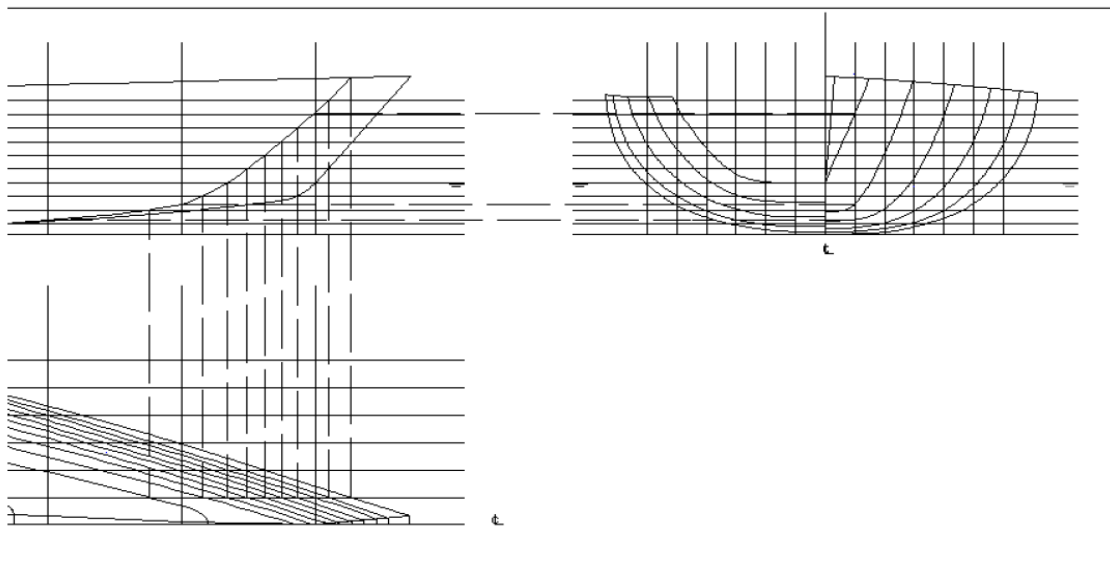


Figura III.13. – Obtención de un longitudinal en la zona de proa.

Puede ocurrir que al dibujar el longitudinal la curva obtenida no esté alisada, presentando alguna abolladura. En este caso hay que proceder al alisado de las



formas. El alisado es un proceso corrector de formas con el que se suavizan en el plano de formas las diferentes líneas representativas del buque hasta conseguir su armonía y acuerdo en las tres proyecciones.

Este proceso de suavizado de las formas es un proceso corrector de las mismas en el que intervienen las tres vistas o proyecciones del plano de formas, ya que una variación en una de ellas provoca automáticamente variaciones en las otras dos vistas. Estas variaciones pueden provocar a su vez otras, de tal manera que es un proceso en el que hay que hacer corresponder un mismo punto en las tres proyecciones, hasta llegar a obtener curvas suaves. Se deduce que es un procedimiento tedioso, que en el caso de la representación de formas manual, supone borrar muchas líneas con el consiguiente deterioro del papel y del dibujo.

En las siguientes figuras se representa un ejemplo sencillo de alisado de un longitudinal y las consideraciones que arrastra. En la Figura III.14. se observa una vez obtenido el longitudinal, que presenta una abolladura en la zona señalada.

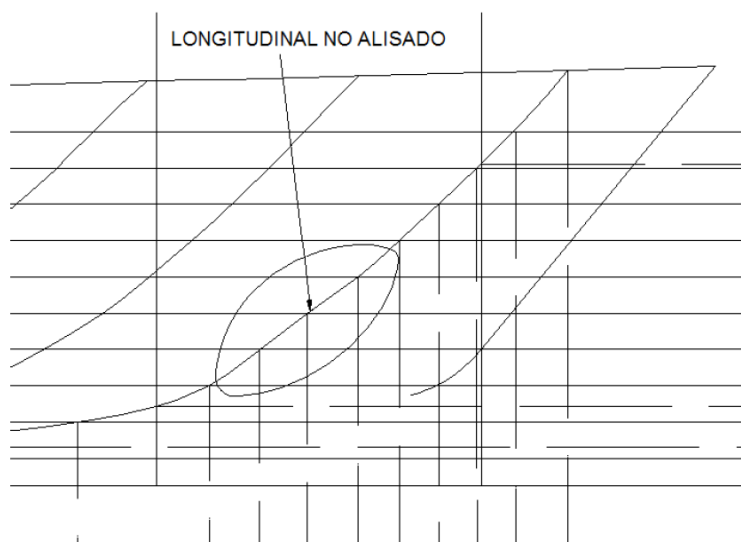


Figura III.14. – Longitudinal no alisado.

Para proceder al alisado, se prescinde de los puntos que provocan la abolladura, simplemente dejando que el junquillo tome libremente una forma no forzada en esa zona. Esto provoca la existencia de nuevos puntos de corte del longitudinal con las líneas de agua de alrededor, debiendo proceder a llevar estos puntos de corte a la proyección horizontal y modificar las líneas de agua afectadas.



Figura III.15. – Alisado del longitudinal.

Las líneas de aguas modificadas deben ser alisadas. Si al modificar las líneas de agua, se viera afectado algún otro punto de intersección con las trazas de cuadernas o las trazas de longitudinales, se procedería a restablecer la correspondencia del punto en las otras vistas hasta que las curvas afectadas estuvieran todas alisadas y con correspondencia en las tres vistas.

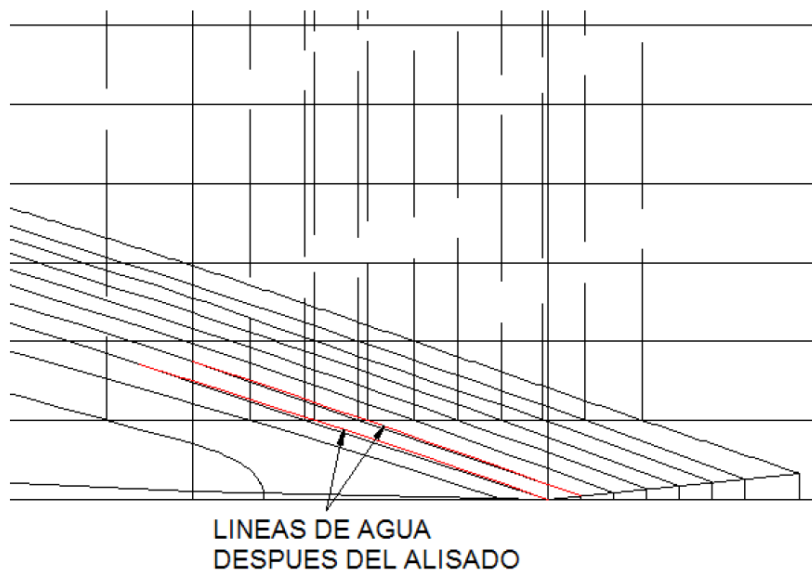
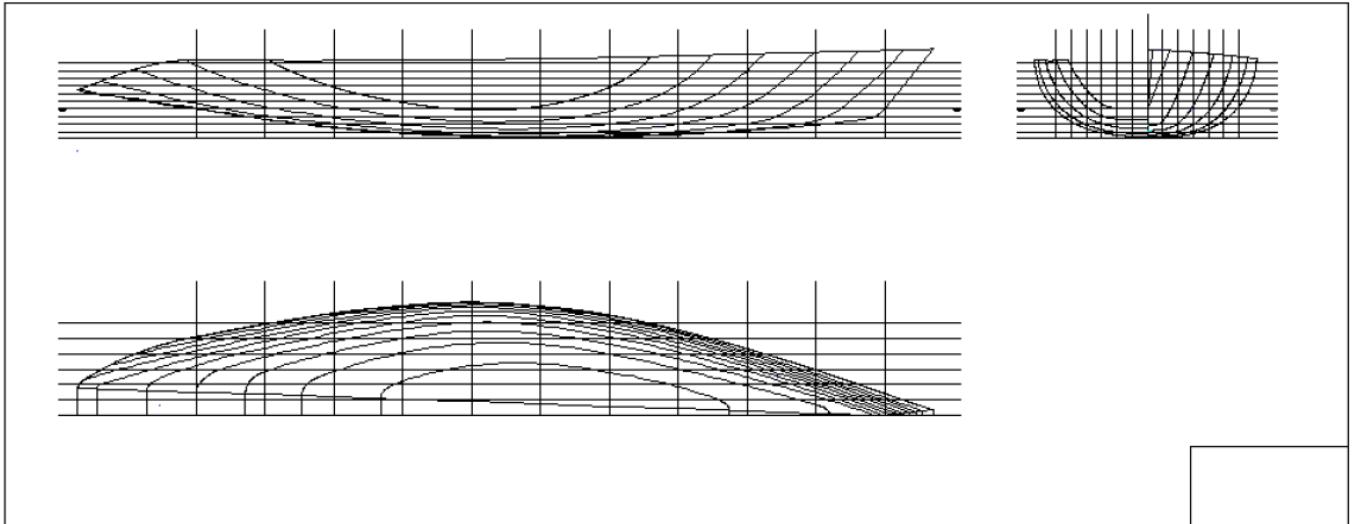


Figura III.16. – Líneas de agua después de restablecer la correspondencia entre las vistas en el alisado.

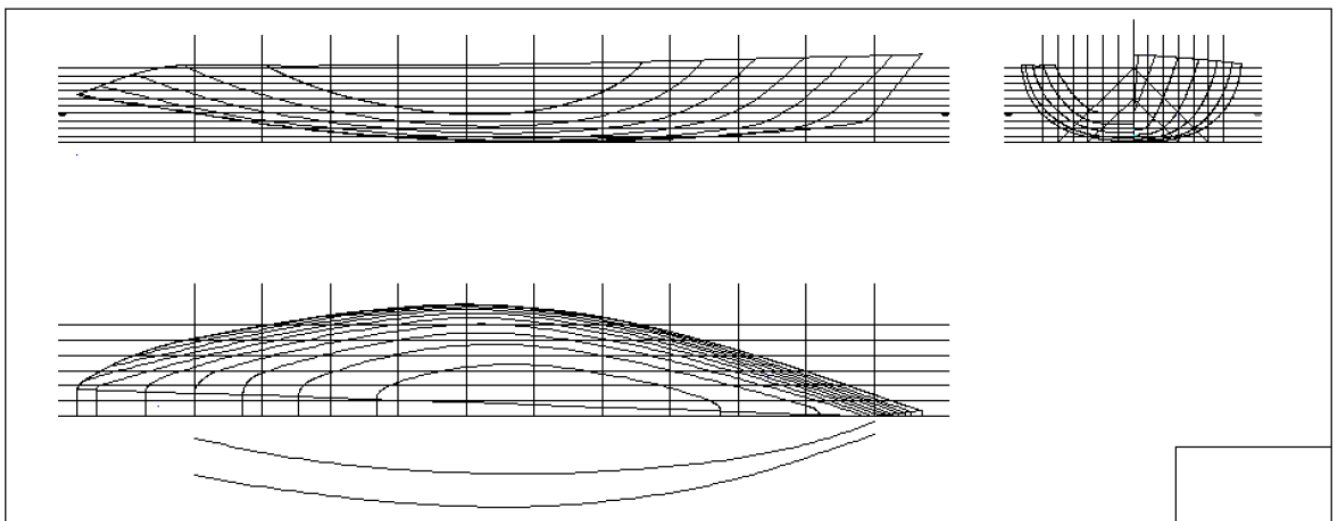


El resultado final del proceso es la obtención de los longitudinales y resto de líneas alisadas:



*Figura III.17. – Obtención de longitudinales alisados.*

La sexta etapa consiste en la obtención de las diagonales o vagras. Las diagonales son muy útiles para ver si ciertas zonas del casco están alisadas, y que no se pueden ver con las otros tres tipos de curvas, como sucede en la zona del pantoque. Las diagonales se define por sus trazas en la caja de cuadernas, normalmente una va desde la flotación de trazado en su intersección con crujía hasta un punto de la línea base que permita un corte más perpendicular con las carena. Otras trazas pueden ir desde el corte con crujía de alguna traza de línea de agua por encima o por debajo de la flotación hasta la línea base de forma similar a lo dicho anteriormente.



*Figura III.18. – Obtención de diagonales.*



Las diagonales se obtienen llevando desde la caja de cuadernas hasta la proyección horizontal en cada traza de cuaderna respectivamente, la distancia obtenida sobre la traza de la diagonal, desde el punto de la traza en crujía hasta el punto de corte con cada una de las cuadernas de proa y popa. Una vez llevadas estas distancias por debajo de la línea de crujía en la proyección horizontal, se procede a su trazado mediante junquillo, debiendo ser una curva diagonal perfectamente alisada. Si no es así, hay que proceder a alisar la diagonal, y las distancias modificadas llevadas a la caja de cuadernas, volver a dibujar las cuadernas afectadas, y hacer corresponder en las tres vistas todos los puntos de intersección en los que haya habido alguna variación, realizando un proceso bastante tedioso.

Por último, se realiza el rotulado del plano de formas en la séptima etapa, según se ve en la Figura III.19. Hay que rotular el número de las cuadernas en la caja de cuadernas, más o menos en diagonal, y en la parte inferior de las trazas en las otras dos vistas, comenzando por la sección 0 en la perpendicular de popa. Análogamente, hay que rotular las líneas de agua en la proyección horizontal a izquierda y derecha, más o menos en diagonal, y en las trazas de las otras dos vistas, a izquierda, derecha y entre la proyección longitudinal y la caja de cuadernas. Se empieza la numeración desde la línea base, que es la línea de agua 0. En cuanto a los longitudinales, se enumeran con números romanos empezando con el I por el más cercano a crujía, rotulando en la proyección longitudinal a izquierda y derecha, más o menos en diagonal, en la parte inferior de las trazas en la caja de cuadernas, y a izquierda y derecha de las trazas en la proyección horizontal. Las diagonales también se rotulan en la proyección horizontal y en las trazas en la caja de cuadernas. En el plano de formas también se ponen las características generales del barco en la parte derecha, encima de la carátula de identificación.

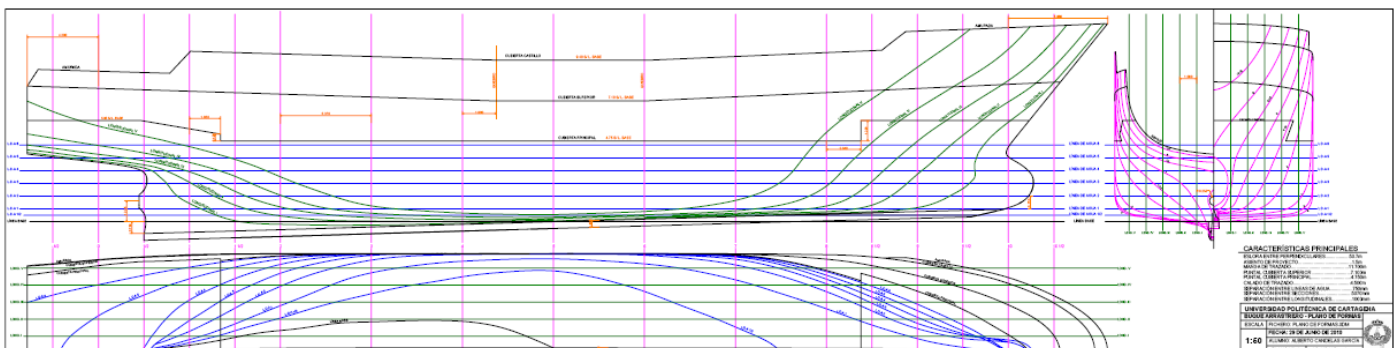


Figura III.19. – Plano de formas rotulado.





### 3.5. Representación de las formas de un buque mediante ordenador.

Los programas de diseño de barcos están basados en su mayoría en el empleo de superficies NURBS, aunque normalmente se utilizarán superficies B-Spline, es decir NURBS de peso uno en todos los puntos de control que las definen. Aquí se utilizarán los programas Maxsurf y Prosurf. Ambos programas permiten el intercambio de ficheros exportándolos en formato igs, y también son compatibles con AutoCad exportándolos en formato dxf.

NURBS significa, B-Splines Racionales No Uniformes (Non-Uniform Rational B-Splines). Se definen mediante ecuaciones que permiten representar curvas y superficies que simulan matemáticamente el junquillo en términos de rigidez y continuidad. En vez de tener una curva que pase por una serie de puntos, como un junquillo con sus correspondientes pesas, una curva NURBS es aquella que está influenciada por las posiciones de unos puntos de definición que se llaman puntos de control.

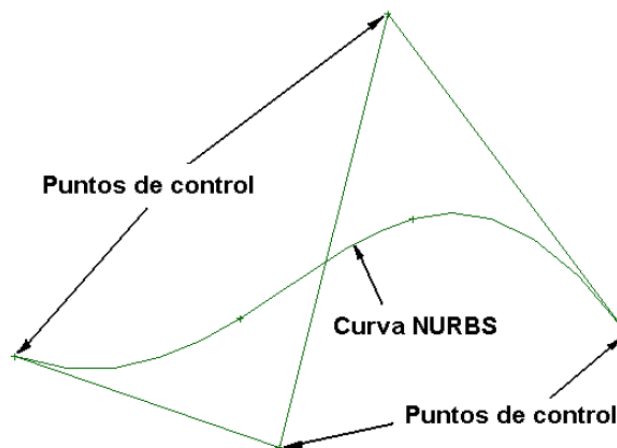


Figura III.20. – Curva NURBS.

El proyectista cambia la forma de la curva moviendo la posición de los puntos de control que la definen. Cuando se mueve uno de esos puntos de control, la curva o superficie en la zona que controla el mismo, es empujada en la dirección del movimiento del punto, como si estuviera unida a él mediante un muelle.

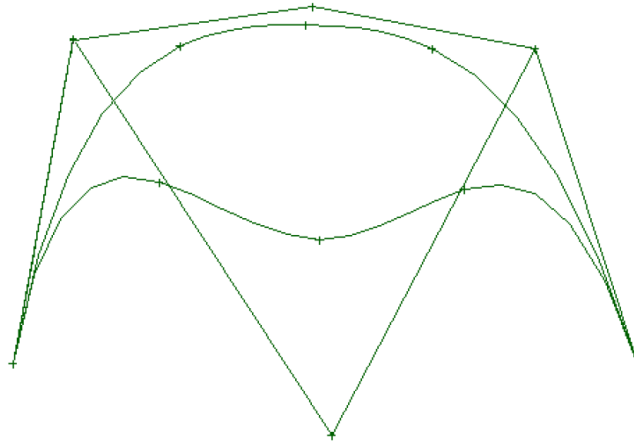


Figura III.21. – Variación de la curva NURBS al mover el punto de control central.

Los puntos de control tienen una influencia local sobre la curva o superficie, lo cual significa que el desplazamiento de cualquier punto de control modifica solamente la zona de la curva o superficie sobre la que tiene influencia, y no la curva o superficie completa. Los puntos de control de una superficie NURBS están dispuestos en forma de malla rectangular con filas y columnas que definen explícitamente la forma de la superficie. El número de puntos de control no tiene que ser igual en cada dirección, es decir el número de filas y de columnas puede ser distinto, y cada punto de control pertenece a una fila y a una columna de la malla.

En el caso de superficies NURBS cúbicas, que son las más utilizadas para el diseño de barcos, cada punto de control influye aproximadamente hasta alrededor de dos puntos contiguos. Sin embargo, ocurre que si la malla es muy densa, el desplazamiento de un punto de control afecta a un área tan pequeña de la superficie, que hace muy difícil el alisado de la misma. Por tanto, es una ventaja trabajar con una malla tan sencilla como sea posible, lo cual es necesario cuando el alisado es el requisito principal.

Una curva o superficie definida por puntos de control es más suave que una curva o superficie a la que se fuerza a pasar por una serie de puntos, pero eso no significa que estén alisadas automáticamente. Se pueden crear curvas y superficies no adecuadas con NURBS. En general, todos los programas de modelización con curvas y superficies NURBS, necesitan una herramienta de alisado.

La utilización de estas superficies para representar formas de barcos presenta las siguientes ventajas:



- Correspondencia automática de todas las líneas de trazado en todas las vistas al ser un modelo 3D.
- Trazado automático de las líneas y obtención de la cartilla de trazado.
- Plantillas muy precisas a escala real.
- Desarrollo de planchas.
- Cálculos hidrostáticos y de estabilidad.
- Renderización en 3D.

Una superficie NURBS define cada milímetro cuadrado de la misma. A efectos de edición, la superficie se representa en la pantalla mediante una malla de tipo rectangular, formada por filas y columnas de puntos de control, que al desplazarse modifican la forma de la superficie. Maxsurf utiliza puntos de control que no pertenecen a la superficie, excepto los cuatro puntos extremos de la malla, y se unen mediante líneas solamente para su mejor visualización, Figura III.22. Si no se unieran los puntos, éstos quedarían sueltos en el espacio, y sería muy difícil saber a qué parte del casco afectan o influyen, especialmente en la vista transversal. Sin embargo, Prosurf utiliza puntos de control que pertenecen todos a la superficie y están unidos entre sí por curvas que también pertenecen a la superficie, Figuras III.24 y III.25. Esto supone una ventaja para realizar el alisado de la superficie al permitir una más fácil manipulación de la misma.

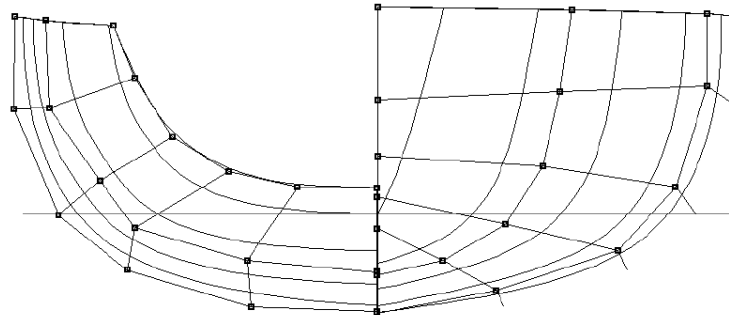


Figura III.22. – Superficie con puntos de control que no pertenecen a la misma y líneas de unión.

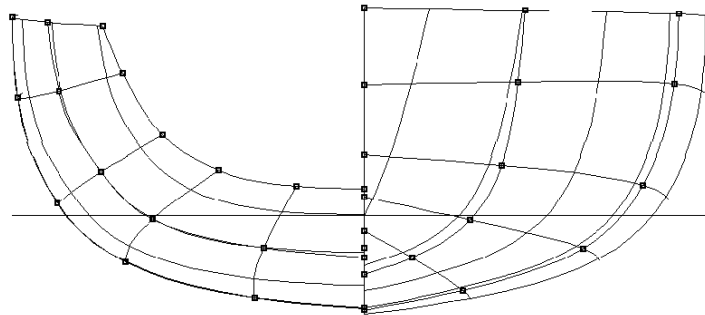


Figura III.23. – Superficie en la que los puntos de control pertenecen a la misma.

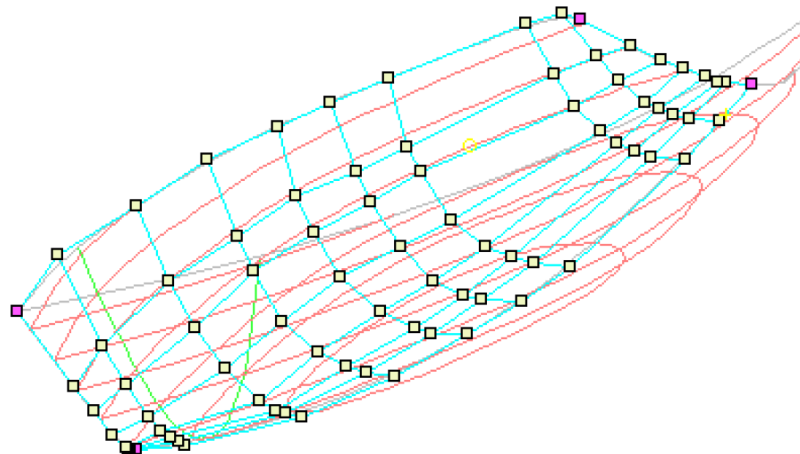


Figura III.24. – Malla de puntos de control que pertenecen a la superficie.

Para poder utilizar superficies NURBS de forma efectiva, es necesario saber que medios se tienen para controlar su forma: los puntos de control, el grado, los pesos y el vector nudo. El proyectista debe tener algún conocimiento de cómo afectan estas variables a la forma de las superficies NURBS. Los programas no dejan modificar normalmente el vector nudo, el cual influye en la definición matemática de las superficies NURBS.

**Grado:** una superficie NURBS se representa matemáticamente por combinación de trozos o parches de funciones polinómicas racionales continuas. El exponente más alto utilizado en el polinomio es el grado de la misma. En las superficies NURBS se puede elegir el grado de la función y el número de puntos de control en cada una de las dos direcciones fila-columna. Cuanto mayor es el grado del polinomio, más flexibilidad tiene la superficie, pero más inflexiones pueden tener. Los



polinomios cúbicos, o de grado tres, son los considerados como los que tienen mejor relación entre flexibilidad y rigidez.

**Valores de pesos de los puntos de control:** aunque los pesos tienen una influencia local sobre la forma de la superficie, puede ser difícil manipular sus valores. La solución normal es intentar obtener la forma de superficie deseada añadiendo y manipulando filas y columnas de puntos de control. Después de haber ajustado prácticamente la forma del casco que se quiere, se pueden cambiar los valores de pesos para obtener efectos locales específicos. La mayor parte de los barcos, sin embargo, pueden definirse sin cambiar los valores del peso de los puntos de control. Únicamente los usuarios experimentados deberían manipular estos valores.



## CAPÍTULO IV

### ALISADO DE FORMAS.

---

#### 4.1. Definición.

De forma general, puede definirse el proceso de alisado como un proceso de suavizado, un proceso corrector de las formas con el objetivo de hacerlas aptas para los procesos posteriores, como el desarrollo de las mismas.

El método práctico manual consiste en levantar ciertas pesas para relajar el junquillo en la zona en la que está forzado y volver a colocarlas en la nueva posición. Esto suaviza y alisa la curva, pero no necesariamente mantiene la forma original. Así pues, este método basa su exactitud en la experiencia personal de quien realiza el alisado.

#### 4.2. Métodos históricos de alisado de formas.

##### 4.2.1. Alisado en gálibos.

Es un método manual de alisado. Su finalidad era tener una base firme sobre la que efectuar el trazado de manera que las distintas partes se pudieran construir con la mayor exactitud. Se ejecutaba reproduciendo un plano de formas a escala natural sobre el piso de la sala de gálibos, dibujándose la caja de cuadernas y las mitades de proa y popa.

La sala donde se realizaba el trabajo tenía que tener, evidentemente, unas dimensiones suficientes para que este dibujo se pudiera trazar sin interrupciones. El piso tenía que ser de madera de gran espesor para permitir cepillados sucesivos cuando lo requiriese la claridad del dibujo, normalmente estaba pintado de negro con el objetivo de facilitar el marcado. La sala debía tener buena iluminación y carecer de



columnas que entorpecieran la continuidad de las líneas y, además, tenía que encontrarse próxima al taller para poder llevar a él, sin grandes recorridos, las plantillas de madera que se generasen.

Las líneas rectas se dibujaban con un cordel impregnado en tiza blanca (líneas inferiores a 5 m) o mediante un alambre de acero situado a cierta altura del suelo refiriéndose a éste su proyección mediante escuadras o niveles verticales o mediante trazados por aparatos ópticos basados en un haz de luz. En el caso de las líneas curvas, se usaban barrotes o junquillos de madera deformable elásticamente, teniendo menor sección en aquellas zonas donde las curvaturas resultaban más pronunciadas, quedando a criterio del trazador el alisado de las formas del buque.

#### **4.2.2. Alisado a escala 1/10.**

Se basa en obtener, de un dibujo a escala 1/10, una cartilla de trazado. Es un método también manual pero más exacto que el anterior, de menor esfuerzo y con menor número de horas de trabajo. Permite además, mediante el uso de clichés realizados sobre un papel transparente e indeformable, la utilización de las máquinas de corte a escala: el mecanismo lector estaba constituido por cabezales provistos de un vástago que siguen el contorno del dibujo existente en el cliché y lo copian en la máquina. Esto ocasionó que se impusiera rápidamente frente al sistema de alisado en gálibos.

A partir de los datos de la cartilla de trazado se ha de construir el plano de formas, que tendrá tres vistas: la caja de cuadernas, las líneas de agua y el alzado del buque y en el que estarán representadas las secciones de trazado, las líneas de agua, las secciones longitudinales y las diagonales.

El proceso de alisado de estas líneas se realiza con el junquillo, procurando que pase de forma forzada por todos los puntos definidos en la cartilla de trazado, ya que de lo contrario habría que pensar que existe un error en el sitio en cuestión. En el caso de puntos con dificultades ante el trazado del junquillo, lo habitual es pasarlo de forma promediada por todos ellos. Hay que tener en cuenta que la rectificación de un punto en una vista, trae consigo modificaciones de los correspondientes en las restantes proyecciones. Una vez armonizados todos los puntos de manera que haya una exacta correspondencia entre las proyecciones, se modifica la cartilla de trazado inicial, si procede.



Las zonas más conflictivas de alisar son las concernientes a los finos de proa y popa y se puede considerar que habiendo logrado el alisado de estas zonas, queda resuelto el de todo el buque.

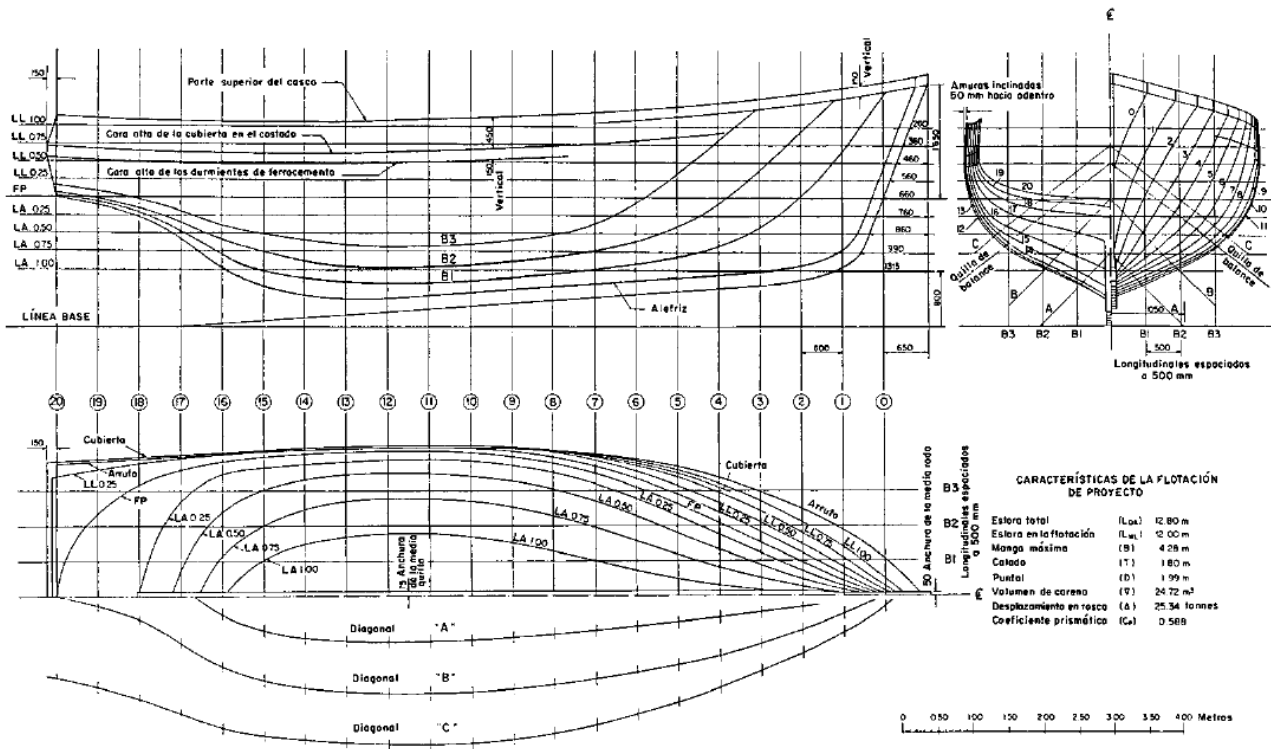


Figura IV.1. – Plano de formas de un buque.

#### 4.2.3. Inconvenientes de los métodos antiguos.

Los principales inconvenientes de estos métodos se exponen a continuación:

- El primero requiere grandes superficies, un equipo costoso y mucha mano de obra.
- El alisado de líneas depende de los criterios del trazador y no de normas absolutas e independientes del operario.
- Los procesos requieren muchas transmisiones de datos que siempre inducen a cometer errores más o menos importantes.
- Su ejecución requiere un tiempo muy dilatado, con el retraso consiguiente en la obtención de las formas definitivas.





- Es difícil de convertir los datos del trazador en formas adecuadas para controlar las máquinas dirigidas electrónicamente. No es adecuado para el control numérico de las actuales máquinas de corte, y han de someterse a otro proceso intermedio para obtener los valores numéricos.

### 4.3. Alisado por métodos numéricos.

El alisado por métodos numéricos es también denominado *fairing* en inglés. Este método se desarrolló gracias al perfeccionamiento y la alta disponibilidad de ordenadores en los astilleros. En este método, la función que representa los valores discretos se desarrolla por aproximaciones de la curvatura, que se define por los puntos que se han dado y que se une por medio de integraciones sucesivas o por el método de mínimos cuadrados, utilizando para ello una función cubica o el ajuste de arcos circulares o parabólicos de manera que el círculo o parábola que representan las curvas pasen por tres puntos consecutivos, siendo el último de los puntos el primero del tramo siguiente.

Los datos que más tarde definirán las formas pueden ser introducidos en el ordenador mediante dos caminos diferentes, así podrán ser utilizados para cálculos de arquitectura naval como para ingeniería de producción. Los datos podrán ser introducidos mediante:

- Partiendo de un plano de formas a escala, o de una cartilla de trazado obtenida midiendo sobre dicho plano como mediante series sistemáticas o directamente de un buque o modelo existente.
- Generando directamente las formas a partir de una serie de parámetros fundamentales de la carena, y obteniendo superficies ya lisas definidas mediante ecuaciones que determinan las coordenadas numéricas de cualquier punto de la superficie.

Para obtener la suavidad de las líneas por medio de algoritmos matemáticos, hay que introducir en ellos criterios objetivos. Al realizar el alisado, inevitablemente se modificarán las formas de la carena inicial, y por ello hay que establecer unos criterios en cuanto a los límites permisibles de alejamiento de los valores del plano de formas original de la carena que se ha ensayado previamente en canal, la cual tendrá unas características determinadas.



La definición de la superficie del casco por métodos matemáticos tiene por objeto obtener con rapidez datos precisos que se puedan utilizar en el proyecto del buque y en su construcción, así como en la aplicación al control numérico de las diferentes máquinas y herramientas, como ya se indicó anteriormente.

Se puede decir que los requisitos exigibles para la correcta definición matemática de las formas con el auxilio del ordenador son:

- Que no introduzca variación alguna en los parámetros esenciales que caracterizan el proyecto ni el comportamiento de la carena.
- La superficie resultante debe satisfacer los criterios de suavidad y alisado.
- Debe lograrse la exactitud y precisión que se exija.
- La superficie del casco se expresa mediante una familia de curvas generadas por ecuaciones matemáticas.

De los programas de alisado por métodos numéricos existentes, se puede destacar el AUTOKON como uno de los de mayor difusión e importancia.

Entre los problemas de este método para la obtención de un casco alisado podemos destacar:

- Se supone que la carilla de trazado o de los datos que definen el casco representarán una superficie perfectamente alisada. Pero este caso es raro, puesto que casi siempre los datos de los que partimos corresponden a superficies que deberán sufrir pequeñas modificaciones para un correcto alisado. Algo que un proceso automático no tiene en cuenta.
- La superficie que resulta de un proceso automático de interpolación es normalmente demasiado densa para permitir una razonable modificación interactiva, pues al interpolar se genera un punto de control por cada punto que se tenga como dato de las formas. Por lo que, si posteriormente se quiere cambiar porque esté incompleta, distorsionada o sin alisar, es imposible modificarla de forma práctica.
- Es muy difícil para los métodos automáticos tratar las discontinuidades que pueden tener las formas de un buque, que se perderán en el proceso.

Por tanto, el uso eficiente de éste método pasa por incluir herramientas de ajuste manual y herramientas de ajuste semiautomático, que permitan corregir las formas suavizadas para conseguir la carena requerida alisada.



El éxito o fallo de los intentos de ajustar las superficies, no está tan determinado por los métodos matemáticos empleados, sino más bien por la habilidad en la preparación de los datos que capturan la topología esencial de la superficie.

#### 4.4. Métodos gráficos iterativos.

Los métodos numéricos citados en el apartado anterior fueron utilizados y tuvieron su época de auge, pero sin embargo han sido sustituidos por la utilización de métodos gráficos interactivos. Entre éstos se pueden destacar dos de ellos:

- Modelos de alambre, mediante la definición matemática de líneas que estructuran el buque.
- Modelos de superficie, utilizando la definición de superficies que, mediante “parches”, permiten “cubrir” toda la carena del barco.

A continuación se analizan cada uno de ellos.

##### 4.4.1. Modelos de alambre.

Representan las formas exteriores del buque como un entramado de líneas. En los modelos de alambre, la definición matemática de las líneas curvas utiliza diferentes procedimientos, entre ellos destacan:

- **La simulación del junquillo.** Utilizan las ecuaciones de la deformada elástica y las líneas obtenidas pasan por todos los puntos que han sido previamente definidos. Requieren la definición adicional de dos puntos exteriores.
- **Bi-arcos.** Utilizan las ecuaciones de dos círculos tangentes entre sí, que también pasan por todos los puntos definidos. Adicionalmente a dichos puntos han de definirse dos tangentes en los extremos.
- **Splines.** Utilizan la ecuación de un polinomio de un cierto grado definido y que pueden pasar o no por todos los puntos definidos. Si pasan o no por los puntos dependerá del tipo de Spline a utilizar.
- **Curvas de Bézier.** Utilizan la ecuación de Bézier, que obtiene líneas tangentes a poligonales de control, cuyos vértices son los puntos definidos, y sólo pasan por los puntos inicial y final.



- **B-Splines.** Utilizan la ecuación de “B-Splines”, que obtiene líneas tangentes a poligonales de control cuyos vértices son los puntos de control. Estas curvas se definen por su grado o su orden y por el número de vértices. Con el grado se controlará la proximidad de la tangente a la poligonal. Las curvas tampoco pasan por ninguno de los puntos de control, excepto el inicial y el final. Las curvas de Bézier son un caso particular de este tipo de curvas.

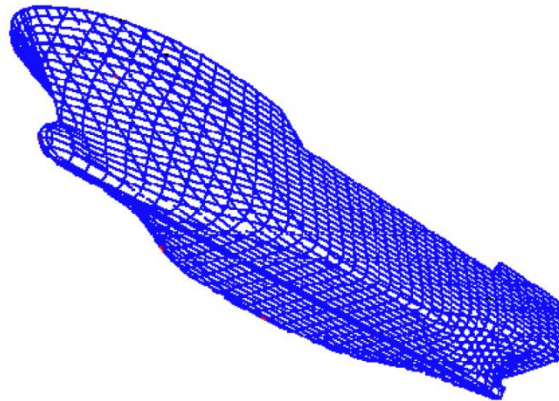


Figura IV.2. – Modelo de alambre de un buque.

En la tabla siguiente se puede apreciar la comparación entre las características más destacables de todos estos procedimientos:

	Junquillo	Bi-arco	Spline	Bézier	B-Spline
Dificultad Cálculo	Baja	Baja	Alta	Media	Media
Deformación Almacenada	Todos los puntos y dos más.	Todos los puntos y dos tangentes.	Todos los puntos.	Puntos polígono.	Puntos polígono y orden.
Calidad del Control	Buena	Buena	Pobre	Pobre	Excelente
Tipo de Control	Puntos dados	Puntos dados y tangente	Puntos dados y tangentes	Nº y vértices del polígono	Nº y vértices del polígono
Dificultad Codillos	Pseudo-Curva	Distintas tangentes.	Partir curva.	Partir curva.	Nuevo polígono.

Tabla IV.1. – Comparación entre los distintos tipos de líneas.



Las herramientas de alisado permiten mover, borrar o añadir puntos, según se considere necesario, y el programa realiza el control de los puntos de inflexión que se puedan producir, así como la creación de una malla densa que permita la visualización de las zonas que no tengan un alisado correcto (por ejemplo, mostrando con diferente coloración la zona afectada), fundamentalmente actuando sobre las diferencias producidas en las derivadas primeras.

Estas herramientas también permiten el manejo de diferentes curvaturas mediante el control de las diferencias segundas y, aunque menos utilizado, también el control de las diferencias terceras.

Sin embargo, ningún método es infalible, y éste también genera algunos problemas. El primero que nos encontramos es que al generar un modelo básico, en ocasiones se encuentra que no resulta éste del todo satisfactorio para su utilización en producción. Cuando se habla de producción se consideran las instrucciones precisas a las máquinas de corte y conformado por ejemplo.

Además, este método no define completamente la superficie del casco. Necesitará simularla mediante interpolación de nuevas líneas entre las que ya se han definido. Esto puede dar lugar a que se definan líneas especiales que no fueran lisas ni precisas. Por último, a día de hoy existen varios caminos para llegar a una solución, es decir, existen diferentes métodos numéricos para obtener las curvas, lo cual puede dar lugar que se obtuvieran coordenadas distintas para un mismo punto.

#### **4.4.2. Modelos de superficie.**

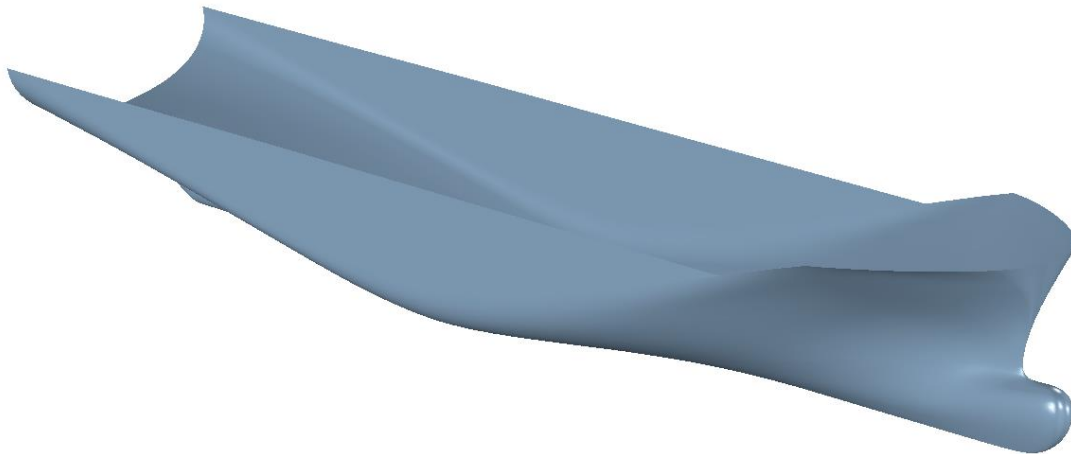
En este método se crea y ajusta una superficie o parche, la cual debe de pasar por una serie de puntos que definirán los puntos por los cuales deberá pasar el casco del buque. Estos puntos iniciales pueden ser definidos mediante refuerzos estructurales del casco como pueden ser puntales u otros elementos tales como los mamparos, saltillos o la curvatura de la cubierta. Las superficies que utilizan los programas de diseño actuales son:

- Superficies de COONS
- Superficies de Bézier.
- B-Splines.
- Superficies NURBS (Non Uniform Rational B-Splines).



Las principales dificultades de estos sistemas se pueden resumir en que su manejo no resulta por el momento demasiado sencillo y requiere un aprendizaje más o menos complejo y prolongado (experiencia). Además, aunque los “parches” se ajustan muy bien a los puntos que definen esa parte de la superficie, el alisado entre parches resulta también complicado y requiere, como en el caso anterior, de una importante experiencia para resolver los problemas que puedan surgir.

Debido a las dificultades mencionadas anteriormente, se están utilizando modelos mixtos, en los que se manejan líneas para introducir la información y para realizar las modificaciones, posteriormente a partir de estas líneas ya definidas se crea un superficie que cubrirá a las mismas.



*Figura IV.3. – Portacontenedores definido por un modelo de superficie.*

#### **4.5. Métodos de comprobación del alisado.**

A la hora de asegurarse de qué formas de una embarcación están perfectamente lisas, no se puede acudir a herramientas como el renderizado. Cuando un usuario mira un casco renderizado y coloreado en la pantalla no puede apreciar lo que realmente se esconde detrás, en la mayoría de los casos un casco que presenta abolladuras.

Una imagen renderizada puede parecer a simple vista lisa, esto es debido a que los programas de diseño procesan las imágenes descomponiéndolas en triángulos y las rutinas de sombreado suavizan los bordes de los triángulos, sin embargo la geometría que realmente presenta una imagen renderizada y de apariencia lisa puede no ser útil para la construcción del buque.



Los programas de diseño CAD, como Rhinoceros, incorporan ciertas herramientas con las cuales es fácil comprobar la calidad del alisado realizado por el usuario, entre ellas encontramos las siguientes:

- La comprobación visual mediante la aplicación de un rayo de luz sobre el casco renderizado o bien mediante un renderizado tipo entorno, donde se aplica una textura metálica sobre la cual es fácil de evaluar la existencia de abolladuras.

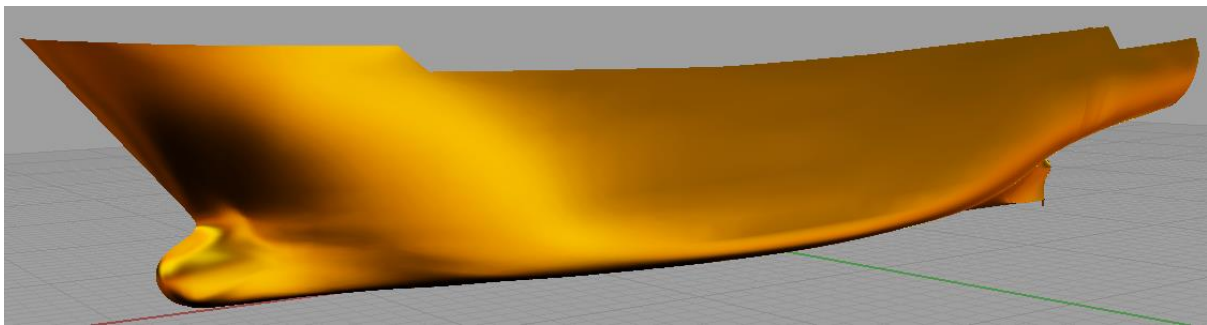


Figura IV.4. – Comprobación visual del alisado mediante renderizado.

- También se puede comprobar el alisado mediante una *superficie del tipo cebra*. Constituye otra opción para comprobar el alisado del modelo. Las regiones con una intensidad de luz reflejada constante se somborean en bandas. Esto es similar a la manera en que el ojo humano detecta puntos discordantes en una superficie, puesto que el brillo y las sombras varían en esas áreas. Si los bordes de las rayas de la cebra se curvan suavemente entonces la superficie es lisa en estas regiones. En las líneas de codillos varían abruptamente.

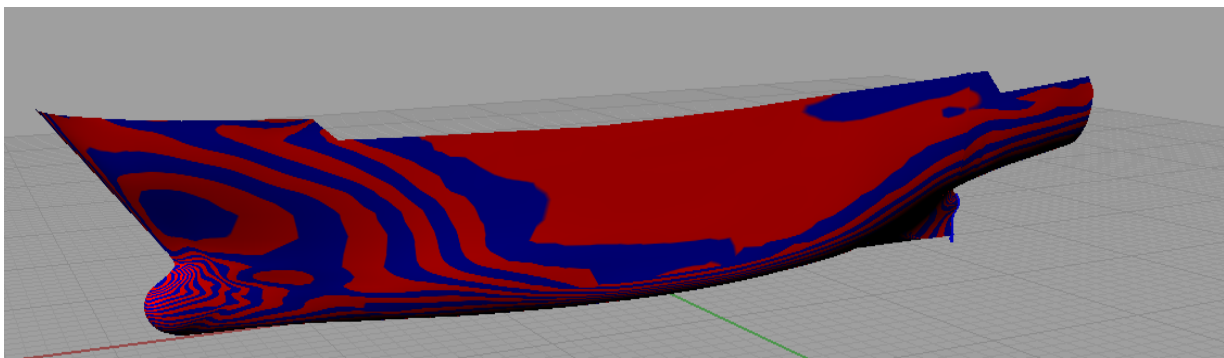
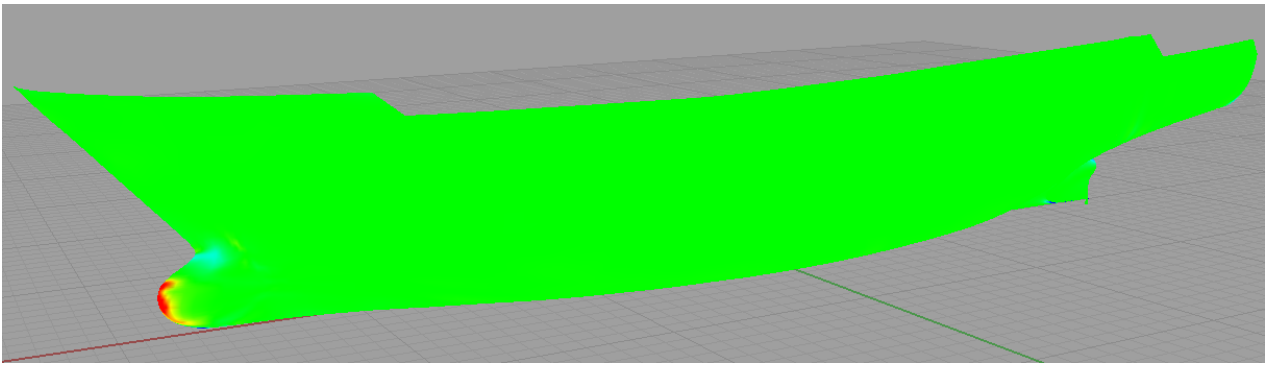


Figura IV.5. – Comprobación del alisado mediante una superficie tipo cebra.



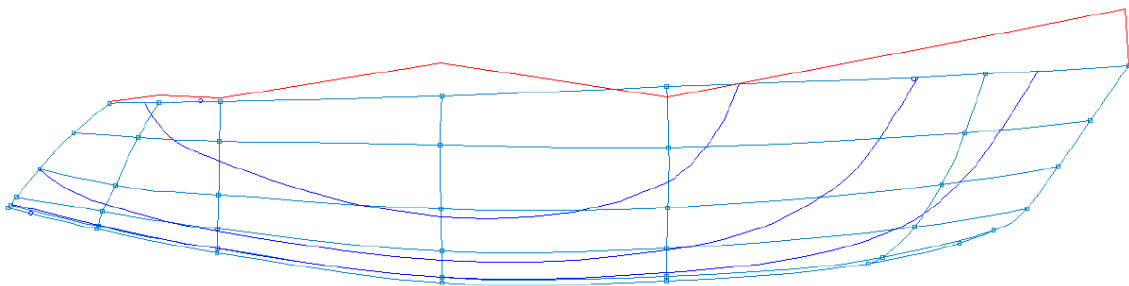
- Análisis de la curvatura. El modelo se sombrea en colores, basados en la Curvatura Gaussiana Discreta en cada punto. Los cascos están curvados en dos direcciones, denominadas curvaturas principales. La Curvatura Gaussiana es el producto de esas dos curvaturas principales.



*Figura IV.6. – Comprobación del alisado mediante la Curvatura Gaussiana.*

- Comprobación la curvatura mediante curvas de control. Estas curvas pueden ser definidas como el índice de cambio (en un punto) del ángulo entre una curva y la tangente a la curva. Si el trazado de curvaturas se usa e interpreta correctamente es posible producir un alisado perfecto de la superficie.

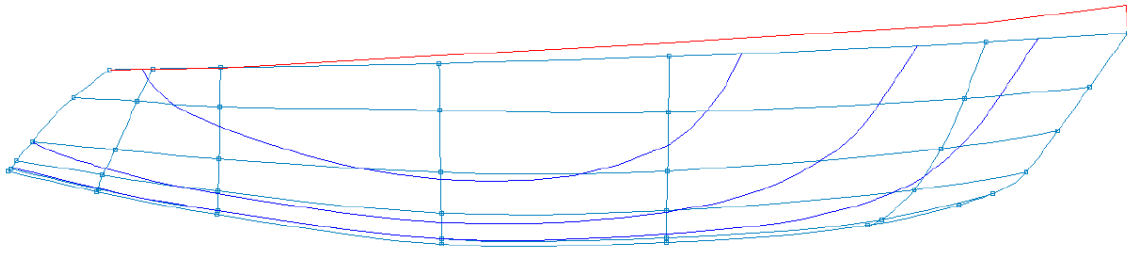
En la Figura IV.7. se muestra un ejemplo de curva de control de un yate a vela en la cual se aprecia claramente un alisado deficiente de la cubierta.



*Figura IV.7. – Comprobación del alisado mediante la curvas de control – Cubierta no alisada.*

En la Figura IV.8. se muestra el mismo yate una vez sometida su cubierta a un proceso de alisado. Se observa como la curvatura cambia gradualmente ahora y que la curva es mucho más suave.





*Figura IV.8. – Comprobación del alisado mediante la curvas de control – Cubierta alisada.*



## CAPÍTULO V

### SPLINES ([11]).

---

En la práctica las formas de las curvas y superficies son tan complejas que no siempre pueden ser expresadas analíticamente como un todo en términos de funciones elementales. Por eso, es necesario construirlas a partir de fragmentos suaves relativamente simples: arcos de curvas o elementos de superficie, cada uno de los cuales puede ser descrito con ayuda de funciones elementales. De este modo cada fragmento será suave, pero se tendrá que prestar mucha atención para que mantengan esa suavidad en las zonas de empalme entre fragmentos.

Para que la tangente a lo largo de toda la curva compuesta sea suave, es suficiente utilizar polinomios de tercer grado para la construcción de los fragmentos de curvas. El uso de polinomios de grados más altos puede generar oscilaciones indeseadas en la curva resultante. Los coeficientes de los polinomios deberán ser elegidos de modo que la curvatura de la curva sea continua.

Los Splines cúbicos de problemas unidimensionales pueden ser acondicionados para la construcción de fragmentos de superficie; surgiendo entonces, y de manera natural, los Splines bicúbicos. Éstos, son descritos mediante polinomios de tercer grado respecto a cada una de las dos variables.

El proceso con dos dimensiones requiere mayor volumen de cálculos, pero gracias a la técnica computacional, se pueden llevar a cabo obteniendo buenos resultados.



### 5.1. Definición de la función Spline.

Suponiendo que en un segmento  $[a,b]$  está dado un retículo:

$$w: a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b.$$

Los puntos  $x_1$  y  $x_m$  se llaman nodos fronterizos del retículo  $w$ , y los puntos  $x_2, \dots, x_{m-1}$  son nodos interiores.

Una función  $S(x)$ , definida en el segmento  $[a,b]$ , se llamará Spline de orden  $p+1$  (de grado  $p$ ) si:

1. En todo segmento

$$\Delta_i = [x_i, x_{i+1}] \quad \forall i = 1, \dots, m-1.$$

Es un polinomio de grado menor o igual que  $p$ :

$$S(x) = S_i(x) = \sum_{k=0}^p a_k^{(i)} (x - t_i)^k \quad \forall i = 1, \dots, m-1.$$

En todo el segmento, el Spline es un polinomio de grado  $p$  con  $p+1$  coeficientes. En total se tienen  $(m-1)$  segmentos parciales. Consecuentemente, para determinar completamente el Spline es necesario hallar  $(m-1) \cdot (p+1)$  números.

2. Es  $(p-1)$  veces diferenciable con continuidad en el segmento  $[a,b]$ :

$$S(x) \in C^{p-1} [a, b].$$

Esta condición implica la continuidad de la función  $S(x)$  y sus derivadas  $S'(x)$ ,  $S''(x), \dots, S^{p-1}(x)$  en todos los  $m-2$  nodos interiores del retículo  $w$ . Por tanto, para hallar los coeficientes de todos los polinomios se dispone de  $p \cdot (m-2)$  condiciones.

Para determinar completamente el Spline faltarían  $(p+1) \cdot (m-1) - p \cdot (m-2) = m+p-1$  condiciones, las cuales dependerán del carácter del problema analizado.



## 5.2. Aplicaciones de los Splines.

Se proporcionan un conjunto de puntos conocidos, que serán una serie de coordenadas, los cuales se denominarán puntos de control. Estos puntos de control son los que servirán de directrices y con los que después se ajustarán las funciones polinómicas continuas mediante una de las siguientes formas:

1. La curva realiza interpolación del conjunto de puntos de control cuando las secciones polinómicas se ajustan de modo que la curva pasa a través de cada punto de control  $(x_i, y_i) \forall i = 1, \dots, m$ ; lo que proporciona  $m$  condiciones. Las restantes  $p-1$  ecuaciones para la construcción del Spline mediante interpolación serán los valores de las derivadas menores del Spline en los extremos del segmento analizado: condiciones de contorno o de frontera.
2. La curva realiza una aproximación o suavizamiento al conjunto de puntos de control cuando los polinomios se ajustan a la trayectoria general del punto de control sin pasar necesariamente a través de ninguno de ellos. La medida de esta cercanía se puede definir de diferentes maneras, lo que genera una gran variedad de *Splines Suavizantes*.

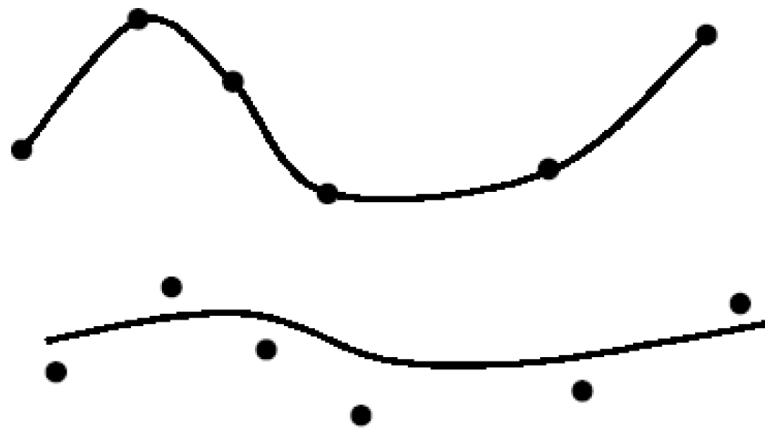


Figura V.1. – Comparación de curva que realiza interpolación (superior) y curva que realiza un suavizamiento (inferior).

Una curva Spline se define y se modifica con operaciones sobre sus puntos de control. Los programas de diseño CAD, además podrán insertar puntos de control adicionales para ayudar al diseñador en el modelado y alisado.

El problema de suavizamiento que se resuelve en el Capítulo VI consistirá en la obtención de una función suave a partir de sus valores en ciertos puntos. Está claro



que este problema tiene infinitas soluciones diferentes. Imponiendo sobre la función condiciones adicionales, se podrá lograr la univocidad.

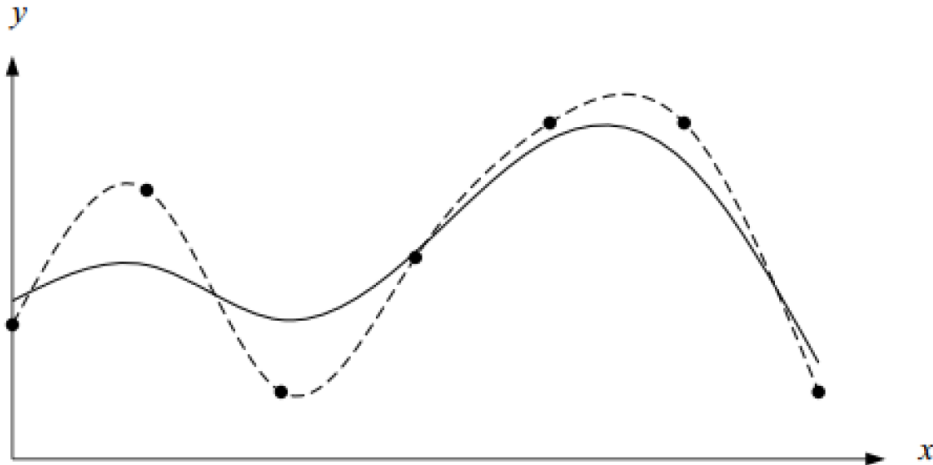


Figura V.2. – Comparación entre Spline Interpolante (discontinuo) y Spline Suavizante (continuo).

### 5.3. Splines en el dibujo naval manual.

Cuando los arquitectos navales desean dibujar manualmente curvas bidimensionales suaves, hacen uso de junquillos (“Splines” en inglés) flexibles. Fijando los extremos de los mismos y aplicando una carga en uno o más puntos intermedios a lo largo del junquillo, éste se deforma según una curva que se puede trazar sobre un plano. La suavidad de la curva dependerá de la flexibilidad del junquillo y de la posición exacta de los puntos de control, pero sólo con seguir unas pocas reglas sencillas la curvatura resultante será suave.

Al principio el junquillo yacerá recto sobre el tablero de dibujo

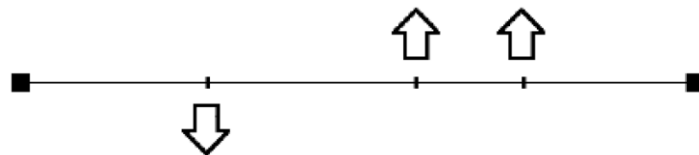


Figura V.3. – Junquillo no traccionado.



Al traccionar el junquillo por un determinado número de puntos ayudándonos de unos plomos, su flexibilidad natural dará como resultado una curva suave usada para dibujar.

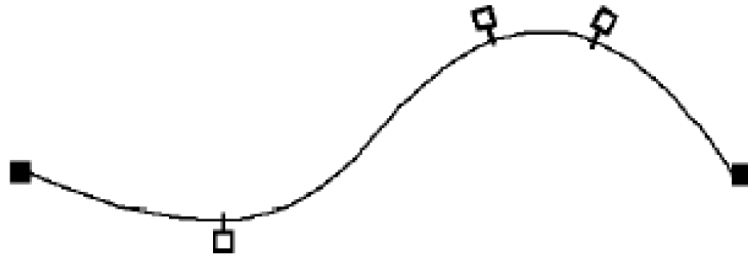


Figura V.4. – Junquillo traccionado.

Técnicamente se puede describir un Spline considerando una regla flexible idealmente fina, la cual pasa por los puntos de control (plomos o apoyos)  $(x_i, y_i) \forall i = 1, \dots, m$ ; del arreglo dispuestos en el plano  $(x, y)$ . De acuerdo con la ley de Bernoulli-Euler, la ecuación linealizada de la regla encorvada es:  $EIS'' = M(x)$  donde  $S(x)$  es la flexión,  $M(x)$  es el momento flector, que varía linealmente de apoyo en apoyo, y  $EI$  es la rigidez de la regla. La función  $S(x)$  que describe la forma de la regla es un polinomio de tercer grado entre cada dos puntos vecinos del arreglo, y es dos veces diferenciable con continuidad en el intervalo  $[a, b]$ .

Con un procedimiento similar al de los junquillos se puede utilizar la ecuación matemática que define las curvas Spline, que como en ellos, define la curva en función de la posición de sus puntos extremos, la posición y el número de puntos de control a lo largo de la curva y la flexibilidad del junquillo.

En los *Splines Cúbicos Interpolantes* los puntos de control coinciden con los puntos por donde ha de pasar la curva. En cambio, en los *Splines Cúbicos Suavizantes* los puntos de control atraen la curva hacia si con unos coeficientes denominados *pesos*. Esto significa que, en vez de por una fila de plomos apoyados a lo largo del junquillo, los *Splines Cúbicos Suavizantes* se conforman mediante los puntos de control que se podrían considerar fijados al junquillo mediante muelles. Cuando los puntos de control se mueven, la flexibilidad propia del junquillo y de los muelles se combina para mantener la curva suave.

Una consecuencia evidente de esto es que los puntos de control no se hallan sobre la curva creada, sino que la curva es atraída hacia la posición de los puntos de control, y entonces los puntos por los que ha de pasar la curva sólo coinciden con los



puntos de control en los extremos. Esto es por lo que, a la hora de alisar las curvas en el dibujo naval asistido por ordenador, puede costar un poco más entender cómo se han de variar la posición de los puntos de control para obtener el movimiento de la curva deseado, siendo en ocasiones el movimiento de un punto de control un poco más alejado de la zona a modificar el que logra la forma que deseamos. Por ello, aunque actualmente se tenga la ayuda de un programa informático, el alisado naval tiene ciertas componentes que dificultan su realización a los principiantes, siendo necesaria la experiencia y en cierto modo el arte del arquitecto naval veterano.

De este modo un junquillo originalmente recto se arrastra a su nueva forma desde un número determinado de puntos.

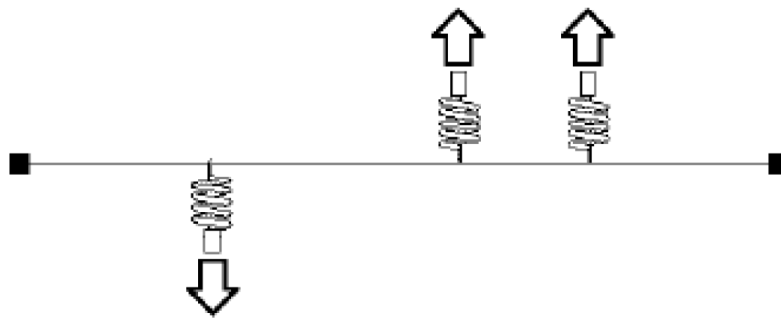


Figura V.5. – Junquillo controlado por muelles.

La curva resultante es suave con sólo los dos puntos de control de los extremos situados sobre la curva.

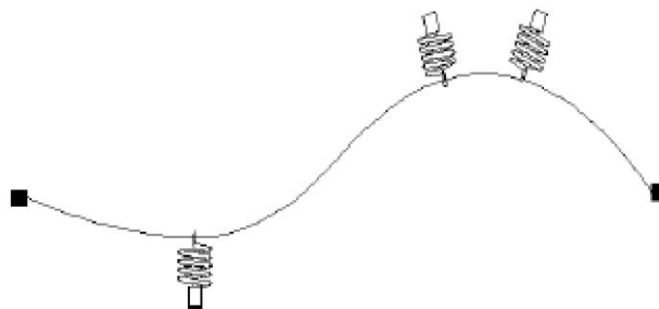


Figura V.6. – Junquillo traccionado por muelles.

Moviendo los puntos de control a una u otra posición, es posible curvar el junquillo hasta una forma dada. La curvatura del junquillo estaría libre de



irregularidades debido a la elasticidad de los muelles y la flexibilidad del propio junquillo. Así se ve la importancia de poner el menor número de puntos de control posibles, ya que a mayor número de puntos, mayor número de inflexiones y posibles cambios bruscos.

Con esta analogía, se ha podido entender de forma básica los Splines cúbicos interpolantes, así como sus diferencias con los suavizantes.

Aunque únicamente se está exponiendo la explicación con dos dimensiones, los programas informáticos usan un procedimiento análogo para generar sus curvas en tres dimensiones, siendo capaces de generar superficies a partir de éstas. Del mismo modo que una fila de puntos de control bidimensionales puede definir una curva bidimensional, una red de puntos de control tridimensionales puede definir una superficie tridimensional completa.

Si se considera una malla tridimensional de puntos de control, es posible imaginar las curvas situadas a lo largo y a lo ancho de la red, definiendo así una superficie.

La malla se forma por filas y columnas de puntos de control, con cuatro bordes y cuatro esquinas. Se pueden utilizar más o menos número de filas y columnas dependiendo de la complejidad de la superficie deseada. Dicha superficie puede tener diferente flexibilidad en cada una de las direcciones de filas o columnas.

El efecto que un punto de control tiene sobre la superficie depende principalmente de si se halla en una esquina, en un borde o en el interior de la malla.

- Las esquinas de una superficie se definen exactamente por la posición de la esquina correspondiente de la malla.
- Los bordes se definen sólo por los puntos de control del borde correspondiente de la malla.
- Los puntos internos de la superficie pueden estar influidos por la posición de un gran número o incluso de todos los puntos de control de la malla.





## CAPÍTULO VI

### SPLINES CÚBICOS SUAVIZANTES ([11]).

---

#### 6.1. Problema de suavización.

Se considera el retículo:

$$w: a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b.$$

y la colección de números:

$$y_1, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m.$$

Puede suceder que los valores  $y_i$  en el arreglo  $(x_i, y_i) \forall i = 1, \dots, m$  contengan cierto error. Esto significa que para todo  $i = 0, 1, \dots, m$  existe un intervalo  $(c_{i-\delta}, d_{i-\delta})$  tal que cualquier número perteneciente a él puede ser tomado como valor de  $y_i$ . Los valores de  $y_i$  pueden ser, por ejemplo, los resultados (que contienen un error aleatorio) de las mediciones de una cierta función  $y(x)$  para los valores dados de la variable  $x$ . No es conveniente utilizar interpolación para construir la función  $y(x)$  a partir de estos valores experimentales, por cuanto la función interpolante reproducirá las oscilaciones condicionadas por la componente aleatoria en el arreglo,  $z_i$ .

En este caso es más apropiado el método de suavización, uno de cuyos objetivos es disminuir la aleatoriedad en el resultado de las mediciones. Habitualmente, en tales problemas se pide hallar una función cuyos valores para  $x = x_i, i = 1, 2, \dots, m$ , pertenezcan a los intervalos correspondientes y que tenga además, propiedades bastante buenas como son por ejemplo, primera y segunda derivada continuas, que su gráfico no tenga oscilaciones pronunciadas, etcétera.



## 6.2. Splines Cúbicos Suavizantes. Definición.

Se considera el retículo:

$$w: a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b.$$

y la colección de números:

$$y_1, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m.$$

Se denomina Spline Cúbico Suavizante en un retículo  $w$  a una función  $S(x)$  que:

1. En todo el intervalo

$$[x_i, x_{i+1}] \quad \forall i = 1, \dots, m-1.$$

Es un polinomio de tercer grado.

$$S(x) = S_i(x) = a_0^i + a_1^i \cdot (x - x_i) + a_2^i \cdot (x - x_i)^2 + a_3^i \cdot (x - x_i)^3. \quad \text{EC.(VI.1)}$$

En todo el intervalo, el Spline es un polinomio de tercer grado que se define mediante cuatro coeficientes. En total hay  $(m - 1)$  intervalos, por lo que, para definir completamente el Spline es necesario hallar  $4 \cdot (m - 1)$  números:

$$a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i \quad \forall i = 1, \dots, m-1.$$

2. Es dos veces diferenciable con continuidad en el intervalo  $[a, b]$ , es decir, pertenece a la clase  $C^2[a, b]$ .

Esta condición significa continuidad de la función  $S(x)$  y de sus derivadas  $S'(x)$  y  $S''(x)$  en todos los nodos internos del retículo  $w$ . Como el número de nodos internos es  $m - 2$ , entonces se tienen  $3 \cdot (m - 2)$  condiciones.

3. En ella alcanza su mínimo el funcional:

$$J(f) = \int_a^b (f''(x))^2 dx + \sum_{i=0}^m \frac{1}{\rho_i} \cdot (f(x_i) - y_i)^2. \quad \text{EC.(VI.2)}$$

Donde  $y_i$  y  $\rho_i > 0$  son números dados. A los números  $\rho_i$  se les denomina pesos y son se tratarán detalladamente en el Capítulo VIII.



4. Satisface condiciones de contorno de uno de los tres tipos que se detallan en el siguiente apartado.

### 6.3. Condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno se dan en forma de restricciones sobre los valores del Spline y de sus derivadas en todos los nodos fronterizos del retículo  $w$ .

1. Condiciones de contorno de primero tipo.

Las primeras derivadas de  $S(x)$  son conocidas en los extremos del intervalo  $[a,b]$ :

$$S'(a) = z'_1 \text{ y } S'(b) = z'_m. \quad \text{EC.(VI.3)}$$

2. Condiciones de contorno de segundo tipo.

Las segundas derivadas de  $S(x)$  son conocidas en los extremos del intervalo  $[a,b]$ :

$$S''(a) = z''_1 \text{ y } S''(b) = z''_m. \quad \text{EC.(VI.4)}$$

3. Condiciones de contorno de tercer tipo.

$$S(a) = S(b), \quad S'(a) = S'(b), \quad S''(a) = S''(b). \quad \text{EC.(VI.5)}$$

Estas condiciones se denominan periódicas.

**Teorema:** *El Spline Cúbico  $S(x)$  que minimiza el funcional y satisface las condiciones de contorno de uno de los tres tipos indicados está definido unívocamente.*

### 6.4. Elección de las condiciones de contorno.

La elección de las condiciones de contorno es uno de los problemas principales en los problemas de interpolación y aproximación mediante Splines, y adquiere una importancia especial cuando es necesario garantizar una precisión alta en las proximidades de los extremos del intervalo  $[a,b]$ .

El efecto sobre la función Spline en función de las condiciones de contorno elegidas disminuirá conforme se esté más cerca de los puntos intermedios a interpolar, sin embargo, nuestra función dependerá en los extremos en gran medida de las



condiciones elegidas. La elección de las condiciones de contorno depende, a menudo, de la existencia de datos adicionales sobre el comportamiento de la función Spline.

Si se conocen los valores de la primera derivada  $f'(x)$  en los extremos del intervalo  $[a,b]$ , es decir, si se conoce la dirección de la tangente de la curva en los extremos; entonces se utilizarán las condiciones de contorno de primer tipo.

Si por el contrario, lo que se conocen son los valores de la segunda derivada  $f''(x)$ , se utilizarán las condiciones de contorno de segundo tipo.

Si existe la posibilidad de elegir entre condiciones de primer y segundo tipo, se dará preferencia a las primeras.

Si la función fuera periódica, se deben elegir condiciones de contorno de tercer tipo.

En caso de no existir información adicional sobre el comportamiento de la función, se pueden utilizar las condiciones naturales de contorno:

$$S''(a) = 0 \text{ y } S''(b) = 0.$$

Con estas condiciones la precisión en la aproximación puede disminuir bruscamente cerca de los extremos del intervalo  $[a,b]$ .

Otra opción es utilizar las condiciones de contorno de primer o segundo tipo con valores aproximados; esto quiere decir que se tomarán sus aproximaciones en diferencias en vez de los valores exactos de sus derivadas.

### 6.5. Construcción de la función Spline.

En cada intervalo  $[x_i, x_{i+1}] \forall i = 1, \dots, m - 1$ , se busca un polinomio de grado tres que satisfaga:

$$S_i(x_i) = z_i, \quad S_i(x_{i+1}) = z_{i+1},$$

$$S_i''(x_i) = \eta_i, \quad S_i''(x_{i+1}) = \eta_{i+1}.$$

Se requiere también una condición de continuidad en la primera derivada, pero ésta se impondrá posteriormente.



La siguiente expresión proporciona un polinomio de grado tres que satisface las condiciones anteriormente mencionadas:

$$S(x) = S_i(x) = z_i(1 - t) + z_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6}t(1 - t)[(2 - t)\eta_i + (1 + t)\eta_{i+1}]. \quad \text{EC.(VI.6)}$$

Como comprobación, se parte de que la derivada segunda de un polinomio de grado tres es un polinomio de grado uno, y en este caso ha de satisfacer :

$$S_i''(x_i) = \eta_i, \quad S_i''(x_{i+1}) = \eta_{i+1}.$$

Así, si se considera que:

$$t = \frac{1}{h_i}(x - x_i),$$

$$x_{i+1} = x_i + h_i.$$

La derivada segunda del polinomio es:

$$S_i''(t) = (1 - t)\eta_i + t\eta_{i+1}.$$

Si se integra esta expresión, teniendo en cuenta el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{h_i}(x - x_i),$$

$$dx = h_i dt.$$

Se obtiene:

$$S_i(x) = \int S_i'(x) dx = \int S_i'(t) h_i dt = \frac{h_i}{2} \int (-\eta_i(1 - t)^2 + t^2 \eta_{i+1}) dt + h_i t C + D,$$

$$S_i(x) = \frac{h_i^2}{6} [(1 - t)^3 \eta_i + t^3 \eta_{i+1}] + h_i t C + D. \quad \text{EC.(VI.7)}$$

Para las condiciones establecidas, debe ser:

$$\begin{aligned} x = x_i &\rightarrow S_i(x_i) = z_i, \quad \text{con } t = 0. \\ x = x_{i+1} &\rightarrow S_i(x_{i+1}) = z_{i+1}, \quad \text{con } t = 1. \end{aligned}$$



$$\frac{h_i^2}{6} [\eta_i] + D = z_i \rightarrow D = z_i - \frac{h_i^2}{6} [\eta_i].$$

Al sustituir el valor de la constante de integración, D:

$$\frac{h_i^2}{6} [\eta_{i+1}] + h_i C + D = z_{i+1} \rightarrow h_i C = z_{i+1} - \frac{h_i^2}{6} [\eta_{i+1}] + z_i - \frac{h_i^2}{6} [\eta_i].$$

Por lo que se puede despejar el valor de la otra constante de integración, C:

$$C = \frac{z_{i+1} + z_i}{h_i} + \frac{h_i}{6} (\eta_i - \eta_{i+1}).$$

Sustituyendo los valores de ambas constantes de integración en la EC.(VI.7), el polinomio se escribe de la siguiente forma:

$$S_i(x) = \frac{h_i^2}{6} [(1-t)^3 \eta_i + t^3 \eta_{i+1}] + (z_{i+1} - z_i)t + \frac{h_i^2}{6} (\eta_i - \eta_{i+1})t + z_i - \frac{h_i^2}{6} \eta_i. \quad \text{EC.(VI.8)}$$

Simplificando términos en la EC.(VI.8), se escribe la ecuación que define el Spline Cúbico Suavizante:

$$S(x) = S_i(x) = z_i(1-t) + z_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6} t(1-t)[(2-t)\eta_i + (1+t)\eta_{i+1}]. \quad \text{EC.(VI.9)}$$



## CAPÍTULO VII

### RECONSTRUCCIÓN PPH.

---

En este capítulo, basado en las referencias bibliográficas [1], [2], [3] y [4], se describe un esquema de interpolación no lineal de cuarto orden dependiente de los datos, el cual está basado en una interpolación a trozos polinomial denominada PPH (*Piecewise Polynomial Harmonic*). Esta técnica de interpolación no lineal conduce a un operador de reconstrucción con varias características deseables. En primer lugar, cada parte está construida con un stencil fijo centrado de cuatro puntos. Segundo, la reconstrucción es tan exacta como su equivalente lineal en las regiones suaves. En tercer lugar, la exactitud se reduce cerca de las singularidades, pero no se pierde completamente como ocurre en su contraparte lineal.

#### 7.1. Reconstrucción PPH.

Se define un mallado de la siguiente forma:

$$X^k = \{x_j^k\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad x_j^k = jh_k, \quad h_k = 2^{-k},$$

donde los valores de los puntos son:

$$f^k = (f_j^k)_{j \in \mathbb{Z}} = (f(x_j^k))_{j \in \mathbb{Z}}.$$

A continuación se describe el operador de reconstrucción PPH, el cual se denotará como  $\mathcal{R}_k(x, f^k)$ . Dado  $x \in \mathbb{R}$ , se tomará  $j$  tal que

$$x \in [x_j^k, x_{j+1}^k].$$

Entonces  $\mathcal{R}_k(x, f^k)(x) = \tilde{P}_k(x, f^k)$ , donde  $\tilde{P}_k(x, f^k)$  es un polinomio construido a partir de los datos centrados  $(x_{j-1}^k, f_{j-1}^k)$ ,  $(x_j^k, f_j^k)$ ,  $(x_{j+1}^k, f_{j+1}^k)$  y  $(x_{j+2}^k, f_{j+2}^k)$  y se



denotará  $\tilde{P}_j(x) = \tilde{P}_j(x_j, f^k)$ . De aquí en adelante se suprimirá el superíndice  $k$  para una mayor claridad en la notación.

Para definir  $\tilde{P}_j(x)$  primero se considera el polinomio interpolante de Lagrange centrado de grado tres,  $P_j(x)$ , definido por las siguientes condiciones de interpolación:

$$P_j(x_m) = f_m, \quad j-1 \leq m \leq j+2. \quad \text{EC.(VII.1)}$$

Se puede escribir  $P_j(x)$  como:

$$P_j(x) = a_0 + a_1 \left(x - x_{j+\frac{1}{2}}\right) + a_2 \left(x - x_{j+\frac{1}{2}}\right)^2 + a_3 \left(x - x_{j+\frac{1}{2}}\right)^3, \quad \text{EC.(VII.2)}$$

donde:

$$x_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}).$$

Para un esquema lineal centrado, las cuatro condiciones de interpolación en los puntos  $x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}$  son:

$$a_0 - a_1 \frac{3}{2}h + a_2 \left(\frac{3}{2}h\right)^2 - a_3 \left(\frac{3}{2}h\right)^3 = f_{j-1}, \quad \text{EC.(VII.3)}$$

$$a_0 - a_1 \frac{1}{2}h + a_2 \left(\frac{1}{2}h\right)^2 - a_3 \left(\frac{1}{2}h\right)^3 = f_j, \quad \text{EC.(VII.4)}$$

$$a_0 + a_1 \frac{1}{2}h + a_2 \left(\frac{1}{2}h\right)^2 + a_3 \left(\frac{1}{2}h\right)^3 = f_{j+1}, \quad \text{EC.(VII.5)}$$

$$a_0 + a_1 \frac{3}{2}h + a_2 \left(\frac{3}{2}h\right)^2 + a_3 \left(\frac{3}{2}h\right)^3 = f_{j+2}. \quad \text{EC.(VII.6)}$$

Es fácil comprobar que:

$$a_0 = \frac{f_{j-1} - 9f_j - 9f_{j+1} + f_{j+2}}{16}, \quad \text{EC.(VII.7)}$$

$$a_1 = \frac{f_{j-1} - 27f_j + 27f_{j+1} - f_{j+2}}{24h}, \quad \text{EC.(VII.8)}$$

$$a_2 = \frac{f_{j-1} - f_j - f_{j+1} + f_{j+2}}{4h^2}, \quad \text{EC.(VII.9)}$$

$$a_3 = \frac{f_{j-1} - 3f_j + 3f_{j+1} - f_{j+2}}{6h^3}. \quad \text{EC.(VII.10)}$$





Se introducen las diferencias divididas definidas por:

$$e_{j-\frac{1}{2}} = f[x_{j-1}, x_j], \quad e_{j+\frac{1}{2}} = f[x_j, x_{j+1}], \quad e_{j+\frac{3}{2}} = f[x_{j+1}, x_{j+2}],$$

$$D_j = f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}], \quad D_{j+1} = f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}].$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas se llega a:

$$a_1 = \frac{-e_{j-\frac{3}{2}} + 13e_{j-\frac{1}{2}}}{12} - \frac{1}{6} \frac{D_j + D_{j+1}}{2} h. \quad \text{EC.(VII.11)}$$

Para una función suave,  $e_{j-\frac{1}{2}} = O(1)$ ,  $e_{j+\frac{1}{2}} = O(1)$ ,  $D_j = O(1)$  y  $D_{j+1} = O(1)$ , lo cual implica que  $a_1 = O(1)$ .

Si se supone que existe una discontinuidad en  $[x_{j+1}, x_{j+2}]$ , entonces  $D_{j+1} = O\left(\frac{1}{h^2}\right)$  y  $D_j = O(1)$ . Por tanto se obtendría que  $a_1 = O\left(\frac{1}{h}\right)$  como consecuencia de dicha discontinuidad.

Se propone entonces, reemplazar la expresión de  $a_1$  dada por la EC.(VII.11) por:

$$\tilde{a}_1 = \frac{-e_{j-\frac{3}{2}} + 13e_{j-\frac{1}{2}}}{12} - \frac{1}{6} \tilde{D} h, \quad \text{EC.(VII.12)}$$

donde

$$\tilde{D}_j^k = \begin{cases} \frac{2D_j D_{j+1}}{D_j + D_{j+1}} & \text{si } D_j D_{j+1} > 0, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad \text{EC.(VII.13)}$$

Debido al hecho de que

$$\left| \frac{2D_{j-1} D_j}{D_{j-1} + D_j} \right| \leq 2 \min(|D_{j-1}|, |D_j|) = O(1), \quad \text{EC.(VII.14)}$$

se obtiene que  $\tilde{D} = O(1)$  y por lo tanto  $\tilde{a}_1 = O(1)$  en vez de  $O\left(\frac{1}{h}\right)$  como en el caso de Lagrange.

Con esto, se considera ahora la siguiente expresión:



$$\tilde{P}_j(x) = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 \left(x - x_{j+\frac{1}{2}}\right) + \tilde{\alpha}_2 \left(x - x_{j+\frac{1}{2}}\right)^2 + \tilde{\alpha}_3 \left(x - x_{j+\frac{1}{2}}\right)^3, \quad \text{EC.(VII.15)}$$

donde el coeficiente  $\tilde{\alpha}_1$  viene dado por las EC.(VII.12) y EC.(VII.13), y los coeficientes  $\tilde{\alpha}_0$ ,  $\tilde{\alpha}_2$  y  $\tilde{\alpha}_3$  se determinan mediante la imposición de las condiciones de interpolación siguientes:

$$\tilde{P}_j(x_m) = f_m, \quad j-1 \leq m \leq j+1. \quad \text{EC.(VII.16)}$$

Es fácil comprobar entonces que

$$\tilde{P}_j \left(x_{j+\frac{1}{2}}\right) = \frac{f_j + f_{j+1}}{2} - \frac{1}{4} \tilde{D} h^2. \quad \text{EC.(VII.17)}$$

Resulta interesante comparar esta expresión con la expresión equivalente obtenida mediante la interpolación de Lagrange:

$$P_j \left(x_{j+\frac{1}{2}}\right) = \frac{f_j + f_{j+1}}{2} - \frac{1}{4} \frac{D_j + D_{j+1}}{2} h^2. \quad \text{EC.(VII.18)}$$

Comparando la EC.(VII.11) con la EC.(VII.12) y la EC.(VII.17) con la EC.(VII.18) que el efecto neto es el reemplazamiento de la media aritmética de  $D_j$  y  $D_{j+1}$  por la media armónica “modificada”  $\tilde{D}$  expuesta en la EC.(VII.12). La media aritmética y la media armónica tienen valores muy similares para valores de la misma magnitud, pero la media armónica está acotada en valor absoluto por dos veces el mínimo de los dos números. Esta propiedad es la clave del comportamiento de la reconstrucción PPH cerca de discontinuidades aisladas.

El análisis que se acaba de realizar permite definir la reconstrucción PPH en el intervalo  $[x_j, x_{j+1}]$ . Si  $|f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]| \geq |f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]|$ , entonces  $\tilde{P}_j(x)$  queda definido por las EC.(VII.15) y EC.(VII.16). Si por el contrario  $|f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]| < |f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]|$ , entonces  $\tilde{P}_j(x)$  queda definido análogamente considerando ahora la expresión simétrica del coeficiente  $\tilde{\alpha}_1$ :

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{-e_{j+\frac{3}{2}} + 13e_{j+\frac{1}{2}}}{12} - \frac{1}{6} \tilde{D} h. \quad \text{EC.(VII.19)}$$

donde  $\tilde{D}$  se define mediante la EC.(VII.13) y las condiciones de interpolación simétricas son:



$$\tilde{P}_j(x_m) = f_m, \quad j \leq m \leq j+2. \quad \text{EC.(VII.20)}$$

El polinomio modificado es equivalentemente al definido a continuación por:

$$\begin{cases} \tilde{P}_j(x_l) = f_l, & \text{para } j-1 \leq l \leq j+1, \\ \tilde{P}_j(x_{j+2}) = \tilde{f}_{j+2} = f_{j+1} + f_j - f_{j-1} + 4\tilde{D}h^2. \end{cases} \quad \text{EC.(VII.21)}$$

Si por el contrario  $|D_j| > |D_{j+1}|$ , entonces:

$$\begin{cases} \tilde{P}_j(x_{j-1}) = \tilde{f}_{j-1} = f_{j+1} + f_j - f_{j-2} + 4\tilde{D}h^2, \\ \tilde{P}_j(x_l) = f_l & \text{para } j \leq l \leq j+2, \end{cases} \quad \text{EC.(VII.22)}$$

donde  $\tilde{D}$  se definió en la EC.(VII.13).

Finalmente, se puede escribir el polinomio interpolante como:

$$\tilde{P}_j(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \left(x - x_{j+\frac{1}{2}}\right) + \tilde{a}_2 \left(x - x_{j+\frac{1}{2}}\right)^2 + \tilde{a}_3 \left(x - x_{j+\frac{1}{2}}\right)^3, \quad \text{EC.(VII.23)}$$

donde los coeficientes  $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2$  y  $\tilde{a}_3$  se definen según:

$$|D_j| \leq |D_{j+1}| \Rightarrow \begin{cases} \tilde{a}_0 = \frac{f_j + f_{j+1}}{2} - \frac{1}{8}\tilde{D}_j, \\ \tilde{a}_1 = \frac{1}{12h}(f_{j-1} - 14f_j + 13f_{j+1} - \tilde{D}_j), \\ \tilde{a}_2 = \frac{1}{2h^2}\tilde{D}_j, \\ \tilde{a}_3 = \frac{1}{3h^3}(-D_j + \tilde{D}_j). \end{cases} \quad \text{EC.(VII.24)}$$

$$|D_j| > |D_{j+1}| \Rightarrow \begin{cases} \tilde{a}_0 = \frac{f_j + f_{j+1}}{2} - \frac{1}{8}\tilde{D}_j, \\ \tilde{a}_1 = \frac{1}{12h}(-13f_j + 14f_{j+1} - f_{j+2} - \tilde{D}_j), \\ \tilde{a}_2 = \frac{1}{2h^2}\tilde{D}_j, \\ \tilde{a}_3 = \frac{1}{3h^3}(-D_{j+1} + \tilde{D}_j). \end{cases} \quad \text{EC.(VII.25)}$$



## 7.2. Propiedades de la reconstrucción PPH.

Se establecen las siguientes propiedades del operador de reconstrucción PPH:

1. Por la forma en la que se construye, los datos usados para la interpolación permanecen centrados.
2. La construcción muestra que el esquema de reconstrucción implica una modificación no lineal de los extremos de los intervalos de cuatro puntos usados en la misma.
3. Si  $f$  es un polinomio de grado igual a dos o menor,

$$D_j = D_{j+1} = \frac{D_j + D_{j+1}}{2} = \tilde{D},$$

por lo que el esquema propuesto es exacto para polinomios de grado dos.

4. Si  $f \in C^4$  y  $D_j D_{j+1} > 0$ , usando el desarrollo de Taylor:

$$2 \frac{D_j D_{j+1}}{D_j + D_{j+1}} = \frac{f''\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right)}{2} + O(h^2),$$

$$\frac{D_j + D_{j+1}}{2} = \frac{f''\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right)}{2} + O(h^2).$$

Y entonces, en las regiones suaves, la diferencia entre la media aritmética y la media armónica es  $O(h^2)$ .

Además, se tiene que  $a_i - \tilde{a}_i = O(h^{4-i})$  para  $i = 0, 1, 2, 3$ , por lo que la reconstrucción propuesta permanece de cuarto orden en las regiones suaves.

5. Cuando  $D_j D_{j+1} \leq 0$ ,  $\tilde{P}\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right) = \frac{f_{j+1} + f_j}{2}$ . En este caso, la precisión de la reconstrucción está limitada a segundo orden incluso en las regiones suaves.
6. Si hay una discontinuidad en  $[x_{j+1}, x_{j+2}]$  y  $D_j D_{j+1} > 0$ , debido a lo expuesto en la EC.(VII.14), el fenómeno de Gibbs que aparece en una reconstrucción lineal no aparece en este caso. Además, el orden de precisión de la reconstrucción permanece siendo  $O(h^2)$  en este caso.



A continuación se muestran dos figuras que ilustran el procedimiento de reconstrucción llevado a cabo por el operador PPH.

En la Figura VII.1 se observa una discontinuidad de salto en el extremo derecho del intervalo de cuatro puntos en el que se requiere llevar a cabo la reconstrucción. En la parte inferior se observa cómo se evalúan las diferencias divididas, resultando evidente que  $D_j < D_{j+1}$  y que  $D_j D_{j+1} > 0$ .

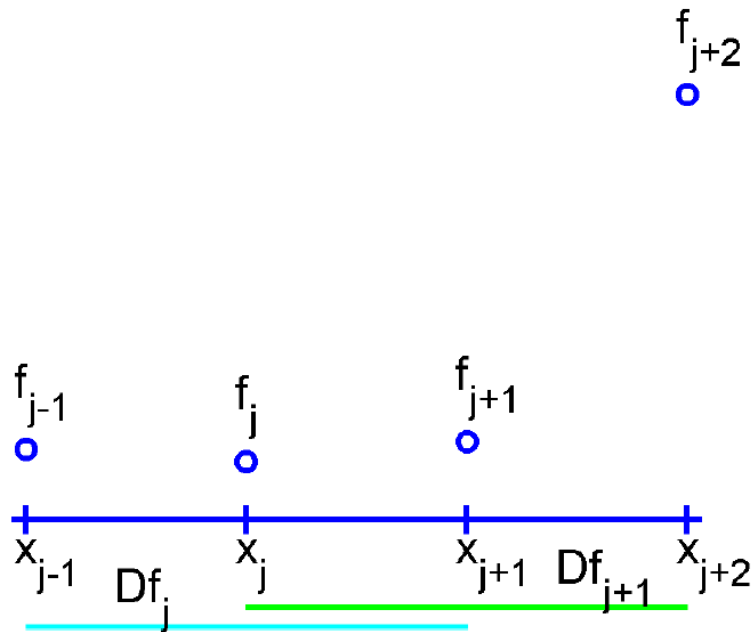


Figura VII.1. – Primer paso de la reconstrucción PPH con cuatro puntos.

Como consecuencia de esto, y tal como viene dado por la EC.(VII.21), se modifica el valor del extremo derecho del intervalo para poder así llevar a cabo una reconstrucción que preserve mejor la convexidad como se aprecia en la Figura VII.2.

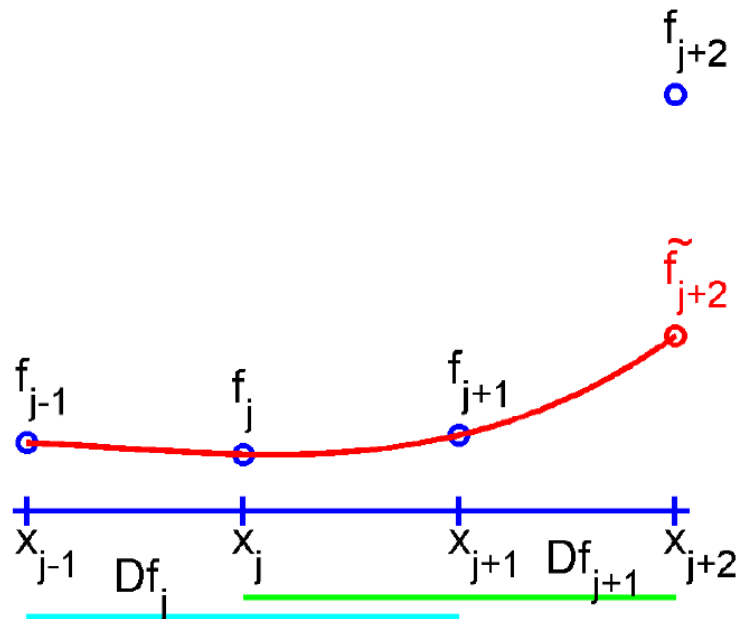


Figura VII.2. – Reconstrucción PPH con cuatro puntos con valores modificados.

### 7.3. Esquema de subdivisión.

Debido a las propiedades de la interpolación, únicamente los componentes impares de la secuencia deben de ser evaluados. Para el operador PPH descrito en este capítulo, esto puede escribirse como sigue:

$$\tilde{P}_{2j+1}(x) = \begin{cases} \frac{f_{j+1} + f_j}{2} - \frac{1}{4} \frac{D_j D_{j+1}}{D_j + D_{j+1}} & \text{si } D_j D_{j+1} > 0, \\ \frac{f_{j+1} + f_j}{2} & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \quad \text{EC.(VII.26)}$$

donde

$$D_j = f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}. \quad \text{EC.(VII.27)}$$

Este esquema presenta las siguientes propiedades:

1. El operador de subdivisión no lineal asociado a la reconstrucción PPH:
  - 1.1. Reproduce polinomios de grado  $N \leq 2$ .
  - 1.2. Está acotado.
  - 1.3. Es Lipschitz continuo.



2. El esquema de subdivisión no lineal asociado a la reconstrucción PPH es uniformemente convergente. Además, para cualquier  $f \in l_\infty(\mathbb{Z})$ , el límite de la función  $S^\infty(f)$  satisface que existe  $C$ , tal que para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|S^\infty(f)(x) - S^\infty(f)(y)| \leq C|x - y|.$$

3. Estabilidad del esquema de subdivisión PPH. Dados  $f, \tilde{f} \in l_\infty$ , se tiene:

$$\|S^\infty(f) - S^\infty(\tilde{f})\|_{L^\infty} \leq 9\|f - \tilde{f}\|_{l_\infty(\mathbb{Z})}.$$



## CAPÍTULO VIII

### CÁLCULO DE PESOS EN SPLINES CÚBICOS SUAVIZANTES.

---

Este capítulo unirá los conceptos y métodos desarrollados a lo largo de los Capítulos V, VI y VII para desarrollar un algoritmo capaz de elegir los pesos,  $\rho_i$ , más adecuados a introducir en la EC.(VI.2) para cada punto según las características de cada Spline.

#### 8.1. Funcional a minimizar.

Tal y como se describió en el Capítulo VI, será necesario minimizar el siguiente funcional dado por la EC.(VI.2):

$$J(f) = \int_a^b (f''(x))^2 dx + \sum_{i=0}^m \frac{1}{\rho_i} \cdot (f(x_i) - z_i)^2.$$

Como paso previo, se minimizará un funcional del estilo pero de forma local. Además se buscará solución dentro del espacio de polinomios de grado menor o igual a tres. Se buscará por tanto, minimizar el siguiente funcional:

$$\tilde{J}(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(x))^2 dx + \mu_{i-1} (f(x_{i-1}) - z_{i-1})^2 + \mu_{i+2} (f(x_{i+2}) - z_{i+2})^2.$$

Donde

$$\mu_i = \frac{1}{\rho_i} \quad \text{y} \quad Dz_i := f(z_{i-1}) - 2f(z_i) + f(z_{i+1}).$$

En este caso, el polinomio  $f(x)$  de grado tres viene expresado por la siguiente expresión en función de la variable  $t$ :





$$f(t) = z_i t + z_{i+1}(1-t) + t(1-t)[At + B(1-t)]. \quad \text{EC.(VIII.1)}$$

Nótese que el cambio de variable realizado ha sido:

$$t = \frac{x - x_i}{h} \rightarrow dx = h dt.$$

Derivando el polinomio  $f(t)$ :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(t)}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{df(t)}{dt} \frac{1}{h} = \frac{1}{h} [(3t^2 - 4t + 1)B + (-3t^2 + 2t)A + z_{i+1} - z_i].$$

Derivando otra vez para obtener la segunda derivada:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df(t)}{dt} \frac{1}{h} \right) = \frac{1}{h^2} \left( \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right) = \frac{1}{h^2} [2(3t - 2)B + (-3t + 1)A].$$

A continuación se desarrollan los tres sumandos del funcional por separado:

Primer sumando:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(x))^2 dx &= \int_0^1 \left( \frac{1}{h^2} \left( \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right) \right)^2 h dt = \int_0^1 \frac{1}{h^2} [2(3t - 2)B + (-3t + 1)A] h dt \\ &= \frac{4}{h^3} (B^2 - AB + A^2). \end{aligned}$$

Segundo sumando (extremo izquierdo del intervalo):

$$\mu_{-1} (f(t = -1) - z_{-1})^2 = \mu_{-1} [-2(2B - A) - z_{-1} - z_1 + 2z_0]^2 = \mu_{-1} [-Dz_0 + 2(A - 2B)]^2.$$

Tercer sumando (extremo derecho del intervalo):

$$\mu_2 (f(t = 2) - z_2)^2 = \mu_2 [-2(2A - B) - z_2 - z_0 + 2z_1]^2 = \mu_2 [-Dz_1 + 2(2A - B)]^2.$$

Se buscará un mínimo condicionado del funcional  $\tilde{J}(f)$ .

La condición que completa el sistema resulta de imponer que el polinomio en el punto medio valga lo mismo que la reconstrucción PPH:

$$f\left(t = \frac{1}{2}\right) = \frac{z_i + z_{i+1}}{2} - \frac{1}{8} \frac{2Dz_0 Dz_1}{Dz_0 + Dz_1}.$$



Sustituyendo el valor de  $f\left(t = \frac{1}{2}\right)$ :

$$\frac{z_i + z_{i+1}}{2} + \frac{1}{8}(A + B) = \frac{z_i + z_{i+1}}{2} - \frac{1}{8} \frac{2Dz_0Dz_1}{Dz_0 + Dz_1} .$$

Simplificando:

$$A + B = -\frac{2Dz_0Dz_1}{Dz_0 + Dz_1} = -H(Dz_0, Dz_1). \quad \text{EC.(VIII.2)}$$

Donde  $H(Dz_0, Dz_1)$  es la media armónica y se define como:

$$H(Dz_0, Dz_1) = \begin{cases} \frac{2Dz_0Dz_1}{Dz_0 + Dz_1} & \text{si } Dz_0Dz_1 > 0, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

El funcional auxiliar queda:

$$\bar{J}(f) = \tilde{J}(f) + \lambda(A + B + H(Dz_0, Dz_1)).$$

Se elegirán los coeficientes de peso  $\mu_{-1}$  y  $\mu_2$  tal que el funcional tenga un mínimo absoluto.

Con todo esto, el funcional queda totalmente definido por la siguiente expresión:

$$\bar{J}(A, B, \lambda) = \frac{4}{h^3}(B^2 - AB + A^2) + \mu_{-1}[-Dz_0 + 2(A - 2B)]^2 + \mu_2[-Dz_1 + 2(2A - B)]^2 + \lambda(A + B + H(Dz_0, Dz_1)). \quad \text{EC.(VIII.3)}$$

Para llevar a cabo el proceso de minimización de dicho funcional, será necesario igualar a cero sus derivadas parciales respecto de los coeficientes A, B y  $\lambda$ , lo cual se muestra a continuación:

$$\frac{\partial \bar{J}(A, B, \lambda)}{\partial A} = \frac{4(2A - B)}{h^3} - 8\mu_{-1}[-2(2A - B) - Dz_1] + 4\mu_2[2(A - 2B) - Dz_0] + \lambda = 0. \quad \text{EC.(VIII.4)}$$

$$\frac{\partial \bar{J}(A, B, \lambda)}{\partial B} = \frac{4(2B - A)}{h^3} + 4\mu_{-1}[-2(2A - B) - Dz_1] - 8\mu_2[2(A - 2B) - Dz_0] + \lambda = 0. \quad \text{EC.(VIII.5)}$$

$$\frac{\partial \bar{J}(A, B, \lambda)}{\partial \lambda} = A + B + H(Dz_0, Dz_1) = 0. \quad \text{EC.(VIII.6)}$$



Si en estas tres ecuaciones que se acaban de plantear se toma  $\lambda = 0$ , se obtiene un mínimo global. Si además se impone que  $\mu_{-1} = \mu_2 = \mu$ , se obtiene un sistema no lineal de tres ecuaciones y tres incógnitas con solución única.

Los resultados de este sistema son, para el caso en que  $Dz_0 Dz_1 > 0$ :

$$A = \frac{2Dz_0 Dz_1^2 (Dz_1 + 5Dz_0)}{(Dz_1 + Dz_0)(Dz_1^2 + 10Dz_0 Dz_1 + Dz_0^2)} \quad \text{EC.(VIII.7)}$$

$$B = \frac{2Dz_0^2 Dz_1 (5Dz_1 + Dz_0)}{(Dz_1 + Dz_0)(Dz_1^2 + 10Dz_0 Dz_1 + Dz_0^2)} \quad \text{EC.(VIII.8)}$$

$$\mu = \frac{2Dz_0 Dz_1}{h^3 (Dz_0 - Dz_1)^2} \quad \text{EC.(VIII.9)}$$

Si por el contrario  $Dz_0 Dz_1 \leq 0$ , entonces  $H(Dz_0 Dz_1) = 0$  y los resultados del sistema son:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad \mu = 0.$$

Según se definieron en el Capítulo VI, los pesos  $\rho_i$ , o lo que es lo mismo, los inversos de los coeficientes  $\mu_i$  han de ser estrictamente positivos, por lo que debido a la expresión obtenida anteriormente en la EC.(VIII.9) es necesario analizar el cumplimiento de dicha condición.

Cabe destacar aquí tres casos diferenciados:

- *Primer caso:* el producto de las diferencias divididas es estrictamente positivo, es decir,  $Dz_0 Dz_1 > 0$ . Este caso no plantea ningún problema de definición, por lo cual el coeficiente de peso se define según la expresión de la ecuación EC.(VIII.9).
- *Segundo caso:* una de las diferencias divididas (o las dos) son nulas, es decir,  $Dz_0 = 0$  o  $Dz_1 = 0$ . En este caso el coeficiente  $\mu_i$  será cero, por lo que a la hora de introducirlo en la expresión del Spline Cúbico Suavizante, al ser  $\rho_i$  su inverso, se le asignará un valor muy grande.
- *Tercer caso:* el producto de las diferencias divididas es estrictamente negativo, es decir,  $Dz_0 Dz_1 < 0$ . Por definición, los coeficientes de peso han de ser positivos por lo que en este caso se recurrirá a una estrategia de traslación que permita que el producto de las diferencias divididas sea positivo.



## 8.2. Traslación.

Con el objetivo de satisfacer las condiciones de definición de los coeficientes de peso, se propone una estrategia de traslación de los puntos de modo que el producto de las diferencias divididas en el subintervalo sea estrictamente positivo.

El valor de la traslación viene dado por la siguiente expresión:

$$T = \frac{-4Dz_0 Dz_1}{Dz_0 + Dz_1}.$$

Imponiendo esta nueva condición en el valor del punto intermedio:

$$\frac{z_i + z_{i+1}}{2} + \frac{1}{8}(A + B) = \frac{z_i + z_{i+1}}{2} - \frac{1}{8} \left( \frac{2(Dz_0 + T)(Dz_1 + T)}{(Dz_0 + T) + (Dz_1 + T)} - T \right).$$

Resultando:

$$A + B = T - \frac{2(Dz_0 + T)(Dz_1 + T)}{2T + Dz_0 + Dz_1}. \quad \text{EC.(VIII.10)}$$

Resolviendo ahora el sistema no lineal formado por las ecuaciones EC.(VIII.4), EC.(VIII.5) y EC.(VIII.10) se obtienen las siguientes soluciones:

$$A = \frac{(Dz_1T + Dz_0T + 2Dz_0Dz_1)(4Dz_1T + 2Dz_0T + Dz_1^2 + 5Dz_0Dz_1)}{(2T + Dz_1 + Dz_0)(6Dz_1T + 6Dz_0T + Dz_1^2 + 10Dz_0Dz_1 + Dz_0^2)}. \quad \text{EC.(VIII.11)}$$

$$B = \frac{(Dz_1T + Dz_0T + 2Dz_0Dz_1)(2Dz_1T + 4Dz_0T + Dz_0^2 + 5Dz_0Dz_1)}{(2T + Dz_1 + Dz_0)(6Dz_1T + 6Dz_0T + Dz_1^2 + 10Dz_0Dz_1 + Dz_0^2)}. \quad \text{EC.(VIII.12)}$$

$$\mu = \frac{-2Dz_0 Dz_1}{h^3(Dz_0 - Dz_1)^2}. \quad \text{EC.(VIII.13)}$$

## 8.3. Extensión a intervalos de n puntos.

Hasta ahora, el estudio de los pesos se ha centrado únicamente en un intervalo formado por cuatro puntos. La extensión a intervalos de n puntos es sencilla teniendo en cuenta que habrá que dividir el intervalo en subintervalos de cuatro puntos de la siguiente manera:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4], [x_2, x_3, x_4, x_5], [x_3, x_4, x_5, x_6], \dots, [x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n].$$



Una vez se ha tenido esto en cuenta, se ha de notar lo siguiente:

- *Puntos extremos izquierdos:* los puntos extremos  $x_1, x_2, x_3$  únicamente tienen contribución de los coeficientes peso de su derecha, es decir, solo son extremos de un subintervalo de toda la subdivisión, correspondiendo ese extremo al lado izquierdo. Por esto:

$$\rho_1 = \frac{1}{\mu_1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{\mu_2} \quad \text{y} \quad \rho_3 = \frac{1}{\mu_3}.$$

- *Puntos centrales:* los puntos centrales  $x_4, \dots, x_{n-3}$  tienen contribución de coeficientes peso tanto por la izquierda como por la derecha, es decir, dichos puntos son el extremo izquierdo de un subintervalo y el extremo derecho de otro subintervalo a lo largo de la subdivisión. Por esto:

$$\rho_i = \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_{i-3}} \quad \text{para } i = 4, \dots, n-3.$$

- *Puntos extremos derechos:* los puntos extremos  $x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$  únicamente tienen contribución de los coeficientes peso de su izquierda, es decir, solo son extremos de un subintervalo de toda la subdivisión, correspondiendo ese extremo al lado derecho. Por esto:

$$\rho_{n-2} = \frac{1}{\mu_{n-2}}, \quad \rho_{n-1} = \frac{1}{\mu_{n-1}} \quad \text{y} \quad \rho_n = \frac{1}{\mu_n}.$$



## CAPÍTULO IX

### RESULTADOS.

---

En este capítulo se van a presentar los resultados obtenidos a través de Matlab que resultan de la construcción de Splines Cúbicos Suavizantes con el algoritmo desarrollado en este proyecto que permite elegir los pesos convenientes, y su comparación con el resultado obtenido de la construcción de Splines Cúbicos Suavizantes asignando un valor fijo para todos los pesos.

En primer lugar se analizarán diversas funciones matemáticas discretizadas y por último se analizará un caso específico naval de una embarcación de recreo de la que se dispone de sus líneas de agua.



### 9.1. Parábola.

Al ser una parábola un polinomio de grado dos, resulta evidente que al realizar la reconstrucción de la misma mediante los polinomios de grado tres que constituyen los Splines Cúbicos Suavizantes, esta reconstrucción será exacta en ambos casos aquí propuestos: calculando los pesos mediante el algoritmo desarrollado en este proyecto o fijándolos en un valor medio  $\rho_i = 0,2$ .

La ecuación de la parábola utilizada es la siguiente:

$$f(t) = t^2 - 3t + 1 \quad \text{en } [-5,5] \quad \text{con } n = 50 \text{ puntos}$$

#### 9.1.1. Ordenadas originales.

En primer lugar se muestra la reconstrucción de la parábola mediante Splines Cúbicos Suavizantes para un valor de los pesos fijos, en este caso  $\rho_i = 0,2$ .

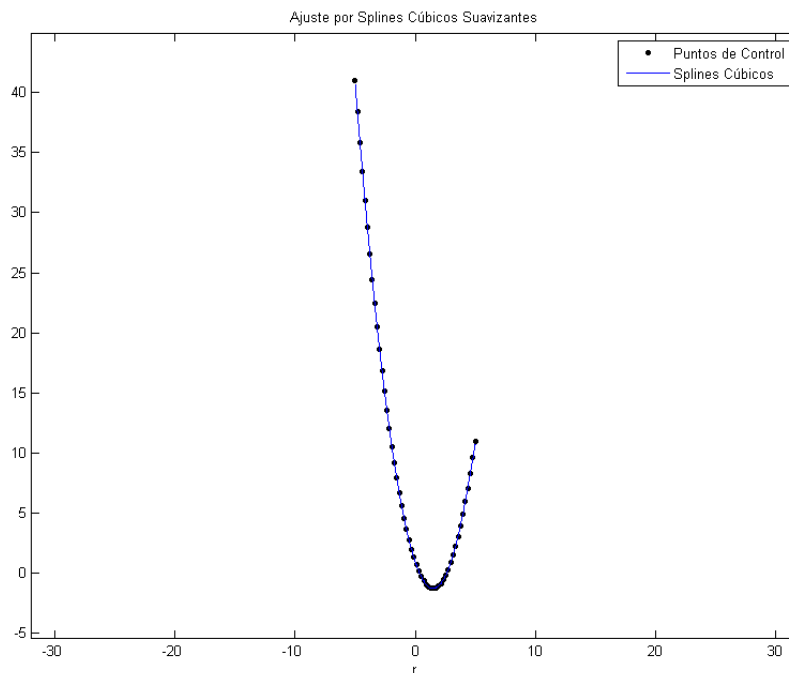


Figura IX.1. – Reconstrucción de una parábola – Pesos fijos.

En segundo lugar se muestra la reconstrucción de la misma parábola usando el algoritmo que permite adecuar el valor de los pesos según lo requiera la curva.

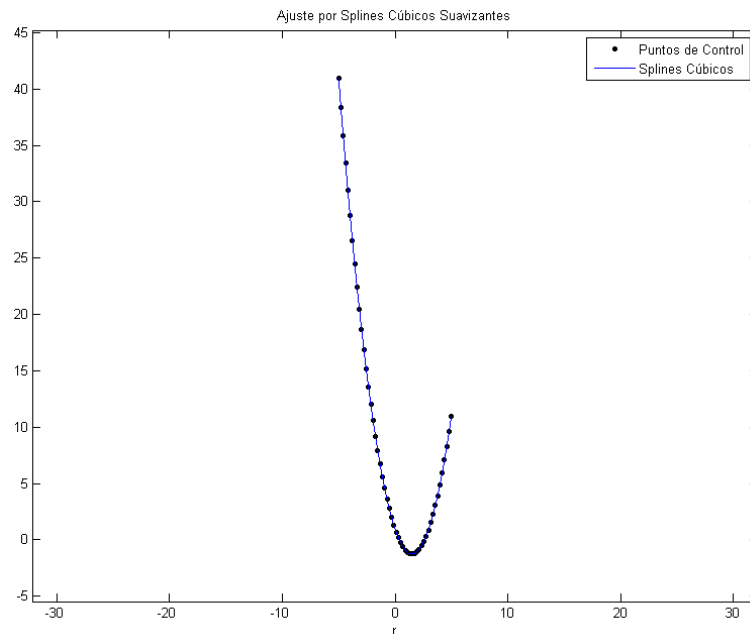


Figura IX.2. – Reconstrucción de una parábola – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

Como se ve en ambos casos, la reconstrucción es a simple vista perfecta debido al hecho de que se está aproximando un polinomio de grado dos mediante polinomios de grado tres.

A continuación se muestran sendas gráficas de los valores que toma la segunda derivada de la reconstrucción para ambos casos, las cuales permiten comprobar cuál de los dos métodos es el que mejor realiza la reconstrucción.

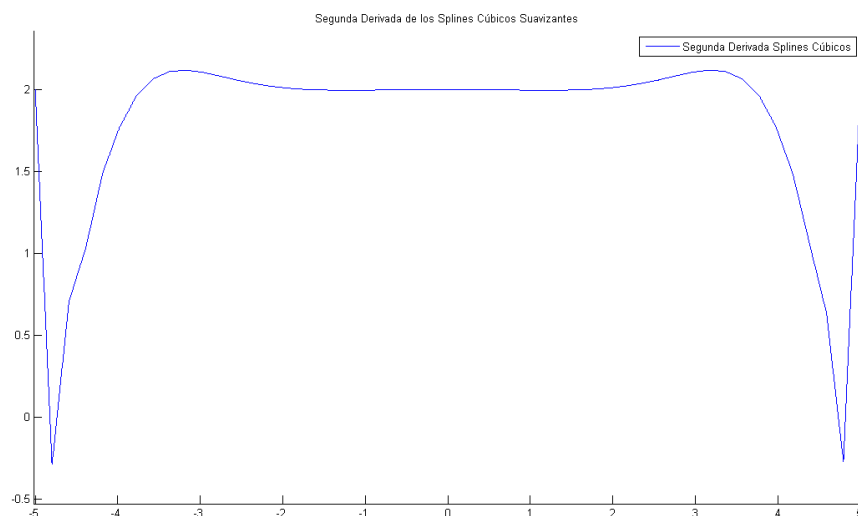
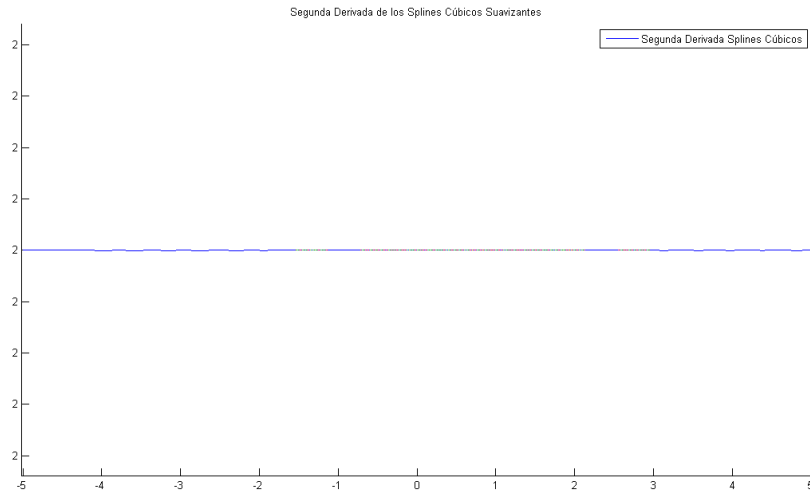


Figura IX.3. – Reconstrucción de una parábola – Segunda derivada con pesos fijos.





*Figura IX.4. – Reconstrucción de una parábola – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.*

Resulta evidente una vez analizadas las gráficas de las segundas derivadas para ambos métodos de reconstrucción, que el algoritmo de cálculo de pesos funciona significativamente mejor en este caso debido a que la segunda derivada de la parábola que es objeto de estudio en este apartado tiene valor constante igual a dos en todo el intervalo, lo cual queda únicamente reflejado cuando los pesos se calculan mediante el algoritmo propuesto.

### **9.1.2. Ordenadas perturbadas.**

En este apartado se analizará la misma parábola que en el apartado anterior a la cual se le introduce un error muy significativo en una de sus ordenadas.

Esta vez se observa que el algoritmo de cálculo de pesos es capaz de identificar perfectamente esta perturbación, lo cual permite realizar una reconstrucción mucho más real. Estos resultados se ven claramente en las gráficas correspondientes a las reconstrucciones y segundas derivadas.

En primer lugar se muestra la reconstrucción de la parábola mediante Splines Cúbicos Suavizantes para un valor de los pesos fijos, en este caso  $\rho_i = 0,2$ .

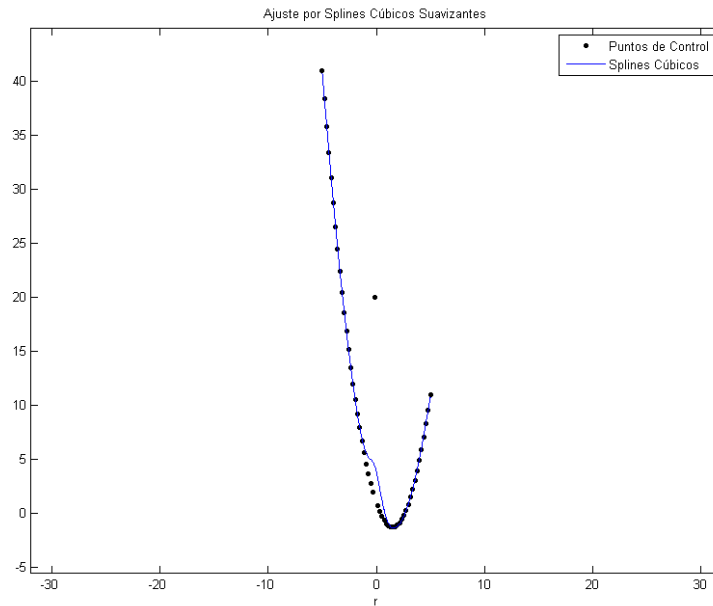


Figura IX.5. – Reconstrucción de una parábola con perturbación – Pesos fijos.

En segundo lugar se muestra la reconstrucción de la misma parábola usando el algoritmo que permite adecuar el valor de los pesos según lo requiera la curva.

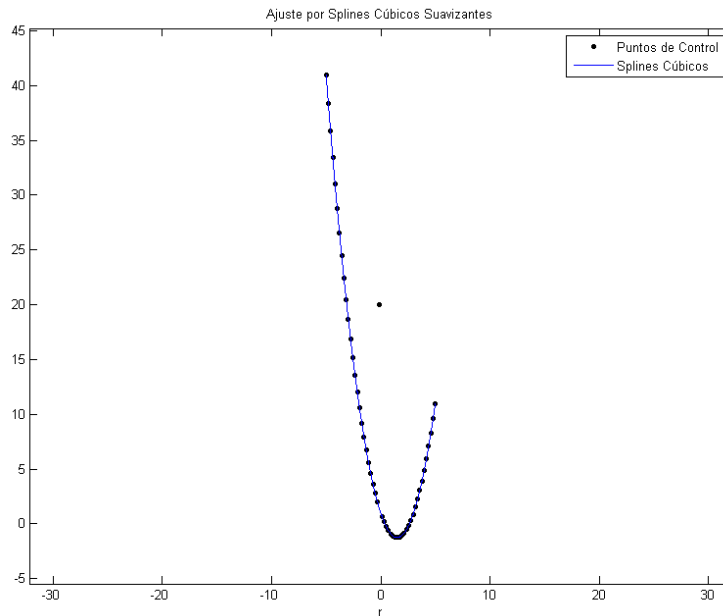


Figura IX.6. – Reconstrucción de una parábola con perturbación – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.



A continuación se muestran sendas gráficas de los valores que toma la segunda derivada de la reconstrucción para ambos casos, las cuales permiten comprobar cuál de los dos métodos es el que mejor realiza la reconstrucción.

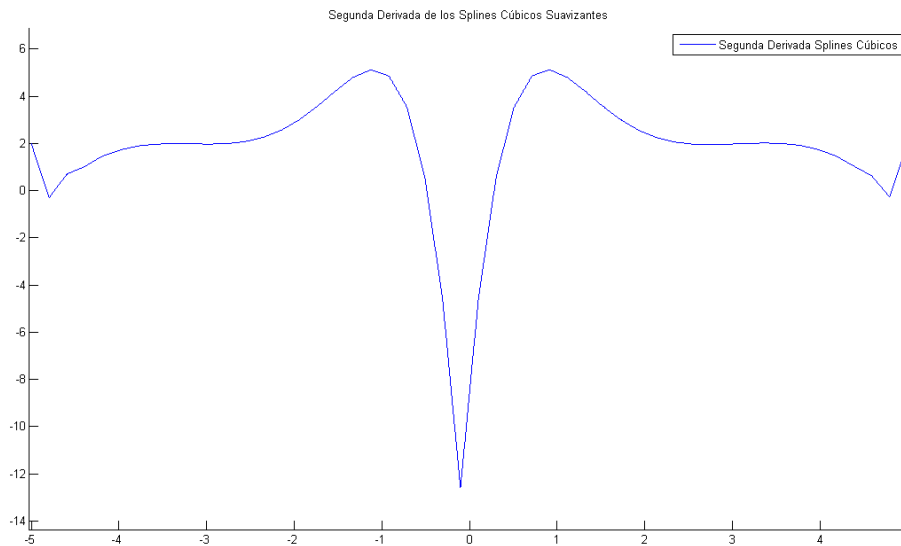


Figura IX.7. – Reconstrucción de una parábola con perturbación – Segunda derivada con pesos fijos.

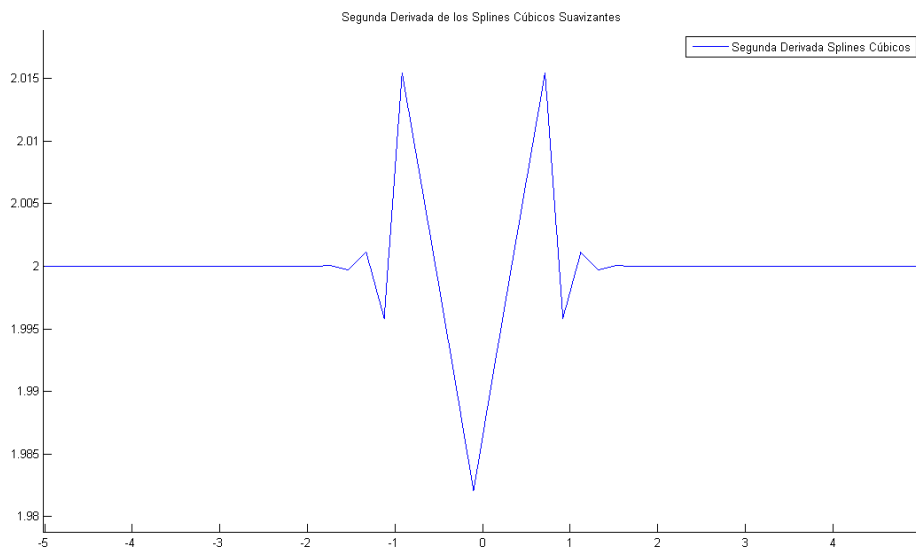


Figura IX.8. – Reconstrucción de una parábola con perturbación – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

Resulta evidente una vez analizadas las gráficas de las segundas derivadas para ambos métodos de reconstrucción, que el algoritmo de cálculo de pesos funciona significativamente mejor en este caso debido a que la segunda derivada de la parábola que es objeto de estudio en este apartado tiene valor constante igual a dos en todo el



intervalo, lo cual queda únicamente reflejado cuando los pesos se calculan mediante el algoritmo propuesto y además, en el punto en el que se ha introducido la perturbación, las oscilaciones son de un orden de magnitud mucho menor.

## 9.2. Polinomio de grado tres.

La expresión del polinomio de grado tres utilizado es el siguiente:

$$f(t) = \frac{1}{5}t^3 + \frac{4}{5}t^2 - \frac{7}{5}t - 2 \quad \text{en } [-5,4] \quad \text{con } n = 50 \text{ puntos}$$

### 9.2.1. Ordenadas originales.

En primer lugar se muestra la reconstrucción del polinomio mediante Splines Cúbicos Suavizantes para un valor de los pesos fijos, en este caso  $\rho_i = 0,2$ .

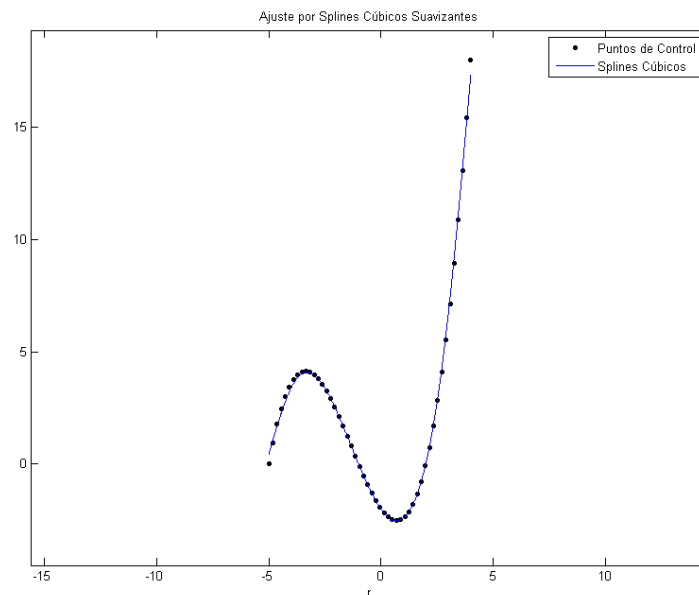


Figura IX.9. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres – Pesos fijos.

En segundo lugar se muestra la reconstrucción del mismo polinomio usando el algoritmo que permite adecuar el valor de los pesos según lo requiera la curva.

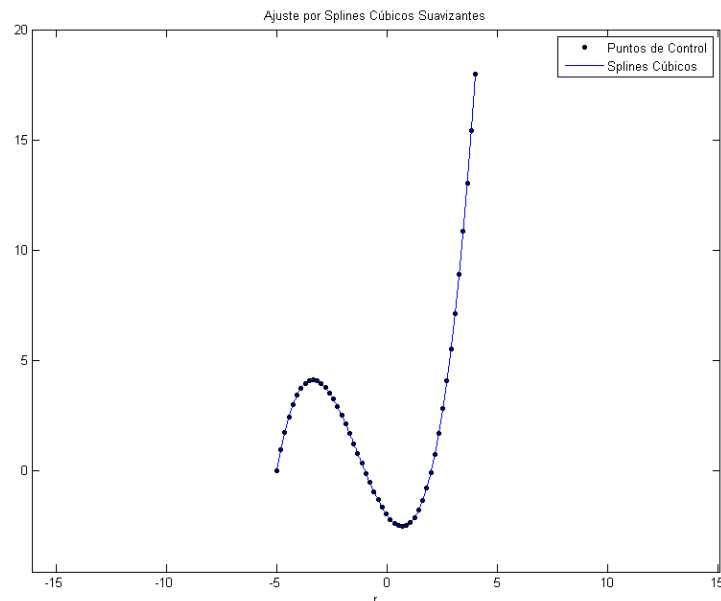


Figura IX.10. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

A continuación se muestran sendas gráficas de los valores que toma la segunda derivada de la reconstrucción para ambos casos. También se muestra a continuación la gráfica de la expresión exacta de la segunda derivada para este polinomio de grado tres, la cual permitirá analizar cuál de los dos casos es el que mejor realiza la reconstrucción.

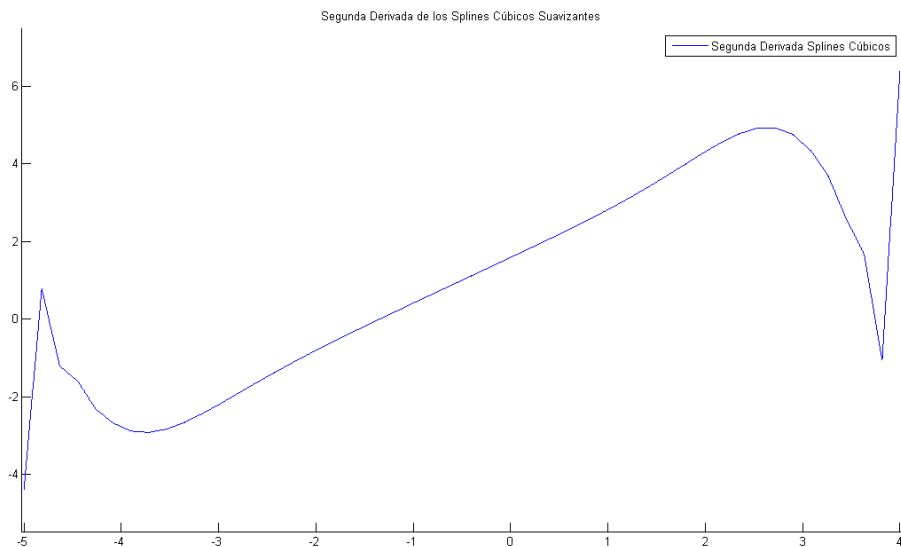


Figura IX.11. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres – Segunda derivada con pesos fijos.

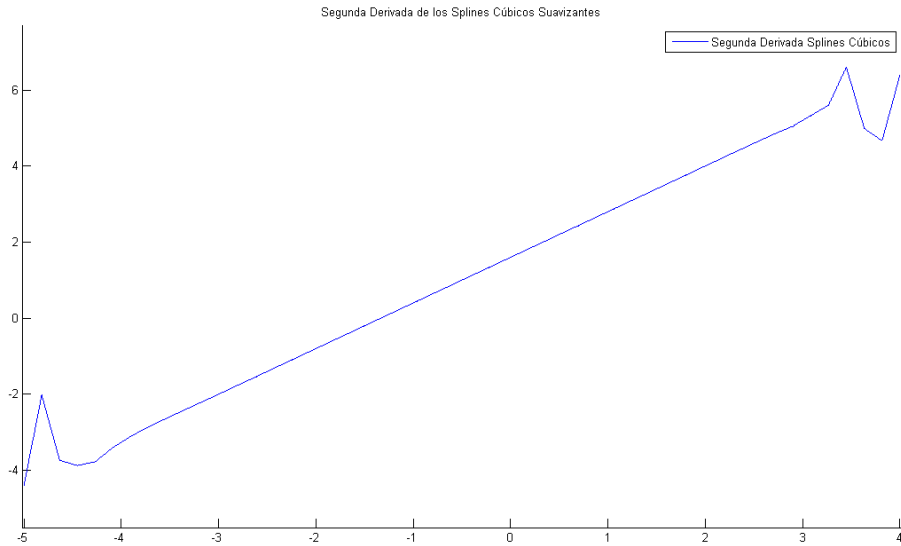


Figura IX.12. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

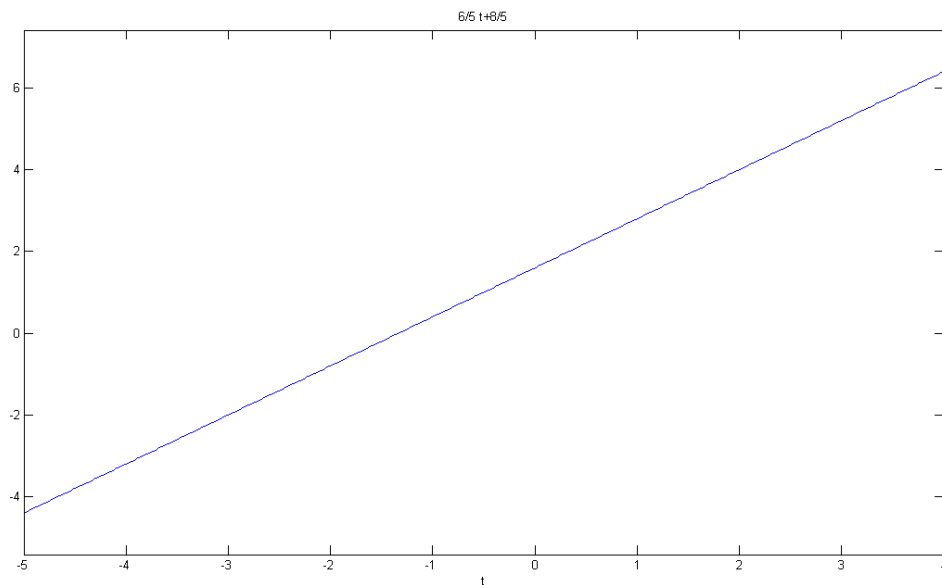


Figura IX.13. – Polinomio de grado tres – Segunda derivada exacta.



Una vez analizadas las gráficas de las segundas derivadas para ambos métodos de reconstrucción, y comparadas con la gráfica de la representación exacta de la segunda derivada, se observa que el algoritmo de cálculo de pesos funciona mejor en este caso debido a que la curva de la segunda derivada tiene unas oscilaciones menores en los extremos del intervalo.

### 9.2.2. Ordenadas perturbadas.

En este apartado se analizará el mismo polinomio de grado tres que en el apartado anterior al cual se le introduce un error muy significativo en dos de sus ordenadas.

En las gráficas que se presentan a continuación se observa que el algoritmo de cálculo de pesos es capaz de identificar perfectamente estas perturbaciones, lo cual permite realizar una reconstrucción mucho más real.

En primer lugar se muestra la reconstrucción del polinomio mediante Splines Cúbicos Suavizantes para un valor de los pesos fijos, en este caso  $\rho_i = 0,2$ .

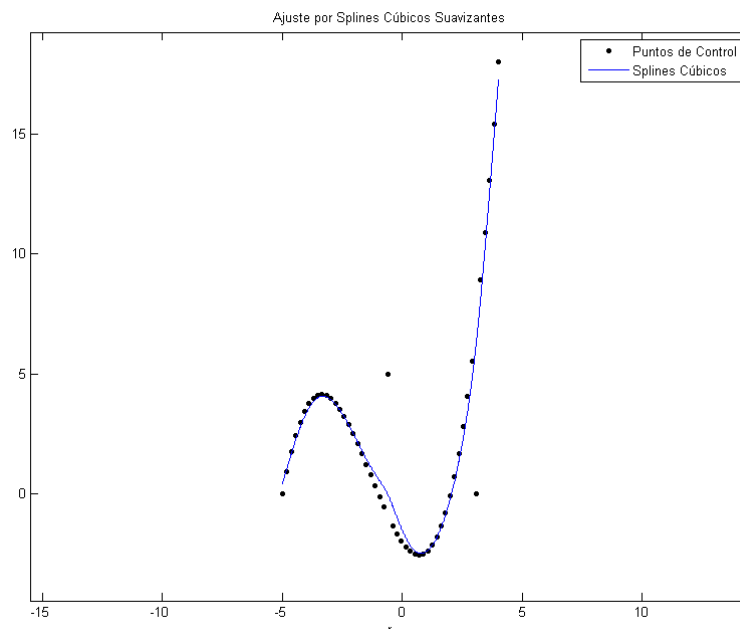


Figura IX.14. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres con perturbaciones – Pesos fijos.

En segundo lugar se muestra la reconstrucción del mismo polinomio usando el algoritmo que permite adecuar el valor de los pesos según lo requiera la curva.

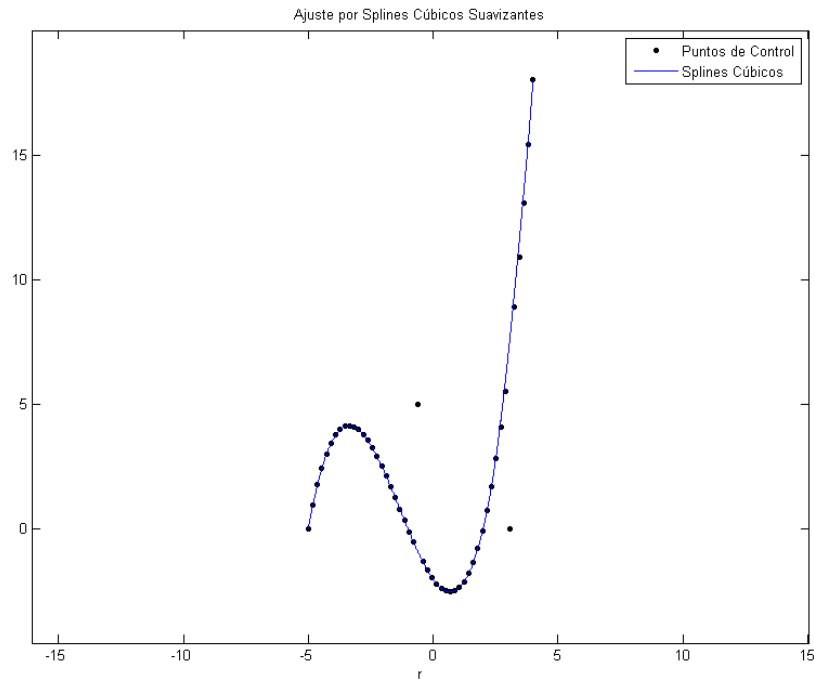


Figura IX.15. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres con perturbaciones – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

A continuación se muestran sendas gráficas de los valores que toma la segunda derivada de la reconstrucción para ambos casos, las cuales permiten comprobar cuál de los dos métodos es el que mejor realiza la reconstrucción.

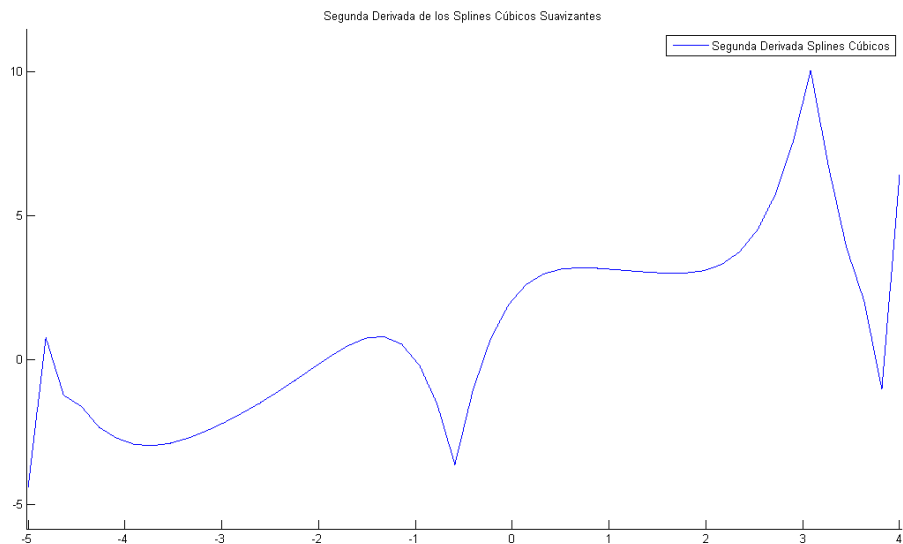


Figura IX.16. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres con perturbaciones – Segunda derivada con pesos fijos.



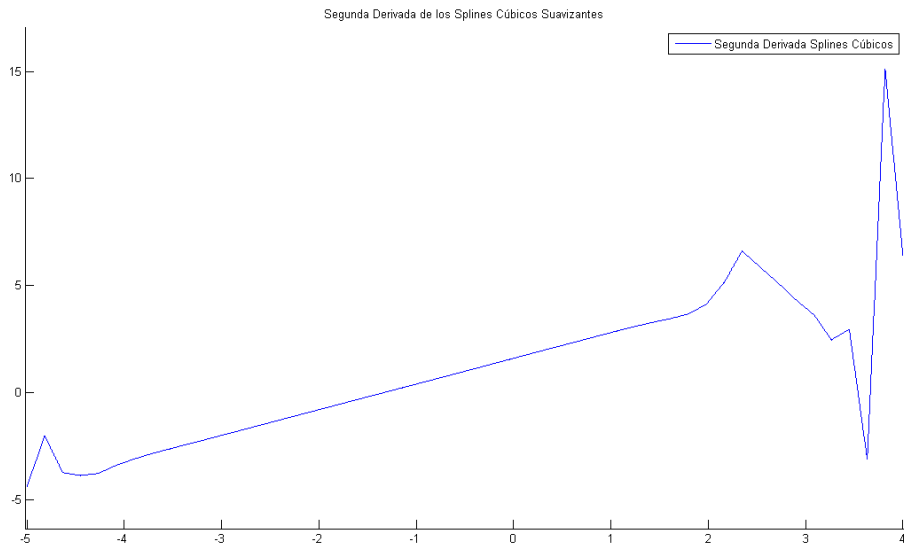


Figura IX.17. – Reconstrucción de un polinomio de grado tres con perturbaciones – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

Resulta evidente una vez analizadas las gráficas de las segundas derivadas para ambos métodos de reconstrucción, y comparadas con la gráfica de la representación exacta de la segunda derivada, que el algoritmo de cálculo de pesos funciona mejor en este caso debido a que se producen menos oscilaciones en la gráfica de la segunda derivada y además, éstas son mucho menores en orden de magnitud.

### 9.3. Polinomio de grado cuatro.

La expresión del polinomio de grado cuatro utilizado es el siguiente:

$$f(t) = \frac{1}{14}(t + 4)(t + 1)(t - 1)(t - 3) + 0,5 \quad \text{en } [-5,4] \quad \text{con } n = 50 \text{ puntos}$$

#### 9.3.1. Ordenadas originales.

En primer lugar se muestra la reconstrucción del polinomio mediante Splines Cúbicos Suavizantes para un valor de los pesos fijos, en este caso  $\rho_i = 0,2$ .

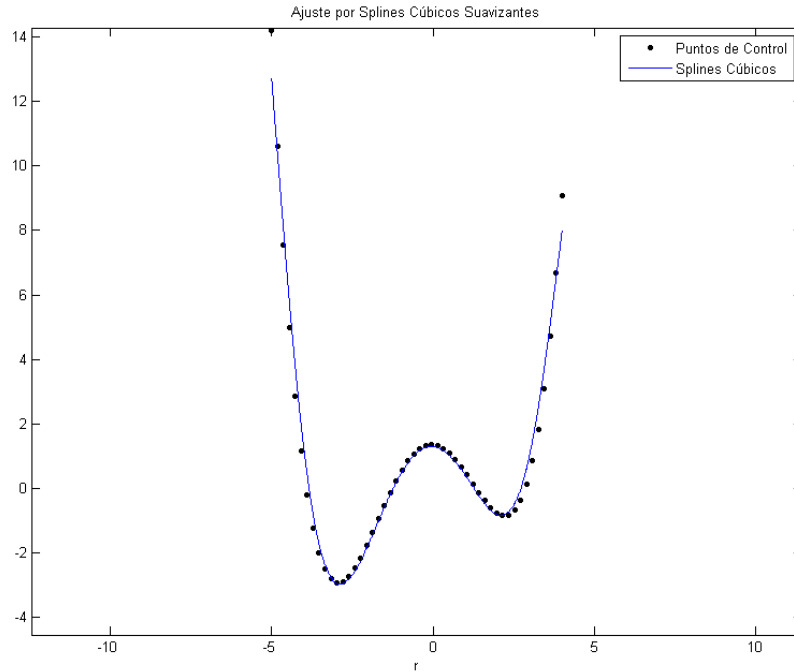


Figura IX.18. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos fijos.

En segundo lugar se muestra la reconstrucción del mismo polinomio usando el algoritmo que permite adecuar el valor de los pesos según lo requiera la curva.

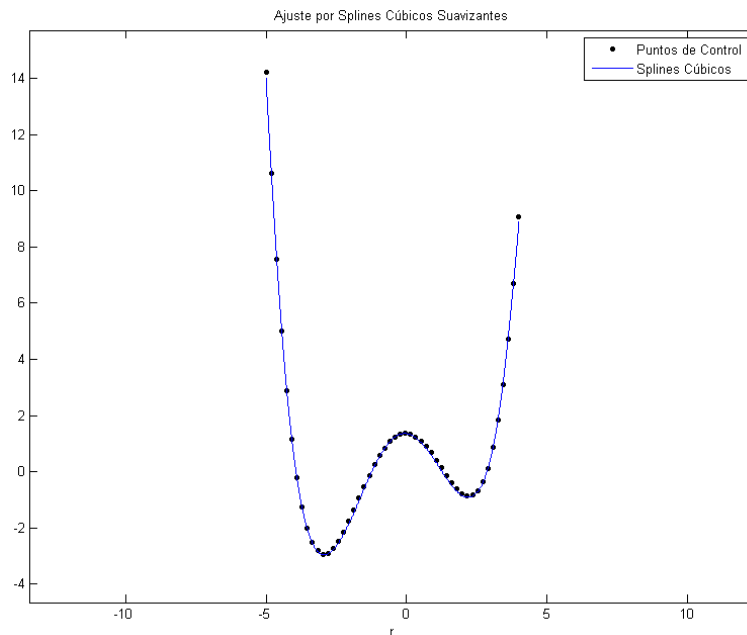


Figura IX.19. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.



A continuación se muestran sendas gráficas de los valores que toma la segunda derivada de la reconstrucción para ambos casos. También se muestra a continuación la gráfica de la expresión exacta de la segunda derivada para este polinomio de grado tres, la cual permitirá analizar cuál de los dos casos es el que mejor realiza la reconstrucción.

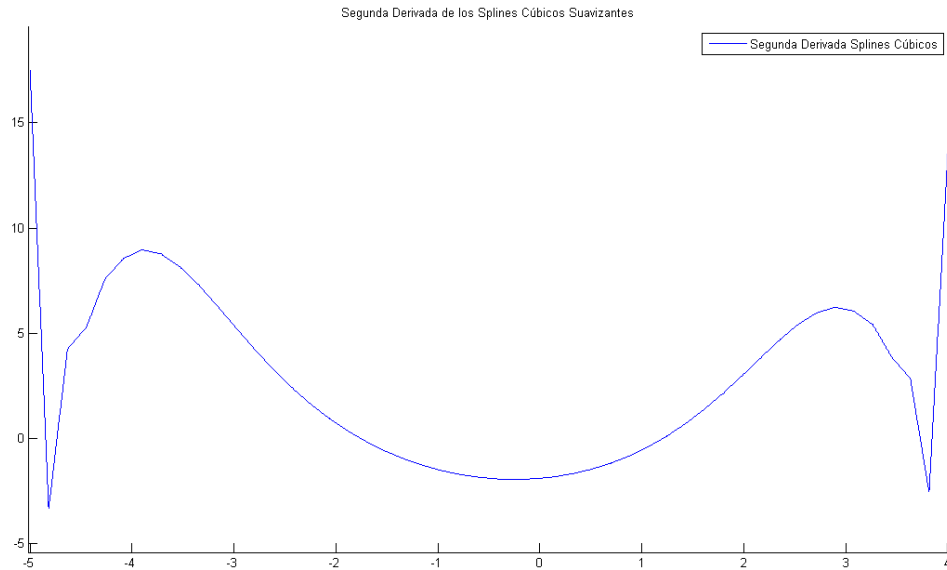


Figura IX.20. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos fijos.

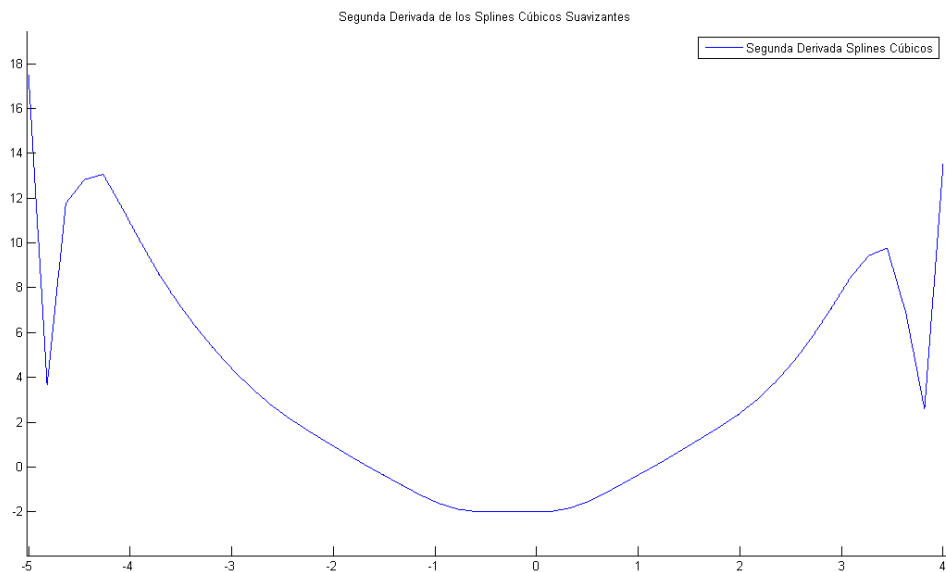


Figura IX.21. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

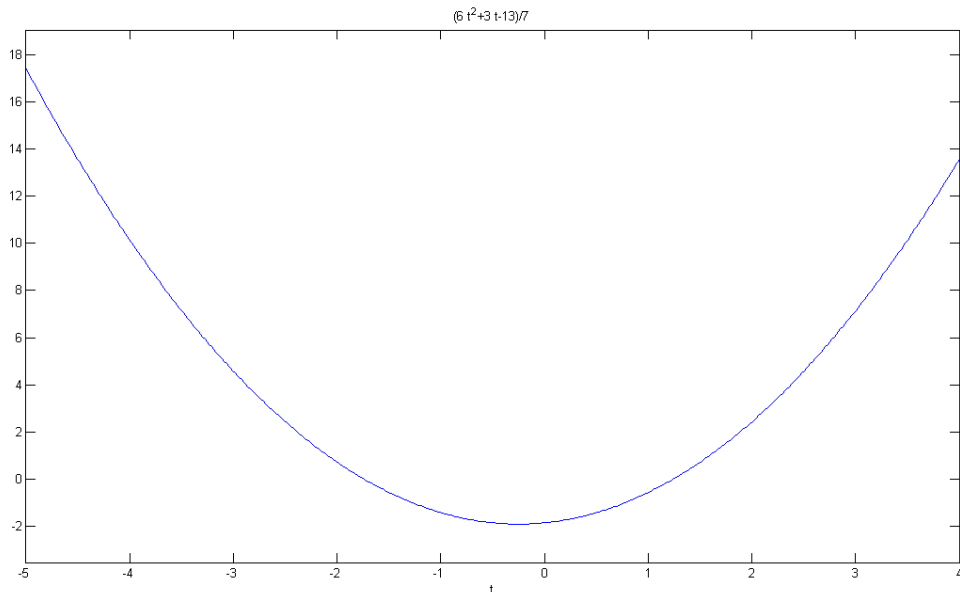


Figura IX.22. – Polinomio de grado cuatro – Segunda derivada exacta.

Una vez analizadas las gráficas de las segundas derivadas para ambos métodos de reconstrucción, y comparadas con la gráfica de la representación exacta de la segunda derivada, se observa que el algoritmo de cálculo de pesos funciona mejor en este caso debido a que la curva de la segunda derivada tiene unas oscilaciones menores en los extremos del intervalo.

### 9.3.2. Ordenadas perturbadas.

En este apartado se analizará el mismo polinomio de grado tres que en el apartado anterior al cual se le introduce un error muy significativo en dos de sus ordenadas.

En las gráficas que se presentan a continuación se observa que el algoritmo de cálculo de pesos es capaz de identificar perfectamente estas perturbaciones, lo cual permite realizar una reconstrucción mucho más real.

En primer lugar se muestra la reconstrucción del polinomio mediante Splines Cúbicos Suavizantes para un valor de los pesos fijos, en este caso  $\rho_i = 0,2$ .

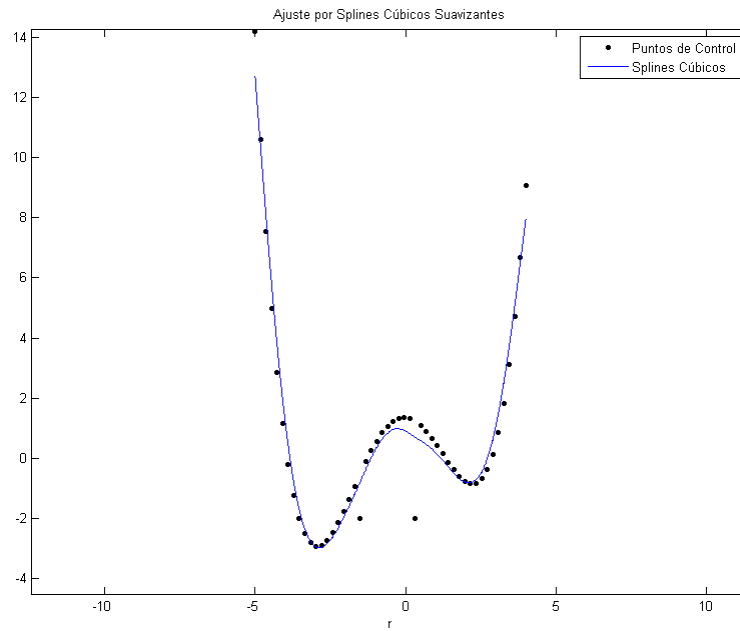


Figura IX.23. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos fijos.

En segundo lugar se muestra la reconstrucción del mismo polinomio usando el algoritmo que permite adecuar el valor de los pesos según lo requiera la curva.

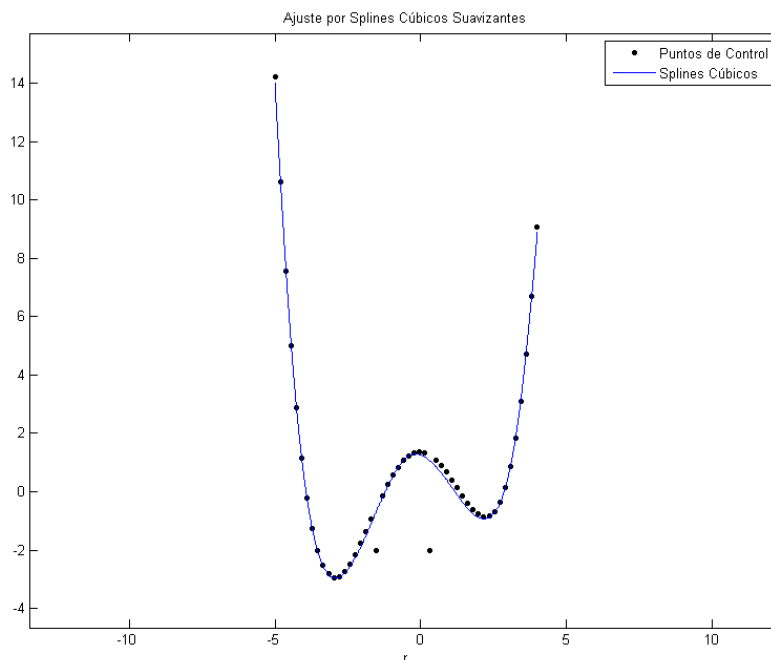
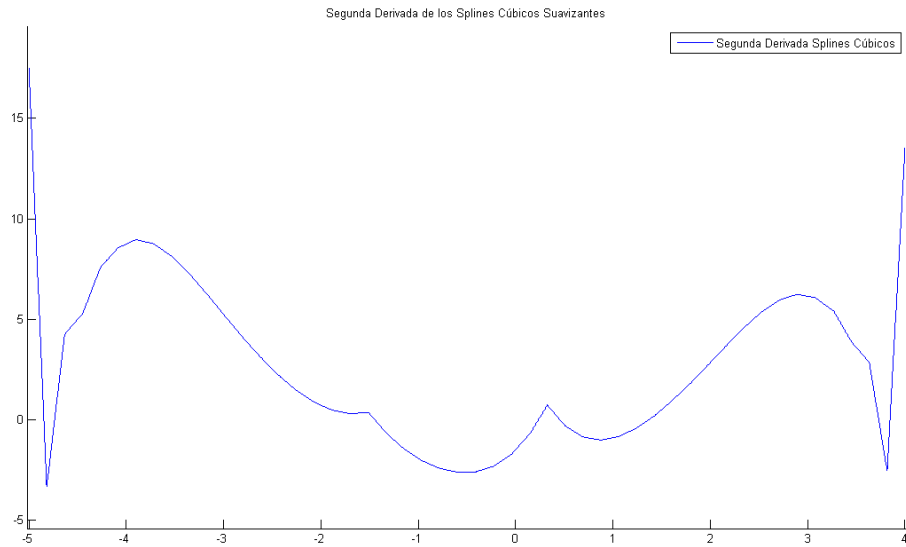


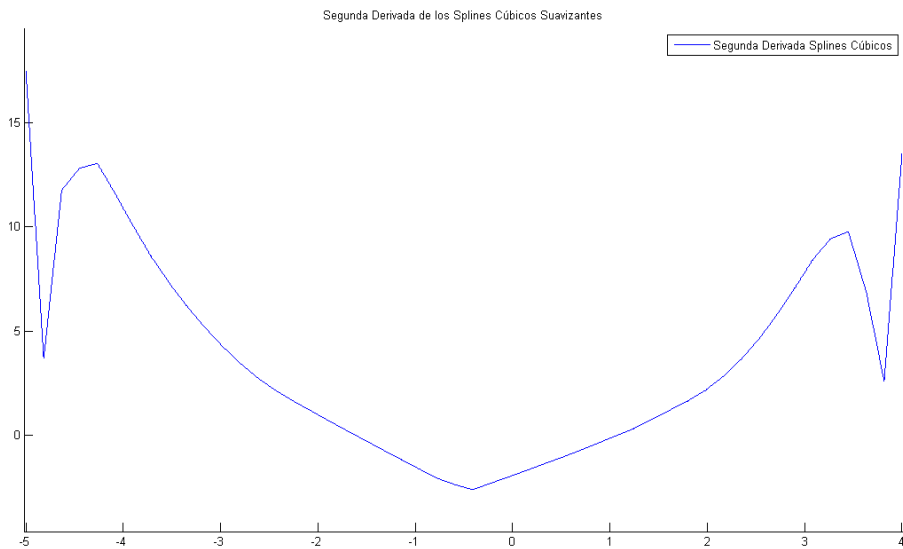
Figura IX.24. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.



A continuación se muestran sendas gráficas de los valores que toma la segunda derivada de la reconstrucción para ambos casos, las cuales permiten comprobar cuál de los dos métodos es el que mejor realiza la reconstrucción.



*Figura IX.25. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos fijos.*



*Figura IX.26. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.*



Una vez analizadas las gráficas de las segundas derivadas para ambos métodos de reconstrucción, y comparadas con la gráfica de la representación exacta de la segunda derivada, se observa que el algoritmo de cálculo de pesos funciona mejor en este caso debido a que la curva de la segunda derivada tiene unas oscilaciones menores en los extremos del intervalo.

#### 9.4. Función seno.

La expresión del polinomio de grado cuatro utilizado es el siguiente:

$$f(t) = \text{sen}(t) \quad \text{en} \quad \left[0, \frac{3}{2}\pi\right] \quad \text{con} \quad n = 101 \text{ puntos}$$

##### 9.4.1. Ordenadas originales.

En primer lugar se muestra la reconstrucción de la función seno mediante Splines Cúbicos Suavizantes para un valor de los pesos fijos, en este caso  $\rho_i = 0,2$ .

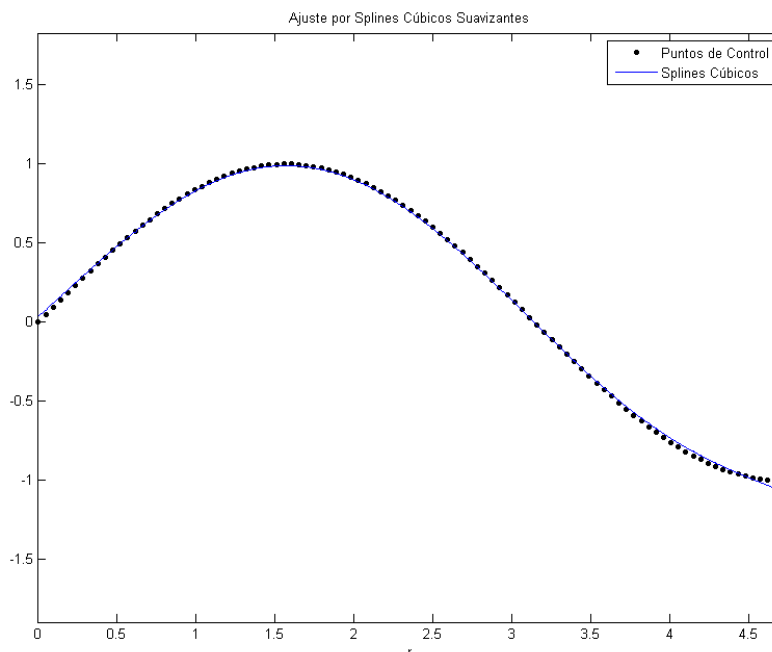


Figura IX.27. – Reconstrucción de la función seno – Pesos fijos.

En segundo lugar se muestra la reconstrucción de la misma función usando el algoritmo que permite adecuar el valor de los pesos según lo requiera la curva.



CAPÍTULO IX: RESULTADOS.

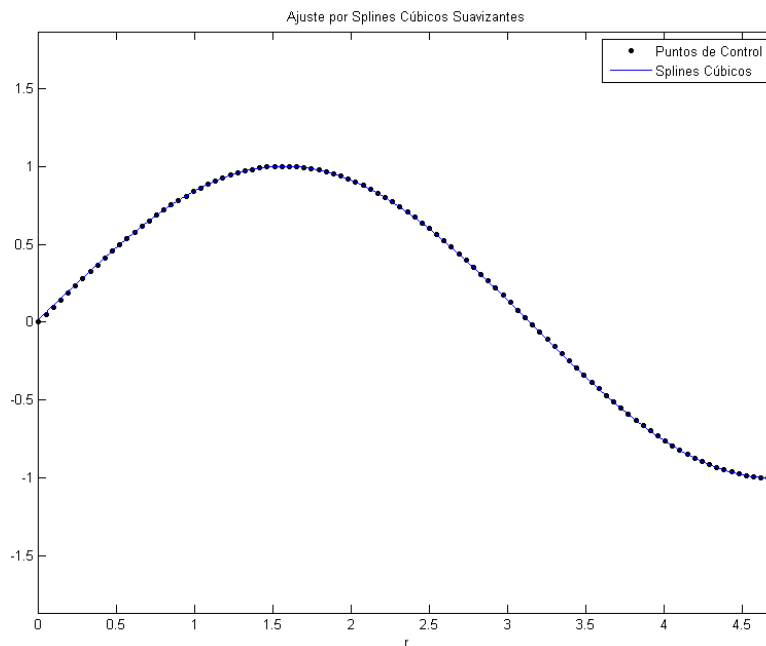


Figura IX.28. – Reconstrucción de la función seno – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

Es posible observar en las dos figuras anteriores como la segunda reconstrucción es claramente más exacta en los extremos del intervalo.

A continuación se muestran sendas gráficas de los valores que toma la segunda derivada de la reconstrucción para ambos casos, las cuales permiten comprobar cuál de los dos métodos es el que mejor realiza la reconstrucción.

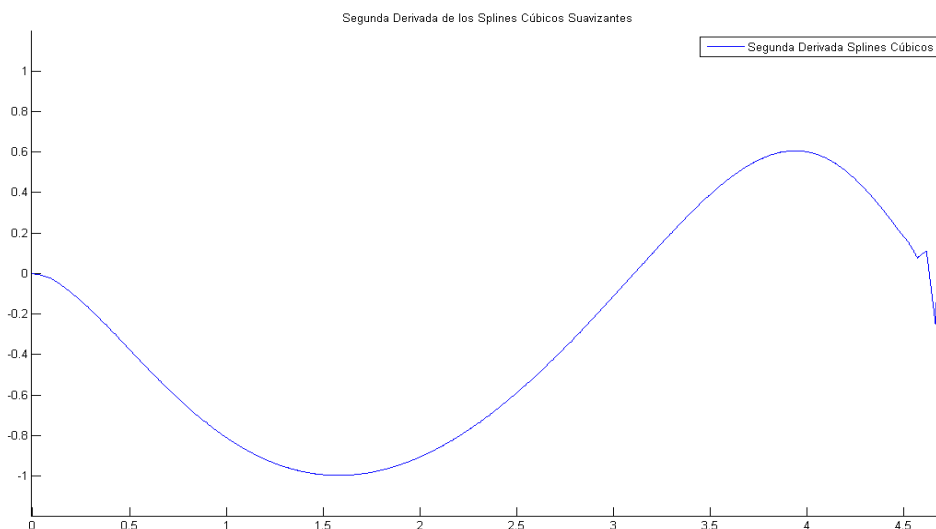
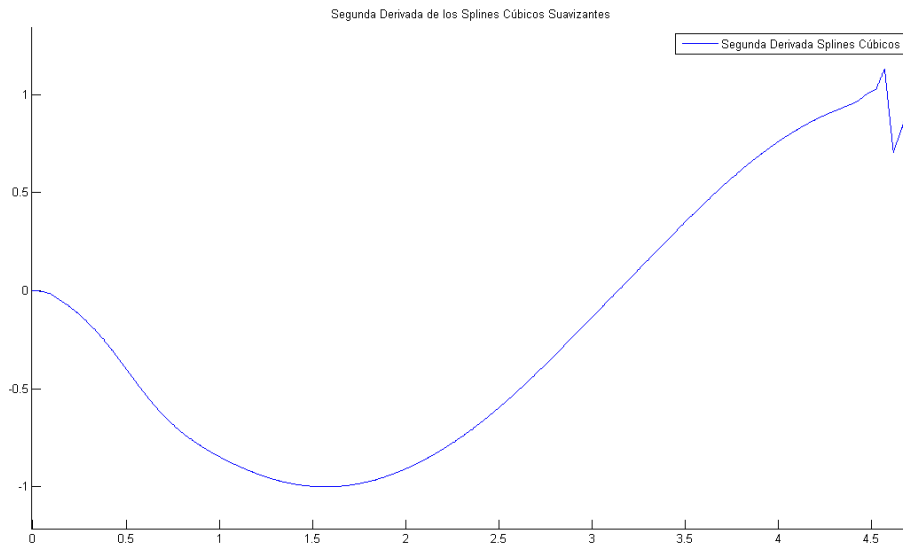


Figura IX.29. – Reconstrucción de la función seno – Segunda derivada con pesos fijos.





*Figura IX.30. – Reconstrucción de la función seno – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.*

Una vez analizadas las gráficas de las segundas derivadas para ambos métodos de reconstrucción, se observa que el algoritmo de cálculo de pesos funciona mejor en este caso debido a que la curva de la segunda derivada presenta unas oscilaciones menores en el extremo derecho del intervalo.

#### **9.4.2. Ordenadas con perturbaciones aisladas.**

En este apartado se analizará la misma función seno que en el apartado anterior al cual se le introduce un error muy significativo en cuatro de sus ordenadas.

En las gráficas que se presentan a continuación se observa que el algoritmo de cálculo de pesos es capaz de identificar perfectamente estas perturbaciones, lo cual permite realizar una reconstrucción mucho más real.

En primer lugar se muestra la reconstrucción del polinomio mediante Splines Cúbicos Suavizantes para un valor de los pesos fijos, en este caso  $\rho_i = 0,2$ .

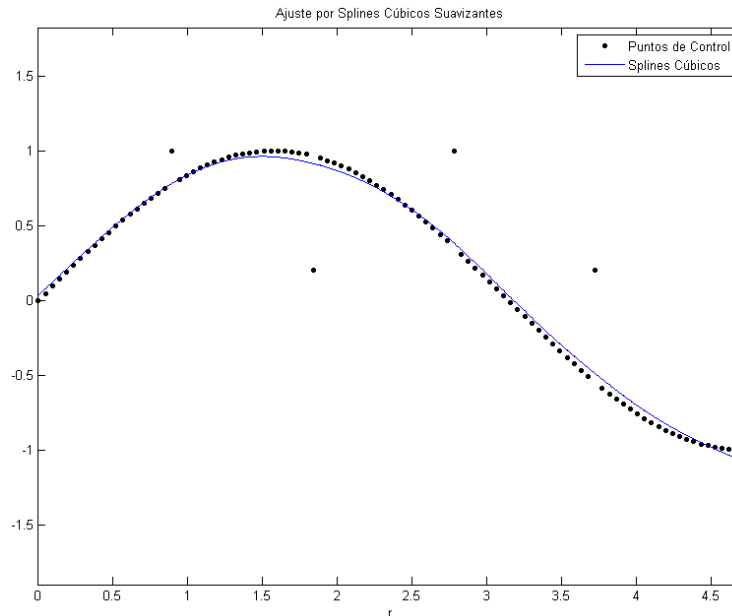


Figura IX.31. – Reconstrucción de la función seno con perturbaciones – Pesos fijos.

En segundo lugar se muestra la reconstrucción del mismo polinomio usando el algoritmo que permite adecuar el valor de los pesos según lo requiera la curva.

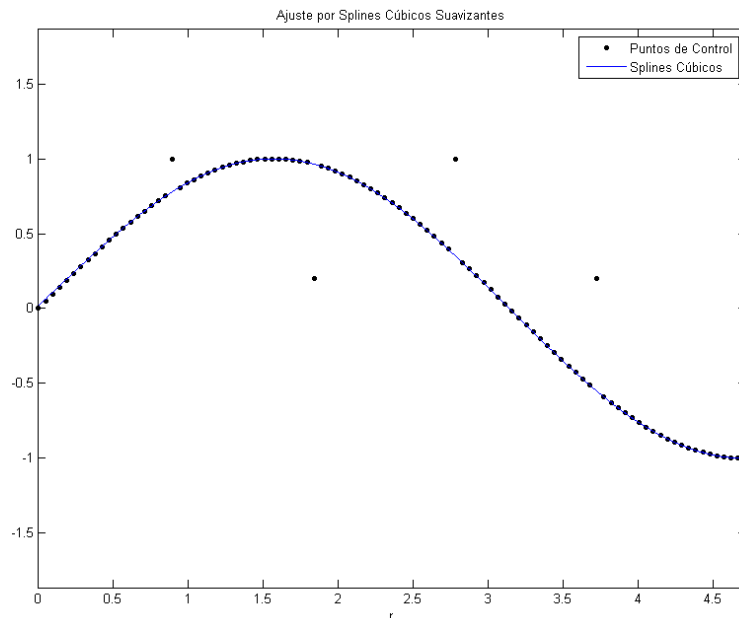


Figura IX.32. – Reconstrucción de la función seno con perturbaciones – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

Claramente se observa como la segunda reconstrucción es mucho más exacta y se adapta mejor a la forma real de la función seno obviando los valores de las ordenadas modificadas.



A continuación se muestran sendas gráficas de los valores que toma la segunda derivada de la reconstrucción para ambos casos, las cuales permiten comprobar cuál de los dos métodos es el que mejor realiza la reconstrucción.

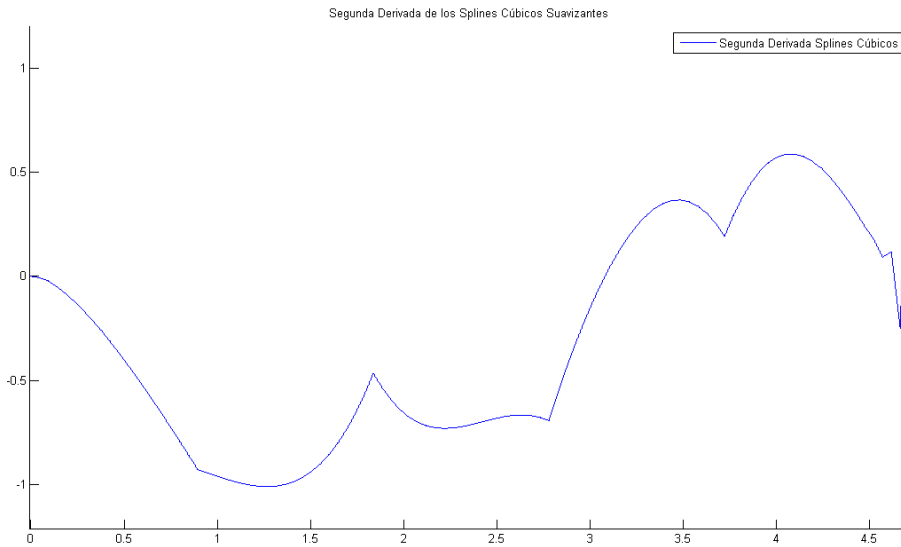


Figura IX.33. – Reconstrucción de la función seno con perturbaciones – Segunda derivada con pesos fijos.

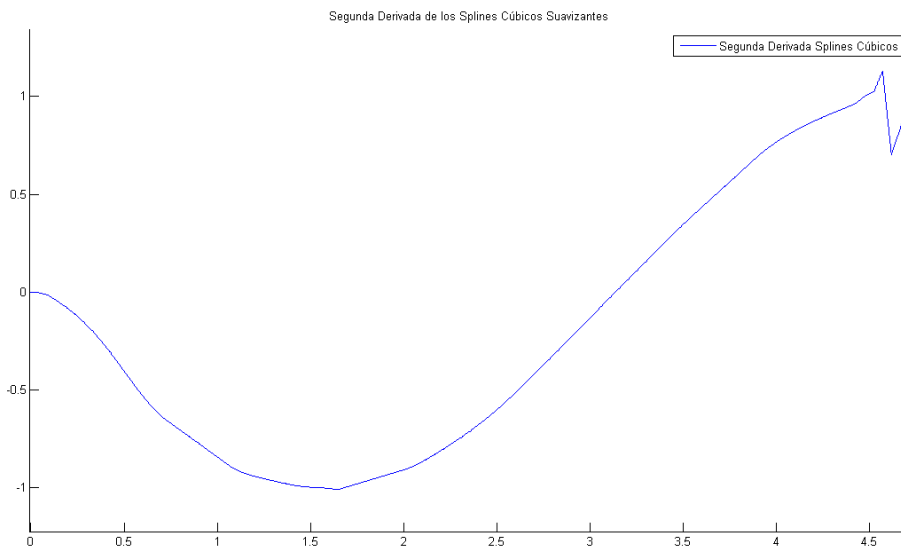


Figura IX.34. – Reconstrucción de la función seno – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.



Resulta evidente una vez analizadas las gráficas de las segundas derivadas para ambos métodos de reconstrucción, que el algoritmo de cálculo de pesos funciona mejor en este caso debido a que se producen menos oscilaciones en la gráfica de la segunda derivada.

#### 9.4.3. Ordenadas con ruido pequeño.

En este apartado se procederá a sumar a la función seno una función de ruido de orden de magnitud de  $10^{-6}$  generada aleatoriamente por Matlab.

En primer lugar se muestra la reconstrucción del polinomio mediante Splines Cúbicos Suavizantes para un valor de los pesos fijos, en este caso  $\rho_i = 0,2$ .

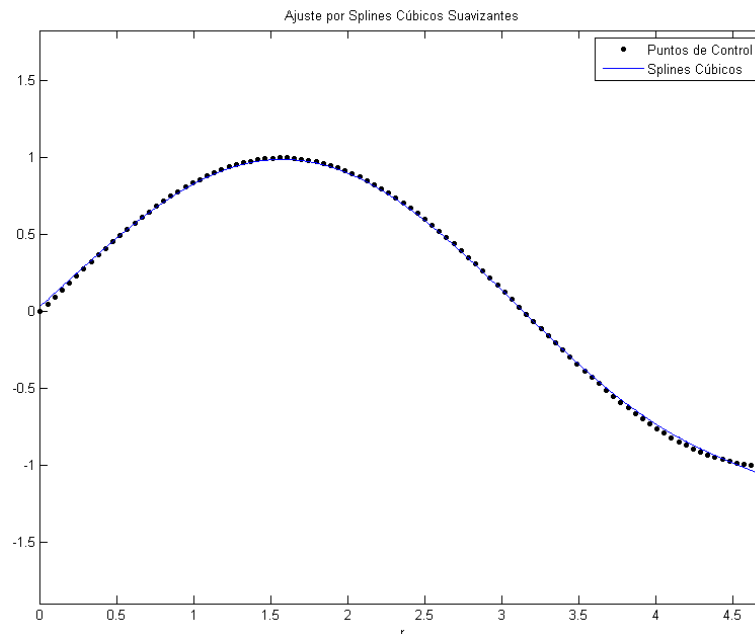


Figura IX.35. – Reconstrucción de la función seno con ruido pequeño – Pesos fijos.

En segundo lugar se muestra la reconstrucción del mismo polinomio usando el algoritmo que permite adecuar el valor de los pesos según lo requiera la curva.

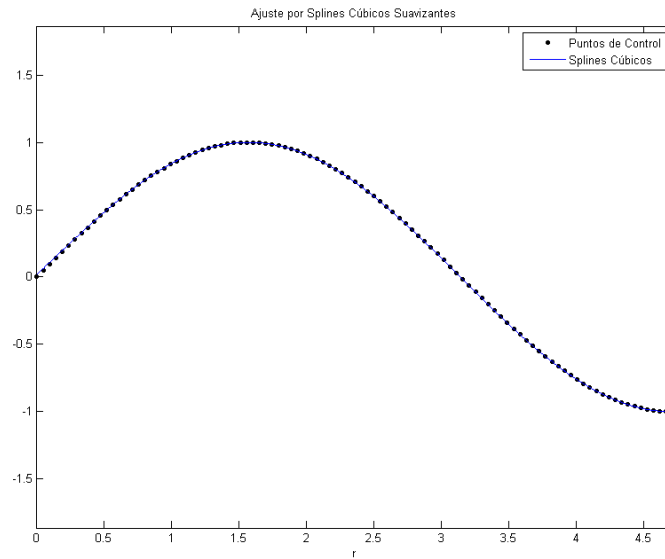


Figura IX.36. – Reconstrucción de la función seno con ruido pequeño – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

Claramente se observa como la segunda reconstrucción es mucho más exacta y se adapta mejor a la forma real de la función seno, sobre todo en los extremos del intervalo.

A continuación se muestran sendas gráficas de los valores que toma la segunda derivada de la reconstrucción para ambos casos, las cuales permiten comprobar cuál de los dos métodos es el que mejor realiza la reconstrucción.

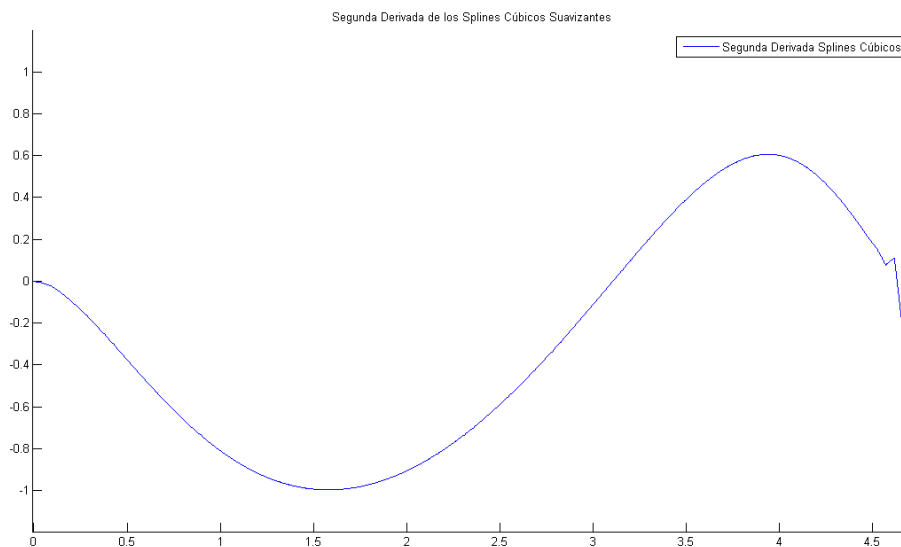


Figura IX.37. – Reconstrucción de la función seno con ruido pequeño – Segunda derivada con pesos fijos.

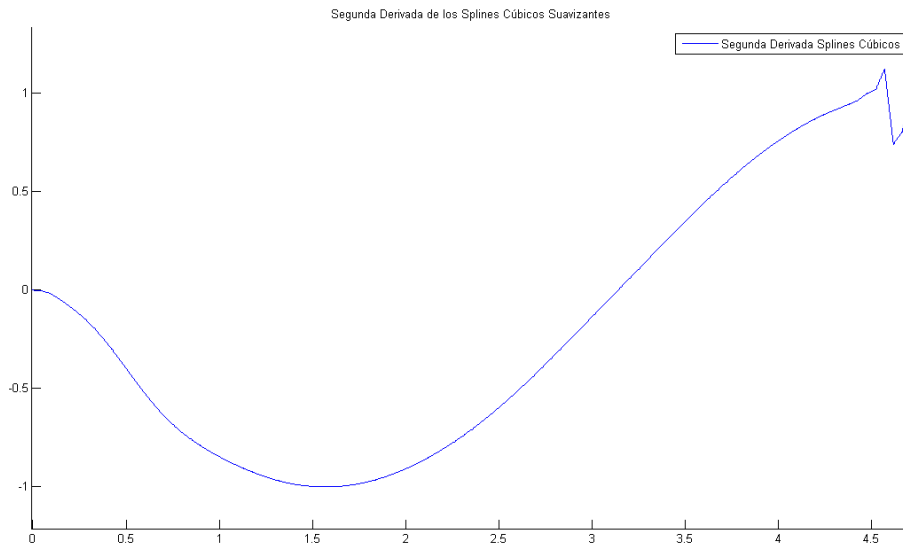


Figura IX.38. – Reconstrucción de la función seno con ruido pequeño – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

Una vez analizadas las gráficas de las segundas derivadas para ambos métodos de reconstrucción, se observa que el algoritmo de cálculo de pesos funciona mejor en este caso debido a que la curva de la segunda derivada presenta unas oscilaciones menores en el extremo derecho del intervalo.

#### 9.4.4. Ordenadas con ruido medio.

En este apartado se procederá a sumar a la función seno una función de ruido de orden de magnitud de  $10^{-3}$  generada aleatoriamente por Matlab.

En primer lugar se muestra la reconstrucción del polinomio mediante Splines Cúbicos Suavizantes para un valor de los pesos fijos, en este caso  $\rho_i = 0,2$ .

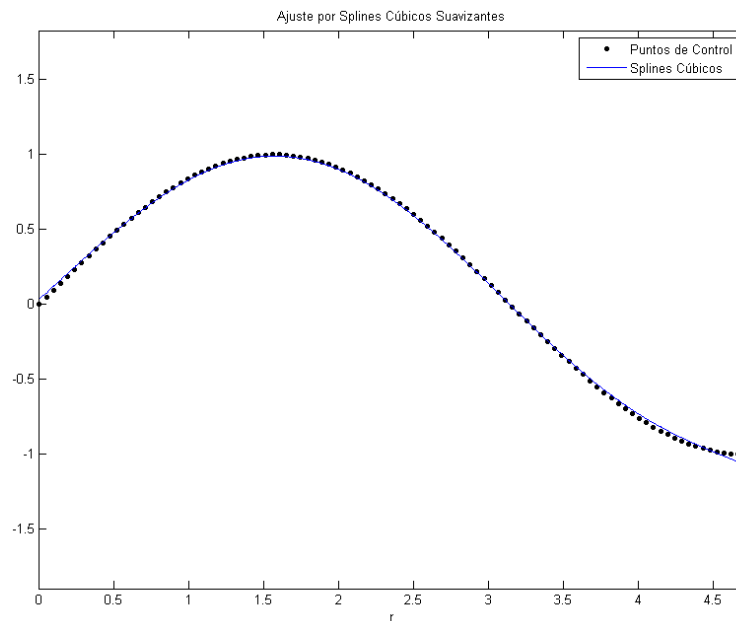


Figura IX.39. – Reconstrucción de la función seno con ruido medio – Pesos fijos.

En segundo lugar se muestra la reconstrucción del mismo polinomio usando el algoritmo que permite adecuar el valor de los pesos según lo requiera la curva.

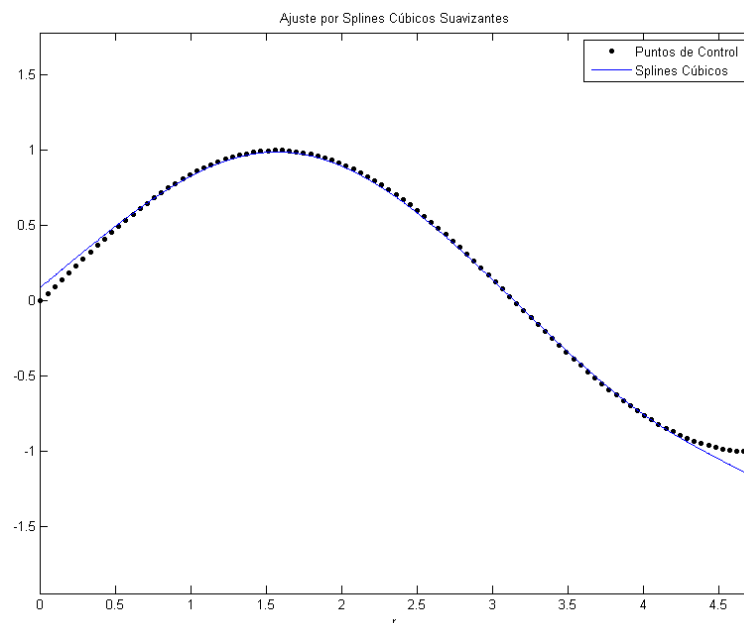
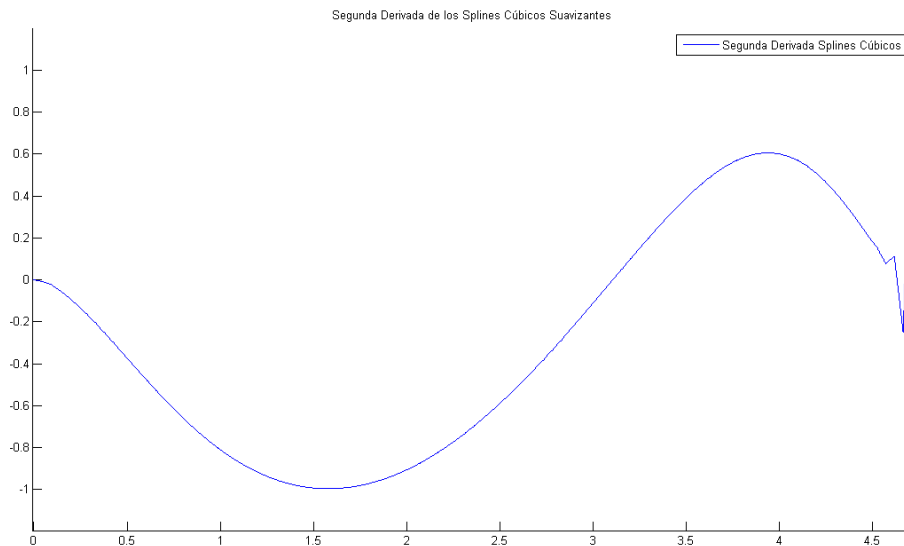


Figura IX.40. – Reconstrucción de la función seno con ruido medio – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

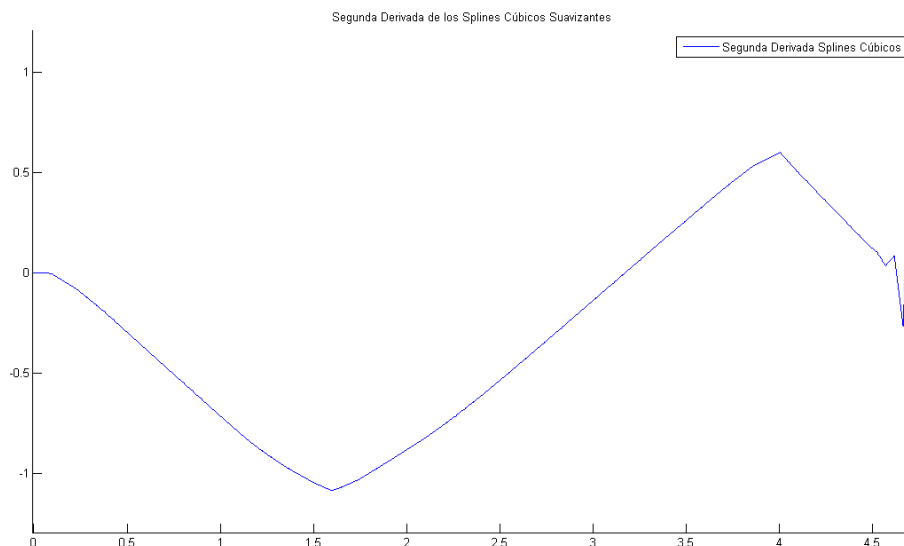
En este caso, y a diferencia de los anteriores, se observa como la primera reconstrucción es más exacta en los extremos del intervalo.



A continuación se muestran sendas gráficas de los valores que toma la segunda derivada de la reconstrucción para ambos casos, las cuales permiten comprobar cuál de los dos métodos es el que mejor realiza la reconstrucción.



*Figura IX.41. – Reconstrucción de la función seno con ruido medio – Segunda derivada con pesos fijos.*



*Figura IX.42. – Reconstrucción de la función seno con ruido medio – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.*

Una vez analizadas las gráficas de las segundas derivadas para ambos métodos de reconstrucción, se observa que la primera reconstrucción funciona mejor en este caso





debido a que la curva de la segunda es mucho más redondeada y sus valores máximo y mínimo se corresponden mejor con los reales.

#### 9.4.5. Ordenadas con ruido grande.

En este apartado se procederá a sumar a la función seno una función de ruido de orden de magnitud de  $10^{-1}$  generada aleatoriamente por Matlab.

En primer lugar se muestra la reconstrucción del polinomio mediante Splines Cúbicos Suavizantes para un valor de los pesos fijos, en este caso  $\rho_i = 0,2$ .

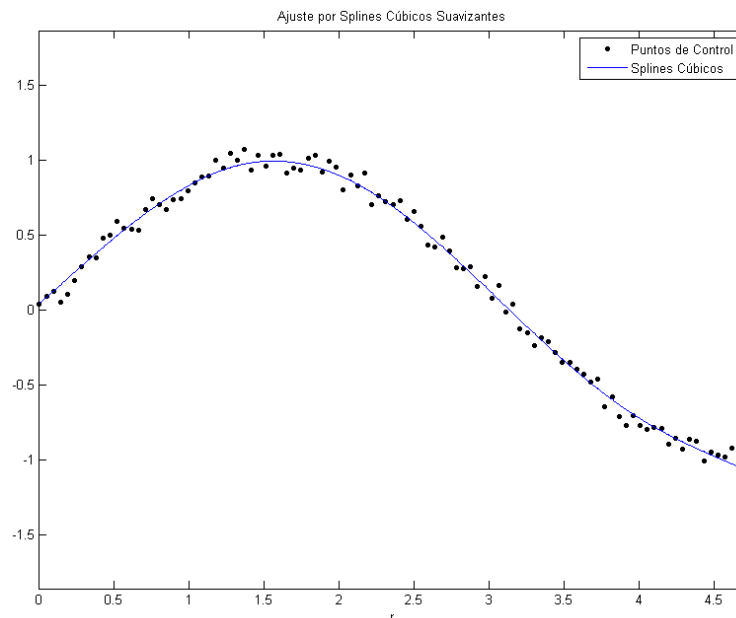


Figura IX.43. – Reconstrucción de la función seno con ruido grande – Pesos fijos.

En segundo lugar se muestra la reconstrucción del mismo polinomio usando el algoritmo que permite adecuar el valor de los pesos según lo requiera la curva.

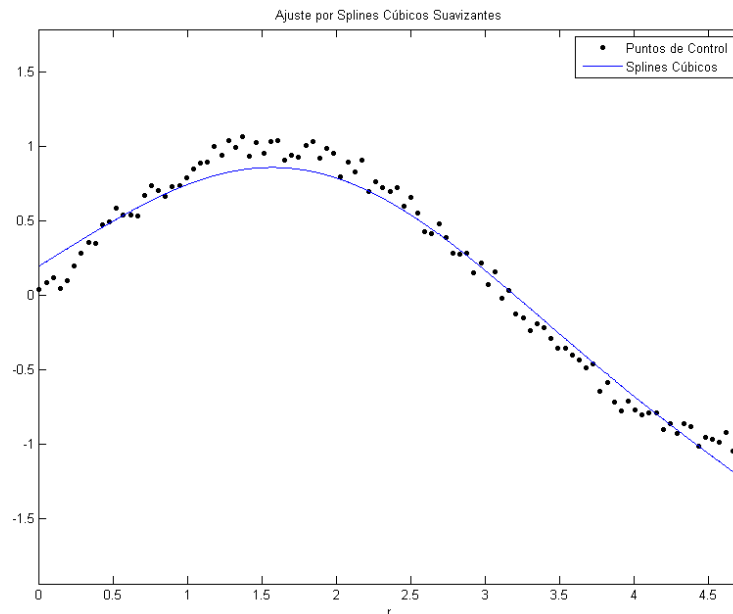


Figura IX.44. – Reconstrucción de la función seno con ruido grande – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

En este caso, se observa como la primera reconstrucción es más exacta en todo el intervalo, adaptándose mucho mejor a la forma real de la función seno.

A continuación se muestran sendas gráficas de los valores que toma la segunda derivada de la reconstrucción para ambos casos, las cuales permiten comprobar cuál de los dos métodos es el que mejor realiza la reconstrucción.

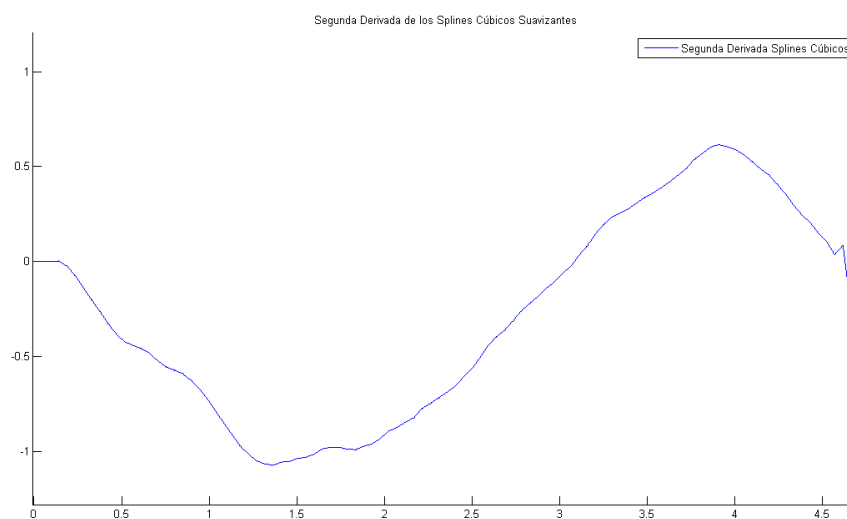


Figura IX.45. – Reconstrucción de la función seno con ruido grande – Segunda derivada con pesos fijos.

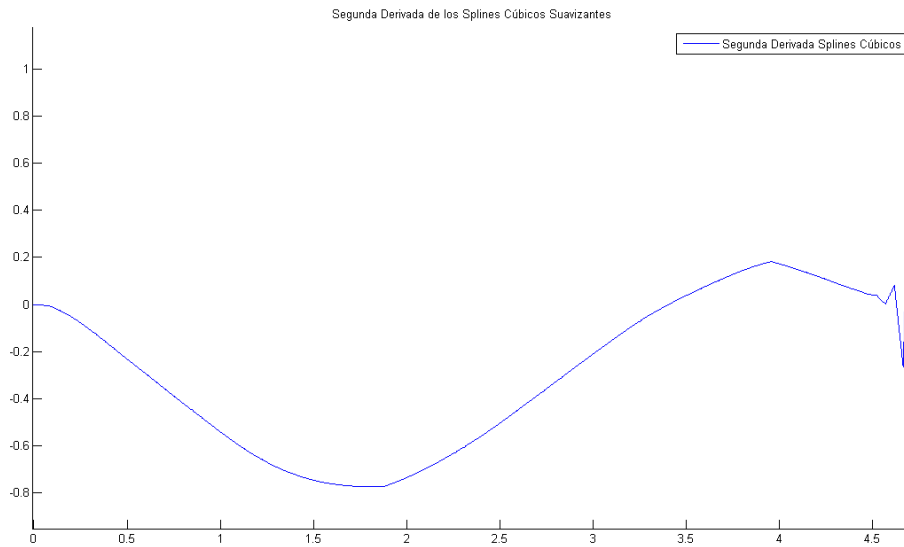


Figura IX.46. – Reconstrucción de la función seno con ruido grande – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

Una vez analizadas las gráficas de las segundas derivadas para ambos métodos de reconstrucción, se observa que la primera reconstrucción funciona mejor en este caso debido a que, aunque con una forma senoidal algo irregular, sus valores máximo y mínimo se corresponden mejor con los reales.

## 9.5. Embarcación de recreo: línea de agua.

### 9.5.1. Ordenadas originales.

En este apartado se analizará una línea de agua real de una embarcación de recreo. Las ordenadas introducidas corresponden a medidas obtenidas mediante una estación total de medida con la embarcación puesta en dique seco.

En primer lugar se muestra la reconstrucción del polinomio mediante Splines Cúbicos Suavizantes para un valor de los pesos fijos, en este caso  $\rho_i = 0,2$ .

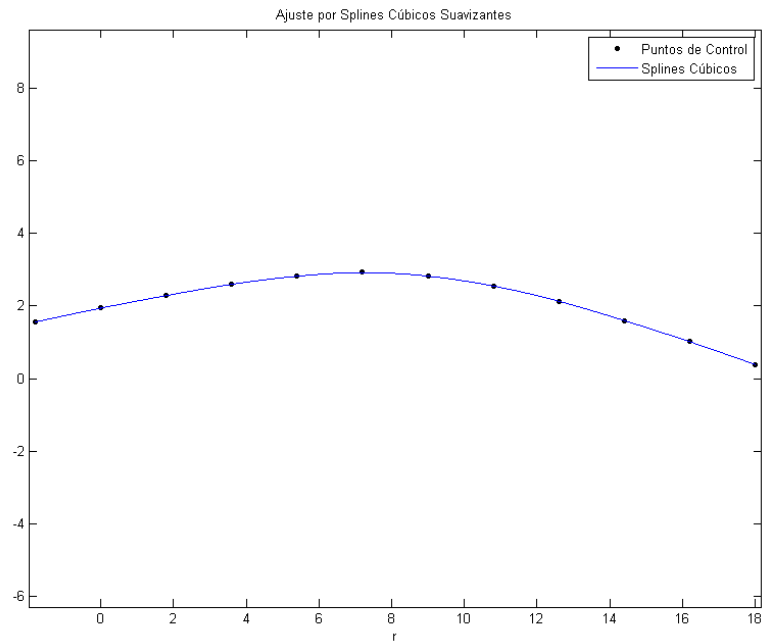


Figura IX.47. – Reconstrucción de una línea de agua – Pesos fijos.

En segundo lugar se muestra la reconstrucción del mismo polinomio usando el algoritmo que permite adecuar el valor de los pesos según lo requiera la curva.

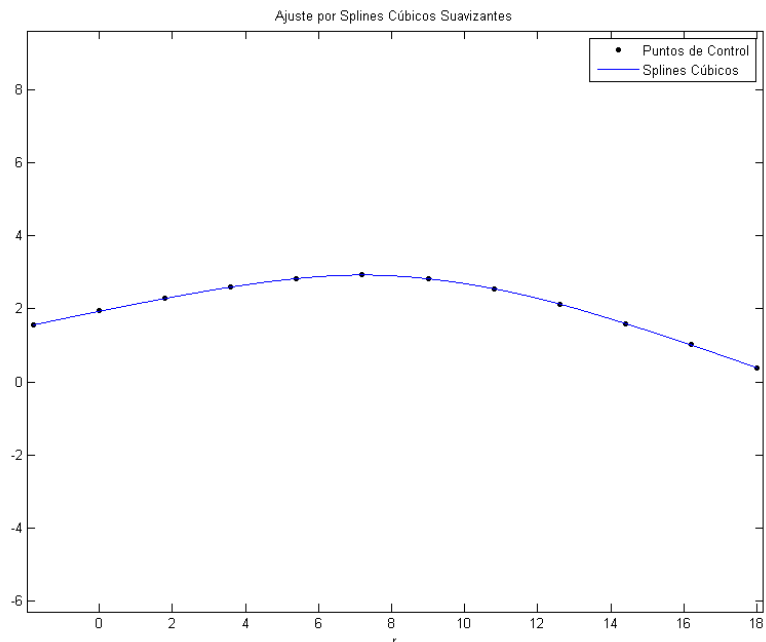


Figura IX.48. – Reconstrucción de una línea de agua – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.



A continuación se muestran sendas gráficas de los valores que toma la segunda derivada de la reconstrucción para ambos casos, las cuales permiten comprobar cuál de los dos métodos es el que mejor realiza la reconstrucción.

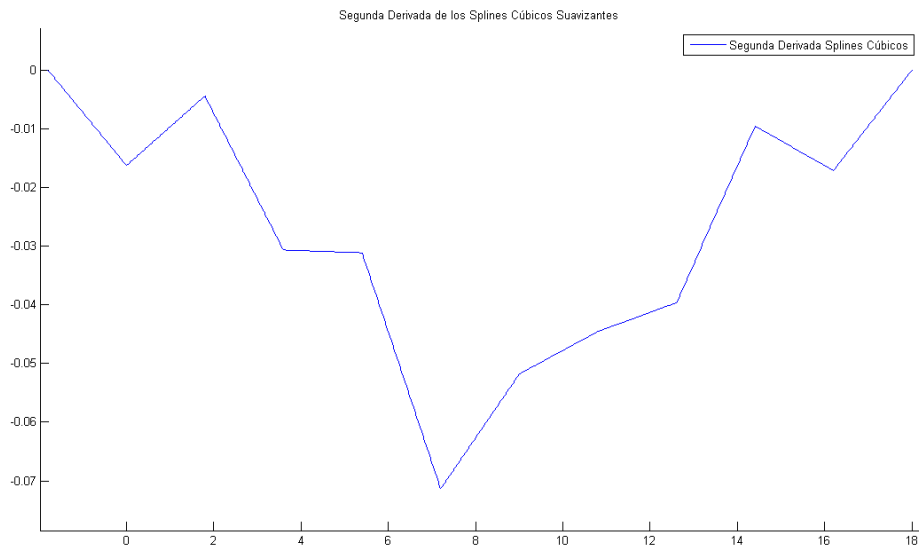


Figura IX.49. – Reconstrucción de una línea de agua – Segunda derivada con pesos fijos.

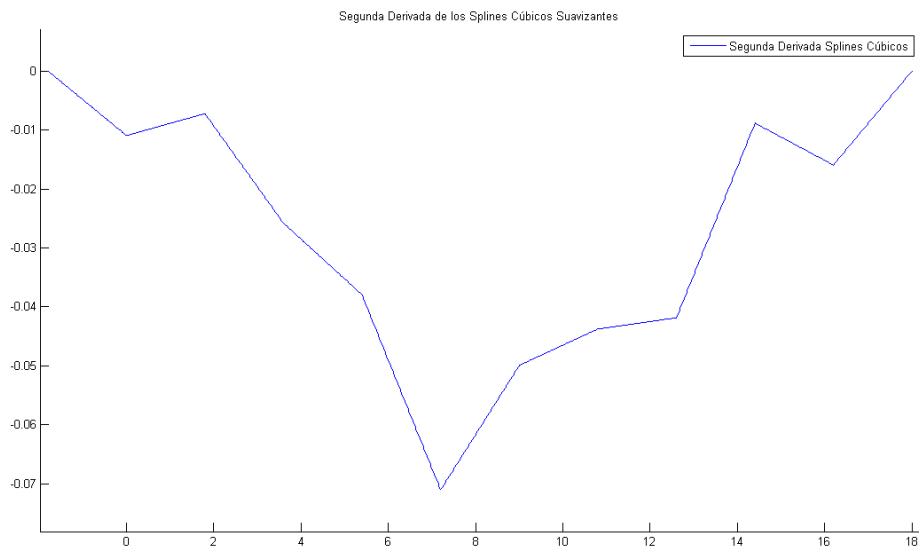


Figura IX.50. – Reconstrucción de una línea de agua – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.



Al analizar las gráficas de las segundas derivadas para ambos métodos de reconstrucción se observa que el algoritmo de cálculo de pesos funciona mejor en este caso debido a que los picos que se producen en las mismas son de menor tamaño.

### 9.5.2. Ordenadas perturbadas.

En este apartado se analizará la misma línea de agua que en el apartado anterior al cual se le introduce un error muy significativo en dos de sus ordenadas. Dicho error podría ser un caso real de una mala medición.

En las gráficas que se presentan a continuación se observa que el algoritmo de cálculo de pesos es capaz de identificar perfectamente esta perturbación, lo cual permite realizar una reconstrucción mucho más real.

En primer lugar se muestra la reconstrucción del polinomio mediante Splines Cúbicos Suavizantes para un valor de los pesos fijos, en este caso  $\rho_i = 0,2$ .

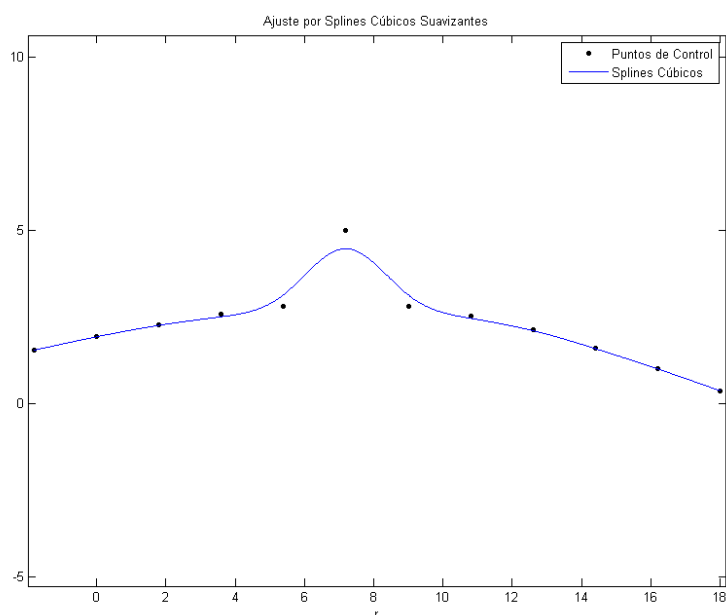


Figura IX.51. – Reconstrucción de una línea de agua con una perturbación – Pesos fijos.

En segundo lugar se muestra la reconstrucción del mismo polinomio usando el algoritmo que permite adecuar el valor de los pesos según lo requiera la curva.

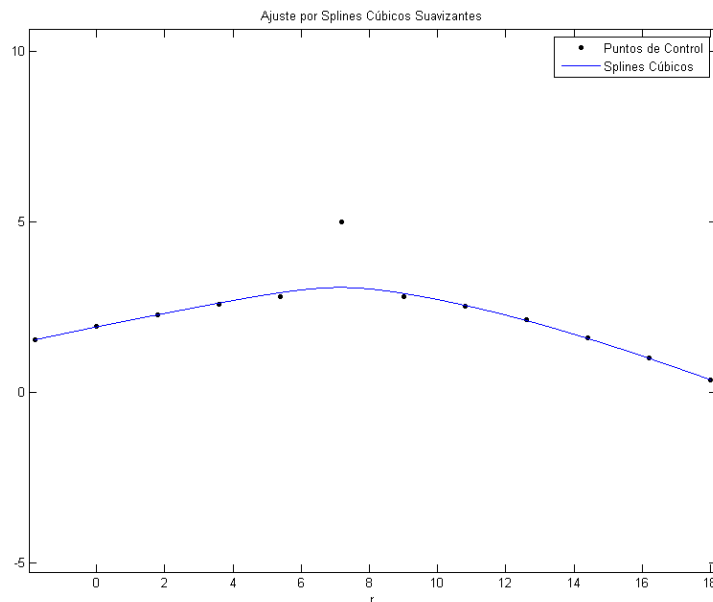


Figura IX.52. – Reconstrucción de una línea de agua con una perturbación – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

A continuación se muestran sendas gráficas de los valores que toma la segunda derivada de la reconstrucción para ambos casos, las cuales permiten comprobar cuál de los dos métodos es el que mejor realiza la reconstrucción.

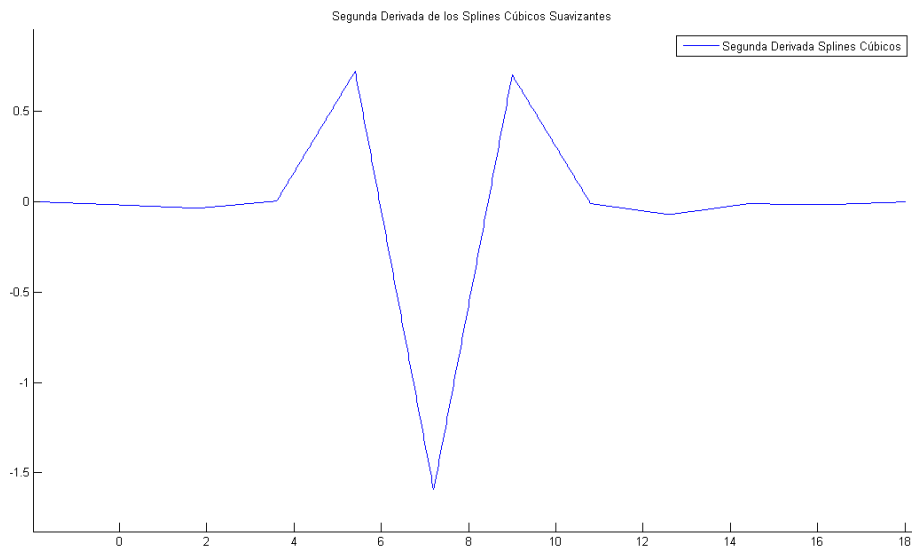


Figura IX.53. – Reconstrucción de una línea de agua con una perturbación – Segunda derivada con pesos fijos.

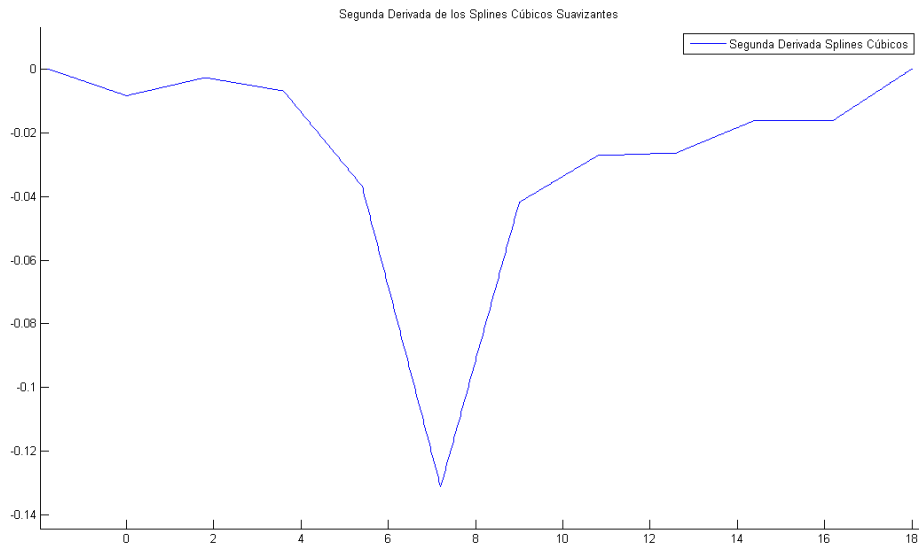


Figura IX.54. – Reconstrucción de una línea de agua con una perturbación – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

Resulta evidente una vez analizadas las gráficas de las segundas derivadas para ambos métodos de reconstrucción, que el algoritmo de cálculo de pesos funciona mejor en este caso debido a que se producen menos picos en la gráfica de la segunda derivada y además, éstas son mucho menores en orden de magnitud.

#### 9.6. Polinomio de grado cuatro con variación de pesos.

En este apartado se analizará el mismo polinomio de grado cuatro que el apartado 9.3. En este caso se procederá a variar el valor fijo de los pesos  $\rho_i$  para estudiar si el algoritmo propuesto para el cálculo de los pesos es efectivamente, mejor que el anterior.

La expresión del polinomio de grado cuatro utilizado es el siguiente:

$$f(t) = \frac{1}{14}(t + 4)(t + 1)(t - 1)(t - 3) + 0,5 \quad \text{en } [-5,4] \quad \text{con } n = 50 \text{ puntos}$$

##### 9.6.1. Ordenadas originales.

En primer lugar se procede a recordar los resultados obtenidos cuando se reconstruye este polinomio con el algoritmo de cálculo de pesos desarrollado en este proyecto.



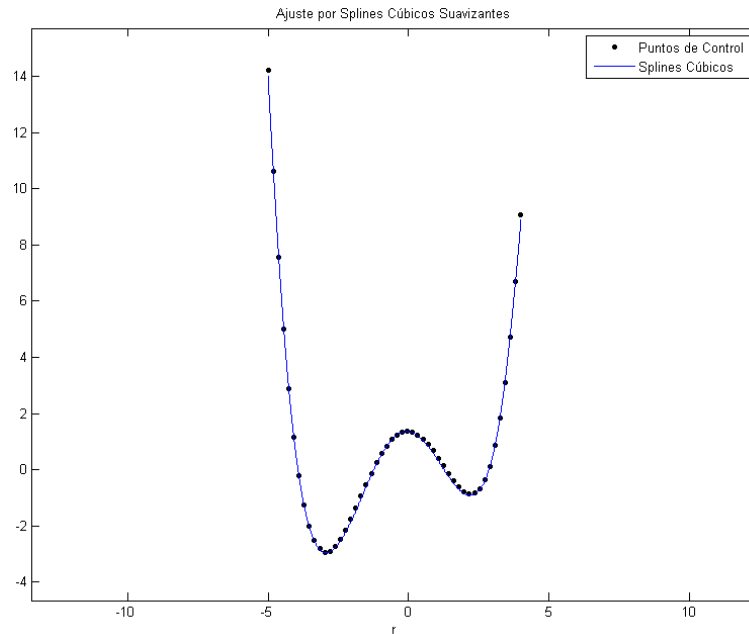


Figura IX.55. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

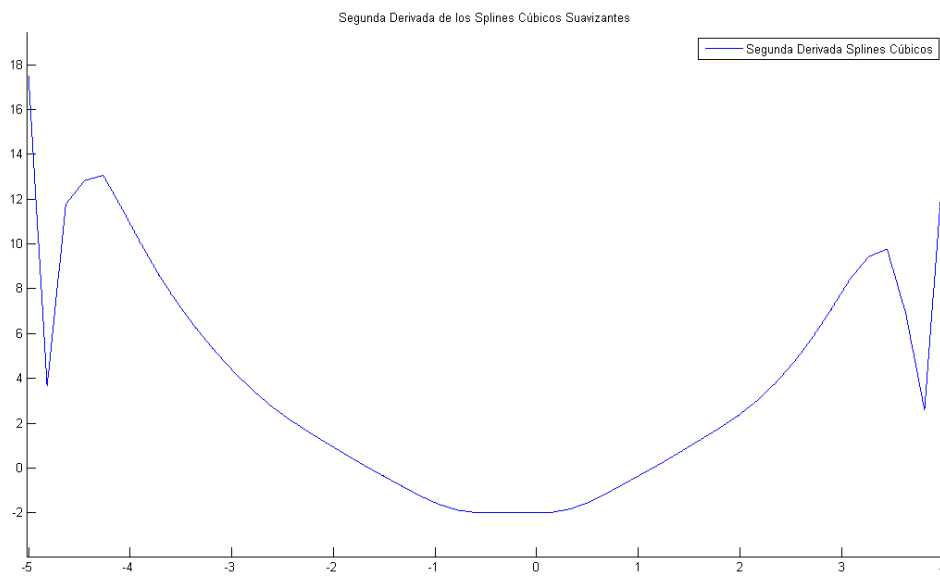


Figura IX.56. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.



### 9.6.1.1. Coeficientes de peso $\rho_i = 0$ .

En este apartado se ha obtenido al reconstrucción mediante Splines Cúbicos Suavizantes con un valor de pesos fijos establecido en  $\rho_i = 0$ . Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

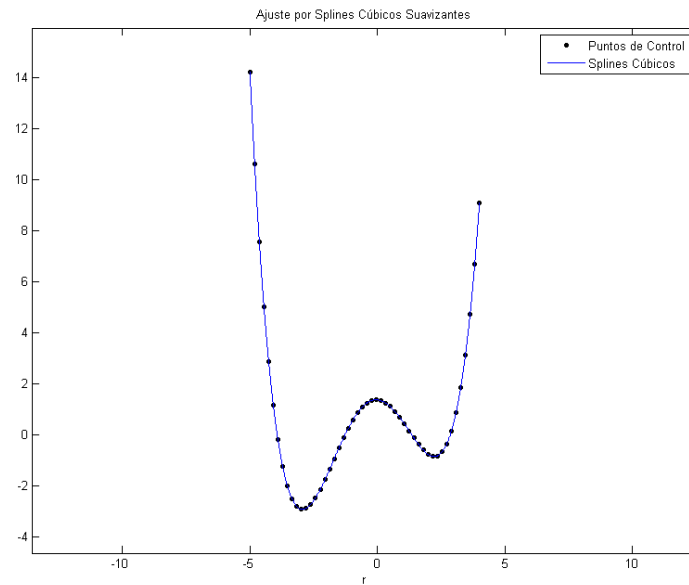


Figura IX.57. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos fijos con valor 0.

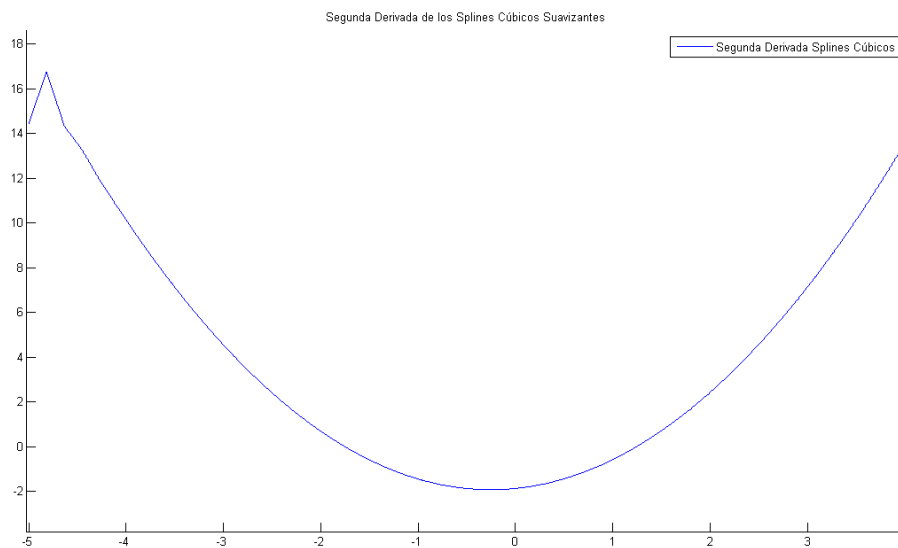


Figura IX.58. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos con valor 0.



9.6.1.2. Coeficientes de peso  $\rho_i = 0,4$ .

En este apartado se ha obtenido al reconstrucción mediante Splines Cúbicos Suavizantes con un valor de pesos fijos establecido en  $\rho_i = 0,4$ . Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

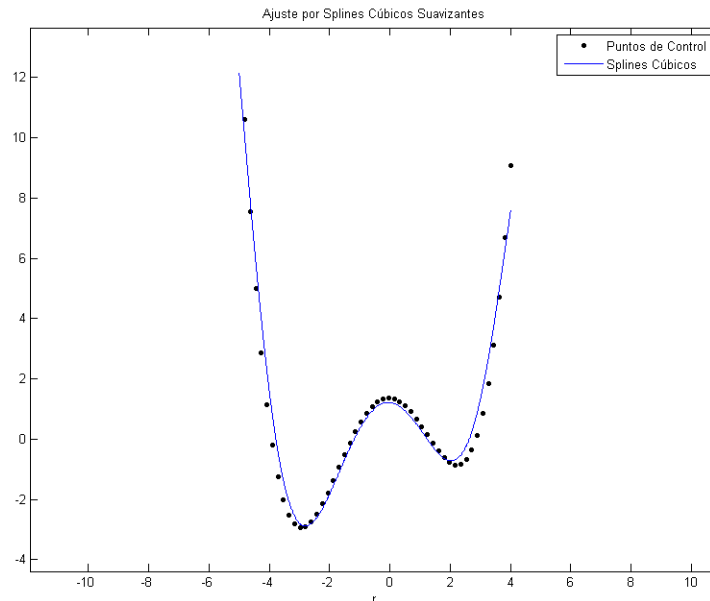


Figura IX.59. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos fijos con valor 0,4.

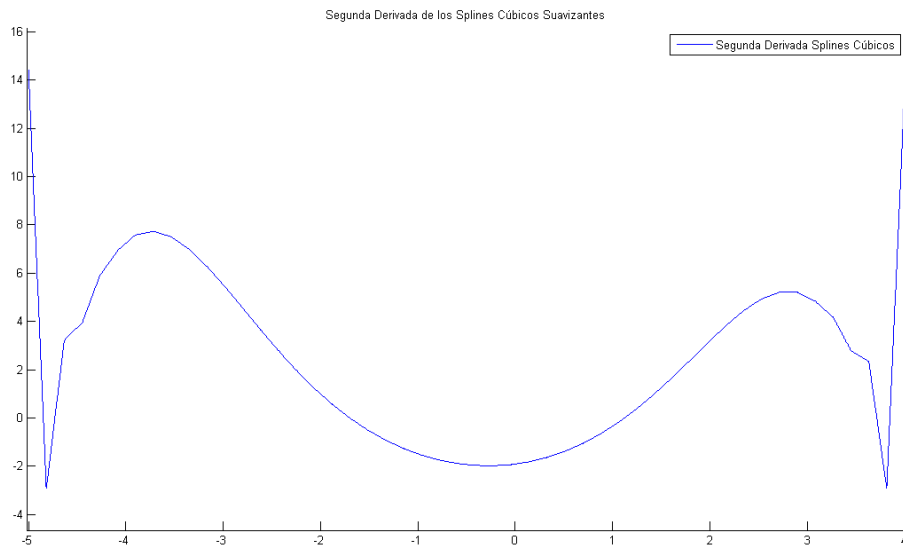
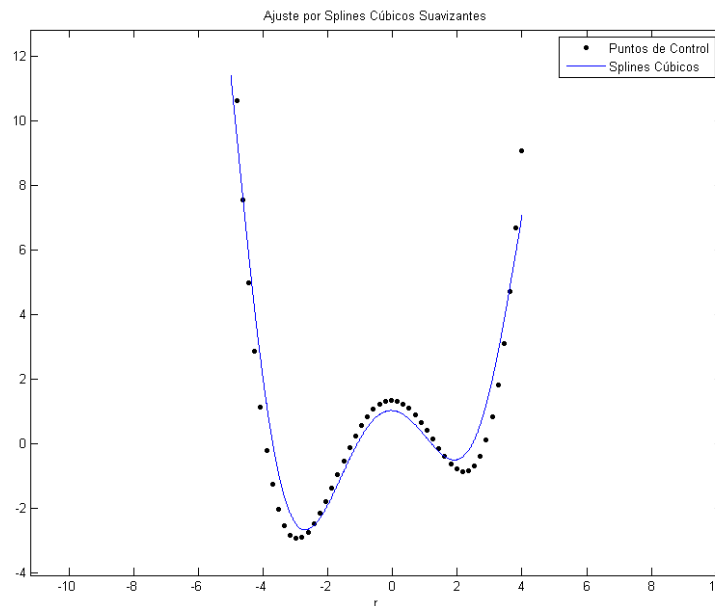


Figura IX.60. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos con valor 0,4.

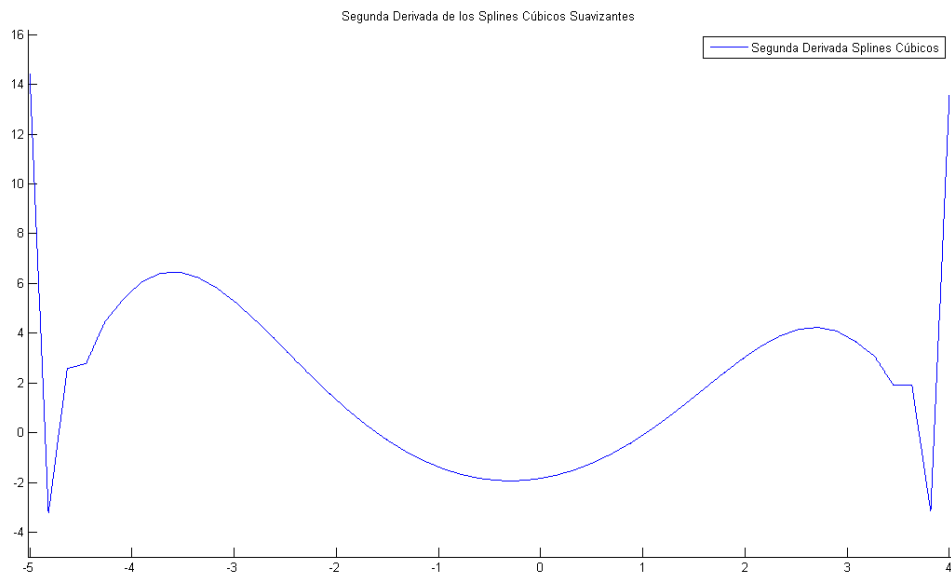


**9.6.1.3. Coeficientes de peso  $\rho_i = 0,8$ .**

En este apartado se ha obtenido al reconstrucción mediante Splines Cúbicos Suavizantes con un valor de pesos fijos establecido en  $\rho_i = 0,8$ . Los resultados obtenidos se muestran a continuación.



*Figura IX.61. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos fijos con valor 0,8.*



*Figura IX.62. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos con valor 0,8.*



#### 9.6.1.4. Coeficientes de peso $\rho_i = 1$ .

En este apartado se ha obtenido al reconstrucción mediante Splines Cúbicos Suavizantes con un valor de pesos fijos establecido en  $\rho_i = 1$ . Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

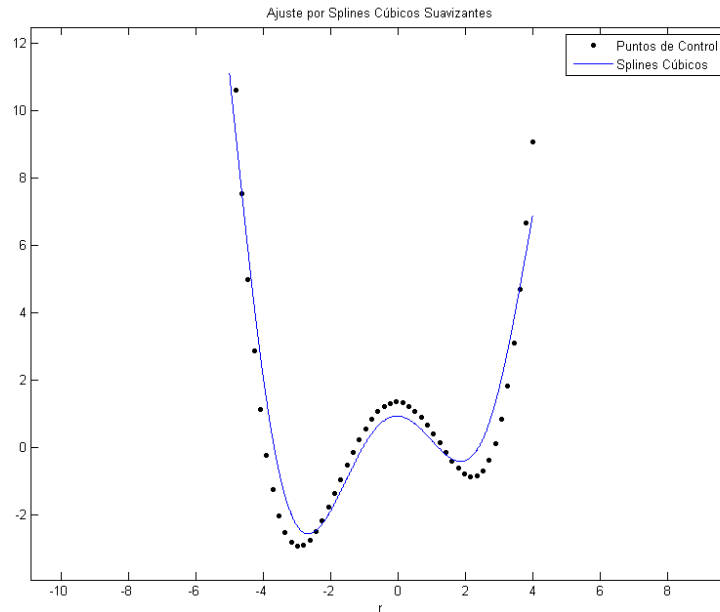


Figura IX.63. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos fijos con valor 1.

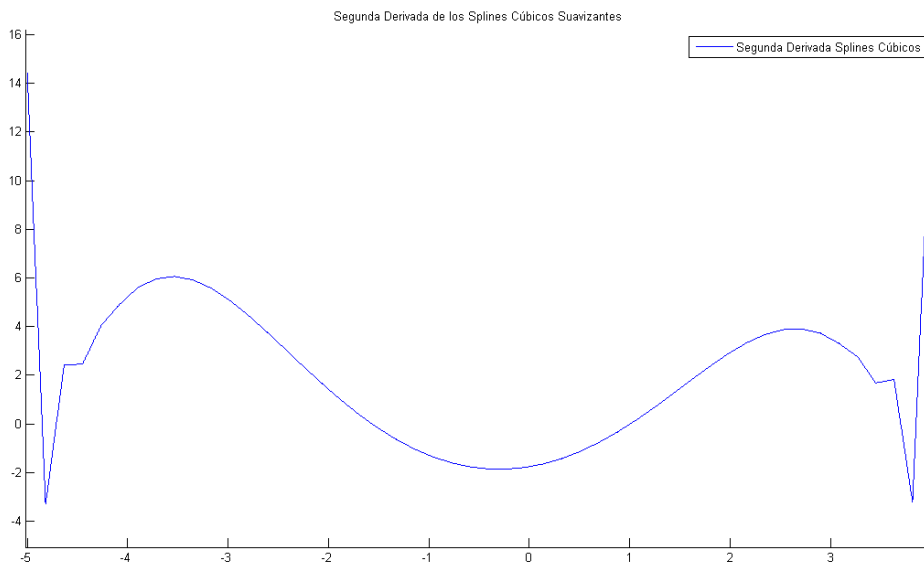


Figura IX.64. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos con valor 1.



### 9.6.1.5. Coeficientes de peso $\rho_i = 2,5$ .

En este apartado se ha obtenido al reconstrucción mediante Splines Cúbicos Suavizantes con un valor de pesos fijos establecido en  $\rho_i = 2,5$ . Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

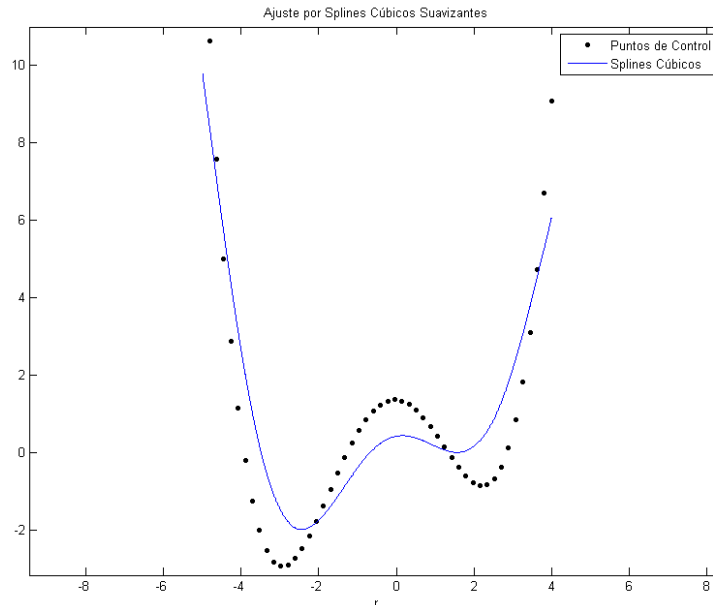


Figura IX.65. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Pesos fijos con valor 2,5.

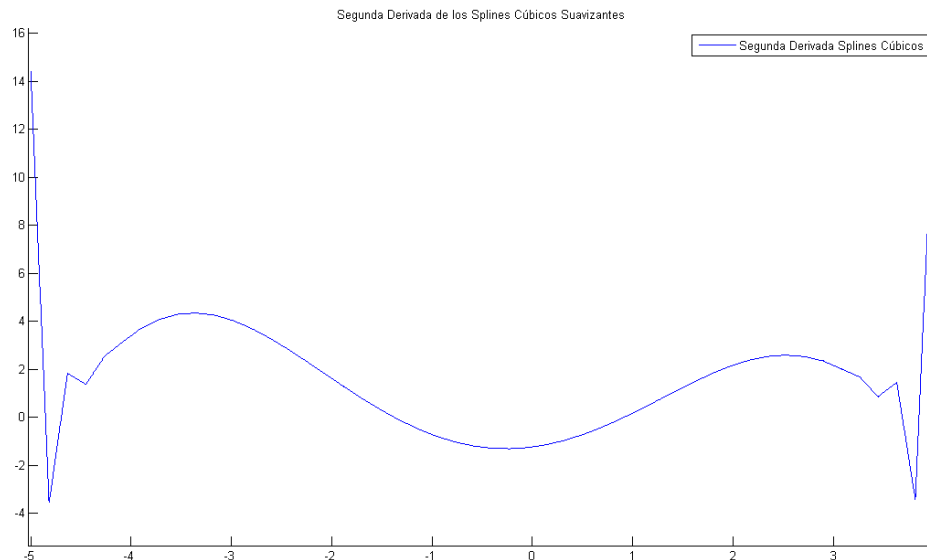


Figura IX.66. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro – Segunda derivada con pesos con valor 2,5.



Como se puede comprobar, con valor de pesos  $\rho_i = 0$  la reconstrucción del polinomio es casi exacta y además mejora los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto. Sin embargo, se observa que conforme aumenta el valor de los pesos, la reconstrucción es cada vez peor, llegando a ser totalmente distinta de la original.

### 9.6.2. Ordenadas perturbadas.

En primer lugar se procede a recordar los resultados obtenidos cuando se reconstruye este polinomio con el algoritmo de cálculo de pesos desarrollado en este proyecto.

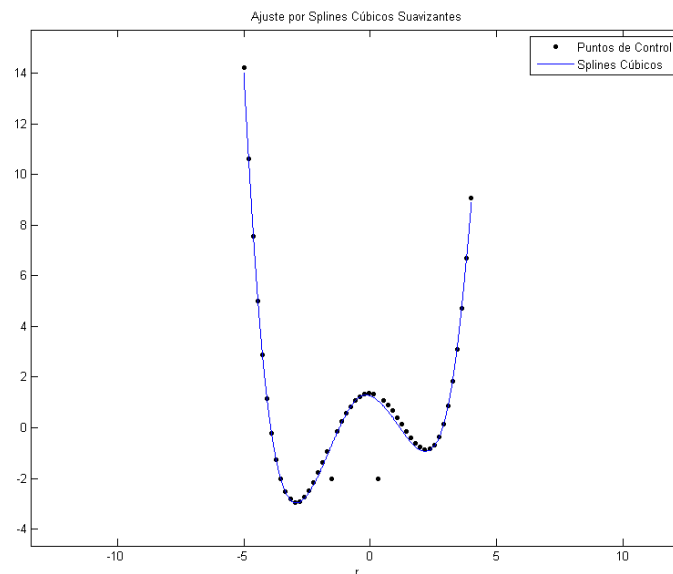


Figura IX.67. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.

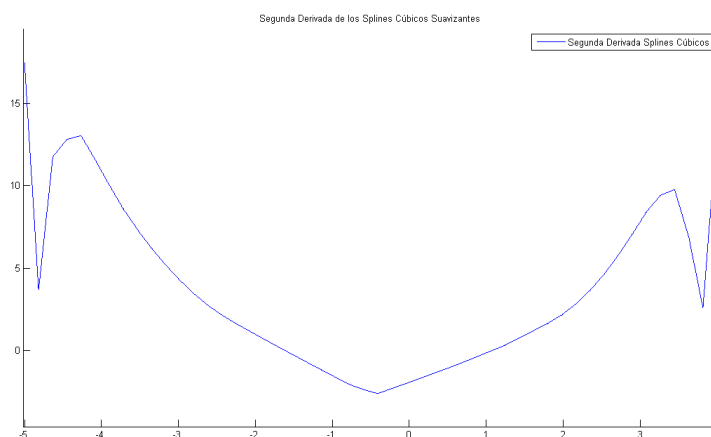


Figura IX.68. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos calculados mediante el algoritmo propuesto.



### 9.6.2.1. Coeficientes de peso $\rho_i = 0$ .

En este apartado se ha obtenido al reconstrucción mediante Splines Cúbicos Suavizantes con un valor de pesos fijos establecido en  $\rho_i = 0$ . Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

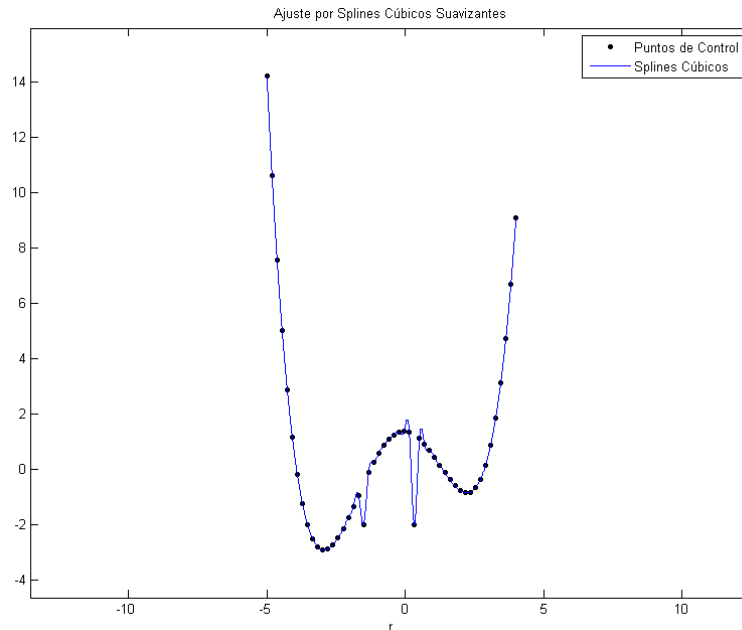


Figura IX.69. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos fijos con valor 0.

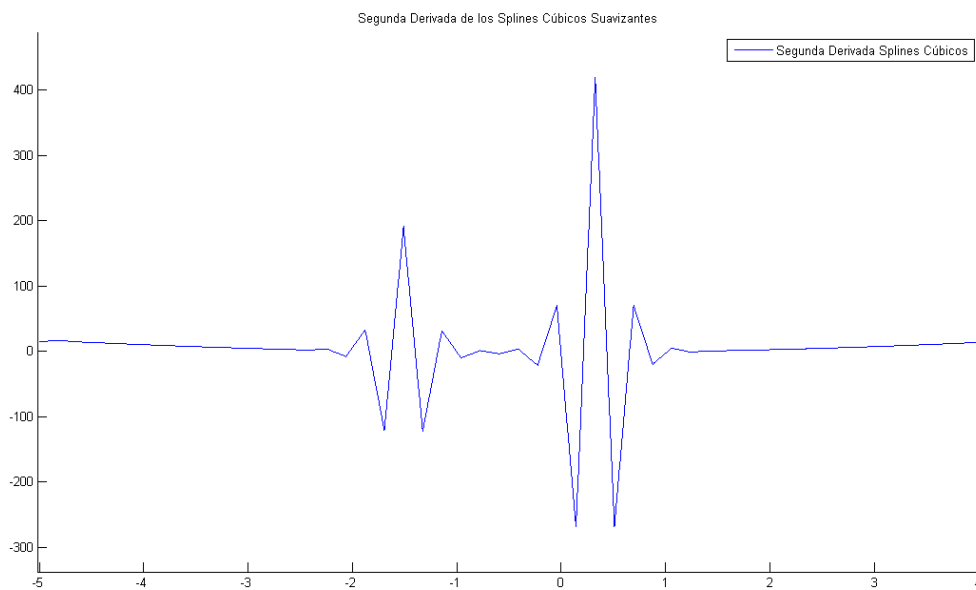


Figura IX.70. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos con valor 0.





### 9.6.2.2. Coeficientes de peso $\rho_i = 0,4$ .

En este apartado se ha obtenido al reconstrucción mediante Splines Cúbicos Suavizantes con un valor de pesos fijos establecido en  $\rho_i = 0,4$ . Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

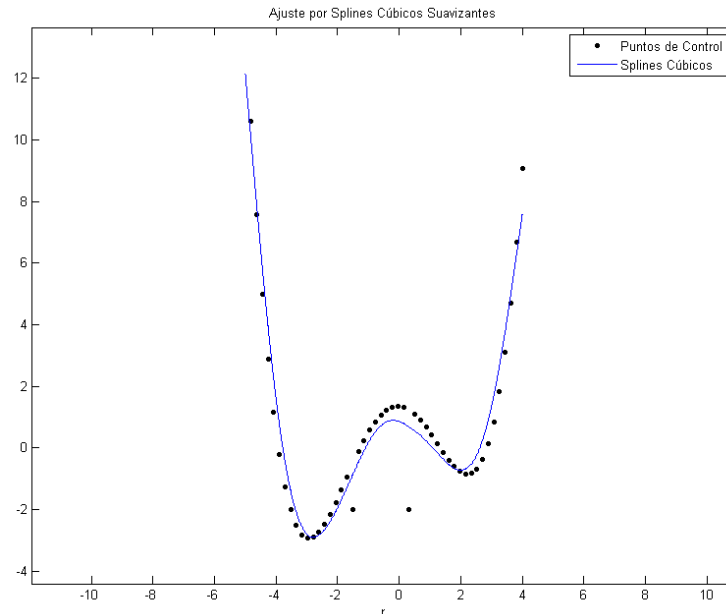


Figura IX.71. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos fijos con valor 0,4.

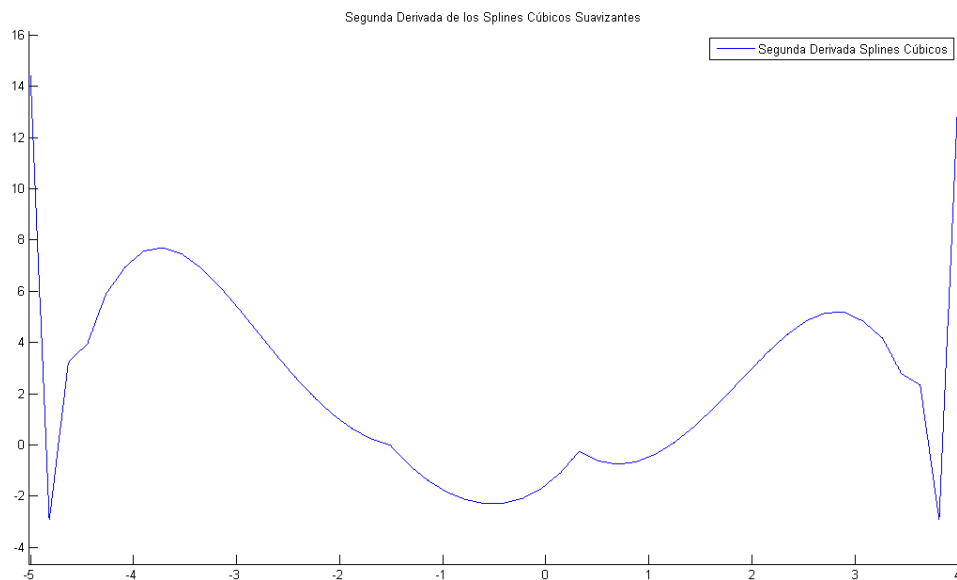


Figura IX.72. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos con valor 0,4.



### 9.6.2.3. Coeficientes de peso $\rho_i = 0,8$ .

En este apartado se ha obtenido al reconstrucción mediante Splines Cúbicos Suavizantes con un valor de pesos fijos establecido en  $\rho_i = 0,8$ . Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

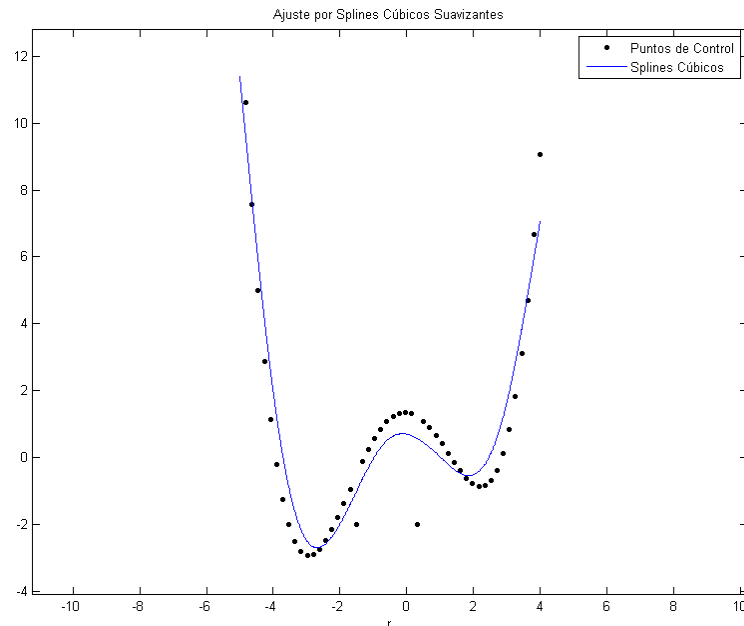


Figura IX.73. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos fijos con valor 0,8.

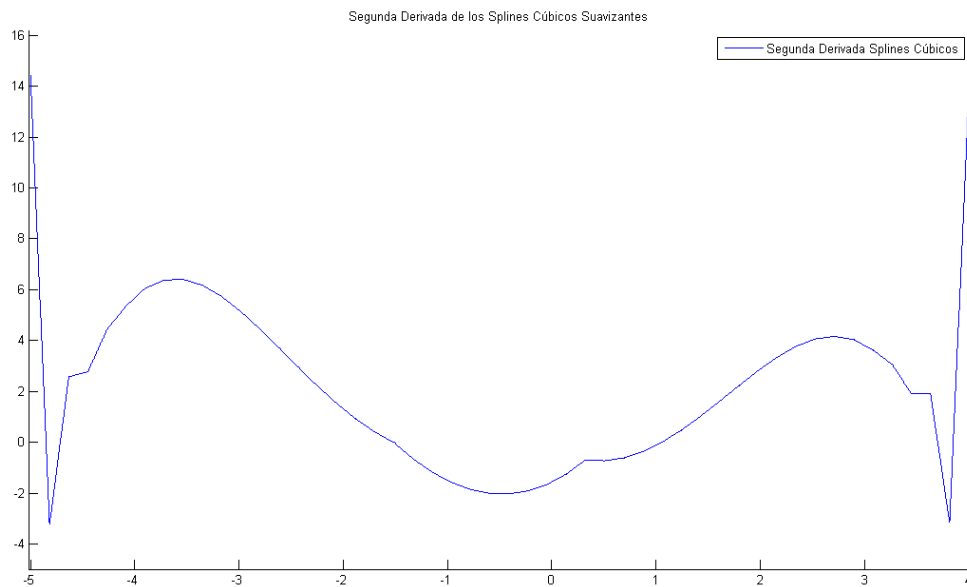


Figura IX.74. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos con valor 0,8.



### 9.6.2.4. Coeficientes de peso $\rho_i = 1$ .

En este apartado se ha obtenido al reconstrucción mediante Splines Cúbicos Suavizantes con un valor de pesos fijos establecido en  $\rho_i = 1$ . Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

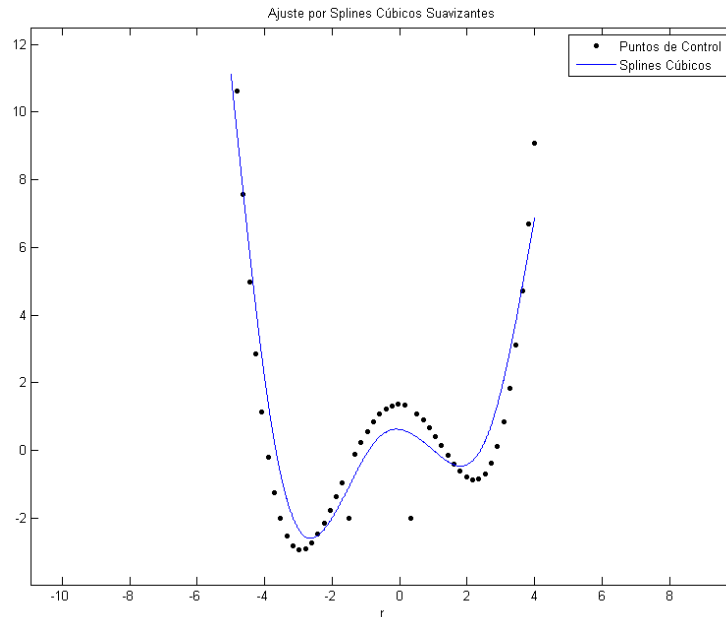


Figura IX.75. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos fijos con valor 1.

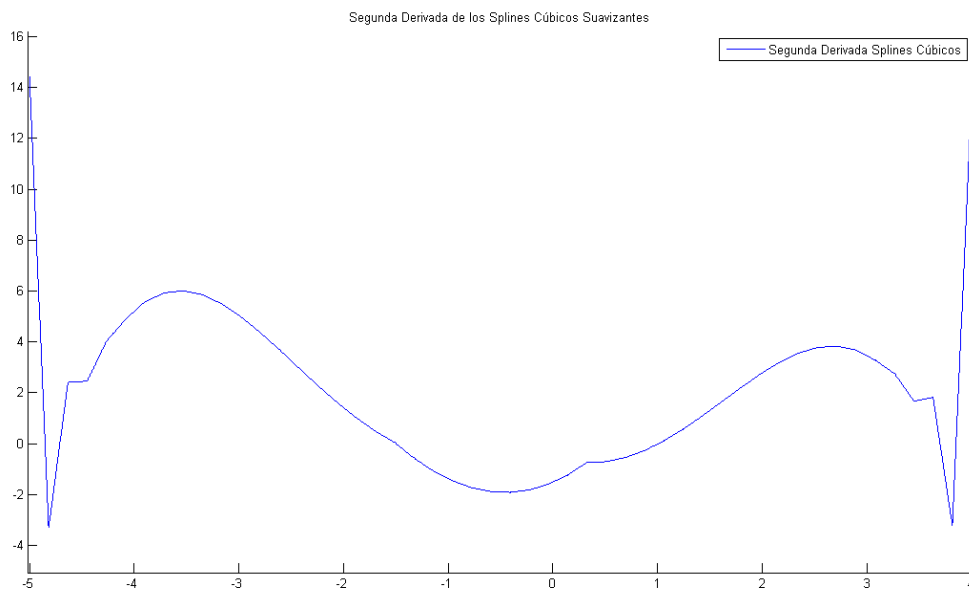


Figura IX.76. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos con valor 1.



### 9.6.2.5. Coeficientes de peso $\rho_i = 2,5$ .

En este apartado se ha obtenido al reconstrucción mediante Splines Cúbicos Suavizantes con un valor de pesos fijos establecido en  $\rho_i = 2,5$ . Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

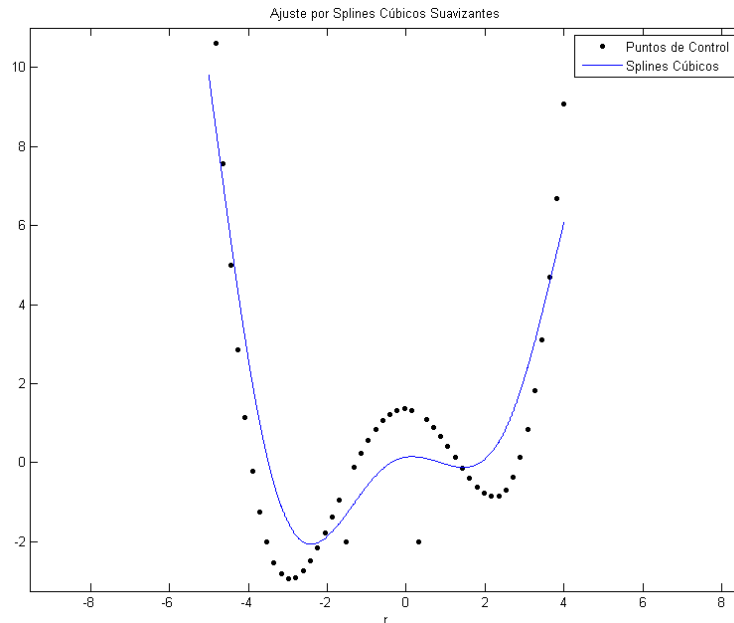


Figura IX.77. – Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Pesos fijos con valor 2,5.

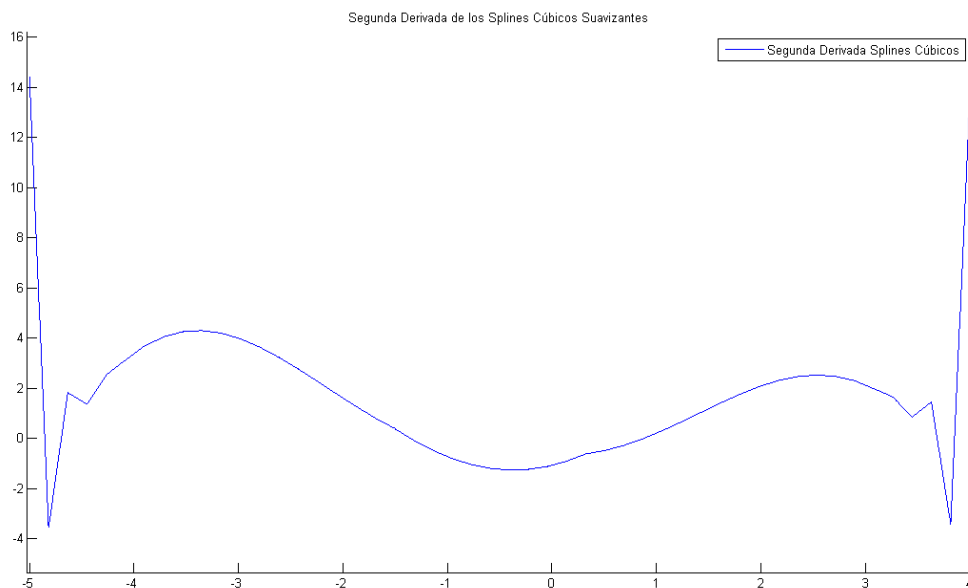


Figura IX.78. - Reconstrucción de un polinomio de grado cuatro con perturbaciones – Segunda derivada con pesos con valor 2,5.



Como se puede comprobar, con valor de pesos  $\rho_i = 0$  la reconstrucción del polinomio se ve obligada a pasar por todos los puntos, incluyendo los perturbados, por lo que la calidad de reconstrucción resulta muy mala. Conforme se aumenta el valor de los pesos se observa que la reconstrucción ya no se ve obligada a tomar los valores de todos los puntos, por lo que ésta mejora sensiblemente respecto del primer caso. Aun así, en este caso de ordenadas perturbadas se comprueba que el algoritmo propuesto para el cálculo de los pesos funciona significativamente mejor que la asignación uniforme de un determinado valor de los mismos a todos los puntos de la reconstrucción.



## CAPÍTULO X

### CONCLUSIONES.

---

El objetivo de este proyecto ha sido desarrollar un algoritmo capaz de calcular los pesos adecuados a introducir en la expresión de Splines Cúbicos Suavizantes de manera que se mantenga la convexidad de las curvas que se requieran reconstruir.

Según se observa en las gráficas de resultados, se consigue reconstruir las funciones matemáticas deseadas a partir de unos determinados valores discretos de una forma muy fiel a la real. Así mismo, esto también sucede cuando la reconstrucción que se quiere realizar corresponde a unos determinados valores que no se corresponden con ninguna expresión analítica, es decir, son datos obtenidos de mediciones experimentales. Según los ensayos realizados, se observa que el algoritmo desarrollado también funciona mejor cuando las funciones (o datos experimentales) a reconstruir son contaminados o perturbados, ya sea localmente en uno o varios puntos, o de forma global en todo el intervalo. Únicamente este algoritmo deja de mejorar el procedimiento anterior de asignación de pesos cuando el ruido que afecta a los datos es medio o grande.

Como consecuencia de todo lo mencionado anteriormente, cabe destacar que la precisión en la reconstrucción de curvas con Splines Cúbicos Suavizantes mejora notablemente cuando los pesos son calculados mediante el algoritmo desarrollado en este proyecto y no se les asigna un valor de forma aleatoria o según la experiencia del diseñador.



## BIBLIOGRAFÍA.

---

- [1] TRILLO MOYA, Juan Carlos. *Nonlinear Multiresolution and Applications in Image Processing*. Universidad de Valencia, 2006.
- [2] AMAT, Sergio, DONAT, Rosa, TRILLO, Juan Carlos. *Proving Convexity Preserving Properties of Interpolatory Subdivision Schemes Through Reconstructions Operators*, *Appl. Math. Comput.* 2013.
- [3] AMAT, Sergio, DONAT, Rosa, LIANDRAT, Jaques, TRILLO, Juan Carlos. *Analysis of a New Nonlinear Subdivision Scheme*. *Applications in Image Processing*. 2005.
- [4] MARTÍNEZ GARCÍA, José Alfonso. *Fundamentos de la Construcción Naval*. [Apuntes]. Departamento de Tecnología Naval - Universidad Politécnica de Cartagena.
- [5] MARTÍNEZ GARCÍA, José Alfonso. *Sistemas de Construcción de Buques y Artefactos*. [Apuntes]. Departamento de Tecnología Naval – Universidad Politécnica de Cartagena.
- [6] GONZÁLEZ LÓPEZ, Primitivo B. *Técnicas de Construcción Naval*. Segunda Edición. 2005. Universidad de La Coruña.
- [7] FARIN, Gerald. *From Projective to Practical Use*. Segunda Edición. AK Peters, 1999. ISBN: 1-56881-084-9.
- [8] PIEGL, Les. *The NURBS book*. Berlín: Springer Verlag, 1997. ISBN: 3-540-61545-8.
- [9] BOOR, Carl de. *A Practical Guide to Splines*. New York: Springer Verlag, 1978. ISBN: 978-0-387-95366-3.
- [10] KRASNOV, KISELIOV, MAKÁRENKO, SHIKIN, ZALIAPIN. *Curso de Matemáticas Superiores*. Editorial URSS, 2003. ISBN: 9785354004553.
- [11] RONCERO PEÑA, Blanca. *Splines Cúbicos Suavizantes en el Diseño Naval*. 2013. Universidad Politécnica de Cartagena.



## ANEXO I: OBTENCIÓN DE COEFICIENTES PPH MEDIANTE $wxMaxima$ .

*Polinomio utilizado: Spline*

```
P(t) := z0*(1-t) + z1*t + t*(1-t)*(A*t + B*(1-t));
```

```
P(t) := z0*(1-t) + z1*t + t*(1-t)*(A*t + B*(1-t))
```

```
factor(define(Pt(t), diff(P(t), t, 1)));
```

```
Pt(t) := (3*t^2 - 4*t + 1)*B + (-3*t^2 + 2*t)*A + z1 - z0
```

```
factor(define(Ptt(t), diff(P(t), t, 2)));
```

```
Ptt(t) := 2*((3*t - 2)*B + (-3*t + 1)*A)
```

```
Integrando(t) := 1/h^3 * Ptt(t)^2;
```

```
(%04) Integrando(t) := 1/h^3 * Ptt(t)^2
```

```
Integral_1(t) = factor(integrate(Integrando(t), t, 0, 1));
```

```
Integral_1(t) = (4*(B^2 - A*B + A^2))/h^3
```

```
Funcional1(A, B) := 4/h^3 * (B^2 - A*B + A^2);
```

```
Funcional1(A, B) := 4/h^3 * (B^2 - A*B + A^2)
```

```
(P(-1) - z1);
```

```
-2*(2*B - A) - z1 + 2*z0
```

```
Funcional2(A, B) := (-delta0 + 2*(A - 2*B))^2;
```

```
Funcional2(A, B) := (-delta0 + 2*(A - 2*B))^2
```

```
(P(2) - z2);
```

```
(%09) -2*(2*A - B) - z2 + 2*z1 - z0
```

```
Funcional3(A, B) := (-delta1 - 2*(2*A - B))^2;
```

```
Funcional3(A, B) := (-delta1 - 2*(2*A - B))^2
```

```
F(A, B, mu) := Funcional1(A, B) + mu*Funcional2(A, B) + mu*Funcional3(A, B);
```

```
F(A, B, mu) := Funcional1(A, B) + mu*Funcional2(A, B) + mu*Funcional3(A, B)
```

```
F(A, B, mu);
```

```
(4*(B^2 - A*B + A^2))/h^3 + mu*(-2*(2*A - B) - delta1)^2 + mu*(2*(A - 2*B) - delta0)^2
```

*Calculamos las derivadas parciales respecto de A y B*

```
factor(define(FA(A, B, mu), diff(F(A, B, mu), A, 1)));
```

```
FA(A, B, mu) := -(4*((8*h^3*mu + 1)*B + (-10*h^3*mu - 2)*A + (-2*delta1 + delta0)*h^3*mu))/h^3
```

```
factor(define(FB(A, B, mu), diff(F(A, B, mu), B, 1)));
```

```
FB(A, B, mu) := (4*((10*h^3*mu + 2)*B + (-8*h^3*mu - 1)*A + (-delta1 + 2*delta0)*h^3*mu))/h^3
```

*Resolvemos el sistema que aparece al minimizar el funcional  $F(A, B)$  con la condición de que el polinomio en el punto medio valga lo mismo que el PPH. Escogemos el valor de  $\mu$  para que dicho sistema tenga solución*





cuando el valor del parámetro que sale en los multiplicadores de Lagrange es cero. Entonces los extremos serán en realidad extremos absolutos de  $F(a,b)$ .

*Ecuaciones que salen de imponer que el punto sea crítico*

$$\text{eq1: } FA(A, B, \mu) = 0;$$

$$(4 * (2 * A - B)) / h^3 - 8 * \mu * (-2 * (2 * A - B) - \delta_1) + 4 * \mu * (2 * (A - 2 * B) - \delta_0) = 0$$

$$\text{eq2: } FB(A, B, \mu) = 0;$$

$$(4 * (2 * B - A)) / h^3 + 4 * \mu * (-2 * (2 * A - B) - \delta_1) - 8 * \mu * (2 * (A - 2 * B) - \delta_0) = 0$$

*Condición en el punto medio del intervalo*

$$\text{eq3: } A + B + 2 * \delta_0 * \delta_1 / (\delta_0 + \delta_1) = 0;$$

$$B + A + (2 * \delta_0 * \delta_1) / (\delta_1 + \delta_0) = 0$$

*Resolvemos el sistema no lineal*

$$\text{sol: solve([eq1, eq2, eq3], [A, B, \mu]);}$$

$$\begin{aligned} & [[A = -(2 * \delta_0 * \delta_1^3 + 10 * \delta_0^2 * \delta_1^2) \\ & / (\delta_1^3 + 11 * \delta_0 * \delta_1^2 + 11 * \delta_0^2 * \delta_1 + \delta_0^3), \\ & B = -(10 * \delta_0^2 * \delta_1^2 + 2 * \delta_0^3 * \delta_1) \\ & / (\delta_1^3 + 11 * \delta_0 * \delta_1^2 + 11 * \delta_0^2 * \delta_1 + \delta_0^3), \\ & \mu = (2 * \delta_0 * \delta_1) / ((\delta_1^2 - 2 * \delta_0 * \delta_1 + \delta_0^2) * h^3)]] \end{aligned}$$

*Nos quedamos con los valores de a,b,mu solución*

$$A: \text{factor(rhs(sol[1][1]));}$$

$$-(2 * \delta_0 * \delta_1^2 * (\delta_1 + 5 * \delta_0)) / ((\delta_1 + \delta_0) * (\delta_1^2 + 10 * \delta_0 * \delta_1 + \delta_0^2))$$

$$B: \text{factor(rhs(sol[1][2]));}$$

$$-(2 * \delta_0^2 * \delta_1 * (5 * \delta_1 + \delta_0)) / ((\delta_1 + \delta_0) * (\delta_1^2 + 10 * \delta_0 * \delta_1 + \delta_0^2))$$

$$\mu: \text{factor(rhs(sol[1][3]));}$$

$$(2 * \delta_0 * \delta_1) / ((\delta_1 - \delta_0)^2 * h^3)$$



## ANEXO II: SCRIPT DE MATLAB DE LA RECONSTRUCCIÓN PPH.

```
function [pol,Error1,Error2,Error8]=PPHvi(Z,m,puntos,a,b)

% Esta función calcula la reconstrucción de una curva por PPH
% en un intervalo dado en el que los puntos estarán equiespaciados.
%
% [pol]=PPHvi(Z,puntos,a,b)
%
% Variables de entrada:
% Z          Vector de ordenadas de los puntos del intervalo (a,b)
% puntos     Número de puntos de subdivisión del intervalo (0,1)
% (a,b)      Intervalo en el que queremos calcular la reconstrucción
%
% Variables de salida:
% pol        Valor del nuevo polinomio en la reconstrucción por PPH
% Error1     Error en norma 1 entre la función discretizada y la
reconstrucción
% Error2     Error en norma 2 entre la función discretizada y la
reconstrucción
% Error8     Error en norma infinito entre la función discretizada y la
reconstrucción
%
% Ejemplo:
% [pol,Error1,Error2,Error8]=PPHvi(Z,30,-3,2);

puntos=round(puntos);

% Se muestra mensaje de error si n es cero o negativo.
if puntos<=0
    error('Número de puntos de subdivisión del intervalo incorrecto.
Por favor, introduzca una cifra positiva')
end

% Se calcula el número de elementos de vector Z.
longZ= length(Z);

% Se calcula la separación entre puntos.
h=abs(b-a)/(longZ-1);

% Se inicializa el vector de abscisas X a cero.
X=zeros(longZ,1);

% Se inicializan a ceros los vectores Xaux y Zaux que facilitan el
% cálculo progresivo de los trozos polinómicos.
Xaux=zeros(4,1);
Zaux=zeros(4,1);
```



```
% Inicialización de la variable de traslación.
Tras=0;

% Inicialización de las variables de error.
Error1=0;
Error2=0;
Error8=0;

% Se calculan las abscisas del vector X.
X=linspace(a,b,longZ);

% Comienza el bucle que controla el intervalo de cálculo.
for intervalo=1:longZ-3

    Xaux=X(intervalo:intervalo+3);
    Zaux=Z(intervalo:intervalo+3);

    % Se divide el intervalo (0,1) en n puntos en los que se
    % reconstruirá el polinomio pol(t).
    T=linspace(0,1,puntos);

    % Se calculan las diferencias divididas.
    delta0=Zaux(1)-2*Zaux(2)+Zaux(3);
    delta1=Zaux(2)-2*Zaux(3)+Zaux(4);

    % Se calculan los valores del polinomio en el intervalo
    % (X(2),X(3)) para cada caso.
    if delta0*delta1>0
        A= -2*delta0*delta1^2*(5*delta0+delta1)
        /((delta0+delta1)*(delta0^2+10*delta0*delta1+delta1^2));

        B= -2*delta0^2*delta1*(delta0+5*delta1)
        /((delta0+delta1)*(delta0^2+10*delta0*delta1+delta1^2));

        pol=Zaux(2)*(1-T)+Zaux(3)*T+T.*(1-T).*(A*T+B*(1-T));
        Zreal=FTrozos(puntos,Xaux(2),Xaux(3));

    % Si hay cambio de signo entre delta0 y delta1 se procede a
    % realizar traslación.
    elseif delta0*delta1<0
        Tras= Traslacion(delta0,delta1);
        A=
        (5*delta0*delta1+delta1^2+2*delta0*Tras+4*delta1*Tras)*(delta1*Tras+de
        lta0*(2*delta1+Tras))/(delta0^3+delta0^2*(11*delta1+8*Tras)+delta1*(de
        lta1^2+8*delta1*Tras+12*Tras^2)+delta0*(11*delta1^2+32*delta1*Tras+12*
        Tras^2));

        B=
        (delta0^2+5*delta0*delta1+4*delta0*Tras+2*delta1*Tras)*(delta1*Tras+de
        lta0*(2*delta1+Tras))/(delta0^3+delta0^2*(11*delta1+8*Tras)+delta1*(de
        lta1^2+8*delta1*Tras+12*Tras^2)+delta0*(11*delta1^2+32*delta1*Tras+12*
        Tras^2));

        pol=Zaux(2)*(1-T)+Zaux(3)*T+T.*(1-T).*(A*T+B*(1-T));
        Zreal=FTrozos(puntos,Xaux(2),Xaux(3));
```



```
else
    pol=Zaux(2)*(1-T)+Zaux(3)*T;
    Zreal=FTrozos(puntos,Xaux(2),Xaux(3));
end

    % Se mide el error entre la función discretizada y la
reconstrucción.
    % Se tiene en cuenta que al valor de la reconstrucción (pol) habrá
que restarle el valor de la traslación (Tras).
    Error1=Error1+norm(Zreal-pol,1);
    Error2=Error2+norm(Zreal-pol,2);
    Error8=max(Error8,norm(Zreal-pol,Inf));

    % Se escala el vector T según la distancia entre abscisas
T=linspace(Xaux(2),Xaux(3),puntos);

    % Visualización en forma de gráfica de las ordenadas Z(i) como de
todos los valores del polinomio de reconstrucción entre X(2) y X(3).
    plot(T,pol,'r','LineWidth',2);
    pause(1)

end

Error1=Error1/((puntos-3)*m-(puntos-6));
Error2=Error2/((puntos-3)*m-(puntos-6));
Error8=Error8/((puntos-3)*m-(puntos-6));

end
```



## ANEXO III: SCRIPT DE MATLAB DEL ALGORITMO DE CÁLCULO DE PESOS.

```
function phro=pesos_PPH_splines(y,h)

% Esta función genera los pesos propuestos (según la reconstrucción
% local basada en PPH splines) para ser usados en el algoritmo de
% splines cúbicos suavizantes
% phro=pesos_PPH_splines(y,h);

% Variables de entrada:
% y vector con las ordenadas correspondientes a las abscisas
% h espaciado entre las abscisas

% Variables de salida:
% phro vector de pesos

% número de datos con los que se cuenta
n=length(y);

% cálculo de los pesos mu's asociados localmente
for i=1:n-3

    delta0=y(i)-2*y(i+1)+y(i+2);
    delta1=y(i+1)-2*y(i+2)+y(i+3);

    if delta0*delta1>0
        mu(i)=(delta0-delta1)^2/(2*delta0*delta1);
    elseif delta0==0 | delta1==0
        mu(i)=10^15;
    else
        mu(i)=(delta0-delta1)^2/(-2*delta0*delta1);
    end

end

% cálculo de los pesos phro que se utilizarán de manera global en los
% splines cúbicos suavizantes
phro(1)=mu(1);
phro(2)=mu(2);
phro(3)=mu(3);

for i=4:n-3
    phro(i)=mu(i)+mu(i-3);
end

phro(n-2)=mu(n-5);
phro(n-1)=mu(n-4);
phro(n)=mu(n-3);

end
```