

OPTIMIZACIÓN DE ALTAS RECTAS RECTANGULARES “COMPOSITE” BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN Y RADIACIÓN SIMULTANEAS USANDO LA ADMITANCIA TÉRMICA INVERSA RELATIVA

Juan Pedro Luna-Abad¹, Mariano Alarcón Garcia² y Manuel Seco Nicolás²

1: *Thermal and Fluid Engineering Department, International Campus of Excellence in the European context (CEIR) Campus Mare Nostrum, Technical University of Cartagena, Spain*; 2: *Electromagnetism and Electronics Department, International Campus of Excellence in the European context (CEIR) Campus Mare Nostrum, University of Murcia, Spain*

Juan Pedro Luna-Abad
jp.lunaabad@upct.es

.....

Resumen: *Numerosas son las ocasiones en las que es necesario el uso de superficies extendidas con el fin de mejorar la transferencia de calor. La enorme variedad en su geometría unido a los diferentes ambientes en las que pueden trabajar hace que la optimización de estos elementos siga siendo un problema abierto. Este trabajo trata de la optimización de aletas rectas rectangulares formadas por dos materiales diferentes, lo que en la literatura especializada se conoce como “aletas composite”, bajo modelos 2D, con disipación en el extremo y con disipación de calor por convección y radiación. Para realizar esta tarea se hace uso de la Admitancia Térmica Inversa Relativa, ATIR, parámetro adimensional usado en numerosos trabajos con éxito, el sistema de ecuaciones resultante es resuelto mediante el Método de Simulación por Redes, método numérico basado en la similitud entre las ecuaciones de circuitos eléctricos y las propias de fenómenos de transporte.*

Palabras clave: “aletas composite”, optimización, “admitancia térmica inversa relativa”.

1. INTRODUCCIÓN

La optimización de superficies extendidas es un problema tratado de manera extensa en las últimas décadas y que aún sigue ofreciendo trabajos de interés. Las diferentes geometrías, los modelos de conducción 1D o 2D, la dependencia con la temperatura de parámetros como la conductividad, emisividad, coeficiente de convección, etc., así como las condiciones de contorno, convección, radiación por separado o de forma simultánea, hacen que el problema siga despertando el interés en diferentes campos de la ingeniería térmica. Otra dificultad que aparece al afrontar la optimización de superficies extendidas es la no asunción de las mismas hipótesis simplificadoras por cada uno de los autores, la variedad de formas y condiciones de trabajo hace que cada autor asuma sus propias hipótesis de trabajo y simplificaciones, esto añadido a que cada uno define en ocasiones sus propios parámetros dimensionales y los dedicados a la optimización hace todavía más difícil la universalización de los métodos de optimización, razón por la cual los resultados obtenidos en estos trabajos resultan difíciles de extrapolar o incluso interpretar y usar por otros investigadores.

En este trabajo se trata la optimización de aletas rectas rectangulares formadas por dos materiales diferentes, lo que en la literatura especializada se conoce como "aletas composite", bajo condiciones 2D y sometidas de forma simultánea a convección y radiación, además se considera la disipación de calor en el extremo. Los resultados se presentan en forma de gráficas y tablas.

Los primeros trabajos relacionados con superficies extendidas se remontan a la primera mitad del siglo XX con los trabajos de Harper y Brown, donde es definida la "eficiencia" de la aleta, parámetro de uso muy extendido en la caracterización de aletas del conjunto aleta-pared bajo cualquier condición de contorno, sin embargo presenta un claro inconveniente, la aleta más eficiente es aquella que no se pone, Gardner, define el otro parámetro de uso muy extendido y considerado por algunos autores como mucho más determinante a la hora de caracterizar el comportamiento de las aletas es la "efectividad", son numerosos los autores que fijan un valor de la efectividad para decidir la colocación o no de aletas. Una excelente y extensa exposición de estos y otros muchos trabajos relacionados con la caracterización y optimización de superficies extendidas se puede encontrar en Kraus et al., [1].

Los trabajos de Wood et al. [2] describen diferentes coeficientes destinados a caracterizar y diseñar superficies extendidas, alguno de ellos destinado específicamente a la caracterización del conjunto aleta-pared, generalmente bajo condiciones de convección. Con relación a los parámetros usados para el diseño y desarrollo de aletas, Alarcón [3] hace una extensa y profunda revisión de los mismos, incluyendo los usados para la optimización de aletas en este trabajo, Luna-abad et al., [4,5] retoman los trabajos de Alarcón aplicándolos a diferentes tipos de aletas y condiciones de contorno.

Entre estos trabajos los trabajos dedicados a la optimización de superficies extendidas en general, sometidas a condiciones de convección, radiación o ambas, se pueden citar a Chung y Zhang [6] en el que se analiza la optimización de aletas bajo radiación teniendo en cuenta la interacción entre ellas y con la superficie a la que están adosadas, en estos casos se introduce una dificultad añadida al tener en cuenta los factores de forma.

Dentro de los estudios llevados a cabo sobre aletas composite Barker [7] determina la eficiencia de este tipo de aletas y espines cilíndricos aplicando modelos 2-D y su papel en la refrigeración del regenerador de instalaciones de turbinas de gas accionadas mediante reactores nucleares. Epstein y Sandhu [8], usando modelos 1-D, trabajan en la eficiencia de aletas cuando una capa de suciedad, material con conductividad menor que el de la aleta, está depositada sobre la superficie. Barrow et al. [9] obtienen la solución exacta usando modelos 2-D comparando las soluciones obtenidas mediante diferencias finitas y elementos finitos, se resuelve el caso de aletas rectas compuestas formadas por un núcleo de material metálico y una capa externa de hielo. En Luna-Abad y Alhama [10, 11] y en Viguera y Luna-Abad [12] se obtiene la geometría óptima para aletas rectas y espines cilíndricos composites bajo modelos 2D y condiciones de convección, incluida la convección en el extremo.

2. MÉTODO DE SIMULACIÓN POR REDES Y MODELO MATEMÁTICO

El método de simulación por redes, MESIR, es un método numérico ampliamente utilizado en la resolución de problemas de diferentes campos de la física e ingeniería. En lo que se refiere a la transferencia de calor destacan los trabajos de Alarcón et al. [13], en el que se hace una descripción de los parámetros de prestaciones usados en superficies extendidas y se proponen tres nuevos de estos coeficientes que reciben el nombre de; 1) admitancia inversa, 2) admitancia inversa específica y 3) admitancia térmica inversa relativa, ATIR, este último parámetro es adimensional y ya ha sido usado en la caracterización y diseño de superficies extendidas bajo diferentes condiciones de contorno. Su evaluación requiere del conocimiento de la admitancia inversa específica, y_r , y de la admitancia inversa específica en el punto óptimo de las aletas para diferentes geometrías, materiales y condiciones de contorno, $y_{r,opt}$. Si se habla de un determinado tipo de aletas, la admitancia relativa, y_{rel} , se define

como la relación $y_{rel} = y_f/y_{r,opt}$. La admitancia específica está referida a la unidad de masa o de volumen de una aleta particular y es igual a la relación, en estado estacionario, entre el calor total disipado al fluido circundante y la diferencia de temperatura entre la base de la aleta y el fluido circundante. La admitancia inversa específica relaciona el calor disipado por la aleta, Q_d con la diferencia de temperaturas entre la base y el ambiente y el volumen de la misma, la expresión es:

$$y_f = Q_d/(T_b - T_\infty)V \quad (1)$$

La geometría de la aleta para la cual la admitancia específica alcanza un máximo, proporciona el valor de $y_{r,opt}$. En este trabajo, el ATIR se calcula de forma numérica para aletas rectas rectangulares "composites", bajo condiciones de convección y radiación simultáneas y con disipación en el extremo. Las ecuaciones que definen el problema se muestran a continuación, para cada una de las zonas descritas en la Fig.1, empleando el subíndice "c" para el composite y "f" para la aleta.

Zona 1

$$\partial^2 T/\partial z^2 + \partial^2 T/\partial y^2 = 0; \quad 0 < z < L_f, \quad 0 < y < e_f; \quad (2)$$

$$T(y,z) = T_{b,f}; \quad z=0, \quad 0 \leq y \leq e_f; \quad (3)$$

$$k_f(\partial T/\partial y) = k_c(\partial T/\partial y); \quad 0 \leq z \leq L_f, \quad y = e_f \quad (4)$$

$$k_f(\partial T/\partial y) = 0; \quad 0 \leq z \leq L_f, \quad y = 0 \quad (5)$$

$$k_f(\partial \Phi/\partial z) = k_c(\partial \Phi/\partial z); \quad z = L_f, \quad 0 \leq y \leq e_f \quad (6)$$

$$T(y,z)_f = T(y,z)_c; \quad y = e_f, \quad 0 \leq z \leq L_f; \quad z = L_f, \quad 0 \leq y \leq e_f \quad (7)$$

Zona 2

$$\partial^2 T/\partial z^2 + \partial^2 T/\partial y^2 = 0; \quad 0 < z < L_f + e_c, \quad e_f < y < e_f + e_c; \quad (8)$$

$$T(y,z) = T_{b,c}; \quad z=0, \quad e_f < y < e_f + e_c; \quad (9)$$

$$k_f(\partial T/\partial y) = k_c(\partial T/\partial y); \quad L_f \leq z \leq L_f + e_c; \quad , \quad y = e_f \quad (10)$$

$$k_c(\partial T/\partial y) = h(T(y,z) - T_\infty); \quad 0 \leq z \leq L_f + e_c, \quad y = e_f + e_c; \quad (11)$$

$$k_c(\partial T/\partial z) = h(T(y,z) - T_\infty); \quad z = L_f + e_c, \quad e_f < y < e_f + e_c \quad (12)$$

$$T(y,z)_f = T(y,z)_c; \quad L_f \leq z \leq L_f + e_c; \quad , \quad y = e_f \quad (13)$$

Zona 3

$$\partial^2 T/\partial z^2 + \partial^2 T/\partial y^2 = 0; \quad L_f < z < L_f + e_c, \quad 0 < y < e_f; \quad (14)$$

$$k_c(\partial T/\partial z) = h(T(y,z) - T_\infty); \quad z = L_f + e_c, \quad e_f < y < e_f + e_c \quad (15)$$

$$k_f(\partial T/\partial y) = 0; L_f \leq z \leq L_f + e_c; , y = 0 \quad (16)$$

3. MODELO EN RED

El método de simulación por redes MESIR se basa en la confeccionar modelos en red formados por componentes eléctricos cuyas ecuaciones sean formalmente equivalentes a las obtenidas tras la discretización espacial de los modelos matemáticos mediante diferencias finitas. El tiempo es una variable continua en este modelo. El volumen sobre el que se aplican las ecuaciones de la transferencia de calor se corresponde con un el descrito en la Fig. 1. Se ha dividido la aleta compuesta en tres regiones diferentes. En cada una de estas regiones se ha aplicado la ecuación de conducción del calor bajo modelos 2-D y sus correspondientes condiciones de contorno, en la misma figura también se representa la celda o volumen elemental de dimensiones, Δz y Δy , que resulta de este proceso. Aplicando diferencias finitas a las ecuaciones de definición del problema, de acuerdo con la nomenclatura de la Fig. 1, se puede derivar el valor de los componentes de cada una de las celdas, éstas son:

$$R_{i-\Delta j} = R_{i+\Delta j} = \Delta z / (2 \cdot k_f \Delta y), R_{i,j-\Delta} = R_{i,j+\Delta} = \Delta y / (2 \cdot k_f \Delta z)$$

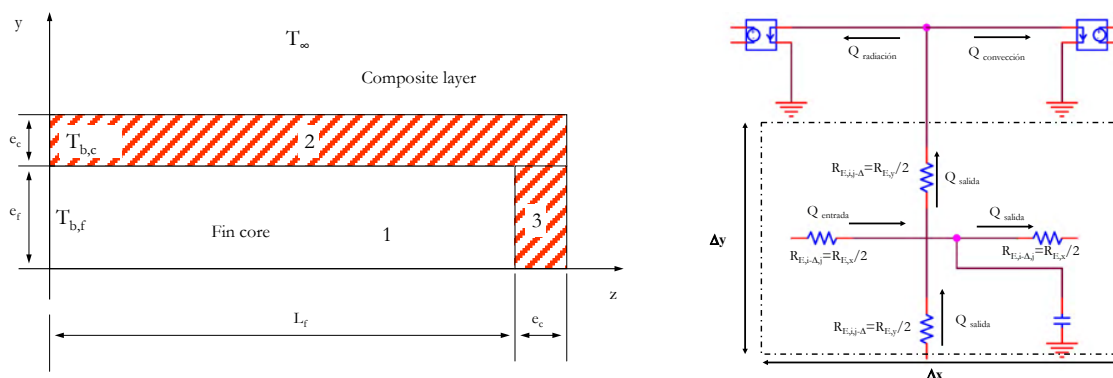


Figura 1. Volumen de control de la aleta recta rectangular composite en el que se aprecian las tres zonas sobre las que se estudia el problema y celda elemental en red bajo modelo 2D incluyendo condición de contorno de radiación y convección.

Para obtener el modelo completo hay que ir conectando todas las celdillas o volúmenes elementales y en las que lo precisen habrá que ir colocando las condiciones de contorno. Para la resolución del modelo en red hay que usar un programa de resolución de circuitos, en este caso el programa elegido es NGSpice.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En la optimización de aletas se busca la geometría y las condiciones para que la transferencia de calor es máxima. En este trabajo se han tomado como hipótesis de partida, la forma de la aleta, recta rectangular, se supone contacto perfecto entre la aleta y la pared a la que está adosada, se considera despreciable la interacción entre aleta y pared, el material del que está formado la aleta es isótropo y sus propiedades, conductividad, densidad, emisividad así como el coeficiente de convección, son constantes en el rango de temperaturas usado, los datos de partida son el volumen de la aleta, sin incluir el espesor de la lámina de composite, la conductividad de ambos materiales, la emisividad, la temperatura en la base de la aleta y las temperaturas de referencia para la convección y para la radiación, se consideran iguales, también es conocido el coeficiente de convección y se considera que es el mismo en todas las superficies del problema, se tiene en cuenta la disipación en el extremo, el recubrimiento

cubre todas las superficies de la aleta incluido el extremo, las superficies que están impli-
 cadas en el problema son grises y difusas. Para llevar a cabo la optimización se ha usado el
 concepto de admitancia térmica inversa relativa, ATIR, siempre bajo modelos 2-D.

4.1. Optimización de espines compuestos para $k_c/k_f = 1/10$

En el proceso de optimización se han considerado varias relaciones entre la conductividad
 del núcleo y del recubrimiento, entre el coeficiente de convección y la conductividad del
 núcleo, diferentes temperaturas en la base de la aleta y diferentes valores de emisividad.
 El espesor del recubrimiento es el mismo en todas las superficies, este valor es $0.1 \cdot e_{opt}$. En
 la Tabla 1 se muestran los valores de espesor óptimo para dos relaciones diferentes de $h/
 k_f$ tomando varios valores de emisividad entre 1 y 0.25. Se observa como el valor del espe-
 sor óptimo crece con la temperatura y disminuye con la emisividad. Esta misma tenencia se
 observa cuando la conductividad del recubrimiento es mayor que la del núcleo de la aleta.

Tabla 1. Espesor óptimo (m), para aletas composite con $T_b = 75^\circ\text{C}$, $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, $h/k_f = 0.1$ y 10 (m^{-1}) y $k_c/
 k_f = 0.1$

h/k_f (m^{-1})	Vol. núcleo aleta (m^3)	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0.9$	$\varepsilon = 0.75$	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 0.25$
0.1	1.00E-03	4.57E-03	4.49E-03	4.38E-03	4.18E-03	3.97E-03
	5.00E-04	2.86E-03	2.82E-03	2.75E-03	2.62E-03	2.49E-03
	2.50E-04	1.79E-03	1.77E-03	1.72E-03	1.65E-03	1.56E-03
	1.00E-04	9.69E-04	9.54E-04	9.31E-04	8.90E-04	8.46E-04
	5.00E-05	6.09E-04	5.99E-04	5.85E-04	5.59E-04	5.31E-04
	1.00E-05	2.07E-04	2.04E-04	1.99E-04	1.91E-04	1.81E-04
10	1.80E-04	7.76E-03	7.75E-03	7.74E-03	7.72E-03	7.71E-03
	1.00E-04	4.66E-03	4.65E-03	4.65E-03	4.65E-03	4.64E-03
	5.00E-05	2.75E-03	2.75E-03	2.75E-03	2.74E-03	2.74E-03
	1.00E-05	8.68E-04	8.68E-04	8.67E-04	8.67E-04	8.66E-04

Las curvas mostradas en la Fig. 2 representan el volumen del núcleo de la aleta vs el espesor
 óptimo para la temperatura en la base de 75°C y 200°C , las curvas aparecen muy agrupadas
 para el valor del cociente de $h/k_f = 0.1$ y prácticamente se superponen cuando esta relación
 es 10. Hay que hacer notar que el volumen y espesor de la aleta, son los referidos en la Fig.1.

4.2. Optimización de espines compuestos para $k_c/k_f > 1$, (10/1, 100/1)

Partiendo de los mismos datos que en el caso anterior, se muestran los resultados de geo-
 metría óptima cuando la capa que recubre a la aleta es de un material más conductivo que el
 núcleo. Los resultados se muestran en la Fig.3 y en la Tabla 2.

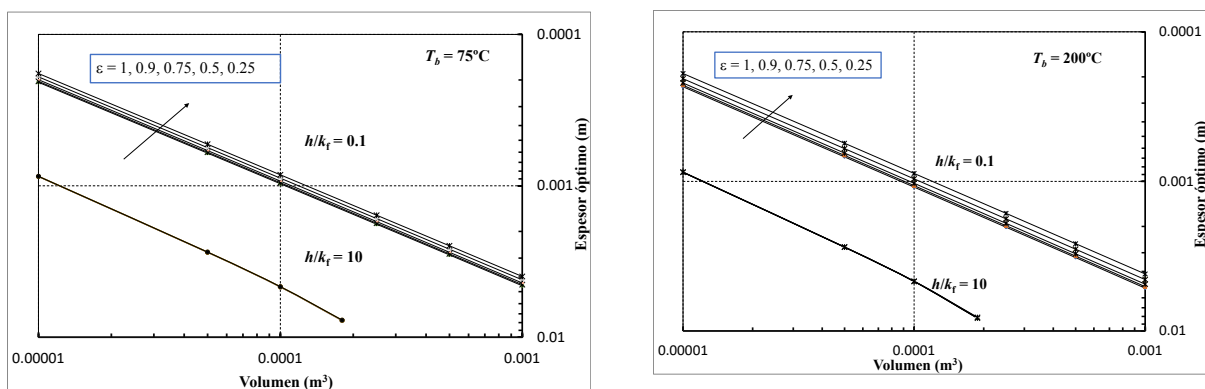


Figura 2. Curvas de volumen vs espesor óptimo, $T_b = 75^\circ\text{C}$ y 200°C , $h/k_f = 0.1$ y 10 m^{-1} , $k_c/k_f = 0.1$.

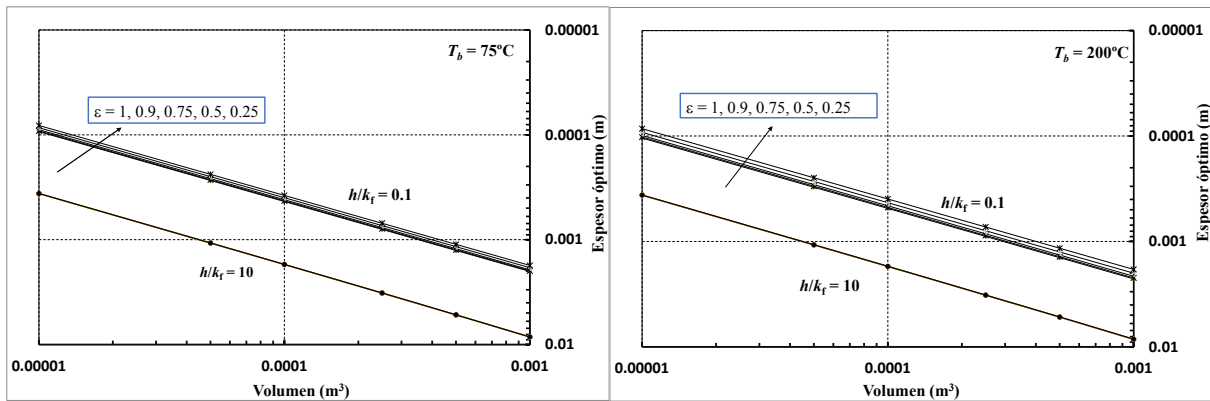


Figura 3. Volumen vs espesor óptimo, $T_b = 75^\circ\text{C}$ y 200°C , $h/k_f = 0.1$ y 10 m^{-1} , $k_c/k_f = 100$.

Se observa un comportamiento muy similar al caso anterior, mayor separación entre las curvas para cuando se incrementa la temperatura de la base para igual valor de la relación h/k_f , para el caso $h/k_f = 10\text{ m}^{-1}$, las curvas aparecen casi superpuestas.

Tabla 2. Espesor óptimo (m), para aletas composite con $T_b = 75^\circ\text{C}$ y 200°C , $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, $h/k_f = 10\text{ (m}^{-1}\text{)}$ y $k_c/k_f = 100$

	Volumen núcleo aleta (m³)	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 0.9$	$\epsilon = 0.75$	$\epsilon = 0.5$	$\epsilon = 0.25$
$T_b = 75^\circ\text{C}$	1.00E-03	8.48E-03	8.47E-03	8.47E-03	8.46E-03	8.46E-03
	5.00E-04	5.22E-03	5.21E-03	5.21E-03	5.21E-03	5.20E-03
	2.50E-04	3.23E-03	3.23E-03	3.23E-03	3.23E-03	3.22E-03
	1.00E-04	1.73E-03	1.73E-03	1.72E-03	1.72E-03	1.72E-03
	5.00E-05	1.08E-03	1.08E-03	1.08E-03	1.08E-03	1.08E-03
$T_b = 200^\circ\text{C}$	1.00E-03	8.50E-03	8.49E-03	8.49E-03	8.47E-03	8.46E-03
	5.00E-04	5.23E-03	5.23E-03	5.22E-03	5.21E-03	5.21E-03
	2.50E-04	3.24E-03	3.24E-03	3.23E-03	3.23E-03	3.23E-03
	1.00E-04	1.73E-03	1.73E-03	1.73E-03	1.73E-03	1.72E-03
	5.00E-05	1.08E-03	1.08E-03	1.08E-03	1.08E-03	1.08E-03

5. CONCLUSIONES

- Se ha aplicado el concepto de ATIR a la optimización de aletas rectas rectangulares compuestas bajo condiciones de convección y radiación simultáneas y considerando la transferencia de calor en el extremo.
- Se ha visto la influencia de diversos parámetros, temperatura en la base, $T_b = 75^\circ\text{C}$ y 200°C , $h/k_f = 0.1$ y $10\text{ (m}^{-1}\text{)}$, $k_c/k_f = 0.1, 10, 100$, emisividad, 1, 0.9, 0.75, 0.5, 0.25.
- Los modelos 2-D aquí utilizados permiten garantizar la precisión de los resultados de las curvas obtenidas en todo su rango de valores.
- Se han obtenido curvas que permiten la optimización de aletas rectas rectangulares usando como parámetros de partida, el volumen del núcleo de la aleta, el coeficiente de convección, la conductividad del núcleo de la aleta y la del recubrimiento, la temperatura de la base y la emisividad y el espesor del recubrimiento.

REFERENCIAS

- [1] Kraus, A. D., Aziz, A. y Welty, J. Extended Surface Heat Transfer, John Wiley and Sons, 2001, New York.
- [2] Wood, A. S., Topholme, G. E., Bhatti, M. I. H. y Heggs, P. J. Performance Indicators for Steady-State Heat Transfer Through Fin Assemblies, J. Heat Transfer, 1996, 118: 310-316.

- [3] Alarcón, M., Alhama, F. y González-Fernández, C. F. A Revision of the Classical Performance Extended Surface Assessment: Proposed New Coefficients, *ASME Journal Heat Transfer*, 2003, 125(6): 1187-1191.
- [4] Luna-Abad, J. P., Alhama, F. y Campo, A. Optimization of Longitudinal Rectangular Fins through the Concept of Relative Inverse Admittance, *Heat Transfer Engineering*, 2010, 31(5): 395 – 401.
- [5] Luna-Abad, J. P., Alhama, F. y Campo, A. Universal Curves for Optimizing Longitudinal Rectangular Fins Radiating to Free Space. Proc. 14th International Heat Transfer Conference, IHTC14 (ASME), Washington, DC, USA, 2010.
- [6] Chung, B. T. F., and Zhang, B. X. Optimization of Radiating Fin Array Including Mutual Irradiations Between Radiator Elements. *ASME. J. Heat Transfer*, 1991, 113(4): 814–822.
- [7] Barker, J. J. Efficiency of Composite Fins. *Nuclear Science and Engineering*, 3: 300-312, 1958.
- [8] Epstein, N. y Sandhu K. Effect of Uniform Fouling Deposit in Total Efficiency of Extended Surfaces, Proc. 6th International Heat Transfer Conference, Toronto, Canada, vol. 4, 397-402, 1978.
- [9] Barrow, H., Mistry, J. y Clayton, D. Numerical and Exact Mathematical Analyses of Two Dimensional Rectangular Composite Fins, Proc. 8th International Heat Transfer Conference, San Francisco, vol. 2, 367-372, 1986.
- [10] Luna-Abad, J. P., and Alhama, F. Design and Optimization of Composite Rectangular Fins Using the Relative Inverse Thermal Admittance. *ASME. J. Heat Transfer*, 2013, 135(8): 084504,.
- [11] Luna-Abad, J. P., and Alhama, F. Effectiveness of Composite Fins Under Maximum Heat Dissipation, *Heat Transfer Engineering*, 2017, 38:9, 867-88