

Aplicación del Fast Multipole Method al análisis en 2D de objetos conductores inmersos en medios homogéneos multicapa empleando formulación de superficie

Francisco Javier Pérez Soler, Fernando Daniel Quesada Pereira, Alejandro Álvarez Melcón
 Departamento de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones
 Universidad Politécnica de Cartagena, Campus de la Muralla del Mar s/n, C.P. 30202, Cartagena (Murcia)
 e-mail: fjps@alu.upct.es, fernando.quesada@upct.es, alejandro.alvarez@upct.es

Abstract—In this paper, the Fast Multipole Method (FMM), one of the most important techniques developed in order to reduce the computational burden associated to the Method of Moments (MOM), is applied to analyze a 2D conducting bodies coated in a multilayered medium. A general formulation and some results are presented, which show the advantages of using the FMM in the solution of this kind of problems. An application of the usage of this formulation is included, showing how this method may be applied to the study of the effects of a dielectric shield (radome) in the radiation pattern of simple antennas.

I. INTRODUCCIÓN

La técnica de la Ecuación Integral (IE) ha resultado ser una herramienta de gran utilidad a la hora de resolver problemas de dispersión electromagnética (*scattering*) que contienen uno o varios cuerpos conductores y/o homogéneos. A pesar de ello, un conocido inconveniente de este método es el el creciente coste computacional del mismo cuando el tamaño de los objetos crece en términos de la longitud de onda de trabajo. Si tenemos una matriz de momentos con un total de $(N \times N)$ incógnitas, el análisis del MOM tiene un coste del orden $O((N)^2)$, lo cual resulta prohibitivo para valores de N elevados. Para reducir este elevado coste computacional, se va a emplear en este artículo una solución basada en el algoritmo FMM. Esta técnica relativamente reciente tiene un coste asociado intrínsecamente menor, de modo que permite la resolución de problemas eléctricamente grandes sin perder la precisión del método original. Se mostrará el ahorro que supone el empleo de esta técnica para una geometría 2D cilíndrica estratificada en varias capas homogéneas con un conductor en el interior. Los resultados muestran cómo el mayor ahorro se produce cuando tenemos una única capa (caso del metal aislado), perdiendo eficiencia cuanto mayor es el número de las mismas, lo cual se justifica de acuerdo a las particularidades de la formulación empleada. Además, particularizando para uno de los casos de la formulación general, se incluye una aplicación del método para el estudio del efecto de radomos en la radiación de antenas.

II. TEORÍA

La expresión general de una matriz MOM para un problema de dispersión consistente en un objeto conductor rodeado por L capas dieléctricas es de la forma:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} [\mathbf{Z}_{11}] & [\mathbf{Z}_{12}] & \cdots & [\mathbf{Z}_{1 \ 2*L+1}] \\ [\mathbf{Z}_{21}] & [\mathbf{Z}_{22}] & \cdots & [\mathbf{Z}_{2 \ 2*L+1}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\mathbf{Z}_{2*L+1 \ 1}] & [\mathbf{Z}_{2*L+1 \ 2}] & \cdots & [\mathbf{Z}_{2*L+1 \ 2*L+1}] \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde \mathbf{Z}_{ij} son submatrices de tamaño $N_i \times N_i$, que dependen de la polarización de la onda incidente y de la IE empleada en la formulación del problema (esto es, EFIE, MFIE o una combinación de ambas mediante la CFIE). N_i es el número de segmentos en los que se discretiza cada uno de los objetos del problema. Se necesita un total de $(2L + 1)$ submatrices, ya que en nuestro problema tenemos L capas con sus respectivas corrientes eléctricas y magnéticas, y además una corriente eléctrica adicional producida por el objeto conductor. Nótese que en esta formulación general se incluye el caso de varios cuerpos homogéneos estratificados en ausencia de un conductor al final sin más que eliminar la última columna de (1), así como también el caso de un metal aislado si nos quedamos únicamente con la submatriz superior derecha. Por lo tanto, el caso general mostrado nos permite afrontar un diverso número de problemas diferentes sin más que realizar las modificaciones oportunas.

La descomposición FMM general de cada una de las submatrices mostradas en (1) se puede escribir de acuerdo con [1], [2]:

$$\mathbf{Z}_{ij} = \mathbf{Z}_{NN}^{ij} + \bar{\beta}_2^{t^{ij}} \cdot \bar{\alpha}^{ij} \cdot \bar{\beta}_1^{ij} \quad (2)$$

Donde \mathbf{Z}_{NN}^{ij} , $\bar{\beta}_2^{t^{ij}}$, $\bar{\alpha}^{ij}$ y $\bar{\beta}_1^{ij}$ son matrices dispersas que dependen también de la polarización y de la formulación empleada. Esta descomposición nos permite reducir el coste computacional, para un problema de N incógnitas, de $O(N^2)$ a $O(N^{\frac{1}{2}})$ ([1], [2]).

Consideremos ahora por ejemplo el caso de un conductor inmerso en una sola capa homogénea, que se corresponde

con $L = 1$ en la expresión general que se ha mostrado anteriormente. Si queremos obtener una descomposición de la matriz MOM completa compuesta también por matrices dispersas, podemos escribir el segundo término del segundo miembro de (2) del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} [\beta_2^{t11}] & [\beta_2^{t12}] & [\beta_2^{t13}] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\alpha^{11}] & [0] & [0] \\ [0] & [\alpha^{12}] & [0] \\ [0] & [0] & [\alpha^{13}] \end{pmatrix} \\
& \quad \cdot \begin{pmatrix} [\beta_1^{11}] & [0] & [0] \\ [0] & [\beta_1^{12}] & [0] \\ [0] & [0] & [\beta_1^{13}] \end{pmatrix} + \\
& \begin{pmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [\beta_2^{t21}] & [\beta_2^{t22}] & [\beta_2^{t23}] \\ [0] & [0] & [0] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\alpha^{21}] & [0] & [0] \\ [0] & [\alpha^{22}] & [0] \\ [0] & [0] & [\alpha^{23}] \end{pmatrix} \\
& \quad \cdot \begin{pmatrix} [\beta_1^{21}] & [0] & [0] \\ [0] & [\beta_1^{22}] & [0] \\ [0] & [0] & [\beta_1^{23}] \end{pmatrix} + \\
& \begin{pmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [\beta_2^{t31}] & [\beta_2^{t32}] & [\beta_2^{t33}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\alpha^{31}] & [0] & [0] \\ [0] & [\alpha^{32}] & [0] \\ [0] & [0] & [\alpha^{33}] \end{pmatrix} \\
& \quad \cdot \begin{pmatrix} [\beta_1^{31}] & [0] & [0] \\ [0] & [\beta_1^{32}] & [0] \\ [0] & [0] & [\beta_1^{33}] \end{pmatrix} \quad (3)
\end{aligned}$$

de forma que la matriz total \mathbf{Z} se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{\text{NN}} + \bar{\beta}_2^t \cdot \bar{\alpha}^{(1)} \cdot \bar{\beta}_1^{(1)} + \bar{\beta}_2^t \cdot \bar{\alpha}^{(2)} \cdot \bar{\beta}_1^{(2)} \\
+ \bar{\beta}_2^t \cdot \bar{\alpha}^{(3)} \cdot \bar{\beta}_1^{(3)} \quad (4)
\end{aligned}$$

Se puede observar que hemos obtenido una descomposición en la que también aparecen productos de matrices dispersas. De este modo el coste del algoritmo FMM aumenta cuando se incluye una capa dieléctrica en un factor de 3 respecto al caso de un conductor aislado, debido a que estamos sumando tres productos matriciales del mismo coste $O(N^{\frac{1}{2}})$. Resulta inmediato deducir que si extendemos este procedimiento al caso general con L capas, el coste se incrementará $(2L + 1)$ veces.

Resulta importante señalar que este coste también dependerá de la formulación empleada. Todo lo dicho anteriormente resulta válido para la formulación de Campo E o de Campo M. Si deseamos emplear la formulación de Campo Combinado para evitar posibles problemas de resonancias a determinadas frecuencias, algunas de las submatrices \mathbf{Z}_{ij} se construyen mediante la suma de dos submatrices independientes correspondientes a dos medios contiguos ([3]). Esto conlleva la aportación de algunas nuevas matrices dispersas a la descomposición, de forma que el coste computacional se verá nuevamente incrementado. A pesar de ello, todos estos incrementos en el coste resultan permisibles en comparación con el problema original, pues en todo caso el número de incógnitas N siempre será muy superior al número de capas L . Como comentario final podemos añadir que el coste computacional del método propuesto puede reducirse aún más si se emplea la versión multinivel del algoritmo FMM ([4]). En este caso, resultaría posible lograr un coste de $O((2L+1)N \log N)$ por iteración cuando se resuelve el sistema de ecuaciones con un método iterativo como el gradiente conjugado, que es el que se suele emplear.

III. RESULTADOS

En primer lugar se mostrará la precisión del método con un caso sencillo. La figura Fig. 1 muestra un cilindro circular conductor de radio ($r = 2,0\lambda$) rodeado por una capa dieléctrica con pérdidas de espesor $t = 0,046\lambda$, excitado mediante una onda plana con incidencia en $\phi = 180^\circ$. Los parámetros del medio con pérdidas son $\epsilon_r = 2 - j0,2$ y $\mu_r = 1,4 - j0,72$. Se puede observar que este problema corresponde al caso ($L = 1$) de la formulación comentada en la sección teórica. La matriz MOM se construye aplicando Point Matching y la formulación de Campo Combinado. El sistema se ha resuelto de forma directa (mediante una factorización LU convencional) y mediante nuestro método basado en FMM. En Fig. 2 se muestra la RCS biestática obtenida en ambos casos, empleando tanto polarización TE como TM. Como puede comprobarse, los resultados coinciden satisfactoriamente, así como también lo hacen con los mostrados en [1], que se ha utilizado de referencia para validar este problema.

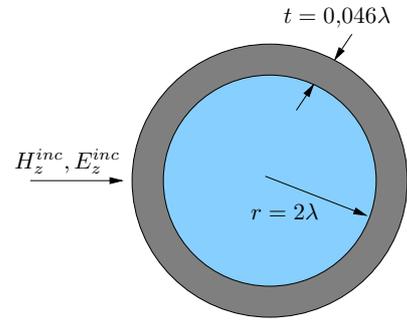


Fig. 1. Geometría del problema utilizado como validación.

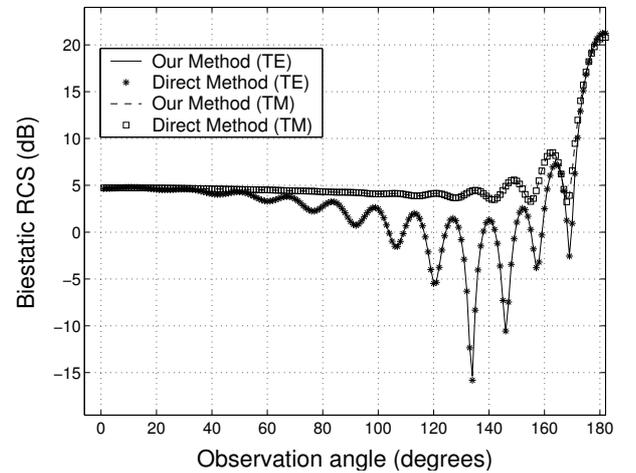


Fig. 2. RCS biestática normalizada.

Ahora, pasemos al caso mostrado en la figura Fig. 3. En este problema, el cilindro conductor se rodea con un anillo dieléctrico con pérdidas con los mismos parámetros que en el caso anterior, que se encuentra separado una distancia $d = 0,5\lambda$ de la superficie conductora. La excitación es la correspondiente a una onda TE incidiendo en $\phi = 180^\circ$.

En este caso también se ha empleado Point Matching y formulación de Campo Combinado. Tomándose un número fijo de segmentos de discretización (3920 incógnitas), se han calculado las corrientes eléctricas y magnéticas variando el radio del cilindro entre $(0,5\lambda)$ y $(12,5\lambda)$. Obsérvese que éste es el caso ($L = 2$) de la formulación general, y la matriz completa del sistema está compuesta por 25 submatrices. Este caso se ha etiquetado como CC2L, y posteriormente se ha repetido el procedimiento para otros problemas: CC1L se corresponde con el caso del cilindro rodeado por una capa dieléctrica (9 submatrices), 2HC es el anillo dieléctrico en ausencia del conductor (16 submatrices), SHC1 y SHC2 muestran el caso de un único cuerpo homogéneo empleando la formulación de Campo E y Campo H respectivamente (4 submatrices en ambos casos), y finalmente SCC es el caso del cilindro conductor aislado (una única matriz). El tiempo de resolución del sistema para todos estos casos se compara conjuntamente en la figura Fig. 4.

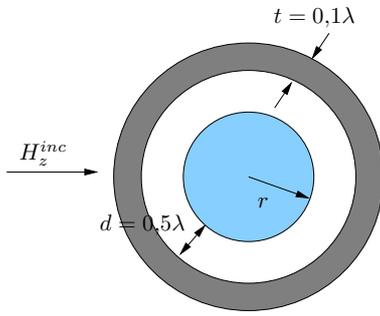


Fig. 3. Geometría del nuevo problema (caso CC2L).

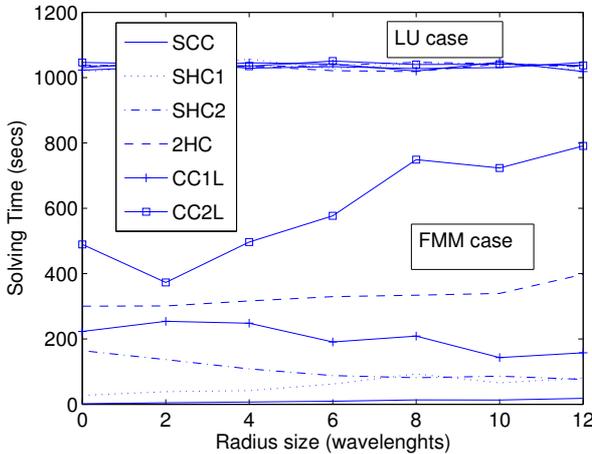


Fig. 4. Comparación de tiempos de resolución para los diferentes problemas.

Esta comparación muestra el incremento del tiempo requerido para resolver el sistema MOM, que depende no solo de la complejidad del problema (esto es, el número de capas L y la formulación empleada), sino también del tamaño eléctrico de los objetos bajo estudio (a pesar de mantener un número fijo de incógnitas). Ello se debe a la influencia de

parámetros numéricos del algoritmo FMM como el número de truncamiento y el número de puntos de integración ([4]). Como se puede observar, este último inconveniente no existe cuando se emplea un método directo, puesto que el tiempo requerido permanece prácticamente constante a lo largo del barrido dimensional, debido a que en este caso la complejidad computacional depende únicamente del número de incógnitas, que no varía en este caso. Sin embargo, se comprueba como, a pesar de que el tiempo de resolución aumenta con el número de capas como se predijo en la teoría, el método propuesto continúa siendo superior en velocidad al caso directo.

III-A. Aplicación al análisis de radomos

El problema que hemos considerado anteriormente en la figura Fig. 3 (conductor rodeado por un anillo dieléctrico), que se obtiene a partir de tomar $L = 2$ en nuestra formulación general, se puede emplear para el análisis del efecto de radomos en la radiación de antenas, sin más que efectuar un cambio en la excitación: en lugar de una onda plana procedente del infinito, consideraremos la presencia de uno o varios hilos infinitos de corriente eléctrica o magnética (para el caso de polarización TM o TE, respectivamente) situados entre el conductor y el anillo dieléctrico. Supongamos por ejemplo el caso mostrado en la figura Fig. 5 de un cilindro conductor rodeado por un anillo dieléctrico de espesor t con la superficie interna separada a una distancia d del centro del cilindro. Entre ellos, se han dispuesto 4 hilos magnéticos separados a una distancia s de la superficie conductora. Los valores de los parámetros por defecto son $s = 1,85\lambda$, $t = 0,1\lambda$, $d = \lambda$ y $\epsilon_r = 2,2$.

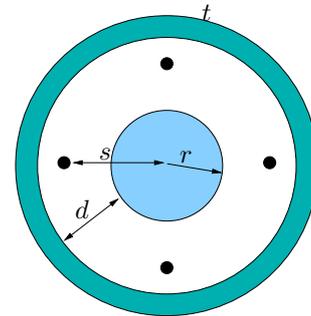


Fig. 5. Geometría similar a la del problema anterior con la incorporación de hilos de corriente infinitos a modo de excitación.

Aplicando el método propuesto basado en FMM, se ha calculado el campo eléctrico lejano radiado por esta estructura. Las figuras siguientes muestran una colección de resultados obtenidos variando los diferentes parámetros antes señalados. Así, la figura Fig. 6 muestra el diagrama de radiación normalizado para varios valores del espesor t . Puede observarse cómo en ausencia del radomo, ($t = 0$), tenemos cuatro lóbulos principales en la dirección de cada uno de los hilos de corriente. Al incluir el radomo, estos lóbulos reducen su tamaño a la vez que aparecen otros lóbulos secundarios cuyo tamaño aumenta con el valor de t . Aún más interesante resulta el efecto de variar la distancia d del radomo con respecto del cilindro,

manteniendo fijo el espesor (Fig. 7): los lóbulos principales resultan modificados y rotan su posición. La Fig. 8 muestra que los cambios en la constante ϵ_r afectan básicamente a la magnitud de los lóbulos principales, y finalmente, en Fig. 9 se pueden observar las diferencias entre el diagrama de radiación del conductor aislado y con un radomo circular o cuadrado (una de las principales ventajas de la formulación empleada es que permite el análisis de geometrías de forma arbitraria, a diferencia de otros métodos que quedan particularizados para una geometría concreta).

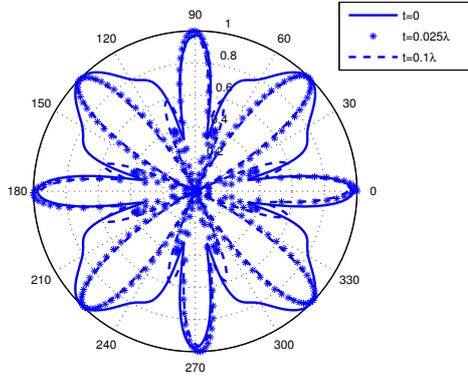


Fig. 6. Diagrama de radiación normalizado de la estructura de la figura Fig. 5. Efecto de las variaciones en el espesor del radomo.

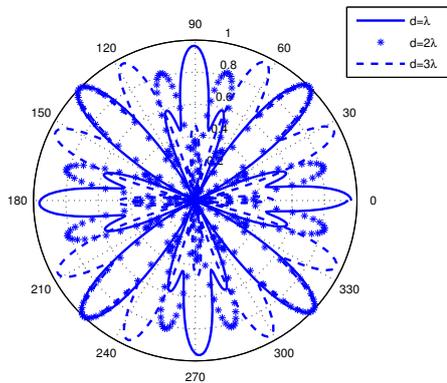


Fig. 7. Efecto de las variaciones en la distancia del radomo al conductor.

IV. CONCLUSIONES

En este artículo se ha propuesto una descomposición basada en el algoritmo FMM aplicado al caso de cuerpos conductores inmersos en medios multicapa, que permite reducir el coste computacional asociado al empleo de la formulación de superficie. Se han presentado algunos resultados interesantes que ilustran la precisión y eficiencia del método, que aunque cuenta con algunos inconvenientes intrínsecos a la formulación, se mantiene como una alternativa más rápida que el método convencional. Asimismo, también se ha incluido una de las

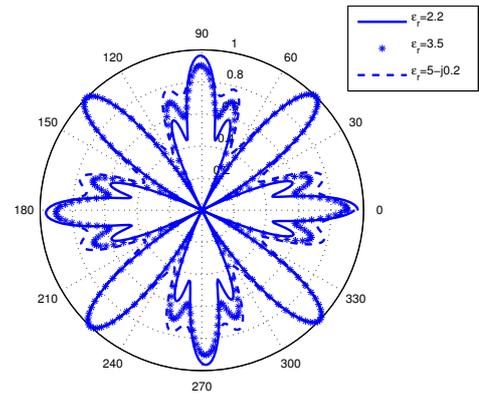


Fig. 8. Efecto de las variaciones en la permitividad relativa del radomo.

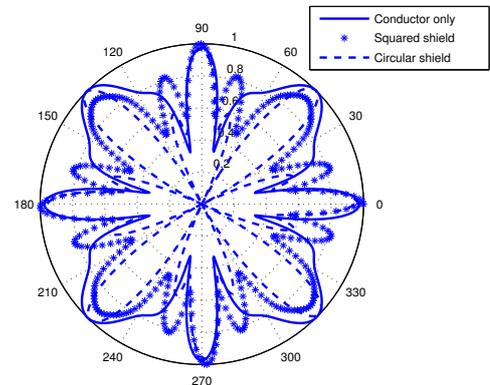


Fig. 9. Efecto de las variaciones en la geometría del radomo.

múltiples aplicaciones del uso de esta formulación, como es el estudio del efecto de radomos sencillos en dos dimensiones. Los resultados incluidos en esta parte muestran cómo afectan al diagrama de radiación de una antena ficticia los diferentes parámetros del radomo.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado con soporte del Proyecto Nacional Ref. TEC2004-04313-C02-02/TCM, y proyecto Regional Séneca Ref. PB/4/FS/02.

REFERENCIAS

- [1] W. C. Chew and C. Lu, "Fast algorithm for solving hybrid integral equation," *IE Proceedings H*, vol. 140, pp. 455–459, December 1993.
- [2] W. C. Chew, J.-M. Jin, E. Michielssen, and J. Song, "The fast steepest descent path algorithm for analyzing scattering from two-dimensional objects," tech. rep., University of Illinois, 1996.
- [3] J.-Y. Li and L.-W. Li, "Electromagnetic scattering by a mixture of conducting and dielectric objects: Analysis using method of moments," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 53, pp. 514–520, March 2004.
- [4] W. C. Chew, J.-M. Jin, E. Michielssen, and J. Song, *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*, ch. 2. Artech House, 2001.