

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias  
de Orden Superior  
y  
Aplicaciones a la Ingeniería Civil

*Manuel Calixto Molina*

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística,  
Universidad Politécnica de Cartagena,  
Paseo Alfonso XIII, 52  
30203 Cartagena

24 de Abril de 2002



# Índice General

<b>1</b>	<b>Teoría sobre EDOs lineales de Orden Superior</b>	<b>5</b>
1.1	Generalidades y estructura del espacio de soluciones . . . . .	5
1.1.1	Problemas de: valores iniciales (V.I.) y valores en la frontera (V.F.)	6
1.1.2	Ecuaciones homogéneas. Sistema fundamental de soluciones . . . . .	7
1.1.3	Ecuaciones no homogéneas. Variación de las constantes . . . . .	11
1.2	EDOs lineales con coeficientes constantes . . . . .	13
1.2.1	EDOs lineales homogéneas con coeficientes constantes . . . . .	13
1.2.2	EDOs lineales no homogéneas con coeficientes constantes . . . . .	14
1.3	Sistemas de EDOs lineales con coeficientes constantes . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Aplicaciones a la Ingeniería Civil</b>	<b>19</b>
2.1	Problemas de V.I.: vibraciones mecánicas y eléctricas . . . . .	19
2.1.1	Oscilador armónico simple . . . . .	22
2.1.2	Oscilador armónico amortiguado . . . . .	23
2.1.3	Oscilador armónico forzado: pulsaciones y resonancia pura . . . . .	25
2.1.4	Oscilador armónico amortiguado y forzado: factor de amplificación	28
2.1.5	Analogías eléctricas. Leyes de Kirchhoff . . . . .	30
2.2	Problemas de V.F.: flexión y pandeo en vigas . . . . .	30
2.2.1	Flexión en vigas: ecuación diferencial de la curva elástica y flecha de flexión . . . . .	31
2.2.2	Pandeo en vigas: carga de Euler y modos de desviación . . . . .	38
2.2.3	Derrumbe del puente colgante de Tacoma Narrows . . . . .	40



# Capítulo 1

## Teoría sobre EDOs lineales de Orden Superior

### 1.1 Generalidades y estructura del espacio de soluciones

Una EDO lineal de  $n$ -ésimo orden puede escribirse simbólicamente como:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (1.1)$$

Esta ecuación puede escribirse también como un sistema de  $n$  EDOs de orden uno de la forma

$$\vec{z}' = A(x)\vec{z} + \vec{b}(x), \quad (1.2)$$

donde  $\vec{z} = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ,

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_2(x)}{a_n(x)} & \cdots & -\frac{a_{n-2}(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{b}(x) = (0, 0, \dots, 0, b(x)/a_n(x))^T,$$

donde  $T$  indica trasposición.

Esta traducción de una EDO de orden  $n$  a un sistema equivalente de  $n$  EDOs de orden 1 nos resultará útil aquí, más que desde un punto de vista práctico, desde una perspectiva teórica. Haremos uso extensivo de esta correspondencia entre ambos espacios de soluciones.

Consideraremos dos tipos de problemas, dependiendo del tipo de restricciones sobre la solución general de (1.1)

### 1.1.1 Problemas de: valores iniciales (V.I.) y valores en la frontera (V.F.)

#### Problema de valores iniciales

Un problema de valores iniciales para una EDO lineal de orden  $n$  consiste en

$$\begin{aligned} \text{Resolver :} & \quad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \\ \text{Sujeta a :} & \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

o en forma de sistema

$$\vec{z}' = A(x)\vec{z} + \vec{b}(x), \quad \vec{z}(x_0) = \vec{z}_0.$$

Para el problema de valores iniciales (1.3) tenemos un teorema de existencia y unicidad de soluciones que nos dice lo siguiente:

**Teorema 1.1.1.** Sean  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$  y  $b(x)$  continuas en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , y sea  $a_n(x) \neq 0 \forall x \in I$ . Si  $x = x_0$  es cualquier punto en el intervalo, existe una única solución  $y(x)$  en dicho intervalo del problema de valores iniciales (1.3).

*Observación 1.1.2.* Nótese que si  $a_n(x) = 0$  para alguna  $x$  en el intervalo  $I$ , la solución del problema lineal de valores iniciales (1.3) quizá no sea única o incluso no exista; Por ejemplo, es inmediato comprobar que la función  $y(x) = cx^2 + x + 3$  es una solución del problema de valores iniciales

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, \quad y(0) = 3, y'(0) = 1$$

para  $x \in (-\infty, \infty)$  y cualquier valor del parámetro  $c$ . En otras palabras, no hay solución única para este problema. Esto se debe a que, aunque los coeficientes  $a_n(x)$  son funciones continuas en  $(-\infty, \infty)$ , el coeficiente  $a_2(x) = x^2$  es cero en  $x = 0$ , precisamente donde se han impuesto las condiciones iniciales.

#### Problema de valores en la frontera

Otro tipo de problema es resolver una EDO lineal en el que la variable dependiente  $y$ , o sus derivadas, estén especificadas en *puntos distintos*. Un problema como

$$\begin{aligned} \text{Resolver :} & \quad a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \\ \text{Sujeta a :} & \quad y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, \end{aligned} \quad (1.4)$$

se denomina *problema de valores en la frontera*. Las restricciones  $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$  se denominan *condiciones en la frontera*. Una solución del problema anterior es una función que satisface la ecuación diferencial en algún intervalo  $I$  que contiene a  $x_0$  y  $x_1$ , cuya gráfica pasa por los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$ . Estas condiciones en la frontera son casos particulares de las condiciones generales:

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(x_0) + \beta_0 y'(x_0) &= \gamma_0, \\ \alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) &= \gamma_1. \end{aligned}$$

Los ejemplos que siguen demuestran que aun cuando se satisfagan las condiciones del teorema 1.1.1, un problema de valor en la frontera puede tener i) varias soluciones; ii) solución única, o iii) ninguna solución. En efecto la solución general de la EDO lineal de orden 2:  $y'' + 16y = 0$  es  $y = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$ . Ahora:

- i) Si imponemos  $y(0) = 0, y(\pi/2) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ , con  $c_2$  arbitraria. Es decir, tenemos una familia uniparamétrica de soluciones  $y = c_2 \sin(4x)$  que pasan por los puntos  $(0, 0)$  y  $(\pi/2, 0)$  y que satisfacen la ecuación  $y'' + 16y = 0$ .
- ii) Si imponemos  $y(0) = 0, y(\pi/8) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ . Es decir,  $y = 0$  es la única solución de  $y'' + 16y = 0$  que pasa por estos puntos.
- ii) Si imponemos  $y(0) = 0, y(\pi/2) = 1 \Rightarrow c_1 = 0, 1, c_2 =$  arbitraria. Es decir, el problema no tiene solución.

### 1.1.2 Ecuaciones homogéneas. Sistema fundamental de soluciones

Una EDO lineal de orden  $n$  como (1.3) se dice homogénea si el lado derecho de la igualdad es idénticamente nulo:  $b(x) = 0$ . Veremos que la resolución de una ecuación no homogénea como (1.3) pasa por la resolución de la ecuación homogénea asociada.

#### Operadores diferenciales

A veces es útil denotar  $\frac{dy}{dx} = Dy$ , donde el símbolo  $D$  se llama *operador diferencial* porque transforma una función diferenciable en otra función. Las derivadas de orden superior se pueden expresar como “potencias” de  $D$ , como  $\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$ . Las expresiones polinómicas en  $D$ , como  $L = D^2 + 3xD + 5$  también son operadores diferenciales. En general:

**Definición 1.1.3.** Se define un *operador diferencial de orden  $n$*  como:

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x), \quad (1.5)$$

donde  $a_i(x), i = 0, 1, \dots, n$  son funciones reales (o complejas) de  $x$ .

Denotemos por  $\mathcal{C}^{(m)}$  el conjunto de las funciones reales (o complejas)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $m$ . Obviamente  $\mathcal{C}^{(m)}$  es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$ , y  $L$  es una aplicación  $L : \mathcal{C}^{(m)} \rightarrow \mathcal{C}^{(l)}$ ,  $m \geq n$  que hace corresponder a cada  $f \in \mathcal{C}^{(m)}$  una función  $L(f)$  de clase  $\mathcal{C}^{(l)}$ . La aplicación “multiplicación por  $a_0(x)$ ” hace corresponder a cada función  $f(x)$  la función  $a_0(x)f(x)$ . Veamos que la aplicación  $L : \mathcal{C}^{(m)} \rightarrow \mathcal{C}^{(l)}$ ,  $m \geq n$  es una aplicación lineal entre espacios vectoriales.

**Teorema 1.1.4.** *El operador  $L$  tiene la propiedad de linealidad*

$$L(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha L(f(x)) + \beta L(g(x)), \quad (1.6)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes y  $f, g \in \mathcal{C}^{(m)}$ ,  $m \geq n$ . A causa de esta propiedad, el operador diferencial de orden  $n$  (1.5) se denomina “operador lineal”.

**Demostración:** la demostración radica en dos propiedades básicas de la diferenciación: 1)  $D(\alpha f(x)) = \alpha Df(x)$ , donde  $\alpha$  es una constante, y 2)  $D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x)$ . Estas propiedades son claramente extensibles a la derivada  $n$ -ésima  $D^n$ , incluyendo  $D^0 \equiv 1$ , y a sus combinaciones lineales con coeficientes  $a_k(x)$ . ■

*Observación 1.1.5.* Nótese que, al contrario que  $D$ , el operador  $L$  no tiene porqué cumplir la regla de Leibnitz  $D(f(x)g(x)) = D(f(x))g(x) + f(x)D(g(x))$ . Esto se debe a la presencia del término  $a_0(x)$  en (1.5).

### Notación operatorial de EDOs lineales

La EDO lineal (1.3) puede expresarse en forma compacta en términos del operador diferencial lineal (1.5) como:

$$L(y) = 0,$$

para el caso homogéneo  $b(x) = 0$ , o bien en forma de un sistema de  $n$  EDOs de orden uno como:

$$D\vec{z} = A(x)\vec{z} \Rightarrow (DI_n - A(x))\vec{z} = \vec{0},$$

donde  $I_n$  denota la matriz identidad  $n \times n$ .

Así, resolver la ecuación  $L(y) = 0$  significa encontrar el núcleo del operador  $L$  entre las funciones reales  $n$  veces derivables  $\mathcal{C}^{(n)}$ . O, equivalentemente, encontrar el núcleo del operador lineal  $DI_n - A(x)$  entre las funciones vectoriales derivables  $\vec{z}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

### Principio de superposición

La propiedad de linealidad de  $L$  permite, dadas dos o más soluciones de  $L(y) = 0$ , encontrar otra. Esta idea viene expresada de manera precisa en el siguiente teorema

**Teorema 1.1.6.** Sean  $y_1, y_2, \dots, y_k$  soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden  $n$   $L(y) = 0$ , donde  $x$  está en un intervalo  $I$ . La combinación lineal

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_k y_k(x),$$

donde  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, k$  son constantes arbitrarias, también es una solución cuando  $x$  está en el intervalo  $I$ .

**Demostración:** la clave está en la linealidad de  $L$ :

$$L(y) = L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_k y_k) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2) + \dots + \alpha_k L(y_k) = 0,$$

donde, en la última igualdad hemos usado que  $L(y_i) = 0, i = 1, \dots, k$ , es decir, que  $y_1, y_2, \dots, y_k$  son soluciones de la EDO lineal homogénea de orden  $n$ :  $L(y) = 0$ . ■

**Corolario 1.1.7.** Del teorema anterior se deduce inmediatamente que las soluciones de  $L(y) = 0$  forman un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

Veamos cómo encontrar la dimensión de este espacio vectorial real.



### Dependencia e independencia lineal

Citaremos un par de conceptos básicos para estudiar EDOs lineales.

**Definición 1.1.8.** Se dice que un conjunto de funciones,  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  es *linealmente dependiente* en un intervalo  $I$  si existen constantes,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  no todas nulas, tales que

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente, se dice que es *linealmente independiente*.

Para un conjunto de dos funciones, la dependencia lineal  $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$  significa que una función es múltiplo de la otra:  $f_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_2(x)$  (suponiendo que  $\alpha_1 \neq 0$ ). Por ejemplo, las funciones  $f_1(x) = \sin(2x)$  y  $f_2(x) = \sin(x) \cos(x)$  son linealmente dependientes en  $I = (-\infty, \infty)$  porque  $f_1(x) = \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) = 2f_2(x)$ . Por otro lado, las funciones  $f_1(x) = x$  y  $f_2(x) = |x|$  son linealmente independientes en  $I = (-\infty, \infty)$  (aunque no en los intervalos  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$ , donde son dependientes).

### Generalidades sobre las soluciones de EDOs lineales homogéneas

Antes de entrar en fórmulas explícitas para las soluciones, las cuales sólo pueden proporcionarse salvo casos excepcionales como el caso de coeficientes constantes, estudiemos con detenimiento la estructura del espacio de soluciones.

**Teorema 1.1.9.** Las soluciones de  $L(y) = 0$ , o equivalentemente de  $(DI_n - A(x))\vec{z} = \vec{0}$ , forman un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{R}$ .

**Demostración:** hemos visto que la suma de soluciones y el producto de soluciones de  $L(y) = 0$  por escalares son también solución. Para conocer la dimensión utilizaremos la equivalencia  $L(y) = 0 \Leftrightarrow (DI_n - A(x))\vec{z} = \vec{0}$ . Fijemos una base  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  de  $\mathbb{R}^n$  y  $x_0 \in I$ , y consideremos las soluciones  $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_n$  de  $(DI_n - A(x))\vec{z} = \vec{0}$  con condiciones iniciales  $\vec{z}_i(x_0) = \vec{v}_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

Basta probar que  $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_n$  forman una base del espacio de soluciones (linealmente independiente y generador). Para ello procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que existen constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  no todas nulas, tales que

$$\alpha_1 \vec{z}_1(x) + \alpha_2 \vec{z}_2(x) + \dots + \alpha_n \vec{z}_n(x) = \vec{0}, \quad \forall x \in I.$$

Sustituyendo  $x$  por  $x_0$ ,

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0},$$

pero esto contradice que  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  sea una base de  $\mathbb{R}^n$ , luego  $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_n$  son linealmente independientes. Para ver que son un sistema generador, supongamos que  $\vec{z}$  es una solución de  $(DI_n - A(x))\vec{z} = \vec{0}$  y pongamos  $\vec{z}(x_0) = \vec{v}$ . Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  las coordenadas de  $\vec{v}$  en la base  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces

$$\alpha_1 \vec{z}_1(x_0) + \alpha_2 \vec{z}_2(x_0) + \dots + \alpha_n \vec{z}_n(x_0) = \vec{v},$$

y por unicidad de soluciones del problema de Cauchy (Teorema 1.1.1)

$$\alpha_1 \vec{z}_1(x) + \alpha_2 \vec{z}_2(x) + \cdots + \alpha_n \vec{z}_n(x) = \vec{z}(x).$$

Por tanto  $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_n$  forman un sistema generador. ■

**Definición 1.1.10.** Llamaremos a cualquiera de las bases  $S = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_n\}$  del espacio de soluciones de  $(DI_n - A(x))\vec{z} = \vec{0}$  un *sistema fundamental* de soluciones. De las matrices

$$Z = \begin{pmatrix} z_{1,0} & z_{2,0} & \cdots & z_{n,0} \\ z_{1,1} & z_{2,1} & \cdots & z_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{1,n-1} & z_{2,n-1} & \cdots & z_{n,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

cuyas columnas  $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_n$  son un sistema fundamental  $S$  diremos que son *matrices fundamentales*  $M[S] = Z$  de  $(DI_n - A(x))\vec{z} = \vec{0} \leftrightarrow L(y) = 0$ .

Entre las familias  $F = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$  de soluciones de  $L(y) = 0$  distinguiremos las que constituyen un sistema fundamental de las que no a través del *Wronskiano*, que se define como el determinante

$$W[F](x) = |M[F](x)| = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

**Teorema 1.1.11.** Sean  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  soluciones de  $L(y) = 0$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) La familia  $F = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , formada por los vectores con componentes  $\vec{z}_k = (y_k, y'_k, \dots, y_k^{(n-1)})$ , es un sistema fundamental;
- (ii) existe  $x_0 \in I$  tal que  $W[F](x_0) \neq 0$ ;
- (iii) para todo  $x \in I$ ,  $W[F](x) \neq 0$

**Demostración:** en virtud del isomorfismo lineal entre el espacio de soluciones de  $L(y) = 0$  y  $(DI_n - A(x))\vec{z} = \vec{0}$ , podemos demostrar que (i) $\Rightarrow$ (ii). En efecto, supongamos que  $M[F](x)$  es una matriz fundamental pero que, sin embargo, existe  $x_1 \in I$  tal que  $\det M[F](x_1) = W[F](x_1) \neq 0$ . Existirán entonces  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  no todas nulas, tales que  $\alpha_1 \vec{z}_1(x_1) + \alpha_2 \vec{z}_2(x_1) + \cdots + \alpha_n \vec{z}_n(x_1) = \vec{0}$ . Definamos  $\vec{z}(x) = \alpha_1 \vec{z}_1(x) + \alpha_2 \vec{z}_2(x) + \cdots + \alpha_n \vec{z}_n(x)$ . Obviamente  $\vec{z}(x)$  es solución de  $(DI_n - A(x))\vec{z} = \vec{0}$  con la condición inicial  $\vec{z}(x_1) = \vec{0}$ , al igual que  $\vec{z}(x) = \vec{0}$ , luego, por unicidad,  $\vec{z}(x) = \vec{0}$ . Se contradice así que la familia  $F$  sea libre.

Trivialmente (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Para probar que (ii) $\Rightarrow$ (i), basta notar que  $\vec{v}_i = \vec{z}_i(x_0), i = 1, 2, \dots, n$  es una base de  $\mathbb{R}^n$  y razonar como en el Teorema 1.1.9 para concluir que  $F$  es un sistema fundamental. ■

### 1.1.3 Ecuaciones no homogéneas. Variación de las constantes

Las soluciones de la ecuación lineal homogénea  $L(y) = 0 \leftrightarrow (DI_n - A(x))\vec{z} = \vec{0}$  y de la no homogénea  $L(y) = b(x) \leftrightarrow (DI_n - A(x))\vec{z} = \vec{b}(x)$  guardan una relación muy estrecha, como pone de manifiesto el siguiente resultado:

**Teorema 1.1.12.** *Sea  $S = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$  un sistema fundamental de  $L(y) = 0$  e  $y_p(x)$  una solución cualquiera de  $L(y) = b(x)$ . Entonces la solución general de  $L(y) = b(x)$  viene dada por*

$$y(x) = \underbrace{y_p(x)}_{\text{s.p.n.h.}} + \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)}_{\text{s.g.h.}},$$

donde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son constantes arbitrarias.

**Demostración:** sea  $y(x)$  la solución general de la ecuación no homogénea (s.g.n.h.)  $L(y) = b(x)$  e  $y_p(x)$  una solución particular de  $L(y) = b(x)$  (s.p.n.h.). Si definimos  $u(x) = y(x) - y_p(x)$ , por la linealidad de  $L$  se debe cumplir

$$L(u) = L(y) - L(y_p) = b(x) - b(x) = 0.$$

Esto demuestra que  $u(x)$  es una solución de la ecuación homogénea  $L(y) = 0$ ; por consiguiente, según el Teorema 1.1.9, existen constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  tales que  $u(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = y(x) - y_p(x)$ . ■

#### Principio de superposición para ecuaciones no homogéneas

Respecto al cálculo de soluciones particulares  $y_p$  de  $L(y) = b(x)$ , a veces resulta útil el siguiente “principio de superposición” para EDOs lineales no homogéneas (véase más adelante el *método de los coeficientes indeterminados*).

**Teorema 1.1.13.** *Sean  $y_{p_1}, y_{p_2}, \dots, y_{p_k}$  soluciones particulares respectivas de*

$$L(y) = h_1(x), L(y) = h_2(x), \dots, L(y) = h_k(x)$$

en un cierto intervalo  $I$ , entonces  $y_p = \alpha_1 y_{p_1} + \alpha_2 y_{p_2} + \dots + \alpha_k y_{p_k}$ , con  $\alpha_i, i = 1, \dots, k$  constantes reales, es solución de

$$L(y) = b(x) = \alpha_1 h_1(x) + \alpha_2 h_2(x) + \dots + \alpha_k h_k(x).$$

**Demostración:** en efecto, este resultado es consecuencia de la linealidad del operador diferencial  $L$

$$L(\alpha_1 y_{p_1} + \alpha_2 y_{p_2} + \dots + \alpha_k y_{p_k}) = \alpha_1 h_1(x) + \alpha_2 h_2(x) + \dots + \alpha_k h_k(x) = b(x). \blacksquare$$

### Método de variación de las constantes

Como en el caso de los sistemas lineales, la búsqueda de la solución general de la ecuación lineal no homogénea pasa por encontrar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea y después una solución particular de la completa. Cuando ya se conoce la s.g.h., el cálculo de una solución particular puede hacerse por el *método de variación de las constantes*. En este caso, suponemos que la solución particular que buscamos podrá escribirse, en términos del sistema fundamental  $S = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$  del que ya disponemos, como

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x) \quad (1.7)$$

para funciones adecuadas  $c_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Para comprenderlo mejor, hacemos uso del isomorfismo lineal entre el espacio de soluciones de  $L(y) = 0$  y  $(DI_n - A(x))\vec{z} = \vec{0}$ . Así, la ecuación (1.7) puede escribirse de manera equivalente como

$$\vec{z}_p = Z(x)\vec{c}(x),$$

donde  $\vec{z}_p = (y_p, y_p', \dots, y_p^{(n-1)})^T$ ,  $Z$  es la matriz fundamental definida en 1.1.10 y  $\vec{c}(x) = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T(x)$ . Nótese que, para una función  $\vec{z}_p$  definida de esta manera ocurrirá que

$$\vec{z}_p'(x) = Z'(x)\vec{c}(x) + Z(x)\vec{c}'(x) = A(x)Z(x)\vec{c}(x) + Z(x)\vec{c}'(x),$$

donde hemos utilizado que  $(DI_n - A(x))\vec{z}_k = \vec{0}$ ,  $k = 1, \dots, n$  para las columnas  $\vec{z}_k$  de la matriz fundamental  $Z(x)$ . Si queremos que  $\vec{z}_p$  cumpla la ecuación no homogénea  $\vec{z}_p'(x) = A(x)\vec{z}_p(x) + \vec{b}(x)$ , se concluye que

$$Z(x)\vec{c}'(x) = \vec{b}(x) \Rightarrow \vec{c}'(x) = \int Z^{-1}(x)\vec{b}(x)dx = \int \frac{\vec{W}[S](x)}{W[S](x)}dx,$$

donde, en la última igualdad, se ha utilizado el método de Cramer con

$$\vec{W}[S] = (W_1[S], W_2[S], \dots, W_n[S])$$

y  $W_j[S]$  el determinante que resulta de sustituir la columna  $j$  en el Wronskiano  $W[S]$  por  $\vec{b}$ . Así, la solución general de  $(DI_n - A(x))\vec{z} = \vec{b}(x)$  es

$$\vec{z}(x) = Z(x)\vec{\alpha} + Z(x) \int Z^{-1}(x)\vec{b}(x)dx,$$

o, si se imponen condiciones iniciales  $\vec{z}(x_0) = \vec{z}_0$ :

$$\vec{z}(x) = Z(x)Z^{-1}(x_0)\vec{z}_0 + Z(x) \int_{x_0}^x Z^{-1}(t)\vec{b}(t)dt. \quad (1.8)$$

## 1.2 EDOs lineales con coeficientes constantes

Existen métodos de resolución de ecuaciones lineales como (1.3) basados en desarrollos en serie de potencias. No obstante, nosotros no trataremos estos métodos aquí y pasaremos a abordar el caso más sencillo en que los coeficientes  $a_j(x)$  de (1.3) son constantes  $a_k(x) = a_k$ . Sin pérdida de generalidad podemos tomar  $a_n = 1$ , de manera que la ecuación a estudiar es

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0 = b(x).$$

Comencemos por buscar un sistema fundamental de la EDO homogénea  $L(y) = 0$ .

### 1.2.1 EDOs lineales homogéneas con coeficientes constantes

Para encontrar la solución general de

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0 = 0, \quad (1.9)$$

ensayaremos funciones del tipo  $y(x) = e^{\lambda x}$ , que sustituidas en la ecuación anterior  $L(y) = 0$  nos queda  $L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}L[\lambda] = 0$ , donde

$$L[\lambda] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0, \quad (1.10)$$

denota un polinomio de grado  $n$  en  $\lambda$  al que denominaremos *polinomio característico* de (1.9). La ecuación  $L[\lambda] = 0$  se denomina *ecuación característica*.

**Teorema 1.2.1.** *La solución general de (1.9) es una combinación lineal de las funciones*

$$x^k e^{\beta x} \cos(\omega x), \quad x^k e^{\beta x} \operatorname{sen}(\omega x),$$

donde  $\gamma = \beta + i\omega$  recorre el conjunto de las raíces de (1.10) con  $\omega \geq 0$ , y  $0 \leq k \leq m(\gamma)$ , siendo  $m(\gamma)$  la multiplicidad de  $\gamma$ .

**Demostración:** basta demostrar que si  $\gamma$  es una raíz de  $L[\lambda]$  de multiplicidad  $m$  y  $0 \leq k \leq m$ , entonces  $x^k e^{\gamma x}$  es solución de  $L[D](y) = 0$  (con  $L[D] \equiv L$ ).<sup>1</sup> A este fin, apréciase que si  $L[\lambda]$  factoriza como  $L[\lambda] = L_1[\lambda]L_2[\lambda]$  entonces si  $L_2[\lambda](y) = 0 \Rightarrow L[\lambda](y) = 0$ . Como nuestro objetivo es demostrar que si  $(\lambda - \gamma)^m$  divide a  $L[\lambda]$  entonces  $L[D](x^k e^{\gamma x}) = 0$  para cada  $0 \leq k < m$ , bastará con probar que

$$(D - \gamma)^{k+1}(x^k e^{\gamma x}) = 0 \text{ para cada } k \geq 0.$$

<sup>1</sup>Nótese que si, en particular,  $\gamma = \beta + i\omega$  tiene parte imaginaria  $\omega \neq 0$ , entonces se tendrá

$$0 = L[D](x^k e^{\gamma x}) = L[D](x^k e^{\beta x} \cos(\omega x) + i x^k e^{\beta x} \operatorname{sen}(\omega x)) = L[D](x^k e^{\beta x} \cos(\omega x)) + i L[D](x^k e^{\beta x} \operatorname{sen}(\omega x)),$$

y por tanto  $L[D](x^k e^{\beta x} \cos(\omega x)) = 0 = L[D](x^k e^{\beta x} \operatorname{sen}(\omega x))$ .

Esto es simple si razonamos por inducción. La afirmación es obviamente cierta cuando  $k = 0$ . Supuesta cierta para  $k - 1 \rightarrow (D - \gamma)^k (x^{k-1} e^{\gamma x}) = 0$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} (D - \gamma)^{k+1} x^k e^{\gamma x} &= (D - \gamma)^k ((D - \gamma)x^k e^{\gamma x}) \\ &= (D - \gamma)^k (kx^{k-1} e^{\gamma x} + x^k \gamma e^{\gamma x} - \gamma x^k e^{\gamma x}) \\ &= k(D - \gamma)^k (x^{k-1} e^{\gamma x}) = 0, \end{aligned}$$

de modo que también será cierta para  $k$ . Es inmediato comprobar también que dichas soluciones son linealmente independientes. ■

### 1.2.2 EDOs lineales no homogéneas con coeficientes constantes

Ya hemos visto un método general para el cálculo de soluciones particulares de la ecuación no homogénea  $L(y) = b(x)$  conocido un sistema fundamental de la ecuación homogénea  $L(y) = 0$ , denominado *método de variación de las constantes* [véase (1.8)]. Existe otro método más directo para el caso en que el término inhomogéneo  $b(x)$  sea producto de exponenciales, polinomios en  $x$ , senos y cosenos.

#### Método de los coeficientes indeterminados

**Teorema 1.2.2.** *Supongamos que*

$$b(x) = e^{\beta x} (p(x) \cos(\omega x) + q(x) \operatorname{sen}(\omega x)),$$

donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son polinomios de grado a lo sumo  $k \geq 0$ . Sea  $\mu = \beta + i\omega$ . Entonces se tienen las siguientes posibilidades:

- (i) Si  $\mu$  NO es raíz del polinomio característico (1.10) entonces  $L(y) = b(x)$  tiene una solución particular de la forma  $y_p(x) = e^{\beta x} (r(x) \cos(\omega x) + s(x) \operatorname{sen}(\omega x))$ , con  $r(x)$  y  $s(x)$  polinomios de grado a lo sumo  $k$ .
- (ii) Si  $\mu$  es raíz del polinomio característico (1.10) con multiplicidad  $m$ , entonces  $L(y) = b(x)$  tiene una solución particular de la forma  $y_p(x) = e^{\beta x} x^m (r(x) \cos(\omega x) + s(x) \operatorname{sen}(\omega x))$ , con  $r(x)$  y  $s(x)$  polinomios de grado a lo sumo  $k$ .

**Demostración:** utilizaremos la versión compleja

$$L(\bar{y}) = \bar{y}^{(n)} + a_{n-1} \bar{y}^{(n-1)} + \dots + a_1 \bar{y}' + a_0 \bar{y} = e^{\mu x} v(x) = \bar{b}(x), \quad (1.11)$$

de la ecuación real  $L(y) = b(x)$ , donde  $v(x) = p(x) - iq(x)$  es un polinomio de grado menor o igual que  $k$  con coeficientes complejos. Demostraremos que existe una solución compleja  $\bar{y}_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de (1.11) de la forma  $\bar{y}_p(x) = x^m e^{\mu x} w(x)$ , donde  $m$  es la multiplicidad de  $\mu$  como solución de

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

( $m = 0$  si  $\mu$  no es raíz de la ecuación) y  $w(x) = r(x) - is(x)$  es un polinomio de grado menor o igual que  $k$  con coeficientes complejos. La parte real  $y_p(x) \equiv \Re(\bar{y}_p(x)) =$

$e^{\beta x} x^m (r(x) \cos(\omega x) + s(x) \operatorname{sen}(\omega x))$  será pues solución de  $L(y) = b(x)$  con  $b(x) = \Re(\bar{b}(x)) = \Re(e^{\mu x} v(x)) = e^{\beta x} (p(x) \cos(\omega x) + q(x) \operatorname{sen}(\omega x))$ .

Nótese que la ecuación (1.11) se puede reescribir en términos de la descomposición en producto de monomios  $(D - \gamma_j)^{m_j}$ , con  $\gamma_j$  una raíz de (1.10) de multiplicidad  $m_j$ , de la siguiente forma:

$$(D - \gamma_1)^{m_1} (D - \gamma_2)^{m_2} \dots (D - \gamma_r)^{m_r} (D - \mu)^m \bar{y} = e^{\mu x} v(x), \quad (1.12)$$

donde admitimos la posibilidad de que  $\mu$  sea o no sea una raíz, poniendo en este último caso:  $m = 0 \Rightarrow (D - \mu)^0 = 1$ . Procedamos por partes:

a) Comencemos por el caso  $m = 0$ , o sea, cuando  $\mu$  no es raíz de (1.10). Bastará probar que existe un polinomio  $w(x)$  de grado  $\leq k$  tal que  $\bar{y}_p(x) = e^{\mu x} w(x)$  es solución de

$$(D - \gamma_j) \bar{y}(x) = e^{\mu x} \tilde{v}(x) \quad (1.13)$$

para algún polinomio  $\tilde{v}(x)$  de grado  $\leq k$ . En efecto, sustituyendo  $\bar{y}_p(x)$  en (1.13)

$$e^{\mu x} \tilde{v}(x) = \bar{y}_p'(x) - \gamma_j \bar{y}_p(x) = e^{\mu x} (w'(x) + \mu w(x) - \gamma_j w(x)) \Rightarrow \tilde{v}(x) = (\mu - \gamma_j) w(x) + w'(x).$$

Poniendo  $\tilde{v}(x) = \tilde{v}_0 + \tilde{v}_1 x + \dots + \tilde{v}_k x^k$  y  $w(x) = w_0 + w_1 x + \dots + w_k x^k$  e igualando coeficientes de igual grado:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_0 &= (\mu - \gamma_j) w_0 + w_1, \\ \tilde{v}_1 &= (\mu - \gamma_j) w_1 + 2w_2, \\ &\dots \\ \tilde{v}_{k-1} &= (\mu - \gamma_j) w_{k-1} + k w_k, \\ \tilde{v}_k &= (\mu - \gamma_j) w_k, \end{aligned}$$

que obviamente tiene solución por ser  $\mu \neq \gamma_j$  ( $\mu$  no es raíz). Procediendo de forma iterada llegamos a que existe  $w(x)$  tal que  $\bar{y}_p(x) = e^{\mu x} w(x)$  es solución de (1.12) con  $m = 0$ .

b) Analizamos a continuación el caso en que  $\mu$  sea una raíz con multiplicidad  $m = n \Rightarrow m_j = 0$ . Se trata de comprobar que  $\bar{y}_p(x) = x^n e^{\mu x} w(x)$  es una solución de  $(D - \mu)^n \bar{y} = e^{\mu x} v(x)$  con  $w(x)$  un polinomio de grado  $\leq k$ . De hecho demostraremos bastante más: que para cada  $n \geq 1$  y  $l \geq 0$  la ecuación

$$(D - \mu)^n \bar{y} = x^l e^{\mu x} v(x) \quad (1.14)$$

tiene una solución de la forma  $\bar{y}_p(x) = x^{l+n} e^{\mu x} w(x)$ , con  $w(x)$  un polinomio de grado  $\leq k$ . Razonemos por inducción sobre  $n$  y supongamos  $n = 1$ . La función  $\bar{y}_p(x) = x^{l+1} e^{\mu x} w(x)$  será solución de  $(D - \mu) \bar{y} = x^l e^{\mu x} v(x)$  si y sólo si

$$x^l e^{\mu x} v(x) = \mu x^{l+1} e^{\mu x} w(x) + [(l+1)x^l w(x) + x^{l+1} w'(x)] e^{\mu x} - \mu x^{l+1} e^{\mu x} w(x),$$

o sea,

$$v(x) = (l+1)w(x) + xw'(x),$$

o igualando coeficientes de igual grado

$$\begin{aligned} v_0 &= (l+1)w_0, \\ v_1 &= (l+2)w_1, \\ &\dots \\ v_{k-1} &= (l+k)w_{k-1}, \\ v_k &= (l+k+1)w_k, \end{aligned}$$

y despejando obtenemos  $w_j = v_j/(j+l+1)$ .

Para completar nuestro argumento por inducción supongamos que  $\tilde{y}_p(x) = x^{l+n}e^{\mu x}\tilde{w}(x)$  es solución de ecuación  $(D-\mu)^n\bar{y} = x^l e^{\mu x}v(x)$  para un cierto  $n$  y demostremos entonces que  $\bar{y}_p(x) = x^{l+n+1}e^{\mu x}w(x)$  es solución de la ecuación  $(D-\mu)^{n+1}\bar{y} = x^l e^{\mu x}v(x)$  utilizando que, como ya hemos demostrado,  $(D-\mu)\bar{y}_p = x^{l+n}e^{\mu x}\tilde{w}(x)$  para algún polinomio  $\tilde{w}(x)$  de grado  $\leq k$ . En efecto:

$$\begin{aligned} (D-\mu)^{n+1}\bar{y}_p &= (D-\mu)^n[(D-\mu)\bar{y}_p] \\ &= (D-\mu)^n \underbrace{[x^{l+n}e^{\mu x}\tilde{w}(x)]}_{\tilde{y}_p} = x^l e^{\mu x}w(x) \end{aligned}$$

c) Acabamos de demostrar en el apartado b) que  $\bar{y}_p(x) = x^m e^{\mu x}w(x)$  es solución de la ecuación

$$(D-\mu)^m\bar{y} = e^{\mu x}\tilde{w}(x) \equiv \tilde{y}_p(x),$$

con  $\tilde{w}(x)$  un polinomio de grado  $\leq k$ , y en el apartado a) que, a su vez,  $\tilde{y}_p(x)$  es solución de

$$(D-\gamma_1)^{m_1}(D-\gamma_2)^{m_2}\dots(D-\gamma_r)^{m_r}\bar{y} = e^{\mu x}v(x).$$

Por consiguiente,  $\bar{y}_p(x) = x^m e^{\mu x}w(x)$  es solución de (1.12). ■

### 1.3 Sistemas de EDOs lineales con coeficientes constantes

Consideremos el sistema

$$\left. \begin{aligned} L_{11}[D]y_1(x) + L_{12}[D]y_2(x) + \dots + L_{1n}[D]y_n(x) &= b_1(x), \\ L_{21}[D]y_1(x) + L_{22}[D]y_2(x) + \dots + L_{2n}[D]y_n(x) &= b_2(x), \\ \vdots \\ L_{n1}[D]y_1(x) + L_{n2}[D]y_2(x) + \dots + L_{nn}[D]y_n(x) &= b_n(x), \end{aligned} \right\} \rightarrow L(\vec{y}(x)) = \vec{b}(x), \quad (1.15)$$

donde  $L$  denota ahora una matriz  $n \times n$  cuyos coeficientes  $L_{ij}[D]$  son operadores lineales como los definidos en (1.5). Para resolver este sistema diferencial lo inmediato es aplicar el algoritmo de triangulación de Gauss tratando el sistema formalmente como si las funciones incógnita  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  fuesen números y sus coeficientes  $L_{ij}[D]$  polinomios



en el “parámetro”  $D$ . Sabemos que en este proceso de “triangulación” se reemplaza una fila (o columna) por la que se obtiene al sumar a dicha fila una “combinación lineal” de las restantes, en tendiendo aquí por “combinación lineal” la “multiplicación” de filas por operadores diferenciales polinomiales  $\sum_j c_j D^j$  arbitrarios (no necesariamente constantes).

En el siguiente capítulo estudiaremos las ecuaciones de movimiento de sistemas de osciladores armónicos acoplados, que pueden verse como casos particulares como los sistemas de EDOs lineales de orden 2 de la forma

$$L(\vec{y}) = MD^2\vec{y} + CD\vec{y} + K\vec{y} = \vec{F}(x),$$

donde  $M$  se denomina matriz de masas,  $K$  es la matriz de resortes o de constantes de acoplamiento,  $C$  es la matriz de constantes de amortiguamiento,  $\vec{F}$  es un vector de fuerzas externas, e  $\vec{y}(x)$  denota el vector de posición  $\vec{y}$  del sistema en función del tiempo  $x$ . En vez de aplicar el algoritmo de triangulación de Gauss, aquí es más conveniente (desde el punto de vista interpretativo) ensayar una solución del tipo  $\vec{y}(x) = e^{\omega x}\vec{\eta}$  para el sistema homogéneo

$$(M\lambda^2 + C\lambda + K)\vec{\eta} = \vec{0},$$

el cual tendrá solución si  $\det(M\lambda^2 + C\lambda + K) = 0$ , que constituye una ecuación característica para el sistema. Un caso particularmente interesante es cuando  $C = 0$  ó  $C \propto K$ . En tal caso, el sistema se convierte en una ecuación de autovalores

$$M\lambda^2\vec{\eta} = -K\vec{\eta},$$

con autovalores  $\lambda_j = i\omega_j$  (“frecuencias naturales de vibración”) complejos puros (debido a que  $M$  y  $K$  son en general matrices simétricas definidas positivas) y autovectores  $\vec{\eta}_j$  (“modos normales de vibración”). Por razones de tiempo, no trataremos aplicaciones físicas concretas de esta parte en el siguiente capítulo.



# Capítulo 2

## Aplicaciones a la Ingeniería Civil

### 2.1 Problemas de V.I.: vibraciones mecánicas y eléctricas

Estudiaremos el movimiento unidimensional de una partícula de masa  $m$  sometida a fuerzas de diferente naturaleza: elásticas o restauradoras  $F_e(t, x)$ , viscosas o resistivas  $F_v(t, x, \dot{x})$  y otras fuerzas externas  $F_{\text{ext}}(t)$  dependientes del tiempo. La ecuación diferencial que describe la evolución de la posición  $x(t)$  en función del tiempo viene dada por la segunda ley de Newton:

$$m\ddot{x} = F_e(t, x) + F_v(t, x, \dot{x}) + F_{\text{ext}}(t), \quad (2.1)$$

que es una EDO de orden 2 cuyas condiciones iniciales

$$x(t_0) = x_0, \quad v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0,$$

consisten en especificar la posición  $x(t)$  y la velocidad  $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}(t)$  en un instante inicial  $t_0$ .

Pasemos a discutir distintas expresiones de dichas fuerzas y sus aproximaciones lineales, las cuales tomaremos como punto de partida para un tratamiento analítico de la ecuación (2.1)

1. *Fuerzas recuperadoras o elásticas*  $F_e$ . Hemos permitido, en general, fuerzas restauradoras  $F_e(t, x)$  dependientes de la posición y del tiempo. Supongamos que  $x$  denota un desplazamiento alrededor de una posición de equilibrio y que  $F_e(t, x)$  admite un desarrollo en serie alrededor de dicha posición de equilibrio de la forma:

$$F_e(t, x) = -k_1(t)x - k_3(t)x^3 + \dots,$$

donde sólo intervienen potencias impares del desplazamiento  $x$  debido que la fuerza restauradora debe ser impar  $F_e(t, x) = -F_e(t, -x)$ .

- (a) *Resorte lineal*. Cuando los desplazamientos son pequeños, podemos despreciar órdenes superiores en el desarrollo de  $F_e$  y considerar

$$F_e(t, x) = -k_1(t)x.$$

- i. *Ley de Hooke*. El caso más sencillo e ideal es aquél en el cual las características físicas del resorte no cambian con el tiempo, es decir, cuando  $k_1(t) = k > 0$  es independiente del tiempo, con lo cual la fuerza elástica queda:

$$F_e(t, x) = -kx.$$

- ii. *Resorte desgastable*. Sin embargo, en el mundo real es lógico esperar que el resorte de debilite (o “pierda brío”) conforme pasa el tiempo; por ejemplo, de la forma  $k_1(t) = ke^{-\alpha t}$ ,  $k, \alpha > 0$ . En este caso, la EDO del sistema “masa-resorte”

$$m\ddot{x} + ke^{-\alpha t}x = 0$$

se transforma en una

$$\text{Ec. de Bessel } (\nu = 0) : s^2 \frac{d^2x}{ds^2} + s \frac{dx}{ds} + s^2x = 0.$$

mediante el cambio de variable

$$s = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{m}} e^{-\alpha t/2}.$$

La solución de esta ecuación se obtiene por desarrollo en serie de potencias (nosotros no trataremos este método aquí) y puede escribirse en términos de las funciones de Bessel de primera y segunda clase de la forma:

$$x(t) = c_1 J_0 \left( \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{m}} e^{-\alpha t/2} \right) + c_2 Y_0 \left( \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{m}} e^{-\alpha t/2} \right).$$

- iii. *Resorte que se endurece*. Cuando un resorte se somete a un ambiente en que la temperatura decrece rápidamente, la constante elástica crece con el tiempo, por ejemplo, de forma lineal  $k_1(t) = kt$ . En este caso, la EDO del sistema “masa-resorte” viene descrito por la

$$\text{Ec. de Airy} : m\ddot{x} + ktx = 0.$$

que se resuelve por series de potencias. Dicha ecuación también aparece al estudiar la difracción de la luz, la difracción de las ondas de radio en torno a la superficie de la Tierra, en aerodinámica y en el pandeo de una columna vertical uniforme que se flexiona bajo su propio peso.

- (b) *Resorte no lineal*. Para desplazamientos no tan pequeños, el muelle abandona su comportamiento lineal y la fuerza elástica adopta (en el caso independiente del tiempo) la forma  $F_e(x) = -kx - k_3x^3$ , donde hemos despreciado términos de orden superior. Duffing estudió las oscilaciones forzadas de una masa puntual sometida a una fuerza recuperadora no lineal modelada por la ecuación diferencial:

$$\text{Ec. de Duffing} : m\ddot{x} + kx + k_3x^3 = F_0 \cos \omega t.$$

Caben dos casos interesantes aquí:

- i. *Resorte duro*.  $k_3 > 0$ , para el cual la fuerza recuperadora es mayor (en valor absoluto) que la del resorte lineal.
- ii. *Resorte suave*.  $k_3 < 0$ , para el cual la fuerza recuperadora es menor (en valor absoluto) que la del resorte lineal.

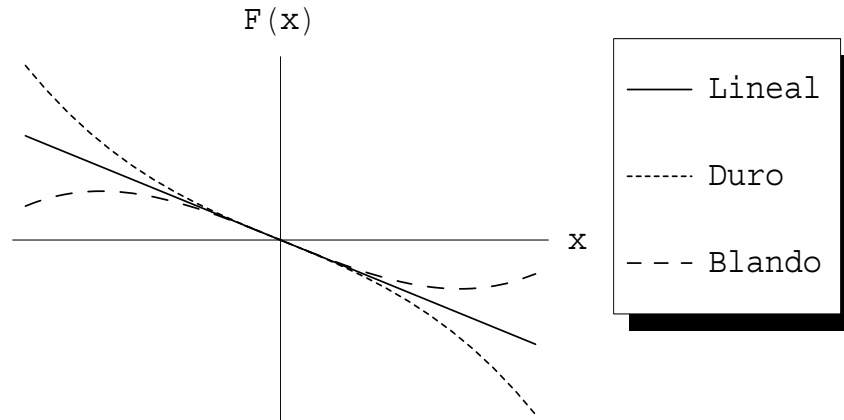


Figura 2.1: Fuerza  $F_e(x) = -kx - k_3x^3$  para un resorte lineal ( $k_3 = 0$ ), uno duro ( $k_3 > 0$ ) y uno blando ( $k_3 < 0$ )

2. *Fuerzas resistivas o viscosas*  $F_v$ . Supongamos que  $F_v(t, x, \dot{x})$  admite un desarrollo en serie de la forma:

$$F_v(t, x, \dot{x}) = -c_1(t, x)\dot{x} - c_2(t, x)|\dot{x}|\dot{x} - c_3(t, x)|\dot{x}|^2\dot{x} + \dots,$$

donde los valores absolutos garantizan que la fuerza viscosa se oponga siempre al movimiento.

- (a) *Fuerza viscosa lineal*. Para velocidades pequeñas, se pueden despreciar términos de orden superior y tomar

$$F_v(t, x, \dot{x}) = -c_1(t, x)\dot{x}.$$

Caben varias posibilidades aquí:

- i. *Coefficiente de viscosidad constante*.  $c_1(t, x) = c = \text{constante} > 0$ .
- ii. *Coefficiente de viscosidad variable*. Dentro de las posibilidades destacamos el caso  $c_1(t, x) = c(x^2 - a^2)$  que da lugar a la

$$\text{Ec. de van der Pol : } m\ddot{x} + c(x^2 - a^2)\dot{x} + kx = 0.$$

El hecho de que la fuerza viscosa sea  $F_v(|x| > |a|) < 0$  y  $F_v(|x| < |a|) > 0$  significa que la partícula se acelera para  $|x| < |a|$  y se retarda para  $|x| > |a|$

(o, de otra forma, la partícula absorbe energía cuando  $|x| < |a|$  y disipa cuando  $|x| > |a|$ ) tendiendo, por tanto, permanecer en oscilación estacionaria. Este es el resultado del Teorema de Liénard (véase [Simmons], pag. 518), el cual asegura para ecuaciones como la de van der Pol la existencia de una única trayectoria cerrada que rodea al origen en el plano de fases, a la que tienden en forma de espirales todas las demás trayectorias cuando  $t \rightarrow \infty$ .

- (b) *Fuerza viscosa no lineal.* Para velocidades no tan pequeñas, y dependiendo del tipo de medio viscoso, a veces es necesario añadir nuevos términos en el desarrollo de  $F_v$ , por ejemplo:

$$F_v(\dot{x}) = -c_1\dot{x} - c_2|\dot{x}|\dot{x}.$$

En la siguiente sección sólo consideraremos el caso lineal independiente del tiempo, con lo cual, la ecuación a estudiar es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{\text{ext}}(t) \rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = F_{\text{ext}}(t)/m,$$

donde hemos puesto  $2\beta = c/m$  y  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  por comodidad de cálculo (véase más adelante). Como fuerzas externas  $F_{\text{ext}}(t)$  utilizaremos, por simplicidad, funciones de tipo periódico  $F_{\text{ext}}(t) = F_{\text{ext}}(t + T)$ .

### 2.1.1 Oscilador armónico simple

Comencemos considerando el caso en que no existe fuerza viscosa ( $\beta = 0$ ) ni fuerzas externas  $F_{\text{ext}}(t) = 0$ . Así, la ecuación a estudiar es:

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = 0.$$

Ensayando la solución  $x(t) = e^{\lambda t}$  obtenemos la ecuación característica

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \pm i\omega_0,$$

luego, por el teorema 1.2.1, la solución general es:

$$x(t) = c_+ \text{sen}(\omega_0 t) + c_- \text{cos}(\omega_0 t) = A \text{cos}(\omega_0 t - \delta),$$

donde las constantes de integración  $A, \delta$  representan la *amplitud* y el *desfase*, respectivamente. Estas constantes se determinan a través de las condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \delta = \arctan\left(\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right), \quad A = x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{x_0 \omega_0}\right)^2}.$$

El resultado es un movimiento sinusoidal de periodo  $T = 2\pi/\omega_0$ . Las órbitas en el espacio de las fases  $\dot{x}(x)$  son *elipses o vórtices* ya que

$$\frac{x(t)^2}{C^2} + \frac{\dot{x}(t)^2}{C^2\omega_0^2} = 1.$$

### 2.1.2 Oscilador armónico amortiguado

Introduzcamos ahora una fuerza viscosa en el oscilador armónico simple, de forma que la ecuación a estudiar es:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Ensayando la solución  $x(t) = e^{\lambda t}$  obtenemos la ecuación característica

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Caben diferentes posibilidades aquí dependiendo de los valores relativos de  $\beta$  y  $\omega_0$ . Estudiemos cada uno por separado.

#### a) Oscilador armónico subamortiguado ( $\beta < \omega_0$ )

En este caso tenemos dos raíces complejas  $\lambda_{\pm} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega$  y la solución general puede escribirse como:

$$x(t) = e^{-\beta t} (c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \operatorname{cos}(\omega t)) = \underbrace{e^{-\beta t} A}_{\tilde{A}(t)} \operatorname{cos}(\omega t - \delta), \quad \omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Las constantes de integración  $A, \delta$  (amplitud y desfase) se determinan a través de las condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = x_0 \sqrt{1 + \left( \frac{\beta x_0 + v_0}{\omega x_0} \right)^2}, \quad \delta = \arctan \left( \frac{\beta x_0 + v_0}{\omega x_0} \right).$$

El resultado es un movimiento oscilatorio de frecuencia  $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  (menor que la frecuencia natural  $\omega_0$ ) y amplitud decreciente  $\tilde{A}(t) = e^{-\beta t} A \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (véase la figura 2.2). Las órbitas en el espacio de las fases  $\dot{x}(x)$  son *espirales* (véase la figura 2.3).

#### b) Oscilador armónico críticamente amortiguado ( $\beta = \omega_0$ )

En este caso tenemos una raíz real doble  $\lambda = -\beta$  y la solución general puede escribirse como:

$$x(t) = c_1 e^{-\beta t} + c_2 t e^{-\beta t}.$$

Las constantes de integración  $c_1, c_2$  se determinan a través de las condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = x_0, \quad c_2 = v_0 + \beta x_0.$$

El resultado es un movimiento no oscilatorio en el que  $x(t)$  decrece con el tiempo de forma exponencial (véase la figura 2.4). Nótese que la partícula puede pasar por la posición de equilibrio a lo sumo una vez. Las órbitas en el espacio de las fases  $\dot{x}(x)$  son *nodos límite*.

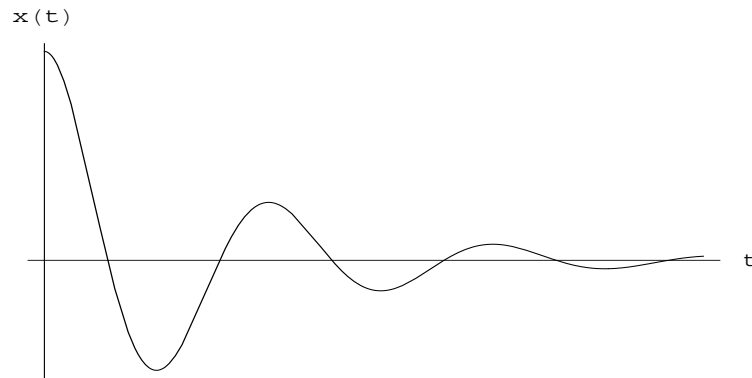


Figura 2.2: La amplitud de las oscilaciones decrece con el tiempo para un oscilador subamortiguado

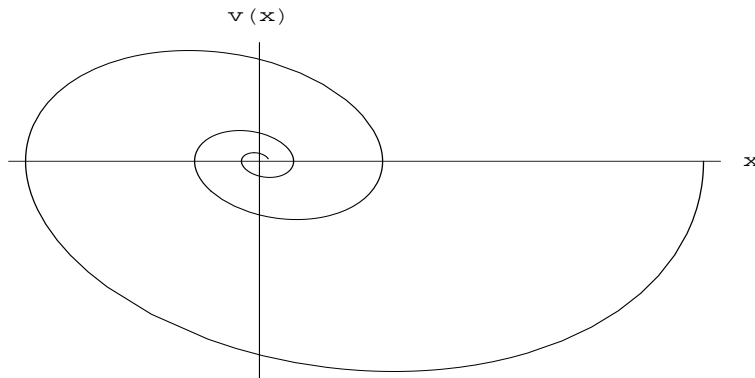


Figura 2.3: Órbita espiral en el plano de fases "velocidad-posición" para un oscilador subamortiguado

### c) Oscilador armónico sobreamortiguado ( $\beta > \omega_0$ )

En este caso tenemos dos raíces reales  $\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$  y la solución general puede escribirse como:

$$x(t) = c_- e^{\lambda_- t} + c_+ e^{\lambda_+ t} = e^{-\beta t} \left( c_+ e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + c_- e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right),$$

Las constantes de integración  $c_{\pm}$  se determinan a través de las condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow c_+ = \frac{v_0 - \lambda_- x_0}{\lambda_+ - \lambda_-}, \quad c_- = \frac{-v_0 + \lambda_+ x_0}{\lambda_+ - \lambda_-}.$$

El resultado es un movimiento no oscilatorio en el que  $x(t)$  decrece con el tiempo de forma exponencial, al igual que en el caso crítico anterior. No obstante, la mayor viscosidad para el oscilador sobreamortiguado hace que la amplitud vaya a cero más lentamente (véase la figura 2.5).



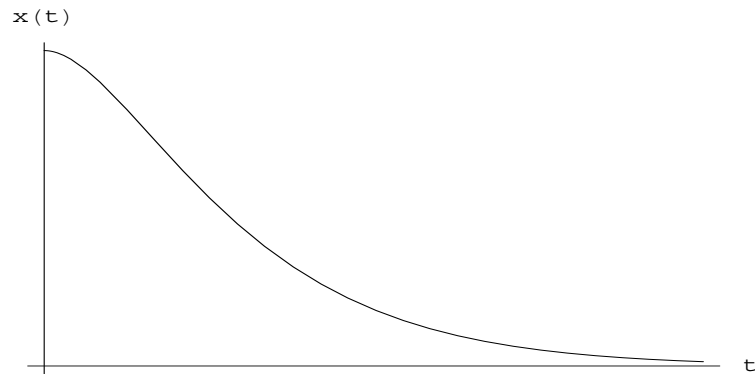


Figura 2.4: La amplitud de las oscilaciones decrece con el tiempo para un oscilador críticamente amortiguado

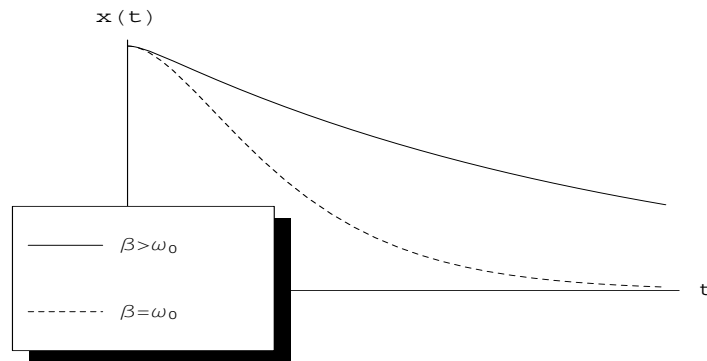


Figura 2.5: Comparación entre el oscilador críticamente amortiguado y sobreamortiguado

Las órbitas en el espacio de las fases  $\dot{x}(x)$  son *nodos*.

### 2.1.3 Oscilador armónico forzado: pulsaciones y resonancia pura

Supongamos primeramente que no existe amortiguamiento e introduzcamos una fuerza externa de tipo sinusoidal de la forma  $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\omega_e t)$ , donde  $\omega_e$  denota la frecuencia de la fuerza externa. La ecuación a estudiar es:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_e t).$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados (teorema 1.2.2), ensayaremos una la solución particular del tipo  $x_p(t) = A_1 \cos(\omega_e t) + A_2 \sin(\omega_e t)$ . Introduciendo esta solución particular en la ecuación diferencial obtenemos que  $A_1 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_e^2}$ ,  $A_2 = 0$ , con lo

cual, la solución general de la ecuación no homogénea es la suma de la solución general de la homogénea (s.g.h.) más una particular de la no homogénea (s.p.n.h.):

$$x(t) = \underbrace{c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t}_{s.g.h.} + \underbrace{\frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_e^2} \cos \omega_e t}_{s.p.n.h.}$$

Caben estudiar aquí dos fenómenos interesantes dependiendo de los valores relativos de la frecuencia natural  $\omega_0$  y la frecuencia externa  $\omega_e$ .

a) **Pulsaciones**  $\omega_e \approx \omega_0$

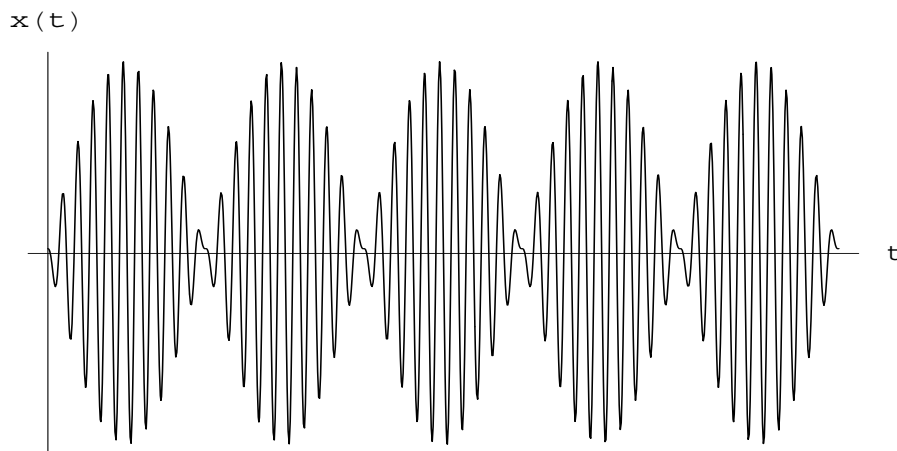


Figura 2.6: Fenómeno de las pulsaciones

Tomemos, por ejemplo, como condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_e^2} (\cos \omega_e t - \cos \omega_0 t)$$

$$= \underbrace{\frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_e^2} 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_0 - \omega_e}{2} t \right)}_{A(t)} \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_0 + \omega_e}{2} t \right),$$

donde se ha utilizado la identidad trigonométrica:  $\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a - b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b)$ . La solución anterior se interpreta como una *oscilación rápida* de frecuencia  $\frac{\omega_0 + \omega_e}{2}$  (la media aritmética de la frecuencia natural y la externa) *modulada o envuelta* por una *oscilación lenta* de frecuencia pequeña  $\frac{\omega_0 - \omega_e}{2}$  cuando las frecuencias externa y natural son muy parecidas  $\omega_e \approx \omega_0$  (¡pero distintas!). Véase figura 2.6.

Este fenómeno recibe el nombre de *latidos o pulsaciones* y es la base de la *frecuencia modulada* (FM) en las emisoras de radio, donde el sonido audible (de menor frecuencia) modula o envuelve a las ondas de radio (de alta frecuencia). También es fácilmente detectable durante la “afinación de una guitarra”.

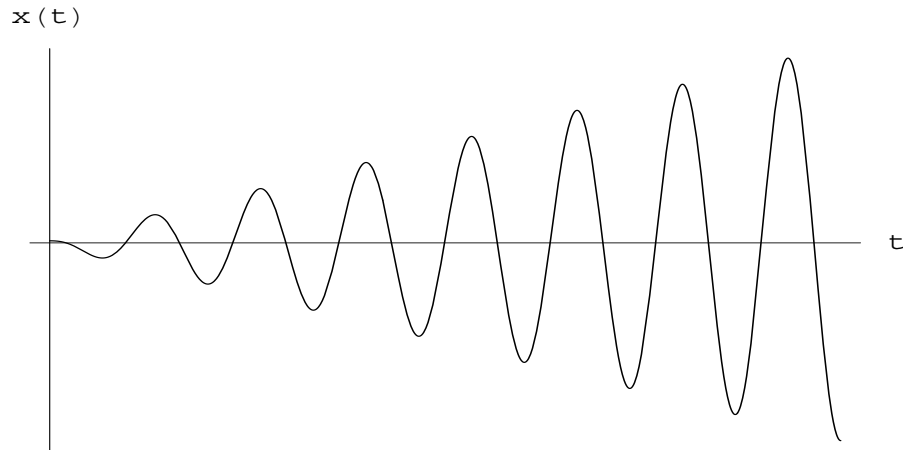
b) Resonancia pura  $\omega_e = \omega_0$ 

Figura 2.7: Crecimiento lineal en el tiempo de la amplitud para una resonancia pura

Cuando la frecuencia externa  $\omega_e$  coincide exactamente con la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$  (en ausencia de rozamiento), el método de los coeficientes indeterminados (teorema 1.2.2) nos sugiere una solución particular del tipo  $x_p(t) = t(A_1 \cos(\omega_e t) + A_2 \sin(\omega_e t))$ . Introduciendo esta solución particular en la ecuación diferencial obtenemos que  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = \frac{F_0/m}{2\omega_e}$ , con lo cual, la solución general de la ecuación no homogénea es la suma de la solución general de la homogénea (s.g.h.) más una particular de la no homogénea (s.p.n.h.):

$$x(t) = \underbrace{c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t}_{s.g.h.} + \underbrace{\frac{F_0/m}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t}_{s.p.n.h.}$$

Tomemos, por ejemplo, como condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \underbrace{\left( x_0 + \frac{F_0/m}{2\omega_0} t \right)}_{A(t)} \cos \omega_0 t + \frac{v_0 - \frac{F_0}{2m\omega_0}}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

En este caso, el coeficiente  $A(t)$  es lineal en el tiempo y ello supone que la amplitud de las oscilaciones crezca indefinidamente (véase la figura 2.7).

Este fenómeno se denomina *resonancia pura*, y puede conllevar la rotura del resorte cuando la amplitud de las oscilaciones alcanza el límite elástico del material del que está fabricado dicho resorte. Esta es la vertiente “negativa” de la resonancia, la cual puede presentarse como un efecto “pernicioso” en las vibraciones de ciertas estructuras en construcción. No obstante, este fenómeno también subyace a la fabricación de *sintonizadores*, como los de una radio, que “filtran una determinada frecuencia (véase sección 2.1.5 sobre la aplicación a la teoría de circuitos).

### 2.1.4 Oscilador armónico amortiguado y forzado: factor de amplificación

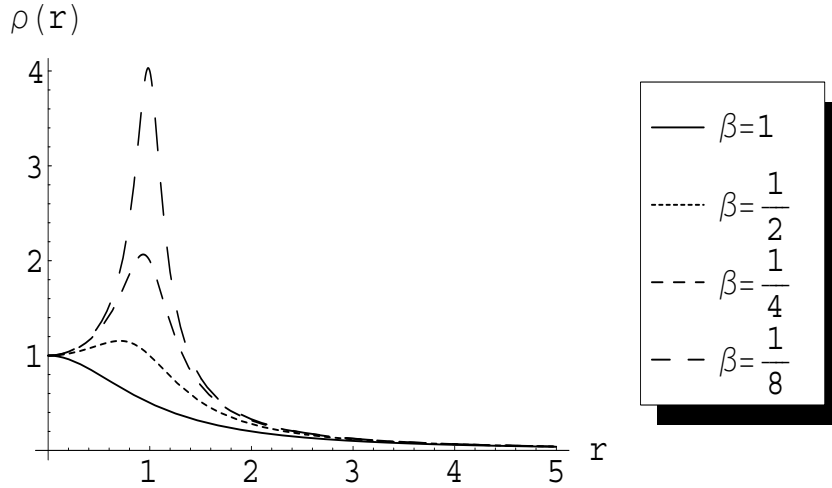


Figura 2.8: Dependencia del factor de amplificación  $\rho(r)$  con  $r \equiv \frac{\omega_e}{\omega_0}$  para distintos valores de viscosidad  $\beta$

Supongamos ahora que existe amortiguamiento e introduzcamos una fuerza externa de tipo sinusoidal de la forma  $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\omega_e t)$ , donde  $\omega_e$  denota la frecuencia de la fuerza externa. La ecuación a estudiar es:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_e t).$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados (teorema 1.2.2), ensayaremos una la solución particular del tipo  $x_p(t) = A_1 \sin(\omega_e t) + A_2 \cos(\omega_e t)$ . Introduciendo esta solución particular en la ecuación diferencial anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{2\beta\omega_e F_0}{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\beta^2\omega_e^2} \sin(\omega_e t) + \frac{(\omega_0^2 - \omega_e^2)F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\beta^2\omega_e^2} \cos(\omega_e t) \\ &= \underbrace{\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\beta^2\omega_e^2}}}_{A(\omega_e)} \cos(\omega_e t - \delta) = \underbrace{\rho(r) \frac{F_0}{k}}_{A(r)} \cos(\omega_e t - \delta), \end{aligned}$$

donde se ha definido:

$$\text{Factor de amplificación : } \rho(r) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\beta^2 r^2}}, \quad r \equiv \frac{\omega_e}{\omega_0},$$

$$\text{Desfase : } \delta = \arctan\left(\frac{2\beta\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\right).$$

En la figura 2.8 tenemos un gráfico de la dependencia del factor de amplificación  $\rho$  en función del cociente  $r \equiv \frac{\omega_e}{\omega_0}$ . Observamos que  $\rho(r)$  presenta un máximo para  $r = 1 \Rightarrow \omega_e = \omega_0$ , o sea, cuando la frecuencia de la fuerza externa coincide con la frecuencia natural de oscilador del resorte. Dicho máximo es más pronunciado conforme el coeficiente de rozamiento  $\beta$  es más pequeño, tendiendo a la resonancia pura (estudiada en el apartado anterior) en el límite  $\beta \rightarrow 0$ . En este caso, la amplitud  $A(\omega_e)$  de las oscilaciones es máxima. Es decir:

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} \omega_e \approx \omega_0 \\ \beta \ll 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A(\omega_e) \gg 1 \rightarrow \text{Resonancia.}$$

La solución general de la ecuación no homogénea será la suma de la solución general de

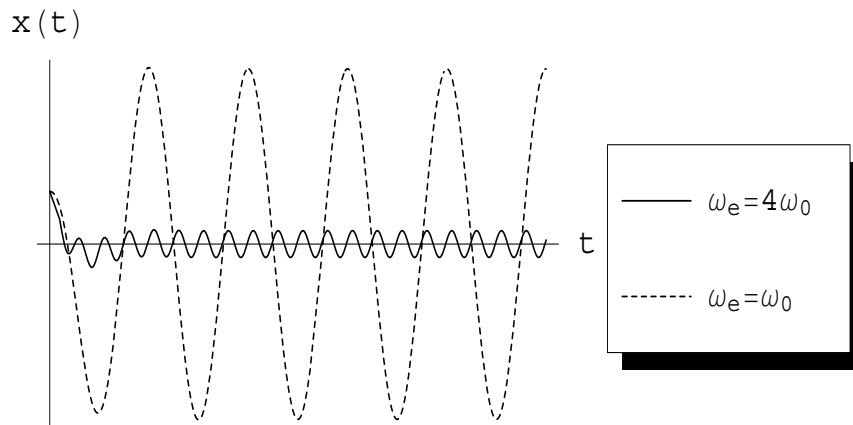


Figura 2.9: Comparación de la amplitud para un movimiento amortiguado ( $\beta = 0.3$ ) y forzado con  $\omega_e = 4\omega_0$  y en resonancia  $\omega_e = \omega_0$

la homogénea (s.g.h.) más la solución particular de la no homogénea (s.p.n.h.) calculada anteriormente. Es decir:

$$x_{g.n.h.}(t) = x_{g.h.}(t) + x_p(t) = \underbrace{e^{-\beta t} B \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{Parte transitoria}} + \underbrace{A(r) \cos(\omega_e t - \delta)}_{\text{Parte estacionaria}},$$

donde  $B$  y  $\varphi$  son constantes arbitrarias a fijar por las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = v_0$ ; recuerde que la frecuencia para el movimiento amortiguado no forzado se definía como:  $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . La solución general de la homogénea  $x_{g.h.}(t)$  se ve fuertemente amortiguada por el factor  $e^{-\beta t}$ , de manera que es insignificante pasado un cierto tiempo  $t \gg 1/\beta$  y supone, por lo tanto un *término transitorio* o *solución transitoria*. Pasado ese tiempo, la solución general de la no homogénea tenderá a la solución particular, es decir,  $x_{g.n.h.}(t) \approx x_p(t)$ ,  $t \gg 1/\beta$ , que se denomina *parte estacionaria* o *solución de estado estacionario*.

### 2.1.5 Analogías eléctricas. Leyes de Kirchhoff

La ecuación diferencial que modela las vibraciones eléctricas (variación de la carga  $q(t)$  en el tiempo) en un circuito RCL, con una resistencia de valor  $R$ , un condensador de capacidad  $C$ , una bobina de inductancia  $L$  y una fuente de alimentación de fuerza electromotriz  $E(t)$  en serie, viene dada por la segunda ley de Kirchhoff (“la suma de las caídas de tensión o voltajes en los elementos de un circuito debe ser igual a la fuerza electromotriz aplicada”):

$$\underbrace{L\ddot{q}}_{V_L} + \underbrace{R\dot{q}}_{V_R} + \underbrace{\frac{1}{C}q}_{V_C} = E(t),$$

donde  $V_L = L\ddot{q}$  denota la caída de tensión en la bobina,  $V_R = R\dot{q}$  la caída de tensión en la resistencia y  $V_C = \frac{1}{C}q$  la caída de tensión en el condensador. Todo lo dicho para las vibraciones mecánicas puede traducirse directamente a las eléctricas sin más que hacer la siguiente identificación:

CONCEPTO MECÁNICO	$\longleftrightarrow$	CONCEPTO ELÉCTRICO
desplazamiento $x(t)$	$\longleftrightarrow$	carga $q(t)$
masa $m$	$\longleftrightarrow$	inductancia $L$
viscosidad $c$	$\longleftrightarrow$	resistencia $R$
cte. resorte $k$	$\longleftrightarrow$	capacitancia $1/C$
fuerza externa $F_{\text{ext}}(t)$	$\longleftrightarrow$	fuerza electromotriz $E(t)$

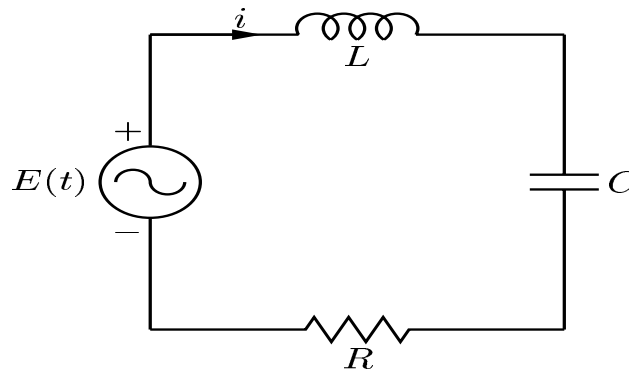


Figura 2.10: Circuito RCL

## 2.2 Problemas de V.F.: flexión y pandeo en vigas

En los problemas de valor en la frontera que seguidamente exponemos se combinan conceptos de interés en Geometría, Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Distribu-

ciones como: curvatura, tensor de esfuerzos y deformaciones, Ley de Hooke, distribución de cargas, etc.

### 2.2.1 Flexión en vigas: ecuación diferencial de la curva elástica y flecha de flexión

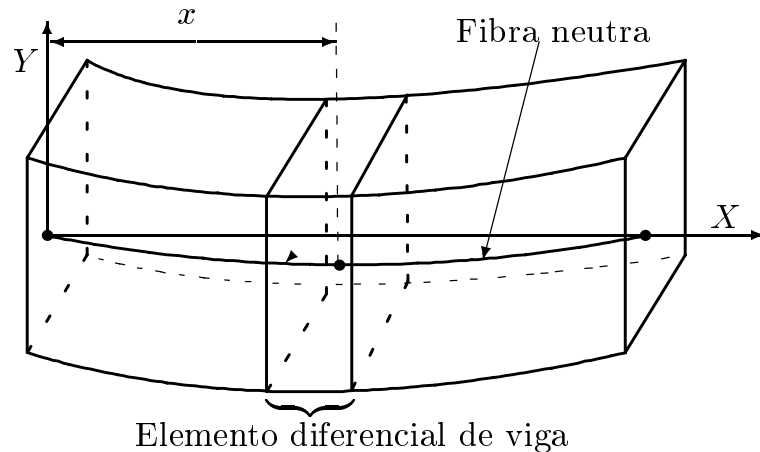


Figura 2.11: Viga encorvada y fibra neutra

En la figura 2.11 mostramos el aspecto general que presenta una viga horizontal al encorvarse bajo las cargas que soporta, las cuales se suponen verticales. Imaginemos la viga descompuesta en delgadas láminas horizontales. Debido al encorvamiento, las láminas situadas en la región superior de la viga se encuentran comprimidas, en tanto que las situadas en la región inferior están estiradas. Ambas regiones están separadas por una capa cuyas fibras no están ni estiradas ni comprimidas; esa capa recibe el nombre de *capa o superficie neutra*. Según la figura 2.11, la intersección de la superficie neutra con el plano XY nos define una curva llamada *fibra neutra*. Consideremos ahora un elemento diferencial longitudinal de la viga, tal como se ilustra en la figura 2.12, sometido a momentos flexores de signo opuesto  $M(x + dx) = -M(x - dx)$  (para que el elemento no gire) en los extremos. El elemento de viga experimenta una flexión tal que su fibra neutra toma la forma de un arco de circunferencia de radio  $R$ . Otra fibra situada a una distancia  $y$  por encima de la neutra tendrá un radio  $R - y$ ; entonces, la *deformación longitudinal unitaria* (o porcentaje en cambio de longitud), definida como el cociente: ((longitud de la fibra contraída) - (longitud de la fibra neutra))/(longitud de la fibra neutra), será:

$$\epsilon_{xx} = \frac{(R - y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = -\frac{y}{R}, \quad (2.2)$$

donde  $d\theta$  es el ángulo subtendido por el elemento de viga de longitud  $dx$  en el *centro de curvatura*  $C$ . El signo negativo en la expresión (2.2) nos indica que las fibras situadas por

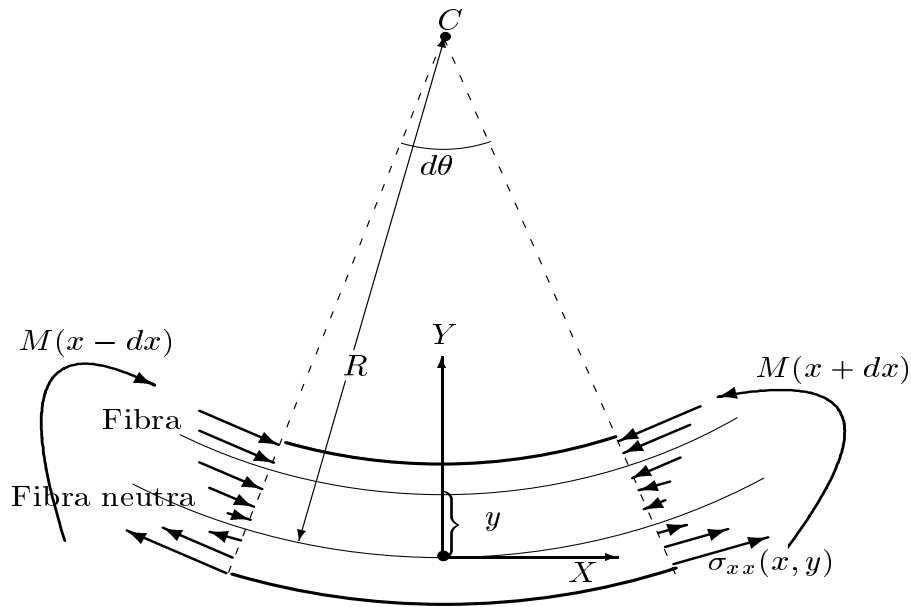


Figura 2.12: Elemento longitudinal diferencial de viga y esfuerzo normal y momento flexor que soporta debido a la acción del material situado a izquierda y derecha

encima de la fibra neutra ( $y > 0$ ) están comprimidas ( $\epsilon_{xx} < 0$ ) en tanto que las situadas por debajo ( $y < 0$ ) están estiradas ( $\epsilon_{xx} > 0$ ). La ley de Hooke generalizada dice que la deformación longitudinal unitaria  $\epsilon_{xx}(x, y)$  es proporcional al esfuerzo normal  $\sigma_{xx}(x, y)$  (compresor o tensor) que actúa en la dirección del eje  $X$  sobre una fibra situada a una altura  $y$  por encima de la fibra neutra:

$$\sigma_{xx}(x, y) = E\epsilon_{xx}(x, y) = -\frac{E}{R(x)}y,$$

donde la constante de proporcionalidad  $E$  es el *módulo de Young del material*.

La fuerza normal total que actúa sobre una sección transversal  $S$  (en el plano  $Y - Z$ ) de la viga como resultado de la acción del material situado a la izquierda sobre el situado a la derecha de la sección debe ser nula:

$$F = \int_S \sigma_{xx} dydz = -\frac{E}{R(x)} \int_S y dydz = 0,$$

ya que estamos suponiendo que todas las cargas que soporta la viga son verticales, de modo que no puede haber fuerza neta horizontal en ninguna sección transversal de la viga. Puesto que  $\int_S y dydz = 0$ , será necesario tomar el origen del eje vertical  $Y$  coincidiendo con el *centro de área o centroide* de la sección transversal  $S$  para cada valor de  $x$ , lo que equivale a decir que la fibra neutra pasa por los centroides de todas las secciones transversales.

Aún cuando la distribución de esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$  sobre una sección transversal de la viga representa una fuerza normal neta nula, no pasa lo mismo con el momento de



dicha distribución:

$$M(x) = \int_S y \sigma_{xx} dy dz = -\frac{E}{R(x)} \underbrace{\int_S y^2 dy dz}_{I_z} = -\frac{EI_z}{R(x)},$$

donde  $I_z \equiv \int_S y^2 dy dz$  es el análogo del “momento de inercia” de la sección transversal, con relación al eje  $Z$  que pasa por la fibra neutra, supuesta dicha sección una “lámina delgada de densidad superficial unidad”.

Se trata de determinar la forma de la fibra neutra o *curva elástica*  $y(x)$ . Recordemos que, de acuerdo con la Geometría Diferencial, la curvatura  $\kappa$  (el inverso del radio de curvatura  $R$ ) de una curva plana  $y(x)$  en un punto genérico  $x$  de la misma se calcula como:

$$\kappa(x) = \frac{1}{R} = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}} \approx y''(x),$$

donde se ha supuesto que, como sucede en la mayor parte de los casos de interés práctico, la flexión que experimenta la viga es muy pequeña, de manera que  $y'(x)^2$  puede considerarse despreciable frente a la unidad. Así, la *ecuación diferencial de la curva elástica* queda:

$$y''(x) = -\frac{1}{EI_z} M(x).$$

Teniendo en cuenta que la derivada del momento flexor  $M(x)$  es igual a menos la fuerza cortante  $F(x) = \int_S \sigma_{xy} dy dz$ , y que la derivada de la fuerza cortante es igual a la *densidad de carga*  $q(x)$  (peso por unidad de longitud),

$$M'(x) = -F(x), \quad F'(x) = q(x),$$

podemos representar también la ecuación diferencial de la curva elástica como:

$$y^{IV}(x) = \frac{1}{EI_z} q(x), \quad (2.3)$$

donde  $y^{IV}$  denota la derivada cuarta.

Hay que distinguir entre:

1. *Cargas distribuidas*,  $dF(x) = q(x)dx = w(x)dx$ , tales como el propio peso de la viga, que se aplican de forma uniforme a lo largo de la viga (en general, funciones  $w(x)$  continuas a trozos).
2. *Cargas concentradas*,  $dF(x) = q(x)dx = \sum_i W_i \delta(x - x_i)dx$ , tales como las reacciones verticales  $V_i$  en los apoyos, que se aplican como cargas  $W_i$  localizadas en los puntos  $x_i$ .

Hemos introducido la “distribución” (“¡que no función!”) *delta de Dirac*  $\delta(x - x_i)dx$  para dar un tratamiento matemático unificado de cargas distribuidas y concentradas como *distribuciones*  $dF(x)$  de peso sobre la viga. Físicamente, las cargas concentradas  $W_i$  están

localizadas en un entorno pequeño de anchura  $a$  alrededor de los puntos de aplicación  $x_i$ , de manera que (“a efectos prácticos”) las densidades de carga concentrada pueden escribirse como

$$w(x) = \sum_i W_i \delta_a(x - x_i), \text{ donde } \delta_a(x - x_i) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{si } x \in [x_i - \frac{a}{2}, x_i + \frac{a}{2}] \\ 0, & \text{si } x \notin [x_i - \frac{a}{2}, x_i + \frac{a}{2}] \end{cases},$$

de manera que el área que sustiende la “función meseta”  $\delta_a(x - x_i)$  es siempre igual a uno (véase figura 2.13). La abstracción matemática consiste en hacer tender  $a \rightarrow 0$ , es

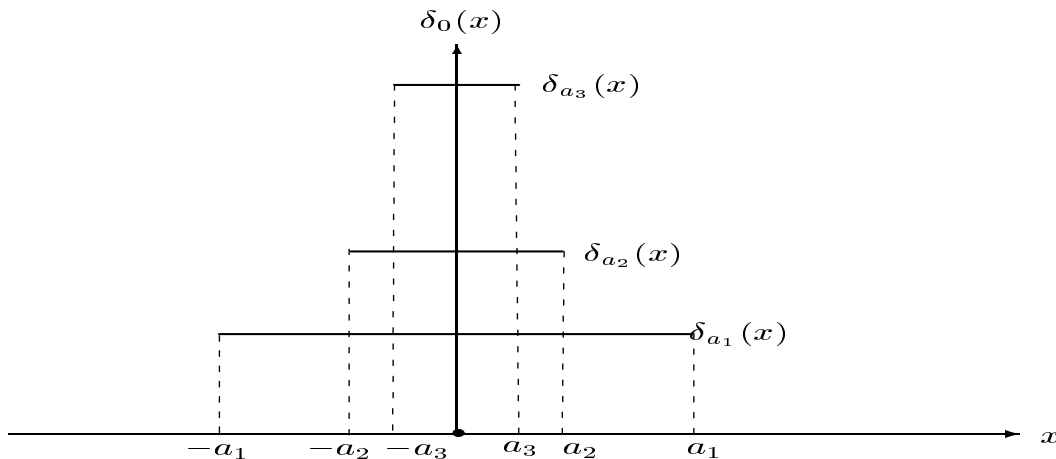


Figura 2.13: Delta de Dirac como “límite de funciones meseta”

decir, localizar más y más las cargas  $W_i$  hasta que estas actúen en un solo punto  $x_i$ . Así, la delta de Dirac tiene sentido como una distribución, al hacer promedios (integrales), cumpliendo que, para una función  $f(x)$  continua en un punto  $x_0$  se tiene:

$$\int f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0).$$

Todas estas definiciones se pueden formalizar aún más y esto constituye parte de la doctrina denominada *Teoría de Distribuciones*. Para nuestros fines será suficiente con saber que la fuerza cortante en un punto  $x$  de la viga puede calcularse como:

$$F(x) = F(0) + \int_0^x q(x)dx = \int_0^x (w(l) + \sum_i W_i \delta(l - x_i))dx = \int_0^x w(l)dl + \sum_{x > x_i} W_i,$$

donde hemos puesto  $F(0) \equiv W_0$  y  $x_0 = 0$ . Conseguimos así rebajar en uno el orden de la ecuación diferencial (2.3), quedando:

$$y'''(x) = \frac{1}{EI_z} F(x),$$

Recordando igualmente que  $M'(x) = -F(x)$ , el momento flexor  $M$  puede calcularse como la integral:

$$M(x) = M(0) - \int_0^x F(l)dl = M(0) + \sum_{x > x_i} x_i W_i + \int_0^x l w(l)dl - xF(x),$$

que introducida en la ecuación diferencial anterior rebaja el orden a dos:

$$y''(x) = -\frac{1}{EI_x} M(x),$$

Recuerde que  $F(x)$  tiene discontinuidades de salto en las posiciones  $x_i$  donde están localizadas las cargas concentradas  $W_i$ . Por lo tanto la curva elástica  $y(x)$  será, en general, una función continua con derivada segunda  $y''$  continua (es decir, de clase  $C^2$ ), con puntos angulosos donde están localizadas las cargas concentradas. Si no existen cargas concentradas, la función  $y(x)$  será de clase  $C^3$ .

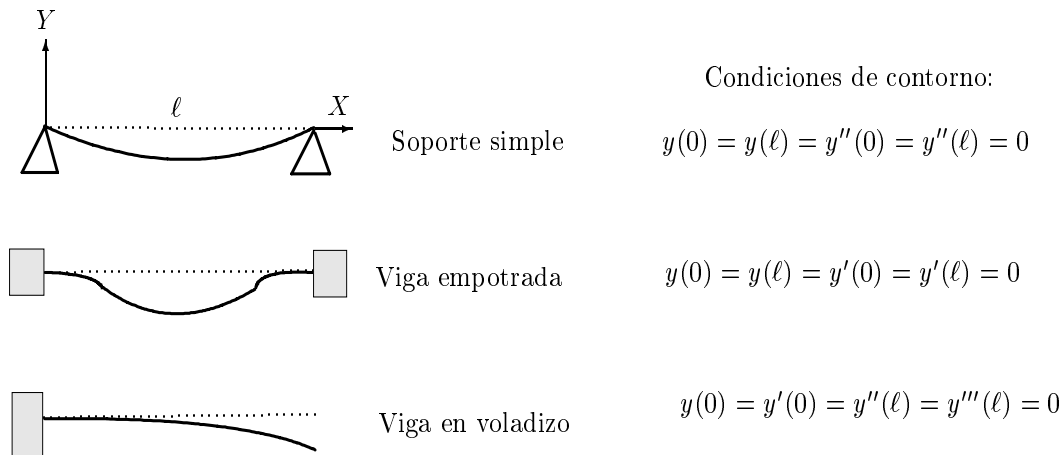


Figura 2.14: Condiciones de contorno para vigas con soporte simple, empotradas y en voladizo

La solución general de la ecuación (2.3) depende de 4 constantes arbitrarias que pueden fijarse con condiciones de contorno (véase figura 2.14). Tenemos tres tipos de condiciones de contorno, dependiendo del tipo de sujeción que tenga la viga en sus extremos ( $x = 0, \ell$ ): soporte simple, soporte interconstruido (empotrada) y en voladizo (véase figura 2.14). Veamos el significado físico de las mismas:

1. La condición  $y'(0) = 0$  significa que la viga está empotrada en el extremo  $x = 0$ .
2. La condición  $y''(\ell) = 0$  significa que la viga no está sometida a momentos flexores en el extremo  $x = \ell$ , es decir, está apoyada o libre.
3. La condición  $y'''(\ell) = 0$  significa que no existen fuerzas cortantes en el extremo  $x = \ell$ , es decir, la viga está libre en ese extremo.

A dichas condiciones de contorno deben añadirse las

$$\text{condiciones de empalme : } y(x_i^-) = y(x_i^+), \quad y'(x_i^-) = y'(x_i^+),$$

a izquierda y derecha de los puntos  $x_i$  donde se aplican las cargas concentradas. Veamos algunos ejemplos:

### Viga con soporte simple

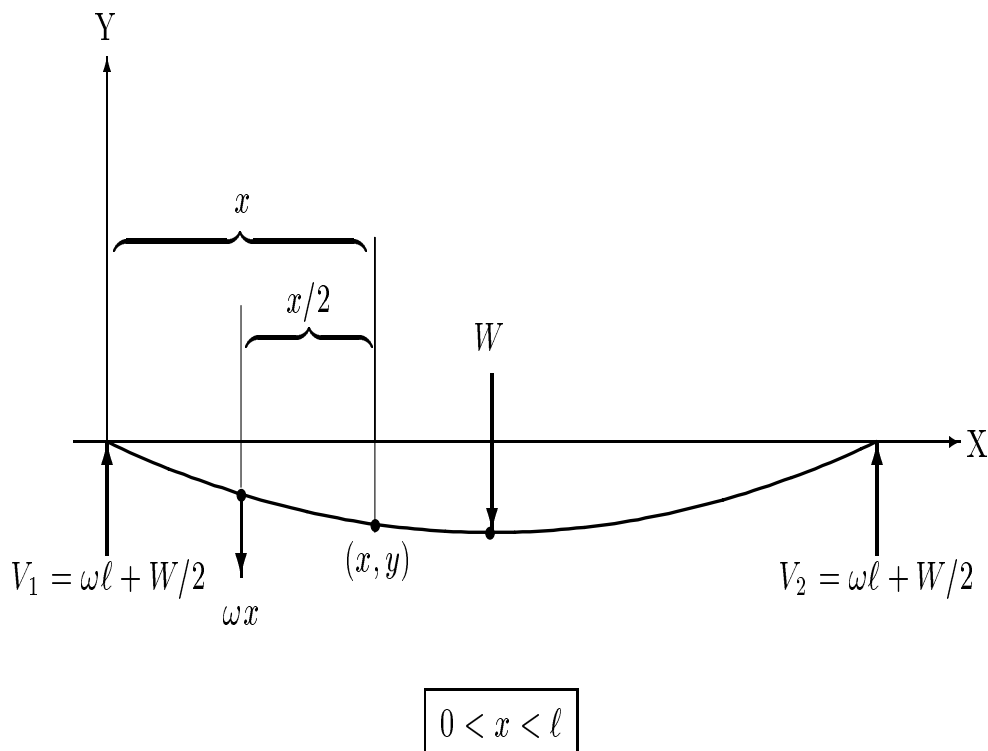


Figura 2.15: Viga en soporte simple sometida a su propio peso y a una carga  $W$  concentrada en  $x = \ell$

Supongamos que tenemos una viga horizontal de longitud  $2\ell$  que está apoyada sobre sus extremos (véase figura 2.15). Se trata de encontrar la ecuación de su curva elástica  $y(x)$  y su deflexión máxima o *flecha de flexión*  $y_{max}$  cuando:

1. La viga está sometida a su propio peso por unidad de longitud (carga)  $w = \text{cte}$ .  
Solución:  $EIy(x) = wx^3/6 - wx^4/24 - w\ell^3x/3$ ,  $y_{max} = -\frac{5w\ell^4}{24EI}$
2. La viga está sometida a su propio peso y a una carga  $W$  localizada en el centro (véase figura 2.15). Solución:  $EIy(x) = w(\ell x^3/6 - x^4/24 - \ell^3x/3) + \frac{W}{12}(3\ell x^2 - |\ell - x|^3 - 6\ell^2x + \ell^3)$ ,  $y_{max} = -\frac{5w\ell^4}{24EI} - \frac{W\ell^3}{6EI}$ .

Viga con soporte interconstruido

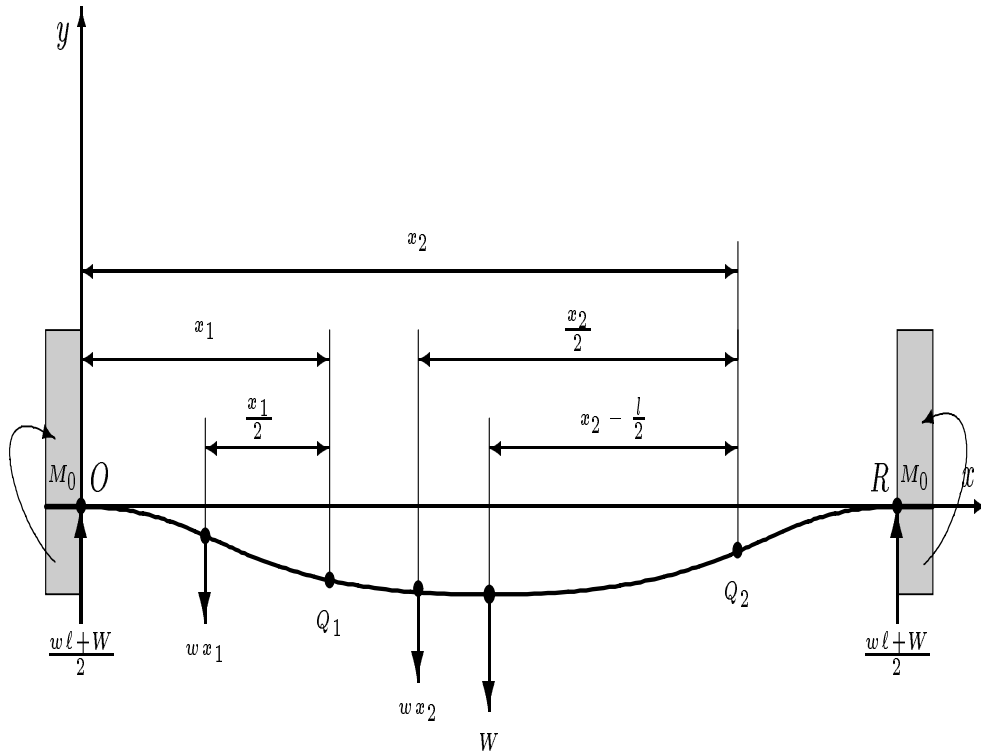


Figura 2.16: Viga con soporte interconstruido sometida a su propio peso y a una carga  $W$  concentrada en  $x = \ell/2$

Una viga horizontal de longitud  $\ell$  está empotrada en sus extremos (véase figura 2.16). Encontrar la ecuación de su curva elástica y su deflexión máxima o *flecha de flexión* cuando:

1. La viga está sometida a su propio peso por unidad de longitud (carga)  $w = \text{cte}$ .  
Solución:  $EIy(x) = \frac{wx^2}{24}(2\ell x - \ell^2 - x^2)$ ,  $y_{max} = y(\ell/2) = -\frac{w\ell^4}{384EI}$
2. La viga está sometida a su propio peso y a una carga  $W$  localizada en el centro (véase figura 2.16). Solución:

$$EIy(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{wx^2}{24}(2\ell x - \ell^2 - x^2) + \frac{W}{48}(4x^3 - 3\ell x^2), \quad 0 \leq x \leq \ell/2 \\ \frac{wx^2}{24}(2\ell x - \ell^2 - x^2) + \frac{W}{48}(\ell^3 - 6\ell^2 x + 9\ell x^2 - 4x^3), \quad \ell/2 \leq x \leq \ell \end{array} \right\}$$

$$y_{max} = y(\ell/2) = -\frac{w\ell^4 + 2W\ell^3}{384EI}$$

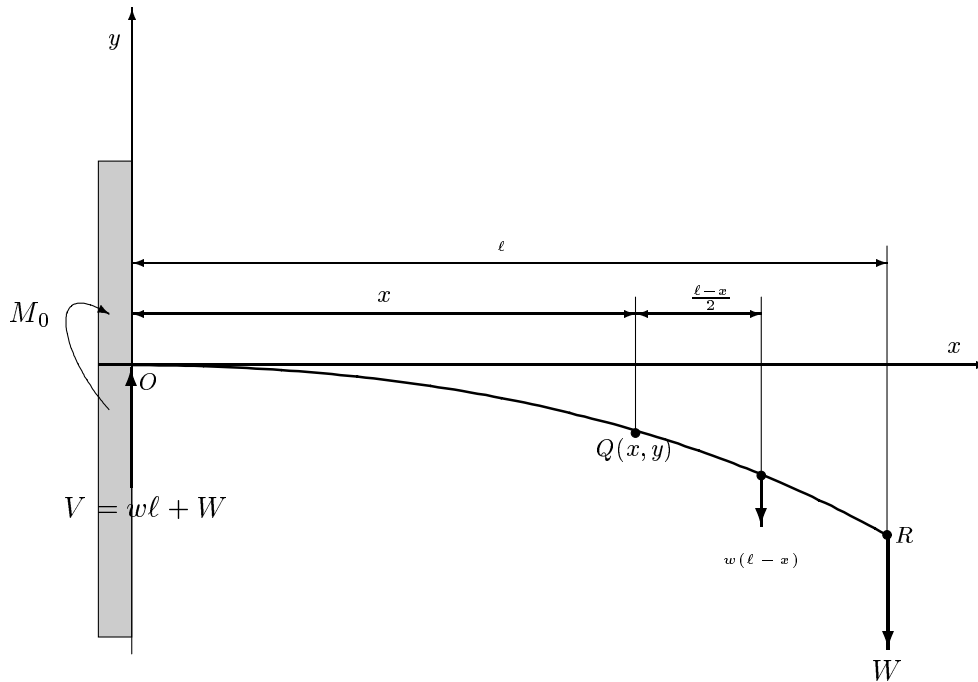


Figura 2.17: Viga en voladizo sometida a su propio peso y a una carga  $W$  concentrada en  $x = \ell$

### Viga en voladizo

Una viga horizontal de longitud  $\ell$  está apoyada en su extremo izquierdo y libre en el derecho (véase figura 2.17). Encontrar la ecuación de su curva elástica y su deflexión máxima o *flecha de flexión* cuando:

1. La viga está sometida a su propio peso por unidad de longitud (carga)  $w = \text{cte}$ .  
Solución:  $EIy(x) = \frac{w}{24}(4\ell x^3 - 6\ell^2 x^2 - x^4)$ ,  $y_{max} = -\frac{w\ell^4}{8EI}$
2. La viga está sometida a su propio peso y a una carga  $W$  localizada en el extremo libre (véase figura 2.17). Solución:  $EIy(x) = \frac{w}{24}(4\ell x^3 - 6\ell^2 x^2 - x^4) + W(x^3/6 - \ell x^2/2)$ ,  $y_{max} = -(\frac{w\ell^4}{8EI} + \frac{W\ell^3}{3EI})$

### 2.2.2 Pandeo en vigas: carga de Euler y modos de desviación

En el siglo XVIII Leonhard Euler fue uno de los primeros matemáticos en estudiar un problema de valores propios al analizar cómo se curva una columna elástica sometida a una fuerza axial de compresión (véase figura 2.18). Hemos visto que la relación entre el momento flexor  $M(x)$  y el radio de curvatura  $R(x)$  en un punto  $x$  de la viga viene dada por:

$$M(x) = -\frac{EI_z}{R(x)}.$$

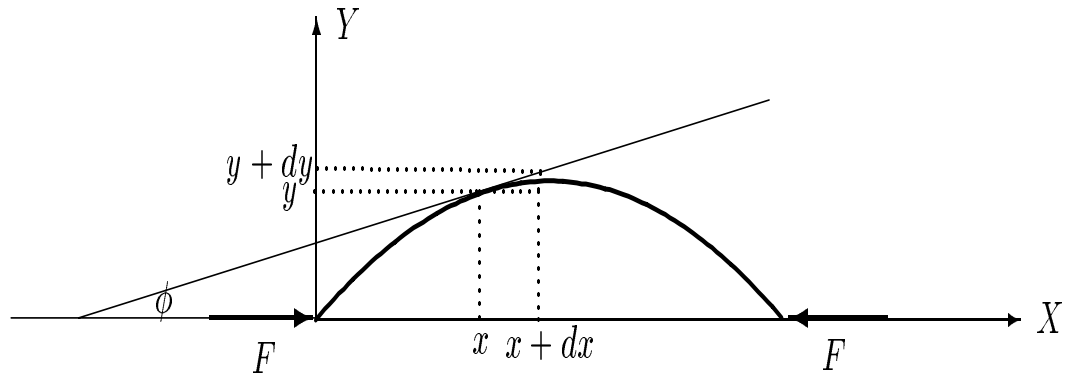


Figura 2.18: Pandeo de una viga sometida a una fuerza axial  $F$  de compresión

Supongamos primeramente que la curvatura es pequeña, de manera que  $\frac{1}{R(x)} \approx y''(x)$ . El momento flexor  $M(x)$  a una distancia  $x$  del extremo izquierdo de la viga es igual al producto de la fuerza  $F$  por el *brazo de momento* (es decir, la ordenada correspondiente):

$$M(x) = Fy(x),$$

de manera que, para pandeos pequeños la ecuación a estudiar es:

$$y''(x) + \frac{F}{EI_z}y(x) = 0, \quad y(0) = 0 = y(\ell)$$

que tiene soluciones:

$$y_n(x) = A \operatorname{sen}(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{\ell} = \sqrt{\frac{F_n}{EI_z}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Es decir, se trata de un problema de *autovalores*  $\lambda_n$  (cargas críticas) y *autofunciones*  $y_n$  (modos de desviación) cuyo significado físico es el siguiente: la columna se desvía sólo cuando la fuerza de compresión tiene uno de los valores:

$$F_n = \frac{\pi^2 EI_z}{\ell^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Estas fuerzas se llaman *cargas críticas*. La curva de deflexión  $y(x)$  que corresponde a la mínima carga crítica,  $F_1 = \frac{\pi^2 EI_z}{\ell^2}$  (*carga de Euler*), es  $y_1(x) = A \operatorname{sen}(\pi x/\ell)$ , que se conoce como *primer modo de desviación*. Las curvas de deflexión correspondientes a cargas superiores  $F_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  se corresponden con modos de desviación donde la columna tiene algún tipo de restricción física o *guía* en  $x_n = \frac{\ell}{n}$  (véase la figura 2.19). La columna no se desviará para otras cargas intermedias que no sean estas cargas críticas (o autovalores)  $F_n$ . Este es un problema parecido al de la *cuerda giratoria* (véase la referencia [Zill], pag. 228), donde la cuerda adopta ciertas formas (modos de desviación) para ciertas frecuencias críticas de rotación.

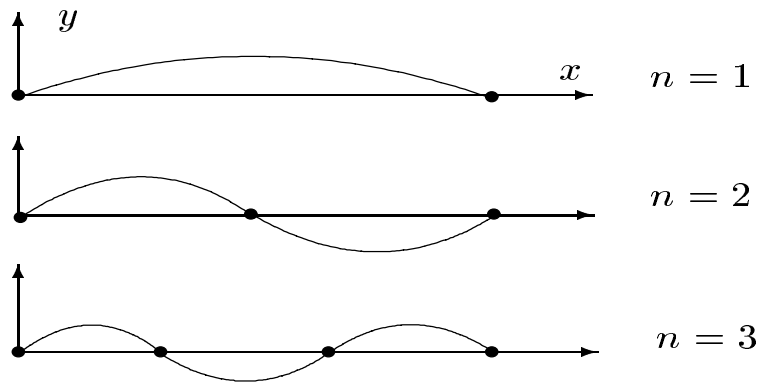


Figura 2.19: Modos de desviación para cargas críticas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$

Consideremos ahora curvaturas  $\kappa$  no necesariamente pequeñas. Recordemos que la curvatura se define como el cociente:

$$\kappa = \frac{1}{R(x)} = \frac{d\phi}{ds},$$

con  $ds$  un diferencial de arco de curva y  $\phi = \arctan(y'(x))$  (véase figura 2.18). Si derivamos nuevamente con respecto a  $s$  la ecuación anterior y tenemos en cuenta que  $dy/ds = \sin \phi$ , obtenemos finalmente que la *ecuación diferencial de la curva elástica* es:

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{F}{EI_z} \sin \phi.$$

Esta ecuación es formalmente idéntica a la de un péndulo simple!. Se trata de una ecuación no lineal de orden dos cuyo estudio se sale de los objetivos de esta memoria. Trate el lector de imaginar la forma cualitativa de las curvas elásticas solución de esta ecuación (utilice la intuición física...).

### 2.2.3 Derrumbe del puente colgante de Tacoma Narrows

El 1 de julio de 1940, el puente colgante (de unos 12 metros de ancho y casi un kilómetro de largo) “Tacoma Narrows”, estado de Washington (EEUU), se terminó y abrió al tráfico. Casi de inmediato se observó que cuando el viento soplaba en dirección transversal a la carretera, originaba grandes oscilaciones verticales en la plataforma o “tablero”. Estas ondulaciones dieron finalmente al traste con el puente el 7 de noviembre de ese mismo año, cuando una racha intensa de viento hizo que las oscilaciones aumentaran hasta niveles nunca vistos. Pronto las oscilaciones provocaron un movimiento torsional del puente y su rotura.

Se pidió a Theodor von Karman, conocido ingeniero, que determinara la causa del derrumbe. Él y sus colaboradores [AKW] dictaminaron que el viento, al soplar perpendicularmente a la carretera, se separaba formando vórtices alternos arriba y abajo del tablero



y con ello establecía una fuerza vertical que actuaba sobre el puente y que causó las oscilaciones. Otras personas propusieron que la frecuencia de esa fuerza periódica coincidía con la frecuencia natural del puente, llegando a la resonancia, a las grandes oscilaciones y a la destrucción, como se describe en la figura 2.7. Durante casi 50 años se propuso que la resonancia fue la causa del derrumbe del puente, aunque el grupo de von Karman lo rechazó diciendo que “es muy improbable que la resonancia con vórtices alternos desempeñe una función importante en las oscilaciones de los puentes colgantes”[AKW].

Como se discutió en las secciones 2.1.3 y 2.1.4, la resonancia es un fenómeno *lineal*. Además, para que se presente debe haber una coincidencia exacta entre la frecuencia de la fuerza externa y la natural del puente (en ausencia de amortiguamiento), lo cual es siempre improbable.

Si la resonancia no originó el derrumbe, ¿cuál fue la causa?. Las explicaciones recientes [LM, CM, DH] sostienen que fueron los efectos no lineales, y no la resonancia lineal, los factores principales que provocaron las grandes oscilaciones. En su teoría interviene la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$EI_z y_{xxxx} = q(x) - My_{tt} - cy_t - ky^+ + F_{\text{ext}}(x, t), \quad (2.4)$$

con condiciones de contorno

$$y(0, t) = y(\ell, t) = y_{xx}(0, t) = y_{xx}(\ell, t) = 0,$$

para la deflexión vertical  $y(x, t)$  (dirección positiva hacia abajo) de una viga de masa  $M$  por unidad de longitud, módulo de Young  $E$  y momento de inercia de la sección transversal  $I_z$ , sometida a las siguientes fuerzas:

1. La distribución de peso  $q(x)$  o carga por unidad de longitud.
2. La fuerza inercial  $-My_{tt}$ .
3. La fuerza amortiguadora  $-cy_t$  causada por la viscosidad del aire.
4. La fuerza recuperadora o elástica  $-ky^+ = -k \max\{y, 0\} = \begin{cases} -ky & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$  que ejercen los cables sobre el tablero cuando dichos cables están tensos ( $y > 0$ ).
5. La fuerza externa  $F_{\text{ext}}(x, t)$  debida a los vórtices de von Karman.

Lazer y McKenna introducen la “fuerza recuperadora a un lado sólo”  $-ky^+$  como un mecanismo *no lineal* que puede dar cuenta de los efectos destructivos del viento en el colapso del puente de Tacoma Narrows. De hecho, demuestran que pueden ocurrir respuestas subarmónicas de gran amplitud para excitaciones de pequeña amplitud en un amplio espectro de valores de los parámetros (viscosidad, masa, etc). Este mecanismo de “banda ancha” parece más plausible que el basado en la resonancia.

Nótese que la ecuación (2.4) es una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) y no una EDO. No obstante, pueden hacerse aproximaciones y separaciones de variables

que llevan esta EDP a una EDO. En el puente de Tacoma se observó que fue el primer modo de oscilación (sin nodos) el que aparentemente perdió estabilidad y dio lugar a las oscilaciones torsionales, de manera que es plausible el considerar:

$$y(x, t) = u(t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \quad F_{\text{ext}}(x, t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \quad q(x) = W' \operatorname{sen}(\ell/\pi).$$

Después de reescalamientos y ciertas simplificaciones se llega a la siguiente ecuación diferencial ordinaria definida a trozos:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2\delta\dot{u} + (\kappa + 1)u &= W + B \operatorname{sen}(\omega t), \quad u > 0, \\ \ddot{u} + 2\delta\dot{u} + u &= W + B \operatorname{sen}(\omega t), \quad u < 0. \end{aligned}$$

El estudio de esta ecuación no lineal cae fuera del alcance de esta memoria. La búsqueda de soluciones y el estudio cualitativo y numérico de dicha ecuación sigue siendo objeto de investigaciones actualmente.

# Bibliografía

- [NOR] S. Novo, R. Obaya y J. Rojo, *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, McGraw-Hill, Madrid (1995).
- [VJ] V. Jiménez, *Ecuaciones diferenciales*, Universidad de Murcia (1999).
- [Ayes] Frank Ayres, *Ecuaciones diferenciales*, McGraw Hill (1991).
- [Zill] Denis G. Zill, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, Int. Thomson Publishing (1997).
- [Simmons] G. Simmons/J. Robertson, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, McGraw-Hill (1993)
- [Edwards-Penney] C.H. Edwards/D.E. Penney, *Ecuaciones diferenciales elementales y problemas con condiciones en la frontera*, Prentice-Hall Hispanoamericana (1994).
- [Makarenko] A. Kiseliiov, M. Krasnov, G. Makarenko, *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, Editorial Mir Moscú (1984).
- [Ortega] M.R. Ortega, *Lecciones de Física: mecánica III*, Tipografía Católica SCA (1988).
- [Ortiz] I. Ortiz Berrocal, “Elasticidad”, Litoprint-Pricam S.A. (1985).
- [AKW] O.H. Amann, T. von Karman and G.B. Wooddruff, *The Failure of the Tacoma Narrows Bridge*, Washington, DC: Federal Works Agency, 1941.
- [LM] A.C. lazer and P.J. McKenna, *Large amplitude periodic oscilations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis*, SIAM Reviews 32, 537-578 (1990).
- [CM] A.R. Champneys and P.J. McKenna, *On solitary waves of a piecewise-linear suspension bridge model*, Preprint (1996).
- [DH] S.H. Doole and S.J. Hogan, A piecewise linear suspension bridge model: nonlinear dynamics and orbit continuation, *Dynamics and Stability of Systems* 11(1), 1996.