TESIS DOCTORAL

“Desarrollo e integración de métodos de análisis de sistemas de sujeción en máquinas-herramienta”

por

Horacio Tomás Sánchez Reinoso
Ingeniero Industrial

presentada en la

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

para la obtención del

GRADO DE DOCTOR

por la

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Departamento de Ingeniería de Materiales y Fabricación

Cartagena, Octubre de 2003

TESIS DOCTORAL

“Desarrollo e integración de métodos de análisis de sistemas de sujeción en máquinas-herramienta”

por: Horacio Tomás Sánchez Reinoso

Directores de la Tesis: Dr. Manuel Estrems Amestoy

Dr. Félix Faura Mateu

TRIBUNAL CALIFICADOR

Presidente: Dr. Fernando Romero Subirón

Secretario: Dr. Joaquín López Rodríguez

Vocales: Dr. José Ignacio Pedrero Moya

Dr. Joan Vivancos Calvet

Dr. Pedro Rosado Castellano

Agradecimientos

Quiero expresar mi especial agradecimiento a los directores de la tesis, profesores Dr. Manuel Estrems Amestoy y Dr. Félix Faura Mateu, por el inestimable apoyo prestado durante su elaboración.

También quisiera agradecer los consejos de los compañeros de área, Juan José, Patricio, Rosendo, Joaquín, José Ojados y José Garrido.

Agradezco a los responsables de producción de IZAR Motores, y en especial a su director Juan Eugenio Para, los medios puestos a nuestra disposición, el seguimiento de los desarrollos realizados, y el interés mostrado por la repercusión que podrá tener esta tesis en sus tecnologías de fabricación.

Agradezco además al resto de miembros del Departamento de Ingeniería de Materiales y Fabricación de la Universidad Politécnica de Cartagena, sus ayudas puntuales durante el desarrollo de esta tesis.

También quisiera agradecer a mis amigos su apoyo anímico, y en especial a mis padres y hermana, su comprensión y paciencia durante la redacción de la tesis.

Resumen

El proceso de diseño de los sistemas de sujeción de piezas a máquinas-herramienta consta de cuatro fases: descripción del problema de sujeción de la pieza, análisis del sistema, optimización de las variables de diseño para que realice sus funciones con la mayor corrección posible, y verificación del diseño realizado tanto sobre el montaje sujeción-pieza como en las dimensiones finales obtenidas en el mecanizado. La presente tesis se centra en la fase de análisis, que pretende asegurar la adecuada ejecución de las funciones asignadas al sistema de sujeción dentro del proceso de fabricación.

La primera función del sistema de sujeción de piezas a máquinas-herramienta consiste en el posicionamiento de la pieza en la mesa de trabajo en una localización determinada y precisa. Como resultado de la eficacia con la que se satisfaga este requisito, se obtendrá mayor o menor precisión dimensional y geométrica en la pieza mecanizada, ya que esta precisión depende directamente de la posición relativa de la pieza con respecto al sistema de coordenadas de la máquina-herramienta de control numérico (MHCN), en la que se ha programado la trayectoria de la herramienta de corte. Para llevar a cabo el posicionamiento de la pieza se utilizan elementos localizadores y soportes que estando en contacto con las superficies de referencia restringen sus seis grados de libertad. Por lo tanto, la precisión alcanzada dependerá de la posición relativa en la que permanezca la pieza en la máquina-herramienta,

y ésta a su vez, de la precisión de los elementos que intervienen en el sistema de sujeción.

Con el fin de estimar los valores de las cotas críticas de fabricación que posteriormente se inspeccionarán metrológicamente en las piezas mecanizadas se define, en primer lugar, la posición de los puntos de localización de los elementos de sujeción. A partir de la variabilidad de estas posiciones junto con las imperfecciones de las superficies de referencia de la pieza se determina la alteración posicional que podría tener la superficie a mecanizar en la máquina-herramienta sobre la teóricamente establecida, con ello se estima el error medio de las cotas a analizar, así como sus incertidumbres asociadas. La información obtenida se utilizará para llevar a cabo la compensación de error en el programa de la MHCN, y para establecer estrategias de mejora de la calidad, ya que se conoce la influencia de cada parámetro sobre las incertidumbres esperadas de las cotas.

La segunda función del sistema de sujeción consiste en asegurar firmemente la posición de la pieza frente a la acción de las fuerzas de corte, para lo que se emplean los llamados mecanismos de apriete. Cuando estas fuerzas actúan sobre un cuerpo elástico como es la pieza, ésta se deforma elásticamente, variando con ello la posición y forma tanto de la superficie de referencia como de la superficie mecanizada que deberían cumplir las especificaciones de diseño en estado relajado. En otras ocasiones, se ha de tener en cuenta que la pieza no está sujeta isostáticamente, con lo que se ha de trabajar con herramientas de cálculo en sistemas sobrelocalizados. Por otro lado, la fuerza de apriete y las reacciones en los localizadores deben ser lo suficientemente altas para que no se produzcan deslizamientos o despegues de la pieza, y al mismo tiempo no deben ser tan elevadas, con el fin de no dañar las superficies ya acabadas. Para el análisis de esta segunda función se estudia el problema desde dos enfoques: el global o estructural, y el local o de contacto. La extensión de ambos permite considerarlos como dos análisis distintos.

Las fuerzas ejercidas sobre la pieza se determinan mediante el análisis mecánico estructural, y si ésta se encuentra sobrelocalizada se puede utilizar el método de los elementos finitos (MEF) para obtener las reacciones en los apoyos, así como las deformaciones de las superficies. Sin embargo, el MEF es un método iterativo, no lineal, que requiere de una alta capacidad computacional y no proporciona facilidad en la interpretación de los resultados. Como alternativa para realizar este tipo de análisis, se propone un método que utiliza el MEF como herramienta auxiliar sin utilizar elementos de contacto, para que los cálculos sean más rápidos y proporcionen resultados más intuitivos. Además, con el desarrollo de este método, es posible determinar

las zonas en las que una determinada fuerza de apriete puede aplicarse sin que se produzcan deslizamientos ni daño sobre la pieza. Para conseguirlo, se elaboran herramientas de interpolación que interactúan con los resultados de las reacciones obtenidas en los cálculos anteriores, evitando de este modo las no linealidades e iteraciones; y reduciendo el tamaño de las matrices de rigidez. Con los resultados de estos análisis, también se obtiene la deformada de las superficies mecanizadas y se determina su influencia en los errores e incertidumbres de fabricación.

En los actuales procesos de mecanizado, debido a las exigencias de productividad, las fuerzas de corte y apriete requeridas son cada vez mayores y, por lo tanto, mayor es la probabilidad de que el elemento de fijación o de apoyo deforme plásticamente una superficie ya acabada, además de las imprecisiones que se produzcan en el posicionamiento debido a las deformaciones locales. Los métodos de análisis de tensiones y deformaciones actuales son, o bien analíticos, donde se estudian las geometrías esférica y cilíndrica convencionales; o bien numéricos, como el MEF o el método de los elementos de contorno (MEC), que pueden tratar cualquier tipo de geometría. Sin embargo, se echan en falta métodos que permitan diseñar geometrías de contacto distintas de las esféricas y cilíndricas convencionales, y así, reducir las tensiones superficiales y las deformaciones que deslocalicen la pieza; y cuyo proceso de cálculo sea, a la vez, más eficiente que el aportado por el MEF y el MEC. Esta tesis desarrolla un método de análisis, que con la suficiente aproximación y mínimo coste computacional, es capaz de determinar tensiones, deformaciones y desplazamientos en las geometrías de contacto no convencionales de los elementos de sujeción, y de establecer criterios para su aplicación. De esta forma, con el adecuado rectificado de los utillajes de sujeción, se pueda aplicar una mayor fuerza de apriete, sin que ello suponga un daño a la pieza ni una pérdida de precisión en su posicionamiento en la máquina-herramienta.

Por último, debido a la variedad de los análisis anteriores y la información heterogénea que generan, se desarrolla una base de datos relacional que permite una ágil búsqueda y extracción de los datos críticos. Con ello, se consigue la integración final de los sistemas CAD, CAPP, CAE y CAM para que las variables de diseño seleccionadas aseguren la función de sujeción de la pieza en una posición fija y precisa en la máquina-herramienta, sin que se dañen sus superficies. Por otro lado, se obtiene la información de las desviaciones en el posicionamiento y forma de las superficies a mecanizar, proporcionando los datos necesarios para compensar estos errores mediante la generación de nuevas trayectorias de herramienta en el mecanizado de la

pieza en una MHCN, lo que conllevará el alcance de mayores precisiones en las cotas críticas de fabricación.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Índice general	VII
Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XV
Nomenclatura	XVII
1. Introducción	1
1.1. Funciones de los sistemas de sujeción	3
1.2. Diseño de los sistemas de sujeción	4
1.2.1. Métodos de análisis	9
1.2.2. Métodos de optimización	21
1.3. Objetivos de la tesis	24

2. Método de análisis de la precisión dimensional	29
2.1. Precisión en los procesos de mecanizado	29
2.1.1. Posicionamiento real de las superficies de referencia. Determinación del SCES y del SCIP	33
2.1.2. Posicionamiento del SCIP en el SCMH	35
2.1.3. Valor esperado de la cota de fabricación	36
2.1.4. Estimación de la incertidumbre esperada de fabricación	38
2.2. Método de análisis de la precisión dimensional	39
2.3. Ejemplos ilustrativos	41
2.3.1. Paralelismo de una superficie plana	41
2.3.2. Incertidumbre en el mecanizado de un chavetero . . .	44
2.4. Recapitulación	48
3. Método de análisis de las cargas y de las zonas de apriete	51
3.1. Fuerzas de apriete. Efecto sobre la deformación de la pieza . .	53
3.2. Método de análisis del reparto de cargas y de las zonas de apriete	55
3.2.1. Planteamiento	55
3.2.2. Método de análisis del reparto de carga	58
3.2.3. Estudios posteriores al de reparto de cargas	65
3.2.4. Método para la determinación de las zonas de apriete	66
3.3. Ejemplo ilustrativo	69
3.3.1. Aplicación del método de análisis del reparto de carga	70
3.3.2. Estudios posteriores al de reparto de cargas	77
3.3.3. Determinación de las zonas de apriete	82
3.4. Recapitulación	89
4. Método de análisis local del contacto	91
4.1. Contacto entre la pieza y los elementos de sujeción	93
4.2. Método desarrollado	96
4.2.1. Elemento de sujeción de tipo cilíndrico	96
4.2.2. Elemento de sujeción de tipo esférico	101
4.3. Ejemplo de aplicación	104
4.3.1. Validación del método	105
4.3.2. Resultados y discusión	107
4.3.3. Comparación de los métodos estudiados	115
4.4. Recapitulación	117

5. Integración de los métodos de análisis	119
5.1. Fuentes de error de los sistemas de sujeción	121
5.2. Desarrollo de la base de datos relacional	122
5.2.1. Establecimiento de las bases de datos CAD de la pieza y de los elementos de sujeción	123
5.2.2. Integración de los métodos de análisis de los sistemas de sujeción	128
5.2.3. Procedimiento de integración de los análisis de reparto de cargas y del daño superficial	130
5.3. Ejemplo de aplicación.	132
5.3.1. Análisis de la precisión dimensional del elemento de sujeción	134
5.3.2. Análisis de la precisión dimensional de la superficie de referencia de la pieza	139
5.3.3. Análisis del reparto de cargas y de deformaciones es- tructurales	140
5.3.4. Análisis del daño por indentación y deformación local	144
5.3.5. Compensación del error	150
5.4. Recapitulación	156
6. Conclusiones finales	159
6.1. Conclusiones	159
6.2. Desarrollos futuros	165
A. Terminología	167
B. Sistemas de sujeción hiperestática	173
B.1. Rigidez de una viga empotrada en un extremo	173
B.2. Energía de deformación en el contacto	174
B.2.1. Energía de deformación entre dos cuerpos con un punto de contacto	175
B.3. Reparto de cargas entre dos puntos de contacto	176
B.3.1. Reparto de carga entre varios puntos de contacto . . .	177
B.3.2. Principio de mínima energía	178
B.4. Métodos de minimización de la energía de deformación	179
B.4.1. Método de las condiciones de Kuhn-Tücker	179
B.4.2. Método de los multiplicadores de Lagrange	181
B.5. Método Matricial para la determinación del reparto de carga .	183
C. Determinación de la presión de contacto entre dos cuerpos	189

D. Valores propios de Cauchy para formas polinomiales	193
E. Resolución del problema hertziano	195
F. Determinación del mapa tensional en deformación plana	197
Bibliografía	205
Biografía del autor	215

Índice de figuras

1.1. Proceso de diseño de los elementos de sujeción.	7
2.1. Esquema típico de sujeción 3-2-1 de una pieza prismática. . .	30
2.2. Restricción de grados de libertad en piezas prismáticas. . . .	31
2.3. Error por imprecisión dimensional del utillaje de sujeción o error de prerreglaje	34
2.4. Errores por imperfecciones en la pieza o error de referencia. .	34
2.5. Distancia entre la superficie mecanizada y la de referencia. . .	37
2.6. Esquema del método de análisis de la precisión dimensional. .	40
2.7. Pieza situada sobre tres elementos localizadores o de apoyo. .	42
2.8. Mecanizado de un chavetero en un eje.	44
3.1. Método de análisis del reparto de carga.	60
3.2. Método de determinación de zonas de apriete.	68
3.3. Ejemplo de sistema de sujeción.	70
3.4. Mallado de la pieza y aplicación de restricciones.	71
3.5. Matriz de desplazamientos de la pieza. $\times 10^{-8}$ m	73
3.6. Deformaciones en la pieza.	73
3.7. Mallado del localizador y aplicación de restricciones.	74
3.8. Matriz de desplazamientos del localizador. $\times 10^{-8}$ m	75
3.9. Deformaciones en el localizador.	75

3.10. Reparto de cargas en los puntos de localización.	78
3.11. Variación de la posición de los puntos de apriete.	78
3.12. Reparto de cargas en el localizador nº 1 en #1, #2 y #3. . .	80
3.13. Reparto de cargas en el localizador nº 1 en #4, #5 y #6. . .	81
3.14. Reparto de cargas en el localizador nº 2 en #7, #8 y #9. . .	81
3.15. Reparto de cargas en el localizador nº 2 en #4, #5 y #6. . .	82
3.16. Interferencia entre el camino de herramienta y el punto de apriete.	83
3.17. Curvas frontera de fuerza mínima en el localizador nº1.	85
3.18. Curvas frontera de fuerza mínima en el localizador nº2.	85
3.19. Curvas frontera de fuerza máxima en el localizador nº1.	86
3.20. Curvas frontera de fuerza máxima en el localizador nº2.	86
3.21. Región válida de fuerza mínima para la aplicación de la carga de apriete.	87
3.22. Región válida de fuerza máxima para la aplicación de la carga de apriete.	88
3.23. Región de intersección válida de aplicación de la carga de apriete. . .	89
4.1. Esquema típico de sujeción de una pieza prismática.	94
4.2. Perfiles de los elementos de sujeción.	95
4.3. Geometrías de los elementos de sujeción.	95
4.4. Variación de la geometría del perfil axisimétrico.	101
4.5. Distribución de presiones para perfil circular. Tipología cilín- drica.	106
4.6. Distribución de presiones para perfil circular. Tipología esférica.	106
4.7. Distribución de presiones obtenida por el método semianalítico para perfil cilíndrico con tramos rectos.	108
4.8. Distribución de presiones obtenida por el MEF para perfil ci- líndrico con tramos rectos.	108
4.9. Distribución de presiones obtenida por el método semianalítico y por MEF para perfil cilíndrico con tramos rectos.	109
4.10. Distribución de presiones obtenida por el método semianalítico para perfil esférico con tramos rectos.	110
4.11. Distribución de presiones obtenida por el MEF para perfil es- férico con tramos rectos.	111
4.12. Distribución de presiones obtenida por el método semianalítico y por el MEF para perfil esférico con tramos rectos.	111
4.13. Mapas tensionales para elemento cilíndrico. a) Caso 1, b) Caso 4, c) Caso 6, d) Caso 9.	112

4.14. Mapas tensionales para elemento esférico.	113
4.15. Variaciones del cortante máximo y de la presión máxima. . .	115
4.16. Variación la tensión de von Mises y de la presión máximas. .	116
5.1. Base de datos relacional para integración de métodos análisis.	124
5.2. Base de datos de elementos de sujeción.	127
5.3. Algoritmo de integración entre el reparto de cargas y el daño superficial	131
5.4. Ejemplo ilustrativo.	133
5.5. Elemento localizador.	134
5.6. Posición de los puntos de localización.	136
5.7. Error de referencia.	140
5.8. Reparto de cargas en los puntos de localización.	142
5.9. Aplicación de condiciones de contorno en la pieza.	144
5.10. Deformación producida en la pieza	145
5.11. Tensión de von Mises	145
5.12. Deformación obtenida en los nodos de la superficie	146
5.13. Esquema de integración de métodos de análisis.	151
5.14. Tipos de error.	152
5.15. Modelo de superficie a malla de líneas compensada.	154
5.16. Trayectoria de herramienta obtenida en el módulo de CAM de TekSoft®.	155
5.17. Código ISO generado en el programa TekSoft®.	157
B.1. Sistema de dos cuerpos elásticos con un punto en contacto . .	174
B.2. Evolución de la rigidez conjunta en función de la localización del punto de contacto.	175
C.1. Carga puntual sobre una superficie semiindefinida	190
F.1. Carga puntual sobre una superficie semiindefinida	197
F.2. Distribución de presiones rectangular sobre una superficie se- miindefinida	199
F.3. Representación de distribución triangular	200
F.4. Sistema de referencia relativo y superposición de distribucio- nes triangulares	201
F.5. Diagrama de flujo del algoritmo utilizado	202

Índice de tablas

3.1. Coordenadas de puntos de localización y apriete.	72
3.2. Coordenadas de puntos de localización.	74
3.3. Coordenadas de los puntos de aplicación de la carga de apriete respecto del SCIP.	79
3.4. Variación del reparto de carga en función de la posición de apriete.	79
4.1. Características de los perfiles de contacto analizados.	105
4.2. Comparación entre los distintos métodos estudiados.	117
5.1. Coordenadas e incertidumbres de los puntos de localización. .	135
5.2. Valores calculados de los distintos errores en el análisis inte- grado de los elementos de sujeción.	153
5.3. Parámetros de mecanizado utilizados en la simulación de CAD- CAM.	156

Nomenclatura

Caracteres latinos

a	Semiancho de contacto; coeficiente de polinomio de aproximación
a_k^N	Coficientes de la función de aproximación
a_0	Semiancho de contacto de Hertz
c_i	Coeficientes de Gauss
c_{ij}	Coeficiente de la matriz de desplazamientos
d	Dimensión o cota de fabricación
d_k	Coeficientes de la función de aproximación
f	Fuerza o carga de contacto
h	Distancia desde el vértice de bloque en V al centro de una pieza cilíndrica
m	Variable introducida en el cálculo integral
$p(x)$	Distribución de presiones en deformación plana
$p(\rho)$	Distribución de presiones axisimétricas
p_0	Presión máxima de Hertz
r	Radio de la región circular de contacto axisimétrica
s	Distancia de actuación de la carga sobre el semiespacio elástico
t	Variable adimensional. Relación entre w y a_0
u	Desviación estándar

$\bar{u}_z(x)$	Desplazamiento normal de la superficie de contacto
w	Semiancho del tramo recto del elemento de sujeción
x, y, z	Coordenadas de un punto en el espacio
x', y', z'	Variación de las coordenadas de un punto en el espacio
x^*	Coordenada del punto de singularidad en el eje X
C	Matriz de desplazamientos
C_x	Coordenada X del centro del arco de redondeo
C^*	Matriz de desplazamientos modificada
D	Diámetro de una pieza cilíndrica
E	Módulo de Young
F	Fuerza de apriete; Función de evaluación de la distribución de presiones
G	Módulo de cizalladura; Función de evaluación de la distribución de presiones
H, J	Función de evaluación de la distribución de presiones
K	Factor de incertidumbre
L, l	Función de evaluación de la distribución de presiones; longitud o distancia
N	Función de forma
P	Presión total
P_0	Carga total de apriete
R	Radio de redondeo del perfil del elemento de sujeción
T_k	Polinomio de Chebyshev
U	Incertidumbre; función de energía de deformación
U_z	Variación de la geometría de contacto en elemento esférico
V	Vector director

Caracteres griegos

α	Ángulo de rotación de un punto en el espacio
β	Ángulo de un bloque en V
δ	Desplazamiento de cuerpo
λ	Variable de las funciones F , G y L
ν	Coefficiente de Poisson
ρ	Densidad; relación entre el radio r y a ; variable de las funciones H y J
σ	Tensión equivalente de von Mises
σ_y	Tensión de fluencia
σ_0	Tensión equivalente de von Mises para contacto hertziano

τ	Tensión cortante
τ_0	Tensión cortante para contacto hertziano
Δ	Desplazamiento lineal de la pieza

Subíndices

des	Desviación
max	Valor máximo
med	Valor medio
min	Valor mínimo
pre	Prerreglaje
ref	Referencia
L	Localizador
P	Pieza

Capítulo 1

Introducción

El mecanizado por arranque de viruta constituye uno de los procesos de fabricación más extendidos en la producción de componentes mecánicos, en sectores tales como, automoción, aeronáutico o aeroespacial. Prueba inequívoca de su importancia, es la representatividad del 90 % de las máquinas-herramienta en el conjunto total de máquinas utilizadas en la industria [21]. Ello es debido, principalmente, a que la implantación de los procesos de corte es hoy en día indiscutible cuando se trata de fabricar piezas que requieran una alta exigencia en la reproducción de sus formas geométricas, de tolerancias muy estrechas, de menos de 0,025 mm, y acabados superficiales menores de $0,4\ \mu\text{m}$ [29]. Además, la gran mayoría de los componentes fabricados mediante otros procesos de fabricación, tales como procesos de fundición, conformado por deformación plástica, procesos de unión, etc., precisan de operaciones posteriores con el fin de alcanzar los requisitos dimensionales y de calidad superficial.

El principal reto de los procesos de corte consiste en mecanizar componentes cada vez más precisos, que mejoren la fiabilidad de los mecanismos y máquinas en los que se realice su montaje final. Para conseguir esta alta precisión, se requiere un mayor número de herramientas especializadas (herramientas de corte, útiles de medición y sistemas de sujeción), que también afectan directamente a la calidad, la productividad y al coste final de los productos. En la actualidad, el diseño de las herramientas de corte y de los útiles

de medición es relativamente sencillo debido a su estandarización, del mismo modo, la selección de los mismos no conlleva una gran dificultad gracias al creciente uso de los ordenadores. A pesar de ello, la ausencia de métodos de análisis viables para el diseño y selección de los sistemas de sujeción actúa como barrera para la minimización de los costes de fabricación, incremento de la productividad y el aseguramiento de la calidad del producto.

La investigación llevada a cabo dentro de los procesos de corte se ha orientado hacia la mejora de las herramientas de corte, las máquinas-herramienta y los métodos de producción, dando lugar al alcance de precisiones dimensionales dentro del rango de 0,005 mm. Sin embargo, existe un límite para la precisión a alcanzar que no depende de las mejoras del diseño y construcción de la máquina-herramienta, sino de una serie de fuentes de error que son muy difíciles de controlar. Dichas fuentes de error que inducen la aparición de imprecisión en el mecanizado han sido tradicionalmente clasificadas según tres tipos principales [72]: errores geométricos y cinemáticos de la máquina-herramienta y de los útiles que intervienen en el proceso, errores inducidos por las fuerzas de corte y los debidos al efecto térmico producido durante el mecanizado. Los errores geométricos y los cinemáticos constituyen la fuente básica de imprecisión en la máquina-herramienta, a los que se suman los efectos térmicos inducidos por los cambios en la temperatura de los distintos elementos de la máquina-herramienta. Estos errores son dependientes del diseño y de los materiales con los que está construida la máquina-herramienta. Sin embargo existen otros errores que dependen intrínsecamente del proceso, entre ellos, se pueden destacar los inducidos por las fuerzas de corte. Estos errores pueden generar imprecisiones en la pieza producidas bien por una excesiva deformación de su superficie, bien por la deformación estructural de la propia máquina-herramienta, o bien por el calentamiento del conjunto.

Aunque tradicionalmente las líneas de investigación dentro de la temática relacionada con los procesos de mecanizado se han orientado más hacia la mejora de las herramientas de corte, de las máquinas-herramienta y de los métodos de producción, los elementos de sujeción se consideran actualmente como una parte fundamental a cuyo estudio se están dedicando importantes recursos económicos y humanos. Los elementos de sujeción poseen la función de sostener, posicionar e inmovilizar a la pieza durante todo el proceso de mecanizado. Por lo tanto, la precisión de la pieza terminada está directamente relacionada con su posición relativa respecto a la herramienta de corte, que podrá variar en función de la capacidad de restricción del movimiento que posea el elemento de sujeción [76]. Sin embargo, no se han hallado contribu-

ciones científicas significativas relacionadas con ellos hasta mediados de los 80, con la publicación de los trabajos de Asada y By [4], y Lee y Haynes [54]. Desde finales de los años 80 hasta la actualidad el número y calidad de los artículos científicos relacionados con los elementos de sujeción han llegado a cotas dignas de tener en consideración. Prueba de ello, es que en el año 2002 se ha estimado que el porcentaje de artículos relacionados con los procesos de corte fue del 34 % con respecto a la producción científica total sobre procesos de fabricación, registrada en la base de datos de E.I. Compendex®, y dentro de éstos, los relacionados con los elementos de sujeción representaron aproximadamente el 10 %.

1.1. Funciones de los sistemas de sujeción

Aunque es conocido que los elementos de sujeción, básicamente, se utilizan para posicionar con precisión, sostener y sujetar con seguridad las piezas durante su mecanizado en las máquinas-herramienta, se puede extender su uso al guiado y sujeción de cualquier otra herramienta que lleve a cabo una operación sobre un componente [7]. Para comprender aún más su propósito, su función y cómo se deben diseñar y fabricar los elementos de sujeción, es necesario entender el proceso de fabricación en el que vayan a estar involucrados. Los procesos de fabricación donde se utilizan sistemas de sujeción se pueden dividir en tres grandes grupos: procesos de mecanizado, procesos de conformado y procesos de montaje, estando incluidos en este último grupo los procesos de unión o soldadura. Sin embargo, es en los procesos de corte donde se confiere a la pieza las altas precisiones dimensionales y de forma. Por lo tanto, una parte importante de los estudios realizados dentro de los procesos de mecanizado están encaminados hacia a la mejora de los sistemas de sujeción.

Como se ha comentado anteriormente, el primer requisito de un elemento de sujeción es el de localizar y determinar la posición de la pieza en la mesa de trabajo de una máquina-herramienta. Como resultado de la eficacia con la que se satisfaga este requisito, se obtendrá una mayor o menor precisión dimensional y geométrica en la pieza final mecanizada, ya que la precisión depende directamente de su posición relativa con respecto al sistema de coordenadas de la máquina-herramienta (SCMH). Para conseguir este posicionamiento, se utilizan elementos localizadores y soportes que estando en contacto con las superficies de la pieza, restringen sus seis grados de libertad (tres de ellos rotacionales y los otros tres lineales).

El segundo requisito es el de asegurar firmemente la posición de la pieza, utilizándose los mecanismos de apriete, que tienen la misión de aplicar la carga de apriete que anule la acción de las fuerzas de corte sobre el movimiento de la pieza. Por lo tanto, mientras que los dispositivos de localización se pueden considerar pasivos al sólo aportar posiciones fijas sobre las que apoyar la pieza en la máquina-herramienta, los de apriete son activos ya que ejercen una fuerza sobre la superficie de la pieza. Sin embargo, ninguno de los dos es efectivo por separado.

Entre los métodos de localización más utilizados se encuentra el extensamente conocido como 3-2-1, en el que se utilizan tres planos de referencia [36]. Otros métodos incluyen la utilización de un plano y dos agujeros, dos planos y un agujero, o bloques en V. Por otro lado, los métodos de apriete se pueden clasificar según se aplique la fuerza de sujeción en el lado superior o lateral de la pieza. Por otro lado, además de satisfacer el requisito de asegurar la precisión de la pieza, el elemento de sujeción debe ser suficientemente rígido para resistir las deformaciones, el desgaste, el daño superficial y la vibración durante todo el proceso de mecanizado. Además de los requisitos anteriormente relatados, hay que añadir aquellos relacionados con la productividad y el coste, como son: la facilidad de carga y descarga de la pieza, la utilización de dispositivos de apriete automáticos o semiautomáticos, la fácil evacuación de la viruta; los relacionados con la reducción de la deformación de la pieza, con la simplicidad y seguridad en la operación, o con la reducción efectiva del coste unitario.

1.2. Diseño de los sistemas de sujeción

Los métodos utilizados en la mejora del diseño de los sistemas de sujeción vienen determinadas por el tamaño de lote [76]. En la producción en masa, donde el ejemplo más representativo es el de la industria de la automoción, los sistemas de amarre deben ser aún más eficientes para asegurar un alto nivel de producción, incluso si éstos son muy costosos y conllevan un largo tiempo de diseño y fabricación. En este tipo de procesos, las operaciones se llevan a cabo utilizando elementos de sujeción especialmente diseñados para cada operación en concreto, de modo que se realicen con rapidez y asegurando los requisitos de tolerancia. Sin embargo, las industrias de la automoción y aeronáutica actuales, precisan de entornos industriales cada vez más flexibles que permitan una ágil adaptación a las variaciones del diseño de los productos. En este caso, la flexibilidad de los sistemas de fabricación está

restringida por la flexibilidad de sus subsistemas, entre los que se incluyen los sistemas de amarre. La situación es bien diferente en el caso de lotes de tamaño pequeño o en la producción de piezas únicas. En este caso, la flexibilidad de los sistemas de sujeción alcanza una mayor importancia debido a la variedad de componentes con diferentes geometrías y requisitos de mecanizado, siendo desechados los elementos de sujeción dedicados en detrimento de los elementos de sujeción de propósito general.

En algunos casos, se requiere del diseño y fabricación de elementos de sujeción especiales para operaciones complejas de mecanizado. De todas formas, en caso de no recurrir al uso de elementos de sujeción especiales por el alto coste y tiempo que requiere su diseño y fabricación, también será necesario un gran esfuerzo en la medida y ajuste de la posición de la pieza para obtener una correcta alineación con la máquina-herramienta.

Una prueba de la importancia del proceso de diseño y fabricación de los sistemas de sujeción en los entornos industriales actuales es que su coste representa el $10 \div 20 \%$ del coste total [5].

El proceso de diseño de los sistemas de sujeción, mostrado en el esquema de la Figura 1.1, consta de cuatro fases: descripción del problema de fijación de la pieza, análisis de los sistemas de sujeción, optimización de los sistemas de sujeción, y verificación.

- **Descripción del problema de sujeción.** La forma de abordar el estudio de los elementos de sujeción ha tenido varios puntos de vista dependiendo de las variables y restricciones de diseño que se hayan escogido. Las primeras, están relacionadas con todo lo concerniente a la planificación del proceso de fabricación, tales como el número de elementos de sujeción, el tipo de elementos de localización y de apriete utilizados, la geometría de la superficie de contacto sujeción-pieza, la distribución de los elementos de localización y de apriete, la intensidad de la fuerza de apriete y su secuencia de aplicación, los parámetros de mecanizado (velocidad de avance, velocidad de corte y profundidad de corte), y la trayectoria de la herramienta. Las segundas vienen definidas por los requisitos que deben reunir los sistemas de amarre diseñados, que son los siguientes:

1. Precisión en el posicionamiento de la pieza con respecto al SCMH, que asegure la calidad dimensional de la pieza acabada en el proceso de mecanizado.

2. Restricción cinemática o aseguramiento de la inmovilidad total de la pieza bajo la acción de los sistemas de sujeción. Esta inmovilidad se refiere también a estabilidad de apoyo, cuando se cumple que la pieza no pierde contacto con los elementos localizadores; y estabilidad de apriete cuando se anula totalmente la acción de las fuerzas de corte.
 3. La deformación estructural, que se origina como consecuencia de la aplicación de las fuerzas de apriete y corte sobre la pieza. Aunque la deformación elástica es predominante, también la plástica puede ser considerada bajo determinadas condiciones que favorezcan su aparición.
 4. Deformación por indentación o por contacto local, que se produce por la aparición de tensiones localizadas durante el proceso de apriete y mecanizado de la pieza. Debido a que el material de los sistemas de sujeción es habitualmente rígido, con superficies endurecidas por tratamiento térmico, se produce una indentación en la superficie de la pieza, que suele ser de material elástico.
 5. Accesibilidad, desmontaje, que se refiere a la satisfacción de los requisitos de trayectoria libre de la herramienta sin interferencia con los sistemas de sujeción. La accesibilidad también está relacionada con la facilidad de alcance de las superficies de referencia de la pieza, y a la sencillez de carga y descarga de ésta dentro del sistema de amarre.
- **Análisis de los sistemas de sujeción**, donde se desarrollan modelos que relacionen las variables de diseño, las restricciones y los objetivos de evaluación. Los trabajos de investigación llevados a cabo en el análisis de los sistemas de sujeción se pueden clasificar de la siguiente manera:
 1. Análisis de tolerancias, que implica el chequeo de todas las desviaciones posibles en las dimensiones y formas geométricas con respecto a los requisitos especificados en el plano de diseño de la pieza. Estas desviaciones también pueden originarse en la preparación del proceso de mecanizado y sujeción de la pieza.
 2. Métodos basados en la geometría y en las características de la pieza y los elementos de fijación, en los que se recupera la información desde los sistemas CAD para la búsqueda de configuraciones adecuadas para los sistemas de sujeción, e incluso para llevar a cabo la planificación automática de los sistemas de sujeción.

Figura 1.1: Proceso de diseño de los elementos de sujeción.

3. Métodos basados en el movimiento de cuerpo rígido en el espacio 3D (*Screw theory*), donde las fuerzas y los movimientos de la pieza se pueden modelar como *torsores* y *torsiones*.
 4. El método de los elementos finitos (MEF) se ha utilizado en varios trabajos de investigación dada su buena capacidad de derivación de las fuerzas y desplazamientos correspondientes, y de la deducción de la deformación en la pieza.
 5. Métodos de análisis basados en el contacto elástico, muy utilizados en el modelado de la fuerza de interacción en la interfaz pieza-elemento de sujeción, así como en la deformación y desplazamiento de la pieza.
- **Optimización de los elementos de sujeción**, que consiste en la determinación de un número fijo de variables, tomando un valor que satisfaga los requisitos de diseño, optimizando la configuración del sistema de amarre, según unos objetivos planteados. Los métodos de optimización se pueden clasificar de la siguiente manera:
 1. Métodos analíticos, que utilizan algoritmos que manejan un reducido número de variables de diseño, y buscan todos los sistemas de amarre candidatos que sean apropiados para conformar una configuración determinada.
 2. Algoritmos genéticos, que presentan una seria alternativa a otros métodos en aquellos casos donde el número de variables de diseño sea muy alto y la solución del problema conlleve problemas de convergencia o no tenga tratamiento matemático sencillo.
 - **Verificación**, que tendrá lugar una vez que se haya fabricado e instalado el sistema de amarre, donde se comprobará si se cumplen todos los requisitos definidos durante la descripción o especificación del proceso de mecanizado, y por consiguiente, si el elemento de sujeción es el idóneo en el proceso de mecanizado para el que se diseñó.

Como se ha descrito anteriormente, los trabajos de investigación sobre los sistemas de amarre han crecido en cantidad y calidad, de modo que han ocupado un importante lugar dentro de la temática de los procesos de fabricación. A continuación, se clasifican los métodos de análisis de los sistemas de sujeción de mayor relevancia, publicados en los últimos decenios.

1.2.1. Métodos de análisis

Los trabajos de investigación relacionados con el desarrollo de métodos de análisis se clasifican en métodos de análisis de tolerancias, métodos basados en la geometría, métodos basados en el movimiento de cuerpo rígido, modelos basados en el MEF y métodos basados en el contacto elástico. A continuación se describen los trabajos más relevantes dentro de cada uno de los grupos anteriores.

Métodos de análisis de tolerancias

Una regla comúnmente aceptada en el diseño de los sistemas de sujeción es que la variabilidad dimensional de los elementos localizadores no debe contribuir a una desviación de la superficie mecanizada con respecto a la teórica superior al 10 % [14]. Por lo tanto, con la finalidad de asegurar la calidad dimensional de la pieza mecanizada, se debe establecer un esquema adecuado de análisis de tolerancias de los sistemas de sujeción.

El análisis de tolerancias de los sistemas de amarre trata de cubrir las deficiencias que presentan otros métodos donde únicamente se han tenido en cuenta las características geométricas ideales. De Sam Lazaro y King [20], trataron de superar las deficiencias de los sistemas basados en el conocimiento, de modo que la tolerancia fuera considerada en el proceso de diseño de los sistemas de sujeción. De Sam Lazaro y King, desarrollaron un sistema experto para el diseño asistido por ordenador de los elementos de sujeción (CAFD), teniendo en cuenta los principios de control dimensional y mecánico en una secuencia de operaciones de mecanizado. El sistema desarrollado, denominado *AutoFix II* presentó un esquema de representación de geometría y tolerancias independiente del sistema CAD, con las ventajas que conllevaba la representación de la información de la tolerancia de forma automática.

La mayoría de sistemas de Planificación de Procesos Asistida por Ordenador (CAPP) están limitados en la verificación de los sistemas de amarre y el reparto de las tolerancias. En un intento de solucionar estas carencias, Huang y Gu [38] incluyeron el análisis de tolerancias en el diseño de los elementos de sujeción, necesario para el alcance de la precisión en el mecanizado. Para ello realizaron el cálculo de los diferentes errores inherentes al proceso de fijación de la pieza. Una vez calculados los diferentes errores, se calcularon las matrices de transformación entre los sistemas de coordenadas de la máquina, el elemento de sujeción y la pieza. También se llevó a cabo la selección de los datos de referencia y el cálculo de errores acumulados.

Entre otros estudios, cabe destacar el trabajo de Choudhuri y De Meter [14], donde presentaron un método para el modelado y análisis del impacto de las tolerancias de los elementos localizadores en los errores geométricos de las superficies mecanizadas. En dicho trabajo dedujeron, finalmente, que la relación entre la tolerancia del elemento de localización y el error geométrico es predominantemente lineal. También dedujeron que la variabilidad del radio del elemento de localización es insensible al error geométrico, y que los errores geométricos son sensibles a la posición que ocupen los elementos localizadores.

En otro trabajo a considerar, Lin y Zhang [63] analizaron la tolerancia dimensional y geométrica en 1, 2 y 3 dimensiones basándose en el análisis de zonas de tolerancias. Como conclusión del trabajo realizado en el estudio de 2 y 3 dimensiones, se obtuvo que las tolerancias acumuladas dependían tanto de las tolerancias de los elementos de sujeción como de los tamaños básicos de las características de la pieza mecanizada.

En la misma línea va dirigido el trabajo desarrollado por Wang [90], donde investigó la relación existente entre los errores geométricos de la superficie mecanizada y las fuentes de error en los sistemas de sujeción. Para ello, presentó un modelo matemático que permitió relacionar los errores de fabricación, los errores de posicionamiento y los errores de los elementos de sujeción. Además, elaboró un proceso de minimización de los errores de fabricación en el que se optimizó la distribución de los elementos de sujeción. Una vez establecida dicha distribución, se especificó un esquema de tolerancias para los localizadores con el fin de buscar el elemento de sujeción más apropiado.

Hurtado y Melkote [42] consideraron la rigidez de los elementos de sujeción en su proceso de diseño, además de la relación explícita entre ésta y la tolerancia de fabricación. En otras palabras, establecieron una forma de determinar la rigidez de los elementos de sujeción, y sus correspondientes dimensiones, con la condición de que la deformación que se produzca suponga una fracción de la tolerancia total permitida.

Aunque el último trabajo [42] trata de relacionar el estudio de optimización del diseño de los elementos de sujeción con la tolerancia final de fabricación, en realidad lo que se obtiene en el proceso de cálculo es una medida del error producido en el desplazamiento de la pieza, que a su vez es comparado con la tolerancia de fabricación especificada. Sin embargo, tolerancia y error no significan lo mismo, mientras que el error es la desviación entre el resultado de una medición (medida real) y el valor especificado de la característica

a medir, (medida nominal) [1]; la tolerancia es la variación permisible de una característica del componente entre los límites máximo y mínimo establecidos [15]. Por consiguiente, tanto en este último trabajo como en el resto de estudios llevados a cabo en el análisis de tolerancias, se echan en falta métodos que estimen de forma explícita cómo influyen variables de diseño, tales como la precisión de los elementos de sujeción y de la preforma, en las cotas finales de fabricación, así como en la incertidumbre asociada a dichas cotas de fabricación.

Métodos basados en la geometría y en las características de la pieza

Un estudio demuestra que en la producción por pequeños lotes, el coste relativo a la selección, montaje y utilización de los elementos de sujeción es el 30 % del coste total que conlleva la fabricación del producto, y de media, el tiempo perdido en diseñar los elementos de sujeción es de aproximadamente el 25 % del tiempo de planificación del proceso [86]. Por este motivo, muchos han sido los trabajos que han reconocido la importancia del desarrollo de sistemas de diseño asistido por ordenador de la sujeción (CAFD), donde los atributos de diseño de los elementos de apriete, los soportes y los localizadores se generan automáticamente para una familia de diseños de piezas determinado [11].

La representación de la geometría basada en características necesita de la aplicación de otras técnicas para alcanzar una solución factible, como por ejemplo la aplicación de sistemas expertos. Wang e Inasaki [86] desarrollaron un sistema CAFD basado en el conocimiento de las características de la pieza, por medio de un mecanismo de inferencia referido a las reglas de producción, capaz de generar configuraciones de sistemas de sujeción. En la misma línea, Ma *et al.* [65] desarrollaron un sistema CAFD, llamado *Fix Planning*, en donde se determinaron las superficies y los puntos de aplicación de los elementos de sujeción. Dichas superficies y puntos se seleccionaron automáticamente teniendo en consideración múltiples factores, incluyendo entre ellos, la precisión de las características, la estabilidad del sistema de sujeción y la accesibilidad a la superficies de amarre. Kow *et al.* [49] desarrollaron otro sistema CAFD basado en el modelo de geometría de Unigraphics®, cuya principal ventaja es la inclusión de una herramienta que genera el diseño de amarres libre de colisiones con la trayectoria de la herramienta de corte. Kumar *et al.* [53] llevaron a cabo el desarrollo de un modelo de clasificación de los tipos de elementos de sujeción basado en reglas de aprendizaje máquina. En otro trabajo, Kumar *et al.* [52] presentaron un sistema CAFD capaz de generar

configuraciones de sistemas de sujeción libres de colisión o interferencia con la trayectoria de herramienta de corte, de forma integrada con el software de generación del código de programación de control numérico. Al igual que los autores anteriores, Hu y Rong [37] desarrollaron otro sistema CAFD basándose en la trayectoria de herramienta libre de colisiones, pero con un enfoque diferente y más eficiente, al no considerar el volumen de barrido.

Los elementos de apriete también han sido tenidos en cuenta en varios trabajos basados en CAFD, entre ellos cabe destacar el de Cecil [10], donde se identificaron las superficies de aplicación y la dirección de las cargas de apriete utilizando técnicas de razonamiento geométrico. En este trabajo también se consideró el diseño de los elementos localizadores, las especificaciones de diseño de la pieza, y otros datos de entrada.

Dentro de la línea de investigación basada en las técnicas de inteligencia artificial cabe destacar, entre otros, el trabajo de Pham y De Sam Lazaro [71], donde desarrollaron un sistema CAFD totalmente automatizado, llamado *Autofix*, para la configuración de elementos de sujeción de tipo modular.

Sin embargo, un problema detectado en los sistemas CAFD, citados anteriormente, es que están basados en los datos geométricos y no tienen en cuenta otros, como las tolerancias de los elementos de fabricación o la deformación de la pieza durante el proceso de apriete y mecanizado. Como ya se describió en el apartado 1.2.1, en un intento por integrar los sistemas CAFD con el análisis de tolerancias, De Sam Lazaro y King [20] desarrollaron el sistema *Autofix II*.

Aunque se han propuesto numerosas técnicas basadas en CAFD, el diseño de los sistemas de sujeción sigue siendo el mayor cuello de botella en la integración entre los sistemas CAD y CAM. Ello es debido principalmente a que aún quedan fuera de la integración otros muchos aspectos que deben ser tenidos en cuenta. Por esta razón, los sistemas CAFD permanecen aún incompletos.

Métodos basados en el movimiento de cuerpo rígido

Los trabajos basados en el principio de movimiento de cuerpo rígido o también conocido como *Screw Theory* tratan de optimizar la configuración de los elementos de sujeción, basándose en los conceptos de torsión y tórsor [13], muy apropiados para el análisis de la libertad y restricción de movimientos de un objeto en el espacio 3D. En dicha teoría se asume que tanto la pieza como el elemento de sujeción son cuerpos rígidos, donde cualquier des-

plazamiento se puede considerar como una rotación alrededor de un solo eje, y una traslación a lo largo del mismo. En el diseño de sistemas de sujeción, los elementos localizadores y de apriete que aplican las fuerzas de fricción en un solo sentido pueden considerarse como torsores, del mismo modo también se pueden considerar como torsores las fuerzas de mecanizado. En el trabajo de Chou *et al.* [13], se llevó a cabo un análisis bajo el punto de vista del equilibrio de la pieza, basado en el movimiento de cuerpo rígido, asumiendo un estado inercial cuasiestático, donde se despreciaban las fuerzas de fricción frente a las fuerzas de mecanizado. De este modo, se pudieron determinar automáticamente las posiciones de los elementos de localización y de los elementos de apriete, mediante la formulación de un problema de optimización en el que se utilizaron técnicas de programación lineal. Además se pudieron determinar las fuerzas de apriete que daban lugar a un desplazamiento mínimo de la pieza.

King y Hutter [48] combinaron el análisis cinemático y de fuerzas ofreciendo un enfoque más integrado para determinar las posiciones de localización. Jeng *et al.* [45] desarrollaron un modelo para el análisis de la fuerza de apriete mínima, basado en la correlación existente entre las fuerzas de corte y el momento de apriete, necesario para que la pieza no deslice durante el proceso de mecanizado. En el análisis de la fuerza de apriete mínima se encontró la dificultad, que tanto la dirección como la magnitud de la fuerza de fricción no estaban determinadas. Finalmente, presentaron varias distribuciones de los elementos de sujeción con selección de áreas de apriete y se derivaron sus condiciones de estabilidad de forma independiente, con el fin de determinar las fuerzas de apriete mínimas mediante un algoritmo de optimización. A pesar de presentar un incremento de la eficiencia en la búsqueda de una distribución adecuada al reducir el número de líneas de búsqueda inadecuadas, este método carece de eficiencia computacional debido al alto número de iteraciones necesarias para obtener convergencia en las soluciones. Cabe destacar también, que debido a que se utilizó un margen de seguridad en el deslizamiento, el efecto de la fricción tuvo poca influencia en las tensiones locales y globales.

En el mismo marco se desarrolló el trabajo de Tao *et al.* [81], donde el tursor se siguió utilizando para el análisis de equilibrio y estabilidad. El problema presentado, por lo tanto, consistió en hallar el espectro de intensidades mínimas de apriete que equilibraran la influencia de la variación de las fuerzas de corte, y que al mismo tiempo dieran lugar a la satisfacción del requisito de que todos los localizadores soportaran fuerzas de reacción estrictamente

positivas. Lo que significaba que se cumpliera con el requisito de restricción total de movimiento durante el mecanizado. La solución del análisis se llevó a cabo mediante la formulación de un problema no lineal que fue resuelto mediante la técnica de programación cuadrática secuencial (PCS).

De Meter [18] presentó un algoritmo basado en un modelo de carga mínima y máxima para el cálculo de la configuración óptima de los elementos de localización y apriete, y de las fuerzas de apriete, considerando a la pieza como un sólido rígido sometido al efecto de fricción.

Tzen *et al.* [82] presentaron un algoritmo eficiente para la búsqueda de la estabilidad en el proceso de apriete, utilizando el concepto de centro instantáneo de rotación en el plano de apriete y calculando la fuerza de fricción. Una vez determinada la fuerza de fricción, se pudo identificar la estabilidad en el proceso de apriete usando el criterio de estabilidad estática. Además, se consiguió probar la eficiencia del algoritmo al determinar la máxima fuerza de apriete y las tensiones normales mínimas permisibles.

Wang [87] desarrolló un modelo cinemático para la restricción total del movimiento de la pieza que estimó, de una forma más eficiente, el error de localización mediante una caracterización estadística de la precisión en el posicionamiento del elemento de sujeción.

Sugar y Kumar [79] analizaron por un lado el efecto de las pequeñas perturbaciones en la posición de las garras y la alteración de las fuerzas en la medida de la estabilidad, y por otro, la medida de la robustez de los errores de posición de los elementos de sujeción de geometría plana. También estudiaron la influencia de la rigidez de los elementos de sujeción en estas dos medidas por medio del desarrollo de un algoritmo de optimización.

Carlson [9] llevó a cabo un análisis cinemático, basado en la derivación de una ecuación cuadrática de sensibilidad, capaz de relacionar el error de posicionamiento de los localizadores con el desplazamiento de la pieza, considerada como sólido rígido.

Por último, cabe citar dos trabajos llevados a cabo por Marín y Ferreira [67, 68]. En el primero de ellos se presentó un nuevo programa de optimización lineal que permitió proveer regiones de aplicación de las fuerzas de apriete independientes con el fin de garantizar el cumplimiento del principio de restricción cinemática, bajo la hipótesis de no fricción. En el segundo, se extendió el problema a la optimización de las fuerzas máximas de apriete en función de las posiciones de su aplicación.

Los métodos basados en el movimiento de sólido rígido presentan como

limitación que el problema de amarre queda estáticamente indeterminado cuando se utilizan más de seis puntos de contacto (sistemas hiperestáticos), ya que no existiría una solución única para los desplazamientos de la pieza. Además, al asumir que la pieza es un cuerpo rígido, no se considera la posibilidad de aparición de deformación elástica o plástica en ella y en los sistemas de sujeción.

Esta limitación puede superarse mediante la consideración del problema de elasticidad en el contacto entre la pieza y el amarre.

El método de los elementos finitos

El MEF ha sido ampliamente utilizado en varios trabajos de investigación, centrados en el estudio de la deformación de la pieza situada en el sistema de sujeción, dada la buena capacidad de derivación de las correspondientes fuerzas compresivas y los desplazamientos. Los pioneros en la utilización del MEF en el diseño automático de los elementos de sujeción fueron Lee y Haynes [54], que minimizaron las fuerzas de apriete, las tensiones máximas y la deformación de la pieza. El MEF considera a la pieza como un cuerpo deformable según la teoría de la elasticidad, y tiene en cuenta además la fricción en la interfaz entre la pieza y los elementos de sujeción. Los distintos programas de elementos finitos que existen en el mercado permiten caracterizar el contacto entre la pieza y el elemento de sujeción mediante muelles lineales, muelles no lineales, elementos tipo gap, elementos tipo nodo a superficie, y elementos tipo superficie a superficie. El software de elementos finitos permite además, representar en la pantalla del ordenador la pieza deformada y no deformada cuando está sujeta a la acción de las fuerzas de apriete y de corte.

Menassa y DeVries [69] utilizaron el MEF de un modo similar a como lo hicieron Lee y Haynes [54]. Para ello, formularon una función objetivo que era evaluada introduciendo las deformaciones calculadas mediante el MEF. Posteriormente, plantearon un problema de programación no lineal, donde se obtuvieron como resultado, las posiciones óptimas de los soportes y elementos localizadores en el esquema de sujeción 3-2-1, que daban lugar a la mínima deformación en la pieza. Sin embargo, se detectaron inconsistencias en los resultados como consecuencia de la aparición de una discontinuidad en la función objetivo. Rearick *et al.* [73] utilizaron un algoritmo de PCS en conjunción con el MEF y una técnica de cálculo de la función de coste, que permitió evaluar la consideración de un mayor número de soportes para el

análisis de la sujeción de piezas de chapa metálica.

La principal desventaja de los métodos anteriores es su alto coste computacional, ya que al tratarse de algoritmos iterativos, requieren la resolución de nuevos problemas por el MEF cada vez que se encuentra una nueva dirección de búsqueda para la minimización de la función objetivo. El alto coste computacional se debe también al alto número de grados de libertad que evalúa el algoritmo de optimización. Este problema fue resuelto por De Meter [17] utilizando una nueva técnica conocida como optimización rápida de la distribución de apoyos (FSLO), donde el tiempo mínimo de computación es proporcional al cubo del número de grados de libertad de las reacciones en las regiones de contacto entre pieza y apoyos. Cai *et al.* [6] estudiaron el problema de sujeción de piezas de chapa metálica aportando soluciones a los problemas encontrados por Rearick *et al.* [73], donde las inconsistencias debidas al remallado fueron identificadas y eliminadas mediante una característica de restricción multipunto desarrollada en el programa MSC/NASTRAN®. Finalmente se encontraron resultados satisfactorios para la deformación, una vez determinado el principio de múltiples puntos de localización en el plano base, al que llamaron N-2-1. Liao y Hu [61] detectaron carencias en la utilización del MEF de los estudios anteriores, donde no se consideraba la interacción entre la pieza y el elemento de sujeción en la optimización de la distribución de los elementos de sujeción, al tenerse en cuenta que el elemento de sujeción era rígido. Para solucionar este problema utilizaron parejas de elementos de contacto en la superficie.

En dos trabajos, Fang *et al.* [26, 27] estudiaron los efectos dinámicos en los elementos de sujeción mediante técnicas no lineales de resolución por el MEF, considerando los efectos de fricción. Los resultados obtenidos en los experimentos, donde se utilizó un martillo de impacto, fueron bastante aproximados con los obtenidos en el análisis por el MEF. El principal hallazgo de este trabajo fue que el deslizamiento por fricción en la interfaz entre la pieza y el elemento de sujeción producía una amortiguación en el sistema, que dependía de las fuerzas de contacto durante el proceso de apriete. Además detectaron que la relación de amortiguación tendía a incrementarse o reducirse, debido a la velocidad relativa de cambio en la interfaz de contacto. En el modelado dinámico también es merecedor de mención el trabajo de Liao y Hu [62], donde se presentó una técnica para modelar y analizar el sistema formado por el elemento de sujeción y la pieza sujeta a cargas de mecanizado variables, combinando las ventajas del FEM y del modelo dinámico no lineal de cuerpos rígidos. En este trabajo se analizaron como parámetros la estabi-

lidad de los elementos de sujeción, la magnitud, la posición y la secuencia de aplicación de las fuerzas de apriete. Los resultados alcanzados en el modelo teórico fueron validados satisfactoriamente mediante el desarrollo de ensayos experimentales.

Por otro lado, Huang y Hoshi [39] realizaron un estudio experimental y por elementos finitos de la deformación térmica producida en la sujeción de placas metálicas. Tanto en el estudio experimental como por el MEF comprobaron cómo disminuía el error de planitud de la pieza compensando el efecto térmico mediante la aplicación de fuerzas de apriete laterales.

El MEF plantea problemas, que no siempre se solucionan mediante un adecuado ajuste del tamaño de la malla, de la rigidez de contacto y del número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia. Además, el mallado por separado de la pieza y de los elementos de sujeción, y la utilización de elementos de contacto para conectar sus superficies, complica o retarda la consecución de la convergencia, a menos que se sacrifique la precisión de los resultados utilizando un mallado más grueso.

Métodos basados en el contacto elástico

Como se indicó anteriormente, la eficacia de los amarres dependerá en gran medida de su diseño y de la correcta elección de la magnitud de la fuerza de apriete necesaria para fijar la pieza a la mesa de trabajo. En los actuales procesos de mecanizado, debido a las exigencias de productividad, las fuerzas de corte y apriete requeridas son cada vez mayores y, por lo tanto, mayor es la probabilidad de que la geometría del elemento de sujeción o de apoyo ejerza una deformación elástica o plástica sobre la superficie de la pieza. En cambio, si la fuerza de apriete no es lo suficientemente alta, podrían aparecer errores geométricos debidos al deslizamiento o levantamiento de la pieza. Como consecuencia de ello, habrá que adoptar una solución de compromiso con el fin de satisfacer los requisitos de productividad, no daño e inmovilización.

En la formulación del problema del contacto entre pieza y elementos de sujeción, las fuerzas de contacto juegan un papel muy importante ya que aparecen como consecuencia de la aplicación de la fuerza de apriete. Por lo tanto, una adecuada elección de la fuerza de apriete, se traducirá en la aparición de fuerzas de contacto que den lugar al cumplimiento de los principios de mínima deformación en las regiones de contacto y de restricción total del desplazamiento de la pieza.

La formulación general para obtener la solución a problemas de contacto fue introducida por Conry y Seireg [16], donde se desarrolló un procedimiento de programación para el análisis y diseño de problemas de contacto entre cuerpos elásticos. Este análisis es no lineal y parte del desconocimiento inicial del área de contacto.

Hockenberger y De Meter [35] describieron un test que permitió predecir los desplazamientos de la pieza como consecuencia de la aplicación de las fuerzas de apriete y de corte durante el proceso de mecanizado. En este trabajo, realizaron una serie de ensayos experimentales para determinar el efecto de la configuración de los elementos de sujeción, la geometría de la región de contacto del elemento localizador y la intensidad de la fuerza de apriete en el desplazamiento de piezas estructuralmente rígidas durante el proceso de apriete y fresado. Los mismos autores [34], estudiaron el problema de contacto elástico entre pieza y elemento de sujeción mediante el uso de funciones semiempíricas llamadas metafunciones, constituidas según polinomios de 4º y 5º orden, con las que se calculaban las fuerzas de contacto normales con un alto grado de aproximación.

Gui *et al.* [30] trataron por primera vez tanto a la pieza como el elemento de sujeción como cuerpos deformables y, al mismo tiempo tuvieron en cuenta los efectos de fricción. Para ello utilizaron *muelles virtuales* para caracterizar la rigidez de contacto entre la pieza y los elementos de sujeción. De este modo, propusieron un modelo para obtener las fuerzas óptimas de apriete y para evaluar la precisión dimensional alcanzada por la configuración del sistema de amarre. El modelo también ofrecía un procedimiento para el ajuste de las fuerzas de apriete de forma que se adaptaran a la variación de las fuerzas de corte y las deformaciones por contacto de la pieza y los sistemas de amarre. Estas funciones agilizaron la obtención de las soluciones para un tipo de geometría determinada, ya que la resolución de un problema de contacto concreto resulta complicada si se lleva a cabo mediante el MEF u otro método numérico.

Yeh y Liou [94] utilizaron también el concepto de elementos de tipo *muelles virtuales* para modelar las condiciones de contacto entre pieza y sistemas de amarre usando el MEF. Los resultados obtenidos consistieron en la respuesta dinámica frecuencial del sistema de sujeción con múltiples componentes en contacto, teniendo muy buena aproximación con los resultados obtenidos en los ensayos experimentales. El modelo también presentó una modificación de la formulación presentada por Johnson [46], de modo que se tuviera en cuenta también el efecto del acabado superficial y la dureza

del material. Sin embargo, la aproximación por *muelles virtuales* presenta poca generalidad, ya que es efectiva cuando se conocen todos los parámetros geométricos y físicos del contacto. Por ello, sólo es aplicable a geometrías de contacto muy concretas.

Meyer y Liou [70] presentaron un método más robusto basado en técnicas de programación lineal que permitían determinar las posiciones óptimas de los elementos de localización, bajo condiciones de mecanizado dinámicas. Además tuvieron en cuenta, la configuración de la posición de las fuerzas de apriete, las fuerzas de reacción en los localizadores, el nivel de accesibilidad, la estabilidad de la pieza y la aplicación secuencial de fuerzas de apriete. Con este método se obtuvo una configuración óptima de las posiciones de los localizadores, donde las fuerzas de reacción alcanzaron valores mayores que cero.

Hurtado y Melkote [40] formularon un modelo capaz de predecir, con un buen grado de precisión, las fuerzas de reacción normal y de fricción entre elementos de sujeción rígidos y la pieza considerada como cuerpo elástico, aparecidas como consecuencia de las fuerzas de apriete. El modelo se basó en las soluciones de estabilidad total para un semiespacio elástico sujeto a cargas distribuidas normales y tangenciales. Sin embargo, los resultados no fueron precisos cuando se incluyó el efecto de las fuerzas de corte en el modelado.

En un trabajo posterior, Li y Melkote [57], desarrollaron un modelo para predecir las fuerzas de contacto, asumiendo el problema como cuasiestático, donde se supuso que los dos cuerpos eran linealmente elásticos y que la deformación en un contacto dado era pequeña e independiente de las fuerzas del resto de los contactos. El modelo presentó resultados muy poco precisos cuando se consideraron las fuerzas de corte cuasiestáticas. En otro trabajo [59], adaptaron el mismo modelo para la formulación de un problema no lineal de optimización de la distribución de los elementos de sujeción para la mejora en la precisión de posicionamiento. Hallada la distribución óptima del elemento de sujeción, se realizó un análisis del sistema por elementos finitos, donde los valores de deformación fueron menores y mejor distribuidos que los obtenidos en la configuración inicial no óptima. Los estudios anteriores proporcionaron el valor óptimo de la fuerza de apriete para un sistema de múltiples elementos, y son aplicables al caso donde el contacto se produce según puntos o líneas, con elementos de tipología esférica y cilíndrica, respectivamente. Sin embargo, Li y Melkote [56] ampliaron su estudio de mecánica del contacto al caso en el que se utilizaran elementos de sujeción del tipo de tornillo de banco, donde existían grandes áreas de contacto entre la mordaza

y la pieza. En este caso, aparece una restricción de momento o par de torsión, además de las fuerzas normales y tangenciales. Posteriormente Li y Melkote contribuyeron a ampliar el campo de aplicación de los métodos basados en el contacto elástico a casos donde se optimizara la fuerza de apriete [58], o a casos donde se consideraran los efectos dinámicos [60].

Hurtado y Melkote [43] modelaron y analizaron el efecto de la conformación local y global en la estabilidad estática del sistema de amarre, para lo que utilizaron un elemento de sujeción de tipo tornillo de banco con múltiples pines. Los resultados medidos en los ensayos experimentales se ajustaron en alto grado a los estimados mediante el modelo desarrollado.

Wang *et al.* [91] desarrollaron un sistema inteligente de sujeción utilizando simulaciones off-line, verificándolo a su vez con los resultados obtenidos on-line, para ajustar adaptativamente las fuerzas de apriete y alcanzar la mínima deformación en la pieza, de acuerdo a la trayectoria de la herramienta de corte y las fuerzas de corte.

Wang *et al.* [89] comprobaron que los trabajos de investigación basados en el contacto elástico no tenían en cuenta la geometría del elemento localizador (forma y tamaño) en el análisis no lineal, ya que se complicaba mucho el análisis y diseño del sistema de amarre. Para solucionar este problema, desarrollaron un modelo para el análisis cinemático, basado en la cinemática total del contacto entre pieza y sujeción, donde se tuvieran en cuenta las propiedades superficiales del elemento de sujeción y de la pieza. En otro trabajo, Wang y Pelinescu [88] desarrollaron un método de análisis sencillo y computacionalmente eficiente, basado en el principio de norma mínima bajo condiciones de equilibrio de fuerzas, para predecir las fuerzas de contacto considerando a la pieza y el sistema de amarre como rígidos. El modelo reveló la existencia de propiedades complejas para las fuerzas de contacto pasivas, incluido el potencial en la liberación del elemento localizador y la dependencia del historial de estados durante la aplicación de una secuencia de cargas de apriete o fuerzas externas. Además, al no considerar elástica a la pieza y no estudiar casos de sistemas hiperestáticos, el modelo se limitó a resolver casos muy sencillos.

De Meter *et al.* [19] iniciaron recientemente una nueva línea de investigación dentro del análisis de los elementos de sujeción, en la que se estudiaron las precargas de apriete mínimas mediante el desarrollo de un modelo lineal. En dicho modelo lineal se consideró la elasticidad en el sistema de amarre y la pieza, y la fricción en su interfaz. El modelo calculó las precargas mínimas requeridas para que no se violaran los requisitos de fricción de Coulomb

en cada punto de acoplamiento. La precisión del modelo se evaluó mediante comparación con resultados experimentales, revelándose que los términos de la matriz de rigidez de contacto eran muy sensibles a los cambios introducidos en las precargas.

En uno de los últimos trabajos publicados sobre elementos de sujeción, Kaya y Öztürk [47] detectaron carencias significativas en los trabajos basados en el análisis de tolerancias, movimiento de cuerpo rígido, contacto elástico y elementos finitos. De este modo, consideraron la falta de un método integrado donde se tuviera en cuenta la reposición de la viruta en el mecanizado, el diseño basado en las características de la pieza, las condiciones de contacto con fricción y la variación de las fuerzas de corte. Para solucionar estas deficiencias presentaron un método que aproxima más los resultados a los reales mediante la utilización del MEF.

Los trabajos anteriores presentan planteamientos muy interesantes para abordar el estudio local del contacto pieza-sujeción, tales como, como el uso de metafunciones [34] o la combinación del estudio local con el estructural [43]. Por otro lado, la mayoría de los trabajos están muy centrados en el estudio del contacto bajo condiciones dinámicas y de fricción, que al mismo tiempo de restar generalidad, obvian otras consideraciones importantes. Además, el fenómeno de fricción no aporta mejoras significativas en los resultados obtenidos, ya que el margen de seguridad antideslizamiento utilizado disminuye considerablemente su influencia en los resultados. Por otro lado, no se han encontrado trabajos donde se estudie la variación de la geometría de contacto con el objeto de optimizar el diseño de los elementos de sujeción (cilíndricos y esféricos), sin que ello suponga una disminución de la resistencia al daño superficial de la superficie de la pieza. Aunque este problema se puede abordar mediante la utilización del MEF, su complejidad matemática conllevaría un alto coste computacional. Por esta razón, es necesario desarrollar métodos alternativos de mayor eficiencia computacional, que permitan analizar una mayor variedad de geometrías de contacto.

1.2.2. Métodos de optimización

Los métodos de optimización de los elementos de sujeción consisten en la determinación de un número reducido de variables, que al mismo tiempo que satisfagan las restricciones de diseño, den lugar a la mejor configuración posible del sistema de amarre, con el objetivo final de simplificar el proceso de diseño y reducir los cálculos. Los principales métodos de optimización se

clasifican según sea analíticos o estén basados en algoritmos genéticos.

Métodos analíticos

Los métodos de optimización basados en modelos analíticos sólo utilizan un reducido número de variables de diseño. Entre otros, cabe citar los trabajos de Rong y Bay [75], que desarrollaron un gráfico relacional para el montaje de elementos de sujeción modulares; el de Tao *et al.* [80], donde presentaron una método eficiente para determinar los puntos de aplicación de la carga de apriete y su secuencia; y el de Hurtado y Melkote [41], donde investigaron el número óptimo de pines activos, su posición y longitud para conformar la geometría de la pieza y limitar la deformación elástica a un valor especificado por el usuario.

Por otro lado, muchos de los trabajos que se habían basado en métodos de análisis, también han empleado técnicas de optimización, bien de la distribución de los elementos de localización, de los elementos de apriete o bien de la intensidad de la fuerza de apriete.

Dentro de los basados en el movimiento de cuerpo rígido, cabe citar, entre otros, el trabajo de Chou *et al.* [13], donde se pudieron determinar automáticamente las posiciones de los elementos de localización y de los elementos de apriete, así como las fuerzas de apriete, mediante la formulación de un problema de optimización en el que se utilizaron técnicas de programación lineal. Jeng *et al.* [45] presentaron varias distribuciones de los elementos de sujeción con selección de áreas de apriete y se derivaron sus condiciones de estabilidad de forma independiente, con el fin de determinar las fuerzas de apriete mínimas mediante un algoritmo de optimización. Sin embargo este método carecía de eficiencia computacional debido al alto número de iteraciones necesarias para obtener convergencia en las soluciones. Tao *et al.* [81], llevaron a cabo la solución del análisis basado en movimiento de cuerpo rígido mediante la formulación de un problema no lineal que fue resuelto mediante la técnica PCS. De Meter [18] presentó un algoritmo basado en un modelo de carga mínima y máxima para el cálculo de la configuración óptima de los elementos de localización y apriete, y de las fuerzas de apriete, considerando a la pieza como un sólido rígido sometido al efecto de fricción.

Entre los métodos de optimización que han utilizado técnicas de programación no lineal en conjunción con el MEF, cabe destacar el de Lee y Haynes [54]; y el de Menassa y DeVries [69], donde formularon una función objetivo que era evaluada introduciendo las deformaciones calculadas mediante el

MEF, y plantearon un problema de programación no lineal, donde obtuvieron las posiciones de los soportes y elementos localizadores en el esquema de sujeción 3-2-1. Rearick *et al.* [73] utilizaron un algoritmo de PCS en conjunción con el MEF y una técnica de cálculo de la función de coste, que permitió evaluar la consideración de un mayor número de soportes para el análisis de la sujeción de piezas de chapa metálica. Por otro lado, De Meter [17] propuso un algoritmo más eficiente utilizando una nueva técnica conocida como optimización rápida de la distribución de apoyos (FSLO). Cai *et al.* [6] estudiaron el problema de sujeción de piezas de chapa metálica aportando soluciones a los problemas encontrados por Rearick *et al.* [73]; y Liao y Hu [61] estudiaron la interacción entre la pieza y el elemento de sujeción en la optimización de la distribución de los elementos de sujeción, mediante parejas de elementos de contacto en la superficie. También utilizando ambas técnicas, MEF y programación no lineal, Fang *et al.* [26, 27] estudiaron los efectos dinámicos en los elementos de sujeción; y Liao y Hu [62] incluyeron el efecto de las cargas de mecanizado variables.

Dentro de los trabajos de investigación basados en métodos de contacto elástico, que utilizan también técnicas de optimización, destacan el de Gui *et al.* [30], donde obtuvieron las fuerzas óptimas de apriete para evaluar la precisión dimensional alcanzada por la configuración del sistema de amarre. Meyer y Liou [70] presentaron un método más robusto basado en técnicas de programación lineal que permitía determinar las posiciones óptimas de los elementos de localización, bajo condiciones de mecanizado dinámicas, y la configuración de la posición de las fuerzas de apriete. Hurtado y Melkote [40] formularon un modelo capaz de predecir, con un buen grado de precisión, las fuerzas de reacción normal y de fricción entre elementos de sujeción rígidos y la pieza considerada como cuerpo elástico, aparecidas como consecuencia de las fuerzas de apriete. En otro trabajo, Li y Melkote [59], adaptaron el mismo modelo para la formulación de un problema no lineal de optimización de la distribución de los elementos de sujeción para la mejora en la precisión de posicionamiento. Posteriormente, ampliaron el campo de aplicación de los métodos basados en el contacto elástico a casos donde se optimizara la fuerza de apriete [58], o a casos donde se consideraran los efectos dinámicos [60].

Algoritmos genéticos

La mayoría de los métodos de análisis y optimización existentes para el estudio de los sistemas de sujeción utilizan métodos de programación no lineal que no suelen dar soluciones óptimas globales y, donde la función objetivo

y las variables de diseño no se relacionan directamente. Por otro lado, las soluciones dadas por estos modelos son muy sensibles a la distribución inicial de los elementos de sujeción. Además no se tiene en cuenta toda la trayectoria de la herramienta durante el proceso de optimización. Estos inconvenientes se pueden resolver por medio del uso de algoritmos genéticos.

Entre otros, se destacan los trabajos de Wu y Chan [93], en el que se desarrolló un algoritmo genético para obtener la configuración del sistema de sujeción más estable, donde se consideró a la pieza como sólido rígido; y el de Lee *et al.* [55], donde se aplicó un algoritmo genético para la elección rápida de los espacios de trabajo en la bancada de un proceso de estampado.

Kulankara y Melkote [50] optimizaron la distribución de los elementos de sujeción minimizando la deformación de la superficie mecanizada de la pieza en toda la trayectoria de mecanizado. En un trabajo posterior, Kulankara *et al.* [51] tuvieron en cuenta la integración de la fuerza de apriete y la distribución de los elementos de sujeción en el mismo algoritmo genético.

Otros trabajos importantes que se han basado en los algoritmos genéticos son los de Vallapuzha *et al.* [84, 83], donde se compararon los métodos de optimización por algoritmos genéticos discreto y continuo con los de programación no lineal continua y discreta. En este estudio, las mejores soluciones se alcanzaron en el método de algoritmo genético continuo. También propusieron la utilización de coordenadas espaciales para definir las posiciones de los elementos de sujeción en lugar de los nodos, que fueron utilizados en el MEF. Además, introdujeron nuevos conceptos como codificación, incremento de mutaciones y compartición, que dieron lugar a la mejora de la precisión de los resultados.

1.3. Objetivos de la tesis

Como se puede observar en la amplia bibliografía existente sobre el análisis de los sistemas de sujeción, aparecen aportaciones muy interesantes, sin embargo se han encontrado algunas deficiencias, que se consideran como puntos de partida para la definición de los objetivos de la presente tesis doctoral. A continuación se enumeran estas deficiencias junto con los objetivos planteados:

1. En los estudios llevados a cabo en el análisis de tolerancias, se echan en falta métodos que estimen de forma explícita cómo influyen variables de diseño, tales como la precisión de los elementos de sujeción y de la

preforma, en las dimensiones finales de fabricación, así como en la incertidumbre asociada a dichas dimensiones. Por esta razón, se establece como objetivo el cálculo de las cotas de fabricación y sus incertidumbres asociadas mediante un método de análisis, que se desarrolla a partir de la precisión de los utillajes de sujeción y de la preforma de la pieza, estimando la influencia de cada parámetro en la calidad dimensional final de los componentes mecanizados.

2. Los métodos basados en el movimiento de sólido rígido están limitados, ya que presentan un problema de amarre estáticamente indeterminado cuando se conocen más de seis puntos de localización, ya que en estos sistemas no existe una solución única para los desplazamientos de la pieza. Además, consideran a la pieza como un sólido rígido, obviando la posibilidad de aparición de deformación elástica o plástica. Debido a que los métodos desarrollados para sistemas N-2-1 son iterativos, de alto coste computacional y de difícil convergencia; se plantea como objetivo en esta tesis, el cálculo de la deformación estructural sufrida por la pieza y los elementos de sujeción mediante un método directo y preciso. Esta herramienta de análisis permitirá abordar otro objetivo, que consistirá en la definición de zonas válidas de aplicación de fuerzas de apriete sin que se produzca deslizamiento ni daño por indentación en la pieza. La acotación de estas zonas será imprescindible si se quiere ir más allá del puro análisis, de modo que se lleguen incluso a optimizar las variables del sistema de amarre.
3. Los métodos basados en el MEF dan lugar a problemas de convergencia por las discontinuidades en la generación del mallado y la utilización de elementos de contacto. Además, la mayoría de ellos utilizan herramientas de optimización no lineales para minimizar la función objetivo, que requieren de continuas iteraciones y remallados del modelo de elementos finitos, con lo que se incrementa desmesuradamente el coste computacional. Consecuentemente, el siguiente objetivo consistirá en desarrollar métodos de análisis, que asumiendo ciertas simplificaciones, resuelvan el problema de contacto de una forma más directa, sencilla y rápida, con la suficiente precisión en los resultados e interpretación más intuitiva de los mismos.
4. La mayoría de los métodos basados en el contacto elástico formulan un problema de programación no lineal complejo, que en ocasiones encuentra dificultades en la consecución de la convergencia. Para solucionar

estos problemas suelen centrar el estudio en geometrías convencionales (esférica y cilíndrica) del elemento de sujeción, en detrimento del estudio de múltiples posibilidades de mejora del diseño. Aunque el MEF resuelve cualquier geometría de contacto, presenta los problemas descritos en el problema anterior. Además los continuos rediseños de las sujeciones obliga a tener que analizar el problema una y otra vez por el MEF, incrementándose el coste computacional. Por lo tanto, se propone como objetivo, el desarrollo de un método más sencillo y directo para el estudio de geometrías de contacto diferentes de las convencionales, con el fin de reducir las tensiones subsuperficiales y la deformación local. El método se basará en las ecuaciones fundamentales del contacto mecánico en el semiespacio elástico; y además permitirá establecer una formulación general para la distribución de presiones y para las tensiones subsuperficiales en forma de correlaciones sencillas, que estén expresadas en función de parámetros de diseño de los sistemas de sujeción, como por ejemplo el rectificado de las superficies de contacto.

5. La mayoría de sistemas CAFD están basados en datos geométricos de la pieza y de los elementos de fijación, y no tienen en cuenta otros, como las tolerancias o la deformación de la pieza producida durante el proceso de apriete y mecanizado. Además, no se han resuelto los problemas de cuello de botella existentes en la integración de los sistemas CAD, CAM y CAPP durante el diseño de los sistemas de sujeción. Por esta razón, se propone en la presente tesis la interrelación del análisis de la precisión de los elementos de sujeción, el análisis de deformaciones estructurales y el análisis local del contacto para ofrecer una herramienta más robusta. De esta forma, se podrá disponer de una base sólida para abordar la fase de optimización del proceso de diseño del sistema de sujeción.
6. La mayoría de los métodos de análisis u optimización presentan alternativas para mejorar el diseño de los sistemas de sujeción, sin embargo existen errores imposibles de eliminar por completo, como por ejemplo, las imprecisiones de los elementos de sujeción y de la preforma de la pieza. Por lo tanto, se establece como objetivo final el enlace de las anteriores herramientas de análisis mediante un procedimiento de integración que además lleve a cabo la compensación de dichos errores.

El objetivo global de La presente tesis doctoral es desarrollar un conjunto de métodos de análisis de los sistemas de sujeción (método de análisis de la precisión dimensional, método de análisis del reparto de cargas y método de

análisis local del contacto), y un procedimiento de integración de los mismos basado en la implantación de una base de datos relacional, capaz de servir de nexo de unión entre el diseño y la fabricación.

Capítulo 2

Método de análisis de la precisión dimensional de los sistemas de sujeción

La principal función de los elementos de sujeción en un proceso de mecanizado es la de posicionar la pieza sobre la bancada de la máquina-herramienta. Como consecuencia de ello, éstos pueden influir significativamente en la calidad dimensional de las cotas críticas de la pieza mecanizada. En este capítulo, se describe un método para la estimación de la cota y la incertidumbre de fabricación en la fabricación de componentes, como una función de las dimensiones e incertidumbres de los sistemas de amarre. El método que se desarrolla está basado en el análisis metrológico de los elementos de sujeción y de la pieza, con el fin de estimar el valor medio real de las cotas y su incertidumbre, y así poder compensar las desviaciones y minimizar su varianza.

2.1. Precisión en los procesos de mecanizado

El diseño de los sistemas de sujeción y su disposición sobre la bancada de la máquina-herramienta deben asegurar que todas las piezas que se

mecanicen en el mismo lote, estén localizadas en la misma posición durante toda la fase del proceso de mecanizado. El proceso de amarre de piezas en máquinas-herramienta se realiza en dos subprocesos, localización y apriete, de modo que en una sola disposición o amarre se puedan llevar a cabo una o más operaciones de mecanizado que den lugar a superficies que cumplan con las especificaciones de dimensión, forma, posición y orientación. En el subproceso de localización se posiciona un conjunto de superficies de la pieza, llamadas superficies de referencia sobre la bancada de la máquina-herramienta, a través de los elementos localizadores o de apoyo (P1-P6 en la Figura 2.1). En el subproceso de apriete se asegura que no se produzca separación o deslizamiento de las superficies de referencia de la pieza sobre los elementos localizadores, durante todo el proceso de mecanizado (A1-A3 en la Figura 2.1).

Figura 2.1: Esquema típico de sujeción 3-2-1 de una pieza prismática.

La trayectoria de la herramienta de corte generará las nuevas superficies, que deberán cumplir con las cotas especificadas en los planos de diseño, que habitualmente están relacionadas con las superficies de referencia. Por ello, la precisión alcanzada en el proceso de mecanizado dependerá de la

posición relativa de la pieza en la máquina-herramienta, que a su vez, estará determinada por la posición que posean los elementos localizadores.

Con el fin de asegurar el alcance de altas precisiones en el mecanizado, conviene que las piezas queden fijadas en la máquina-herramienta de la forma más precisa posible, cumpliendo, por lo tanto, el conocido principio de isostaticidad. De este modo, se eliminarán las causas de indeterminación mediante una mejor corrección de los errores sistemáticos, además de disminuirse los errores aleatorios.

Según el principio de isostaticidad, un objeto en el espacio debe tener todos o parte de sus seis grados de libertad restringidos (los tres movimientos lineales, Δx , Δy y Δz , y los tres movimientos rotacionales α_x , α_y y α_z), mediante el menor número posible de elementos de restricción de movimiento, evitando su sobrelocalización y las holguras. En el proceso de amarre de piezas prismáticas en máquinas-herramienta, uno de los métodos más utilizados es el conocido como 3-2-1. Según este método, es necesario que la pieza esté limitada por seis puntos independientes, como se representa en la Figura 2.2. Los tres puntos situados en contacto con la superficie inferior restringen tres grados de libertad (Δz , α_x y α_y), los dos puntos de la superficie lateral izquierda restringen dos grados de libertad (Δx y α_z), por último, el punto en la superficie posterior restringe el último grado de libertad (Δy).

Figura 2.2: Restricción de grados de libertad en piezas prismáticas.

Antes de estudiar la precisión dimensional es necesario establecer los siguientes conceptos:

- Las *superficies de referencia* de la pieza son superficies utilizadas como referencia de las que van a ser mecanizadas de acuerdo con las

dimensiones especificadas en los planos de diseño.

- Los *puntos de localización* son puntos pertenecientes a los elementos de localización sobre los que se posiciona y localiza la pieza, restringiendo los seis grados de libertad de movimiento anteriormente mencionados. Para asegurar un correcto proceso de amarre, estos puntos deben permanecer siempre en contacto con las superficies de referencia.
- El *sistema de coordenadas de la máquina-herramienta* (SCMH) es el sistema de coordenadas con respecto al que se programan los movimientos de la herramienta de corte en la máquina-herramienta de control numérico (MHCN).
- El *sistema de coordenadas intrínseco de la pieza* (SCIP) es el sistema de coordenadas local definido por las superficies de referencia de la pieza. Como las superficies de referencia suelen ser irregulares, este sistema de referencia se define a partir de las superficies medias ideales. Además, las mediciones llevadas a cabo en un control de calidad deberán tener como referencia este sistema de coordenadas.
- El *sistema de coordenadas de los elementos de sujeción* (SCES) es el sistema de coordenadas que define la posición de los elementos de sujeción una vez que se haya realizado su montaje sobre la mesa de trabajo de la máquina-herramienta.

Para evaluar la precisión en el mecanizado, es necesario determinar las incertidumbres de las distintas fuentes de error que aparecen durante las operaciones de corte. Las principales fuentes de error pueden clasificarse según se trate de errores inducidos por la máquina-herramienta y la herramienta de corte; o de errores provocados por la imprecisión de los elementos de sujeción y de la pieza. En el primer grupo, estas fuentes de error se pueden clasificar en errores geométricos y dinámicos de la máquina-herramienta, desgaste de la herramienta, errores provocados por el calor generado en el proceso de corte, etc. En el segundo grupo, las fuentes de error dependen de la precisión dimensional del utillaje de sujeción, y de la dimensión y forma de la superficie utilizada como referencia en la pieza. En la Figura 2.3 se puede observar que los elementos localizadores poseen una desviación Δz asociada, que puede producir un cambio en la posición del SCES con respecto al SCMH, debido a que las superficies de referencia de la pieza se apoyan sobre los elementos localizadores y por lo tanto, provocan una variación en la posición del

SCIP, a la que se le puede denominar error de prerreglaje. En cuanto a las imperfecciones de la superficie de referencia de la pieza, también dan lugar a una variación de la posición del SCIP con respecto al SCMH, conocida como error de referencia, como se puede observar en la Figura 2.4.

Si se tiene en cuenta otra distinción, en esta ocasión, entre errores determinísticos y aleatorios, los primeros se deben a errores que son conocidos, y cuya propagación se lleva a cabo mediante expresiones matemáticas que establecen la relación entre las dimensiones finales medidas sobre la pieza y las dimensiones inicialmente especificadas. Estos errores pueden introducirse como compensación de error dentro del programa de control numérico de la máquina-herramienta [72]. Los errores aleatorios se originan por factores desconocidos sobre los que no se tiene control, pudiendo ser cuantificados mediante una incertidumbre con su nivel de confianza asociado. La incertidumbre de fabricación es la incertidumbre asociada a las cotas críticas de la pieza mecanizada, que depende de la variabilidad de las dimensiones de los elementos que influyen en su posicionamiento sobre la bancada de la máquina-herramienta. Conocidas las incertidumbres de fabricación relativas a cada diseño o configuración de los elementos de sujeción, pertenecientes a un conjunto de candidatos, se escogerá aquel que presente el menor valor posible. Sin embargo, la incertidumbre de fabricación no se puede considerar un error determinístico, sino un error aleatorio, y por lo tanto, no puede ser corregido mediante compensación de error.

Concretamente, en este capítulo se va a establecer un método para relacionar la precisión dimensional de los elementos de sujeción y de la pieza con las desviaciones e incertidumbres de fabricación correspondientes. Con el fin de dotar de generalidad al método, no se tendrán en cuenta ni la precisión de la máquina-herramienta, ni la habilidad del operario.

2.1.1. Posicionamiento real de las superficies de referencia. Determinación del SCES y del SCIP

En los planos de diseño, las superficies mecanizadas están definidas a partir de las de referencia. En una máquina-herramienta ideal, la fuente de error procede de los elementos de sujeción, de su montaje y de la localización del SCIP. El SCIP se define a partir de las superficies de referencia, con su origen coincidente con un punto característico y sus ejes paralelos o perpendiculares a las superficies de referencia. Las imprecisiones del utillaje de amarre, ya sea por error posicional o dimensional, influyen en la variación del posiciona-

Figura 2.3: Error por imprecisión dimensional del utillaje de sujeción o error de prerreglaje

Figura 2.4: Errores por imperfecciones en la pieza o error de referencia.

miento de los puntos de localización, y por consiguiente, en la variación de la posición del SCES (error de prerreglaje). Por otro lado, también variará la posición del SCIP con respecto a la ideal, ya que los puntos que lo definen pertenecen a las superficies irregulares de la preforma (error de referencia). Por ejemplo, en una pieza prismática que va a ser fijada usando el método 3-2-1 (ver Figura 2.3), el SCES se establece mediante un plano, una alineación y un tope. El plano se define mediante los tres puntos de contacto existentes entre los elementos localizadores del sistema de amarre y la superficie

de referencia de la pieza. Este plano establecerá la dirección del eje $O'Z'$ y su origen. La alineación viene determinada por medio de dos puntos, que indican la dirección del eje $O'Y'$, este último eje combinado con la dirección del eje $O'Z'$ definen la dirección del eje $O'X'$. Las superficies de referencia definidas mediante un plano, una alineación y un tope, establecen finalmente la posición del origen del SCES real, y por lo tanto el sistema de coordenadas queda completamente determinado. Una vez establecido el SCES real, se le han de añadir los efectos de las irregularidades de la superficie de referencia para obtener una estimación del SCIP. El efecto de los errores de los puntos de localización en la desviación del SCIP puede resumirse en:

- Tope: El error aparece como consecuencia del desplazamiento en cualquiera de las tres direcciones del SCIP, que son Δx , Δy y Δz .
- Alineación: Puede existir un error de desplazamiento de los dos puntos en la dirección de los ejes del SCIP, y un error geométrico de alineación α_z .
- Plano de apoyo: Además del desplazamiento de los tres puntos que definen el plano, puede aparecer un error de paralelismo debido a la rotación del vector director del plano, que se define mediante los cosenos directores de los ángulos α_x y α_y .

2.1.2. Posicionamiento del SCIP en el SCMH

Como se ha descrito en el apartado anterior, cualquier error de posición de los puntos de localización, ya sea por la imprecisión del utillaje o de la superficie de referencia, modifica la posición del SCIP con respecto al SCMH. Esta variación dará lugar a que las cotas de los puntos de las superficies mecanizadas por el filo de la herramienta no se correspondan con las ideales o especificadas en los planos de diseño. Por lo tanto, la nueva posición de las cotas de la superficie mecanizada dependerá de la variación de la posición espacial del SCIP, debido tanto a rotaciones como a traslaciones de su origen, de acuerdo con los principios de la cinemática de un cuerpo rígido. Conocida la nueva posición de las cotas de las superficies mecanizadas, se pueden determinar tanto los errores dimensionales como los de forma del componente.

Si el SCIP rota un ángulo α_x con respecto al SCMH, cualquier punto de la superficie de la pieza deberá poseer unas nuevas coordenadas x' , y' y z' , de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & \sen \alpha_x \\ 0 & -\sen \alpha_x & \cos \alpha_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Si además se aplican las rotaciones respecto a los ejes Y (α_y) y Z (α_z), sucesivamente, la relación entre las coordenadas de los puntos finales y las de los puntos iniciales queda expresada de la manera siguiente:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{R}$ es la matriz de rotación del sistema, que se puede expresar del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_z \cos \alpha_y & \sen \alpha_z \cos \alpha_x - \cos \alpha_y \sen \alpha_y \sen \alpha_x & \cos \alpha_z \sen \alpha_y \cos \alpha_x + \sen \alpha_z \sen \alpha_x \\ -\sen \alpha_z \cos \alpha_y & \sen \alpha_z \sen \alpha_y \sen \alpha_x + \cos \alpha_z \cos \alpha_x & \cos \alpha_z \sen \alpha_x - \sen \alpha_z \sen \alpha_y \cos \alpha_x \\ -\sen \alpha_y & -\cos \alpha_y \sen \alpha_x & \cos \alpha_y \cos \alpha_x \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Si el valor correspondiente a los ángulos es muy pequeño, los términos cuadráticos de la función seno se pueden eliminar, los senos se pueden aproximar según el valor de los ángulos, y las funciones coseno se pueden simplificar a la unidad. Además, considerando los desplazamientos, Δx , Δy y Δz , la variación de las coordenadas espaciales de un punto de la pieza se puede expresar del siguiente modo:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_z & \alpha_y \\ -\alpha_z & 1 & \alpha_x \\ -\alpha_y & -\alpha_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

2.1.3. Valor esperado de la cota de fabricación

La cota de fabricación representada en los planos se puede relacionar con la distancia existente entre dos puntos, un punto y un plano, un punto y una línea, o entre una línea y un plano. En una representación bidimensional, utilizada en los planos de producción, las superficies de referencia y mecanizada se proyectan según líneas. Si en estas líneas se definen los puntos necesarios para el control de calidad, A y B en la proyección de la superficie de referencia y, 1 y 2 en la proyección de la superficie mecanizada (Figura 2.5); la

distancia d existente entre los puntos de la superficie mecanizada y la de referencia, representa la cota de fabricación que debe ser controlada. Los puntos A y B se posicionan de acuerdo con el sistema de referencia definido por el utillaje de sujeción SCES. Al considerar que la máquina-herramienta mecaniza siguiendo trayectorias perfectamente lineales, la distancia resultante d desde la superficie mecanizada hasta la superficie de referencia varía entre d_{1A} (distancia entre los puntos 1 y A) y d_{2B} (distancia entre los puntos 2 y B).

Figura 2.5: Distancia entre la superficie mecanizada y la de referencia.

Las dimensiones $d_A = z_1 - z_A$ y $d_B = z_2 - z_B$ están definidas en el SCES, donde z_1 y z_2 son las coordenadas de los puntos de referencia 1 y 2, respectivamente. La dimensión resultante puede estimarse, por lo tanto, como el valor medio de las dimensiones d_A y d_B :

$$d_{med} = \frac{d_A + d_B}{2} \quad (2.5)$$

Este valor medio d_{med} se puede considerar como una estimación de la cota de fabricación medida en un proceso de control de calidad. Como la diferencia entre la cota d_{med} y el valor real medido es un error determinístico, puede corregirse mediante la técnica de compensación de error. El hecho de tener en cuenta solamente los puntos inicial y final, se debe a que la máquina-herramienta realiza movimientos paralelos a los ejes.

2.1.4. Estimación de la incertidumbre esperada de fabricación

La obtención de la incertidumbre estimada de fabricación se deberá llevar a cabo mediante el cálculo de la varianza. La varianza deberá determinarse mediante la utilización de la ley de propagación de varianzas (LPV). De este modo, es posible estimar el intervalo de confianza para un determinado nivel de confianza. La LPV se puede definir de la siguiente manera [44]:

$$u_{\alpha}^2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial l} \right)^2 u_l^2 + \dots + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m} \right)^2 u_m^2 \quad (2.6)$$

donde $u_l, \dots, u_m$ son las desviaciones estándar de las dimensiones de los elementos de sujeción y los defectos de forma de las superficies de referencia de la pieza, siempre que todas estas variables sean independientes entre sí. La aplicación de la LPV posee, entre otras, las siguientes ventajas:

1. Considera la influencia de cada parámetro en el error total por medio del análisis de cada uno de los términos de la ecuación (2.6).
2. Resulta de utilidad a la hora de plantear estrategias que conduzcan a que las cotas de fabricación se encuentren dentro de los límites de tolerancia establecidos.

Esta ley ha sido aplicada para calcular el valor de cota estimado $d_{med} = \frac{d_A + d_B}{2}$, aunque en realidad este valor no representa toda la superficie, sino el punto medio entre los puntos A y B. Como se indicó en el apartado anterior, la máquina-herramienta mecaniza siguiendo trayectorias perfectamente lineales, por lo que la desviación de la superficie mecanizada respecto a la superficie media ideal d_{des} se cuantifica a partir de las cotas de los puntos característicos A y B:

$$d_{des} = \frac{|d_A - d_B|}{2} \quad (2.7)$$

La incertidumbre esperada de la cota de fabricación se puede calcular del siguiente modo:

$$U_d = K \sqrt{u_{dmed}^2 + u_{ddes}^2} \quad (2.8)$$

donde K es el factor de incertidumbre, que puede tomar como valor 2 o 3 según el nivel de confianza requerido.

2.2. Método de análisis de la precisión dimensional

El método desarrollado para el análisis metrológico de los elementos de sujeción trata de analizar la posición real de las superficies de referencia de la pieza sobre la mesa de trabajo, asumiendo que la máquina-herramienta no aporta ningún otro error. Aunque esto último no es del todo cierto, permite centrar el estudio únicamente en los errores debidos a los elementos conocidos. En este método, el principio de isostaticidad se aplica para obtener las cotas de los puntos de localización, y a partir de la orientación y localización descrita por ellos, se calcula el valor esperado de la cota de fabricación. Entonces, se determina el valor de su incertidumbre esperada a partir del cálculo de la varianza, cuyo valor se obtiene utilizando la LPV (ver Figura 2.6). Finalmente, la incertidumbre se considera como una desviación de las medidas realizadas sobre las cotas críticas de la pieza terminada, con respecto a las especificadas en los planos de diseño. Más concretamente, el método desarrollado consiste en la secuencia de pasos que se describe a continuación:

1. Determinación de la posición de los puntos de localización y de sus incertidumbres asociadas.
2. Determinación del SCES a partir de los puntos de localización.
3. Determinación del SCIP con respecto a las superficies de referencia de la pieza.
4. Localización del SCIP en el SCMH, una vez que la posición de la superficie de referencia ha sido determinada a partir de la posición de los puntos de localización, y del SCES.
5. Estimación de la posición de las superficies mecanizadas. Las cotas de fabricación de las superficies mecanizadas deben ser transferidas al SCIP con el propósito de comparar el resultado de la medida con el desplazamiento inicialmente programado en el lenguaje de la MHCN.
6. Estimación de la incertidumbre de fabricación.

Figura 2.6: Esquema del método de análisis de la precisión dimensional.

Los valores determinados mediante la aplicación de este método, proveen una estimación de las dimensiones e incertidumbres obtenidas en un proceso de control de calidad de las superficies mecanizadas. Como resultado, se puede considerar con un buen grado de probabilidad, si la pieza puede ser aceptada o no. De cualquier modo, puede utilizarse para comparar las distintas posibilidades que se tienen para fijar la pieza a la máquina-herramienta.

2.3. Ejemplos ilustrativos

A continuación, con el propósito de ilustrar la utilidad del método planteado, se describen dos ejemplos de amarre de piezas para su mecanizado en sendos procesos de fresado. En el primer ejemplo se estudia el paralelismo de una superficie plana que debe ser mecanizada en un proceso de planeado, donde la superficie de referencia presenta modificada su posición debido a un error de prerreglaje con una incertidumbre asociada. En el segundo ejemplo, correspondiente al mecanizado de un chavetero en un proceso de fresado, la cota crítica a controlar es el valor de la profundidad del chavetero, que se modifica debido a la diferencia de alturas entre los vértices de dos bloques en V.

2.3.1. Paralelismo de una superficie plana

En el presente ejemplo, se calcula la inclinación de una superficie mecanizada debido a la influencia de la imprecisión de los elementos localizadores. Como se observa en la Figura 2.7 el proceso de mecanizado consiste en un planeado de una superficie de la pieza paralela a la superficie de referencia, que es la que apoya sobre tres elementos localizadores. Los elementos localizadores poseen una dimensión nominal con una incertidumbre asociada, de este modo, sus dimensiones según el eje Z son, $z_a = 9,81$, $z_b = 10,22$ y $z_c = 10,18$ mm, respectivamente, para cada una de las posiciones de apoyo A, B y C. Y su incertidumbre asociada en cada uno de los casos de $u_z = 0,05$ mm. Los tres elementos localizadores se distribuyen según un triángulo equilátero de lado $L = 50$ mm, y una incertidumbre asociada en el posicionamiento $u_L = 1$ mm (que no influye en la variabilidad del ángulo de 60° formado por los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$). Se considera que la máquina-herramienta no posee errores geométricos ni de posicionamiento, y que la preforma no posee ningún error de forma.

Para la resolución del problema, es necesario conocer el ángulo que forma-

Figura 2.7: Pieza situada sobre tres elementos localizadores o de apoyo.

rá la superficie de referencia α con respecto al plano horizontal de bancada de la máquina-herramienta, que como se ha indicado anteriormente no presenta errores ni de forma, orientación o posicionamiento. Para ello, se determinará el vector director del plano definido por los tres puntos de contacto entre la superficie de referencia y los elementos localizadores. El error de planitud de la superficie que se vaya a mecanizar vendrá dado por el ángulo que forme el vector director del plano de referencia y el eje OZ del SCMH. A continuación, se calculará la incertidumbre asociada al error de planitud mediante la LPV.

En primer lugar, se parte de los vectores de posición de los elementos localizadores:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \{0, 0, z_a\} \\ \overrightarrow{OB} &= \{L \cos(60^\circ), L \sin(60^\circ), z_b\} \\ \overrightarrow{OC} &= \{L, 0, z_c\}\end{aligned}\tag{2.9}$$

El vector director del plano de referencia $\vec{V}$, se puede calcular mediante el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\
\overrightarrow{V} &= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

El ángulo formado por el plano de referencia, donde se apoya la pieza sobre los tres elementos localizadores, se puede estimar mediante el arco coseno del producto escalar entre los vectores normalizados, $\overrightarrow{V}$ y $\overrightarrow{OZ}$, dividido por el módulo de ambos:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{-L \sin 60^\circ}{\sqrt{((-z_a + z_b) - (-z_a + z_c) \cos 60^\circ)^2 + (L \sin 60^\circ)^2 + ((-z_a + z_c) \sin 60^\circ)^2}} \right) \tag{2.11}$$

Como resultado de los cálculos anteriores, e introduciendo los datos del problema planteado, se obtiene un ángulo de $1^\circ 50'$ como ángulo de inclinación de la superficie. También es necesario estimar la incertidumbre de fabricación de la magnitud del ángulo de inclinación, a partir de las incertidumbres de los elementos localizadores y de la pieza. Para ello, se utiliza la LPV, donde se debe derivar la función α respecto a cada una de las variables que intervienen en la ecuación (2.11). La incertidumbre de fabricación esperada se puede expresar del siguiente modo:

$$u_\alpha^2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial L} \right)^2 u_L^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z_a} \right)^2 u_{z_a}^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z_b} \right)^2 u_{z_b}^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z_c} \right)^2 u_{z_c}^2 \tag{2.12}$$

La expresión matemática resultante de cada una de las derivadas presenta muchos términos, siendo su cálculo posible mediante el uso del programa de cálculo científico Matlab®.

Una vez calculados cada uno de los términos de la ecuación (2.12), se puede estudiar la influencia de cada parámetro en la incertidumbre final:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial L} \times u_L &= 1,3316 \times 10^{-5} \text{ rad} \\
\frac{\partial \alpha}{\partial z_a} \times u_{z_a} &= 4,25 \times 10^{-4} \text{ rad} \\
\frac{\partial \alpha}{\partial z_b} \times u_{z_b} &= 1,25 \times 10^{-4} \text{ rad} \\
\frac{\partial \alpha}{\partial z_c} \times u_{z_c} &= -5,51 \times 10^{-4} \text{ rad}
\end{aligned}
\tag{2.13}$$

Como se puede observar, la precisión de la distancia entre apoyos L apenas influye en la incertidumbre global asociada al ángulo de inclinación α .

Si se utiliza un factor de incertidumbre $K = 3$, se puede obtener la incertidumbre de fabricación del ángulo de inclinación:

$$U_\alpha = Ku_\alpha = 2^\circ 55' \tag{2.14}$$

2.3.2. Incertidumbre en el mecanizado de un chavetero

El ejemplo de la Figura 2.8 consiste en el fresado de un chavetero con medidas $50 \times 6 \times 3$ mm. La preforma tiene un diámetro $D = 30,05$ mm y una incertidumbre asociada $U_D = 0,04$ mm (con un factor de incertidumbre $K_D = 2$). Como se muestra en la Figura 2.8, la preforma se posiciona sobre dos bloques en V separados por una distancia $L_{12} = 200$ mm, con una incertidumbre asociada $U_{L_{12}} = 2$ mm ($K_{L_{12}} = 2$).

Figura 2.8: Mecanizado de un chavetero en un eje.

El vértice del primer bloque en V tiene como cota, según el eje Z del SCMH, $v_{01} = 4,98$ mm, mientras que el segundo está separado una distancia $v_{02} = 5,05$ mm. En los dos bloques en V, las cotas v_{01} y v_{02} poseen la misma incertidumbre con valor $U_{v_{01}} = U_{v_{02}} = 0,02$ mm, para una constante

$K_{v_{O1}} = K_{v_{O2}} = 2$. El ángulo que forman las dos superficies de apoyo del bloque en V es $\beta = 90^\circ$, con una incertidumbre asociada $U_\beta = 1^\circ$ para una constante $K_\beta = 2$. La distancia nominal medida según el eje OZ del SCMH, entre el vértice del bloque en V y la mesa de trabajo de la máquina-herramienta, es $v_0 = 5$ mm. Como se puede mostrar en la Figura 2.8, el chavetero se mecaniza desde el punto A ($x_A = 50$ mm) hasta el punto B ($x_B = 150$ mm).

Para resolver el problema, es necesario determinar, en primer lugar, las distancias iniciales h_1 y h_2 desde el centro de la preforma cilíndrica al SCMH:

$$h_1 = \frac{D}{2 \operatorname{sen}(\beta/2)} + \nu_{O1}$$

$$h_2 = \frac{D}{2 \operatorname{sen}(\beta/2)} + \nu_{O2}$$
(2.15)

y sus varianzas $u_{h_1}^2$ y $u_{h_2}^2$ se pueden expresar, en función de las variables de las que depende D , ν_{O1} o ν_{O2} , y β , a partir de la LPV:

$$u_{h_1}^2 = \left(\frac{\partial h_1}{\partial \nu_{O1}} \right)^2 u_{\nu_{O1}}^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial D} \right)^2 u_D^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial \beta} \right)^2 u_\beta^2$$

$$u_{h_2}^2 = \left(\frac{\partial h_2}{\partial \nu_{O2}} \right)^2 u_{\nu_{O2}}^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial D} \right)^2 u_D^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial \beta} \right)^2 u_\beta^2$$
(2.16)

Por lo tanto, la incertidumbre asociada a la cota vertical h se puede calcular del siguiente modo:

$$u_{h_1} = \sqrt{u_{\nu_{O1}}^2 + \left(\frac{u_D}{2 \operatorname{sen}(\beta/2)} \right)^2 + \left(\frac{Du_\beta}{4 \operatorname{tg}(\beta/2) \operatorname{sen}(\beta/2)} \right)^2}$$

$$u_{h_2} = \sqrt{u_{\nu_{O2}}^2 + \left(\frac{u_D}{2 \operatorname{sen}(\beta/2)} \right)^2 + \left(\frac{Du_\beta}{4 \operatorname{tg}(\beta/2) \operatorname{sen}(\beta/2)} \right)^2}$$
(2.17)

Si el origen de coordenadas del SCMH se posiciona en el centro del primer bloque en V, la distancia entre el centro de la preforma cilíndrica z_n y el SCMH toma el siguiente valor constante:

$$z_n = 5 + \frac{30}{2 \operatorname{sen}(90^\circ/2)} = 26,21 \text{ mm} \quad (2.18)$$

entonces, con el fin de expresar las coordenadas de los puntos O_1 y O_2 del eje de simetría de la pieza en el SCMH, es conveniente llevar a cabo un cambio de coordenadas introduciendo la constante z_n :

$$\begin{aligned} z_{O_1} &= h_1 - z_n \\ z_{O_2} &= h_2 - z_n \end{aligned} \quad (2.19)$$

Una vez que se han determinado, el ángulo que forma el eje de simetría de la pieza y el plano de la mesa de trabajo α_y se puede expresar:

$$\alpha_y = \arcsen \frac{z_{O_1} - z_{O_2}}{L_{12}} \quad (2.20)$$

y su varianza se puede calcular a partir de la LPV en función de las varianzas de las variables de las que depende:

$$u_{\alpha_y}^2 = \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial z_{O_1}} \right)^2 u_{z_{O_1}}^2 + \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial z_{O_2}} \right)^2 u_{z_{O_2}}^2 + \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial L_{12}} \right)^2 u_{L_{12}}^2 \quad (2.21)$$

donde no aparece la influencia de z_n , ya que se trata de una constante utilizada en el cambio de sistema de coordenadas, cuya derivada es nula.

A partir de la varianza se deduce la incertidumbre asociada del siguiente modo:

$$u_{\alpha_y} = \frac{1}{L_{12}^2} \sqrt{\frac{(z_{O_1} - z_{O_2})^2 u_{L_{12}}^2 + L_{12}^2 (u_{h_1}^2 + u_{h_2}^2)}{1 - \left(\frac{z_{O_1} - z_{O_2}}{L_{12}} \right)^2}} \quad (2.22)$$

Conocidas las coordenadas de los puntos A y B y el ángulo α_y , se puede calcular la profundidad del chavetero d . De este modo, las coordenadas de los puntos A y B se pueden expresar:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_1 A} &= \left\{ 100, \frac{D}{2} - d \right\} \\ \overrightarrow{O_1 B} &= \left\{ 150, \frac{D}{2} - d \right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Si se introducen estas cotas en la matriz de transformación de la ecuación (2.4), y el valor del ángulo α_y que rota el SCIP con respecto al SCMH, además del valor de ν_0 , se obtienen las cotas modificadas de los puntos A y B:

$$\begin{Bmatrix} x'_A \\ y'_A \\ z'_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \text{sen } \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \alpha_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 100 \\ 0 \\ D/2 - d \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \nu_0 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\begin{Bmatrix} x'_B \\ y'_B \\ z'_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \text{sen } \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \alpha_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 150 \\ 0 \\ D/2 - d \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \nu_0 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

La cota a controlar es la profundidad del chavetero d , que dependerá de las cotas de los puntos A y B con respecto al eje Z del SCMH:

$$\begin{aligned} z'_A &= D/2 - d + \nu_0 - 100 \text{sen } \alpha_y \\ z'_B &= D/2 - d + \nu_0 - (100 + 50) \text{sen } \alpha_y \end{aligned} \quad (2.26)$$

La profundidad del chavetero tendrá una variabilidad a lo largo del mismo, pero tal y como se indicó anteriormente, al ser perfectamente lineales las trayectorias trazadas por la MIICN, basta con dos puntos para determinar un valor representativo. Por lo tanto, la profundidad del chavetero en sus extremos A y B alcanza los siguientes valores, respectivamente:

$$\begin{aligned} d_A &= D/2 - z'_A \\ d_B &= D/2 - z'_B \end{aligned} \quad (2.27)$$

siendo, por lo tanto, el valor medio de la cota de fabricación correspondiente con la profundidad del chavetero:

$$d_{med} = \frac{d_A + d_B}{2} \quad (2.28)$$

calculándose la desviación típica media del siguiente modo:

$$d_{des} = \frac{|d_A - d_B|}{2} \quad (2.29)$$

Aplicando una vez más la LPV, se obtienen sendos valores para $u_{d_{med}}$ y $u_{d_{des}}$, y a partir de la raíz cuadrada de la suma de sus cuadrados se obtiene la incertidumbre correspondiente:

$$U_d = 2\sqrt{u_{d_{med}}^2 + u_{d_{des}}^2} \quad (2.30)$$

Si se introducen los valores numéricos que describen el problema en las ecuaciones anteriores, la profundidad del chavetero y su incertidumbre asociadas presentan los siguientes valores:

$$\begin{aligned} d_{med} &= 2,948 \text{ mm} \\ U_d &= 0,327 \text{ mm} \end{aligned} \quad (2.31)$$

La diferencia entre la estimación de la profundidad del chavetero d_{med} y el valor previamente especificado en planos puede introducirse en la programación de la máquina de control numérico como compensación de error. Sin embargo, la incertidumbre de fabricación U_d no puede ser corregida al tratarse de un error aleatorio. A pesar de ello, este valor es útil para estimar la variabilidad de la medida que pueda obtenerse en el mecanizado, y decidir el sistema de amarre más apropiado de entre todos los posibles candidatos.

2.4. Recapitulación

El método propuesto permite la estimación de cotas de fabricación e incertidumbres cuando estos valores están influenciados por las variables dimensionales de los elementos de los sistemas de amarre y sus correspondientes incertidumbres asociadas. Asimismo, también entran en juego la forma y dimensiones de las superficies de referencia de la pieza.

Con el fin de estimar los valores de las cotas críticas de fabricación que deben inspeccionarse durante el proceso de control de calidad, se ha definido, en primer lugar, la posición de los puntos de localización de los elementos de sujeción y de sus incertidumbres asociadas. A continuación, y a partir de estos puntos, se ha determinado el SCES. A partir de la variación del SCES debida a la variabilidad de las posiciones de los elementos de localización, o error de prerreglaje, y de las imperfecciones de las superficies de referencia de la pieza, error de referencia, se ha determinado el SCIP. Conocido el SCIP, se ha aplicado el principio de isostaticidad para determinar si la pieza sufre alguna alteración posicional sobre la teóricamente establecida. El principio de isostaticidad aplicado da lugar al conocimiento del posicionamiento de las superficies mecanizadas respecto del SCMH. Si se trasladan estas posiciones desde el SCMH al SCIP se pueden conocer los valores estimados de las cotas

de fabricación que deben controlarse. De esta forma, se pueden comparar ambos valores dando lugar a una posterior corrección del error en las posiciones que debe alcanzar el filo de corte en una MHCN.

Por último, este método permite también conocer el valor de la incertidumbre de la cota de fabricación esperada. Aunque preliminarmente este dato no parece que sea de utilidad al no tratarse de un error determinístico, sí lo es al ser tenido en cuenta en la elección de los elementos de sujeción. Ya que éstos pueden ser escogidos en función de que posean valores de incertidumbre más favorables. Para el cálculo de la incertidumbre asociada a la cota de fabricación esperada, se ha utilizado la LPV, donde las variables que intervienen son las incertidumbres asociadas a las dimensiones de los elementos de sujeción. De este modo, se puede conocer la influencia de cada parámetro en el error total. También es útil a la hora de planificar estrategias que lleven a la consecución de la opción más favorable en el diseño, elección y disposición de los elementos de sujeción.

En resumen, entre las ventajas que posee la implementación de este método se encuentran las siguientes:

- Se trata de un método de reducida complejidad y directo para la determinación de los valores esperados de las cotas e incertidumbres de fabricación.
- Dichos valores esperados son contrastables con los obtenidos en las medidas reales llevadas a cabo durante el control de calidad de la pieza mecanizada. Lo que justifica la eficacia del método al utilizar magnitudes comparables con las reales.
- La rapidez de cálculo y la sencillez de implementación mediante programas de cálculo científico como Matlab®.

Capítulo 3

Método de análisis del reparto de cargas y determinación de las zonas de apriete en los sistemas de sujeción

Como ya se analizó en el capítulo anterior, un factor clave a tener en cuenta en los procesos de mecanizado es el aseguramiento de la posición de la pieza a lo largo de todo el proceso de corte. Lo que significa que ésta debe permanecer inmóvil a pesar de las altas fuerzas de corte a las que se le somete. Aunque en el método del capítulo anterior y en otros estudios de los elementos de sujeción se ha supuesto que la pieza es un sólido rígido, en realidad se trata de un cuerpo susceptible de ser deformado como consecuencia de las fuerzas de apriete necesarias para contrarrestar el efecto de las elevadas fuerzas de corte de los procesos de mecanizado. La deformación influirá sobre la precisión de la pieza mecanizada, por lo tanto, los aspectos más importantes a tener en cuenta en el diseño del sistema de amarre son la precisión en el posicionamiento y la deformación de la pieza. Una vez realizado el estudio de la influencia de la precisión de los elementos de sujeción y de la preforma de la pieza sobre las cotas e incertidumbres de fabricación, es necesario llevar a cabo un análisis de las fuerzas de apriete que actúan sobre la pieza,

mediante su cálculo, análisis de la deformación elástica producida, análisis de la influencia del mecanizado en las superficies generadas, y la verificación del cumplimiento de las especificaciones de diseño. La sujeción o amarre de la pieza sobre la mesa de trabajo de la máquina-herramienta se realiza con el objeto de mantener la pieza en equilibrio estático sobre una posición definida por los elementos localizadores o de soporte. Las fuerzas de apriete aplicadas sobre las superficies de la pieza provocan la aparición de fuerzas de contacto en la interfaz existente entre la pieza y los elementos localizadores. Dichas fuerzas de contacto pueden ser halladas mediante un análisis mecánico estructural que da lugar al conocimiento de la deformación de la pieza. Esta deformación provocará que la posición relativa existente entre el filo de la herramienta de corte y las superficies que deben ser mecanizadas, varíe con respecto a la posición originalmente programada en una máquina-herramienta de control numérico (MHCN). De lo anteriormente relatado se deduce que el posicionamiento, la precisión de la pieza y la capacidad de producción en los procesos de mecanizado están fuertemente influenciados por la magnitud de las fuerzas de contacto existentes entre pieza y amarre. Por lo tanto, es necesario el establecimiento de un método sencillo para la obtención de dichas fuerzas. En este capítulo se utiliza un método simple, descrito en el trabajo de Estrems *et al.* [23] y parcialmente desarrollado en el Apéndice B de la presente tesis doctoral, que permite la determinación de la distribución de carga entre pieza y utillaje de sujeción mediante el uso de métodos numéricos directos. El método numérico utiliza las matrices de desplazamientos aportadas por los análisis de elementos finitos de la pieza y del elemento de sujeción. A partir del conocimiento del vector de cargas de contacto existente entre la pieza y el elemento localizador ha sido posible, mediante el uso de funciones de forma estándar, la determinación de zonas adecuadas para la aplicación de la fuerza de apriete. La aplicación de las fuerzas de apriete en estas zonas conllevará que las reacciones en los localizadores se encuentren entre los valores críticos y no den lugar a un incumplimiento de los principios de localización y sujeción de amarres [36], es decir, que no se produzca despegue o deslizamiento de la pieza. Además, el conocimiento de dicha zona de aplicación de cargas resultará de crucial interés a la hora de seleccionar posiciones alternativas en caso de que se produjera interferencia entre la posición de aplicación de la fuerza de apriete y el camino de herramienta programado en un proceso de mecanizado por control numérico. Por último, se ha presentado un ejemplo de amarre de una pieza prismática para validar el método propuesto.

3.1. Fuerzas de apriete. Efecto sobre la deformación de la pieza

Un principio básico en el amarre es el de isostaticidad, que establece que la responsabilidad de restringir los seis grados de libertad en la localización o posicionamiento de la pieza recae sobre los 6 elementos de apoyo en combinación con la acción de los elementos de apriete. Este es un principio deseable, pero frecuentemente, las elevadas fuerzas de corte y el objetivo de tener que limitar la deformación de la pieza, hacen necesario un aumento del número de apoyos o de sus superficies, de tal forma, que pueden considerarse como líneas o áreas de localización en lugar de puntos de apoyo. La responsabilidad de fijar la pieza sobre los elementos localizadores recae sobre los elementos de apriete. Por ello, se utilizan distintos tipos de mecanismos de apriete (tipo brida, de palanca, de tornillo, de cuña, accionados por leva, etc.), que deben posicionarse de modo que se aplique la fuerza de apriete en dirección normal a los elementos de apoyo. Las fuerzas de apriete aplicadas deben ser lo suficientemente altas para garantizar el mantenimiento de la posición de la pieza y, por lo tanto, inhibir su movimiento sobre los elementos localizadores. Pero al mismo tiempo, no deben superar un determinado valor, ya que puede dar lugar a tres efectos. El primero de ellos es la aparición de grandes deformaciones sobre la pieza y de los elementos de sujeción que provocará la pérdida de precisión en las superficies generadas. El segundo efecto es el daño provocado por indentación, y el tercero consiste en la posibilidad de desequilibrar el sistema de fuerzas, al ser éstas desmesuradamente altas, y provocar, por lo tanto, el efecto contrario al que se pretendía en un principio, es decir, un despegue o deslizamiento de la pieza al superarse las fuerzas de fricción con las que se contaba para inmovilizarla.

Las fuerzas de apriete aplicadas sobre las superficies de la pieza darán lugar a la aparición de fuerzas de contacto en la interfaz existente entre la pieza y los elementos localizadores. Dichas fuerzas de apriete se pueden aplicar bien sobre grandes superficies o bien usando elementos intermedios blandos, que permitirán aplicar altos valores de fuerzas sin dañar la superficie de contacto. Las áreas de contacto presentarán un mayor o menor tamaño dependiendo de la magnitud de las fuerzas de contacto. El problema, por lo tanto, se puede abordar desde dos ámbitos o puntos de vista diferentes: por un lado se encuentra el análisis mecánico estructural del sistema y, por otro, el estudio local del contacto mecánico. Mientras que en el primero se obtiene como resultado el reparto de cargas en las zonas de contacto entre dos cuerpos

y la deformación de la pieza, en el segundo se pretende realizar un análisis de cómo afecta dicho reparto de cargas sobre la magnitud de la presión de contacto y de las tensiones subsuperficiales, así como el daño superficial que se infiere. Lo anteriormente relatado se corresponde a la aparición de áreas de contacto pequeñas en comparación con el tamaño de los cuerpos que entran en contacto [33]. Sin embargo, cuando la superficie de contacto es muy grande, las deformaciones estructurales también influyen en la distribución de presiones.

En el análisis mecánico estructural del sistema, a partir de las fuerzas de apriete, se calculan las fuerzas de contacto en los elementos localizadores. Estando estas fuerzas distribuidas en las áreas de contacto en forma de presiones.

Las áreas de contacto poseen dos dimensiones que se pueden considerar como puntos, líneas o superficies. Se considerarán como puntos de contacto en el caso de que las dos dimensiones sean de orden equivalente entre sí, pero a la vez, muy inferiores a las de las superficies (de referencia u otras), en las que están incluidas. Si una de las dimensiones resulta ser muy inferior a la otra, se podrán simplificar según líneas de contacto. Y si ninguna de las dimensiones es despreciable no sufrirán ninguna simplificación, siendo tratadas como superficies de contacto [46].

Con la finalidad de minimizar el coste computacional que conlleva el cálculo estructural de las deformaciones, especialmente si éste se lleva a cabo mediante el método de los elementos finitos (MEF), se ha trabajado con fuerzas puntuales, aplicadas sobre los nodos de la malla de elementos finitos generada. De este modo, la presión sobre una línea o área de contacto, se ha modelizado mediante un conjunto de fuerzas puntuales aplicadas sobre dicha línea o área, cuya resultante será equivalente a la presión ejercida sobre las áreas elementales.

Por otro lado, con el objeto de evitar que las superficies de referencia queden dañadas, o que la indentación elástica introduzca excesivas imprecisiones en la localización de la pieza, se propone el estudio local de las presiones superficiales, necesarias para la estimación de las tensiones y deformaciones subsuperficiales dentro de cada área elemental de contacto. El estudio del daño local se llevará a cabo en el Capítulo 4 de la presente tesis doctoral.

Las fuerzas de contacto determinadas mediante el análisis mecánico estructural darán lugar al conocimiento de la deformación de la pieza. Dicha deformación provocará que la posición relativa existente entre el filo de la herramienta de corte y las superficies que deben ser mecanizadas, varíe con

respecto a la posición originalmente programada en una MHCN. Es por esta razón por lo que se establece una importante dependencia entre las fuerzas de contacto y la precisión de la pieza mecanizada.

Por otra parte, conviene que se disponga de la suficiente libertad para poder elevar la magnitud de las fuerzas de corte en el proceso de mecanizado, ya que redundará en un aumento de la productividad y, en ocasiones, en una reducción del consumo global de herramientas. Por esta razón, será necesaria la aplicación fuerzas de apriete, también elevadas, para asegurar que el sistema de amarre cumpla correctamente con sus funciones.

De lo anteriormente relatado se deduce que el posicionamiento, la precisión de la pieza y la capacidad de producción en los procesos de mecanizado están fuertemente influenciados por la magnitud de las fuerzas de contacto existentes entre pieza y amarre. Por lo tanto, es necesario el establecimiento de un método sencillo para la obtención de dichas fuerzas.

3.2. Método de análisis del reparto de cargas de contacto y de las zonas de apriete de un sistema de sujeción hiperestático

3.2.1. Planteamiento

Cuando dos cuerpos, como la pieza y los elementos de sujeción, entran en contacto como consecuencia de la aplicación de las cargas de apriete, la superficie de contacto posee unas dimensiones y forma que dependen de la magnitud de dichas cargas, además de los materiales y la tipología de las superficies de la pieza y de los elementos de sujeción, etc. La forma de las superficies de contacto dependerá de la tipología de las superficies de los dos cuerpos. De este modo, en el caso de que sus superficies sean curvas, el área de contacto será una elipse. Cuando esta elipse posee una dimensión que predomina sobre la otra, se puede realizar la simplificación de aproximar la superficie encerrada por la elipse a una línea de contacto en la que cada punto se puede estudiar bajo la hipótesis de deformación plana [46].

La mecánica del contacto es aplicable al caso de los amarres de piezas, en los que, para asegurar la posición o para no concentrar en demasía la carga en dicho punto, se recurre a la localización de la pieza por medio de una línea de apoyo. Por otro lado, el ancho de dicha línea será función de la fuerza aplicada en cada uno de los puntos en los que se discretice. En

estos casos de contacto mecánico, existe un predominio de las deformaciones estructurales frente a las superficiales, también conocidas como locales, en los puntos de contacto. Como consecuencia de este predominio, la energía del sistema se puede estimar despreciando las deformaciones locales frente a las estructurales.

La línea de contacto se puede discretizar según puntos equidistantes en los que se aplican las cargas puntuales. Como consecuencia de ello, el problema de contacto mecánico se reduce al cálculo de la distribución de fuerzas entre dichos puntos. Debido a que la magnitud de la fuerza total que ejercen entre sí los dos cuerpos es conocida, el problema consistirá en la determinación de las cargas de contacto puntuales, a través de la minimización de la energía de deformación elástica de todo el sistema.

El método directo propuesto en [23], consiste en una formulación matricial que proviene del desarrollo, en primer lugar, de una expresión de la energía de deformación del sistema, para posteriormente proceder a la resolución de un problema de minimización, de forma que las soluciones obtenidas se correspondan con el reparto de carga entre los distintos puntos en los que se ha discretizado la línea de contacto existente entre el localizador y la pieza.

Con el objeto de simplificar el problema de minimización y solucionarlo de un modo más directo mediante una formulación matricial, se han utilizado dos métodos matemáticos como son el método de las condiciones de Kuhn-Tucker y el de los multiplicadores de Lagrange. Por ser más conocido el último de los métodos anteriores, da lugar a un mejor entendimiento de la formulación utilizada, aunque como posteriormente se podrá comprobar, los dos dan lugar a la obtención de la misma expresión matricial, a partir de la cual, se despeja directamente el vector de fuerzas de contacto. El desarrollo de este método fue publicado en el trabajo de Estrems *et al.* [23], estando parcialmente reproducido en el Apéndice B de la presente tesis doctoral.

Conocido el vector de fuerzas de contacto se pueden realizar estudios posteriores con el objeto de llevar a cabo una optimización del sistema de fijación. Estos estudios son los siguientes:

- Optimización de la distribución de los puntos de aplicación de la fuerza de apriete, de modo que conduzca a la obtención de un reparto más uniforme del vector de cargas de contacto. De este modo, se podría aumentar la fuerza de apriete, lo que permitiría incrementar las profundidades de corte y la velocidad de avance y, por lo tanto, la productividad del proceso. También, mediante la consecución de un reparto

más uniforme de las cargas, la deformación se encontrará menos concentrada y, por lo tanto, dará lugar a una mejor precisión dimensional en el mecanizado.

- Estudio de la deformación estructural obtenida sobre la pieza y su influencia sobre la precisión final de la superficie mecanizada. En el caso de que los valores de deformación fueran significativos, se procedería a corregir el error producido.
- Conocido el reparto de carga, se puede profundizar en el problema desde el ámbito estructural al local llevando a cabo un estudio de la deformación superficial por indentación y, de este modo, conocer las tensiones y deformaciones que puedan provocar defectos de calidad superficial en la pieza mecanizada, así como las deformaciones locales que influyan en el posicionamiento de la pieza sobre los localizadores.

Las fuerzas de apriete, aplicadas por medio de los elementos de apriete del sistema de sujeción, producen unas fuerzas de reacción en los elementos localizadores. Estas fuerzas de apriete se aplican mediante diversos tipos de mecanismos, muchos de ellos estandarizados y muy extendidos en los talleres de fabricación: tornillos, palancas, cuñas, levas, etc.; sobre los que se aplica una fuerza de acción que habitualmente posee la propiedad de autobloqueo, por medio de la aparición de las correspondientes fuerzas de fricción. El diseño de estos mecanismos o accionamientos no va a ser objeto de estudio en esta tesis doctoral, sin embargo, sí se partirá de un valor conocido para la fuerza de apriete proporcionada por cualquiera de ellos.

A partir de la fuerza de apriete aplicada a la pieza, se pueden calcular las reacciones en las superficies en contacto, aunque en realidad, lo que actúa sobre determinadas áreas de contacto es la distribución de presiones. La magnitud de las presiones será menor, cuanto mayor sea el área de contacto a igualdad de fuerza aplicada. Sin embargo, lejos de repartirse la carga uniformemente sobre la superficie, y al depender dicho reparto del modo en el que se deforman los dos cuerpos en contacto, se producen picos de presión que originan un daño a la pieza. Consecuentemente, para evitar dicho daño sobre la pieza, se procurará que las superficies de contacto sean lo suficientemente grandes. Con este objeto, se actuará modificando el diseño de los sistemas de amarre, de cualquiera de los siguientes modos:

- Aumento del radio de curvatura de las superficies en contacto.
- Aumento del nº de apoyos, quedando la superficie sobrelocalizada.

- Utilización de elementos de localización lineales, de forma que la pieza apoye sobre superficies cilíndricas de longitud definida.
- Ampliar el área de contacto mediante la utilización de superficies de apoyo más amplias para los elementos localizadores.

Salvo en el primer caso, el cálculo de la distribución de fuerzas o de presiones requiere el estudio de las deformaciones, ya que el sistema ha dejado de ser isostático (caso ideal según los principios de localización de la pieza en los sistemas de amarre) para ser hiperestático. A continuación, se va a proceder a analizar cómo influyen las fuerzas de apriete en la distribución de fuerzas sobre las superficies de apoyo. En dicho proceso de cálculo también pueden obtenerse las deformaciones, lo que influirá en las dimensiones finales de la pieza. Las fuerzas de apriete y las reacciones en los apoyos conviene que sean de mucho mayor orden de magnitud que las fuerzas de corte, ya que de este modo se asegura la inmovilidad de la pieza y la ausencia de vibraciones. Por esta razón, se asume que la deformada de la pieza se debe exclusivamente a las fuerzas de apriete. Esto se traduce a considerar el problema como estático.

Los sistemas de contacto multicuerpo se presentan bajo patrones muy variados, por lo que se hace necesaria la formulación de un problema general al que se le podrán aplicar determinadas herramientas matemáticas para su resolución.

3.2.2. Método de análisis del reparto de carga en zonas extensas de apoyo

A continuación se expone una sinopsis del método utilizado para la obtención del reparto de carga en las zonas de apoyo, ante una fuerza de apriete determinada. En el Apéndice B se describen los fundamentos teóricos en los que se basa este método.

Las razones por las que este método es adecuado para la resolución de este tipo de problemas son las siguientes:

- Es un método directo que está basado en una formulación matricial lineal, sin iteraciones ni posibles problemas de convergencia, al contrario de los algoritmos habitualmente utilizados [16], que consisten en algoritmos no lineales y excesivamente complejos.

- El tiempo de resolución es predecible y, en comparación con los demás métodos, es muy corto.
- Se usan programas de preproceso habituales en análisis por elementos finitos para piezas independientes, por lo que no se usan elementos de contacto que conlleven el riesgo de no acertar en las constantes reales correspondientes.
- La posibilidad de afinar en los resultados es mucho mayor al poder mallar independientemente cada una de las piezas. En otras palabras, las limitaciones en cuanto a la elección del número de nodos y elementos por pieza son menos restrictivas, ofreciendo unos resultados más precisos.
- La formulación por elementos de contacto en los programas convencionales del MEF pueden presentar problemas de discontinuidades, como los aparecidos en [69], que no se presentan en la presente formulación.

Todas estas ventajas se han obtenido a cambio de sacrificios en la generalidad de los problemas que se puedan resolver, pero que son justificables en el caso del análisis de sistemas de amarres, mientras se tengan en cuenta las siguientes suposiciones:

- Se desprecian las fuerzas tangenciales frente a las normales, por lo que sólo se estudiará el reparto de carga en dirección normal a la superficie de referencia horizontal de la pieza.
- Las fuerzas de contacto serán todas positivas, como ya se indicó anteriormente, ya que en caso contrario dejaría de existir contacto, siendo su resultante equivalente a la fuerza de apriete aplicada a la pieza.
- Se analizará el problema considerándolo como estático, donde las cargas exteriores que intervienen son sólo las fuerzas de apriete. Además éstas se mantienen constantes en el tiempo. Por lo tanto, el análisis dinámico queda fuera del alcance del método propuesto.
- No se consideran las cargas vibracionales de la máquina-herramienta.

El procedimiento seguido para el análisis de distribución de carga en el contacto entre una pieza y los elementos de apoyo viene descrito en la Figura 3.1, donde se observa que el primer paso consistirá en la obtención de la matriz de desplazamientos de la pieza y los localizadores utilizando el

Figura 3.1: Método de análisis del reparto de carga.

MEF, después se aplicará la formulación matricial descrita en el Apéndice B y, finalmente, se representará la carga obtenida, facilitando el estudio de posibles mejoras. Para ello se utiliza el programa de análisis por el MEF Ansys®, donde se analizan cada uno de los cuerpos por separado con el fin de obtener las matrices de desplazamientos, que posteriormente serán ensambladas con la finalidad de aplicar el método de análisis de reparto de cargas. El método de análisis de reparto de cargas y la representación de las mismas han sido implementados por medio del programa de cálculo matemático Matlab®.

Aplicación del MEF para la obtención de la matriz de desplazamientos de la pieza y los localizadores.

El análisis por elementos finitos consiste en varias etapas: Preproceso, Solución y Postproceso. A continuación se describe cada una de ellas:

- **Preproceso.** Una vez importado el modelo geométrico de la pieza a partir del obtenido en el programa de diseño CAD, se procede a introducir la información necesaria para la fase de preproceso del análisis por elementos finitos. En primer lugar, se selecciona el tipo de análisis estructural. A continuación se introducen los datos relativos al material (módulo de Young, densidad y coeficiente de Poisson).

El siguiente paso consiste en la selección del tipo de elemento y estrategia que se vaya a utilizar para el mallado. El tipo de elemento que mejor se adapta a los propósitos planteados inicialmente es el hexaédrico estructural Solid 45 compuesto de 8 nodos con tres grados de libertad cada uno de ellos. La estrategia de mallado se realiza en modo mapeado, para ello se establecerán las divisiones en las líneas adecuadas para que el tamaño de malla regular sea el adecuado. Las restricciones de desplazamiento a aplicar en los nodos de la malla, se corresponderán a los puntos de aplicación de la carga de apriete y a los puntos de la línea de carga existente entre la pieza y los elementos de localización.

A continuación se numerarán los distintos puntos en los que se ha discretizado la carga, con el fin de poder extraer fácilmente los resultados a partir de la base de datos del programa. Para ello, se buscará un orden lógico mediante la numeración correlativa de los puntos contiguos, siguiendo un orden de izquierda a derecha al pasar de una superficies de apoyo a otra. La matriz de desplazamientos será cuadrada, de componentes c_{ij} , y relacionará el desplazamiento en j cuando se aplica una

carga unidad en i . Para el cálculo de la matriz de desplazamientos sólo interesará el reparto provocado por la carga de apriete en dirección normal a la superficie. Para obtener cada fila de la matriz de desplazamientos se aplicará una carga unidad sobre el punto correspondiente y se obtendrá como resultado el desplazamiento obtenido en el resto de los puntos. Por esta razón, será necesario aplicar tantos estados de carga como puntos de discretización se hayan seleccionado.

- **Solución:** Para unas condiciones dadas del problema de amarre de la pieza, se selecciona el análisis estructural bajo condiciones estáticas, y se resuelven todos los estados de carga, escribiendo el dato correspondiente relativo al desplazamiento normal de cada nodo de la línea de carga en su registro correspondiente.
- **Postprocesado:** Finalizado el proceso de cálculo, se cargan cada uno de los estados de carga, llenándose la matriz de desplazamientos para el objeto analizado (pieza o localizador). Por el principio de reciprocidad en cálculo lineal, la matriz resultante deberá ser simétrica.

Ensamblaje de las matrices de desplazamientos.

A partir de las matrices correspondientes a cada uno de los cuerpos, pieza y los elementos localizadores en un problema dado de sujeción de amarres, se puede hallar la matriz de desplazamientos del problema de minimización de la energía de deformación, planteado en la ecuación (B.11). En un problema hiperestático, existen múltiples elementos de apoyo, por lo que existe contacto solamente en determinadas zonas de la pieza, que no poseen influencia entre sí.

Por ello, en la matriz principal aparecerán términos nulos en el lugar destinado al desplazamiento de los puntos de un elemento localizador como consecuencia de la aplicación de la carga en el otro. Si por ejemplo, la matriz de desplazamientos general del sistema es de dimensión 10×10 , y se utilizan dos elementos de apoyo (L1 y L2), la matriz de desplazamientos general del sistema $[C]$, se obtendrá como consecuencia de sumar uno a uno los términos de las tres submatrices correspondientes a la pieza y los dos localizadores, tal como se expresa en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
[C] = & \left[\begin{array}{ccccccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & c_{67} & c_{68} & c_{69} & c_{6-10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{76} & c_{77} & c_{78} & c_{79} & c_{7-10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{86} & c_{87} & c_{88} & c_{89} & c_{8-10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{96} & c_{97} & c_{98} & c_{99} & c_{9-10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{10-6} & c_{10-7} & c_{10-8} & c_{10-9} & c_{10-10} \end{array} \right]_{\text{Pieza}} + \\
& \left[\begin{array}{ccccccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{\text{Localizador1}} + \\
& \left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & c_{67} & c_{68} & c_{69} & c_{6-10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{76} & c_{77} & c_{78} & c_{79} & c_{7-10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{86} & c_{87} & c_{88} & c_{89} & c_{8-10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{96} & c_{97} & c_{98} & c_{99} & c_{9-10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{10-6} & c_{10-7} & c_{10-8} & c_{10-9} & c_{10-10} \end{array} \right]_{\text{Localizador2}}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

siendo por lo tanto, la matriz de desplazamientos $[C]$ del sistema formado por la pieza y los localizadores, la siguiente:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccccc} [c_{11}]_P + [c_{11}]_{L1} & \dots & [c_{15}]_P + [c_{15}]_{L1} & 0 & \dots & 0 \\ [c_{21}]_P + [c_{21}]_{L1} & \dots & [c_{25}]_P + [c_{25}]_{L1} & 0 & \dots & 0 \\ [c_{31}]_P + [c_{31}]_{L1} & \dots & [c_{35}]_P + [c_{35}]_{L1} & 0 & \dots & 0 \\ [c_{41}]_P + [c_{41}]_{L1} & \dots & [c_{45}]_P + [c_{45}]_{L1} & 0 & \dots & 0 \\ [c_{51}]_P + [c_{51}]_{L1} & \dots & [c_{55}]_P + [c_{55}]_{L1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & [c_{66}]_P + [c_{66}]_{L2} & \dots & [c_{6-10}]_P + [c_{6-10}]_{L2} \\ 0 & \dots & 0 & [c_{76}]_P + [c_{76}]_{L2} & \dots & [c_{7-10}]_P + [c_{7-10}]_{L2} \\ 0 & \dots & 0 & [c_{86}]_P + [c_{86}]_{L2} & \dots & [c_{8-10}]_P + [c_{8-10}]_{L2} \\ 0 & \dots & 0 & [c_{96}]_P + [c_{96}]_{L2} & \dots & [c_{9-10}]_P + [c_{9-10}]_{L2} \\ 0 & \dots & 0 & [c_{10-6}]_P + [c_{10-6}]_{L2} & \dots & [c_{10-10}]_P + [c_{10-10}]_{L2} \end{array} \right] \\
& \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Para la obtención de la matriz de desplazamientos $[C]$ se ha de tener cuidado en la numeración de los puntos de localización de cada objeto, con el fin de que coincidan los puntos que deban permanecer en contacto, y así se superpongan convenientemente sus desplazamientos correspondientes.

Formulación matricial para la obtención del reparto de cargas.

A partir de los coeficientes de la matriz de desplazamientos $[C]$, y aplicando el método matricial descrito en el apartado B.5, se obtienen las cargas de contacto en los puntos de localización. De este modo, $\{f_{PL1}, \dots, f_{PL10}\}$ se obtienen a partir de la siguiente ecuación:

$$[C^*] \begin{bmatrix} f_{PL1} \\ f_{PL2} \\ f_{PL3} \\ \dots \\ f_{PL10} \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde, la matriz modificada $[C^*]$ se puede expresar del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ 2([c_{11}]_P + [c_{11}]_{L1}) & \dots & 0 & -1 \\ [c_{21}]_P + [c_{21}]_{L1} & \dots & 0 & -1 \\ [c_{31}]_P + [c_{31}]_{L1} & \dots & 0 & -1 \\ [c_{41}]_P + [c_{41}]_{L1} & \dots & 0 & -1 \\ [c_{51}]_P + [c_{51}]_{L1} & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \dots & [c_{6-10}]_P + [c_{6-10}]_{L2} & -1 \\ 0 & \dots & [c_{7-10}]_P + [c_{7-10}]_{L2} & -1 \\ 0 & \dots & [c_{8-10}]_P + [c_{8-10}]_{L2} & -1 \\ 0 & \dots & [c_{9-10}]_P + [c_{9-10}]_{L2} & -1 \\ 0 & \dots & 2([c_{10-10}]_P + [c_{10-10}]_{L2}) & -1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Al ser la fuerza F , la aplicada en el punto de apriete, el vector de fuerzas de contacto se determina invirtiendo la matriz de desplazamientos modificada

$[C^*]$ y multiplicándola matricialmente por el vector de fuerzas externas:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{10} \\ \nu \end{bmatrix} = [C^*]^{-1} \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Representación del reparto de carga sobre pieza y apoyos y estudio de mejoras.

Para que la información sea útil y eficiente en un futuro estudio de mejoras de los elementos de sujeción, conviene disponer de alguna herramienta para representar el reparto de fuerzas sobre el mismo objeto CAD, o bien, sobre ejes cuya orientación esté claramente definida.

3.2.3. Estudios posteriores al de reparto de cargas

Conocido el vector de cargas se pueden realizar los siguientes estudios:

- Análisis de las deformaciones de la superficie de la pieza. Para ello se deberán aplicar los valores obtenidos de las fuerzas de contacto en cada punto de localización y resolver el problema definiendo las restricciones de inmovilidad en la pieza, mediante el ya conocido método de isostaticidad 3-2-1. De este modo se puede predecir la deformación que sufrirá la pieza como consecuencia de la aplicación del sistema de fuerzas de apriete.
- Análisis de los puntos de aplicación de las fuerzas de apriete, de modo que se busquen alternativas en su posicionamiento que aseguren un mayor equilibrio en el reparto de cargas. El punto finalmente seleccionado será aquel que cumpla con los principios de localización y sujeción de amarres [36].
- Análisis de la interferencia del punto de aplicación de la fuerza de apriete con la trayectoria de herramienta. A pesar de que el punto de aplicación de la carga de apriete sea el más adecuado desde el punto de vista de equilibrio de reparto de cargas, podría ser que interfiriera con la trayectoria que sigue la herramienta de corte. Por lo que se hace

necesaria la búsqueda de soluciones alternativas a la óptima, de modo que finalmente se adopte una solución de compromiso en la que se seleccione, en la medida de lo posible, la posición menos desfavorable.

3.2.4. Método para la determinación de las zonas de apriete

En cuanto a las posibilidades de actuación sobre el elemento de apriete, con el fin de obtener un mejor reparto de cargas, se pueden enumerar las siguientes:

- Modificación de la intensidad de la carga de apriete, con lo que disminuirían todas las magnitudes de las fuerzas de contacto, sin embargo, al tratarse de la misma posición de aplicación de la carga de apriete, seguirían existiendo desigualdades entre unos puntos de localización y otros.
- Cambio en el diseño o selección del sistema de fijación, lo que conllevaría la realización de nuevos cálculos mediante el MEF, y la consiguiente determinación de una nueva matriz de coeficientes para la obtención de un nuevo reparto de cargas.
- Mantener constante la magnitud de la fuerza de apriete y modificar sus posiciones de aplicación hasta determinar aquella que de lugar al mejor reparto de las cargas de contacto.

En el estudio llevado a cabo en este apartado, se ha escogido la última opción, desde el punto de vista del interés que suscita el hecho de conocer cómo influyen dichas posiciones de apriete sobre el reparto de carga en los puntos de localización. Además, los valores de las fuerzas de apriete vienen acotados, bien por el propio límite físico del mecanismo de apriete utilizado, o bien por el límite fijado por la aparición del daño por indentación en las superficies finales. Conviene tener en cuenta que en el procedimiento de sujeción se debe controlar cada uno de los factores que influyen significativamente en la precisión de la pieza, y la fuerza de apriete es uno de estos factores. Para llevar a cabo este tipo de control, se suelen usar llaves dinamométricas que proporcionan una fuerza de acción constante sobre el mecanismo de apriete.

Otro de los factores importantes que limita la magnitud de las fuerzas de apriete es la fuerza mínima que impida el deslizamiento de la pieza sobre los puntos de localización. Para ello, la fuerza normal de contacto mínima

debe dar lugar a la aparición de una fuerza de rozamiento que no represente una amenaza para el deslizamiento, y que su influencia para la aparición del fenómeno de *fretting* sea despreciable.

Por las razones anteriores, es necesario determinar puntos de apriete alternativos para que las fuerzas de contacto se encuentren dentro de los límites establecidos por f_{min} y f_{max} .

Un modo de buscar zonas posibles de aplicación de la carga de apriete es mediante el método cuyo esquema se representa en la Figura 3.2. En este método se parte de los datos del reparto de carga obtenidos para diferentes posiciones de aplicación del apriete. A partir de estos datos, se utilizan funciones de forma que expresen la variación de la fuerza de contacto en cada uno de los puntos de localización en función del punto de aplicación del apriete. Para ello, se definen funciones de forma estándar como las que se utiliza en la formulación teórica del MEF [95]. Con las funciones de forma se puede hallar un determinado valor numérico (en este caso, la fuerza de contacto) en función de las coordenadas de los puntos interiores a un elemento rectangular.

Las funciones de fuerza de contacto f se expresan en forma polinómica en x e y , dependiendo unívocamente de las coordenadas de los cuatro puntos que definen el elemento. Para ello, sólo es necesario retener 4 coeficientes del desarrollo polinómico, pudiendo escribir la siguiente expresión:

$$f(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy \quad (3.6)$$

En general, la elección de retener los términos del desarrollo se puede realizar de forma unívoca de modo que se obtenga un polinomio del menor grado posible.

Si se sustituyen las coordenadas de los distintos nodos, se obtiene un sistema de ecuaciones simultáneas, donde la fuerza de contacto en un determinado punto i es función de las coordenadas de los puntos de apriete (1, 2, 3 y 4):

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}_i \quad (3.7)$$

La expresión anterior se puede escribir de forma más sencilla del siguiente modo:

Figura 3.2: Método de determinación de zonas de apriete.

$$f^e = [D]\alpha \quad (3.8)$$

donde formalmente se pueden obtener los coeficientes $\alpha_0, \dots, \alpha_3$:

$$\alpha = [D]^{-1} f^e \quad (3.9)$$

y por lo tanto, se puede escribir la ecuación (3.6) del siguiente modo:

$$f = P\alpha = P[D]^{-1} f^e \quad (3.10)$$

donde:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Así pues, se puede determinar el valor de la fuerza de contacto en un punto de localización i a partir de las funciones de forma N_i correspondientes a los nodos que definen una determinada región, de modo que:

$$f_i = N_i f_i^e = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]_i f_i^e \quad (3.12)$$

Si se establecen 2 valores, uno máximo y otro mínimo, el número de curvas pasará a duplicar el número de ecuaciones, a las que se podrá nombrar curvas frontera o de contorno.

De este modo, todos los puntos pertenecientes a la curva frontera serán posiciones de apriete que conduzcan a la aparición de una fuerza de contacto igual a f_{min} o f_{max} . Los puntos que estén a un lado sobrepasarán el límite establecido y los que estén en el otro serán menores que dicho límite. Así, para cada uno de los puntos de contacto, se tendrán dos ecuaciones, una de fuerza mínima y otra de fuerza máxima, que son las que se escriben a continuación:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy = f_{min} \quad (3.13)$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy = f_{max} \quad (3.14)$$

donde los coeficientes α_0 , α_1 , α_2 y α_3 han sido calculados a partir de la ecuación (3.9).

Si se eliminan sistemáticamente todas las curvas a excepción de las más selectivas se obtiene una región completamente cerrada para la fuerza mínima, y otra para la fuerza máxima. Además, como se deben cumplir al mismo tiempo los dos criterios de seguridad para el alcance de fuerzas de contacto, la región válida ha de ser la intersección de las dos anteriores.

3.3. Ejemplo ilustrativo

El método anteriormente descrito ha sido aplicado al caso de amarre de una pieza prismática, como la que se muestra en la Figura 3.3, de aluminio 7178 con módulo de Young $E = 75$ GPa, densidad $\rho = 2,82 \times 10^3$ Kg/m³ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$, de dimensiones 100 mm $\times$ 100 mm $\times$ 25 mm. Para asegurar el cumplimiento del principio de inmovilidad se utiliza el método N-2-1. Donde los elementos localizadores 1 y 2, situados sobre la

mesa de trabajo restringen N grados de libertad, el elemento localizador nº4 restringe dos grados de libertad y el elemento localizador nº3 restringe un grado de libertad, por lo que la pieza queda sobrelocalizada.

Figura 3.3: Ejemplo de sistema de sujeción.

La operación no se completaría si no se aplicasen las adecuadas fuerzas de apriete en oposición a los elementos localizadores. Por ello, se debe aplicar una fuerza en cada punto de Apriete 1, 2 y 3. Los dos elementos localizadores (1 y 2 en la Figura 3.3), que al mismo tiempo que posicionan, orientan a la pieza con respecto al filo de corte de la herramienta, pueden sufrir desgaste debido a su uso continuado. Por esta razón se ha seleccionado acero endurecido como material, con módulo de Young $E = 201 \text{ GPa}$, densidad $\rho = 8 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. La fuerza de apriete posee una magnitud de 1500 N.

3.3.1. Aplicación del método de análisis del reparto de carga

Aplicación del MEF para la obtención de matriz de desplazamientos en la pieza y en los localizadores.

Obtención de la matriz de desplazamientos en la pieza

- **Preproceso:** Después de introducir los datos del material, se ha reali-

zando el mallado de la pieza con elementos cúbicos Solid 45. La estrategia de mallado se realiza en modo mapeado, para ello se establecerán las divisiones en las líneas adecuadas para que el tamaño de malla regular sea de 5×10^{-3} m por elemento. El número de elementos resultante es de 2000 y el de nodos 2646.

Figura 3.4: Mallado de la pieza y aplicación de restricciones.

Las restricciones de desplazamiento se aplicarán en los nodos que se correspondan con el punto de aplicación de la carga de apriete y con los puntos de localización pertenecientes a la línea de carga existente entre la pieza y los elementos de localización. Las coordenadas de estos puntos respecto del sistema de coordenadas local, que se representa en la Figura 3.4, son los que se detallan en la Tabla 3.1, donde los puntos de localización se denotan con PL y los puntos de apriete con PA.

Para el cálculo de la matriz de desplazamientos y al sólo interesar el reparto provocado por la carga de apriete en la dirección normal aplicada sobre el punto de aplicación PA1, se ha restringido el grado de libertad en la dirección del eje Z en dicho punto. Por otro lado, como se pretende solucionar un total de 10 estados de carga subdivididos en 2 etapas. En la primera de ellas, se restringen todos los desplazamientos del localizador nº 2 aplicándose cargas unitarias positivas en cada punto del localizador nº 1, cada una correspondiente con el estado de carga a resolver. En la segunda, se invierte el proceso, es decir, los nodos restringidos pasan a ser los del localizador nº1 y los estados de carga, los aplicados en los puntos del localizador nº2.

PL/PA	Nodo	Coor. X (m)	Coor. Y (m)	Coor. Z (m)
PL1	103	20×10^{-3}	10×10^{-3}	0
PL2	179	20×10^{-3}	30×10^{-3}	0
PL3	255	20×10^{-3}	50×10^{-3}	0
PL4	331	20×10^{-3}	70×10^{-3}	0
PL5	407	20×10^{-3}	90×10^{-3}	0
PL6	115	80×10^{-3}	10×10^{-3}	0
PL7	191	80×10^{-3}	30×10^{-3}	0
PL8	267	80×10^{-3}	50×10^{-3}	0
PL9	343	80×10^{-3}	70×10^{-3}	0
PL10	419	80×10^{-3}	90×10^{-3}	0
PA1	653	35×10^{-3}	80×10^{-3}	25×10^{-3}
PA2	917	40×10^{-3}	0	15×10^{-3}
PA3	1173	100×10^{-3}	45×10^{-3}	10×10^{-3}

Tabla 3.1: Coordenadas de puntos de localización y apriete.

- **Solución:** Como se describe anteriormente, para cada una de las dos etapas, se resuelven los 10 estados de carga y se escribe, en su registro correspondiente, el desplazamiento vertical de cada nodo perteneciente a la línea de carga.
- **Postprocesado:** Finalizado el proceso de cálculo, se cargan uno a uno los 10 estados de carga, llenándose la matriz de desplazamientos definida, obteniéndose los siguientes valores expresados en la Figura 3.5. Correspondiéndose cada coeficiente con los de la ecuación (B.25). Se puede observar que la matriz es simétrica, y que además, la carga aplicada en un localizador sólo tiene influencia sobre el área de contacto del mismo. Por esta razón, aparecen términos nulos en las celdas correspondientes a los nodos de un localizador cuando se cargan los puntos de contacto del otro. Por otro lado, se puede observar en la Figura 3.6 la deformación sufrida por la pieza.

Array Parameter UZ										
File Edit Help										
Page Increment Half Page View Plane Z = 1										
Initialization Constant 0.0										
Selected: NONE										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3.8636363	2.7083788	1.9802351	1.2780501	6.2848155	0	0	0	0	0
2	2.7083788	2.7023908	1.7623576	1.1995653	6.6652965	0	0	0	0	0
3	1.9802351	1.7623576	1.9101402	1.1067985	7.1221547	0	0	0	0	0
4	1.2780501	1.1995653	1.1067985	1.3918726	7.0574009	0	0	0	0	0
5	6.2848155	6.6652965	7.1221547	7.0574009	1.3354770	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1.3264909	1.1967725	1.1098589	1.0255009	9.4395758
7	0	0	0	0	0	1.1967725	1.1824409	1.0742725	1.0038597	9.3396968
8	0	0	0	0	0	1.1098589	1.0742725	1.0749456	9.8047788	9.8453311
9	0	0	0	0	0	1.0255009	1.0038597	9.8047788	9.9485171	9.1765199
10	0	0	0	0	0	9.4395758	9.3396968	9.8453311	9.1765199	9.5603922

Figura 3.5: Matriz de desplazamientos de la pieza. $\times 10^{-8}$ m

Figura 3.6: Deformaciones en la pieza.

Obtención de la matriz de desplazamientos en los localizadores

- **Preproceso:** El tipo de elemento y la estrategia de mallado son los mismos que los utilizados para la pieza, teniendo en consideración que los nodos donde se aplique el estado de carga deben coincidir con los seleccionados en la pieza. El número de elementos resultante es de 108 y el de nodos 228. En la Figura 3.7 se observa el mallado realizado para los elementos localizadores.

Figura 3.7: Mallado del localizador y aplicación de restricciones.

Con el fin de cumplir con el principio de inmovilidad total que debe de poseer el elemento localizador sobre la mesa de trabajo de la máquina-herramienta, se han aplicado restricciones de desplazamiento en las tres direcciones de los ejes X, Y, y Z; sobre todos los nodos de su base de apoyo (como se muestra en la Figura 3.7. Los puntos de localización de la pieza deben coincidir con los del localizador, siendo las coordenadas de estos puntos respecto del sistema de coordenadas local del elemento localizador, las que se muestran en la Tabla 3.2.

PL	Nodo	Coor. X (m)	Coor. Y (m)	Coor. Z (m)
PL1-PL6	89	5×10^{-3}	5×10^{-3}	20×10^{-3}
PL2-PL7	144	25×10^{-3}	5×10^{-3}	20×10^{-3}
PL3-PL8	148	45×10^{-3}	5×10^{-3}	20×10^{-3}
PL4-PL9	152	65×10^{-3}	5×10^{-3}	20×10^{-3}
PL5-PL10	109	85×10^{-3}	5×10^{-3}	20×10^{-3}

Tabla 3.2: Coordenadas de puntos de localización.

Array Parameter CN2

File Edit Help

Page Increment: Full Page View Plane: Z = 1

Initialization Constant: 0.0

Selected: NONE

	1	2	3	4	5
1	-2.016452	-9.508527	1.5804071	-6.162411	1.7129606
2	-9.508527	-1.777984	-1.115975	2.6779715	-6.162411
3	1.5804071	-1.115975	-1.776921	-1.115975	1.5804071
4	-6.162411	2.6779715	-1.115975	-1.777984	-9.508527
5	1.7129606	-6.162411	1.5804071	-9.508527	-2.016452

Figura 3.8: Matriz de desplazamientos del localizador. $\times 10^{-8}$ m

Figura 3.9: Deformaciones en el localizador.

Como los dos localizadores son iguales y como se trata de una disposición simétrica de ambos con respecto a la pieza, las matrices de desplazamientos serán idénticas. En este caso, sólo será necesario el cálculo de 5 estados de carga unitaria, cada uno de ellos aplicado en cada uno de los 5 puntos de localización, respectivamente.

- **Solución:** Como se describió anteriormente, se han resuelto todos los estados de carga y se ha escrito el desplazamiento vertical en su registro correspondiente.
- **Postprocesado:** Finalizado el proceso de cálculo, se cargan uno a uno los 5 estados de carga, llenándose la matriz de desplazamientos definida, obteniéndose los siguientes valores expresados en la Figura 3.8. Correspondiéndose cada coeficiente con los de la ecuación (B.25). Por otro lado, se puede observar en la Figura 3.9 la deformación sufrida en el elemento localizador en uno de los 5 estados de carga.

Ensamblaje de las matrices de desplazamientos

Al existir contacto solamente en determinadas zonas de la pieza, éstas no influyen en los desplazamientos de las otras zonas. Por ello, en la matriz principal aparecerán términos nulos en el lugar destinado al desplazamiento de los puntos de uno de los localizadores como consecuencia de la aplicación de la carga en el otro. En el ejemplo establecido, la matriz de desplazamientos general del sistema será de dimensión 10×10 , al ser 10 el número de puntos de contacto, y se obtendrá como consecuencia de sumar uno a uno los términos de las submatrices correspondientes a la pieza y los dos localizadores, tal y como se expresa en la ecuación (3.2).

Aplicación de la formulación matricial para la obtención del reparto de cargas

Tal y como se indica ecuación (3.5) y dada una fuerza de apriete, $F = 1500$ N aplicada en el punto de apriete PA1, el vector de fuerzas de contacto se determina invirtiendo la matriz de desplazamientos modificada $[C^*]$ y multiplicándola matricialmente por el vector de fuerzas externas:

$$\begin{bmatrix} f_{PL1} \\ f_{PL2} \\ f_{PL3} \\ f_{PL4} \\ f_{PL5} \\ f_{PL6} \\ f_{PL7} \\ f_{PL8} \\ f_{PL9} \\ f_{PL10} \\ \nu \end{bmatrix} = [C^*]^{-1} \begin{bmatrix} 1500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37,98 \\ 99,97 \\ 216,54 \\ 417,96 \\ 573,07 \\ 16,51 \\ 22,74 \\ 30,11 \\ 38,47 \\ 46,63 \\ 1,87 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \text{ N} \quad (3.15)$$

Representación del reparto de cargas sobre pieza y apoyos

En la Figura 3.10 se observa como se reparte el vector de cargas a lo largo de todos los puntos de contacto, apareciendo un claro desequilibrio entre los puntos PL1 y PL5 del localizador nº1, y en general entre los valores correspondientes a un localizador y el otro. Por lo tanto, se deduce que esta disposición no es la más idónea desde el punto de vista de los principios de amarre de piezas en máquinas-herramienta [36].

3.3.2. Estudios posteriores al de reparto de cargas

Los resultados obtenidos en el reparto de cargas para la posición de aplicación de la carga de apriete dada en la Tabla 3.1 no son los más satisfactorios por las razones indicadas en el apartado anterior. Por lo tanto, se requiere del estudio de nuevos puntos de aplicación de la fuerza de apriete. En la Figura 3.11 se representan 9 puntos de aplicación de la fuerza de apriete, para los que se calculará el reparto de cargas, donde la posición #1 se corresponde a la que fue analizada en el apartado anterior.

Por lo tanto, se deben resolver 9 problemas diferentes mediante el MEF con el fin de obtener las matrices de desplazamientos correspondientes y los nuevos repartos de carga. Debido a que el proceso de introducción de datos se ha automatizado mediante la programación de un fichero de lectura *.log*, la modificación del punto de aplicación de la carga de apriete resulta sencillo, ya que tan sólo habría que variar las posiciones de los nueve puntos representados en la Figura 3.11, cuyas coordenadas son las expresadas en la Tabla 3.3.

Figura 3.10: Reparto de cargas en los puntos de localización.

Figura 3.11: Variación de la posición de los puntos de apriete.

PA	Coord. X (m)	Coord. Y (m)	Coord. Z (m)
#1	35×10^{-3}	80×10^{-3}	25×10^{-3}
#2	35×10^{-3}	65×10^{-3}	25×10^{-3}
#3	35×10^{-3}	50×10^{-3}	25×10^{-3}
#4	50×10^{-3}	80×10^{-3}	25×10^{-3}
#5	50×10^{-3}	65×10^{-3}	25×10^{-3}
#6	50×10^{-3}	50×10^{-3}	25×10^{-3}
#7	65×10^{-3}	80×10^{-3}	25×10^{-3}
#8	65×10^{-3}	65×10^{-3}	25×10^{-3}
#9	65×10^{-3}	50×10^{-3}	25×10^{-3}

Tabla 3.3: Coordenadas de los puntos de aplicación de la carga de apriete respecto del SCIP.

La magnitud de las cargas de contacto calculadas para cada una de las posiciones de apriete son las que se expresan en la Tabla 3.4.

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9
f_{PL1}	37,98	92,78	182,29	37,65	70,60	122,01	16,51	21,79	29,23
f_{PL2}	99,97	182,24	298,42	75,94	114,20	161,93	22,74	27,25	32,31
f_{PL3}	216,54	320,80	381,96	134,11	166,27	182,13	30,11	32,49	33,55
f_{PL4}	417,96	412,60	298,42	214,25	202,09	161,93	38,47	36,39	32,31
f_{PL5}	573,07	335,62	182,29	288,05	196,84	122,01	46,63	38,04	29,23
f_{PL6}	16,51	21,79	29,23	37,65	70,60	122,01	37,98	92,78	182,29
f_{PL7}	22,74	27,25	32,31	75,94	114,20	161,93	99,97	182,24	298,42
f_{PL8}	30,11	32,49	33,55	134,11	166,27	182,13	216,54	320,80	381,96
f_{PL9}	38,47	36,39	32,31	214,25	202,09	161,93	417,96	412,60	298,42
f_{PL10}	46,63	38,04	29,23	288,05	196,84	122,01	573,07	335,62	182,29

Tabla 3.4: Variación del reparto de carga en función de la posición de apriete.

En la Figura 3.12 se representan los valores numéricos de fuerza de contacto correspondientes a los puntos de localización que influyen sobre el reparto de cargas en el localizador nº 1. En ella se observa que la curva correspondiente al punto de apriete #1 es la que mayores diferencias presenta entre los valores de carga de contacto. Por esta razón, se descarta frente a los demás puntos como posible candidato a ser la posición final para la aplicación de la carga de apriete. La posición de apriete #2 tampoco es la más idónea por las mismas razones apuntadas anteriormente para la posición #1. La posición #3, a pesar de presentar un reparto más equilibrado, posee un valor máximo de 381,96 N que sobrepasa el límite establecido para la carga máxima (de 270 N). Las posiciones #7, #8, y #9 dan lugar a un reparto similar y apenas significativo, dado que son las más distantes respecto del localizador

Figura 3.12: Reparto de cargas en el localizador nº 1 en #1, #2 y #3.

nº1. Estas posiciones también son descartables ya que deberían sobrepasar un valor mínimo de fuerza de contacto, con la finalidad de evitar un posible despegue o deslizamiento de la pieza (establecido en 60 N).

En la Figura 3.13 se representa el reparto de carga para los puntos centrales #4, #5 y #6, donde se observa un mayor equilibrio de las cargas de contacto. Siendo los puntos #5 y #6 los más adecuados debido a que inducen un reparto con menores diferencias entre los valores extremos. Además las cargas de contacto se encuentran dentro de los valores límite establecidos de 60 y 270 N.

En las Figuras 3.14 y 3.15 se representa el reparto de cargas en el localizador nº 2. En este caso, se invierte el comportamiento de las curvas, ya que los puntos #7, #8 y #9 son simétricos de los puntos #1, #2 y #3. En este caso, los que presentan valores mínimos son los puntos #1, #2 y #3, y los que presentan mayor diferencia entre valores extremos son los puntos #7, #8, #9. Por las mismas razones indicadas anteriormente, se descartan estos 6 puntos. Por otro lado, al pertenecer los puntos #4, #5 y #6 al eje de simetría de la pieza, dan lugar a un mismo reparto de carga en los dos localizadores, siendo los puntos #5 y #6 los más favorables para la aplicación de la carga de apriete.

Figura 3.13: Reparto de cargas en el localizador nº 1 en #4, #5 y #6.

Figura 3.14: Reparto de cargas en el localizador nº 2 en #7, #8 y #9.

Figura 3.15: Reparto de cargas en el localizador nº 2 en #4, #5 y #6.

3.3.3. Aplicación del método para la determinación de las zonas de apriete

A pesar de que los puntos #5 y #6 son los más favorables desde el punto de vista del reparto de carga, podría darse la posibilidad de que existiera una interferencia entre el punto de aplicación de la fuerza de apriete y la posible trayectoria de herramienta de corte en el proceso de mecanizado, como se puede observar en la Figura 3.16.

En este caso, es necesario determinar puntos de apriete alternativos que den lugar a fuerzas de contacto que se encuentren dentro de los límites establecidos de 60 y 270 N.

Tal y como se propone en el apartado 3.2.4, si se define un elemento rectangular formado por los puntos de apriete #3, #9, #7 y #1 de la Figura 3.16, la variación de la función f se expresa en forma polinómica según la ecuación (3.6), que depende unívocamente de las coordenadas x e y de estos cuatro puntos, referidas al sistema de coordenadas local (SCL) de la Figura 3.11.

Si se sustituyen las coordenadas de los distintos nodos, se obtiene un siste-

la región definida por los puntos 1, 3, 7 y 9. Si se establecen 2 valores, uno máximo y otro mínimo, el número de curvas pasará a ser de 20, a las que se podrá nombrar curvas frontera o de contorno.

De este modo, todas las posiciones de apriete pertenecientes a la curva frontera conducirán a la aparición de una fuerza de contacto mínima de 60 N, o máxima de 270 N. Los puntos que estén a un lado sobrepasarán el límite establecido y los que estén en el otro serán menores que dicho límite. Así, para cada uno de los puntos de contacto, se tendrán dos ecuaciones, una de fuerza mínima y otra de fuerza máxima, que son las que se escriben a continuación:

$$\begin{aligned}\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy &= 60 \\ \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy &= 270\end{aligned}\tag{3.18}$$

donde los coeficientes α_0 , α_1 , α_2 y α_3 han sido calculados a partir de la ecuación (3.9), siendo sus valores los representados en la matriz de la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} f_{PL1} \\ f_{PL2} \\ f_{PL3} \\ f_{PL4} \\ f_{PL5} \\ f_{PL6} \\ f_{PL7} \\ f_{PL8} \\ f_{PL9} \\ f_{PL10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 182,29 & -5102,22 & -4810,56 & 146223,65 \\ 298,42 & -8870,35 & -6614,76 & 209864,39 \\ 381,96 & -11613,80 & -5514,11 & 179983,90 \\ 298,42 & -8870,35 & 3984,86 & -125977,81 \\ 182,29 & -5102,22 & 13026,06 & -414860,21 \\ 29,23 & 5102,22 & -423,85 & -146223,65 \\ 32,31 & 8870,35 & -318,83 & -209864,39 \\ 33,55 & 11613,80 & -114,59 & -179983,90 \\ 32,31 & 8870,35 & 205,53 & 125977,81 \\ 29,23 & 5102,22 & 580,25 & 414860,21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \end{bmatrix}\tag{3.19}$$

De esta forma, se obtienen 5 curvas frontera para la fuerza mínima de 60 N en el localizador nº1. Mediante el uso de las curvas frontera de la Figura 3.17 se busca restringir la zona de aplicación de la fuerza de apriete. Así, si se escogiera un punto de aplicación de la carga de apriete como el C, se puede afirmar que provocaría una fuerza de contacto superior a la de 60 N en todos los puntos de localización excepto en el punto PL1, siendo este punto susceptible de perder el contacto con la pieza. En caso de tratarse del punto B, al estar éste situado justo en la frontera, provocaría un reparto de cargas superior a 60 N en todos y cada uno de los puntos del localizador nº1.

Figura 3.17: Curvas frontera de fuerza mínima en el localizador n°1.

Figura 3.18: Curvas frontera de fuerza mínima en el localizador n°2.

Figura 3.19: Curvas frontera de fuerza máxima en el localizador nº1.

Figura 3.20: Curvas frontera de fuerza máxima en el localizador nº2.

El punto de apriete A, siempre cumpliría con holgura la condición de fuerza mínima para todos los puntos del localizador nº1.

Figura 3.21: Región válida de fuerza mínima para la aplicación de la carga de apriete.

Del mismo modo, se obtienen las otras cinco curvas frontera de fuerza mínima, correspondientes al localizador nº2, cuyas gráficas se representan en la Figura 3.18. Para el caso del establecimiento de una fuerza máxima de 270 N, existen un conjunto de 10 curvas, 5 se corresponden con el localizador nº1 (Figura 3.19) y otras 5 con el localizador nº2 (Figura 3.20). Como se puede observar en la Figura 3.19, el punto A, elegido como posición de apriete, da lugar siempre a cargas de contacto menores de 270 N en el localizador nº1, el punto de aplicación de la carga de apriete B, produce justo una carga de 270 N en el punto de localización PL3 y menores en el resto de puntos. El punto C provocará la aparición de fuerzas de contacto inferiores a 270 N en todos los puntos del localizador nº1, excepto en el PL3, donde se superará dicha fuerza; siendo susceptible de dar lugar a una deformación más acusada en su zona de contacto correspondiente.

Figura 3.22: Región válida de fuerza máxima para la aplicación de la carga de apriete.

En la Figura 3.20 se obtienen las otras cinco curvas frontera de fuerza máxima, correspondientes al localizador nº2.

Si se eliminan sistemáticamente todas las curvas a excepción de las más selectivas, que son las curvas correspondientes a PL1 y PL5 para la fuerza mínima en el localizador nº1 y las curvas correspondientes a PL6 y PL10 en el localizador nº2, se obtiene una región completamente cerrada para la fuerza mínima, como la representada en la Figura 3.21.

Por lo tanto, cualquier punto interior a esta región donde se aplique una fuerza de apriete de 1500 N, dará lugar a la aparición de fuerzas de contacto en todos los puntos de localización mayores que 60 N, asegurándose que la pieza nunca pierda el contacto con la pieza.

Del mismo modo, pero esta vez siendo selectivas las curvas correspondientes a los puntos PL3, PL4 y PL5 en el localizador nº1; y PL8, PL9 y PL10 en el localizador nº2, se consigue obtener una región cerrada para la fuerza máxima, como la representada en la Figura 3.22. Cualquier punto de

Figura 3.23: Región de intersección válida de aplicación de la carga de apriete.

apriete interior a ella dará lugar a cargas de contacto inferiores a 270 N en todos los puntos de contacto.

Como se deben cumplir al mismo tiempo los dos criterios de seguridad para el alcance de fuerzas de contacto, la región válida deberá ser la intersección de las dos anteriores, siendo por lo tanto la representada en la Figura 3.23.

3.4. Recapitulación

Los métodos habitualmente utilizados para la determinación de la distribución de carga de contacto entre dos cuerpos, además de utilizar algoritmos no lineales excesivamente complejos, precisan de unos grandes requerimientos en software y hardware. A pesar del alto potencial de los ordenadores actuales, debe emplearse un importante tiempo en preproceso, resolución e interpretación de los resultados, que no siempre ofrecen la precisión o calidad final exigidas, siendo necesario incrementar el número de iteraciones o

realizar un refinamiento de la malla. Además, pueden aparecer discontinuidades en la resolución de la función objetivo, lo que implicará una complicada consecución de la convergencia.

Con el fin de ofrecer una alternativa a las dificultades encontradas en los métodos habituales, se ha utilizado un método, que asumiendo ciertas simplificaciones, presenta la suficiente robustez y flexibilidad para resolver con la suficiente aproximación, los problemas de contacto que aparecen en los sistemas de amarre de piezas en máquinas-herramienta.

El método propuesto ha requerido del uso del MEF con el fin de obtener los coeficientes de la matriz de desplazamientos correspondiente a la formulación matricial. Para tal fin, se ha realizado un mallado utilizando solamente elementos estructurales cúbicos de 8 nodos, y aplicando las condiciones de contorno correspondientes para la pieza y los elementos de fijación. Los datos de la matriz de desplazamientos se han obtenido como fichero de salida de resultados de Ansys®, y han sido introducidos en el correspondiente programa de Matlab®, donde se ha implementado el procedimiento de cálculo del vector de cargas de contacto.

Para validar el método propuesto se ha utilizado un ejemplo de fijación de una pieza en un proceso de fresado, donde se ha discretizado en 5 puntos la línea de contacto existente entre los dos localizadores y la pieza. Una vez conocido el reparto de cargas, y al no ser éste el más idóneo por no existir un equilibrio en el vector de fuerzas de contacto, se han considerado posibles alternativas. Para ello se ha variado la posición del punto de apriete y se han calculado nuevos repartos de cargas hasta obtenerse el más idóneo.

Una vez conocido el reparto de cargas, se han establecido determinadas funciones que sean capaces de expresar el valor de la fuerza de contacto en un punto de localización dado en función de las coordenadas x e y de cualquier punto de apriete. De este modo, dado un problema de fijación de una pieza en una máquina-herramienta, y conocido el reparto de carga para varios puntos de apriete, es posible conocer el reparto de carga que provocaría cualquier otro punto sin necesidad de resolver un nuevo problema de minimización de la energía.

A partir de determinadas funciones de forma, se han hallado las curvas frontera para carga máxima y mínimas de contacto establecidas y se han representado regiones válidas para la aplicación de la carga de apriete. Estas regiones válidas permiten la selección de puntos alternativos para la implementación de la fuerza de apriete en caso de que existiera una interferencia entre la trayectoria de la herramienta de corte y el elemento de apriete.

Capítulo 4

Método de análisis local del contacto entre los elementos de sujeción y la pieza

Como ya se ha descrito en capítulos anteriores, la eficacia de los amarres dependerá en gran medida de su diseño y de la correcta elección de la magnitud de la fuerza de apriete necesaria para sujetar a la pieza en la mesa de trabajo de la máquina-herramienta. En los actuales procesos de mecanizado, debido a las altas exigencias de productividad, las fuerzas de corte y apriete requeridas son cada vez mayores y por lo tanto, mayor es la probabilidad de que la geometría del elemento de sujeción o de apoyo del sistema de amarre ejerza un daño sobre la superficie de la pieza, además de que se produzcan imprecisiones en su posicionamiento. En cambio, si la fuerza de apriete no es lo suficientemente grande podría contribuir a la aparición de errores geométricos por desplazamiento de la pieza. Como consecuencia de ello, habrá que adoptar una solución de compromiso con el fin de satisfacer los requisitos de productividad, no daño e inmovilización total.

Si en el capítulo anterior se realizó un estudio global o de deformaciones estructurales del contacto entre los elementos de sujeción y la pieza, el presente capítulo, está relacionado con el estudio del contacto en el ámbito de las deformaciones y tensiones locales.

Los estudios analíticos del contacto han aportado soluciones para dos tipos de geometrías del elemento que produce la indentación: cilíndrica y esférica; ya que el resto de geometrías tienden a reducirse a estas dos. Sin embargo, los casos que se dan en la realidad pueden ser bien distintos. Es más, en ocasiones incluso conviene, premeditadamente, que estas geometrías sean diferentes de los tipos cilíndrico y esférico con el objeto de mejorar el comportamiento tensional del contacto.

Entre las geometrías de contacto que conviene evitar se encuentran las que poseen discontinuidades o puntos singulares que carezcan de primera derivada en su expresión matemática. Como estableció Dundurs, las tensiones locales son muy elevadas en estos puntos, en relación a las que se obtendrían si se tratara de una distribución homogénea [46]. En el caso de contacto pieza-amarre, conviene por lo tanto, que ambas superficies sean continuas, lo que implica que la formación del área de contacto dependa progresivamente de la carga, es decir, que aumente conforme lo haga la fuerza normal. Otra de las características de este tipo de superficies, es que la presión en la frontera de contacto es nula y además, sigue una ley de variación continua dentro del área de contacto. Esta última condición, donde la derivada está acotada, es conocida como condición de Boussinesq [46].

En este capítulo se desarrolla un método semianalítico para el estudio de amarres de geometrías de contacto cilíndrica y esférica no convencionales, que compatibilicen elevadas fuerzas de apriete con tensiones y deformaciones superficiales soportables sin la necesidad de tener que recurrir al método de los elementos finitos (MEF). De este modo, se dispone de una herramienta de análisis más operativa y flexible para la realización de cálculos rápidos de optimización aplicables a una gran variedad de problemas de contacto mecánico. El método semianalítico presenta menor complejidad que otros más generalizados como el MEF y el método de los elementos del contorno (MEC), lo que significa que es capaz de solucionar determinados problemas con una mayor agilidad de cálculo y sin necesidad de recurrir a preprocesados y mallados previos. En este método no se ha considerado la fricción porque el sistema de apriete debe garantizar que la fuerza normal de contacto sea mucho más elevada que la de fricción, con la finalidad de evitar despegues y deslizamientos de la pieza.

El objetivo que se persigue mediante el desarrollo de este método consiste en alcanzar una mejor distribución de presiones y disminuir de este modo la deformación de la zona de contacto, consiguiendo un mayor equilibrio entre los requisitos de no-daño, productividad y calidad. Para ello se modeliza el

contacto pieza-apoyo para distintas geometrías de apoyo y apriete con perfil geométrico compuesto por tramos curvos y recto. Los resultados numéricos obtenidos con los métodos implementados se validan con los analíticos obtenidos para casos particulares.

A partir de las soluciones semianalíticas, obtenidas en el análisis de casos concretos de geometrías de contacto, se proporcionan unas correlaciones para la obtención, de modo directo, de la tensión subsuperficial y la presión de contacto máximas, en función del valor adimensionalizado del semiancho del tramo recto del perfil de contacto. El tiempo de cálculo que conlleva la aplicación de estas correlaciones es muy bajo al obtenerse de forma directa los valores de tensión y presión de contacto, representando por lo tanto, una eficiente herramienta para el diseño avanzado de la geometría de contacto entre elementos de apoyo y pieza.

4.1. Contacto entre la pieza y los elementos de sujeción

En los procesos de mecanizado sobre piezas prismáticas se realizan una gran cantidad de operaciones. Para mejorar las condiciones de estabilidad, los seis grados de libertad de la pieza deben permanecer totalmente restringidos por medio de un sistema de sujeción formado tanto por elementos de apoyo como por elementos de apriete (ver Figura 4.1 donde se representa un esquema típico de sujeción). Se asume que el material de la pieza obedece a un comportamiento linealmente elástico, y que los elementos de apoyo y de apriete son materiales mucho más rígidos que la pieza con la finalidad de evitar pérdida de posicionamiento de los localizadores. Para dar generalidad a las soluciones, se trabajará con magnitudes adimensionalizadas, aunque para la comprobación por el MEF se utilizarán magnitudes físicas tanto en lo relativo a las propiedades del material de la pieza como a las del elemento de sujeción.

El estudio que se va a realizar consistirá en el análisis cuasiestático de los elementos de sujeción (apoyo y de apriete) ejerciéndose solamente cargas normales compresivas sobre la pieza. Por otro lado, las grandes cargas de apriete con las que se va a analizar el problema de sujeción de piezas y la consiguiente aparición de grandes fuerzas normales en el contacto, justifican la nula consideración de los fenómenos de fricción y deslizamiento.

Como ya se ha comentado en el apartado anterior, se ha desarrollado un

Figura 4.1: Esquema típico de sujeción de una pieza prismática.

método semianalítico que permite analizar el diseño de la geometría del perfil de los elementos de sujeción. El estudio de la geometría del perfil es determinante, debido a la influencia de ésta sobre la distribución de presiones de contacto y sobre el daño que se producirá en la subsuperficie del material de trabajo. Por ello, el estudio se ha centrado sobre dos de los perfiles geométricos más utilizados, aunque evidentemente no son los únicos posibles. Estos dos perfiles geométricos se describen a continuación:

1. Elemento de sujeción de perfil circular (Figura 4.2a), que se corresponde al resuelto por la Teoría de Hertz. Esta teoría será utilizada como modelo de validación de los resultados obtenidos por el método semianalítico desarrollado en el presente trabajo.
2. Elemento de sujeción de perfil con tramo recto y extremos redondeados (Figura 4.2b). Para este perfil se aplicará el método propuesto variando la longitud del semiancho del tramo recto w , siendo comparados los resultados con los obtenidos mediante el MEF.

Figura 4.2: Perfiles de los elementos de sujeción.

Ambos perfiles aparecen tanto en elementos de apoyo de tipología de sujeción cilíndrica (ver Figura 4.3a) como de tipología esférica (ver Figura 4.3b). Los primeros se van a estudiar mediante el método semianalítico aplicable al caso de deformación plana, ya que la zona de contacto se corresponde a una banda ancha infinita cuyo semiancho de contacto a es parte proporcional del de Hertz a_0 . Y los segundos se van a estudiar mediante el método semianalítico bajo las condiciones de comportamiento tensional axisimétrico, debido a que la zona de contacto es circular de radio igual al semiancho de contacto a , y además aparece cargada con tensiones superficiales simétricas respecto del eje Z.

Figura 4.3: Geometrías de los elementos de sujeción.

Como consecuencia de la variación de w se obtendrán distintas distribuciones de la presión de contacto manteniendo constante la carga total de

apriete P_0 . El método semianalítico que se va a describir a continuación se ha desarrollado tanto para solucionar problemas de mecánica de contacto bajo condiciones de deformación plana (caso de tipología cilíndrica) como problemas bajo condiciones de comportamiento tensional axisimétrico (caso de tipología esférica).

4.2. Método desarrollado

El método desarrollado se estructura siguiendo la secuencia que se expone a continuación. En primer lugar, se parte de la expresión conocida de distribución de presiones para el contacto mecánico entre dos cuerpos dentro del semiespacio elástico, siendo la formulación diferente dependiendo del elemento de sujeción que se esté estudiando (cilíndrico o esférico). Esta expresión es convenientemente tratada para obtener una ecuación general que tenga en cuenta las condiciones de contorno del problema planteado. A continuación, una vez detectados los problemas de singularidad, se propone la resolución de las ecuaciones integrales de la expresión de distribución de presiones mediante la utilización de polinomios de aproximación de Chebyshev. Una vez resueltas las integrales de las expresiones de la distribución de presiones, se aplicará el método de cuadratura gaussiana para obtener el valor de la presión total P que ejerce el elemento de sujeción sobre la pieza. Por último, mediante la utilización del método de la secante, se ha determinado el valor del semiancho de contacto a , que depende de la carga de apriete P_0 y de la geometría del elemento de apoyo. Esta estructura se utiliza de forma análoga tanto para el estudio de elementos de tipo cilíndrico (deformación plana), como para elementos de sujeción de tipo esférico (comportamiento tensional axisimétrico), aunque la formulación matemática inicial sea distinta.

4.2.1. Elemento de sujeción de tipo cilíndrico

Distribución de presiones

El estudio del contacto mecánico está basado en el cálculo de la distribución de presiones normales debidas a la indentación de un cuerpo supuestamente rígido (elemento de sujeción cilíndrico en el que se apoya el material de trabajo). Para ello se asumen las siguientes condiciones de contorno iniciales de clase II [46], recogidas también en el Apéndice C de esta tesis doctoral:

1. No existe fricción ni deslizamiento entre pieza y elemento de apoyo o

apriete.

2. Se especifican los desplazamientos normales $\bar{u}_z(x)$, que siguen la geometría del perfil del elemento de apoyo o apriete.

En el problema de mecánica del contacto planteado, en el que los desplazamientos superficiales ($\bar{u}_z$) son conocidos, la incógnita $p(x)$ se determina a partir de las ecuaciones integro-diferenciales acopladas que resultan de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en el semiespacio elástico [46].

Al aplicar las condiciones de contorno, la ecuación (C.7) se simplifica a la siguiente expresión:

$$\int_a^{-a} \frac{p(s)}{x-s} ds = -\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \bar{u}'_z(x) \quad (4.1)$$

Dentro de los límites de integración de estas ecuaciones acopladas aparece un punto de singularidad cuando $s = x$, hecho por el que se denominan *ecuaciones integrales singulares*.

La parte de la ecuación (4.1) es un valor principal de Cauchy de primera clase (Apéndice D). Tomando como origen el centro de la región cargada, la ecuación tiene una solución general de la forma [46]:

$$p(x) = \frac{-\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}}{\pi^2 (a^2 - x^2)^{1/2}} \int_{-a}^a \frac{(a^2 - s^2)^{1/2} \bar{u}'_z(x)}{x-s} ds + \frac{C}{\pi^2 (a^2 - x^2)^{1/2}} \quad (4.2)$$

Si se realiza el cambio de variable $s = a \cdot m$ y se calcula la constante C aplicando la condición de Boussinesq [46], que establece que fuera de un área cerrada de la superficie ($z = 0$) la carga normal $p(x)$ es nula, y que en la frontera es continua, se obtiene la ecuación integral de distribución de presiones:

$$p(x) = \frac{aE^*}{2\pi (a^2 - x^2)^{1/2}} \left[\int_{-1}^1 \frac{(1-m^2)^{1/2} \bar{u}'_z(m)}{m - \frac{x}{a}} dm - \int_{-1}^1 \frac{(1-m^2)^{1/2} \bar{u}'_z(m)}{m-1} dm \right] \quad (4.3)$$

donde

$$E^* = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (4.4)$$

La ecuación (4.3) está expresada en función de la derivada del desplazamiento $\bar{u}'(z)$, y por lo tanto, depende de la variación de la geometría del perfil del elemento de sujeción.

Como ya se comentó en el apartado 4.1, las geometrías que se considerarán para la superficie del elemento de sujeción-apoyo son dos: superficie de perfil circular (Figura 4.2a) y superficie de perfil circular con tramo recto intermedio (Figura 4.2b). La primera consiste en el caso más simple y conocido de contacto hertziano con solución analítica conocida. La segunda geometría responde al supuesto donde el perfil del elemento de sujeción circular se modifica añadiendo un tramo recto de semiancho w y los extremos aparecen redondeados. Debido a que este tramo plano tiene menor orden de magnitud que el radio R , se puede suponer que la derivada del desplazamiento normal, $\bar{u}_z'(x)$ es continua en todo el área de contacto, para ello debe presentar continuidad entre el tramo recto y los curvos de los extremos. De este modo, al ser tangentes el tramo recto y los curvos, se evitan picos en el perfil de tensiones. La expresión para la derivada del desplazamiento $\bar{u}_z'(x)$ es la siguiente:

$$\bar{u}_z'(x) = \begin{cases} -\frac{x-C_x}{\sqrt{R^2-(x-C_x)^2}} & x \in [-a, -w] \\ 0 & x \in (-w, w) \\ -\frac{x+C_x}{\sqrt{R^2-(x+C_x)^2}} & x \in [w, a] \end{cases} \quad (4.5)$$

Obtención numérica de la distribución de presiones

La aplicación de la teoría del contacto mecánico [46] presenta importantes dificultades debido a que el desplazamiento en cualquier punto de la superficie de contacto depende de la distribución de presiones, siendo necesario por lo tanto, encontrar los valores de la presión en cualquier punto del contacto entre sólidos de un perfil geométrico dado a través de la resolución de ecuaciones integrales. El cálculo de la ecuación integral (4.2) se complica al aparecer un punto de singularidad en $s = x^*$. Este problema se puede solucionar si se utiliza un método numérico adecuado para el caso de estudio, que a la vez presente un coste computacional reducido. Para abordar este problema se ha utilizado un método de integración que está basado en una cuadratura automática para los valores principales de Cauchy.

El método de Hasegawa y Torii [31] es aplicable a las integrales de valores principales de Cauchy, que aparecen en la ecuación (4.3), y que se corresponden al siguiente tipo:

$$Q(f; c) = \int_{-1}^1 \frac{f(m)}{m-c} dm; \quad -1 < c < 1 \quad (4.6)$$

Con el fin de eliminar la singularidad, se puede escribir $Q(f; c)$ de la siguiente forma:

$$Q(f; c) = \int_{-1}^1 g_c(m) dm + f(c) \log \left(\frac{1-c}{1+c} \right) \quad (4.7)$$

donde $g_c(m)$ se define del siguiente modo:

$$g_c(m) = \frac{\{f(m) - f(c)\}}{(m-c)} \quad (4.8)$$

La singularidad se evita aproximando $f(m)$ y $f(c)$ mediante $p_N(m)$ y $p_N(c)$, respectivamente; de esta forma obtiene la siguiente expresión:

$$Q(f; c) \approx Q_N(f; c) = \int_{-1}^1 \frac{p_N(m) - p_N(c)}{m-c} dm + f(c) \log \left(\frac{1-c}{1+c} \right) \quad (4.9)$$

Una vez se ha eliminado la singularidad, el proceso de cuadratura automática comienza aproximando la función $f(m)$ mediante suma de polinomios de Chebyshev $T_k(m)$, cuyos coeficientes se calculan mediante la transformada rápida de Fourier. De esta forma, el cálculo de c en (a, b) se realiza de una forma eficiente con el mismo número de evaluaciones de la función y con un error estimado independiente del valor de c para funciones continuas.

$$\frac{p_N(m) - p_N(c)}{m-c} dt = 2 \sum_{k=0}^{N-1} {}'d_k T_k(m) \quad (4.10)$$

De este modo e integrando término a término se obtiene la siguiente fórmula de integración:

$$Q(f; c) \approx Q_N(f; c) = 2 \sum_{k=0}^{N/2-1} {}'d_{2k} / (1 - 4k^2) + f(c) \log \left(\frac{1-c}{1+c} \right) \quad (4.11)$$

donde $'$ denota que el primer término del sumatorio está dividido por dos. Los coeficientes d_k se calculan usando la siguiente relación recurrente:

$$d_{k+1} - 2cd_k + d_{k-1} = 2a_k^N, \quad k = N, N-1, \dots, 1, \quad (4.12)$$

en dirección hacia atrás con los valores iniciales de $d_N = d_{N+1} = 0$, donde se toma $a_N^N/2$ en lugar de a_N^N .

Los coeficientes a_k^N de los polinomios de Chebyshev se calculan mediante la siguiente fórmula:

$$a_k^N = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N f(\cos \pi j/N) \cos(\pi k j/N), \quad 0 \leq k \leq N. \quad (4.13)$$

El método de cuadratura de Hasegawa [31] ha sido validado con ejemplos de integrales para distintos valores de c , donde los errores son del orden de 10^{-10} a 10^{-14} .

Cuadratura Gaussiana

A partir de la distribución de presiones calculada en el apartado anterior se determina el valor de la presión total P que ejerce el elemento de sujeción sobre la pieza, para ello se utilizará la cuadratura gaussiana.

Para la determinación de la presión total P a partir de la función de distribución de presiones $p(x)$ se han utilizado 40 puntos de integración x_i .

$$P = \int_a^b p(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n c_i p(x_i) \quad (4.14)$$

Método de la secante

Para la resolución de la ecuación (4.3) es necesario conocer el valor de a y la derivada del desplazamiento de la superficie del elemento de sujeción $\bar{u}'_z(x)$. Dado el valor de la carga de apriete P_0 (que viene impuesta por las condiciones de fabricación), el semiancho de contacto a (que depende de P_0 y de la geometría del elemento de apoyo) se calcula mediante el método de la secante ajustando la siguiente expresión:

$$\int_{-a}^a p(x, a) dx - P_0 = 0 \quad (4.15)$$

4.2.2. Elemento de sujeción de tipo esférico

Distribución de presiones

En el estudio del contacto entre elementos de sujeción de tipo esférico y la pieza, el semiespacio elástico está cargado según una región circular de tensiones superficiales, que son rotacionalmente simétricas respecto al eje normal a la superficie. De este modo, si no se consideran los efectos de fricción, y se utiliza la formulación propuesta por Noble y Spence [46], la distribución de presiones viene determinada del siguiente modo:

$$p(\rho) = \frac{-4G}{\pi\rho} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^1 \frac{\lambda L(\lambda)}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda \quad (4.16)$$

donde la función $L(\lambda)$ depende del desplazamiento normal de la superficie de contacto $\bar{u}_z(\rho)$ y del semiancho de contacto a :

$$L(\lambda) = \frac{1}{2(1-\nu)a} \frac{d}{d\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{\rho \bar{u}_z(\rho) d\rho}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.17)$$

Figura 4.4: Variación de la geometría del perfil axisimétrico.

El desplazamiento normal del semiespacio elástico $\bar{u}_z(\rho)$, como se puede observar en la Figura (4.4), se compone de un desplazamiento de cuerpo δ y de la función $U_z(\rho)$, que representa la geometría de la superficie. $U_z(\rho)$ toma los siguientes valores dependiendo de la zona de la geometría que se esté evaluando:

$$U_z(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \leq t \frac{a_0}{a} \\ -\frac{(\rho - t \frac{a_0}{a})^2 a^2}{2R} & \text{si } \rho > t \frac{a_0}{a} \end{cases} \quad (4.18)$$

A los términos integrales de las ecuaciones (4.16) y (4.17) se les denominará a partir de ahora como $H(\rho)$ y $F(\lambda)$, respectivamente, siendo sus expresiones las siguientes:

$$H(\rho) = 2(1-\nu)a \int_{\rho}^1 \frac{\lambda L(\lambda)}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda \quad (4.19)$$

$$F(\lambda) = \int_0^{\lambda} \frac{\rho \bar{u}_z(\rho) d\rho}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.20)$$

Si se introduce el valor de la variación del desplazamiento normal del semiespacio elástico $\bar{u}_z(\rho)$, expresado en función del desplazamiento de cuerpo δ y de la geometría rectificadora U_z , dentro de la ecuación (4.20):

$$F(\lambda) = \int_0^{\lambda} \frac{\rho \bar{u}_z(\rho)}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} d\rho = \delta \int_0^{\lambda} \frac{\rho d\rho}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_0^{\lambda} \frac{\rho U_z}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} d\rho = -\delta\lambda + G(\lambda) \quad (4.21)$$

El término integral $G(\lambda)$ de la ecuación anterior presenta una singularidad que se elimina realizando el cambio de variable $\rho = (\lambda - m^2)$:

$$G(\lambda) = \int_0^{\sqrt{\lambda}} \frac{2(\lambda - m^2) U_z(\lambda - m^2)}{(2\lambda - m^2)^{\frac{1}{2}}} dm \quad (4.22)$$

A continuación, si se desarrolla la ecuación (4.19) se observa que es dependiente de la derivada de $G(\lambda)$, de modo que:

$$H(\rho) = -\delta \int_{\rho}^1 \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_{\rho}^1 \frac{\lambda G'(\lambda)}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda = \delta \sqrt{1 - \rho^2} + J(\rho) \quad (4.23)$$

Al igual que la función $G(\lambda)$, la función $J(\rho)$ presenta una singularidad que se elimina mediante el cambio de variable $\lambda = (\rho + m^2)$:

$$J(\rho) = \int_{\rho}^1 \frac{\lambda G'(\lambda)}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda = \int_0^{\sqrt{1-\rho}} \frac{2(\rho + m^2) G'(\rho + m^2)}{\sqrt{2\rho + m^2}} d\rho \quad (4.24)$$

La presión se obtendrá a partir de la derivada de la función $H(\rho)$, que sustituida en la ecuación (4.16) dará lugar a la siguiente expresión para la distribución de presiones:

$$p(\rho) = \frac{-2G}{\pi(1-\nu)a} \left(\frac{-\delta}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{J'(\rho)}{\rho} \right) \quad (4.25)$$

Además, $p(\rho)$ debe cumplir la condición de Boussinesq, por lo tanto, en la ecuación (4.25) se debe establecer que $p(\rho \rightarrow 1) = 0$:

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{\delta\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = J'(1) \quad (4.26)$$

De la ecuación anterior se deduce que $\delta = G'(1)$, de modo que la presión quedará definida finalmente de la siguiente forma:

$$p(\rho) = \frac{-2G}{\pi(1-\nu)a} \left(\frac{-G'(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{J'(\rho)}{\rho} \right) \quad (4.27)$$

Obtención numérica de la distribución de presiones

Como se puede observar en la ecuación (4.27), la presión depende de la determinación de las funciones $G'(\lambda)$ y $J'(\rho)$, por lo que es necesario seguir el siguiente proceso de cálculo: en primer lugar, se realiza la integración de la función $G(\lambda)$ en los ceros del polinomio de Chebyshev (de grado 20), mediante el cálculo de su integral gaussiana; a partir de estos valores se obtienen los coeficientes correspondientes a la factorización, con los que se determina la función aproximada de la derivada $G'(\lambda)$; por último y de igual modo, se obtiene $J(\rho)$ y su derivada $J'(\rho)$.

Al realizar dos veces la integración y derivación aparecen imprecisiones debidas a la acumulación de errores en la resolución numérica. Para evitar estos errores, y por lo tanto, que las operaciones resulten computacionalmente

rentables, se ha afinado mucho más en el primer proceso de integración (utilizándose 96 puntos de integración para la cuadratura gaussiana de $G(\lambda)$), mientras que en el resto de cuadraturas se han realizado con 10 puntos de integración.

Cuadratura Gaussiana

Al igual que para el estudio del elemento de tipo cilíndrico, la presión total se determina aplicando cuadratura gaussiana en la distribución de presiones, siendo calculada del siguiente modo:

$$P = \int_0^a p(r) 2\pi r dr \simeq \sum_{i=1}^n c_i p(r_i) \quad (4.28)$$

donde $p(r) = p(\rho a)$.

Método de la secante

Para resolver la ecuación (4.16) es necesario conocer el semiancho de contacto a , así como la variación de geometría de la superficie U_z . Debido a que la carga de apriete P_0 viene predeterminada por las condiciones de fabricación, el semiancho de contacto a se calcula a partir de ésta mediante el método de la secante, de modo que:

$$\int_{-a}^a 2\pi r p(r, a) dr - P_0 = 0 \quad (4.29)$$

4.3. Ejemplo de aplicación

Se han establecido 9 casos de estudio con objeto de poder realizar un análisis representativo de situaciones posibles de los elementos de sujeción. El primero se corresponde a un elemento de sujeción de perfil circular (caso hertziano donde $a_0 = 0,0025$ m), utilizado para validar los resultados obtenidos por el método semianalítico; y los siguientes casos (2–9) se corresponden al elemento de sujeción de tramo recto con extremos redondeados, donde se modifica el valor de w , que puede ser debido a un cambio premeditado en el diseño o al desgaste producido en condiciones reales del proceso. Con la finalidad de mantener constante la carga total P_0 , el semiancho de contacto a

debe ir aumentando progresivamente al aumentar w . El material de la pieza es un acero AISI 1040 con módulo de Young de $190 \cdot 10^9$ Pa y coeficiente de Poisson ν de 0,3; y el del elemento de sujeción, acero endurecido con módulo de Young de $190 \cdot 10^{12}$ Pa y un coeficiente de Poisson ν de 0,39.

En la Tabla 4.1 aparecen los valores de las distintas variables geométricas para cada uno de los 9 casos de estudio, donde t , es una variable adimensional que representa la relación entre los semianchos w y a_0 .

Casos	Radio R (m)	Semiancho w ($\cdot 10^{-3}$ m)	$t = \frac{w}{a_0}$
1-Hertz	0,1	0	0
2	0,1	0,25	0,1
3	0,1	0,5	0,2
4	0,1	0,75	0,3
5	0,1	1	0,4
6	0,1	1,25	0,5
7	0,1	1,5	0,6
8	0,1	1,75	0,7
9	0,1	2	0,8

Tabla 4.1: Características de los perfiles de contacto analizados.

Como consecuencia de la variación de w para cada uno de los casos de la Tabla 4.1 se obtendrán distintas distribuciones de la presión de contacto manteniendo constante la carga total de apriete P_0 , con valores de 1×10^7 N/m para el estudio de la tipología del elemento de sujeción cilíndrica y de 43.000 N para el estudio de la tipología del elemento de sujeción esférica.

4.3.1. Validación del método

Como se ha comentado anteriormente, previamente a la obtención de los resultados de distribución de presiones para los casos de perfil de tramos rectos, se ha considerado adecuado utilizar la teoría de Hertz [33], parcialmente reproducida en el Apéndice E, y el MEF aplicados al caso del perfil circular (caso 1 de la Tabla 4.1) como modelos de validación del método semianalítico desarrollado en el presente artículo. En las Figuras (4.5) y (4.6) se representan los resultados de distribución de presiones, para el estudio bajo las hipótesis anteriores, respecto a la variación de la zona de contacto, según se realice mediante el método analítico de Hertz, el método semianalí-

tico (implementando las ecuaciones con el programa Matlab®5.3.), y el MEF (este último utilizando los resultados obtenidos en Ansys®5.4.).

Figura 4.5: Distribución de presiones para perfil circular. Tipología cilíndrica.

Figura 4.6: Distribución de presiones para perfil circular. Tipología esférica.

Como se puede apreciar, el grado de exactitud con el que se aproximan las tres curvas en las dos gráficas es bastante alto, siendo el error, referido a la carga en cada punto, del orden del 1 % y del 0,5 %, para deformación plana

y estado tensional axisimétrico, respectivamente. Esto permite considerar el método propuesto en el presente trabajo como suficientemente preciso para la resolución de problemas de cálculo de la distribución de presiones para las geometrías de contacto de elementos de sujeción analizadas.

4.3.2. Resultados y discusión

Una vez que se ha utilizado tanto la teoría de Hertz como el MEF para resolver el caso más sencillo de contacto y de este modo validar el modelo desarrollado, se han resuelto el resto de casos mediante el método semianalítico donde varía el semiancho del tramo recto w tanto para el estudio de deformación plana (aplicado a elementos de sujeción cilíndricos) como para el estudio axisimétrico (aplicado a elementos de sujeción esféricos). Los resultados de distribución de presión se contrastarán con los obtenidos mediante el estudio por el MEF para comprobar el grado de exactitud de los cálculos realizados. Posteriormente se determinarán los mapas isotensionales en la subsuperficie de la pieza, estudiándose el efecto del daño por indentación ejercido por el elemento de sujeción. Conocidos los mapas isotensionales y la distribución de presiones para cada tipo de elemento de sujeción y para cada caso de estudio de la modificación del perfil, se podrán determinar las correlaciones que expresen la variación de tensión y presión máximas con respecto a $t = \frac{w}{a_0}$. Estas correlaciones serán de utilidad para la realización de un diseño optimizado de los elementos de sujeción con el objeto de que éstos ejerzan el menor daño superficial posible sobre la pieza. Finalmente, a modo de resumen, se compararán los métodos utilizados (analítico de Hertz, semianalítico, MEF y correlaciones) para analizar el problema de contacto planteado.

Distribución de presiones

- **Elemento cilíndrico:** En la Figura 4.7 se representa la variable adimensionalizada $p(x)/p_0$ (presión de contacto en cada punto dividida por la máxima presión alcanzada en el método de Hertz, que es $p_0 = 2,575 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$) frente a $\frac{x}{a_0}$, para cada uno de los casos expuestos en la Tabla 4.1.

Se observa que la mayor presión de contacto sobre un punto se alcanza para el caso 1 (Hertz) justo en la mitad del semiancho de contacto ($x = 0$), mientras que para los demás casos (2-9) el máximo se produce

Distribución de presiones - Elemento cilíndrico - Semianalítico

Figura 4.7: Distribución de presiones obtenida por el método semianalítico para perfil cilíndrico con tramos rectos.

Distribución de presiones - Elemento cilíndrico - MEF

Figura 4.8: Distribución de presiones obtenida por el MEF para perfil cilíndrico con tramos rectos.

Figura 4.9: Distribución de presiones obtenida por el método semianalítico y por MEF para perfil cilíndrico con tramos rectos.

en dos puntos, siendo su valor cada vez menor a medida que aumenta el valor del tramo recto w . También se puede observar el desplazamiento de la posición de los valores máximos hacia los extremos de la zona de contacto según aumenta el ancho de contacto. En la Figura 4.8 se muestran los resultados de distribución de presión adimensional para el mismo planteamiento de la Figura 4.7, pero resuelto mediante el MEF.

Con el propósito de comparar ambos resultados obtenidos se representan de manera conjunta las dos gráficas de las Figuras 4.7 y 4.8 en la Figura 4.9, donde se observa que no hay apenas diferencias significativas, aunque se puede apreciar un mayor error (del orden del 5%) en los casos donde la carga máxima es menor.

- **Elemento esférico:** En la gráfica de la Figura 4.10 se observa la distribución de presiones adimensionalizada (p/p_0) frente a x/a_0 , donde la presión de contacto máxima de Hertz alcanza el valor $p_0 = 3,4 \cdot 10^9$ N/m² y el valor para el semiancho de contacto hertziano a_0 sigue siendo 0,0025 m. Al igual que para el estudio de deformación plana, se observa la misma tendencia al aumentar w , es decir, crecimiento del semiancho de contacto a para mantener constante la carga de apriete, y mejor reparto de la distribución de presiones, lo que implica que la

máxima presión local por indentación se atenúe considerablemente al mismo tiempo que se desplaza hacia los extremos.

Distribución de presiones - Elemento esférico - Semianalítico

Figura 4.10: Distribución de presiones obtenida por el método semianalítico para perfil esférico con tramos rectos.

Con el mismo procedimiento utilizado en el estudio de deformación plana se han comparado los resultados de distribución de presión obtenidos mediante el método semianalítico con los resueltos mediante el MEF. De este modo se representa en la Figura 4.11 la distribución de presiones obtenida por el MEF. En la Figura 4.12 se comparan estos resultados con los obtenidos con el método semianalítico, observándose que si bien la tendencia de las curvas sigue un mismo patrón, la aproximación entre las mismas es menos buena que la obtenida mediante el estudio de deformación plana, estando el error comprendido entre el 10 % y el 15 % dependiendo de qué zona de la curva se esté evaluando. Este incremento del error se debe a que se necesitan cuatro diferenciaciones e integraciones numéricas para obtener un perfil de presiones, mientras que en deformación plana sólo se necesitaban dos.

Figura 4.11: Distribución de presiones obtenida por el MEF para perfil esférico con tramos rectos.

Figura 4.12: Distribución de presiones obtenida por el método semianalítico y por el MEF para perfil esférico con tramos rectos.

Mapas tensionales

- Elemento cilíndrico:** Para obtener el mapa tensional en la subsuperficie debido al contacto entre la sujeción y la pieza se ha utilizado el algoritmo desarrollado por Estrems et al. [22], descrito también en el Apéndice F de esta tesis, basado en la discretización de una distribución de presiones como superposición de distribuciones triangulares. De este modo en la Figura 4.13 se observan los mapas tensionales correspondientes a los casos 1, 4, 6 y 9. Se observa que la tensión cortante máxima se representa según curvas isotensionales que varían en posición y magnitud con respecto a w . De este modo, para el caso 1 (contacto hertziano) aparece un único máximo posicionado en el centro de la gráfica; y para el resto de los casos (4, 6 y 9) se observa que aparecen dos máximos, cuyo valor es cada vez menor y con mayor tendencia a aproximarse hacia los extremos y a la superficie de la pieza, conforme aumenta el valor de w . El porcentaje de reducción de la tensión cortante máxima entre los casos 1 y 9 es de un 40 %.

Figura 4.13: Mapas tensionales para elemento cilíndrico. a) Caso 1, b) Caso 4, c) Caso 6, d) Caso 9.

- Elemento esférico:** En la Figura 4.14, obtenida en esta ocasión a partir de los resultados de las simulaciones realizadas con Ansys®5.4., se muestra la variación de la tensión equivalente de von Mises para los casos 1-9 de la Tabla 4.1. Se puede apreciar el mismo patrón de com-

portamiento que para el estudio de deformación plana del elemento de sujeción-apoyo cilíndrico, es decir, al aumentar w , la máxima tensión disminuye su valor (hasta un 60 %) desde el caso hertziano (más desfavorable) hasta el caso que presenta mayor valor de tramo desgastado, desplazándose también hacia los extremos de la región de contacto, y hacia la superficie de la pieza.

Figura 4.14: Mapas tensionales para elemento esférico.

Consecuentemente, aparecen dos efectos, el primero de ellos muy beneficioso, ya que la mayor reducción de la tensión subsuperficial máxima ha sido de un 40 % y un 60 %, respectivamente para el elemento cilíndrico y esférico, y el segundo nocivo, ya que las tensiones máximas se generan en zonas cada vez más cercanas a la superficie de la pieza y a los extremos de la zona de contacto. En caso de originarse deformación plástica, se alteraría la microestructura del metal y por ende, de sus propiedades mecánicas. Según el criterio de Tresca, la deformación plástica aparece cuando $\tau_{max} \geq \frac{\sigma_y}{2}$, y según Johnson [46], cuando $P_0 = 3 \sigma_y$. Combinando ambas expresiones, si se cumple que $P_0 \geq \frac{5}{3} \sigma_y$, la indentación provocará que la deformación de-

je de ser predominantemente elástica, para ser elastoplástica. Entonces, las propiedades mecánicas en las zonas de mayor tensión subsuperficial podrían experimentar un endurecimiento y aumento de las tensiones residuales, además de producir cráteres en los extremos de la zona de contacto, que darían lugar a la aparición de defectos en la subsuperficie de la pieza final, e incluso afectarían negativamente sobre una nueva fase de mecanizado [66].

Correlaciones para diseño óptimo

Con el fin de reducir el efecto nocivo descrito anteriormente y con el ánimo de ofrecer un procedimiento óptimo de diseño de los elementos de sujeción, se han propuesto unas correlaciones que representan el valor adimensionalizado de la presión de contacto y de las tensiones máximas, frente a la presión y tensión máxima de Hertz, respectivamente, en función del valor del semiancho del tramo recto. Con estas correlaciones se podrán establecer búsquedas del valor del semiancho del tramo recto sin necesidad de resolver el problema por el método semianalítico. Así se hallará la menor tensión máxima que se encuentre lo más alejada posible de la superficie de la pieza.

- **Elemento cilíndrico:** En la Figura 4.15 se puede observar la variación de los valores adimensionales (respecto del caso hertziano) de la tensión cortante máxima y de la presión máxima en función de la variación de $t = w/a_0$. Tanto la presión como la tensión cortante máximas correspondientes al caso más favorable ($t = 0,8$) presentan una reducción de un 35 % y un 40 %, respectivamente en relación al caso más desfavorable (hertziano).

A partir de los valores representados en las curvas de la Figura 4.15, y en función de t , se obtienen mediante correlación, las siguientes expresiones para la presión y la tensión cortante máximas, respectivamente:

$$\begin{aligned}\frac{p_{max}}{p_0} &= -0,8361t^3 + 1,4834t^2 - 1,0927t + 1 \\ \frac{\tau_{max}}{\tau_0} &= -0,8117t^3 + 1,6282t^2 - 1,2827t + 1\end{aligned}\tag{4.30}$$

- **Elemento esférico:** En la Figura 4.16 se puede observar la variación de los valores adimensionales (respecto del caso hertziano) de la tensión máxima equivalente de von Mises y de la presión máxima en función de la variación de $t = w/a_0$.

Figura 4.15: Variaciones del cortante máximo y de la presión máxima.

Se puede observar que tanto la presión como la tensión, correspondientes al caso 9 se reducen en un 60 % con respecto al caso hertziano. Al igual que se realizó para el elemento cilíndrico, a partir de las curvas de la Figura 4.16, y en función de t , se obtienen mediante correlación, las siguientes expresiones para la presión y la tensión de von Mises, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{p_{max}}{p_0} &= -1,0637t^3 + 1,9898t^2 - 1,6269t + 1 \\ \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} &= -0,5601t^3 + 1,3835t^2 - 1,4963t + 1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.3.3. Comparación de los métodos estudiados

En la Tabla II aparecen clasificados los métodos que pueden ser utilizados para alcanzar las soluciones de los problemas de contacto planteados. Como resumen, cabe mencionar que el MEF es el método de mayor aplicación a

Figura 4.16: Variación la tensión de von Mises y de la presión máximas.

problemas de contacto en general, sin embargo tiene como desventajas: el tiempo de preproceso y un mayor tiempo de cálculo, debido a las no linealidades de los elementos de contacto utilizados; y la posible aparición de puntos de singularidad por problemas de enlace entre los puntos de contacto con las superficies objetivo. El método de Hertz es el menos complejo y el de menor tiempo de cálculo al tratarse de un método directo, sin embargo sólo es aplicable a casos muy concretos (caso de perfil circular). El método semianalítico aún siendo aplicable bajo determinadas suposiciones iniciales, dándose todas en la sujeción de piezas prismáticas en máquinas-herramienta (p.e.: condición de Boussinesq, deformación plana y estado tensional axisimétrico, condiciones de no fricción, etc.), presenta un menor tiempo de cálculo por requerir un menor número de iteraciones, por la menor complejidad en comparación con el MEF, y además por no precisar de preproceso. Una vez que se han obtenido los resultados mediante la aplicación del método semianalítico, se pueden deducir unas correlaciones para expresar de forma directa la variación de las presiones y tensiones en función del valor adimensionalizado del semiancho del tramo recto (w).

Método de análisis		Geometría de estudio	Tiempo de cálculo	Tiempo de pre-proceso
FEM	<div><div>* Singularidad</div> </div>	TODAS*	ALTO	ALTO
Método semianalítico	<div><div>Sujeción rígida</div><div>Pieza flexible</div> </div>	TODAS con condición de Boussinesq	BAJO	NINGUNO
Correlaciones	<div><div>Tipología Esférica</div><div>Tipología Cilíndrica</div> <div>$t = w/a_{\text{HERTZ}}$$t = w/a_{\text{HERTZ}}$</div></div>	<div>CASOS DE FAMILIAS</div> <div>Tipologías:</div> <div>➤ Esférica</div> <div>➤ Cilíndrica</div>	MUY BAJO	NINGUNO
Analítico HERTZ		CASO PERFIL CIRCULAR	MUY BAJO	NINGUNO

Tabla 4.2: Comparación entre los distintos métodos estudiados.

4.4. **Recapitulación**

En el contacto mecánico entre el elemento que actúa de indentador (elemento de sujeción) y la pieza, la fuerza normal máxima depende de la geometría de contacto. Un diseño adecuado de esta geometría de contacto evitará la aparición de daño por indentación, además de disminuir la deformación o penetración del elemento de sujeción sobre la pieza de trabajo. En el caso de que la geometría de contacto se corresponda con la hertziana, la formulación

existente permite conocer las fuerzas normales de forma directa, sin embargo, en el diseño de los sistemas de amarre de piezas, donde es conveniente modificar la geometría de los elementos de sujeción con el fin de mejorar las condiciones del proceso de mecanizado y la calidad de la pieza, se requiere del uso de otras herramientas de análisis diferentes. Con este objeto se ha desarrollado un método de relativa sencillez de implementación y agilidad de cálculo, capaz de resolver determinados problemas de contacto entre los elementos de sujeción y la pieza en máquinas-herramienta. En comparación con el MEF, este método semianalítico (aplicable bajo las hipótesis expuestas), no precisa de preprocesado y mallado previos, y además presenta un menor tiempo de cálculo debido al menor número de iteraciones y complejidad.

A la vista de los resultados de distribución de presión y los mapas tensionales obtenidos, para los diferentes casos y elementos de apriete-apoyo estudiados, se establecen las siguientes conclusiones:

- A medida que se modifica el perfil geométrico del elemento de sujeción mediante la inclusión de tramos rectos de mayor longitud, se obtienen valores de presión máxima de contacto y tensiones menores, con mejor reparto entre los puntos en los que se subdivide el ancho de contacto, originando un menor daño por indentación sobre la superficie de la pieza mecanizada.
- Modificando el valor del tramo recto, también se produce un desplazamiento de la presión máxima superficial y de las tensiones subsuperficiales máximas hacia los extremos de la zona de contacto. Además las tensiones subsuperficiales máximas tienden a aparecer cada vez más cerca de la superficie de contacto.

Mediante el desarrollo de este método se han determinado la distribución de presiones, el estado de tensiones subsuperficiales, y la deformación local normal provocada por el elemento de sujeción sobre la superficie de la pieza. Como se desarrollará en el siguiente capítulo, el conocimiento de esta deformación local permitirá hallar la magnitud de los errores en el posicionamiento de la pieza en la máquina-herramienta de control numérico, y compensarlos mediante la generación de nuevas trayectorias de la herramienta de corte en un programa de CAD-CAM.

Capítulo 5

Base de datos relacional para la integración de los métodos de análisis de sistemas de sujeción

En los capítulos anteriores se han desarrollado tres métodos de análisis de los sistemas de amarre con el objetivo de que éstos cumplan correctamente sus funciones. Resumidamente, éstas consisten en posicionar la pieza con la mayor precisión posible sobre la mesa de trabajo y en aplicar las fuerzas de apriete adecuadas para asegurar su inmovilidad total, sin que se origine una deformación estructural o por indentación local excesiva sobre la pieza. Los resultados alcanzados mediante el desarrollo de estos tres análisis han sido los siguientes: los valores de precisión de la pieza, traducidos en una estimación de las cotas críticas y de las incertidumbres de fabricación asociadas, en el análisis de la precisión dimensional presentado en el Capítulo 2; las reacciones o reparto de cargas en los puntos de contacto entre los elementos de localización del sistema de amarre y las superficies de la pieza, las deformaciones estructurales de la superficie mecanizada de la pieza y la determinación de zonas de apriete óptimas, en el análisis del reparto de cargas y de zonas de apriete óptimas, desarrollado en el Capítulo 3; y por último, en el análisis de deformación o daño local descrito en el Capítulo 4, se han obtenido la distribución de presión de contacto, los mapas tensionales y las deformaciones

locales provocadas por la indentación de los elementos de sujeción sobre la superficie de la pieza.

A pesar de que se han propuesto e implementado diversos métodos y técnicas de mejora del diseño de los sistemas de sujeción, entre ellos los propuestos en los Capítulos 2, 3 y 4 de la presente tesis, éste sigue constituyendo uno de los principales cuellos de botella entre los sistemas CAD y CAM de los procesos de mecanizado. Las dificultades encontradas se deben a que los métodos desarrollados utilizan y generan una información muy heterogénea (p.e.: los atributos que describen el proceso de mecanizado y del sistema de sujeción, los atributos de diseño de la pieza; los parámetros relacionados con el CAE y los resultados obtenidos en cada análisis, etc.). Por consiguiente, el diseño y análisis de los sistemas de sujeción no sólo deben utilizar métodos que sirvan de puente entre los sistemas CAD-CAM, sino que se ha de llegar aún más lejos. Por esta razón, conviene que además exista un soporte que maneje de una forma ágil y automatizada todos los datos relacionados con el estudio del sistema formado por el sistema de amarre y la pieza.

Este soporte está constituido, habitualmente, por las bases de datos de los sistemas CAFD, que como se describió en la introducción, son bastante efectivos en el ámbito en el que se desarrollan. Sin embargo, los sistemas CAFD por lo general no han tenido en cuenta las deformaciones locales y estructurales, en conjunción con el análisis de las cotas e incertidumbres asociadas. Por esta razón, en esta tesis doctoral se ha desarrollado una base de datos relacional que permite una ágil búsqueda y extracción de los datos críticos de los diferentes análisis necesarios para examinar el sistema de sujeción. La base de datos se alimenta de la información suministrada por el modelo CAD de la pieza y del utillaje de sujeción, los datos metrológicos de los utillajes de sujeción y la preforma de la pieza, de donde se obtienen las desviaciones e incertidumbres de fabricación, la elección y posicionamiento de los utillajes de sujeción para el estudio de la accesibilidad de la herramienta de corte a la pieza (CAPP), y el análisis mecánico mediante técnicas CAE de las deformaciones estructurales y locales que se producen en la pieza. Esta base de datos persigue la integración total de los sistemas CAD, CAPP, CAE y CAM que permita obtener una información de los errores provocados por un inadecuado diseño o posicionamiento del sistema de amarre, y que además proporcione los datos necesarios para compensar estos errores mediante la generación de nuevas trayectorias de la herramienta de corte en el mecanizado de la pieza en una máquina-herramienta de control numérico (MHCN), lo que permitirá obtener mayores precisiones en las cotas críticas de fabricación.

En el ejemplo ilustrativo que se plantea en este capítulo se implementa de modo práctico, la integración de los tres métodos de análisis presentados en esta tesis doctoral, mostrando los programas y los formatos de datos utilizados. Esta base de datos relacional para la integración de métodos de análisis de los sistemas de sujeción en máquinas-herramienta permite combinar todos los errores estudiados en el ejemplo ilustrativo (error de prerreglaje, error de referencia, error de deformación estructural y error de indentación local), y así generar a partir de ellos una trayectoria de herramienta que los compense.

5.1. Fuentes de error de los sistemas de sujeción de piezas en máquinas-herramienta

El objetivo final del desarrollo de una base de datos relacional es la integración de los métodos de análisis descritos en los anteriores capítulos de modo que se obtenga una herramienta más compacta y general de análisis del sistema de amarre, que extraiga la información necesaria para fabricar los componentes con la máxima calidad y productividad posible.

Pero antes de desarrollar la base de datos relacional, es necesario definir qué información de cada análisis ha de ser extraída y compartida. El primer objetivo en la fabricación de componentes es la obtención de mayor calidad en las piezas, que en este caso se traduce en el cumplimiento de las tolerancias especificadas. Pero si consideramos calidad en un sentido más amplio, debe entenderse como satisfacción del cliente o mayor perfección en la ejecución de las prestaciones del componente. Por ello, un análisis más profundo de las fuentes de error y su cuantificación llevará a la mejora continua de los actuales sistemas de calidad. Dichas fuentes de error pueden extraerse a partir del estudio del ciclo de operaciones del proceso de mecanizado.

En primer lugar, es necesario realizar una preparación o puesta a punto de la máquina-herramienta, de este modo, una de las operaciones previas al mecanizado más importantes es la selección, medición y montaje del utillaje de sujeción en la mesa de trabajo de la máquina-herramienta. Durante esta operación puede aparecer un error debido bien a que los elementos de sujeción no poseen el nivel de tolerancia exigido, o bien por una errónea manipulación y montaje por parte del operario. Este error, denominado error de prerreglaje tiene como consecuencia que el sistema de coordenadas del sistema de sujeción (SCES) varíe su posición con respecto al sistema de coordenadas de la máquina-herramienta (SCMH), como se puede observar en la Figura 2.3.

Por otro lado, puede aparecer un error de referencia, debido a que las superficies de referencia de la preforma (que son las que apoyan sobre los elementos localizadores) presentan irregularidades superficiales. Estas irregularidades superficiales tienen como consecuencia que el sistema de coordenadas intrínseco de la pieza (SCIP) varíe con respecto al SCES y SCMH (Figura 2.4). El siguiente paso consiste en fijar la pieza aplicando una fuerza de apriete, que en caso de que exceda de un determinado valor, puede provocar deformación elástica o plástica sobre la pieza, conociéndose este tipo de error como error de deformación. Una vez comenzada la operación de mecanizado aparecen una serie de errores como son el error originado por el límite de precisión en el posicionamiento de la máquina-herramienta, el error de deformación debido a las fuerzas de corte, el error provocado por el desgaste de la herramienta, el error debido al calor generado durante el proceso de corte, etc. Aspectos estos últimos que no son objeto de estudio de la presente tesis doctoral, ya que los métodos desarrollados consideran a la máquina-herramienta como ideal, y se centran únicamente en el estudio del error introducido por los elementos de sujeción.

5.2. Desarrollo de la base de datos relacional

Con el objeto de realizar un estudio más general y compacto de los errores producidos por los sistemas de amarre, es necesario integrar los métodos de análisis descritos en los capítulos anteriores. De este modo, como se observa en el esquema de la Figura 5.1, el proceso de análisis de los elementos de sujeción parte de la información suministrada por el sistema CAD acerca de la geometría de la pieza y de los elementos de sujeción. Esta información viene expresada en el formato de intercambio de datos STEP, con información sobre las dimensiones, tolerancias dimensionales y de forma de la pieza y los elementos de sujeción, entre otras. Ambas bases de datos han de ser capaces de suministrar la información adecuada para llevar a cabo el análisis de la precisión, anteriormente descrito en el Capítulo 2. Este análisis dará lugar al conocimiento de los errores de referencia y prerreglaje, descritos en el apartado anterior.

Por otro lado, a partir de estas dos bases de datos de los modelos de la pieza y de los elementos de sujeción, se llevará a cabo la fase de preproceso requerida por el método de análisis del reparto de cargas entre los elementos localizadores del sistema de sujeción y la pieza, descrito en el Capítulo 3. Conocido el reparto de cargas de contacto en los elementos localizadores,

es posible la realización de un análisis mediante el método de los elementos finitos (MEF) para calcular la deformación de la superficie de la pieza. Esta deformación será registrada en un fichero de salida del programa de elementos finitos Ansys®, a la que se añadirá la indentación de contacto. A partir de estas deformaciones se determinarán los errores de deformación estructural e indentación local. La deformación estructural se calculará siguiendo el método descrito en Capítulo 3, mientras que la indentación local se determinará por medio del método descrito en el Capítulo 4. A continuación, los cuatro errores anteriores, junto con los valores estimados de las incertidumbres de fabricación, se introducirán en la base de datos general de errores de los elementos de sujeción. Esta base de datos de errores debe proporcionar la información necesaria para modificar el posicionamiento de los puntos de la superficie de la pieza con respecto al SCMH. Introduciendo esta información en la base de datos de un programa de CAD-CAM, se obtendrá la trayectoria de herramienta con compensación de error. Una vez se haya mecanizado la pieza y sea liberada de la carga de apriete, la superficie recuperará elásticamente su forma con el fin de que sus cotas críticas se encuentren dentro del límite de tolerancia especificado.

Por otro lado, la información del reparto de cargas se puede introducir en el análisis del estudio del daño por indentación sobre la superficie de referencia de la pieza, dando lugar al conocimiento de la tensión cortante máxima τ_{max} . Si ésta superara el límite de seguridad establecido, debería modificarse el diseño del elemento de sujeción, o disminuir la magnitud de la fuerza de apriete con el fin de no producir daño por indentación.

A continuación se describen cada uno de los pasos establecidos para la generación de la base de datos relacional.

5.2.1. Establecimiento de las bases de datos CAD de la pieza y de los elementos de sujeción

La demanda de productos de alta calidad y bajo coste, con un tiempo de desarrollo corto pertenecientes al dinámico y global mercado actual, ha llevado a los investigadores a crear estrategias de desarrollo del producto cada vez más eficaces. Por esta razón, el modelado del producto ha sido reconocido como una de las claves en la elaboración de estas estrategias [12]. El papel desempeñado por el modelado del producto alcanza aún mayor importancia cuando ha de ser utilizado por un entorno multidisciplinar. Donde no sólo existen diferentes sistemas CAD, CAM y CAE, sino también un equipo de

Figura 5.1: Base de datos relacional para integración de métodos análisis.

participantes implicado en el diseño, desarrollo y fabricación del producto (Ingeniería Concurrente) [64]. En el planteamiento de la presente tesis doctoral, donde el diseño y análisis de los sistemas de sujeción actúa como nexo de unión entre el proceso de diseño y el de fabricación de componentes, el formato estándar donde se expresa el modelo del producto y de los elementos de sujeción, debe proveer de capacidad de comunicación total entre los diferentes métodos de análisis presentados y el software de los distintos sistemas informáticos utilizados.

Con el ánimo de conseguir esta integración, se debe establecer una definición genérica, neutra, consistente y compartida del elemento de sujeción y de la pieza, para obtener sus características implementadas en las diferentes aplicaciones informáticas (p.e.: CAD, CAM, CAE, etc.). Por esta razón, la definición del producto se debe expresar en un formato estándar de intercambio de datos conocido.

Base de datos de la pieza. Estándares de intercambio de datos

Un formato estándar de intercambio de datos que ha sido ampliamente utilizado en CAD, CAM y CAE a lo largo de los últimos años, ha sido el estándar IGES (Initial Graphics Exchange Specification). Sin embargo, debido a la complejidad que conlleva el diseño de un sistema de sujeción para máquina-herramienta, el estándar de representación IGES es insuficiente a la hora de representar toda la información necesaria para la integración, ya que tan solo contiene la colección de entidades geométricas que posee la pieza. Aunque este estándar ha sido ampliamente utilizado, se han desarrollado otros estándares, tales como SET (Standard d'Exchange et de Transfer) en Francia, VDA/FS (Verband der Automobilindustrie) en Alemania, ESPRIT-CAD*I (European Especific Programme for Research and Development in Information Technology, Project 322 Computer-Aided Design Interfaces) en la Unión Europea, con el ánimo de tener en cuenta otros tipos de características del producto. Como ejemplo, uno de los proyectos de ESPRIT ha sido el interface NIRO (Neutral Interface for Robotics), que desarrolla un interfaz y un formato de datos neutrales para el intercambio de funciones y datos tecnológicos, geométricos y de programación entre sistemas CAD y la planificación y el control de robots.

Sin embargo, el modelo representado por el formato IGES y los anteriores, están orientados solamente hacia la geometría. Y por lo tanto es incompleto para representar otro tipo de características. En el comien-

zo del desarrollo de los sistemas CAD-CAM, el concepto de característica se relacionó solamente con el esquema de formas geométricas de la superficie y forma del producto. Posteriormente, con el crecimiento de los sistemas CAD-CAM, las características del producto pasaron a ser consideradas como características de diseño, de mecanizado y de montaje, teniendo cada una de ellas un dominio especial de implementación. Como consecuencia de ello, ha surgido el concepto de modelo integrado del producto o modelo global del producto, que actúa como soporte de la información de todas las actividades relacionadas con el análisis de los requisitos del producto, del diseño conceptual, del diseño de detalle, de la planificación de procesos de fabricación, de la programación de control numérico, del mecanizado, del montaje y del control de calidad.

Con el propósito de obtener un método sistemático para integrar el modelado del producto, en los Estados Unidos, se extendieron las capacidades de IGES hacia la especificación PDES (Product Data Exchange Specification); y en 1990, a partir de PDES se desarrolló el formato STEP (Standard for the Exchange of Product Model Data). El estándar STEP es un formato neutral capaz de representar el producto a lo largo de todo su ciclo de vida y de servir como base para implementar y compartir sus características. Si estas características son leídas por más de una aplicación, la información debe de permanecer invariable entre ellas, conservando su completitud y funcionalidad, hasta que dicha información sea almacenada. La mejor manera de encapsular esta información del producto es mediante un formato neutral independiente que pueda ser utilizado por cualquier sistema CAD.

El lenguaje de modelado de información EXPRESS (ISO 10303-11), debe ser capaz de integrar la base de conocimiento, compuesta por la información procedente del CAD, CAM y CAPP. El sistema CAD utiliza los objetos de la librería de EXPRESS, que se definen estructuralmente para la comprensión del conocimiento del diseño de la pieza.

Base de datos de los elementos de sujeción

En la planificación del sistema de amarre, una configuración dada además de depender del tamaño y forma de la pieza, y de las características del proceso de fabricación, también lo hará de los tipos de elementos de sujeción de que se disponga. Por ello, es necesario establecer una base de datos de elementos de sujeción. En la Figura 5.2, se representa de forma general los atributos de los elementos de sujeción y la arquitectura de la base de datos.

La base de datos contiene tanto los tipos estándar de elementos de sujeción (base de apoyo, localizadores, elementos de apriete y soportes), como otros especiales que puedan adaptarse a un caso muy específico de amarre.

Figura 5.2: Base de datos de elementos de sujeción.

El paso siguiente consiste en establecer su aplicabilidad en un proceso de mecanizado determinado y el almacenamiento de sus propiedades físicas. Esta información habilita al sistema de sujeción para que determine las herramientas disponibles para su configuración. El propósito de establecer una base de datos de elementos de sujeción consiste en la posibilidad de utilizar aquellos que se adapten, en las mejores condiciones posibles, a las superficies de referencia de la preforma de la pieza que se desea mecanizar en una máquina-herramienta determinada. En la base de datos de los elementos de sujeción se puede realizar la siguiente clasificación de atributos:

- **Propiedades físicas:** Dimensiones, tolerancias, número de elementos localizadores, número de elementos de apriete, fuerza de apriete, área de contacto, etc.

- Propiedades funcionales: Espacio de trabajo, máximo tamaño de pieza permitido, inmovilidad total, estabilidad, equilibrio, accesibilidad, desmontaje, deformación estructural y local, etc.

De este modo y a partir de estas especificaciones se puede establecer una cierta intercambiabilidad entre los distintos elementos de sujeción.

Una de las propiedades importantes a tener en cuenta en un sistema de sujeción es el tamaño de pieza máximo permitido, que se corresponde a las especificaciones de la máquina-herramienta y de diseño del elemento de sujeción. Esta propiedad limita el tamaño de pieza que el sistema de amarre es capaz de fijar. Otro parámetro importante es el margen de seguridad necesario para posicionar al elemento de sujeción sobre el plato base o la mesa de trabajo de la máquina-herramienta.

5.2.2. Integración de los métodos de análisis de los sistemas de sujeción

La realización de los distintos análisis conlleva una pérdida importante de tiempo, tanto para la preparación de los datos necesarios para la ejecución de los distintos métodos numéricos como para la obtención y representación de los datos para que sean expresados en un formato inteligible. Por esta razón, es necesario establecer un procedimiento de integración de los métodos de análisis de los sistemas de sujeción que permita la intercambiabilidad de los datos, la representación de los resultados entre los distintos programas utilizados, el almacenamiento de los errores debidos a la utilización de los elementos de sujeción en una base de datos, y su tratamiento con el fin de implementar acciones de compensación sobre la trayectoria generada en el programa CAD-CAM.

Este procedimiento de integración consiste en las siguientes fases:

1. **Definición del modelo CAD de la pieza y los utillajes de sujeción.** Donde vendrán especificados:
 - Los materiales y sus propiedades (módulo de Young E , coeficiente de Poisson μ , tensión de fluencia σ_y).
 - Las dimensiones y formas geométricas, y sus incertidumbres asociadas.
2. **Obtención del modelo del conjunto del sistema de sujeción-pieza.** En él quedarán reflejados los siguientes datos:

- La relación entre la fuerza de accionamiento y la fuerza de apriete.
 - La fuerza de apriete máxima calibrada.
 - El error de prerreglaje del sistema de sujeción.
 - El error de referencia.
 - El límite de tamaño de pieza.
3. **Obtención del modelo CAE del conjunto sistema de sujeción-pieza.** El modelo constará de los siguientes elementos:
- a) Las matrices de rigidez conjuntas pieza-amarre.
 - b) La áreas de apriete admisibles.
 - c) Los puntos de aplicación de aprietes.
 - d) Las reacciones en los localizadores.
 - e) La superficie deformada a mecanizar.
 - f) La rectificación de la geometría hertziana en las superficies de contacto.
 - g) El error de posicionamiento por deformación estructural.
 - h) El error de posicionamiento por indentación o daño local.
4. **Obtención del modelo CAM.** Para la fabricación de la pieza se realizarán los siguientes pasos:
- a) Determinación de la superficie a mecanizar teniendo en cuenta:
 - La deformación estructural de la superficie debida a la acción de la fuerza de apriete.
 - El error de posicionamiento debido al sistema de sujeción (error de prerreglaje).
 - El error de posicionamiento por indentación o daño local.
 - El error geométrico de la superficie de referencia de la pieza (error de referencia).
 - b) Importación de superficie a mecanizar en el programa CAD-CAM.
 - c) Generación de trayectorias de herramienta en el programa CAD-CAM.
 - d) Postprocesado del programa de control numérico en el programa CAD-CAM.
 - e) Envío o ejecución en modo DNC desde el ordenador a la MHCN.

Tal y como se observa en el esquema de la Figura 5.1, las bases de datos permitirán alimentar la información necesaria a cada uno de los métodos de análisis. Sin embargo, es necesario introducir un mecanismo o procedimiento de integración entre el análisis de reparto de cargas y el de daño superficial, donde el dato correspondiente a las reacciones o fuerzas de contacto en los puntos de localización, obtenido como resultado en el primero de los análisis mencionados, sea dato de partida para llevar a cabo el segundo. En el siguiente apartado se describe el desarrollo de este procedimiento.

5.2.3. Procedimiento de integración de los análisis de reparto de cargas y del daño superficial

Como se puede observar en el esquema de la Figura 5.3, el procedimiento de integración parte de los valores conocidos del reparto de cargas de contacto entre los elementos localizadores y la pieza. Por lo tanto, el objetivo que se pretende alcanzar mediante la implementación de este algoritmo es la evaluación del daño superficial ejercido sobre la pieza para cada uno de los valores de reparto de carga, a los que se les denota con el subíndice i . Y en caso de que se produjera el daño, realizar las variaciones necesarias en relación a la geometría del elemento de sujeción (p.e.: el radio de redondeo R y al semiancho del tramo recto w). El siguiente paso consiste en determinar la carga de contacto P_i en N/m, que se obtiene dividiendo el valor de la carga de contacto f_i en cada punto de localización entre la longitud l_i de los segmentos en los que se ha discretizado la línea de carga. Posteriormente, se estudiarán un total de M casos donde el radio de redondeo de los lados del elemento de localización R_j va variando, y se determinará el valor de la presión máxima de Hertz $(p_0)_{ij}$ mediante la siguiente expresión conocida [46]:

$$(p_0)_{ij} = \sqrt{\frac{P_i E^*}{\pi R_j}} \quad (5.1)$$

donde $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$.

A partir de la presión máxima de Hertz $(p_0)_{ij}$ se determina la tensión cortante máxima $(\tau_0)_{ij}$ [46]:

$$(\tau_0)_{ij} = 0,3 (p_0)_i \quad (5.2)$$

Figura 5.3: Algoritmo de integración entre el reparto de cargas y el daño superficial

Otro valor que se ha de calcular en el algoritmo es el semiancho de contacto de Hertz $(a_0)_{ij}$, para cada valor de la carga P_i y del radio de redondeo R_j seleccionado, cuya ecuación es la siguiente [46]:

$$(a_0)_{ij} = \sqrt{\frac{4P_i R_j}{\pi E^*}} \quad (5.3)$$

Con los datos de $(\tau_0)_{ijk}$ y $(a_0)_{ij}$ y definiendo completamente la geometría del elemento de sujeción con la elección del valor del semiancho del tramo recto w_k , ya relatado en el Capítulo 4, se realizará el cálculo de la tensión cortante máxima $(\tau_{max})_{ij}$ para cada uno de los casos de la Tabla 4.1 a partir de la correlación general de la ecuación (4.30) obtenida en el Capítulo 4 para elemento de sujeción cilíndrico. El proceso de cálculo se llevará a cabo hasta encontrar la primera w_k que origine un valor $(\tau_{max})_{ijk} < \frac{\sigma_y}{2}$. En caso contrario, es decir, $(\tau_{max})_{ijk} \geq \frac{\sigma_y}{2}$, y continuará siendo así para los K casos definidos de w_k , se volvería a definir un nuevo valor de R_j y se repetiría el algoritmo hasta encontrar un valor de w_k que cumpla con la condición $(\tau_{max})_{ijk} < \frac{\sigma_y}{2}$. Establecidas todas las geometrías de R_{ij} y w_k para todos los casos de carga de contacto, se escogerá aquella que para el caso más desfavorable $(f_i)_{max}$, alcance el menor valor posible de τ_{max} .

5.3. Ejemplo de aplicación.

Se establece como ejemplo de aplicación el mecanizado de la pieza de aluminio 7178 que aparece en la Figura 5.4 de dimensiones principales de $175 \times 50 \times 4$ mm (con módulo de Young $E = 75$ MPa, densidad $\rho = 2820$ Kg/m³ y tensión de fluencia $\sigma_y = 120$ MPa). Al tratarse de una pieza prismática, se ha seleccionado el método 3-2-1, ya descrito en anteriores capítulos, para la configuración del amarre de la pieza de la Figura 5.4, al que se le ha aplicado una fuerza de apriete $F = 1500$ N. Según este principio deben existir tres puntos de localización donde apoye la superficie de referencia inferior de la pieza, dos puntos en los que apoye una superficie de referencia lateral de la pieza y un punto de apoyo para la superficie lateral restante. Sin embargo, en ocasiones en los que la superficie de referencia inferior de la pieza haya sido previamente mecanizada y su longitud sea relativamente alta es conveniente restringir más grados de libertad. Por ello se ha optado por una configuración de dos barras como elementos de localización inferiores, capaz de dar lugar a una mayor estabilidad y menor deformación sobre la

pieza. Esta mayor estabilidad y menor deformación redundará en un mecanizado de mayor precisión bajo la acción de las fuerzas de apriete y de corte. Sometida la pieza a control metrológico, se le detecta un error de planitud en la superficie de referencia de la pieza $\alpha = 0,5^\circ$ con una incertidumbre asociada $U_\alpha = 1,01^\circ$ (con constante de incertidumbre $K = 2$).

Figura 5.4: Ejemplo ilustrativo.

Las dos barras que forman parte de los elementos localizadores son de acero endurecido y están distanciadas una longitud $L = 125$ mm con una incertidumbre $U_L = 1$ mm y dimensiones principales $L_1 = L_2 = 30$ mm, $b_1 = b_2 = 10$ mm, y z_1 y z_2 presentan la variabilidad expresada en la Tabla 5.1. Ambas poseen las mismas propiedades mecánicas (módulo de Young $E = 201$ GPa y densidad $\rho = 8000$ Kg/m³). La magnitud que influirá sobre la planitud de la superficie mecanizada será la cota de la altura de las dos barras (z_1 y z_2 , ambas con una incertidumbre asociada $u_z = 0,15$ mm). La superficie a mecanizar debe presentar una tolerancia final de paralelismo de 0,02 mm.

Por otro lado, se establecen las siguientes hipótesis de partida:

- Solamente se tiene en cuenta la carga de apriete que se aplica en la sujeción de la pieza a la máquina-herramienta.
- El problema que nos ocupa se corresponde a un análisis quasi-estático

donde no se tiene en cuenta la variación en el tiempo de la carga de apriete.

- Sólo son tenidas en cuenta las cargas normales compresivas sobre la pieza.
- Al aplicarse grandes fuerzas de apriete en dirección normal a la superficie de la pieza, aparecerán fuerzas normales elevadas en los puntos de localización o de apoyo entre la pieza y los localizadores, hecho por el que se justifica la nula consideración de los fenómenos de fricción y deslizamiento.

A continuación se va a analizar este ejemplo mediante el procedimiento de integración de análisis de elementos de sujeción presentado anteriormente.

5.3.1. Análisis de la precisión dimensional del elemento de sujeción

En primer lugar, y como se establece en el diagrama de la Figura 5.1, va a ser necesario extraer la información desde las bases de datos de la pieza y de los elementos de sujeción posibles.

Figura 5.5: Elemento localizador.

De este modo, partiendo del diseño del elemento de sujeción (ver Figura 5.5) se aplica el método descrito en el Capítulo 2, siguiendo la siguiente

secuencia:

1. Determinación de la posición de los puntos de localización y de sus incertidumbres asociadas: A partir de la base de datos en formato STEP 10303 del sistema CAD-CAM, se obtiene la posición de los puntos de localización y la incertidumbre asociada a los mismos. En la figura 5.6 se puede comprobar la posición de los puntos de localización y cómo se configura el sistema de amarre de la pieza. Las coordenadas y las incertidumbres de los puntos de localización son los que vienen expresadas en la Tabla 5.1:

Pts. loc.	Coor. X	Coor. Y	Coor. Z	u_z
1	25,0	15,0	10,31	0,15
2	25,0	20,0	10,17	0,15
3	25,0	25,0	10,08	0,15
4	25,0	30,0	9,87	0,15
5	25,0	35,0	9,79	0,15
6	150,0	15,0	10,27	0,15
7	150,0	20,0	10,15	0,15
8	150,0	25,0	10,05	0,15
9	150,0	30,0	9,9	0,15
10	150,0	35,0	9,81	0,15

Tabla 5.1: Coordenadas e incertidumbres de los puntos de localización.

2. Determinación del SCES a partir de la posición de los puntos de localización del elemento de sujeción.
3. Localización del SCES con respecto al SCMII, una vez que se ha establecido la posición relativa de la superficie de referencia a través de los puntos de localización. Si la configuración de los puntos de localización da lugar a un cambio de la posición real de los puntos de la superficie de referencia con respecto a la teóricamente especificada en planos, tal y como se estudió en el Capítulo 2, las coordenadas pueden calcularse mediante la siguiente ecuación simplificada:

Figura 5.6: Posición de los puntos de localización.

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen } \alpha_z & \text{sen } \alpha_y \\ -\text{sen } \alpha_z & 1 & \text{sen } \alpha_x \\ -\text{sen } \alpha_y & -\text{sen } \alpha_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

4. Determinación del SCIP con respecto a las superficies de referencia de la pieza: Como se observa en la Figura 5.6, el SCIP se posiciona sobre una de las superficies de referencia de la pieza, de modo que en un posterior control de calidad pueda ser tenido en cuenta como referencia en la medición.
5. Valor esperado de la cota de fabricación. Si se tienen en cuenta los cuatro puntos de localización más distantes entre sí, que están contenidos en la superficie de las dos barras que forman parte de los elementos de apoyo o localizadores, pueden definirse hasta 4 posibilidades distintas de posición del plano de referencia de la pieza. Cada uno de los planos viene definido por tres puntos (Puntos 1-5-6, 1-5-10, 1-6-10 y 5-6-10, ver la Figura 5.6); y cada posición posible del plano de referencia posee un vector director, que forma un ángulo con el vector $\overrightarrow{OZ}$ del SCMH. El

proceso de cálculo del vector director parte de la definición de los vectores de posición de los puntos de localización con respecto al SCMH. De este modo se tienen definidos los siguientes vectores de posición:

$$\begin{aligned}\vec{O1} &= \{0, y_1, z_1\} \\ \vec{O5} &= \{0, y_5, z_5\} \\ \vec{O6} &= \{L, y_6, z_6\} \\ \vec{O10} &= \{L, y_{10}, z_6\}\end{aligned}\tag{5.5}$$

Los vectores que definen los planos anteriores se determinan a partir de los vectores de posición del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\vec{15} &= \vec{O5} - \vec{O1} = (0, 20, z_5 - z_1) \\ \vec{16} &= \vec{O6} - \vec{O1} = (L, 0, z_6 - z_1) \\ \vec{110} &= \vec{O10} - \vec{O1} = (L, 20, z_{10} - z_1) \\ \vec{56} &= \vec{O6} - \vec{O5} = (L, -20, z_6 - z_5) \\ \vec{510} &= \vec{O10} - \vec{O5} = (L, 0, z_{10} - z_5)\end{aligned}\tag{5.6}$$

y por lo tanto, el vector director de cada uno de los planos se calcula a partir de los siguientes productos vectoriales:

$$\begin{aligned}\vec{V}_{1-5-6} &= \vec{16} \wedge \vec{15} = -20(z_6 - z_1) \vec{i} - L(z_5 - z_1) \vec{j} + 20L \vec{k} \\ \vec{V}_{1-5-10} &= \vec{110} \wedge \vec{15} = 20(z_5 - z_{10}) \vec{i} - L(z_5 - z_1) \vec{j} + 20L \vec{k} \\ \vec{V}_{1-6-10} &= \vec{16} \wedge \vec{110} = -20(z_6 - z_1) \vec{i} + L(z_6 - z_{10}) \vec{j} + 20L \vec{k} \\ \vec{V}_{5-6-10} &= \vec{56} \wedge \vec{510} = 20(z_5 - z_{10}) \vec{i} + L(z_6 - z_{10}) \vec{j} + 20L \vec{k}\end{aligned}\tag{5.7}$$

El ángulo formado por distintos planos de los puntos de localización α se puede estimar como el arco-coseno del producto escalar entre cada uno de los vectores normalizados $\vec{V}_{1-5-6}$, $\vec{V}_{1-5-10}$, $\vec{V}_{1-6-10}$, $\vec{V}_{5-6-10}$ y el vector $\vec{OZ}$ del SCMH:

$$\begin{aligned}
\alpha_{1-5-6} &= \arccos \frac{20L}{\sqrt{400(z_6-z_1)^2 + L^2(z_5-z_1)^2 + 400L^2}} \\
\alpha_{1-5-10} &= \arccos \frac{20L}{\sqrt{400(z_{10}-z_5)^2 + L^2(z_5-z_1)^2 + 400L^2}} \\
\alpha_{1-6-10} &= \arccos \frac{20L}{\sqrt{400(z_6-z_1)^2 + L^2(z_6-z_{10})^2 + 400L^2}} \\
\alpha_{5-6-10} &= \arccos \frac{20L}{\sqrt{400(z_5-z_{10})^2 + L^2(z_6-z_{10})^2 + 400L^2}}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Determinados los valores numéricos de cada uno de los ángulos anteriores, se calcula el ángulo medio de inclinación de la superficie de referencia de la pieza del siguiente modo:

$$\alpha_{med} = \frac{\alpha_{1-5-6} + \alpha_{1-5-10} + \alpha_{1-6-10} + \alpha_{5-6-10}}{4} = 1,403^\circ \tag{5.9}$$

El ángulo α_{med} constituirá el error de prerreglaje, que en definitiva provocará que la superficie mecanizada de la pieza no se corresponda con la tolerancia de planitud, ya que supera los 0,02 mm especificados en el modelo CAD de la pieza. Este error deberá ser tenido en cuenta a la hora de generar los caminos de herramienta compensados en el programa CAD-CAM.

Para el cálculo del error de prerreglaje se han tenido en cuenta cuatro puntos de localización, ya que al aplicarse la fuerza de apriete aparece una presión que los mantiene en contacto con la superficie de referencia de la pieza, que queda posicionada en el plano medio determinado por ellos. En cambio, si no se aplicara la fuerza de apriete, la pieza quedaría posicionada sobre los 3 puntos más altos.

6. Estimación de la incertidumbre de fabricación:

Una vez calculado el ángulo medio α_{med} , que forma el plano de los localizadores, es necesario calcular la incertidumbre de fabricación de esta magnitud, que está basada en la incertidumbre de los elementos localizadores. Según el método expresado en el Capítulo 2, y utilizando la ley de propagación de varianzas (LPV), se calcula la incertidumbre esperada de fabricación. Tal y como especifica la LPV, la varianza de la magnitud a evaluar se determina a partir de las incertidumbres de cada uno de los parámetros de los que depende:

$$\begin{aligned}
u_{\alpha_{1.5.6}}^2 &= \left(\frac{\partial \alpha_{1.5.6}}{\partial L}\right)^2 u_L^2 + \left(\frac{\partial \alpha_{1.5.6}}{\partial z_1}\right)^2 u_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial \alpha_{1.5.6}}{\partial z_5}\right)^2 u_{z_5}^2 + \left(\frac{\partial \alpha_{1.5.6}}{\partial z_6}\right)^2 u_{z_6}^2 \\
u_{\alpha_{1.5.10}}^2 &= \left(\frac{\partial \alpha_{1.5.10}}{\partial L}\right)^2 u_L^2 + \left(\frac{\partial \alpha_{1.5.10}}{\partial z_1}\right)^2 u_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial \alpha_{1.5.10}}{\partial z_5}\right)^2 u_{z_5}^2 + \left(\frac{\partial \alpha_{1.5.10}}{\partial z_{10}}\right)^2 u_{z_{10}}^2 \\
u_{\alpha_{1.6.10}}^2 &= \left(\frac{\partial \alpha_{1.6.10}}{\partial L}\right)^2 u_L^2 + \left(\frac{\partial \alpha_{1.6.10}}{\partial z_1}\right)^2 u_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial \alpha_{1.6.10}}{\partial z_6}\right)^2 u_{z_6}^2 + \left(\frac{\partial \alpha_{1.6.10}}{\partial z_{10}}\right)^2 u_{z_{10}}^2 \\
u_{\alpha_{5.6.10}}^2 &= \left(\frac{\partial \alpha_{5.6.10}}{\partial L}\right)^2 u_L^2 + \left(\frac{\partial \alpha_{5.6.10}}{\partial z_5}\right)^2 u_{z_5}^2 + \left(\frac{\partial \alpha_{5.6.10}}{\partial z_6}\right)^2 u_{z_6}^2 + \left(\frac{\partial \alpha_{5.6.10}}{\partial z_{10}}\right)^2 u_{z_{10}}^2
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Cada una de las derivadas parciales $\frac{\partial \alpha}{\partial}$ resulta tener una gran cantidad de términos. El cálculo de estos términos se ha automatizado programando una rutina en el programa de cálculo matemático Matlab®. De este modo, se pueden obtener con mayor rapidez las derivadas de la ecuación (5.8) respecto de cada una de sus variables. Sustituidos los valores de la Tabla 5.1 en las ecuaciones anteriores, se obtiene el valor esperado de la desviación típica para cada uno de los planos definidos por tres puntos de localización. Debido a que se ha obtenido una desviación típica por cada plano, es necesario obtener la desviación típica final a partir del cálculo de la media cuadrática de cada una de ellas:

$$u_{\alpha_{med}} = \frac{\sqrt{u_{\alpha_{1-5-6}}^2 + u_{\alpha_{1-5-10}}^2 + u_{\alpha_{1-6-10}}^2 + u_{\alpha_{5-6-10}}^2}}{4} = 0,607^\circ \tag{5.11}$$

Finalmente y aplicando un factor de incertidumbre $K = 2$, se obtiene una incertidumbre esperada de fabricación asociada al ángulo de inclinación α :

$$U_{med} = K u_{\alpha_{med}} = 1,215^\circ \tag{5.12}$$

5.3.2. Análisis de la precisión dimensional de la superficie de referencia de la pieza

Como se ha indicado anteriormente, con el objeto de inmovilizar por completo a la pieza, ésta debe posicionarse apoyando sus superficies de referencia sobre los elementos localizadores. Estas superficies pueden provocar desviaciones del SCIP con respecto al SCMI, ya que presentan imperfecciones

debidas a la rugosidad superficial, o a errores geométricos, tales como: paralelismo, perpendicularidad, angularidad, etc. A esta desviación se le conoce como error de referencia (ver Figura 5.7).

Figura 5.7: Error de referencia.

Sin embargo, en caso de que la superficie de referencia haya sido previamente mecanizada en fase de acabado, los errores debidos a la rugosidad son muy pequeños y no afectan al error de referencia. La medida de la planitud de las superficies de referencia de la pieza se pueden llevar a cabo por medio de una máquina de medición de coordenadas. En el ejemplo de la Figura 5.4 se ha supuesto un error de referencia $\alpha_{ref-med} = 0,5^\circ$, con una incertidumbre asociada $U_{\alpha_{ref-med}} = 0,65^\circ$ ($K = 2$).

5.3.3. Análisis del reparto de cargas y de deformaciones estructurales

Integración de las BB.DD. de CAD con las BB.DD. de CAE

Para llevar a cabo el análisis del reparto de cargas será necesario en primer lugar, extraer la información geométrica de la pieza y de los elementos de sujeción procedente de la base de datos del sistema CAD donde se hayan modelado. El primer paso reside por lo tanto, en establecer un interconexión para poder capturar dichos datos geométricos y que éstos sean empleados

en la etapa de preproceso descrita en el análisis del reparto de cargas. El programa de propósito general de análisis por elementos finitos Ansys® posee varias posibilidades para realizar la integración:

- La conexión clásica de Ansys® permite la importación de datos geométricos sin parámetros o asociatividad desde el programa de diseño CAD que se esté utilizando.
- La conexión actual, permite fusionar mediante el adecuado uso de un paquete informático adecuado de entorno de visualización, los módulos de trabajo de CAD y Ansys®. Dentro de ésta conexión existen dos tipos; el primero consiste en un enlace directo o *Plug-in* con el enlace CAD, Application Programming Interface (API), que permite leer toda la información acerca de la geometría, atributos y parámetros desde la misma ventana de visualización. Este método de enlace requiere que el programa de CAD se instale en la misma aplicación de entorno de visualización de Ansys®. El segundo tipo de conexión consiste en la utilización de un lector de modelos CAD, que provee el mismo entorno de visualización de Ansys®, donde sólo es posible leer la geometría. La única diferencia entre este método y el clásico es que se opera en el entorno de visualización antes mencionado.

Obtención del reparto de cargas

Una vez importado el modelo de la pieza y de los elementos de sujeción, se procede al cálculo del reparto de cargas, tal y como se describe en el método propuesto en el Capítulo 3. Para realizar el cálculo es necesario determinar los coeficientes de la matriz de desplazamientos. Estos se pueden obtener mediante el MEF, analizando cada uno de los cuerpos por separado, pieza y localizadores.

Una vez obtenida la matriz de desplazamientos modificada $[C^*]$ y conocida la fuerza de apriete $F = 1500$ N, el reparto de carga se determina a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ \nu \end{bmatrix} = [C^*]^{-1} \begin{bmatrix} 1500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99,31 \\ 164,59 \\ 247,72 \\ 342,48 \\ 433,12 \\ 36,35 \\ 39,60 \\ 42,75 \\ 45,71 \\ 48,37 \\ 4,52 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ N} \quad (5.13)$$

En la Figura 5.8 se observa como se reparte el vector de cargas a lo largo de todos los puntos de contacto, apareciendo un claro desequilibrio entre los puntos PL1 y PL5 del localizador 1, y en general entre los valores de un localizador y el otro.

Figura 5.8: Reparto de cargas en los puntos de localización.

Análisis de deformaciones

Conocido el reparto de carga sobre los puntos de localización, uno de los posteriores estudios que se pueden realizar, consiste en la determinación de la deformación de la superficies de la pieza y de los localizadores. La primera deformación, debe ser tomada en cuenta con el fin de corregir el camino de herramienta para compensar el error en el mecanizado. La segunda afectará al error de prerreglaje, es decir, alterará la superficie de los elementos localizadores sobre las que apoya la superficie de referencia de la pieza. Para ello, se va a realizar un análisis por MEF del modelo de pieza anterior y de los localizadores, con las propiedades de material, el tipo de elementos y estrategia de mallado ya utilizados anteriormente. Sin embargo, se utilizan unas nuevas condiciones de contorno, donde las cargas a aplicar sobre los puntos de localización son las fuerzas de contacto anteriormente calculadas en el apartado 5.3.3.

Además, es necesaria la restricción de 6 desplazamientos para asegurar la inmovilidad total de la pieza. Con tal fin se ha optado por restringir los tres desplazamientos del punto de aplicación de la fuerza de apriete PA, los desplazamientos según los ejes Y y Z del punto de localización 10, y el desplazamiento vertical del punto de localización 6, como se puede observar en la Figura 5.9. En el caso de los localizadores, se supone que su base permanece totalmente fijada sobre la mesa de trabajo, por lo que todos sus nodos correspondientes poseen sus tres grados de libertad restringidos.

Seleccionando el tipo de análisis estático y resolviendo el problema planteado, se obtienen las deformaciones verticales sufridas por la pieza y los elementos localizadores, así como las tensiones de von Mises (ver Figuras 5.10 y 5.11). Se puede observar que la mayor deformación sufrida se corresponde a la zona de contacto más cargada, es decir, en las inmediaciones del localizador 1. En cuanto a las tensiones de von Mises, se detecta que la zona próxima al punto de aplicación de la fuerza de apriete presenta una menor concentración de carga.

Si se seleccionan los nodos correspondientes a la superficie que será mecanizada en la pieza, y a la superficie de apoyo de los elementos localizadores en el programa de elementos finitos, se puede obtener un fichero de salida donde estén contenidos los valores correspondientes a la deformación sufrida. Como se puede observar en la Figura 5.12 aparecen seleccionados todos los nodos de las superficies y el listado de valores de deformación de los mismos. Conocido el valor de la deformación de la superficie a mecanizar, es posible

Figura 5.9: Aplicación de condiciones de contorno en la pieza.

determinar el cambio de la posición relativa de la pieza y de su SCIP correspondiente, con respecto al SCMH, y por consiguiente el error producido. Este error se puede introducir en la base de datos del Sistema CAD-CAM con la finalidad de que sea compensado mediante la generación de un nuevo camino de herramienta; y por lo tanto, se adapte a los cambios de posición de la superficie. Del mismo modo, la deformación de los elementos localizadores también dará lugar a las correcciones adecuadas en la generación de nuevos caminos de herramienta en los sistemas CAD-CAM.

5.3.4. Análisis del daño por indentación y deformación local

En relación al objetivo planteado de integración de los análisis desarrollados en los capítulos anteriores (2, 3 y 4), el siguiente paso consiste en estudiar el problema del contacto desde el ámbito local a partir de los valores del reparto de cargas obtenidos en el apartado 5.3.3. De este modo, se puede conocer la existencia de daño superficial sobre la pieza. En caso de que lo hubiera, deberían de plantearse cambios en la elección de los puntos de localización, en la intensidad de la carga de apriete y su posición de aplicación, o en el diseño geométrico del elemento de sujeción.

El procedimiento de integración descrito anteriormente es aplicable al ejemplo ilustrativo de la Figura 5.4, donde los elementos de localización son

Figura 5.10: Deformación producida en la pieza

Figura 5.11: Tensión de von Mises

Partiendo de los valores de las fuerzas de contacto de la ecuación (5.13), se determinan las cargas P_i para $i = 1 \dots N$, donde $N = 10$ es el número de puntos de localización o apoyo. Los valores de P_i se determinan dividiendo cada f_i entre el tamaño del segmento de discretización, $l_i = 5 \times 10^{-3}$ m. De este modo, los valores obtenidos son los representados en el siguiente vector de cargas:

$$P_i = \begin{Bmatrix} 1,99 \times 10^4 \\ 3,29 \times 10^4 \\ 4,95 \times 10^4 \\ 6,85 \times 10^4 \\ 8,66 \times 10^4 \\ 7,27 \times 10^3 \\ 7,92 \times 10^3 \\ 8,55 \times 10^3 \\ 9,14 \times 10^3 \\ 9,67 \times 10^3 \end{Bmatrix} \text{ N/m} \quad (5.14)$$

Entonces, se selecciona el primer valor para el radio de redondeo $R_j = 0,25$ m, ya que dicho valor ofrece un perfil prácticamente recto para el elemento localizador. Como establece la ecuación (5.1), la presión de contacto de Hertz p_0 disminuirá a medida que aumente R_j , y por consiguiente, también la tensión cortante τ_0 . Si τ_{max} superara el límite de $\frac{\sigma_y}{2}$ para todos los valores de w , el siguiente paso consistiría en seleccionar un valor mayor para R_j . En el algoritmo, R_j se incrementará siguiendo distintos escalones hasta alcanzar un valor de $(\tau_{max})_{ijk} < \frac{\sigma_y}{2}$. La presión máxima de Hertz para el primer valor del radio de redondeo ($R_j = 0,25$ m) y para cada uno de los 10 puntos de localización, se calcula mediante la ecuación (5.1) de modo que se alcanzan los siguientes valores:

$$(p_0)_{ij} = \begin{Bmatrix} 1,46 \times 10^6 \\ 1,88 \times 10^6 \\ 2,30 \times 10^6 \\ 2,71 \times 10^6 \\ 3,05 \times 10^6 \\ 8,83 \times 10^5 \\ 9,21 \times 10^5 \\ 9,57 \times 10^5 \\ 9,90 \times 10^5 \\ 1,02 \times 10^6 \end{Bmatrix} \text{ N/m} \quad (5.15)$$

A partir de estos valores se determina el cortante máximo $\tau_0 = 0,3 \cdot p_0$, siendo los valores alcanzados para cada punto de localización, los siguientes:

$$(\tau_0)_{ij} = \begin{bmatrix} 4,38 \times 10^5 \\ 5,63 \times 10^5 \\ 6,91 \times 10^5 \\ 8,13 \times 10^5 \\ 9,14 \times 10^5 \\ 2,65 \times 10^5 \\ 2,76 \times 10^5 \\ 2,87 \times 10^5 \\ 2,97 \times 10^5 \\ 3,05 \times 10^5 \end{bmatrix} \text{ N/m}^2 \quad (5.16)$$

Del mismo modo, también se han calculado los 10 valores correspondientes al semiancho de contacto de Hertz a_0 correspondientes a cada punto de localización, mediante la aplicación de la ecuación (5.3):

$$(a_0)_{ij} = \begin{bmatrix} 0,0087 \\ 0,0112 \\ 0,0137 \\ 0,0161 \\ 0,0181 \\ 0,0052 \\ 0,0055 \\ 0,0057 \\ 0,0059 \\ 0,0060 \end{bmatrix} \text{ m} \quad (5.17)$$

A continuación se realizará el análisis de contacto de la forma como se describió en el Capítulo 4 y se determinará la ecuación de diseño:

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_0} = -0,8117t^3 + 1,6282t^2 - 1,2827t + 1 \quad (5.18)$$

donde $t = w/a_0$.

Para el máximo valor de carga de contacto, $f_5 = 433,12$ N, y dados los valores de $(\tau_0)_{51}$, y $(a_0)_{51}$ se obtiene la ecuación de diseño para $(\tau_{max})_{51k}$:

$$(\tau_{max})_{51k} = -1,25 \times 10^{11} w_k^3 + 4,54 \times 10^9 w_k^2 + -3578759398 w + 9,14 \times 10^5 \quad (5.19)$$

Si para esta ecuación se introducen los valores de w_k expresados en la Tabla 4.1, se obtienen los siguientes valores para la tensión cortante máxima:

$$(\tau_{max})_{52k} = \begin{bmatrix} 9,14 \times 10^5 \\ 1,96 \times 10^4 \\ -8,74 \times 10^5 \\ -1,77 \times 10^6 \\ -2,66 \times 10^6 \\ -3,55 \times 10^6 \\ -4,44 \times 10^6 \\ -5,34 \times 10^6 \\ -6,23 \times 10^6 \end{bmatrix} \text{ N/m}^2 \quad (5.20)$$

Como todos los valores de $(\tau_{max})_{51k}$ se encuentran por debajo de $\frac{\sigma_y}{2} = 60$ MPa, la geometría del elemento de sujeción seleccionada será de $R_j = 0,25$ m, y el semiancho de tramo recto escogido es de $w_2 = 0,5 \times 10^{-3}$ m, ya que da lugar a la menor de las tensiones cortantes posibles, es decir, $(\tau_{max})_{512} = 1,96 \times 10^4$ N/m².

El algoritmo de integración ha dado lugar a una rápida selección de la geometría del elemento localizador, al ser la tensión cortante máxima siempre menor que $\frac{\sigma_y}{2} = 60$ MPa. Obviamente, el proceso se hubiera complicado en el caso de que la fuerza de apriete fuera mucho mayor que $F = 1500$ N, en ese caso las tensiones cortantes máximas hubieran sido mayores, y por lo tanto, se tendría que haber tenido que incrementar el valor de R_j y de w_k hasta encontrar el más favorable.

Por otro lado, el desplazamiento normal en la superficie $\bar{u}_z$ obtenido para cada punto de localización se obtiene a partir de la ecuación siguiente [46]:

$$\bar{u}_z = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2), \quad r \leq a \quad (5.21)$$

Los valores de los desplazamientos $\bar{u}_z$ obtenidos para los 10 puntos de localización, y para $R_j = 0,25$ m son los siguientes:

$$(\bar{u}_z)_k = \begin{bmatrix} 2,36 \times 10^{-4} \\ 3,91 \times 10^{-4} \\ 5,89 \times 10^{-4} \\ 8,14 \times 10^{-4} \\ 1,03 \times 10^{-3} \\ 8,64 \times 10^{-5} \\ 9,41 \times 10^{-5} \\ 1,02 \times 10^{-4} \\ 1,09 \times 10^{-4} \\ 1,15 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ m} \quad (5.22)$$

Estos valores deberán ser considerados en el procedimiento de integración junto con los valores de desplazamiento estructural obtenidos en el apartado 5.3.3 con el fin de llevar a cabo la compensación del error.

5.3.5. Compensación del error

Una vez realizados los análisis de precisión dimensional y obtenidos los errores de prerreglaje y referencia correspondientes; el análisis de reparto de cargas y deformación estructural; y por último el análisis del daño superficial con sus respectivos valores de desplazamientos locales en los puntos de contacto, es necesario llevar a cabo la compensación del error para alcanzar la precisión final de la pieza. Para ello, se requiere realizar una integración con el fin de tratar adecuadamente toda la información generada en los análisis anteriores, e introducirla en la base de datos del programa de CAD-CAM.

A modo de resumen de la relación de cada error con el procedimiento de integración que se pretende llevar a cabo, se presenta el esquema de la Figura 5.13. En este esquema se encuentran recogidos los distintos análisis descritos en los anteriores capítulos y cómo se aplican conjuntamente sobre el ejemplo ilustrativo que se describe en este apartado.

Los errores generados en cada análisis son los que se detallan a continuación:

- **Error de prerreglaje:** Aparece como consecuencia de la falta de precisión dimensional en los sistemas de sujeción, lo que produce una variación del SCES con respecto al SCMI. En el ejemplo que nos ocupa, este error se cuantifica por medio de la media de la variación del ángulo de rotación del SCES $(\alpha_{pre-med})_y$.

Figura 5.13: Esquema de integración de métodos de análisis.

- **Error de referencia:** Se origina por la falta de precisión en las superficies de referencia de la preforma de la pieza, que son las que apoyan sobre los elementos localizadores del sistema de sujeción, lo que provoca una variación del SCIP con respecto al SCMH. Este error se denota mediante el ángulo de rotación del SCIP $(\alpha_{ref-med})_y$.
- **Error de deformación:** Se produce debido a la deformación estructural originada por la acción de la fuerza de apriete. Este error se cuantifica a partir la deformación de la superficie mecanizada, que se obtiene mediante la aplicación del vector de cargas de contacto sobre el modelo de elementos finitos. Por un lado, se tienen los valores de la deformación vertical en los nodos superficiales $(u_{def})_z$, y por otro la rotación producida por esta deformación respecto al eje x $(\alpha_{def-med})_x$, y al eje y $(\alpha_{def-med})_y$ del SCIP.

- **Error de indentación local:** Si para las fuerzas obtenidas en el análisis del reparto de cargas descrito en el Capítulo 3, se realiza un estudio local de la deformación por indentación del elemento de localización sobre la superficie de referencia de la pieza, como el desarrollado en el Capítulo 4, se obtendrá la distribución de presiones correspondiente y el mapa tensional en la subsuperficie de referencia. De este modo, se puede conocer la deformación local superficial en los puntos de localización, $(\bar{u}_z)$. Este error se cuantifica mediante los ángulos de rotación $(\alpha_{ind-med})_x$ y $(\alpha_{ind-med})_y$.

Figura 5.14: Tipos de error.

La posición de los seis puntos establecida por el conocido principio de isostaticidad, puede variar debido a la aparición de los errores descritos en la Tabla 5.2. Por lo tanto, las coordenadas de cualquier punto de la superficie mecanizada de la pieza pueden sufrir un cambio de posición, debido bien a las rotaciones del SCIP con respecto al SCMH, o bien a las deformaciones de la superficie mecanizada obtenidas en el análisis de reparto de cargas:

Tipos de error	α_x	α_y	u_z
Prerreglaje	$(\alpha_{pre-med})_x = 0^\circ$	$(\alpha_{pre-med})_y = 1,403^\circ$	-
Referencia	$(\alpha_{ref-med})_x = 0^\circ$	$(\alpha_{ref-med})_y = 0,5^\circ$	-
Def. estructural	$(\alpha_{def-med})_x = 1,715^\circ$	$(\alpha_{def-med})_y = 1,023^\circ$	u_{def-z}
Ind. local	$(\alpha_{ind-med})_x = 1,178^\circ$	$(\alpha_{ind-med})_y = 0,244^\circ$	$\bar{u}_{ind-z}$
Error total	$\alpha_x = 2,893^\circ$	$\alpha_y = 3,17^\circ$	u_z

Tabla 5.2: Valores calculados de los distintos errores en el análisis integrado de los elementos de sujeción.

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{Bmatrix} = B_x B_y B_z \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (u_{def})_x \\ (u_{def})_y \\ (u_{def})_z \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

donde:

$$B_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & \sen \alpha_x & 0 \\ 0 & -\sen \alpha_x & \cos \alpha_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$B_y = \begin{bmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\sen \alpha_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sen \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$B_z = \begin{bmatrix} \cos \alpha_z & \sen \alpha_z & 0 & 0 \\ -\sen \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

aunque como se puede observar, según los valores obtenidos y mostrados en la Tabla 5.2, la pieza no sufre variación alguna según la rotación respecto al eje z , α_z . Además, al asumirse que sólo se produce deformación vertical en los nodos de la superficie de la pieza, sólo es necesario introducir el valor de $(u_{def})_z$ en la ecuación (5.23).

Figura 5.15: Modelo de superficie a malla de líneas compensada.

Mediante esta transformación, la nube de puntos de la superficie de la pieza se introduce en la base de datos del sistema CAD-CAM Teksoft®. Para llevar a cabo la introducción de la nube de puntos es necesario seleccionar todos los nodos de la superficie que debe ser mecanizada en la pieza en el programa de elementos finitos Ansys®. De modo que finalmente, se obtiene un fichero de salida que contiene un listado con los números de nodo, sus coordenadas x , y y z , y las deformaciones verticales correspondientes. Posteriormente, la información correspondiente a los errores es tratada adecuadamente aplicándose la ecuación (5.23) implementada en el programa de cálculo Matemático Matlab®. Como resultado se registra un nuevo listado con las nuevas coordenadas de los nodos de la superficie que se pretende mecanizar. En el ejemplo ilustrativo que se presenta en este capítulo, se han diferenciado 3 zonas en la superficie, por un lado se encuentra la zona A, donde se aplica la carga de apriete, y las dos zonas, B y C, que deben ser mecanizadas con profundidad de 0,5 mm. El módulo de CAD representa la tres zonas de la superficie de la pieza a partir de la información descrita anteriormente, mediante el modo de generación de superficies a malla de líneas (como se muestra en la Figura 5.15), donde es necesario crear una malla regular donde las coordenadas x e y deben ser equidistantes y la coordenada z se obtiene en el proceso de transformación descrito anteriormente.

A continuación, se selecciona el ciclo de acabado superficial tipo UV en el

módulo de CAM. Este ciclo elimina material realizando una serie de pasadas de corte a lo largo de las direcciones U y V de la superficie. Las dos direcciones, U y V, se identifican por medio de las líneas de ajuste que conforman la superficie. En la generación de la trayectoria de la herramienta es posible especificar el punto de comienzo, la dirección de corte, si se mecaniza en pasadas bidireccionales o unidireccionales, y si se mecaniza toda la superficie o solamente una porción.

Figura 5.16: Trayectoria de herramienta obtenida en el módulo de CAM de TekSoft®.

En el cuadro de dialogo del mecanizado UV se introducen los parámetros correspondientes a las condiciones de corte adecuadas para el mecanizado de la pieza. Dichos parámetros se expresan en la Tabla 5.3:

Por último, se obtiene la trayectoria de herramienta que tiene en cuenta la compensación de error anteriormente calculada, que se puede observar en la Figura 5.16. De este modo, y una vez que la superficie de la pieza haya experimentado la recuperación elástica después de retirar la carga de apriete, las cotas finales satisfarán la condición de planitud previamente establecida de 0,02 mm. Si se selecciona convenientemente la opción de postprocesado en las operaciones a realizar en el programa de CAD-CAM, se obtendrá además un fichero en código ASCII que contenga los comandos de programación de la

Tipo de operación	Fresado frontal en acabado
Diámetro de corte	10 mm
Número de filos	4
Material	Acero HSS
Velocidad de corte (rpm)	500
Velocidad de avance ($\frac{\text{mm}}{\text{diente}}/\text{min}$)	62,5

Tabla 5.3: Parámetros de mecanizado utilizados en la simulación de CAD-CAM.

MHCN (Figura 5.17) que se vaya a utilizar para llevar a cabo el mecanizado de la pieza.

5.4. Recapitulación

El procedimiento de integración de los tres métodos desarrollados posee como soporte una base de datos relacional que permite una ágil búsqueda y extracción de los datos críticos de los diferentes análisis necesarios para examinar el sistema de sujeción. La base de datos se alimenta de la información suministrada por los modelos CAD de la pieza y del utillaje de sujeción, de los datos metrológicos de los utillajes de sujeción y de la preforma de la pieza, de donde se obtienen las desviaciones e incertidumbres de fabricación, de la elección y posicionamiento de los utillajes de fijación para el estudio de la accesibilidad de la herramienta de corte a la pieza (CAPP), y del análisis mecánico mediante técnicas CAE de las deformaciones totales y locales que se producen en la pieza. Esta base de datos persigue la integración final de los sistemas CAD, CAPP, CAE y CAM que permita obtener una información de los errores provocados por un inadecuado diseño o posicionamiento del sistema de amarre, y que además proporcione los datos necesarios para compensar estos errores mediante la generación de nuevas trayectorias de herramienta en el mecanizado de la pieza en una MHCN, lo que permitirá obtener mayores precisiones en las cotas críticas de fabricación. Mediante un ejemplo ilustrativo, se implementa de modo práctico, la integración de los tres métodos de análisis mostrando los programas y los formatos de datos necesarios. Finalmente, la base de datos relacional para la integración de métodos de análisis de los sistemas de sujeción permite combinar todos los errores planteados (prerreglaje, referencia, deformación estructural e inden-

```

%1
N5 T01.01
N10 G43 S500 M03
N15 G90 G00 X2.713 Y4.197
N20 Z2.54
N25 G01 Z11.313 F127
N30 X11.569 Y4.127 Z10.833 F254
N35 X20.253 Y4.171 Z10.347
N40 X29.047 Y4.142 Z9.875
N45 X37.627 Y4.252 Z9.423
N50 X46.195 Y4.358 Z9.015
N55 X54.511 Y4.575 Z8.688
N60 X62.503 Y4.838 Z8.469
N65 X70.216 Y4.993 Z8.383
N70 X77.827 Y4.912 Z8.416
N75 X85.585 Y4.616 Z8.583
N80 X93.564 Y4.215 Z8.859
N85 X101.784 Y3.825 Z9.243
N90 X110.168 Y3.485 Z9.719
N95 X118.644 Y3.179 Z10.255
N100 X127.229 Y2.968 Z10.851
N105 X135.863 Y2.804 Z11.493
N110 X144.508 Y2.642 Z12.172
N115 X153.211 Y2.565 Z12.877
N120 X161.906 Y2.471 Z13.597
N125 X170.661 Y2.48 Z14.333
N130 X170.66 Y7.461
N135 Z14.093 F127
N140 X161.915 Y7.469 Z13.359 F254
N145 X153.209 Y7.545 Z12.632
N150 X144.522 Y7.648 Z11.921
N155 X135.867 Y7.793 Z11.237
N160 X127.255 Y7.985 Z10.585
N165 X118.69 Y8.217 Z9.977
N170 X110.214 Y8.514 Z9.426
N175 X101.841 Y8.855 Z8.944
N180 X93.633 Y9.24 Z8.55
N185 X85.619 Y9.613 Z8.257
.....
.....
N1860 X160.691 Y52.532 Z11.013
N1865 X165.678 Y52.509 Z11.453
N1870 X170.655 Y52.469 Z11.893
N1875 G00 Z127.
N1880 G44
N1885 G74 Z
N1890 M30

```

Figura 5.17: Código ISO generado en el programa TekSoft®.

tación local), y generar a partir de ellos una trayectoria de herramienta que los compense. Mediante la integración de todos los métodos de análisis se consigue una herramienta más compacta y general para abordar el estudio de los sistemas de amarre en procesos de mecanizado.

Capítulo 6

Conclusiones finales

6.1. Conclusiones

En el presente trabajo se han elaborado herramientas de análisis del sistema de sujeción, y se han integrado con las bases de datos de diseño y de los programas de fabricación. Estos análisis se dividen en tres grandes bloques, que se clasifican según tres puntos de vista diferentes: el metrológico, el global estructural, y el de contacto local. Estos análisis se han interrelacionado para que el sistema de sujeción desempeñe con la mayor corrección posible las funciones que tiene asignadas dentro del proceso de fabricación.

Mediante el desarrollo de un método de análisis de la precisión dimensional sencillo, rápido y de aplicación directa mediante programas de cálculo científico como Matlab®, se han estimado los valores esperados de las cotas e incertidumbres de fabricación, cuando están influenciadas por las variables dimensionales y de forma del sistema compuesto por la pieza y los elementos de sujeción. En el proceso de cálculo, se ha aplicado en primer lugar, el principio de isostaticidad con el fin de conocer la posición de los elementos de sujeción con respecto al sistema de coordenadas de la máquina-herramienta, y en segundo lugar, se ha aplicado la ley de propagación de varianzas, con el objeto de obtener la incertidumbre de fabricación. De este modo, es posible predecir con un buen grado de certeza si la pieza mecanizada superará el control metrológico correspondiente. Con este método se rompe con la tendencia

de los métodos desarrollados hasta el momento para el estudio metrológico o análisis de tolerancias de los elementos de sujeción, donde más que errores e incertidumbres de fabricación, se determinan los errores de posicionamiento de la pieza sobre el sistema de sujeción. Además, las cotas y sus incertidumbres asociadas pueden ser contrastables con las reales, medidas en un proceso de control de calidad de la pieza terminada. Además, la principal ventaja de este método es que se puede determinar la influencia de cada parámetro de diseño de la sujeción en las dimensiones críticas finales, lo que permite dirigir los programas de mejora de la calidad hacia factores realmente importantes. Al igual que en otros trabajos, el error debido a la desviación de la cota estimada de fabricación se puede compensar en el programa de control numérico correspondiente.

Como se ha podido comprobar, un factor clave en los procesos de mecanizado es el aseguramiento de la posición de la pieza a lo largo de todo el proceso de corte. Lo que significa que ésta debe permanecer inmóvil a pesar de las altas fuerzas de corte a las que se le somete. Aunque en el método de análisis metrológico se ha supuesto que la pieza es un sólido rígido, en realidad se trata de un cuerpo susceptible de ser deformado como consecuencia de las fuerzas de apriete, necesarias para contrarrestar el efecto de las elevadas fuerzas de corte de los actuales procesos de mecanizado.

Se ha de tener en cuenta que, frecuentemente, la pieza no está sujeta isostáticamente, por lo que se ha de trabajar con herramientas de cálculo en sistemas sobrelocalizados. Los métodos habitualmente utilizados para la determinación de la distribución de carga de contacto en este tipo de sistemas, suelen utilizar algoritmos no lineales excesivamente complejos, que precisan de unos grandes requerimientos en software y hardware. A pesar de la alta capacidad de procesamiento de los equipos actuales, aún debe emplearse un importante tiempo en preproceso, resolución e interpretación de resultados. Además, estos resultados no siempre ofrecen la precisión o calidad final exigidas, siendo necesario incrementar el número de iteraciones o realizar un mayor refinamiento de la malla, que provocará una disminución de la eficiencia computacional. Por otro lado, pueden aparecer discontinuidades en la resolución de la función objetivo, lo que implica una complicada consecución de la convergencia. Con el fin de ofrecer una alternativa a las dificultades encontradas con los métodos habituales, se ha utilizado un método, que asumiendo ciertas simplificaciones, presenta la suficiente robustez y flexibilidad para resolver con la suficiente aproximación, los problemas de contacto que aparecen en los sistemas de amarre de piezas en máquinas-

herramientas. El método propuesto en el Capítulo 3 ha requerido el uso del método de los elementos finitos (MEF) como herramienta auxiliar con el fin de obtener los coeficientes de la matriz de desplazamientos de la pieza y los elementos de sujeción, correspondientes a la formulación matricial. Los datos de la matriz de desplazamientos se han obtenido como fichero de salida de resultados de Ansys®, y han sido introducidos en el correspondiente programa de Matlab®, donde se ha implementado el procedimiento de cálculo del vector de cargas de contacto. Para considerar posibles alternativas para la posición de aplicación de la fuerza de apriete, se ha variado la posición del punto de apriete y se han calculado nuevos repartos de cargas estableciendo determinadas funciones que sean capaces de expresar el valor de la fuerza de contacto en un punto de localización dado, en función de las coordenadas x e y de cualquier punto de apriete. A partir de estas funciones, se han hallado las curvas frontera para carga máxima y mínimas de contacto establecidas y se han representado regiones válidas para la aplicación de la carga de apriete. Estas regiones válidas facilitan la selección de puntos alternativos para la aplicación de la fuerza de apriete en caso de que existiera una interferencia entre la trayectoria de la herramienta de corte y el elemento de apriete, o bien en caso de que se pretenda buscar una posición óptima de apriete siguiendo algún criterio alternativo. Otra ventaja de este método es que conocido el reparto de cargas es posible determinar las deformaciones estructurales de la superficie de la pieza.

El coste computacional de este método es muy reducido comparado con los métodos conocidos para el cálculo del reparto de cargas, ya que aunque se basa en el MEF para hallar los coeficientes de la matriz de desplazamientos, no se utilizan elementos no lineales de contacto. Por otro lado, la formulación matricial implementada sólo presenta como dificultad una inversión de la matriz de desplazamientos y su modificación mediante la adición de una columna, una fila y la multiplicación de la diagonal principal por dos. Por lo tanto, resulta muy sencilla su implementación y su cálculo es directo mediante el uso de aplicaciones informáticas como Matlab®. Por otra parte, a pesar de que se han asumido ciertas suposiciones, tales como la no consideración de los efectos dinámicos, ni los efectos de fricción, ni el efecto de las fuerzas de corte y su variación durante el proceso de mecanizado, se puede concluir que el método presenta suficiente robustez y al mismo tiempo posee una mayor simplicidad. Este razonamiento fue apuntado anteriormente, ya que uno de los objetivos de la presente tesis es ofrecer métodos centrados en el estudio de la sujeción, que aporten generalidad e independencia con respecto a la máquina-herramienta y a la herramienta de corte. Además, se

aumenta precisión en los cálculos, ya que al no utilizarse elementos de contacto, no existen más barreras que el tamaño de malla mínimo permitido por el programa de elementos finitos utilizado. Sin embargo, el método propuesto posee como inconveniente la especial precaución que se ha de tener a la hora de definir la posición de los puntos de localización en los que se discretiza la línea de carga, ya que éstos han de coincidir con los nodos de la malla de los elementos de sujeción y de la pieza.

En los actuales procesos de mecanizado, debido a las exigencias de productividad, las fuerzas de corte y apriete requeridas son cada vez mayores y por lo tanto, mayor es la probabilidad de que la geometría del elemento de fijación o de apoyo deforme plásticamente una superficie ya acabada. Además, se pueden producir imprecisiones por los errores de posicionamiento debidos a las deformaciones locales. Los métodos de análisis de tensiones y deformaciones actuales se clasifican en analíticos, donde se tratan geometrías esférica o cilíndrica convencionales, o numéricos, como el MEF y el método de los elementos de contorno, que pueden tratar cualquier tipo de geometría. Sin embargo, se echa en falta un método más eficiente que permita analizar geometrías de contacto diferentes de las cilíndricas y esféricas convencionales, y que sea capaz de calcular las tensiones superficiales y las deformaciones que deslocalizan la pieza.

El método desarrollado en el Capítulo 4 se ha estructurado siguiendo la secuencia que se expone a continuación. En primer lugar, se parte de la expresión conocida de la distribución de presiones para el contacto mecánico entre dos cuerpos dentro del semiespacio elástico, siendo esta formulación diferente dependiendo del elemento de sujeción que se esté estudiando (cilíndrico o esférico). Esta expresión ha sido convenientemente tratada para obtener una ecuación general que tenga en cuenta las condiciones de contorno del problema planteado. A continuación, una vez detectados los problemas de singularidad, se ha propuesto la resolución de las ecuaciones integrales y diferenciales de la expresión de distribución de presiones mediante la utilización de polinomios de aproximación de Chebyshev. Una vez resueltas las integrales de las expresiones de la distribución de presiones, se ha aplicado el método de cuadratura gaussiana para obtener el valor de la presión total P que ejerce el elemento de sujeción sobre la pieza. Por último, mediante la utilización del método de la secante, se ha determinado el valor del semiancho de contacto a , que depende de la carga de apriete P_0 y de la geometría del elemento de apoyo. Esta estructura se ha utilizado de forma análoga tanto para el estudio de elementos de tipo cilíndrico (deformación plana), como

para elementos de sujeción de tipo esférico (comportamiento tensional axisimétrico) no convencionales, aunque la formulación matemática inicial sea distinta. Por último, se ha aplicado el método a distintos casos de sujeción, con elementos de tipo cilíndrico y esférico, donde se ha estudiado la variación del semiancho de su tramo recto w . Conocido el valor de la distribución de presiones ha sido posible conocer el mapa tensional subsuperficial.

Este método semianalítico permite disponer de una herramienta de análisis ágil, ya que reduce los tiempos de cálculo en una relación 1/240 aproximadamente, en comparación con los resultados obtenidos mediante el MEF, para el mismo planteamiento de problemas de contacto, y a costa de perder un escaso valor de precisión en los resultados. Además, no se pierde tiempo en la fase de preproceso, ya que en este caso es innecesaria. Así, en el caso de resolución del problema de elemento de sujeción con perfil circular (caso de Hertz) el error es del 1 % para los valores de distribución de presiones de la tipología cilíndrica, y del 0,5 % para la tipología esférica.

Por otra parte, se ha observado que para el caso de perfil circular, el valor máximo de la presión de Hertz se puede reducir modificando la geometría, evitando así la aparición de daño por indentación sobre la superficie de la pieza. Por esta razón, se ha procedido a variar la geometría del perfil mediante la inclusión de tramos rectos variables, observándose que a medida que se incrementa la dimensión de dichos tramos, se obtienen valores de presión máxima de contacto y tensiones menores, con mejor reparto de presión entre los puntos en los que se subdivide el ancho de contacto, disminuyendo el riesgo de daño por indentación sobre la superficie de la pieza mecanizada. Los errores encontrados en los casos estudiados son del 5 % para el elemento cilíndrico y del 10-15 % para el esférico, respecto a los obtenidos por el MEF.

Con el fin de disponer una herramienta para optimizar el diseño de la sujeción, se han propuesto unas correlaciones que representan el valor adimensionalizado de la presión de contacto y de las tensiones máximas, frente a la presión y tensión máxima de Hertz, respectivamente, en función del valor del semiancho del tramo recto. Con estas correlaciones se podrán establecer búsquedas del valor del semiancho del tramo recto sin necesidad de resolver el problema por el método semianalítico.

A pesar de que se han propuesto e implementado diversos métodos y técnicas de mejora del diseño de los sistemas de sujeción, entre ellos los propuestos en los Capítulos 2, 3 y 4 de la presente tesis, éste sigue constituyendo uno de los principales cuellos de botella entre los sistemas CAD y CAM de los procesos de mecanizado. Las dificultades encontradas se deben a que los

métodos desarrollados utilizan y generan una información muy heterogénea (p.e.: los atributos que describen el proceso de mecanizado y del sistema de sujeción, los atributos de diseño de la pieza; los parámetros relacionados con el CAE y los resultados obtenidos en cada análisis, etc.). Por consiguiente, el diseño y análisis de los sistemas de sujeción no sólo deben utilizar métodos que sirvan de enlace entre los sistemas CAD-CAM, sino que se ha de llegar aún más lejos. Por esta razón, conviene que además exista un soporte que maneje de una forma ágil todos los datos relacionados con el estudio del sistema amarre-pieza.

Este soporte, habitualmente, está formado por las bases de datos de los sistemas CAFD, que como se describió en la introducción, son bastante efectivos en el ámbito en el que se desarrollan, donde, o bien se representan las geometrías y tolerancias de los sistemas de sujeción, o bien se determinan las superficies y los puntos de aplicación de las sujeciones. Por otro lado, los sistemas CAFD no tienen en cuenta las deformaciones locales y estructurales, en conjunción con el análisis de las cotas e incertidumbres asociadas. Por esta razón, en esta tesis doctoral se ha desarrollado una base de datos relacional que permite una ágil búsqueda y extracción de los datos críticos de los diferentes análisis necesarios para examinar el sistema de sujeción. La base de datos se alimenta de la información suministrada por el modelo CAD de la pieza y del utillaje de fijación, los datos metrológicos de los utillajes de fijación y los de la preforma de la pieza, de donde se obtienen las desviaciones e incertidumbres de fabricación, la elección y posicionamiento de los utillajes de fijación para el estudio de la accesibilidad de la herramienta de corte a la pieza (CAPP), y el análisis mecánico mediante técnicas CAE de las deformaciones totales y locales que se producen en la pieza. Esta base de datos persigue la integración final de los sistemas CAD, CAPP, CAE y CAM que permita obtener una información de los errores provocados por un inadecuado diseño o posicionamiento del sistema de amarre, y que además proporcione los datos necesarios para compensar estos errores mediante la generación de nuevas trayectorias de herramienta en el mecanizado de la pieza en máquinas-herramienta de control numérico, lo que permitirá obtener mayores precisiones en las cotas críticas de fabricación. Mediante la integración de todos los métodos de análisis elaborados en la presente tesis, se ha conseguido una herramienta más compacta y general para abordar el estudio de los sistemas de amarre en procesos de mecanizado.

6.2. Desarrollos futuros

En la presente tesis se han desarrollado métodos de análisis de los elementos de sujeción cuyo denominador común ha sido la generalidad en su implantación a diferentes diseños de las piezas, sistemas de sujeción, operaciones de corte y máquinas-herramienta utilizadas. En contraprestación a esta generalidad se pierde cierta precisión en los resultados finales. Por lo que conviene realizar estudios experimentales para comparar los resultados teóricos de los tres análisis y el procedimiento de integración desarrollado.

Otros desarrollos futuros podrían ser, la inclusión en el estudio del efecto de las fuerzas de corte y su variación, la consideración del efecto de la fricción, y por consiguiente de las fuerzas tangenciales cuando su papel represente mayor relevancia (p.e.: en los casos de sujeción donde intervengan grandes superficies de contacto y sea necesario el efecto de la fricción para asegurar la inmovilidad total de la pieza).

Otro campo de interés puede ser la ampliación del estudio local del contacto entre los elementos de sujeción y la pieza desde el ámbito elástico al plástico, y el estudio experimental de las zonas con endurecimiento y tensiones residuales, mediante el análisis de la microestructura de la subsuperficie de la pieza sometida a fuerzas normales. Este estudio iría acompañado de la observación del mecanismo de formación de la huella producida por el elemento de sujeción en contacto con la superficie de la pieza y, cómo vendría influido ésta por su geometría y por la fuerza de apriete aplicada.

Por otro lado, para la elaboración de la tesis, se han partido de ciertas hipótesis, como la suposición de que la máquina-herramienta es ideal y no introduce ningún error, que no se consideran las cargas dinámicas inherentes al propio proceso de mecanizado, o el desgaste de la herramienta, etc. Cada uno de estos aspectos podrían ser considerados en un futuro estudio utilizando las herramientas de análisis ya elaboradas, o bien mediante el desarrollo de nuevos métodos de análisis.

Los métodos de análisis llevados a cabo y su integración sientan las bases para comenzar a desarrollar la siguiente fase del proceso de diseño de los sistemas de sujeción, que es la de optimización. Obtenido un diseño óptimo del utillaje de sujeción, se podrá fabricar y verificar su prototipo final con el fin de mecanizar componentes que satisfagan los requisitos de productividad y calidad establecidos.

Apéndice A

Terminología

Debido a la confusión habitual que puede generar el vocabulario relacionado con el ámbito de la sujeción de piezas en máquinas-herramienta, conviene antes de nada justificar la terminología utilizada en la presente tesis doctoral.

Los términos utilizados pueden proceder de distintos ámbitos:

- Jerga propia empleada en los talleres, que se ha trasladado a los manuales de taller, a los textos académicos, a las normas, etc. Se trata de una práctica muy habitual en el campo de las máquinas-herramientas, donde entre otros, se pueden exponer ejemplos claros de expresiones como amarre, bancada, redondo o utillaje.
- Traducción literal de los términos usados en la lengua inglesa, alemana o francesa, que ya están normalizados en su país de origen o existe un consenso sobre su uso. Se trata de un recurso muy utilizado y requiere de un importante esfuerzo, ya que en ocasiones no es tan fácil encontrar una palabra que exprese realmente el concepto que posee la palabra inglesa.
- Imitación fonética de los términos usados en los textos en lengua inglesa. Esto ocurre principalmente en las traducciones en países de lengua hispana, donde dada la carencia de vocabulario bien definido, optan por la adaptación de la palabra inglesa sin más complicaciones.

- Debido a nuevos conceptos que necesitan nuevas expresiones donde las frases acaban simplificándose según palabras descriptivas que terminan normalizándose.

En el tema que ocupa esta tesis, las palabras comúnmente utilizadas en las normas, no aparecen con el significado que se les da en este ámbito en el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española ni en el Diccionario Científico y Tecnológico de la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Al carecer de fuentes bibliográficas con autoridad oficial sobre el vocabulario utilizado, se proponen a continuación las siguientes fuentes que pueden ser utilizadas y extendidas como argumento de autoridad para el uso concreto de algún término:

1. Las normas en lengua castellana (en concreto las normas UNE). Las normas UNE no disponen de un vocabulario en esta materia, y sin embargo utiliza palabras como amarre, utillaje, bancada, etc. (UNE 15-432-94, UNE 15-430-94, UNE 15-217-92).
2. Libros clásicos sobre la materia. Desgraciadamente los libros clásicos sobre mecanizado no han tratado el tema de la sujeción, por lo que no han utilizado su lenguaje específico, y cuando lo han hecho han utilizado traducciones literales muy cuidadas como la palabra “sujeción”, evitando profundizar en el tema.
3. Manuales, libros y publicaciones académicas aparecidas en España en los últimos decenios. Sólo se considerarán si su uso ha sido suficientemente generalizado.
4. Manuales y catálogos utilizados por los operarios ajustadores. La variedad es muy extensa, y recogen distintas traducciones conteniendo palabras y modos de decir de la jerga específica, según el país y el sector en el que se utilicen. Por lo tanto, gozan de cierta autoridad, siendo mayor cuanto más extenso sea el ámbito donde se utilice. Estas jergas cuentan además con el atractivo de su casticismo, espontaneidad, carácter práctico y fonéticamente adaptado.
5. Literatura extranjera. Dado el creciente avance científico, cada vez surgen nuevos términos adecuados a conceptos que provienen del desarrollo de metodologías nuevas publicadas en lengua inglesa. Lo que obliga a encontrar una palabra equivalente en lengua española que distorsione lo menos posible el significado del término original.

En esta tesis no se pretende realizar un estudio filológico del asunto, sin embargo, con el fin de evitar confusiones y aclarar desde un principio los términos usados en la misma, se presenta la siguiente relación de términos con su significado y procedencia.

Amarre: Montaje realizado con el objeto de fijar la pieza sobre la mesa de trabajo de la máquina-herramienta, para llevar a cabo el mecanizado de parte de su superficie. En inglés se denomina *fixture*, y se utiliza extensamente en las Normas UNE, manuales y catálogos. Esta palabra no se encuentra en el diccionario de la R.A.E, y su procedencia puede deberse al verbo *agarrar*; en cuyo caso la palabra aceptada por la R.A.E. para su sustantivo sería *agarro*, que es muy poco utilizada. También puede proceder del verbo francés *amarrrer*. Para evitar confusiones y errores, a falta de entidad normativa, se utilizará, preferentemente, la palabra española *sujeción*, que posee el mismo significado.

Sujeción o montaje de sujeción: Forma académica de denominar al amarre según la traducción de textos clásicos y el que sigue el Diccionario Técnico de F. Beigbeder, Ed. Díaz de Santos.

Fijación: Se utiliza como sinónimo de sujeción.

Bancada: En la normativa y manuales se expresa como la plataforma sobre la que está colocada la máquina-herramienta. Habitualmente también se usa para denominar a la mesa de trabajo. Esta palabra, aunque no aparece en el D.R.A.E., es muy usada por las Normas UNE, manuales, etc.

Mesa de trabajo: Denominación utilizada en esta tesis para nombrar a las placas porta-piezas referidas por la norma UNE 15-217-92. Parece que esta denominación es más común y global que la proporcionada por la norma. También se usa la palabra *bancada* como sinónimo.

Fuerza de accionamiento: Fuerza ejercida sobre el mecanismo de aplicación del apriete.

Fuerza de apriete o Apriete: Fuerza compresiva utilizada entre la pieza y los localizadores con el fin de asegurar su inmovilidad. Del inglés *clamp*.

Cota: Especificación dimensional o geométrica indicada en los planos de diseño o fabricación. En inglés *datum*.

Cota de fabricación: Valor medio de la dimensión final obtenida en un proceso de fabricación, y que se corresponde a una cota especificada en un plano de diseño.

Incertidumbre de fabricación: Valor cuantitativo de la precisión esperada en las superficies mecanizadas después de haber evaluado todas las fuentes

de error.

Indentación: Proceso de acercamiento entre dos cuerpos en contacto a nivel local sin tener en cuenta las deformaciones en puntos alejados. En inglés se denomina *compliance*.

Localizador o apoyo: Elemento que forma parte del amarre cuya función consiste en posicionar a la pieza en la máquina-herramienta en unas coordenadas espaciales determinadas. Procede del inglés *locator*.

Matriz de desplazamientos: Matriz donde cada coeficiente c_{ij} representa el desplazamiento en el punto i cuando se aplica una fuerza unidad en el punto j . En inglés *flexibility matrix*.

Pieza: Es el objeto que se va a mecanizar para producir un componente determinado. La pieza puede tener superficies ya mecanizadas en las subfases anteriores. En inglés tiene su correspondencia con la palabra *workpiece*. Esta es la palabra usada habitualmente en español (Normas UNE, Manuales), también se usan otras palabras sinónimas como *bruto* o *preforma*.

Componente o pieza mecanizada: Es el resultado esperado después del mecanizado de las superficies de la pieza. En inglés *part*.

Subfase: Conjunto de operaciones contiguas que se realizan en un mismo amarre. Así se denomina en los manuales académicos.

Superficie ideal: Superficie especificada en el plano de fabricación que se pretenderá obtener en un proceso de mecanizado.

Superficie de amarre: Superficie del conjunto de los utillajes en contacto con la pieza en una subfase de amarre determinada. Utilizado en Normas UNE.

Superficie mecanizada deformada: Superficie de la pieza después de que finalicen todas las operaciones de mecanizado sin que se le libere de la acción de las fuerzas de apriete.

Superficie mecanizada final: Superficie obtenida después de haber retirado la fuerza de apriete y haberse producido la recuperación elástica correspondiente.

Superficie de referencia o de localización: Superficie de la pieza de la que depende alguna especificación de la superficie que se va a mecanizar, y que habitualmente se apoya sobre los elementos localizadores. Esta palabra es utilizada en los manuales académicos.

Utillaje: Denominación genérica de los elementos y dispositivos auxiliares que intervienen en los procesos de fabricación, como bridas y pinzas de su-

jeción, bloques de apoyo, cuñas, etc. (Definición recogida del Diccionario enciclopédico de Tecnología, Editor: José M^a Martínez-Val, Editorial Síntesis, Madrid, 2000). La palabra procede del francés *outils de coupe*, y es utilizada por las Normas UNE y Manuales. También podría proceder de la expresión *útiles para montaje*.

Apéndice B

Reparto de cargas en sistemas hiperestáticos de sujeción de piezas

B.1. Rigidez de una viga empotrada en un extremo

Se define desplazamiento específico K_1 de la viga en un punto P como el desplazamiento del punto P donde se aplica la carga y en la dirección de ésta cuando el valor de la misma es la unidad. Si se representa gráficamente la K respecto de la distancia de P al empotramiento, se obtiene una curva creciente K como la mostrada en la Figura B.2. Al ser un material elástico y los desplazamientos pequeños, el desplazamiento en un punto será proporcional a la carga aplicada, pues se supone que se trabaja dentro del ámbito lineal.

$$\delta = F_i k(x) \quad (\text{B.1})$$

La energía de deformación de la viga será igual al producto de la fuerza por el desplazamiento en el punto de aplicación de la carga, y dividido por dos si se supone el procesos de aplicación es cuasiestático, con lo que al sustituir la Ecuación (B.1) resulta que la energía de deformación U es función cuadrática

Figura B.1: Sistema de dos cuerpos elásticos con un punto en contacto

de la fuerza aplicada.

$$U = \frac{1}{2} F_i \delta = \frac{1}{2} F_i F_i k(x) \quad (\text{B.2})$$

Si dos vigas contactan en un punto y en ese punto actúan la una contra la otra con una fuerza unidad, tal como se muestra en la Figura B.1, los desplazamientos en ambas vigas vendrán dados por la rigidez de cada una. La suma de ambos desplazamientos dará como resultado la rigidez del par de vigas. Al venir las rigideces en función de la distancia desde el punto de carga hasta el empotramiento, en una de las vigas se hará una traslación del origen de coordenadas de forma que la nomenclatura usada en las expresiones coincida con las entidades de acotación de la Figura B.1.

B.2. Energía de deformación en el contacto entre dos cuerpos elásticos

Asumiendo que el comportamiento elástico del material es lineal, es decir, la magnitud de los desplazamientos y las tensiones en cada punto son proporcionales a la carga aplicada, y que las deformaciones son pequeñas, se puede obtener una expresión para la energía de deformación U , que es función cuadrática de la fuerza aplicada F_i y de la rigidez del elemento mecánico, k_i :

$$U = \frac{1}{2} F_i^2 k(x) \quad (\text{B.3})$$

La deducción de la ecuación B.3 está basada en el cálculo de la rigidez de una viga empotrada en un extremo (ver Figura B.1), donde aparece un desplazamiento específico δ_1 de la viga en un punto P como consecuencia de la aplicación de una carga unitaria. Por lo tanto, el desplazamiento específico δ_1 se define como el desplazamiento del punto P en la dirección de aplicación de la carga cuando ésta toma el valor unitario.

Si se representa gráficamente la rigidez K respecto de la distancia de P al empotramiento, se obtiene una curva creciente K como la mostrada en la Figura B.2. Al ser un material elástico y los desplazamientos pequeños, el desplazamiento en un punto será proporcional a la carga aplicada, debido a que el problema se encuentra dentro del ámbito lineal.

$$\delta = F_i k(x) \quad (\text{B.4})$$

Figura B.2: Evolución de la rigidez conjunta en función de la localización del punto de contacto.

La energía de deformación de la viga será igual al producto de la fuerza por el desplazamiento en el punto de aplicación de la carga, y dividido por dos si se supone el procesos de aplicación es cuasiestático. Por lo tanto, si se sustituye el valor de δ en la expresión de la energía de deformación, se obtiene la siguiente ecuación, de donde se deduce que U es función cuadrática de la fuerza aplicada:

$$U = \frac{1}{2} F_i \delta = \frac{1}{2} F_i F_i k(x) \quad (\text{B.5})$$

B.2.1. Energía de deformación entre dos cuerpos con un punto de contacto

Tal y como se muestra en la Figura B.1, cuando dos vigas contactan ejerciendo mutuamente entre sí una fuerza unitaria en un punto, el desplazamiento en cada viga vendrá dado por su rigidez. Siendo la rigidez total del par de vigas, la suma de ambos desplazamientos. Como las rigideces son función

de la distancia desde el punto de carga hasta el empotramiento, en una de las dos vigas se realizará una traslación del origen de coordenadas de forma que la nomenclatura utilizada en las expresiones coincida con las entidades de acotación de la Figura B.1. En este caso la expresión para determinar la energía de deformación es la siguiente:

$$U = \frac{1}{2}(F_i\delta_1 + F_i\delta_2) = \frac{1}{2}F_i^2(k_1(x) + k_2(h-x)) \quad (\text{B.6})$$

donde δ_1 y δ_2 son las flechas respectivas en los puntos de contacto.

B.3. Reparto de cargas entre dos puntos de contacto

Cuando el contacto entre los cuerpos se produce en dos puntos, la energía ya no depende únicamente de las propias rigideces de cada cuerpo. Esto es debido a que el desplazamiento de cada punto no sólo depende del esfuerzo aplicado en él, sino también del valor del esfuerzo aplicado en el otro punto. Como consecuencia de la aplicación de una fuerza unidad en el punto x_i , aparece una flecha de la viga en el punto x a la que se denota $\delta(x, x_i)$.

En el caso de que actúen dos fuerzas sobre una viga, F_1 en el punto x_1 y F_2 en el punto x_2 , el desplazamiento total en estos dos puntos se calcula del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \delta_{T1} &= F_1\delta(x_1, x_1) + F_2\delta(x_1, x_2) \\ \delta_{T2} &= F_1\delta(x_2, x_1) + F_2\delta(x_2, x_2) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Si el contacto se produce en dos puntos, se puede obtener la expresión de la energía total de deformación de la viga U_1 a partir del valor conocido de los esfuerzos aplicados y de los desplazamientos o flechas anteriormente definidos:

$$2U_1 = F_1(F_1\delta_1(x_1, x_1) + F_2\delta_1(x_1, x_2)) + F_2(F_1\delta_1(x_2, x_1) + F_2\delta_1(x_2, x_2)) \quad (\text{B.8})$$

donde el subíndice 1 de U_1 y δ_1 denota el cuerpo 1.

La ecuación (B.8) se puede expresar de un modo más apropiado y claro utilizando la siguiente notación matricial:

$$2U_1 = [F_1 F_2] \begin{bmatrix} \delta_1(x_1, x_1) & \delta_1(x_1, x_2) \\ \delta_1(x_2, x_1) & \delta_1(x_2, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Al estar en contacto ambos cuerpos en dos puntos, la energía total de deformación del sistema es igual a la energía de deformación de un cuerpo más la del otro. Además deben tenerse en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las fuerzas F_1 y F_2 deben ser iguales en cada uno de los cuerpos según el principio de acción y reacción de Newton.
- Si la ecuación de la elástica de la segunda viga δ'_2 , (ζ, ζ_i) viene expresada en coordenadas locales ζ , es necesario cambiar al sistema de coordenadas global para expresar dicha ecuación utilizando las mismas coordenadas que δ_1 . Así se podrá operar con las dos elásticas en el mismo sistema de referencia.

Como se ha descrito anteriormente, sumando las dos expresiones de la energía de deformación de cada cuerpo, se obtiene la energía total de deformación del sistema:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} [F_1 F_2] \begin{bmatrix} \delta_1(x_1, x_1) + \delta_2(x_1, x_1) & \delta_1(x_1, x_2) + \delta_2(x_1, x_2) \\ \delta_1(x_2, x_1) + \delta_2(x_2, x_1) & \delta_1(x_2, x_2) + \delta_2(x_2, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

La matriz de desplazamientos se puede expresar de un modo más simplificada, quedando la siguiente expresión para la energía total de deformación:

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

B.3.1. Reparto de carga entre varios puntos de contacto

Si se generaliza la ecuación B.11 para el caso en el que intervengan N puntos de contacto, se obtiene la siguiente ecuación:

$$U = \frac{1}{2} [F]^T [C] [F] \quad (\text{B.12})$$

donde los componentes de la matriz $[C]$ se pueden expresar del siguiente modo:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^N \delta_k(x_i, x_j) \quad (\text{B.13})$$

En referencia a la matriz de desplazamientos $[C]$ es necesario realizar las siguientes observaciones:

- Según el teorema de reciprocidad de Raleigh-Betti, en el que se establece que $c_{ij} = c_{ji}$, se deduce que la matriz $[C]$ es simétrica.
- Si se admite que el desplazamiento de cada punto se produce únicamente a causa de la fuerza que actúa en dicho punto, la matriz $[C]$ es diagonal, por lo que no es necesario conocer la ecuación de la elástica para cada estado de carga en la elaboración de $[C]$, sino únicamente la rigidez de cada punto.

B.3.2. Principio de mínima energía

Según establece el principio de mínima energía, el estado final de tensiones y deformaciones del sistema formado por dos cuerpos en contacto será aquel en el que la energía interna alcance un valor mínimo estacionario. Esto es debido a que en virtud del teorema de Menabrea, un sistema hiperestático adquirirá un estado final donde el sistema de fuerzas y las deformaciones producidas hagan mínima la energía de deformación elástica.

De acuerdo con la formulación anteriormente desarrollada y aplicándola al caso en el que el contacto se produzca en N puntos entre dos cuerpos, el vector de fuerzas de contacto puntuales f_i es la incógnita a calcular mediante la minimización de la función de energía U , sujeta a dos restricciones. La primera indica que el sistema debe de estar en equilibrio, es decir, la fuerza total externa aplicada sobre el sistema, que es un dato de partida, debe ser igual a la suma de todas las reacciones obtenidas en cada uno de los puntos de contacto. La segunda establece que todas las fuerzas deben ser positivas ya que no existe adhesión o tracción entre las superficies, y en caso de que la hubiera se produciría un despegue de la pieza o falta de contacto.

Por lo tanto, la formulación matemática del problema tiene el siguiente enunciado:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & \sum_i \sum_j f_i c_{ij} f_j \\
 & \sum f_i = F \quad (a) \\
 & f_i \geq 0 \quad (b) \\
 & i = 1 \dots n
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

El problema planteado en la ecuación B.14 se ha realizado considerando dos sólidos con varios puntos en contacto, aunque en realidad se pueden tratar de áreas de contacto. En el caso de los sistemas de amarre, estas áreas se simplifican por líneas de contacto cuando hay una dimensión que predomina sobre la otra, y a su vez, se pueden discretizar estas líneas de contacto en una sucesión de cargas puntuales con el fin de simplificar los cálculos.

B.4. Métodos de minimización de la energía de deformación

Al ser cuadrática la función objetivo del problema planteado en la ecuación (B.14), no se pueden aplicar las técnicas conocidas de programación lineal, que son las más extensamente conocidas en la resolución de problemas de optimización. Por otro lado, las rutinas típicas de programación cuadrática presentan el inconveniente de ser iterativas y laboriosas, y en ocasiones la convergencia es difícil de alcanzar o es demasiado lenta. Otra posibilidad consiste en linealizar el problema como hizo Vijayarangan *et al.* [85] para solucionar el contacto entre cuerpos. Otra opción más es adaptar el problema bien al método tipificado de las condiciones de Kuhn-Tücker, método más general y suficientemente conocido, o bien al método de los Multiplicadores de Lagrange. Ambos métodos conducen a la obtención del mismo resultado, habiéndose probado con éxito en la modelización del contacto en procesos de compactación pulvimetalúrgica realizado por Cante *et al.* [8]. También han sido utilizados por Estrems *et al.* [23] en el desarrollo de un método para el cálculo del reparto de carga entre dos cuerpos con varios puntos de contacto. Recientemente Sánchez *et al.* [77], han ampliado el este método para su adaptación al caso de contacto mecánico entre la pieza y los elementos de fijación en procesos de mecanizado.

B.4.1. Método de las condiciones de Kuhn-Tücker

El problema planteado en la ecuación (B.14) resulta ser equivalente al tipificado de Kuhn-Tücker [74], por lo tanto, para que las soluciones sean equivalentes bastará con satisfacer las condiciones de necesidad y suficiencia establecidas del método de Kuhn-Tücker, de carácter más general. El enunciado del problema de Kuhn-Tücker viene dado, según la versión establecida por Reklaitis [74], por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && f(x) \\
&\text{sueto a} && g_j(x) \geq 0 && j = 1 \dots J \\
&&& h_k(x) = 0 && k = 1 \dots K \\
&&& x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

La equivalencia entre este enunciado y la ecuación (B.14) se alcanza introduciendo las siguientes sustituciones en el problema de Kuhn-Tücker:

$$\begin{aligned}
x_i &= f_i \\
f(x) &= U\{f\} = \sum_{i,j} f_i c_{ij} f_j \\
g_i(x) &= f_i && J = N \\
h_k(x) &= \sum_{i=1}^N f_i - F && K = 1
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Realizadas las sustituciones, de acuerdo con la teoría de Kuhn-Tücker, el problema equivale a encontrar, además del vector $x_{N \times 1}$, los vectores $u_{1 \times J}$, y $v_{1 \times K}$, que deben cumplir las dos condiciones siguientes:

- Condiciones de necesidad: Considérese un problema de programación no lineal planteado en la ecuación (B.15). Dadas f , g y h funciones diferenciables y x^* una solución factible del problema. Dada $I = j | g_j(x^*) = 0$. Además, $\nabla g_j(x^*)$, para $j \in I$ y $\nabla h_k(x^*)$, para $k = 1, \dots, K$ son linealmente independientes. Si x^* es una solución óptima del problema de programación no lineal, entonces existen (u^*, v^*) , tal que (x^*, u^*, v^*) resuelven el problema de Kuhn-Tücker dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x) - \sum_{j=1}^J u_j \nabla g_j(x) - \sum_{k=1}^K v_k \nabla h_k(x) &= 0 \\
u_j g_j(x) &= 0 \\
u_j &\geq 0
\end{aligned} \tag{B.17}$$

- Condiciones de suficiencia: Considérese un problema de programación no lineal definido por la ecuación (B.15). Dada una función $f(x)$ convexa, las restricciones de las inecuaciones $g_j(x)$ son todas cóncavas, para

$j = 1, \dots, J$, y las restricciones de igualdad $h_k(x)$, para $k = 1, \dots, K$ son lineales. Si existe una solución (x^*, u^*, v^*) que satisface las condiciones de Kuhn-Tücker dadas por la ecuación (B.17), entonces x^* es una solución óptima al problema de programación no lineal.

Si se realizan las sustituciones en el problema equivalente y se opera adecuadamente sobre la ecuación (B.17), resulta que se anulan todas las u_i , obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2f_i c_{ii} + \sum_{j \neq i}^n c_{ij} f_j - v &= 0 \\ \sum_i^n f_i - F &= 0 \end{aligned} \tag{B.18}$$

Al realizar la equivalencia de Kuhn-Tücker han aparecido dos nuevas variables c_{ij} y v , por lo que lógicamente han aumentado el número de incógnitas, también ha aumentado el número de ecuaciones y se han eliminado todas las inecuaciones que aparecían en el problema original. A la variable v no se le ha encontrado ningún significado físico, sin embargo es necesaria para llevar a cabo el proceso de cálculo.

En la mayoría de los problemas de Kuhn-Tücker no es tan sencillo llevar a cabo la equivalencia, lo que conlleva, como en los ejemplos presentados por Reklaitis [74], que se opte por una solución obtenida por tanteo. Sin embargo, este no es el caso del problema planteado para la minimización de la energía de deformación, deduciéndose por lo tanto, que la solución única que resuelve el problema es la auténtica. En definitiva, las incógnitas f_i del sistema de ecuaciones (B.18) constituyen la verdadera distribución de fuerzas que resuelven el problema entre dos cuerpos en contacto.

B.4.2. Método de los multiplicadores de Lagrange

En el cálculo de la distribución de carga por el método de los Multiplicadores de Lagrange, el sistema de ecuaciones resultante es idéntico al obtenido en la formulación de las condiciones de Kuhn-Tücker. Para ello, el Método de los Multiplicadores de Lagrange da lugar a un conjunto de condiciones necesarias para identificar los puntos candidatos a resolver problemas de optimización que tengan asignadas restricciones de igualdad.

Para la aplicación de este método será necesario convertir en ecuaciones de igualdad las inecuaciones de la restricción (b) del sistema de ecuaciones definido en la ecuación (B.14). Para ello, se introducen los valores a_i , que incrementarán el número de incógnitas del nuevo sistema de ecuaciones, que se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_i \sum_j f_i c_{ij} f_j \\ & \sum f_i = F \quad (\text{a}) \\ & f_i - a_i^2 = 0 \quad (\text{b}) \\ & i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Al introducir los valores de a_i se han introducido n variables y n restricciones, de modo que se han eliminado las inecuaciones de la ecuación (B.14). Operando el método de los Multiplicadores de Lagrange, se transforma el problema de programación no lineal con restricciones en un problema sin restricciones con la ayuda de parámetros no especificados conocidos como multiplicadores de Lagrange. De este modo, la función U definida a continuación es la que deberá ser minimizada:

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i c_{ij} f_j - \lambda \left(\sum_{i=1}^n f_i - F \right) - \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - a_i^2) \quad (\text{B.20})$$

Según se describe en el método, se procede a hacer estacionaria la función U , donde las incógnitas de la ecuación (B.20) se obtienen a partir de las derivadas parciales de U con respecto a cada una de las variables f_i , a_i , λ_i y λ .

$$\frac{\partial U}{\partial f_i} = 0 = 2f_i c_{ii} + \sum_{j \neq i} c_{ij} f_j - \lambda - \lambda_i \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = 0 = +2\lambda_i a_i \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = 0 = -(f_i - a_i^2) \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0 = - \left(\sum f_i - F \right) \quad (\text{B.24})$$

La ecuación (B.22) da como resultado que todos los λ_i son nulos, y a partir de las ecuaciones (B.21) y (B.24) se obtiene un sistema de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas, que proporciona los valores de f_i y de λ . Este sistema de ecuaciones coincide con el proporcionado por el método de las condiciones de Kuhn-Tücker, obtenido anteriormente en la ecuación (B.18), donde sólo es necesario sustituir v por λ . De este modo, y al ser todas las ecuaciones puestas en juego lineales, el sistema se puede representar en modo matricial.

Habitualmente, el multiplicador de Lagrange λ suele tener un significado físico concreto. En este caso, no se le ha encontrado, tratándose de un simple operador necesario para hallar la solución del problema.

Por otro lado, se puede aseverar que todos los valores de las variables incógnita f_i proporcionados por el método de los Multiplicadores de Lagrange son positivos, ya que antes de que dichas fuerzas fueran negativas dejaría de existir contacto. Esto último se puede demostrar intuitivamente por medio del siguiente razonamiento. Así, en el caso de que alguna de las f_i fuera negativa, el resto de fuerzas positivas deberían aumentar para que la fuerza total se mantuviera constante y por lo tanto, la energía total del sistema aumentaría, hecho por el que se incumpliría el principio de mínima energía en el que se fundamenta el método propuesto. Por otro lado, matemáticamente podría ocurrir que alguna de las a_i fuera un número complejo no obteniéndose una solución real para el problema.

B.5. Método Matricial para la determinación del reparto de carga

La ecuación (B.18) obtenida anteriormente como resultado de la aplicación bien del método de las condiciones de Kuhn-Tücker, o bien por el método de los multiplicadores de Lagrange, se puede expresar en notación matricial del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 2c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1(n-1)} & c_{1n} & -1 \\ c_{21} & 2c_{22} & \dots & \dots & c_{2n} & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & \dots & \dots & 2c_{nn} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

donde los c_{ij} representan los coeficientes de la matriz de desplazamientos $[C]$,

f_i son los módulos de los vectores de carga de contacto en cada uno de los i puntos en los que se ha discretizado la línea de carga, F es la fuerza total aplicada sobre el sistema formado por la pieza y los elementos de fijación, que debe ser igual a la suma de todos los f_i , y v no es más que un simple operador o multiplicador de Lagrange al que no se le ha encontrado significado físico.

La ecuación matricial (B.25) se puede escribir de forma más resumida de la siguiente manera:

$$[C^*] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

donde el proceso de obtención de la matriz $[C^*]$ de dimensiones de $(n+1) \times (n+1)$ a partir de la matriz de desplazamientos $[C]$ resulta sencillo y directo, del modo como se describe a continuación:

- Añadir una primera fila con todos términos unidad, excepto el último que debe ser nulo.
- Añadir una última columna con términos -1, excepto el primero que debe ser nulo.
- Multiplicar por 2 todos los términos de la diagonal principal.

De la ecuación (B.26) se puede obtener el vector de fuerzas f_i invirtiendo la matriz de desplazamientos modificada $[C^*]$ y multiplicando su primera columna por F . El vector formado por los f_i es único al tratarse de un sistema de ecuaciones homogéneo y la matriz diagonalizable:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ v \end{bmatrix} = [C^*]^{-1} \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

Para llevar a cabo el proceso de cálculo del vector de carga antes mencionado será necesario obtener los coeficientes de la matriz de desplazamientos $[C]$. Para la obtención de los valores de la matriz de los desplazamientos $[C]$

se puede recurrir a un método analítico como hizo Estrems *et al.* [23] con el caso de la determinación del reparto de carga entre los filetes de un tornillo de potencia. Otra alternativa es la utilización del método de los elementos finitos (MEF). Mediante el uso del MEF existen dos posibilidades de resolución del problema:

- Aplicación directa del MEF mediante la modelización de los dos cuerpos simultáneamente. Para ello se utilizarán elementos de contacto adecuados, de los que suelen disponer los distintos códigos. Sin embargo, esta opción da lugar a una formulación del problema no lineal conllevando un incremento del coste computacional.
- Otra posibilidad es utilizar el MEF para hallar la matriz de los desplazamientos de cada uno de los cuerpos por separado y sin necesidad de recurrir a elementos no lineales de contacto, al establecer las condiciones para la solución de un problema estructural. Con este fin deberán solucionarse los dos problemas correspondientes a los dos sólidos en contacto por separado. La matriz de desplazamientos del sistema $[C]$ se obtendrá a partir de la combinación de las matrices de desplazamientos de los dos problemas resueltos (pieza y elemento de fijación), y la matriz de desplazamientos modificada $[C^*]$, operando como se ha descrito anteriormente.

La segunda opción es más acertada por la razón de que el vector de fuerzas de contacto se obtiene de modo directo a partir de la aplicación de la ecuación (B.25), sin necesidad de recurrir a elementos no lineales de contacto. Es bien conocido que el uso de elementos de contacto no lineales puede provocar complicaciones en la convergencia y el proceso de cálculo se puede ralentizar en mayor o menor medida dependiendo del tipo y tamaño de los elementos, lo que repercute en la obtención de una relativa precisión en los resultados. En cambio, cuando no se utilizan elementos de contacto no existen estas limitaciones, pudiéndose afinar aún más en el mallado, y obtener por consiguiente una mayor precisión en los resultados. Otro aspecto a tener en cuenta es el número de iteraciones y de incrementos de carga, que siempre es necesario ajustar adecuadamente en el caso de que se trate de un problema no lineal.

En definitiva, se trata de un método sencillo y eficiente desde el punto de vista del coste computacional, debido a las siguientes razones:

- La restricción que introduce sólo aumenta la matriz final en una fila y una columna.
- Sólo se necesita el cálculo de una columna de la matriz inversa. Lo que reduce en una gran cantidad el número de operaciones del ordenador.

En caso de resolverse el sistema de ecuaciones por el método de diagonalización de Gauss-Jordan, el aumento de la matriz complementaria sería sólo en una columna, que contendría el valor F en la primera fila y cero en el resto, en lugar de añadir tantas columnas como filas hubiese en la matriz original. De este modo, se llevarían a cabo $n^2(n-1)$ operaciones algebraicas menos que usando el método de diagonalización completo, siendo n la dimensión de la matriz a invertir [3].

En el caso concreto de los sistemas de fijación, aparecen muchas zonas de contacto donde los desplazamientos son independientes entre sí. Esto influye en la aparición de múltiples coeficientes nulos en la matriz de desplazamientos $[C]$, y por lo tanto también en la matriz modificada $[C^*]$. Estos términos nulos se deben a que el desplazamiento en una zona de contacto no tiene efecto sobre el de la otra. Como consecuencia de esto, la formulación matricial presenta la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ [C]_1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & [C]_2 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & [C]_N & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{f\}_1 \\ \{f\}_2 \\ \dots \\ \{f\}_N \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

donde $[C]_1, [C]_2, \dots, [C]_N$, son las matrices de desplazamiento correspondientes a cada zona de contacto, que deben además poseer la diagonal duplicada.

Cuando la matriz de los desplazamientos $[C]$ es diagonal ($c_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$), de la ecuación (B.25) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$v = \frac{2F}{\sum_i \frac{1}{c_{ii}}} \quad (\text{B.29})$$

$$f_i = \frac{\frac{1}{c_{ii}}}{\sum_j \frac{1}{c_{jj}}} F$$

De la ecuación (B.29) se puede deducir que cuanto menor sea el valor es c_{ii} , mayor será la fuerza soportada por el punto de contacto i . Por lo tanto, la distribución de la fuerza en la línea de contacto entre dos cuerpos, posee un máximo en el punto donde se alcance el mínimo de rigidez conjunta, que en la Figura (B.2) aparece en la zona intermedia.

Apéndice C

Determinación de la presión de contacto entre dos cuerpos

A continuación se va a solucionar el caso plano por ser más sencillo y fácil de comprender. Cuando se tiene una distribución de presiones sobre una superficie semiindefinida, donde no se conocen las tensiones en la subsuperficie, la primera solución más intuitiva es su discretización en cargas puntuales de las que se conoce el campo de tensiones producido por cada una de ellas mediante las expresiones (C.1), según la Figura C.1.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \\ \sigma_\theta &= 0 \quad ; \quad \tau_{r\theta} = 0\end{aligned}\tag{C.1}$$

Aplicando la ley de Hooke se pueden determinar las deformaciones las cuales, a su vez, están relacionadas con los desplazamientos en las direcciones polares:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= -\frac{2P(1-\nu^2) \cos \theta}{\pi E r} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{2P\nu(1+\nu) \cos \theta}{\pi E r} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \tau_{r\theta} &= 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\end{aligned}\tag{C.2}$$

Figura C.1: Carga puntual sobre una superficie semiindefinida

Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales es resoluble mediante ciertas manipulaciones matemáticas, que aquí no se van a exponer por razones de espacio, a nuestros efectos sólo nos interesa el valor de los desplazamientos en la superficie y su relación con la fuerza aplicada:

$$\begin{aligned} (\bar{u}_r)_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2E} \\ (\bar{u}_r)_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= \frac{2P}{\pi E}(1-\nu^2)\ln r + C \end{aligned} \quad (C.3)$$

Por la constante C es imposible tener un valor de $\bar{u}_z$ por lo que se ha de poner una condición de contorno arbitraria. La barra encima de las magnitudes indican que se refieren a puntos de la superficie del espacio semiinfinito.

En el caso de actuar una carga tangencial se tiene el siguiente campo de tensiones:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2Q}{\pi} \frac{\sin \theta}{r} \\ \sigma_\theta &= 0 \quad ; \quad \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad (C.4)$$

Siguiendo el mismo procedimiento usado anteriormente se obtiene el siguiente campo de deformaciones:

$$\begin{aligned} (\bar{u}_r)_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= (\bar{u}_r)_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = \frac{2Q}{\pi E}(1-\nu^2)\ln r + C \\ (\bar{u}_r)_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)Q}{2E} \end{aligned} \quad (C.5)$$

Aplicando el principio de superposición se pueden obtener los desplazamientos cuando actúa una distribución de presiones normal $p(s)$ y tangencial $q(s)$, de forma que se obtiene:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x &= + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left\{ \int_{-b}^x p(s)ds - \int_x^a p(s)ds \right\} - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a q(s) \ln|x-s|ds + C_1 \\
\bar{u}_z &= - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a p(s) \ln|x-s|ds + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left\{ \int_{-b}^x q(s)ds - \int_x^a q(s)ds \right\} + C_2
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Son integrales que se pueden resolver numéricamente a falta de una condición de contorno para obtener la constante.

Suelen ser más útiles sus derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} p(x) - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{q(s)}{x-s} ds \\
\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} &= - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{x-s} ds + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} q(x)
\end{aligned} \tag{C.7}$$

La primera parte de esta ecuación es la deformada superficial ε_x , mientras que la segunda parte representa la pendiente de la superficie tal como queda. Estas ecuaciones incluyen en sí unas integrales impropias llamadas valores propios de Cauchy que se pueden solucionar mediante el teorema de los residuos o numéricamente mediante cuadraturas especiales.

Como se disponen de dos ecuaciones y cuatro variables ($p(x)$, $q(x)$, $\bar{u}_x$, $\bar{u}_z$), habrá que restringir dos para obtener las otras dos. De esta forma surgen cuatro tipos de problemas según las dos variables conocidas. Entre paréntesis se señalan ejemplos de esos casos.

- **Tipo I:** $p(x)$ y $q(x)$ (distribuciones hidráulicas)
- **Tipo II:** $\bar{u}_z$ y $q(x)$ (contacto sin fricción contra un cuerpo rígido $q(x) = 0$), o bien $\bar{u}_x$ y $p(x)$ (contacto entre superficies que no deslizan $\bar{u}_x = 0$)
- **Tipo III:** $\bar{u}_x$ y $\bar{u}_z$ (punzón rígido con adhesión $\bar{u}_x = 0$)
- **Tipo IV:** $\bar{u}_z$ y $q(x) = \pm \mu p(x)$ (punzón rígido con contacto deslizante)

El tipo que más se presenta en sujeción de piezas es el de tipo IV, en el cual se tiene que un desplazamiento vertical forzado por el utillaje que habitualmente es más duro que la pieza de trabajo, y además no hay adhesión entre las dos superficies, entre las cuales hay un coeficiente de rozamiento.

Este problema es extremadamente complejo y se están dedicando muchos esfuerzos de investigación para obtener soluciones analíticas muy aproximadas.

Habitualmente en la sujeción de piezas por razones de seguridad, las fuerzas de apriete normales son mucho mayores que las tangenciales a las cuales van a estar sometidos, por lo que se puede simplificar el problema para convertirlo en un problema de tipo III con el que las tensiones tangenciales superficiales que son las críticas desde el punto de vista de daño de las piezas son mayores.

En los problemas de tipo III las incógnitas son la distribución de presiones normales y las tangenciales. El área de contacto se puede determinar igualando la integral de las presiones a la fuerza normal que sí suele ser un dato, al igual que la fuerza tangencial.

Muy frecuentemente se presentan en el contacto una combinación de varios tipos de problemas, además, en el contacto utillaje-pieza, los datos no son la distribución de presiones sino la fuerza normal y la fuerza tangencial total, que deben ser iguales a la integración de las presiones normales y tangenciales respectivamente. Tampoco se suele conocer el área de contacto, dato que se obtiene por iteración.

Para simplificar la resolución del problema se van a resolver los problemas de tipo II con $q(x) = 0$, uno de cuyos casos particulares es el famoso y común contacto hertziano.

Apéndice D

Valores propios de Cauchy para forma geométrica polinomial

Se trata de resolver el valor propio de Cauchy que tiene la siguiente forma:

$$I_n = \int_{-1}^1 \frac{S^n (1 - S^2)^{\frac{1}{2}}}{X - S} dS \quad (\text{D.1})$$

en donde

$$X = \frac{x}{a} \quad ; \quad S = \frac{s}{a} \quad (\text{D.2})$$

La solución de esta integral sigue una ley de recursividad de

$$I_n = XI_n - 1 - J_n \quad (\text{D.3})$$

Siendo $I_0 = \pi X$ y J_n sale de la siguiente integral:

$$J_n = \int_{-1}^1 S^n (1 - S^2)^{\frac{1}{2}} dS \quad (\text{D.4})$$

J_n es nulo para n impar.

Aunque esta solución es para funciones polinomiales, se puede tener en cuenta que cualquier función puede desarrollarse en polinomios de Legendre que son los que mejor aproximación por mínimos cuadrados dan.

Apéndice E

Resolución del problema hertziano

En los problemas de tipo II en donde $q(x) = 0$, la forma del punzón rígido tiene una superficie polinomial de la forma $u_z(x) = -Bx^{n+1}$ la ecuación de contacto resultante es:

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} (n+1) B x^n \quad (\text{E.1})$$

Para despejar $p(x)$ sirve la equivalencia de Miklin (1948)[46]:

Si

$$\int_{-b}^a \frac{F(s)}{x-s} ds = g(x) \quad (\text{E.2})$$

entonces:

$$F(x) = \frac{1}{\pi^2 \{(x+b)(a-x)\}^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-b}^a \frac{\{(x+b)(a-x)\}^{\frac{1}{2}} g(s)}{x-s} ds + C \right] \quad (\text{E.3})$$

La constante C se calcula mediante la condición de contorno del valor de la fuerza total:

$$\int_{-b}^a p(x) dx = P \quad (\text{E.4})$$

De este modo queda que para el contacto simétrico la presión sobre la superficie será:

$$p(x) = -\frac{E(n+1)Ba^{n+1}}{2(1-\nu^2)\pi} \frac{I_n}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{P}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \quad (\text{E.5})$$

A continuación se estudiará el caso de contacto entre un apoyo rígido sobre una superficie plana elástica. Si el punzón es cilíndrico el contacto será hertziano. La superficie cilíndrica de radio R se puede aproximar mediante una parábola en la cual la distancia penetrada será:

$$u_z(x) = \frac{x^2}{2R} \quad (\text{E.6})$$

con lo que estableciendo las equivalencias respecto al problema anterior se tiene que $B = -1/(2R)$ y $n = 1$.

Normalmente en el contacto se tiene como dato la fuerza total de compresión P , teniendo en cuenta el principio de Boussinesq [46] por el que la presión en los extremos del contacto debe ser nula, se tiene que

$$p(\pm a) = \frac{1}{\pi(a^2 - a^2)} \left(-\frac{\pi Ea^2}{4R} + P \right) \quad (\text{E.7})$$

Para que tenga un valor finito se ha de cumplir que

$$P = \frac{\pi Ea^2}{4R} \quad (\text{E.8})$$

Lo que permite obtener el semiancho de contacto a partir de los datos del problema.

$$a = \sqrt{\frac{4RP}{\pi E}} \quad (\text{E.9})$$

La forma del perfil de presiones será elíptica:

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (\text{E.10})$$

La máxima presión sobre la superficie será entonces:

$$p_0 = \sqrt{\frac{PE}{\pi R}} \quad (\text{E.11})$$

Apéndice F

Determinación del mapa tensional en deformación plana

Cuando se tiene una distribución de presiones sobre una superficie semiindefinida, donde no se conocen las tensiones en la subsuperficie, la primera solución más intuitiva es su discretización en cargas puntuales de las que se conoce el campo de tensiones producido por cada una de ellas mediante las expresiones (F.1) y (F.2), según la Figura F.1.

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos\theta}{r} \quad (\text{F.1})$$

Figura F.1: Carga puntual sobre una superficie semiindefinida

$$\sigma_\theta = 0 \quad ; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (\text{F.2})$$

Transformadas estas expresiones a coordenadas cartesianas se obtienen las ecuaciones (F.3)-(F.5)

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2} \quad (\text{F.3})$$

$$\sigma_z = -\frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2} \quad (\text{F.4})$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x z^2}{(x^2 + z^2)^2} \quad (\text{F.5})$$

Cuando actúa una distribución de presiones sobre la superficie $p(x)$, la determinación del estado tensional en un punto de la subsuperficie vendrá dada por las siguientes integrales:

$$\sigma_x = -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s) (x-s)^2}{\left((x-s)^2 + z^2\right)^2} ds \quad (\text{F.6})$$

$$\sigma_z = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{\left((x-s)^2 + z^2\right)^2} ds \quad (\text{F.7})$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s) (x-s)}{\left((x-s)^2 + z^2\right)^2} ds \quad (\text{F.8})$$

Estas integrales tienen una singularidad en $z=0$, por lo que el valor del estado tensional se dispara cuando el punto de cálculo está cercano a la superficie. Al ser aplicable el principio de superposición, la distribución de presiones se puede sustituir por una suma de esfuerzos sobre la superficie que sea equivalente, o suficientemente aproximativa, y cuyo campo tensional sea conocido.

El problema que tiene la discretización con cargas puntuales es que el campo de presiones es discontinuo, al proporcionar unas tensiones y deformaciones altísimas en la proximidad de los puntos de aplicación de la carga, lo

Figura F.2: Distribución de presiones rectangular sobre una superficie semiindefinida

cual distorsiona notablemente el mapa tensional, no pudiéndose determinar con precisión el campo de presiones en la proximidad de la superficie.

Una solución a este inconveniente es discretizar la función de presiones en distribuciones de presiones rectangulares en lugar de utilizar cargas puntuales. La solución de las integrales (F.6)-(F.8) para el caso de distribución de presiones constante ($p(s) = \text{cte}$) se conoce [46] y sus expresiones analíticas son:

$$\sigma_x = -\frac{P}{2\pi} (2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)) \quad (\text{F.9})$$

$$\sigma_z = -\frac{P}{2\pi} (2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)) \quad (\text{F.10})$$

$$\tau_{xz} = -\frac{P}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \quad (\text{F.11})$$

En donde θ_1 y θ_2 están relacionados con las coordenadas cartesianas por las expresiones (F.12), según la Figura F.2.

$$\text{tg}\theta_1 = \frac{z}{x-a}; \quad \text{tg}\theta_2 = \frac{z}{x+a} \quad (\text{F.12})$$

La solución para este tipo de cargas da lugar a puntos singulares de tensiones y deformaciones en los bordes del intervalo de aplicación de la carga, en estos puntos las tensiones son altamente discontinuas, de forma que en una zona muy pequeña existe un altísimo gradiente de tensiones, por tanto el problema de la distorsión sigue existiendo.

Figura F.3: Representación de distribución triangular

Este problema se soluciona buscando una discretización basada en elementos que se anulen en los bordes y cuya suma sea equivalente a la distribución de presiones de partida, además de que tengan solución analítica para las integrales correspondientes. La condición de que en los bordes el valor de la distribución sea nulo es necesaria ya que en caso contrario se presentaría el mismo problema que en el de las cargas rectangulares. Esta es la conocida condición de Boussinesq [46].

Estos problemas quedan resueltos con una distribución de tipo triangular, como la mostrada en la Figura F.3 cuyas soluciones, para las integrales (F.6)-(F.8) son:

$$\sigma_x = \frac{p_0}{\pi a} \left((x-a)\theta_1 + (x+a)\theta_2 - 2x\theta + 2z \ln \frac{r_1 r_2}{r^2} \right) \quad (\text{F.13})$$

$$\sigma_z = \frac{p_0}{\pi a} ((x-a)\theta_1 + (x+a)\theta_2 - 2x\theta) \quad (\text{F.14})$$

$$\tau_{xz} = \frac{p_0 z}{\pi a} (\theta_1 + \theta_2 - 2\theta) \quad (\text{F.15})$$

La relación entre los parámetros que aparecen en las expresiones de las tensiones y las coordenadas cartesianas son los indicados en las siguientes expresiones:

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + z^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + z^2}; \quad r^2 = x^2 + z^2 \quad (\text{F.16})$$

$$\text{tg}\theta_1 = \frac{z}{x-a}; \quad \text{tg}\theta_2 = \frac{z}{x+a}; \quad \text{tg}\theta = \frac{z}{x} \quad (\text{F.17})$$

Figura F.4: Sistema de referencia relativo y superposición de distribuciones triangulares

Partiendo de estas ecuaciones se puede discretizar una distribución de presiones, como superposición de distribuciones triangulares, del tipo de las indicadas en la Figura F.4. Esta discretización coincide con una discretización trapecial si se integraran numéricamente las integrales (F.6)-(F.8). Observando la Figura F.4 esto es fácil de ver sabiendo que la suma de las áreas superpuestas de los dos triángulos es igual al área del trapecoide. Con lo que la discretización en distribuciones triangulares como la representada en la Figura F.4 es equivalente a la discretización trapecial.

Las ecuaciones (F.13)-(F.15) funcionan si el triángulo es isósceles con lo que el intervalo de discretización debe ser constante en todo el intervalo de carga.

El algoritmo desarrollado para el cálculo del mapa tensional consiste en hallar, para un punto dado, la superposición de todas las distribuciones triangulares.

Los pasos seguidos son los siguientes:

- Se determinan los puntos de discretización x_i de la carga. Estos puntos estarán separados a una distancia constante h .
- Se calcula el valor de la presión P_i en cada uno de los puntos de discretización. La distribución de presiones total se aproximará como la suma de distribuciones triangulares de altura P_i y anchura $2h$.
- Para hallar el estado tensional en un punto determinado (x, z) en el espacio semi-infinito, se aplicará el principio de superposición, y se calculará su estado tensional como la suma de los producidos por todas

Figura F.5: Diagrama de flujo del algoritmo utilizado

y cada una de las distribuciones triangulares. De este modo, la tensión equivalente de Tresca en un punto será igual a la suma de todas las tensiones equivalentes producidas por cada distribución triangular en que se ha discretizado la carga total. Para determinar cada una de estas tensiones equivalentes se sustituye en las expresiones (F.13)-(F.15) el punto (X_i, z) siendo $X_i = x - x_i$.

- Se determina la tensión equivalente de Tresca en una matriz de puntos equidistante del espacio semi-infinito, y mediante la aplicación una aplicación gráfica se obtiene el mapa tensional con sus curvas isotensionales.

En la Figura F.5 se muestra de forma esquemática los pasos descritos anteriormente.

De este modo se obtiene el valor de la tensión cortante máxima en una matriz de puntos que es el dato de partida para que mediante una interpolación se pueda obtener los valores máximos de la tensión tangencial y su localización.

Este método numérico para la determinación de las tensiones de contacto se ha aplicado al caso del contacto de dos cilindros lubricados.

Los datos numéricos que aparecen en los siguientes apartados son números

adimensionales. Las dimensiones y coordenadas son múltiplos del semiancho de contacto calculado por la fórmula de Hertz, y las presiones son múltiplos de la presión máxima de contacto según el mismo modelo de Hertz [33].

Bibliografía

- [1] AENOR, “Metrología. Práctica de la medida en la industria”, *AENOR (Asociación Española de Normalización y Certificación)*, Madrid, 1999.
- [2] Ansys, “Structural nonlinearities. User’s guide for revision 5.2. Vol. II”, *Ansys®*, Houston, 1995.
- [3] Arsham, H. and Oblak, M., “Matrix inversion: a computational algebra approach”, *International Journal of Mathematical Education Science and Technology*, Vol. 27, No. 4, pp. 599-605, 1996.
- [4] Asada, H. and By, A., “Kinematic analysis of workpart fixturing for flexible assembly with automatically reconfigurable fixtures”, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-1, No. 2, pp. 86-94, 1985.
- [5] Bi, Z.M. and Zhang, W.J., “Flexible fixture design and automation: Review, issues and future directions”, *International Journal of Production Research*, Vol. 39, No. 13, pp. 2867-2894, 1985.
- [6] Cai, W., Hu, S.J. and Yuan, J.X., “Deformable sheet metal fixturing: Principles, algorithms, and simulations”, *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 118, No. 3, pp. 318-324, 1996.

- [7] Campbell, P., "Basic fixture design", *Industrial Press Inc.*, New York, 1994.
- [8] Cante, J.C., Oliver, J. y Oller, S., "Simulación numérica de procesos de compactación de pulvimateriales. Parte 1: Modelo constitutivo, de contacto y fricción", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 14, No. 1, pp. 67-99, 1998.
- [9] Carlson, J.C., "Quadratic sensitivity analysis of fixtures and locating schemes for rigid parts", *Transactions of ASME, Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 123, No. 3, pp. 462-472, 2001.
- [10] Cecil, J., "A clamping design approach for Automated Fixture Design", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 18, No. 11, pp. 784-789, 2001.
- [11] Cecil, J., "Computer-Aided Fixture Design - A review and future trends", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 18, No. 11, pp. 790-793, 2001.
- [12] Chin, K.S., Zhao, Y. and Mok, C.K., "STEP-Based multiview integrated product modelling for concurrent engineering", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 20, No. 12, pp. 896-906, 2002.
- [13] Chou Y.C., Chandru, V. and Barash M.M., "A mathematical approach to automatic configuration of machining fixtures: analysis and synthesis", *Transactions of ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 111, No. 4, pp. 299-306, 1989.
- [14] Choudhuri, S.A. and De Meter, E.C., "Tolerance Analysis of Machining Fixture Locators", *Transactions of ASME, Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 121, No. 2, pp. 273-281, 1999.
- [15] Coca, P. y Rosique, J., "Tecnología mecánica y metrotécnia", *Ediciones Pirámide, S.A.*, Madrid, 1999.
- [16] Conry, T.F. and Seireg, A., "A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact", *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 38, No. 2, pp. 387-392, 1971.
- [17] De Meter, E.C., "Fast support layout optimization", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 38, No. 10-11, pp. 1221-1239, 1998.

- [18] De Meter, E.C., "Min-Max load model for optimizing machining fixture performance", *Transactions of ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 117, No. 2, pp. 186-193, 1995.
- [19] De Meter, E.C., Xie, W., Choudhuri, S., Vallapuzha, S. and Trethewey, M.W., "A model to predict minimum required clamp pre-loads in light of fixture-workpiece compliance", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 41, No. 7, pp. 1031-1054, 2001.
- [20] De Sam Lazaro, A. and King, D. A., "Automated design of machining fixtures: tolerance and sequential operations", *Intelligent Systems Engineering*, Vol. 1, No. 2, pp. 172-184, 1992.
- [21] Espinosa, M.M., "Introducción a los procesos de fabricación", *Universidad Nacional de Educación a Distancia, UNED*, Madrid, 2000.
- [22] Estrems, M., Faura, F. y Pedrero, J.I., "Desarrollo de un método numérico para la determinación del mapa tensional en la zona de contacto entre dos cuerpos", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 16, No. 4, pp. 455-470, 2000.
- [23] Estrems, M., Faura, F. y Pedrero, J.I., "Método para determinación de la distribución de carga entre dos cuerpos con varios puntos de contacto", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 17, No. 4, pp. 387-401, 2001.
- [24] Estrems, M., Hernández, J.J. y Faura, F., "Análisis numérico de geometrías de contacto entre pieza y apoyo en máquinas herramienta", *Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Vol. 2, Proc. II Congreso CIMNE-CIMAT*, pp. 1141-1150, Guanajuato (México), 2002.
- [25] Estrems, M., Sánchez, H.T. and Faura, F., "Influence of fixtures on dimensional accuracy in machining processes", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 21, No. 5, pp. 384-390, 2003.
- [26] Fang, B., DeVor, R.E. and Kapoor, S.G., "An elastodynamic model of frictional contact and its influence on the dynamics of a workpiece-fixture system", *Transactions of ASME, Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 123, No. 3, pp. 481-489, 2001.
- [27] Fang, B., DeVor, R.E. and Kapoor, S.G., "Influence of friction damping on workpiece-fixture system dynamics and machining stability", *Tran-*

- sactions of ASME, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 124, No. 2, pp. 226-233, 2002.
- [28] Fischer-Cripps, A.C., "Introduction to contact mechanics", *Springer Verlag*, New York, 2000.
 - [29] Groover, M.P., "Fundamentos de manufactura moderna", *Prentice-Hall*, México, 1997.
 - [30] Gui, X.W., Fuh, J.Y.H. and Nee, A.Y.C., "Modelling of frictional elastic fixture-workpiece system for improving location accuracy", *IIE Transactions*, Vol. 28, No. 10, pp. 821-827, 1996.
 - [31] Hasegawa T. and Torii, T., "An automatic quadrature for Cauchy Principal Value Integrals", *Mathematics of Computation*, Vol. 56, No. 194, pp. 741-754, 1991.
 - [32] Hernández, J.J., Franco, P., Estrems M. y Faura, F., "Análisis del comportamiento de diversas geometrías de contacto entre piezas y apoyos en máquinas-herramienta mediante elementos finitos", *XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Cádiz (España), 2002.
 - [33] Hertz, H., "Über die Berührung fester elastischer Körper", *Journal Reine und Angewandte Mathematik*, Vol. 92, pp. 156-71, 1882.
 - [34] Hockenberger, M.J. and De Meter, E.C., "The application of meta functions to the quasi-static analysis of workpiece displacement within a machining fixture", *Transactions of, ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 118, No. 3, pp. 325-331, 1996.
 - [35] Hockenberger, M.J. and De Meter, E.C., "The effect of machining fixture design parameters on workpiece displacement", *Manufacturing Review*, Vol. 8, No. 1, pp. 22-32, 1995.
 - [36] Hoffman, E.G., "Jig and fixture design", *Delmar*, New York, 1996.
 - [37] Hu, W. and Rong, Y., "A fast interference checking algorithm for Automated Fixture Design Verification", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 16, No. 8, pp. 571-581, 2000.
 - [38] Huang, X. and Gu, P., "Tolerance analysis in setup and fixture planning for precision machining", *Proceedings of the Fourth International Conference on Computer Integrated Manufacturing and Automation Technology*, pp. 298-305, New York (USA), 1994.

- [39] Huang, Y. and Hoshi, T., "Improvement of flatness error in milling plate-shaped workpiece by application of side-clamping force", *Precision Engineering*, Vol. 24, No. 4, pp. 364-370, 2000.
- [40] Hurtado, J.F. and Melkote, S.N., "A model for the prediction of reaction forces in a 3-2-1 machining fixture", *Transactions of the NAMRI/SME*, Vol. 26, pp. 335-340, 1998.
- [41] Hurtado, J.F. and Melkote, S.N., "A model for synthesis of the fixturing configuration in pin-array type flexible machining fixtures", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 42, No. 7, pp. 837-849, 2002.
- [42] Hurtado, J.F. and Melkote, S.N., "Improved algorithm for tolerance-based stiffness optimization of machining fixtures", *Transactions of ASME, Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 123, No. 4, pp. 720-730, 2001.
- [43] Hurtado, J.F. and Melkote, S.N., "Modeling and analysis of the effect of fixture-workpiece conformability on static stability", *Transactions of ASME, Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 124, No. 2, pp. 234-241, 2002.
- [44] ISO, "Guide to the expression of uncertainty in measurement", *International Organization for Standardization (ISO)*, Genève (Switzerland), 1995.
- [45] Jeng, S.L., Chen, L.G. and Chieng, W.H., "Analysis of minimum clamping force", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 35, No. 9, pp. 1213-1224, 1995.
- [46] Johnson, K.L., "Contact Mechanics", *Cambridge University Press*, Cambridge, 1987.
- [47] Kaya, N. and Öztürk, "The application of chip removal and frictional contact analysis for workpiece-fixture layout verification", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 21, No. 6, pp. 411-419, 2003.
- [48] King, L.S. and Hutter, I., "Theoretical approach for generating optimal fixturing locations for prismatic workparts in automated assembly", *Journal of Manufacturing Systems*, Vol. 12, No. 5, pp. 409-416, 1993.

- [49] Kow, T.S., Kumar, A.S. and Fuh, J.Y.H., "An integrated approach to collision-free Computer-Aided Modular Fixture Design", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 16, No. 4, pp. 233-242, 2000.
- [50] Kulankara, K. and Melkote, S.N., "Machining fixture layout optimization using the genetic algorithm", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 40, No. 4, pp. 579-598, 2000.
- [51] Kulankara, K., Satyanarayana S. and Melkote, S.N., "Iterative fixture layout and clamping force optimization using the genetic algorithm", *Transactions of ASME, Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 124, No. 1, pp. 119-125, 2002.
- [52] Kumar, A.S., Fuh, J.Y.H. and Kow, T.S., "An automated design and assembly of interference-free modular fixture setup", *Computer Aided Design*, Vol. 32, No. 10, pp. 583-596, 2000.
- [53] Kumar, A.S., Subramaniam, V. and Teck, T.B., "Conceptual design of fixtures using machine learning techniques", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 16, No. 3, pp. 176-181, 2000.
- [54] Lee, J.D. and Haynes, L.S., "Finite element analysis of flexible fixturing system ", *Transactions of ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 109, No. 2, pp. 134-139, 1987.
- [55] Lee, J., Hu, S.J. and Ward, A.C., "Workspace synthesis for flexible fixturing of stampings", *Transactions of ASME, Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 121, No. 3, pp. 478-484, 1999.
- [56] Li B. and Melkote, S.N., "Analysis of reactions and minimum clamping force for machining fixtures with large contact areas", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 16, No. 2, pp. 79-84, 2000.
- [57] Li B. and Melkote, S.N., "An elastic contact model for the prediction of workpiece-fixture contact forces in clamping", *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 121, No. 3, pp. 485-493, 1999.
- [58] Li B. and Melkote, S.N., "Fixture clamping force optimisation and its impact on workpiece location accuracy", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 17, No. 2, pp. 104-113, 2001.

- [59] Li B. and Melkote, S.N., "Improved workpiece location accuracy through fixture layout optimization", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 39, No. 6, pp. 871-883, 1999.
- [60] Li B. and Melkote, S.N., "Optimal Fixture design accounting for the effect of workpiece dynamics", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 18, No. 10, pp. 701-707, 2001.
- [61] Liao, Y.J., Hu, S.J. and Stephenson, D.A., "Fixture Layout Optimization considering workpiece-fixture contact interaction: simulation results", *Transactions of the NAMRI/SME*, Vol. 26, pp. 341-346, 1998.
- [62] Liao, Y.J. and Hu, S.J., "Flexible multibody dynamics based fixture-workpiece analysis model for fixturing stability", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 40, No. 3, pp. 343-362, 2000.
- [63] Lin, E.E. and Zhang, H.C., "Theoretical tolerance stackup analysis based on tolerance zone analysis", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 17, No. 4, pp. 257-262, 2001.
- [64] Liu, T.H., "The Standards: STEP ISO-10303", *Concurrent design of products, manufacturing process and systems. Automation and production systems. Methodologies and applications. Vol. 3*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1998.
- [65] Ma, W. and Rong, Y., "Development of automated fixture planning systems", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 15, No. 3, pp. 171-181, 1999.
- [66] "Machining Data Handbook. Vol. II", *Metcut Research Associates*, Cincinnati, 1980.
- [67] Marin, R.A. and Ferreira, P.M., "Optimal Placement of fixture clamps: Maintaining form closure and independent regions of form closure", *Transactions of ASME, Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 676-685, 2002.
- [68] Marin, R.A. and Ferreira, P.M., "Optimal Placement of fixture clamps: Minimizing the maximum clamping forces", *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 686-694, 2002.
- [69] Menassa, R.J. and DeVries, W.R., "Optimization methods applied to selecting support positions in fixture design", *Transactions of ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 113, No. 4, pp. 412-418, 1991.

- [70] Meyer, R.T. and Liou, F.W., "Fixture analysis under dynamic machining", *International Journal of Production Research*, Vol. 35, No. 5, pp. 1471-1489, 1997.
- [71] Pham, D.T. and De Sam Lazaro, A., "AutoFix - an expert CAD system for jigs and fixtures", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 30, No. 3, pp. 403-411, 1990.
- [72] Ramesh, R., Mannan, M.A. and Poo, A.N., "Error compensation in machine tools - a review. Part I: Geometric, cutting-force induced and fixture-dependent errors", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 40, No. 9, pp. 1235-1256, 2000.
- [73] Rearick, M.R., Hu, S.J. and Wu, S.M., "Optimal fixture design for deformable sheet metal workpieces", *Transactions of the NAMRI/SME*, Vol. 21, pp. 407-412, 1993.
- [74] Reklaitis, G.V., Ravindran, A. and Ragsdell, K.M., "Engineering Optimization. Methods and applications", *John Willey & Sons*, New York, 1983.
- [75] Rong, Y. and Bai, Y., "Automated generation of modular fixture configuration design", *Transactions of ASME, Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 119, No. 2, pp. 208-219, 1997.
- [76] Rong, Y. and Zhu, Y., "Computer-Aided Fixture Design", *Marcel Dekker*, New York, 1999.
- [77] Sánchez, H.T., Estrems, M. y Faura, F., "Reparto de cargas en los puntos de localización en sujeción de piezas prismáticas en procesos de mecanizado", *Proc. XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Cádiz, 2002.
- [78] Sánchez, H.T., Estrems, M., Hernández, J.J. y Faura, F., "Desarrollo de un método semianalítico para el estudio del contacto entre los elementos de fijación y la pieza en procesos de mecanizado", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 20, No. 1, 2004 (en imprenta).
- [79] Sugar, T.G. and Kumar, V., "Metrics for analysis and optimization of grasps and fixtures", *International Journal of Robotics and Automation*, Vol. 17, No. 1, pp. 28-37, 2002.

- [80] Tao, Z.J., Kumar, A.S. and Nee, A.Y.C., "A computational geometry approach to optimum clamping synthesis of machining fixtures", *International Journal of Production Research*, Vol. 37, No. 15, pp. 3495-3517, 1999.
- [81] Tao, Z.J., Kumar, A.S. and Nee, A.Y.C., "Automatic generation of dynamic clamping forces for machining fixtures", *International Journal of Production Research*, Vol. 37, No. 12, pp. 2755-2776, 1999.
- [82] Tzen, J.J., Jeng, S.L. and Chieng, W.H., "Analysis of two-dimensional fixture clamping with friction", *JSME International Journal, Series C*, Vol. 42, No. 2, pp. 451-460, 1999.
- [83] Vallapuzha, S., De Meter, E.C., Choudhuri, S. and Khetan, R.P., "An investigation into the use of spatial coordinates for the genetic algorithm based solution of the fixture layout optimization problem", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 42, No. 2, pp. 265-275, 2002.
- [84] Vallapuzha, S., De Meter, E.C., Choudhuri, S. and Khetan, R.P., "An investigation of the effectiveness of fixture layout optimization methods", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 42, No. 2, pp. 251-263, 2002.
- [85] Vijayarangan, S. and Ganesan, S. N., "Stress analysis of composite spur gear using the finite element approach", *Computers and Structures*, Vol. 46, No. 5, pp. 869-875, 1993.
- [86] Wang, C.Y. and Inasaki, I., "Knowledge in the domain of Feature-Based Fixturing Planning", *JSME International Journal, Series C*, Vol. 42, No. 4, pp. 1085-1092, 1999.
- [87] Wang, M.Y., "A full-kinematic model of fixtures for precision locating applications", *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ, International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Maui, Hawaii, (USA), 2001.
- [88] Wang, M.Y. and Pelinescu, D.M., "Contact force prediction and force closure analysis of a fixtured rigid workpiece with friction", *Transactions of ASME, Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 125, No. 2, pp. 325-332, 2003.
- [89] Wang, M.Y., Liu, T. and Pelinescu, D.M., "Fixture kinematic analysis based on the full Contact model of rigid bodies", *Transactions of ASME*,

- Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 125, No. 2, pp. 316-324, 2003.
- [90] Wang, M.Y., "Tolerance analysis for fixture layout design", *Assembly Automation*, Vol. 22, No. 2, pp. 153-162, 2002.
- [91] Wang, Y.F., Wong, Y.S. and Fuh, J.Y.H., "Off-line modelling and planning of optimal clamping forces for an intelligent fixturing system", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 39, No. 2, pp. 253-271, 1999.
- [92] Wriggers, P., "Computational contact mechanics", *John Wiley & Sons*, Chichester, 2002.
- [93] Wu, N.H. and Chan, K.C. "A genetic algorithm based approach to optimal fixture configuration", *Computers and industrial engineering*, Vol. 31, No. 3/4, pp. 919-924, 1996.
- [94] Yeh, J.H. and Liou, F.W. "Contact condition modelling for machining fixture setup processes", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 39, No. 5, pp. 787-803, 1999.
- [95] Zienkiewicz O.C. y Taylor, R.L., "El método de los elementos finitos - Volumen 1: Formulación básica y problemas lineales", *Mc.Graw-Hill*, Madrid, 1994.

Biografía del autor

Horacio Tomás Sánchez Reinoso nace en Cartagena en Junio de 1971, cursa los estudios de Ingeniería Técnica Industrial en la Escuela Politécnica Superior, e Ingeniería Industrial en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Murcia, concluyendo los mismos en 1999. Ese mismo año, obtiene la plaza de Profesor Ayudante en el Área de Ingeniería de los Procesos de Fabricación del Dpto. de Ingeniería de Materiales y Fabricación de la Universidad Politécnica de Cartagena, desarrollando la función docente e investigadora propia del nombramiento hasta la fecha. Perteneció al grupo de investigación de Ingeniería de Fabricación de la UPCT, en el que ha colaborado en las líneas de investigación de procesos de fundición y mecanizado. Es autor y coautor de diversos artículos y comunicaciones relacionados con el estudio metrológico y del contacto mecánico de los sistemas de sujeción en máquinas-herramienta, entre ellos cabe destacar los siguientes:

- Sánchez, H.T., Estrems, M. y Faura, F., “Reparto de cargas en los puntos de localización en sujeción de piezas prismáticas en procesos de mecanizado”, *XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Cádiz, 2002.
- Estrems, M., Sánchez, H.T. and Faura, F., “Influence of fixtures on dimensional accuracy in machining processes”, *International Journal*

of Advanced Manufacturing Technology, Vol. 21, No. 5, pp. 384-390, 2003.

- Sánchez, H.T., Estrems, M., Hernández, J.J. y Faura, F., “Desarrollo de un método semianalítico para el estudio del contacto entre los elementos de fijación y la pieza en procesos de mecanizado”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 20, No. 1, 2004 (en imprenta).
- Sánchez, H.T., Estrems, M. y Faura, F., “Desarrollo de una base de datos relacional para la integración de métodos de análisis de sistemas de amarre de piezas en máquinas-herramienta”, *VI Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica*, Coimbra (Portugal), 2003.
- Estrems, M., Martínez, E., Sánchez, H.T. y Faura, F., “Optimización de las incertidumbres de fabricación en operaciones de mecanizado mediante algoritmos genéticos”, *VI Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica*, Coimbra (Portugal), 2003.