

# ANÁLISIS DE MODOS DE PROPAGACIÓN COMPLEJOS EN ESTRUCTURAS GUIADAS RADIANTES

José Luis Gómez Tornero      Fernando Quesada Pereira      Alejandro Alvarez Melcón  
 Departamento de Tecnologías de Información y Telecomunicaciones  
 Universidad Politécnica de Cartagena

[josel.gomez@upct.es](mailto:josel.gomez@upct.es)   [ferquepe@doctor.upv.es](mailto:ferquepe@doctor.upv.es)   [alejandro.alvarez@upct.es](mailto:alejandro.alvarez@upct.es)

## ABSTRACT

This paper presents an exhaustive analysis of the mathematical theory involved in the study of complex propagation of electromagnetic modes in guided-radiating lossy structures. Theoretical results are presented for a given example, and the multivalued complex plane is carefully analyzed according to the different type of solutions found.

$$K_{zm} = m \cdot \frac{\pi}{a} \text{ (rad/m)} \quad m = 0, 1, 2, \dots \infty \quad (1)$$

Por otro lado, sabemos que una onda plana propagándose en el medio cumple:

$$K_o^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = K_p^2 + K_z^2 \quad (2)$$

De manera que si conociéramos la incógnita  $K_y$  podríamos determinar los números de onda  $K_{zm}$  de cada onda plana.

## 1. INTRODUCCIÓN

El análisis de los modos de propagación que puedan existir en una estructura como la representada en la figura 1 obliga al estudio de las Ecuaciones de Maxwell en dicha geometría [1,2]. Dicho estudio se puede llevar a cabo mediante una descomposición espectral de las posibles soluciones en las infinitas ondas planas que sumadas crean la onda total que se propaga en la dirección axial (eje y).

El objetivo final es encontrar los números de onda  $K_y$  de las soluciones electromagnéticas del problema propuesto. En una línea de transmisión cerrada y sin pérdidas la solución es del tipo  $K_y = +\beta_y$  (rad/m), pues no puede haber pérdidas ni por calentamiento de los materiales ni por radiación.

El documento presentado parte de estas soluciones para exponer el problema de búsqueda de los modos de propagación complejos en estructuras con pérdidas óhmicas y/o por radiación.

Para ello se estudian las principales funciones matemáticas de variable compleja involucradas, que no por sencillas dejan de ser determinantes para poder llevar con éxito el estudio propuesto.

En el apartado 2 se introduce la estructura que se estudia y se presenta un modo de propagación real, para en el apartado 3 y 4 presentar unos ejemplos concretos de modos de propagación complejos para los casos de pérdidas óhmicas y por radiación.

## 2. LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN SIN PÉRDIDAS

En la figura 1 se muestra la estructura que se pretende analizar y que nos servirá como ejemplo práctico en este documento. Se trata de una línea de transmisión microstrip apantallada por una guía rectangular metálica. El objetivo es analizar los modos de propagación que pueden existir en dicho sistema y el efecto de las pérdidas del sustrato dieléctrico y los efectos por radiación que se produzcan cuando se sitúe una apertura en la tapa superior.

Para ello comenzaremos con el estudio más sencillo; el de la línea de transmisión con la tapa superior cerrada y sin pérdidas en el dieléctrico. En tales condiciones buscamos soluciones del tipo  $K_y = \beta_y$  (rad/m). Usamos un método de descomposición espectral de la onda resultante en infinitas ondas planas cuya constante de propagación en el eje x viene dada por:

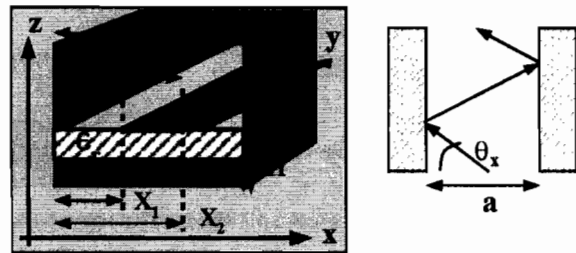


Figura 1. Estructura analizada y ondas planas usadas.

En la figura 2 se representa un resultado al que se llega al analizar la línea de transmisión sin pérdidas y cerrada, mediante la técnica de la ecuación integral usando la función de Green multicapa de la cavidad. La figura de arriba muestra la distribución de potencia electromagnética (vector de Poynting transversal). En la de abajo aparece la descomposición espectral del modo de propagación real hallado, con  $K_y = \beta_y = 8255,6$  rad/m a 500 GHz.



Figura 2. Modo de propagación real hallado.

Para llegar a dicho resultado hemos tenido que usar en la formulación de la solución de las ecuaciones de Maxwell las diferentes constantes de propagación expresadas en las ecuaciones (1)-(2). Cabe notar que como se trata de un modo de propagación real ( $K_y = \beta_y$ ), los modos en z tendrán constantes de propagación  $K_{zm}$  o bien reales o bien imaginaria puras, es decir, o se propagan o están en corte. Para ello, en la expresión (3) hemos tenido que escoger la primera raíz (raíz positiva;  $K_{zm} = +\beta_{zm}$ ) para el caso de modos propagándose en z, mientras que para los modos en corte usamos la segunda (raíz

negativa, así  $K_{zm} = -j \cdot \alpha_{zm}$ ). Ya vemos que dentro de las diferentes soluciones matemáticas que existen al usar en nuestra formulación funciones multivaluadas de variable compleja, como la raíz de un número complejo, tan sólo son de interés y sentido físico aquellas que cumplen determinadas condiciones.

En los siguientes apartados complicaremos un poco el problema al introducir pérdidas en el dieléctrico y por radiación, lo que nos hará volver a plantearnos qué funciones complejas usamos para que la solución matemática tenga sentido físico.

### 3. LÍNEA DE TRANSMISIÓN CON PÉRDIDAS

Al introducir pérdidas en el dieléctrico, la constante dieléctrica relativa pasa a ser compleja, según la expresión:

$$\epsilon_r = \epsilon_r' \cdot (1 - j \cdot \tan \delta) \quad (4)$$

Siendo  $\tan \delta$  la tangente de pérdidas del dieléctrico. Al introducir números complejos en la formulación podemos buscar soluciones complejas, en concreto del tipo  $K_y = \beta_y - j \cdot \alpha_y$ . Pero para llegar a estas soluciones debemos mantener una formulación coherente para el resto de componentes del número de onda total, es decir, para  $K_{zm}$  y para  $K_{\rho m}$ , según (1)-(2).

Esto que en principio parece trivial merece un estudio matemático y físico detallado. Así, el esquema de la figura 3 muestra las diferentes raíces complejas que deben ser usadas.

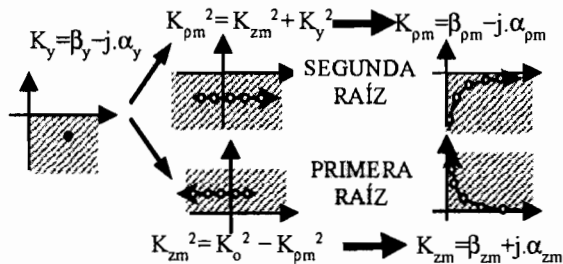


Figura 3. Modo complejo con atenuación en dirección axial.

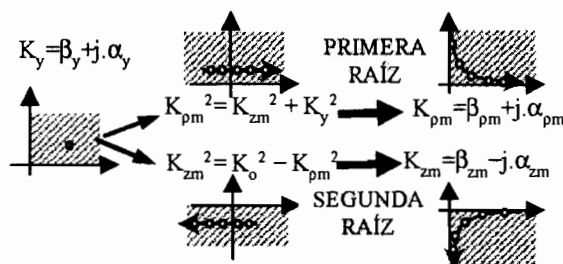


Figura 4. Modo complejo con crecimiento en dirección axial.

El signo de las raíces complejas es escogido de manera que las constantes de fase ( $\beta$ ) sean positivas, como corresponde a la formulación de la onda progresiva, y esto hace que obtengamos unas constantes imaginarias dadas para cada caso.

Para la línea con pérdidas obtenemos  $K_y = \beta_y - j \cdot \alpha_y$  (debido a las pérdidas óhmicas del dieléctrico) y  $K_{zm} = \beta_{zm} + j \cdot \alpha_{zm}$ . Estas últimas constantes de propagación en el eje  $z$  pueden resultarnos extrañas, y nos pueden hacer pensar que hay una

amplificación de la energía en el eje  $z$ , pero nada más lejos de la realidad, pues al existir una tapa metálica en  $z$ , la suma de la onda progresiva ( $+z$ ) y la reflejada ( $-z$ ) producirá un patrón de energía acotado. En la figura 5 se muestra la constante de propagación en el eje  $y$  y que se obtiene a partir del caso sin pérdidas, aplicando tres tangentes de pérdidas diferentes.

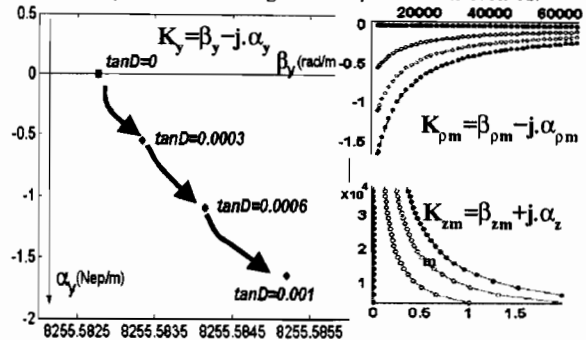


Figura 5. Constantes de propagación en línea con pérdidas

### 4. LÍNEA DE TRANSMISIÓN ABIERTA

Otro caso interesante de analizar es el de la línea estudiada cuando se quita la tapa metálica superior, de manera que queda abierta al aire. Ahora analizamos qué pasa con los modos que se propagan por su interior, e incluso si alguno llega a radiar [1,2].

Aquellos modos que radian harán que se pierda energía a lo largo de la línea de transmisión. Son los llamados Leaky Waves cuyas ctes. de propagación se corresponden con la figura 3 (rama impropia). Así mismo, se puede conjeturar una solución matemática siguiendo el criterio de raíces de la figura 4 (rama propia). Se habla en este caso de Surface Waves, y estas soluciones deben degenerar en el eje real (puesto que no puede haber amplificación a lo largo del eje  $y$ ).

En la búsqueda de estos modos es importante el uso de las raíces matemáticas evaluadas correctamente para que los cálculos tengan rigor matemático y sentido físico, según se muestra en las figuras 3 y 4.

### 5. CONCLUSIONES

En el análisis de problemas electromagnéticos con constantes de propagación complejas es necesario manejar funciones multivaluadas, como la raíz compleja. La elección de una solución u otra determinará el sentido físico del resultado matemático obtenido. En este documento se analizan los diferentes modos de propagación, y con un ejemplo de una línea con pérdidas y otra abierta se presenta una manera de tratar dichos modos para obtener resultados fiables.

### 6. REFERENCIAS

- [1] D.R. Jackson and A. A. Oliner. "A Leaky-Wave Analysis of a High Gain Printed Antenna Configuration". *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 36, No. 7, July 1988.
- [2] H.D. Yang and D.R. Jackson. "Theory of Line-Source Radiation from a Metal-Strip Grating Dielectric Slab Structure". *IEEE AP-S International Symposium Digest*, Vol. 3, pp. 1740-1743, 1997.