UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

**DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍAS DE LA
INFORMACIÓN Y LAS COMUNICACIONES**

Tesis Doctoral

**FORMULACIÓN DE LOS CONTORNOS ACTIVOS EN
EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA Y ANÁLISIS DE
CONVERGENCIA EN SEGMENTACIÓN DE IMAGEN**

Rafael Verdú Monedero

2005

Directores: ***Dr. Juan Morales Sánchez***
Dr. Luis Weruaga Prieto

A Berna

Agradecimientos

Son muchas las personas a las que me gustaría mostrar mi gratitud por el apoyo y confianza depositado en mi durante el periodo de realización de esta Tesis Doctoral.

En primer lugar a mis directores, Dr. Juan Morales, Profesor Titular de Escuela Universitaria de la *Universidad Politécnica de Cartagena*, y Dr. Luis Weruaga, Profesor Titular de la *Universidad Politécnica de Cartagena* durante los años 1999-2003 y actualmente investigador de la *Comisión para la Visualización Científica* de la *Academia Austriaca de las Ciencias* en Viena, gracias por vuestro apoyo incondicional y compromiso mantenido conmigo. A Juan por sus consejos técnicos, su amistad y por todos los momentos compartidos, tanto dentro como fuera del trabajo, en este proceso de “transición” que hemos pasado juntos. A Luis por su apoyo durante su estancia en Cartagena, por mantener la dirección de esta Tesis incluso desde la distancia y conseguir llevarla a buen término, así como por facilitarme la estancia predoctoral en Viena.

También quisiera mostrar mi agradecimiento al Dr. Jesús Angulo por concederme la oportunidad de realizar una estancia predoctoral en Fontainebleau en el *Centro de Morfología Matemática* de la *Escuela de Minas* de la *Universidad de París*.

A los miembros del *Grupo de Teoría y Tratamiento de la Señal* Dr. José Luis Sancho, Profesor Titular de la *Universidad Politécnica de Cartagena* y responsable del grupo de investigación y Rafael Berenguer, por el trabajo compartido. Dentro del *Departamento de Tecnologías de la Información y Comunicaciones* quisiera mostrar mi agradecimiento particular al Dr. José Luis Gómez por el compañerismo mostrado en todo momento.

Quiero incluir en los agradecimientos a mi familia: mis padres Zacarías y Fina y mi hermano Zacarías. Gracias por vuestra comprensión y apoyo. También quiero añadir en esta sección a José, Dolores, Francisco y Josefa.

No podría faltar también en los agradecimientos Berna, quien ha estado todo el tiempo a mi lado animándome y apoyándome, a ella está dedicada esta Tesis.

El trabajo de esta Tesis ha estado financiado parcialmente por el proyecto europeo DynCT (IST-1999-10515), el proyecto nacional M3DICA (TIC-2002-03033), la Universidad Politécnica de Cartagena (PFMPDI-UPCT-2003) y la Consejería de Educación y Cultura de la Región de Murcia (Exp:1.1.2/MOV04/22).

Resumen

Los contornos activos paramétricos, o *snakes*, son un caso particular de los modelos deformables embebidos en el plano de la imagen. Sus fundamentos matemáticos representan la confluencia de la Geometría, Física y Teoría de la Aproximación. Desde su debut en 1987, la utilidad de las *snakes* ha sido probada y demostrada en análisis de imágenes médicas, en segmentación de imagen, en seguimiento de objetos móviles en secuencias de vídeo, etc.

Un problema importante por resolver es el comportamiento dinámico de la *snake* cuando evoluciona hacia su solución final de equilibrio. Este análisis de la convergencia es particularmente necesario cuando el funcional que gobierna el contorno activo depende de parámetros o características, generalmente no lineales, internas y externas al contorno como fuerzas de inflado y estirado dependientes de la propia estructura. En el diseño del comportamiento dinámico total es necesario controlar la definición del funcional de energía para garantizar que la realimentación existente no de lugar a comportamientos inestables.

En esta Tesis doctoral se ha revisado la formulación de los contornos activos en el dominio espacial, incluyendo los modelos paramétricos, los modelos adaptables a la topología y los basados en conjuntos de nivel (*level sets*). Se han descrito los problemas que presenta la implementación clásica de los contornos activos (sensibilidad a la inicialización, robustez frente al ruido, selectividad en la segmentación y seguimiento de objetos, condición de parada en el procedimiento iterativo, etc.) y las posibles soluciones actuales que se encuentran en el estado de la técnica. La formulación espacial de los modelos deformables se ha trasladado al dominio de la frecuencia y se ha utilizado para analizar la velocidad de convergencia. A partir de este análisis se proporciona un método con las reglas de diseño de los parámetros dinámicos óptimos de un contorno activo durante la segmentación de objetos en imágenes.

El método de diseño de parámetros dinámicos óptimos del contorno activo ha sido probado en aplicaciones de segmentación y seguimiento de objetos en secuencias de imágenes para acelerar la velocidad de convergencia de la *snake*. El método se ha incorporado en la implementación de los contornos activos en el dominio de la frecuencia, y se ha utilizado en tareas de reconstrucción

tomográfica con compensación de movimiento, caracterización mecánica de músculos artificiales y en el filtrado de los vectores de movimiento en un método de registro no rígido mediante modelos deformables.

La principal contribución de esta Tesis es el análisis de la velocidad de convergencia de los contornos activos paramétricos y un método para establecer los valores de sus parámetros dinámicos que controlan la evolución del contorno en un problema de segmentación de imágenes. Otra contribución de esta Tesis es la traslación de la formulación clásica de los modelos deformables, en el dominio espacial, al dominio de la frecuencia, ofreciendo un nuevo punto de vista para el diseño y análisis de éstos.

La extensión del análisis realizado al caso de superficies deformables para acelerar su velocidad de convergencia, así como la exportación de las ideas planteadas en el análisis para su aplicación en técnicas de conjuntos de nivel, constituyen las principales líneas futuras de investigación.

Summary

Parametric active contours, also called *snakes*, are a particular case of deformable models embeded in the image plane. The mathematical principles under their formulation represent the confluence of Geometry, Physics and Approximation Theory. Since their debut in 1978, their usefulness has been proven in medical image analysis, image segmentation, object tracking in video sequences, etc.

An important problem to resolve is the dynamic behavior of the *snake* evolving towards its final equilibrium situation. This convergence analysis is particularly necessary when the energy functional that governs the shape of the active contour depends on internal and external parameters and features, generally non linearly dependent, like inflate forces and stretching forces based on the very structure. In the design of the global dynamic behavior is mandatory to control the definition of the energy functional in order to guarantee that the existing feedback does not produce an unstable performance.

In this Thesis, the formulation of the active contours in the spatial domain has been reviewed, including parametric models, topology adaptive models and level-set-based models. The inherent problems of the classical implementation of active contour have been described (initialization sensitivity, robustness in noisy environments, selectivity in object segmentation and object tracking, stop condition in the iterative mechanism, etc.) together with their current solutions provided in the state of the art. The spatial formulation of the deformable models has been translated into the frequency domain and has been employed to analyze the convergence velocity and to provide a method for designing the optimum dynamic parameters of an active contour in a object segmentation scenario.

The design method has been proved in video sequences for speeding up the convergence of the active contour in segmentation and tracking applications. The method has been incorporated in the frequency based implementation of active contours and has been used in motion compensated tomographic reconstruction, mechanical characterization of artificial muscles and motion vectors filtering in a method for non rigid image registration based on deformable models.

The main contribution of this Thesis is the convergence analysis of parametric active contours and the resulting method for setting the value of the dynamic parameters in order to control the evolution of the contour in a problem of image segmentation. Another contribution of this Thesis is the translation of the spatial formulation of the deformable models to the frequency domain. This new formulation offers a new point of view for designing and analyzing deformable models.

The main research future lines are the extension of the convergence analysis to deformable meshes in order to improve their velocity and the application of the ideas followed in this Thesis to level-sets techniques.

Índice

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Summary	ix
1. Introducción y estado de la técnica	1
1.1. Aplicaciones	3
1.2. Estado de la técnica y optimizaciones de la formulación clásica	8
1.3. Objetivos y motivación de este trabajo	12
1.4. Descripción del resto de capítulos	13
2. Formulación de los modelos deformables en el dominio espacial	15
2.1. Contornos activos paramétricos	17
2.1.1. <i>Snakes</i> dinámicas	19
2.1.2. Discretización y simulación numérica	20
2.1.3. Interpretación probabilística	24
2.1.4. Generalización a mayor dimensión	26
2.1.5. Plantillas deformables	27
2.2. Modelos deformables adaptables a la topología	29
2.2.1. <i>Snakes</i> adaptables a la topología	30
2.3. Formulación variacional y métodos de conjuntos de nivel	32
2.3.1. Conexión de las <i>snakes</i> con la evolución de curvas	34
3. Formulación de los modelos deformables en el dominio de la frecuencia	35
3.1. Formulación frecuencial de contornos activos	36
3.1.1. Contornos Cerrados	37
3.1.2. Orden real de la derivada	42
3.1.3. Variación espacial de las propiedades de rigidez	43

3.1.4. Contornos abiertos	44
3.2. Formulación de mallas activas	48
3.2.1. Extensiones de mallas	50
3.2.2. Coste computacional y diseño eficiente	51
3.3. Resultados de las simulaciones	52
3.3.1. Espectro de rigidez	53
3.3.2. Contornos abiertos	53
3.3.3. Cuestiones sobre interpolación	55
3.3.4. Modelos bidimensionales	57
4. Estudio de la convergencia	59
4.1. Premisas y motivación. Formulación en el dominio del espacio.	60
4.1.1. Análisis de la convergencia en el dominio espacial	61
4.2. Transformación al dominio de la frecuencia	65
4.2.1. Análisis de la convergencia en el dominio de la frecuencia	71
4.3. Mejora del sistema de segundo orden	73
4.4. Caso no uniforme	75
4.5. Diseño práctico y simulaciones	76
4.5.1. Mejora del sistema de segundo orden	76
4.5.2. Aproximación numérica de la complejidad	77
4.5.3. Modos de convergencia	79
4.5.4. Acotación caso no uniforme	80
4.5.5. Parámetros óptimos	83
4.5.6. Estabilidad	83
4.6. Conclusiones	84
5. Aplicaciones	87
5.1. Caracterización de músculos artificiales	87
5.1.1. Método	88
5.1.2. Resultados experimentales	91
5.1.3. Conclusiones	96
5.2. Reconstrucción tomográfica con compensación de movimiento	98
5.2.1. Introducción	98
5.2.2. Estimación y compensación del movimiento	99
5.2.3. Método para corregir los artefactos de movimiento en tomografía	101
5.2.4. Resultados y conclusiones	107
6. Conclusiones	111
6.1. Líneas futuras	112

A. Funciones de forma	115
A.1. Solución espacial	115
A.1.1. Funciones de forma de Hermite	117
A.1.2. Funciones de forma B-splines	118
A.1.3. Elementos de <i>snake</i> en forma de diferencias finitas	119
A.1.4. Secuencia de rigidez	120
A.2. Solución frecuencial	121
A.2.1. B-splines	121
A.2.2. Polinomios cúbicos de Hermite	123
A.2.3. Diferencias finitas	123
B. Extensiones de la <i>snake</i>	125
C. Publicaciones	127
Bibliografía	131

Capítulo 1

Las ciencias no tratan de explicar y casi no intentan interpretar: se consagran sobre todo a hacer modelos.

Por modelo se entiende una construcción matemática que, con la adición de ciertas aclaraciones verbales, describe los fenómenos observados. La justificación de esa construcción matemática es única y precisa que sea eficaz.

(John von Newman)

Introducción y estado de la técnica

En los setenta y ochenta, el interés de la visión por computador, *Computer Visión*, se centraba en el desarrollo de sistemas de propósito general [21, 150]. Había un amplio consenso en investigar y desarrollar algoritmos ‘*bottom-up*’ que organizaran los valores de intensidad de las imágenes en formas más compactas. El propósito de esto no era sólo comprimir los datos sino extraer también sus características más representativas [47, 112, 151, 183, 199, 219] y agruparlas en estructuras [167, 209, 291]. Estas características podían incluir esquinas, bordes y fragmentos de superficies, para usarse, entre otras, en identificación de objetos y deducción de su posición [20, 87, 107, 175] o para el emparejamiento de imágenes estereoscópicas [13, 19, 30, 45, 105, 184, 202].

La visión de propósito general es un objetivo muy complejo, la aproximación alternativa que se puede tomar es reducir la generalidad introduciendo algún conocimiento previo, conocimiento específico de los objetos que se espera ver [4, 5, 17, 43]. Pero es difícil hacer progresos en investigación si se construyen sistemas muy especializados porque se pierden los principios generales por detalles ingenieriles, por ello es necesario desarrollar principios científicos para representar el conocimiento previo. Entonces, cuando se trata un problema nuevo, los principios pueden aplicarse para compilar un sistema de visión nuevo con la mayor rapidez posible, in-

cluyendo aspectos como la representación o modelado de clases de formas definidas de modo aproximado, su variabilidad y su movimiento [36]. En la aplicación del conocimiento previo para fortalecer la interpretación visual de la forma mediante la influencia de formas que son probables de ser vistas, ha habido muchas influencias, siendo las más destacadas dos en particular.

La primera es una materia de *Computer Vision* basada en modelos matemáticos para aproximar problemas computacionales referentes a visión. En sistemas de visión por computador, ver objetos se convierte en analizar la forma y el movimiento del objeto. Para este fin, a principios de los 80, Michael Kass, Andrew Witkin y Demetri Terzopoulos introdujeron una familia de modelos matemáticos conocidos como “modelos deformables”. La motivación era formular modelos visuales que unificaran la representación de forma y movimiento combinando geometría y física; en particular, geometría de forma libre y la dinámica de curvas y superficies elásticas. Un modelo deformable se ajusta a características detectadas en una imagen. La naturaleza de su energía elástica lo hace más o menos fuerte a ciertas configuraciones preferidas, representando la información previa sobre la forma que se compensa con las evidencias de la imagen. Si también se le atribuye inercia, adquiere un comportamiento dinámico que puede usarse para aplicar el conocimiento previo también sobre el movimiento. El modelo deformable más simple, un contorno deformable confinado en el plano, también conocido como contorno activo o *snake*, ganó rápidamente popularidad con las demostraciones de estos modelos conformándose activamente a las formas y siguiendo el movimiento de los bordes de un objeto en secuencias de video.

La segunda influencia destacada es la teoría de patrones fundada por U. Grenander en los años 70 y 80 [104] y es una base popular para la interpretación de imágenes en la comunidad estadística. En ella se trata el conocimiento previo de la forma en un contexto probabilístico considerando cualquier forma como el resultado de aplicar alguna distorsión a una forma prototipo ideal. La naturaleza y extensión de la distorsión está gobernada por una distribución de probabilidad apropiada que define el rango de formas probables. Definir una distribución previa de la forma es sólo parte del problema. La tarea completa de interpretar una imagen es modificar la distribución previa para tener en cuenta características de la imagen, llegando a una distribución posterior en la que es probable que la forma esté presente en una imagen en particular. Los mecanismos para fundir una distribución previa con observaciones son de crucial importancia. En el reconocimiento por síntesis de la Teoría de Patrones, las predicciones de formas probables basadas en la distribución previa, se comparan con una imagen en particular y las discrepancias entre lo predicho y lo observado pueden usarse como una señal de error para corregir la forma estimada. Los mecanismos de fusión de este tipo existen en los modelos deformables, en el ubicuo filtro de Kalman y en otras formas más generales [80, 110, 174].

1.1. Aplicaciones

A continuación siguen ejemplos ilustrativos de sistemas de visión para aplicaciones particulares donde la aproximación de contornos activos es una candidata importante para su explotación práctica, sobre todo en áreas de robótica y procesado de imágenes médicas. Esto se debe a que los contornos activos hacen efectivo el uso de información previa específica sobre los objetos y les hace inherentemente algoritmos eficientes. Los primeros ejemplos están tomados de aplicaciones consolidadas mientras que los últimos han sido desarrollados total o parcialmente en esta Tesis.

Monitorización del tráfico

Las cámaras de vídeo aéreas situadas en postes al borde de la carretera son herramientas habituales para la comprobación automática de la velocidad, el estado del tráfico — su densidad y velocidad — así como anomalías en los patrones de conducción. El seguimiento con contornos activos es adecuado para esta tarea (véase Figura 1.1) ya que el contorno de los vehículos constituye una clase de formas fuertemente constreñida que experimenta patrones de movimiento predecibles [213, 240]. La monitorización del tráfico está firmemente establecida como una aplicación viable de visión, de sistemas de información del tráfico, de sensores sin contacto y de control autónomo del vehículo [75, 76, 77, 79, 92, 129].

Figura 1.1.: Monitorización del tráfico. (a) Seguimiento automático de coches. (b) Calibración: la posición de las cuatro esquinas de un rectángulo conocido en el suelo y su proyección en el plano de la imagen es suficiente para determinar la correspondencia usando métodos de proyección estándar para la conversión de coordenadas de la imagen y las reales [95, 176] (imágenes tomadas de [92]).

Animación facial

La gesticulación de una cara puede transmitirse con la información sobre la expresión y posición de la cabeza a una cara animada con realidad virtual [14, 98]. El seguimiento puede realizarse con marcadores reflectantes [276], utilizando contornos activos [135, 250, 251], o utilizando flujo óptico [33, 82]. El movimiento muscular subyacente puede modelarse para restringir las expresiones seguidas, trasmitirse para su reproducción o exagerarse sistemáticamente [37, 46, 149].

Análisis audio visual del habla

Existen sistemas comerciales de dictado con vocabularios extensos, aunque frecuentemente restringidos a articular las palabras por separado. El funcionamiento de estos sistemas depende de un reconocimiento muy fiable de un pequeño conjunto de palabras clave, normalmente en entornos de bajo ruido. La lectura de labios puede aumentar la señal acústica con información independiente que es inmune al ruido de fondo y conversaciones cruzadas. El seguimiento con contornos activos ha demostrado su capacidad de proporcionar esta información de forma robusta y en tiempo real (véase Figura 1.2), mejorando sustancialmente la tasa de error de reconocimiento. El análisis audio visual del habla, *speech-reading*, ha sido objeto de estudio [78] y para su implementación se utilizan tanto contornos activos [40, 41, 127] como métodos basados directamente en la intensidad de la imagen [200], o marcadores faciales artificiales [93, 236]. Generalmente, como en el reconocimiento convencional del habla, se utilizan los modelos ocultos de Markov (HMM) para la clasificación de palabras [2, 207].

Figura 1.2.: Análisis audio visual del habla: (a) un reconocedor automático de palabras puede mejorarse mediante la lectura de los labios que se realiza mediante el seguimiento visual del contorno de la boca para obtener la señal visual que está sincronizada con las señal acústica. (b)-(c) Señales visual y acústica de la pronunciación de la palabra “seven” con una duración de 0.6 segundos (imágenes extraídas de [127])

Control de un brazo robot

En robótica es común el uso de sistemas de visión en la inspección y la coordinación de las pinzas de un brazo robot, además de la teoría de control [3, 155, 177, 194]. A partir de las imágenes captadas mediante una cámara situada en la muñeca del robot, se emplea una *snake* para capturar el contorno del objeto y, usando la primera y segunda derivada a lo largo de la curva que proporcionan la orientación y curvatura, se puede establecer un conjunto de posiciones estables de las pinzas [34, 71, 88, 203, 214, 215, 216, 241].

Biometría: movimiento del cuerpo

Esta aplicación supone la medida del movimiento de extremidades para estudios ergonómicos, análisis anatómicos en deportes, cirugía correctiva, animación del cuerpo completo en aplicaciones de gráficos por computador, etc. Existen sistemas comerciales basados en marcadores y son herramientas de medida en biología y en medicina pero es interesante reemplazarlos con técnicas sin marcadores. La captura del movimiento del cuerpo completo a partir de su contorno es viable pero quedan algunos problemas por resolver: el número relativamente alto de grados de libertad del cuerpo articulado plantea problemas de estabilidad para los algoritmos de seguimiento, así como un tratamiento cuidadoso de la oclusión. Un avance pionero en el seguimiento visual del movimiento humano fue el andador de Hogg [116] que utiliza un modelo articulado del movimiento de las articulaciones para restringir la búsqueda de las partes del cuerpo. Los contornos activos se han aplicado con éxito para seguir partes del cuerpo y su totalidad [28, 102, 135, 271], aunque los métodos basados en características puntuales también pueden ser útiles en un seguimiento menos preciso [178, 210].

Diagnóstico médico

Los escáneres de ultrasonidos son dispositivos de diagnóstico médico por imágenes que son apropiados para el análisis dinámico por su capacidad de ofrecer secuencias de vídeo en tiempo real. Los artefactos ruidosos de ultrasonidos, *speckle*, hacen estas imágenes difíciles de analizar. En este contexto, los contornos activos son particularmente potentes porque el error inducido por los puntos tiende a suavizarse al promediar a lo largo del contorno (véase Figura 1.3). Una vez ajustado, los modelos de movimiento aprendidos [36] se utilizan en el seguimiento como restricciones del objeto en movimiento. El tema de investigación aquí es como aprender de modelos ajustados de forma más precisa para clasificar movimientos normales y aberrantes.

Otra modalidad importante de imagen para aplicaciones médicas son las imágenes por re-

Figura 1.3.: El ventrículo izquierdo de un corazón latiendo es seguido por un contorno activo en una imagen de ultrasonidos para su uso en diagnóstico médico.

sonancia magnética (MRI, *Magnetic Resonance Imaging*). Es una tecnología tan benigna como los ultrasonidos y con tanto detalle como los rayos X de tomografía. En la Figura 1.4 se ilustra un ejemplo específico referido a medidas de los hemisferios cerebrales. En cada una de las imágenes de los sucesivos cortes del cerebro, dos *snakes* distintas siguen el contorno de los hemisferios derecho e izquierdo. La coherencia geométrica en cortes sucesivos significa que una *snake* ajustada en un corte puede utilizarse como contorno inicial para el siguiente. El proceso completo de ajuste puede, por lo tanto, inicializarse manualmente por *snakes* alrededor de los contornos del primer corte [7, 11, 59].

Figura 1.4.: (a) Imagen de una resonancia magnética (MRI) del cerebro (cada imagen MRI es un corte transversal del cerebro) donde dos *snakes* trazan el contorno de cada hemisferio. En (b) los contornos de uno de los hemisferios han sido apilados, y en (c) han sido convertidos en una malla para representarlo como un sólido (imágenes extraídas de [148])

Edición automática de vídeo

Una práctica estándar para generar composiciones fotográficas o de vídeo es el ‘blue-screening’ [229] en el cual el objeto del primer plano, fotografiado en movimiento delante de un fondo azul es aislado electrónicamente y puede ser superpuesto en un nuevo fondo para crear efectos especiales. El seguimiento y segmentación con un contorno activo abre la posibilidad de utilizar fondos cualesquiera. En sistemas de realidad aumentada donde se unen imágenes generadas por ordenador a escenas reales, también tienen gran interés las técnicas de segmentación de objetos, bien utilizando dispositivos de seguimiento 3D mecánicos o magnéticos [108, 197, 279] bien basados en visión [114, 131, 258, 233].

Estimación de movimiento no rígido mediante modelos deformables

La estimación de movimiento entre imágenes también se denomina *registro de imagen* y es el proceso de encontrar la mejor superposición de dos o más imágenes de una misma escena tomadas en diferentes instantes, desde diferentes puntos de vista, y/o tomada por diferentes sensores. Geométricamente supone «alinear» una de las imágenes, denominada *imagen objetivo* o patrón, con la otra imagen, denominada *imagen de referencia*. Las diferencias entre ambas imágenes se deben a las diferentes condiciones de captura, y pueden incluir desplazamientos, giros, deformaciones, cambios de iluminación, etc., por lo que el proceso de cálculo de la correspondencia de cada punto de la imagen de referencia en la imagen objetivo puede llegar a ser extremadamente complejo.

La aparición de nuevas tecnologías en adquisición de imágenes, en particular en el ámbito médico, demanda técnicas más avanzadas de registro de imagen para automatizar tareas de diagnóstico y tratamiento médico, en concreto, técnicas de estimación de movimiento no rígido y fusión de imágenes procedentes de diferentes fuentes. En los trabajos de Morales [169, 170, 171] y la Tesis Doctoral [168] se aborda el problema de la estimación de movimiento no rígido entre imágenes, con la propuesta de un método novel de registro de imagen que consta de dos etapas bien definidas: en la primera etapa se establece una correspondencia espacial difusa entre ambas imágenes, y en la segunda se obtiene, a partir del resultado anterior, los vectores de movimiento con la correspondencia espacial explícita mediante un método iterativo que implementa la regularización Tikhonov. El uso de regularización Tikhonov resulta de asumir que la correspondencia espacial a estimar es un mapa continuo y de carácter suave. El mecanismo de regularización está relacionado con la teoría de modelos deformables, permitiendo fijar a priori las condiciones de curvatura o suavidad del mapa de correspondencia espacial.

La Figura 1.5 y la Figura 1.6 muestran algunos de los escenarios donde se ha validado el método de registro de imagen propuesto. La Figura 1.5 muestra fotografías de una mano presio-

Figura 1.5.: Resultado de la estimación de movimiento deformable sobre imágenes de un rollo de cinta deformado (imágenes extraídas de [168]).

nando un rollo de cinta, entre las fotografías existe movimiento producido por una deformación real de la escena. La Figura 1.6 contiene imágenes fotográficas estereoscópicas de la cúpula de la capilla del hospital de marina de la UPCT. En ambos casos, los resultados muestran un buen comportamiento del método, y se puede comprobar como el movimiento detectado es suave y coherente, debido al filtrado de los vectores de correspondencia con un modelo deformable.

1.2. Estado de la técnica y optimizaciones de la formulación clásica

El artículo original sobre *snakes* es [126]. Éste generó muchas variaciones y extensiones, incluyendo el uso de la parametrización de Fourier [223, 232], elementos finitos [58], *B-splines* [55, 204, 237, 272, 290], incorporación de restricciones duras [8], cambios topológicos [140, 160], así como una dinámica lagrangiana explícita [249, 250]. Ninguna formulación se ha convertido aún en un estándar, sino que las variantes parecen ajustarse a diferentes aplicaciones, con modalidades de imágenes y escenarios de procesado particulares. En [141] se unifican las variantes más

Figura 1.6.: Resultados con imágenes de la cúpula de la antigua capilla del hospital de marina de la UPCT (imágenes extraídas de [168]).

importantes de las *snakes*, incluyendo diferencias finitas, *B-spline* y polinomios de Hermite, en un marco comprensivo de elementos finitos del cual se puede derivar un tipo particular de *snake* sin más que cambiar la función de forma del elemento finito.

La formulación original de los contornos activos paramétricos [126] presenta tres inconvenientes. El primero es la dependencia de la inicialización: el contorno inicial debe situarse cerca del borde del objeto o, probablemente, convergerá a un resultado erróneo. La mayoría de los algoritmos para recuperar formas que se basan en modelos deformables [73, 156, 163, 164, 198, 288] asumen que el usuario inicializa correctamente los parámetros de elasticidad, rigidez, masa y rozamiento, los cuales determinan la bondad del ajuste del modelo a los datos. Segundo, para los contornos activos es difícil avanzar en las concavidades de los bordes [1, 68]: la mayoría de los modelos de *snakes* tienen dificultades para converger en formas cóncavas. Este problema se trata en [280, 281] definiendo una nueva clase de fuerzas externas: el flujo vectorial de gradiente (GVF, *Gradient Vector Flow*) y una versión mejorada, el flujo vectorial de gradiente generalizado (GGVF, *Generalized Gradient Vector Flow*). Y tercero, los modelos de contornos activos paramétricos son no convexos: el resultado puede ser un mínimo local cuando la energía de la curva es mínima.

Para resolver el primer inconveniente, Sadamani [220] proporciona reglas para estimar y ajustar los parámetros de amortiguamiento mediante una *snake* adaptativa que evita inestabilidades y mejora la precisión de la estimación de la forma. Larsen y Radeva [136] desarrollan un formalismo para obtener una estima de los límites superior e inferior de los parámetros de elasticidad y rigidez de una *snake* para que consiga una segmentación precisa. Los límites se obtienen analizando la forma y tamaño del objeto de interés. Después, los mismos autores [137, 138] muestran un procedimiento de dos pasos para calcular el límite superior e inferior de los parámetros en imágenes reales donde parte del contorno puede no estar presente. De todos modos, el análisis requiere el conocimiento de la forma del objeto de interés y es aplicable solamente a modelos bidimensionales. Al contrario que las técnicas anteriores, Metaxas y Kakadiaris [162] proponen un método eficiente e intuitivo para adaptar automáticamente los parámetros elásticos de un modelo deformable utilizando el filtro de Kalman para estimar la forma. La novedad de esta técnica es que los parámetros elásticos del modelo no son constantes sino variantes en el espacio y en el tiempo, y esta variación depende de la distancia del modelo a los datos y de la tasa de variación de esta distancia. Cuando no se tiene conocimiento completo de la forma, los parámetros de elasticidad y rigidez del modelo se inicializan al mismo valor y en cada iteración del algoritmo se ajustan los grados de libertad del modelo (tanto geométricos como elásticos) en respuesta a fuerzas calculadas a partir de la discrepancia entre el modelo y los datos.

Con la intención de hacer el contorno activo insensible a la inicialización, Hou y Han [120] presentan un modelo mejorado que se basa en analizar la distribución del campo de fuerzas externas y encontrar dos tipos de puntos en la curva del contorno. Un tipo de punto llamado “verdadero” y que se puede clasificar de seis clases y el otro tipo de puntos “falsos”. Cuando la energía del contorno va a alcanzar un mínimo, el contorno no se considera como final y el algoritmo continúa hasta que todos los nodos del contorno son de una de las seis clases de punto “verdadero”. Con esto consigue que el modelo tenga un amplio margen de captura (haciéndolo insensible a la inicialización) e impide que el contorno quede atrapado en un mínimo local, pudiendo avanzar por concavidades; además el modelo tiene un bajo coste computacional en comparación con una *snake* que utilice flujo vectorial de gradiente [281] o métodos de conjuntos de nivel [227].

El análisis de la velocidad de convergencia de los modelos deformables se ha abordado desde distintas aproximaciones. Utilizando la teoría de aprendizaje, Teytaud y Sarrut [253] se basan en resultados estadísticos de procesos empíricos para analizar el comportamiento asintótico de las *snakes* cuando se aumenta la precisión. Sus primeros resultados incluyen condiciones suficientes para asegurar una convergencia débil al valor empírico (mínimo local) que está relacionado con el valor ideal (mínimo global), sugiriendo además modificaciones a la regularización basada en la curvatura. Blake e Isard [35] desarrollaron una nueva técnica basada en las ideas de la teoría de control adaptativo y la estimación de máxima probabilidad, para aprender la dinámica del modelo y poder realizar en tiempo real el seguimiento de movimientos de curvas 2D (similares a las utilizadas en el conjunto de entrenamiento). Con el fin de realizar una segmentación rápida de ob-

jetos, Giusto *et al.* [101] presenta un modelo de contorno activo llamado FACE. En él introduce un término nuevo de energía que tiene en cuenta la complejidad computacional del contorno activo, y describe el proceso de regularización y optimización de la posición de los puntos de control del contorno activo. Las fuerzas externas de este modelo pueden verse como una combinación de flujo vectorial de gradiente y las fuerzas potenciales basadas en un mapa de distancia euclídea [58]. El compromiso entre complejidad computacional y precisión del contorno final se basa en una estimación de la curvatura utilizada para minimizar el número de puntos de control del contorno necesarios, que produce una rápida convergencia del contorno activo hacia los bordes deseados del objeto. Este método puede combinarse con otras aproximaciones gracias a la independencia entre el proceso de minimización del coste computacional y el modelo clásico de contornos activos en lo que se refiere a la energía externa, interna y la fase iterativa de minimización.

En la implementación variacional de los contornos activos, las *snakes* geodésicas [50, 188, 189], la regularización se basa en la curvatura y también afecta a la convergencia, sobre todo en regiones cóncavas. Pujol *et al.* [206] hacen uso de funciones características para definir una formulación geodésica que desacopla los términos de regularidad y de convergencia. Ésta formulación dota al contorno de mayor capacidad de adaptación a formas no convexas. La convergencia está asegurada al dividir la definición de la fuerza externa en un campo vectorial de atracción y otro de repulsión.

Para que la solución que minimiza el funcional de energía sea la solución óptima global, Davatzikos y Prince [69, 70] utilizan la formulación general de los contornos activos y presentan un análisis de convexidad de su función de energía. También obtienen las condiciones bajo las cuales esta formulación tiene una única solución; estas condiciones implican tanto al potencial de energía del contorno activo como a los parámetros de regularización. El análisis de convexidad lo aplican a formulaciones particulares de contornos activos, mostrando características importantes de su convexidad y sugiriendo que los potenciales externos que implican cálculos del centro de masas se pueden comportar mejor que los potenciales que se basan en el gradiente. El análisis da una explicación de la convergencia lenta en bordes cóncavos y propone un algoritmo alternativo para alcanzar ese tipo de bordes [280, 281]. Davatzikos y Prince [67] describen dos algoritmos de contornos activos adaptativos en los que se modifica la constante de elasticidad del modelo en un intento de mantener la convexidad del funcional de energía. El primer algoritmo varía la elasticidad en el tiempo mientras que el segundo la adapta espacialmente. Las fuerzas externas del modelo están basadas en un promediado local en lugar de en la diferencia, haciendo el método propuesto más robusto frente al ruido y los errores de discretización. La primera aproximación es una formulación adaptativa en el tiempo que mejora de forma considerable el funcionamiento del contorno activo, a expensas de un incremento del coste computacional. La segunda aproximación es adaptativa espacialmente, modifica el valor de los parámetros a lo largo del contorno, logrando un compromiso entre las formulaciones con los parámetros constantes y adaptables en el tiempo.

Watersheds y *snakes* son muy utilizadas en procesamiento de imagen, sobre todo para localizar bordes de objetos. Ambas tienen sus ventajas y limitaciones: el algoritmo de *watershed* de la morfología matemática [224, 225] proporciona contornos precisos y contornos cerrados con anchura de un píxel, pero su principal problema es la sobresegmentación. Por otro lado, las *snakes* pueden localizar los bordes del objeto deseado automática y dinámicamente a partir de un contorno inicial, pero el corto margen de captura del contorno inicial limita su utilidad. Zhao y Zhuang [287] presentan un algoritmo híbrido de detección de bordes que incorpora las ventajas de *watersheds* y *snakes*. Primero se transforma un contorno inicial en el máximo contorno *watershed* que lo contiene, y éste es la inicialización de la *snake* donde comienza su evolución hacia los bordes del objeto de interés. Si se compara el algoritmo híbrido con la *snake* tradicional y con el uso del flujo vectorial de gradiente, el esquema híbrido tiene un alcance mayor, un cálculo más rápido y mayor robustez al ruido. Park y Keller [196] presentan una aproximación llamada *watersnake* para la extracción de los bordes de un objeto. El algoritmo consta de dos pasos donde se minimiza el funcional de energía mediante programación dinámica. Es más robusto a mínimos locales porque busca la solución en todo el espacio de energía. Para reducir la complejidad del proceso de minimización utiliza la transformación *watershed* y una estrategia multirresolución. El algoritmo de *watershed* es muy potente para segmentar, pero no permite la incorporación de información previa como los métodos de segmentación basados en la minimización de energía: no hay control sobre la suavidad del resultado de la segmentación. Nguyen *et al.* muestran en [181] como representar la segmentación por *watershed* como un problema de minimización de energía usando la definición de línea *watershed* basada en la distancia. Entonces, consideraciones previas sobre la suavidad pueden imponerse añadiendo la longitud del contorno a la función de energía. Esto conduce a un nuevo método de segmentación llamado *watersnakes*, que integra la segmentación *watershed* y la segmentación basada en la minimización energía. Sus resultados muestran que, cuando la segmentación original con *watershed* tiene bordes ruidosos o erróneos unidos al objeto de interés, el método propuesto supera esos inconvenientes y produce una segmentación más suave.

1.3. Objetivos y motivación de este trabajo

Esta Tesis está motivada por los proyectos [122, 255] donde se utilizan modelos deformables para el análisis de imágenes médicas. En el proceso de segmentación y seguimiento de objetos, el modelo deformable utiliza una combinación de distintos tipos de fuerzas internas (que mantienen las propiedades de elasticidad y de rigidez produciendo suavidad en la forma del modelo) y fuerzas externas (que mantienen una distancia entre nodos, un área y un volumen dado o cualquier otra restricción impuesta por el conocimiento previo sobre el objeto). En el ajuste del modelo a los datos, y debido a la naturaleza adaptativa del algoritmo, unas fuerzas han de predominar sobre otras a lo largo de las iteraciones, y por ello es necesario tener un control sobre la velocidad de convergencia del contorno, objetivo de esta Tesis.

Para el estudio de la convergencia se ha trasladado la formulación original de los modelos deformables al dominio de la frecuencia [275, 269]. Esta nueva formulación ofrece otra perspectiva para el diseño de modelos deformables, una implementación eficiente computacionalmente y el análisis del comportamiento de un contorno activo (durante la segmentación de un objeto de una imagen), lo que nos permite elegir los parámetros dinámicos que aceleran su convergencia [263].

1.4. Descripción del resto de capítulos

La estructura de esta Tesis es la siguiente: en el Capítulo 1 se realiza una introducción con ejemplos de aplicaciones de los contornos activos y el estado de la técnica con las mejoras realizadas a la formulación original; en el Capítulo 2 se describen las formulaciones en el dominio del espacio (*snakes* paramétricas, *t-snakes* y métodos de conjuntos de nivel); en el Capítulo 3 se detalla la formulación en el dominio de la frecuencia; el Capítulo 4 analiza la convergencia de los contornos activos en segmentación de imágenes y proporciona la regla para el diseño óptimo de sus parámetros dinámicos; el Capítulo 5 contiene las aplicaciones desarrolladas durante esta Tesis utilizando modelos deformables; y por último, el Capítulo 6 finaliza la Tesis con las conclusiones y líneas futuras de investigación.

Formulación de los modelos deformables en el dominio espacial

Los modelos deformables constituyen una clase de métodos de modelado con base física ampliamente utilizados en síntesis de imágenes (*Computer Graphics*), análisis de imágenes (*Computer Vision*), diseño geométrico asistido por ordenador y otros campos relacionados. Los modelos deformables ofrecen una aproximación cuyos fundamentos matemáticos representan la confluencia de Geometría, Física y Teoría de la Aproximación [242, 243]. La Geometría sirve para representar la forma del objeto, la Física impone restricciones en como la forma del objeto puede variar en el espacio y en el tiempo, y la Teoría de Aproximación respalda el ajuste de los modelos a los datos. A diferencia de las formulaciones eulerianas asociadas a los métodos de conjuntos de nivel (*level sets*), las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los modelos deformables están basadas en una formulación mecánica lagrangiana continua. Las dos aproximaciones son complementarias en el mismo sentido en el que los modelos sólidos lagrangianos complementan los modelos de fluidos eulerianos en la mecánica continua. La cantidad de literatura existente sobre modelos deformables y métodos de conjuntos de nivel demuestra que ambas aproximaciones son útiles en tareas de procesamiento de imagen y visión por computador.

La geometría de los modelos deformables cubre gran cantidad de formas utilizando representaciones geométricas que implican distintos grados de libertad. Estos grados de libertad no evolucionan de manera independiente, sino que son gobernados por principios físicos que confieren un comportamiento coherente al núcleo geométrico. El nombre de “modelos deformables” proviene del uso en su formulación de la teoría elástica a nivel físico, generalmente dentro de un marco de dinámica lagrangiana. Un modelo deformable puede interpretarse físicamente como un cuerpo elástico que responde de forma natural y bajo ciertas restricciones a las fuerzas aplicadas

sobre él. En este marco, la energía de deformación respecto al estado natural del modelo origina fuerzas elásticas internas en el modelo. Las funciones de energía potencial externas se definen en función de los datos de interés de las imágenes a los que el modelo se ha de ajustar; éstas originan fuerzas externas que deforman el modelo para que se ajuste a los datos. Así mismo, las restricciones de forma tales como continuidad, suavidad, elasticidad, plasticidad y simetría actúan como fuerzas internas. Bajo la influencia de fuerzas internas y externas, los modelos evolucionan hasta conformar las estructuras de interés de las imágenes. Además, otra característica es que los modelos deformables son sistemas dinámicos, unifican el análisis de forma y de velocidad, haciéndolos especialmente apropiados para el estudio de objetos naturales en movimiento — un corazón latiendo, labios moviéndose, articulación de extremidades, etc.

Un caso especial de la formulación de los modelos deformables, los contornos deformables en dos dimensiones, conocidos como *snakes*, fueron los primeros en ganar popularidad en el análisis de imágenes médicas. La tecnología de adquisición de imágenes médicas no invasivas continúa su rápido desarrollo, mientras los modelos deformables son cada vez más importantes en el análisis de imágenes médicas, en parte porque su flexibilidad y capacidad de deformación son características fundamentales de los tejidos blandos del cuerpo humano y de otras estructuras biológicas [158, 228]. Aquí, los modelos deformables han probado su utilidad en la segmentación, ajuste y seguimiento de estructuras anatómicas mediante la extracción de restricciones provenientes de las imágenes, conjuntamente con el conocimiento previo sobre la localización, tamaño y forma de esas estructuras.

Este Capítulo cubre los fundamentos matemáticos de los modelos deformables clásicos incluyendo la minimización de energía y las *snakes* dinámicas, su discretización, su simulación numérica y su interpretación probabilística. A continuación se presentan las generalizaciones de las *snakes* de mayor dimensión, como las superficies deformables; y las plantillas deformables, que construyen ensamblados de curvas flexibles para realizar un modelado más específico. Tras éstos, se presentan los modelos deformables adaptables a la topología, que proporcionan flexibilidad topológica sin sacrificar la base de geometría explícita sobre la que se asienta la formulación clásica de los modelos deformables (además la geometría paramétrica de las *snakes* permite continuidad controlada a tramos así como curvas cerradas y abiertas mientras que los métodos actuales de conjuntos de nivel tienen dificultades para representar curvas abiertas). Y por último, se introducen los métodos de conjuntos de nivel, basados en los modelos eulerianos de fluidos y motivados por la necesidad de una técnica que no haga ninguna asunción previa sobre la topología de la estructura de interés.

2.1. Contornos activos paramétricos

Las *snakes* son contornos deformables planares que son útiles en una serie de tareas de análisis de imagen [126]. Se utilizan frecuentemente para aproximar la situación y las formas de los bordes de objetos en imágenes, y se basan en la suposición de que los bordes son continuos a tramos o suaves (véase Figura 2.1). En su forma básica, la formulación matemática de las *snakes* surge de la teoría de la aproximación óptima mediante funcionales.

Figura 2.1.: (a) Ilusión subjetiva de un contorno. (b) *Snake* en equilibrio sobre el contorno subjetivo. Imágenes extraídas del primer artículo sobre *snakes* [126].

Geoméricamente, una *snake* es un contorno explícito y paramétrico embebido en el plano de la imagen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. El contorno se representa como $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s) = (x(s), y(s))^T$, donde x e y son las funciones coordenadas y $s \in [0, L]$ es el dominio paramétrico¹. La forma del contorno sometido a una imagen $I(x, y)$ viene dada por el funcional

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}(\mathbf{v}), \quad (2.1)$$

que representa la energía del contorno. La forma final del contorno se alcanza con el mínimo de esta energía.

El primer término del funcional en la ecuación (2.1),

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_0^L \alpha(s) \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s^2} \right|^2 ds, \quad (2.2)$$

¹El símbolo T denota transposición.

es la energía interna de deformación, que caracteriza la deformación de un contorno elástico y flexible. Las dos funciones físicas paramétricas, las funciones no negativas $\alpha(s)$ y $\beta(s)$, representan las características físicas simuladas del contorno en cualquier punto s de la *snake*: $\alpha(s)$ controla la tensión del contorno mientras que $\beta(s)$ controla su rigidez. Por ejemplo, permitiendo que $\beta(s)$ sea cero en un cierto punto $s = s_0$, la *snake* puede doblarse y generar una esquina en el contorno. Aumentando el valor de $\beta(s)$ se obliga a que la curvatura de la *snake* sea suave, como una vara rígida pero flexible, aumentando su tendencia a regresar a una línea recta. Incrementar $\alpha(s)$ hace que la *snake* se comporte como un elástico estirado que favorece una parametrización uniforme de la curva, eliminando lazos y ondulaciones, pero aumentando la tendencia a que encoja, llegando a colapsarse en un punto, a menos que se compense mediante fuerzas externas u otras restricciones.

El segundo término del funcional (2.1) es la energía que contiene la interacción del contorno con los datos externos y con restricciones internas y externas dadas por el conocimiento previo del objeto a segmentar. Tradicionalmente $\mathcal{P}(\mathbf{v})$ suele tener un término $\mathcal{P}_I(\mathbf{v})$ que acopla la *snake* a la imagen:

$$\mathcal{P}_I(\mathbf{v}) = \int_0^L P(\mathbf{v}(s)) ds, \quad (2.3)$$

donde $P(x, y)$ denota una función escalar de potencial definida en el plano de la imagen. Para utilizar *snakes* en imágenes se diseñan potenciales externos cuyos mínimos locales coinciden con bordes u otras características de interés de la imagen². El funcional de energía (2.1) alcanza un mínimo cuando la energía interna $\mathcal{S}(\mathbf{v})$ se compensa con la energía $\mathcal{P}(\mathbf{v})$.

De acuerdo con el cálculo variacional, el contorno $\mathbf{v}(s)$ que minimiza la energía $\mathcal{E}(\mathbf{v})$ debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\alpha(s) \frac{\partial \mathbf{v}(s)}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\beta(s) \frac{\partial^2 \mathbf{v}(s)}{\partial s^2} \right) = \mathbf{q}(\mathbf{v}(s)). \quad (2.4)$$

Esta ecuación en derivadas parciales (EDP) vectorial expresa el balance de fuerzas internas y externas cuando el contorno se encuentra en equilibrio. Los dos primeros términos representan las fuerzas internas de estiramiento y curvatura respectivamente, mientras que el tercer término,

$$\mathbf{q}(\mathbf{v}(s)) = -\nabla P(\mathbf{v}(s)) + \mathbf{f}(\mathbf{v}(s)), \quad (2.5)$$

representa las fuerzas externas que acoplan la *snake* a los datos de la imagen y las fuerzas con las restricciones sobre el modelo del objeto. La aproximación habitual para resolver (2.4) consiste en aplicar algoritmos de cálculo numérico [27].

²Por ejemplo, el contorno se atraerá a los bordes de intensidad en una imagen $I(x, y)$ eligiendo un potencial $P(x, y) = -c|\nabla[G_\sigma * I(x, y)]|$, donde c controla la magnitud del potencial, ∇ es el operador gradiente, y $G_\sigma * I$ denota la convolución de la imagen con un filtro gaussiano de suavizado cuya anchura característica σ influye en el alcance espacial del mínimo local de P .

2.1.1. Snakes dinámicas

Aunque es natural ver la minimización de energía como un problema estático, una potente aproximación para calcular el mínimo local de un funcional como el dado en (2.1) es construir un sistema dinámico que esté gobernado por el funcional y que permita al sistema evolucionar a una situación de equilibrio. El sistema puede construirse aplicando los principios de la mecánica lagrangiana. Esto da lugar a los modelos deformables dinámicos, que unifican la descripción de forma y movimiento, haciendo posible cuantificar no sólo la forma en condiciones estáticas, sino también su evolución a lo largo del tiempo (véase Figura 2.2). Vista como un sistema dinámico, la *snake* también puede usarse para realizar el seguimiento de objetos móviles en una secuencia de vídeo $I(x, y, t)$. Los modelos dinámicos son interesantes, por ejemplo, para el análisis de imágenes médicas variantes en el tiempo, dado que la mayoría de las estructuras anatómicas son deformables y continuamente experimentan un movimiento no rígido. Además, los modelos dinámicos presentan comportamientos físicos intuitivos, haciendo tratable su evolución mediante la supervisión interactiva de un usuario (véase Figura 2.3).

Figura 2.2.: (a) Modelo dinámico para monitorización del tráfico. Simulación de tres trayectorias establecidas para representar el patrón de tráfico, inicializadas con una velocidad en el espacio de forma correspondiente a la traslación a lo largo de la carretera, junto con la reducción de tamaño en concordancia con el escalado en perspectiva. Los contornos se representan a intervalos de 200 ms (Imagen tomada de [92]). (b) Modelo dinámico para una niña saltando. Simulación de tres trayectorias, cada una de duración 0.84 segundos, en un espacio de forma de traslaciones (imagen tomada de [36]).

Un ejemplo de estos modelos es una *snake* dinámica que puede representarse introduciendo un contorno variante en el tiempo, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s, t) = (x(s, t), y(s, t))^T$, junto con una densidad de masa $\mu(s)$ y una densidad de rozamiento $\gamma(s)$ ³. Las ecuaciones de Lagrange para una *snake* con la energía

³En la bibliografía es frecuente denominar también a $\gamma(s)$ densidad de pérdidas o densidad de amortiguamiento.

interna dada por (2.2) y las fuerzas externas y restricciones dadas por (2.5) es

$$\mu(s)\frac{\partial^2 \mathbf{v}(s,t)}{\partial t^2} + \gamma(s)\frac{\partial \mathbf{v}(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\alpha(s)\frac{\partial \mathbf{v}(s,t)}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\beta(s)\frac{\partial^2 \mathbf{v}(s,t)}{\partial s^2} \right) = \mathbf{q}(\mathbf{v}(s,t)). \quad (2.6)$$

Los dos primeros términos de la parte izquierda de esta ecuación en derivadas parciales representan las fuerzas inerciales debidas a la masa y las fuerzas de amortiguamiento debidas al rozamiento. Como en (2.4), el resto de términos representan las fuerzas internas de estiramiento y curvatura. La situación de equilibrio se alcanza cuando las fuerzas internas y externas se compensan y el contorno se posa (esto es, $\partial \mathbf{v} / \partial t = \partial^2 \mathbf{v} / \partial t^2 = 0$), lo que lleva a la condición de equilibrio de la ecuación (2.4).

Figura 2.3.: Aplicación de *snakes* para la segmentación con supervisión interactiva de imágenes de neuronas (imágenes tomadas de [141]).

2.1.2. Discretización y simulación numérica

Las implementaciones prácticas de una *snake* $\mathbf{v}$ se realizan en tiempo y espacio discreto, por lo que para calcular numéricamente la solución de energía mínima es necesario discretizar la energía $\mathcal{E}(\mathbf{v})$. La forma habitual es mediante la representación del modelo geométrico continuo $\mathbf{v}$ como combinación lineal de funciones base con alcance local o global. Los elementos finitos, las diferencias finitas y los *splines* geométricos son funciones base con representación local, mientras que las bases de Fourier permiten representación global.

Formulación de elementos finitos En la formulación mediante elementos finitos, el dominio paramétrico $0 \leq s \leq L$ se particiona en N subdominios finitos, así el contorno de la *snake* $\mathbf{v}(s,t)$ se divide en elementos de *snake* $\mathbf{v}_e(s,t)$,

$$\mathbf{v}(s,t) = \sum_{e=0}^{N-1} \mathbf{v}_e(s,t), \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{v}_e(s, t)$ abarca el subdominio paramétrico $s_e = e \frac{L}{N} \leq s < (e+1) \frac{L}{N} = s_{e+1}$. En el caso de que el contorno activo sea bidimensional, cada elemento de *snake* tendrá dos componentes:

$$\mathbf{v}_e(s, t) = \begin{pmatrix} x_e(s, t) \\ y_e(s, t) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Cada componente de un elemento e se representa geoméricamente con funciones de forma. Dado que las dos funciones coordenadas $x_e(s, t)$ e $y_e(s, t)$ son independientes, se va a realizar el desarrollo para una componente $x_e(s, t)$; el procedimiento para $y_e(s, t)$ se asume de forma idéntica.

Una componente del elemento $\mathbf{v}_e(s, t)$ puede escribirse como

$$x_e(s, t) = \mathbf{N}_e(s) \mathbf{u}_{e,x}(t) \quad (2.9)$$

siendo $\mathbf{N}_e(s)$ la función de forma⁴ y $\mathbf{u}_{e,x}(t)$ sus correspondientes parámetros de la función de forma. Sustituyendo en la ecuación (2.6) obtendríamos la ecuación de Lagrange de un elemento de un componente del contorno:

$$\mu(s) \mathbf{N}_e(s) \mathbf{u}_{e,x}''(t) + \gamma(s) \mathbf{N}_e(s) \mathbf{u}_{e,x}'(t) + \left(-(\alpha(s) \mathbf{N}_e'(s))' + (\beta(s) \mathbf{N}_e''(s))'' \right) \mathbf{u}_{e,x}(t) = q_{e,x}(s, t) \quad (2.10)$$

donde ' y '' representan la primera y segunda derivada respecto la variable independiente.

Agrupando los parámetros de las funciones de forma de todos los elementos en el vector de parámetros de la *snake*, $\mathbf{u}_x(t)$, se obtienen las ecuaciones de movimiento (2.6) discretizadas en el dominio espacial, y pueden representarse como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en $\mathbf{u}_x(t)$ en forma matricial:

$$M \mathbf{u}_x''(t) + C \mathbf{u}_x'(t) + K \mathbf{u}_x(t) = \mathbf{q}_x(s, t), \quad (2.11)$$

donde M es la matriz de masa, C es la matriz de amortiguamiento, K es la matriz de rigidez global y $\mathbf{q}_x$ es la componente x del vector de fuerzas externas. La matriz de rigidez global K agrupa la matriz de elasticidad K_α y la matriz de rigidez K_β ; ambas se construyen con las submatrices de rigidez $K_{e,\alpha}$ y $K_{e,\beta}$ de los elementos de la *snake*. Estas submatrices dependen de las funciones de forma $\mathbf{N}_e(s)$. Las matrices M , C y el vector de fuerzas externas $\mathbf{q}_x$ se ensamblan de forma similar y también dependen de $\mathbf{N}_e(s)$. Funciones de forma distintas generan diferentes matrices de rigidez y, por lo tanto, producen formas y comportamientos del contorno diferentes, apropiados para distintas tareas. Por ejemplo, *snakes* que utilizan *B-splines* como funciones de forma están caracterizadas por un pequeño número de grados de libertad, típicamente utilizan funciones base polinómicas de grado dos o mayor, y son inherentemente muy suaves, un papel que de otra manera recae totalmente en los términos de las derivadas espaciales de (2.2). Por tanto, las *B-snakes* [36, 161] pueden

⁴En la notación se diferencia la función de forma $\mathbf{N}_e(s)$ para cada elemento e debido a que si el contorno activo es abierto las funciones de forma son distintas en los elementos extremos. En un contorno cerrado todas las funciones de forma son iguales.

ser eficaces en segmentación o aplicaciones de seguimiento con imágenes ruidosas donde los bordes del objeto pueden presentar huecos o discontinuidades considerables. Por otro lado, bordes de objetos con detalles muy finos o con variaciones de curvatura muy rápidas pueden segmentarse de forma óptima con una *snake* que utilice una función de forma más simple y más grados de libertad, como las *snakes* de diferencias finitas [126]. La unificación de funciones de forma diferentes en un marco común aumenta la capacidad de modelado de objetos. En el Apéndice A se obtienen las matrices de rigidez para las funciones de forma de Hermite, las funciones de forma B-spline, y para diferencias finitas.

Para resolver la ecuaciones de movimiento dadas por la ecuación (2.11) se sustituyen las derivadas temporales del vector de parámetros de la *snake*, $\mathbf{u}(t)$, con sus aproximaciones discretas (primera y segunda diferencia regresiva)⁵:

$$\mathbf{u}'(t) \approx \frac{\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{u}''(t) \approx \frac{\mathbf{u}(t) - 2\mathbf{u}(t - \Delta t) + \mathbf{u}(t - 2\Delta t)}{(\Delta t)^2}, \quad (2.13)$$

siendo Δt el incremento de tiempo. Discretizando ahora el dominio temporal, $t = \xi\Delta t$, y utilizando la notación $\mathbf{u}(\xi\Delta t) = \mathbf{u}_\xi$, se llega a la siguiente fórmula de actualización

$$A \mathbf{u}_\xi = A_1 \mathbf{u}_{\xi-1} + A_2 \mathbf{u}_{\xi-2} + \mathbf{q}_{\xi-1}, \quad (2.14)$$

donde las matrices del sistema de segundo orden son $A = M/(\Delta t)^2 + C/\Delta t + K$, $A_1 = 2M/(\Delta t)^2 + C/\Delta t$ y $A_2 = -M/(\Delta t)^2$ y $\mathbf{q}_{\xi-1}$ representa el vector de fuerzas externas⁶.

Restricciones duras Una restricción para la *snake* puede ser dura o suave. Se entiende por restricciones duras las que obligan a la *snake* a pasar por ciertas posiciones o tomar ciertas formas (las restricciones duras genéricas se analizan en [96]), mientras que se llaman restricciones suaves las que meramente incitan a que lo haga. En el primer artículo sobre *snakes* [126] se describen dos clases de restricciones suaves, *spring* y *volcanos*, y se incorporan a la formulación de elementos finitos. Para evitar el colapso de los nodos de la *snake* se usan restricciones duras y programación

⁵Se omite el subíndice x para generalizar, ya que esta operación se realiza de manera independiente para ambas funciones coordenadas: $\mathbf{u}_x(t)$ y $\mathbf{u}_y(t)$.

⁶En caso de que se mantuvieran constantes en el tiempo todos los parámetros y debido a que A es una matriz simétrica y a bandas, ésta puede almacenarse de una manera compacta y factorizarse eficientemente de forma única de la forma $A = LDL^T$, donde L es una matriz triangular inferior y D es una matriz diagonal. La solución $\mathbf{u}_\xi$ de la ecuación (2.14) se obtiene resolviendo primero $L\mathbf{s} = A_1 \mathbf{u}_{\xi-1} + A_2 \mathbf{u}_{\xi-2} + \mathbf{q}_{\xi-1}$ con sustitución progresiva, entonces se calcula $L^T \mathbf{u}_\xi = D^{-1}\mathbf{s}$ con sustitución hacia atrás. Dado que A es constante, sólo es necesaria una factorización. Por lo tanto, en cada iteración, sólo se realizan la sustituciones progresivas/regresivas para integrar la *snake* a lo largo del tiempo. De cualquier modo, la literatura sobre elementos finitos ofrece métodos apropiados para la resolución de este sistema [27].

dinámica [9]. En [141] se propone un mecanismo llamado *pins* como una manera simple pero efectiva y eficiente de imponer restricciones duras en las *snakes* para integrar *snakes* y una técnica interactiva de trazado de bordes llamada *livewire* [24, 84, 125, 172, 173].

Si queremos garantizar que el nodo i de la *snake* esté en la posición (x_i^c, y_i^c) usando como funciones de forma los polinomios de Hermite⁷ la matriz de rigidez K de la *snake* puede ponerse como

$$K_{2i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 2i = j \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (2.15)$$

donde $0 \leq j \leq 2(N-1)$ siendo N el número de nodos de la *snake*. Entonces el vector de fuerzas del sistema se actualiza como

$$q_{2i,x} = x_i^c \quad q_{2i,y} = y_i^c, \quad (2.16)$$

donde x e y representan las funciones coordenadas $x(s)$ e $y(s)$ respectivamente. Con esto se garantiza que el nodo i de la *snake* esté siempre en la posición (x_i^c, y_i^c) .

Un inconveniente de esta sencilla técnica, es que la matriz de rigidez del sistema ya no es simétrica⁸. De todos modos, dado que la posición del nodo i es dada, se puede obtener una fuerza constante de la matriz de rigidez para cada grado de libertad y restársela en su posición correspondiente en el vector de fuerzas del sistema de modo que se devuelva la simetría a la matriz de rigidez y se mantenga el sistema equilibrado. Entonces, el vector de fuerzas del sistema y la matriz de rigidez se actualizan con

$$q_{j,x} = q_{j,x} - K_{j,2i} \times x_i^c \quad \text{si } j \neq 2i \quad (2.17)$$

$$q_{j,y} = q_{j,y} - K_{j,2i} \times y_i^c \quad \text{si } j \neq 2i \quad (2.18)$$

$$K_{j,2i} = \begin{cases} 1 & \text{si } 2i = j \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (2.19)$$

La pendiente se puede forzar del mismo modo. Si restringimos las variables posición y pendiente de los dos nodos de un elemento, este elemento permanecerá rígido. Sus dos elementos vecinos también se verán influenciados por esta restricción. Las restricciones en una *B-snake* son impuestas en los nodos de su polígono de control. Imponiendo restricciones duras de esta manera también disminuye el coste computacional en términos de memoria y tiempo, ya que el número de entradas en la matriz de rigidez se reduce. También es posible aplicar restricciones más generales a cualquier punto de la *snake*, como es descrito en [248].

⁷Utilizando los polinomios de Hermite la forma para cada elemento viene definida por la posición y la pendiente de $x(s)$ e $y(s)$ en los dos extremos. Las variables con la posición y la pendiente ocupan posiciones alternas en el vector de variables nodales $\mathbf{u}$.

⁸Por consiguiente, su matriz inversa no es posible almacenarla de forma compacta ni factorizarla de la forma LDL^T .

En la formulación anterior, la matriz de rigidez actualizada sólo indica qué grados de libertad de la *snake* están restringidos, pero no contiene el valor de la restricción, que se almacena en el vector de fuerzas del sistema. Como resultado, los valores de las restricciones pueden actualizarse de forma dinámica durante la deformación de la *snake*. En otras palabras, el usuario tiene la capacidad de modificar las restricciones a lo largo del plano de la imagen para refinar la segmentación del objeto mientras la *snake* se deforma. Esta propiedad es muy útil cuando se integran las *snakes* con *livewire*. Mientras se está deformando la *snake* se pueden imponer restricciones duras adicionales para limitar su deformación. Como esas restricciones son desconocidas antes de que se construya la *snake*, pueden incorporarse durante el proceso de segmentación usando fuerzas de reacción en el vector de fuerzas del sistema, sin cambiar la matriz de rigidez.

2.1.3. Interpretación probabilística

Una visión alternativa de los modelos deformables emerge de interpretar el proceso de ajuste en un marco probabilístico. Esto permite la incorporación de modelos a priori y de características de la imagen en forma de distribuciones de probabilidad. El marco probabilístico también proporciona una medida de la incertidumbre de los parámetros de forma estimados después de que el modelo se haya ajustado a los datos de la imagen (véase Figura 2.4 y Figura 2.5).

Figura 2.4.: Muestreo de una familia de curvas. (a) Imagen del objeto del modelo. En (b) se representan muestras aleatorias de una familia de curvas que sigue una distribución gaussiana uniforme e isotrópica, de forma que $\|\mathbf{v}(s) - \bar{\mathbf{v}}(s)\|$ tiene un valor cuadrático medio de 0.2 unidades de longitud. (La forma media $\bar{\mathbf{v}}(s)$ se muestra en trazo discontinuo). En (c), las curvas paralelas representan intervalos de confianza (espacialmente promediados), al 95 % de probabilidad, conteniendo a las curvas aleatorias como cabe esperar (imágenes tomadas de [36]).

Sea $\mathbf{u}$ el vector de los parámetros de forma del modelo deformable con una probabilidad a priori $p(\mathbf{u})$. Sea $p(I|\mathbf{u})$ el modelo de la imagen — la probabilidad de producir una imagen I dado un modelo $\mathbf{u}$. Por el teorema de Bayes,

$$p(\mathbf{u}|I) = \frac{p(I|\mathbf{u})p(\mathbf{u})}{p(I)} \quad (2.20)$$

expresa la probabilidad a posteriori, $p(\mathbf{u}|I)$, de un modelo dado una imagen, en términos del modelo de imagen y las probabilidades a priori del modelo y de la imagen.

Es sencillo convertir la medida de energía interna (2.2) del modelo deformable en una distribución a priori de las formas más probables, siendo las formas de menor energía las más probables. Esto se consigue utilizando una distribución de Boltzmann (o Gibbs) de la forma

$$p(\mathbf{u}) = \frac{1}{Z_s} \exp(-S(\mathbf{u})), \quad (2.21)$$

donde $S(\mathbf{u})$ es la versión discretizada de $S(\mathbf{v})$ de la ecuación (2.2) y Z_s es una constante normalizadora. El modelo a priori se combina con un modelo de la imagen basado en medidas lineales con ruido gaussiano

$$p(I|\mathbf{u}) = \frac{1}{Z_I} \exp(-P(\mathbf{u})), \quad (2.22)$$

donde $P(\mathbf{u})$ es una versión discretizada del potencial $\mathcal{P}(\mathbf{v})$ de (2.3), que es una función obtenida de la imagen $I(x, y)$. Los modelos se ajustan encontrando un vector $\mathbf{u}$ que maximiza localmente $p(\mathbf{u}|I)$ en (2.20), que se conoce como la solución máximo a posteriori. Con la construcción anterior, se llega al mismo resultado que minimizando (2.1), la configuración de energía del modelo deformable dada la imagen.

El marco probabilístico puede extenderse asumiendo un modelo a priori variante en el tiempo, o modelo del sistema, conjuntamente con el modelo de la imagen, produciendo un filtro de Kalman. El modelo del sistema describe la evolución esperada de los parámetros de forma $\mathbf{u}$ en el tiempo. Si las ecuaciones de movimiento del modelo físico de las *snakes* (2.11) se utilizan como modelo del sistema, el resultado es un algoritmo de estimación secuencial conocido como *snakes* de Kalman [201, 249], que han demostrado su utilidad en el seguimiento de objetos en vídeo.

Figura 2.5.: Muestreo aleatorio en el espacio de formas. La familia de contornos de botella mostrados tienen una forma media $\mathbf{v}(s)$ mostrada en (a) y una distribución gaussiana uniforme e isotrópica en el espacio de formas con un valor cuadrático medio del desplazamiento de 0.3 unidades de longitud. (b) Espacio de formas euclídeo. (c) Espacio de formas afín (imágenes tomadas de [36]).

2.1.4. Generalización a mayor dimensión

Las *snakes* son un caso particular dentro del marco general de los modelos deformables continuos (multidimensionales) con dinámica lagrangiana [243].

En un dominio p -dimensional $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, la generalización natural del funcional de suavidad (2.2) definido mediante un vector q -dimensional de funciones coordenadas $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = [v_1(\mathbf{x}), \dots, v_q(\mathbf{x})]$ es

$$S_n(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^p} \sum_{m=1}^n \sum_{|j|=m} \frac{m!}{j_1! \dots j_p!} w_j(\mathbf{x}) \left| \frac{\partial^m \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_p^{j_p}} \right|^2 d\mathbf{x}. \quad (2.23)$$

Aquí, $j = (j_1, \dots, j_p)$ es un índice múltiple, con $|j| = j_1 + \dots + j_p$. Nótese que este funcional ofrece suavidad de mayor orden al generalizar las derivadas de segundo orden de (2.2) a derivadas de orden n . De forma análoga a la ecuación (2.4), asumiendo que las funciones control $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ son derivable hasta orden p , la ecuación de Euler-Lagrange queda

$$\sum_{m=1}^n (-1)^m \Delta_w^m \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla P(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

donde

$$\Delta_w^m = \sum_{|j|=m} \frac{m!}{j_1! \dots j_p!} \frac{\partial^m}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_p^{j_p}} \left(w_j(\mathbf{x}) \frac{\partial^m}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_p^{j_p}} \right) \quad (2.25)$$

es el operador Laplaciana iterativo de orden m espacialmente ponderado.

Superficies deformables

En el caso especial de $n = 2$, $q = 3$, y $p = 2$, definimos $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ por comodidad en la notación y limitamos el dominio bidimensional al rectángulo $[0, L_x] \times [0, L_y]$. Entonces la expresión (2.23) puede escribirse como

$$S(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} w_{10} \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right|^2 + w_{01} \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right|^2 + w_{20} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} \right|^2 + 2w_{11} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x \partial y} \right|^2 + w_{02} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} \right|^2 dx dy, \quad (2.26)$$

donde los subíndices denotan las derivadas parciales respecto x e y . Este funcional, generalización natural en dos dimensiones de la energía de la *snake* (2.2), representa la energía interna de las superficies deformables. Las funciones paramétricas físicas $w_{01}(x, y)$ y $w_{10}(x, y)$ controlan la tensión de la superficie, mientras que $w_{20}(x, y)$, $w_{11}(x, y)$ y $w_{02}(x, y)$ controlan su rigidez.

Este funcional de lámina fina bajo tensión ha tenido numerosas aplicaciones, especialmente en reconstrucción de superficies visibles en visión por computador [244].

2.1.5. Plantillas deformables

La idea de las plantillas deformables es anterior al desarrollo de los contornos activos [38, 44, 94] pero ha disfrutado de un resurgimiento inspirado en éstos [31, 60, 61, 62, 115, 284, 285, 286]. Las restricciones de forma anteriores están implícitas en el modelo deformable y son suaves, fomentando más bien que forzando una clase particular de formas favorables. Es más, esas formas favorables tienen una variedad limitada⁹. Modelos de clases de formas más específicas exigen el uso de restricciones duras, y las formas “por defecto” son más interesantes que las restricciones de suavidad de la curva. Esto puede lograrse usando un modelo paramétrico de forma, $\mathbf{v}(s; \mathbf{X})$, con pocos grados de libertad, conocido como “plantilla deformable”. La plantilla se combina con la imagen, de forma similar a la *snake*, buscando el valor del vector de parámetros $\mathbf{X}$ que minimiza la energía externa $E_{ext}(\mathbf{X})$. La energía interna $E_{int}(\mathbf{X})$ puede incluirse como un regularizador para favorecer ciertas formas.

Como ejemplo de plantilla deformable, la Figura 2.6 ilustra la plantilla del ojo de Yuille y Hallinan [286], que muestra como se parametriza la plantilla y los resultados del ajuste en una imagen de una cara. La energía interna $E_{int}(\mathbf{X})$ incita a la plantilla a relajarse en su forma por defecto. La energía externa $E_{ext}(\mathbf{X})$ consta de una suma de varias integrales sobre el mapa de características de la imagen. Cada integral se realiza sobre una de las dos regiones delimitadas por el modelo del ojo o a lo largo de la curva de la plantilla, lo que causa que E_{ext} pueda variar con $\mathbf{X}$. Finalmente, la energía total se minimiza iterativamente. El algoritmo no lineal de descenso de gradiente tenderá a encontrar un buen mínimo, en el sentido de dar un buen ajuste a los datos de la imagen, con la condición de que la disposición inicial no esté muy lejos del ajuste final deseado.

Más potente aun es combinar el modelado dinámico de (2.6) con las estructuras geométricas utilizadas en las plantillas deformables. Esto implica definir formas parametrizadas $\mathbf{v}(s, t; \mathbf{X})$, como en las plantillas deformables, y luego especificar una ecuación dinámica para el parámetro de forma $\mathbf{X}$. En la ecuación del contorno dinámico (2.6), las restricciones previas sobre la forma y el movimiento estaban implícitas, pero para facilitar un diseño sistemático es más interesante que estén explícitas. Esto se consigue separando un modelo dinámico para movimientos probables de la influencia de las medidas obtenidas de la imagen. El contorno dinámico se convierte en un proceso de dos fases en el que el modelo dinámico se utiliza para predecir y extrapolar el movimiento de un instante discreto al siguiente. Entonces, la posición predicha para cada nuevo instante se refina usando las características medidas de la imagen (véase la Figura 2.7). El filtro de Kalman [22, 99] es una máquina probabilística preparada para aplicar el ciclo de dos fases, y por esta razón ha sido un paradigma muy popular y exitoso para el seguimiento de objetos, convirtiéndose en una herramienta estándar en visión por computador [12, 74, 76, 77, 86, 111, 113,

⁹Por ejemplo, en el caso de que $\alpha = 0$ en (2.4), las soluciones de $\mathbf{v}_{ss} = 0$ son simplemente líneas rectas.

Figura 2.6.: Plantilla deformable del ojo. En (a) se define una plantilla $v(s; \mathbf{X})$ de un ojo con un total de 11 parámetros geométricos contenidos en el vector de parámetros $\mathbf{X}$. La plantilla varía de forma no lineal con $\mathbf{X}$. Las curvas delimitadoras del ojo son parábolas que varían de forma no lineal, como una función de la longitud de los parámetros a , b y c . En (b), en iteraciones sucesivas de un algoritmo de descenso de gradiente, se alcanza una situación de equilibrio en la que la plantilla se ajusta correctamente al ojo (imágenes tomadas de [286]).

153, 210, 249].

Figura 2.7.: El seguimiento de un objeto en movimiento mediante un contorno dinámico conlleva dos fases en cada iteración. La historia pasada del movimiento y el conocimiento a priori del movimiento se extrapolan para predecir el desplazamiento entre instantes sucesivos, y después la posición predicha se refina utilizando las características de la imagen.

De forma intuitiva, se puede concluir que los modelos predictivos exigen un tratamiento probabilístico para evitar ser muy restrictivos. El ciclo de dos fases fusiona predicciones con medidas. Si la predicción fuera determinística sin dar lugar a incertidumbres dominaría sobre la medida, que sería ignorada. Añadir incertidumbre en la predicción genera un hueco en la información que se puede rellenar con las observaciones sensoriales. En [36] se definen los principios de diseño para modelos de forma y movimiento probabilísticos, y se explica esos efectos tanto en la representación del conocimiento previo como las restricciones y condiciones en el seguimiento del objeto.

Existen metodologías para diseñar plantillas deformables con parametrizaciones lineales, denominadas “espacios de forma”. Las restricciones en las parametrizaciones lineales tienen ciertas ventajas en la simplificación de los algoritmos de ajuste y evitan problemas de mínimos locales, haciéndolas muy versátiles geométricamente. Se ha de señalar que se han realizado trabajos con modelos paramétricos tridimensionales, tanto rígidos [100, 113, 143, 144, 240, 254] como deformables [56, 212, 246, 247, 252]. Conforme los modelos se hacen más detallados y la investigación se hace más exhaustiva, la aproximación tridimensional se fusiona en el reconocimiento visual de objetos [106]. En [36] se trata el movimiento tridimensional modelando directamente su efecto en modelos de contornos basados en imágenes que utilizan espacios afines entre otros recursos.

2.2. Modelos deformables adaptables a la topología

Igual que los modelos físicos de sólidos no rígidos, los modelos deformables han tenido un gran impacto en el análisis de imágenes médicas [158]. La complejidad de la anatomía humana, formada por numerosos órganos no rígidos con complejas subestructuras en múltiples escalas de resolución, hace que los modelos deformables deban ser capaces de tratar topologías complejas e incluso no constantes. Por desgracia, sin maquinaria adicional, los modelos deformables clásicos lagrangianos no pueden alterar su topología predefinida.

Los métodos de segmentación de imágenes basados en conjuntos de nivel (véase Sección 2.3) estuvieron motivados por la necesidad de una técnica que no hiciera asunciones previas sobre la topología del objeto a segmentar [188, 226, 227]. Para este fin, los métodos de conjuntos de nivel formulan la estimación del borde de una curva o superficie como un problema euleriano definido sobre el dominio de la imagen entera. La dimensionalidad del problema euleriano es mayor que la del problema lagrangiano asociado a los modelos deformables. La característica primordial de esta aproximación es que la hipersuperficie de mayor dimensión es una función simple, incluso cuando los conjuntos de nivel cambian la topología (o dejan de estar conectados). Por eso los cambios topológicos son tratados de forma natural.

Los modelos deformables adaptables a la topología son una aproximación alternativa para manejar topologías variables [157, 159, 160, 245]. Estos modelos solventan el incremento de dimensionalidad de los métodos de conjuntos de nivel, mientras conservan la potencia de los modelos deformables paramétricos estándar, incluyendo la representación geométrica explícita, los mecanismos naturales de interacción con el usuario y los mecanismos de restricciones implementados mediante funciones de energía o fuerza. Los modelos deformables adaptables a la topología pueden segmentar y reconstruir algunas de las estructuras biológicas más complejas a partir de imágenes 2D y 3D.

2.2.1. Snakes adaptables a la topología

Las *T-snakes* son modelos híbridos que combinan las *snakes* paramétricas (lagrangianas) con aspectos de la aproximación de conjuntos de nivel (eulerianos). Utilizan una descomposición de la imagen en celdas afines (ACID) que extiende las habilidades de las *snakes* convencionales, permitiendo flexibilidad topológica entre otras características [160]. En particular, el marco ACID ofrece un mecanismo nuevo de reparametrización de la *snake*, que le permite fluir hacia dentro de objetos geoméricamente complejos, adheriéndose a los bordes del objeto. Una o más *T-snakes* se pueden crear o destruir dinámicamente y pueden dividirse o fundirse de manera ininterrumpida si es necesario para adaptarse a la topología del objeto (véase Figura 2.8). En [157] se pueden ver numerosos ejemplos de *T-snakes* aplicadas en imagen.

Figura 2.8.: Segmentación utilizando *T-snakes*. (a) Imagen de un corte cerebral en una resonancia magnética. (b) Vasos sanguíneos en una angiografía de retina. La flexibilidad geométrica de la *T-snake* le permite cambiar su topología inicial hasta convertirse en una región con un alto grado de deformación (imágenes extraídas de [160].)

Conforme una *T-snake* se deforma por la influencia de las fuerzas internas y externas, es reparametrizada sistemáticamente con un nuevo conjunto de nodos y elementos. Esto se hace calculando eficientemente los puntos de intersección del modelo sobre la malla de celdas afines superpuesta; un ejemplo es la descomposición Coxeter-Freudenthal (véase Figura 2.9(a)). Al final de cada paso de deformación, los nodos se han movido en relación a los bordes de las celdas de la malla (véase Figura 2.9(b)-(c)). En la primera fase del algoritmo de reparametrización se calculan los puntos de intersección entre los elementos de la *T-snake* y los bordes de las celdas de la malla. Estos puntos de intersección se convertirán en los nodos de la nueva *T-snake*. En la segunda fase,

los vértices de las celdas de la malla que se han movido del exterior al interior de la malla son marcados como “dentro”; de este modo, el interior de la T-snake es seguido en todo momento.

Figura 2.9.: (a) En línea continua se muestra el contorno del objeto y en línea discontinua la aproximación usando la triangulación de Freudenthal. Los nodos del modelo son los puntos de intersección. (b) Segunda fase de la reparametrización: nuevos nodos de la T-snake y (c) celdas del mallado del nuevo contorno (imágenes extraídas de [160]).

Una T-snake cerrada define una región. Cuando una región limitada por una T-snake choca consigo misma o con otra región T-snake, o se divide en dos o más subregiones o se encoge y desaparece, dando lugar en ambos casos a una transformación topológica. Los cambios topológicos se realizan automáticamente por medio de ACID (véase Figura 2.8). Los bordes se pueden determinar sin ambigüedad siguiendo los vértices internos de la malla y restableciendo la correspondencia de los bordes de la T-snake con la malla después de cada paso de deformación. Los nuevos elementos se construyen basándose en el signo (por ejemplo “dentro” o “fuera”) de los vértices de la malla en cada celda del borde y de los puntos de intersección calculados en la primera fase, de modo que los vértices externos e internos de la malla quedan separados por una línea.

Comparado con las snakes convencionales, la T-snake es relativamente insensible a su ubicación inicial dentro de las regiones de interés de la imagen. Fluye hacia dentro de formas complejas modificando su topología si es necesario para ajustarse a los datos relevantes de la imagen. ACID proporciona un marco con cálculos geométricos para transformaciones topológicas, pero si se deshabilita ACID, se reduce el modelo de T-snake al modelo convencional de snakes paramétricas. Por consiguiente, T-snakes también incorpora restricciones de forma mediante un funcional de energía y fuerzas aplicadas. Una ventaja importante de esto último es el control del usuario, que abastece al análisis de imágenes médicas, donde es fundamental para un usuario experto ser capaz de controlar y refinar el proceso de segmentación de una forma interactiva.

2.3. Formulación variacional y métodos de conjuntos de nivel

Muchos problemas en procesamiento de imágenes se reducen a un problema de optimización, cuyo objetivo es recuperar un conjunto de variables desconocidas para conducir a un entendimiento parcial o completo. Las formulaciones variacionales [10, 221] son parte de estas técnicas, donde la estimación de las variables desconocidas se hace iterativamente. Aplicaciones como reconstrucción de imágenes, segmentación, registro, análisis del movimiento y de la forma o visión estereoscópica, se pueden considerar como componentes principales necesarios para el entendimiento de imágenes. Estas aplicaciones pueden reformularse como problemas de seguimiento de interfaces en movimiento [145, 146, 189]. Las técnicas de conjuntos de nivel son el método más apropiado para seguir interfaces en movimiento y fueron presentadas paralelamente por Osher y Sethian [189] motivados por las aplicaciones y su geometría. Estas técnicas son implícitas, intrínsecas, sin parámetros y pueden soportar cambios topológicos en el seguimiento de interfaces en movimiento (véase Figura 2.10). En procesamiento de imagen se empezaron a utilizar estas técnicas a principios de los 90 [49, 145] y actualmente se han establecido como un área de investigación en visión y gráficos por computador [226, 221, 187, 188].

Figura 2.10.: Segmentación de una forma con topología compleja. La figura muestra los conjuntos de nivel $\{\Psi = \pm iC\}$, $i \in [-5, \dots, 5]$ y $C = 0,05$, en la (a) inicialización, (b) iteración 60 y (c) estado final en la iteración 390 (imágenes extraídas de [146]).

La idea en la que se basa el método de los conjuntos de nivel es simple. Dado un interfaz γ en $\mathbb{R}^n$ de codimensión uno, que limite una región abierta γ , se pretende analizar y calcular su movimiento bajo un campo de velocidad v [189]. Esta velocidad depende de la posición, del tiempo, de la geometría del interfaz y de condiciones físicas externas. El procedimiento es definir una función suave (continua al menos según la condición de Lipschitz) $\Psi(\mathbf{x}, t)$ que representa el interfaz como el conjunto donde

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.27)$$

con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. La función de conjunto de nivel Ψ tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}, t) &< 0 && \text{para } \mathbf{x} \in \Omega \\ \Psi(\mathbf{x}, t) &> 0 && \text{para } \mathbf{x} \notin \Omega \\ \Psi(\mathbf{x}, t) &= 0 && \text{para } \mathbf{x} \in \partial\Omega = \gamma(t). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Así el interfaz se va a capturar en todo instante simplemente situando el conjunto $\gamma(t)$ para el cual Ψ desaparece. Esta afirmación, aparentemente trivial, es de gran trascendencia para su implementación numérica, principalmente porque los cambios topológicos están bien definidos.

Figura 2.11.: Formulación de los conjuntos de nivel. La figura muestra la curva γ y la superficie Ψ en el instante inicial $t = 0$ y en el instante t .

El movimiento se analiza por la convección de los valores de Ψ (niveles) con el campo de velocidades $\mathbf{v}$. Esta ecuación elemental es

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Psi = 0, \quad (2.29)$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad deseada del interfaz que es arbitraria en todo el nivel. Solamente es necesaria la componente normal de $\mathbf{v}$, $v_N = \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla \Psi}{|\nabla \Psi|}$, así la ecuación (2.29) se convierte en

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + v_N |\nabla \Psi| = 0, \quad (2.30)$$

donde $|\nabla \Psi| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Psi_{x_i}^2}$. En los casos en los que v_N es constante, la ecuación (2.30) no es lineal, de hecho es una ecuación Hamilton-Jacobi de primer orden. Si $v_N \equiv 1$, lo que representa el conjunto de nivel cero, $\gamma(t)$, de $\Psi(\mathbf{x}, t)$, en un instante posterior $t > 0$, es el conjunto de todos los

puntos a una distancia positiva t del interfaz original γ . Esto produce singularidades suaves que son típicas de las soluciones de la ecuación Hamilton-Jacobi. Afortunadamente, la teoría de las soluciones viscosas [63, 64] identifica la solución continua única de Lipschitz como la solución de las aproximaciones discretas desarrolladas en [123, 189, 190].

2.3.1. Conexión de las *snakes* con la evolución de curvas

Hay una relación entre los modelos deformables clásicos y los métodos de conjuntos de nivel [6, 66, 146]. Las ecuaciones típicas de evolución de curvas que se calculan en los conjuntos de nivel se corresponden con una versión reducida de las ecuaciones de movimiento (2.6) que caracterizan una *snake* sin masa, $\mu(s) = 0$, y sin rigidez, $\beta(s) = 0$. Este caso especial da por resultado *snakes* que, como las curvas convencionales de conjuntos de nivel, minimizan la longitud de arco en la métrica inducida por la imagen.

El caso análogo 3D es la superficie que minimiza su área en la métrica inducida por la imagen volumétrica. Esto es equivalente a una superficie deformable sin masa gobernada por el funcional de energía $\mathcal{S}$ de la ecuación (2.26) con $w_{20}(x, y) = w_{11}(x, y) = w_{02}(x, y) = 0$.

En [270] se proponen nuevos modelos de contornos activos y segmentación de imágenes basados en la minimización de variación total de Rudin-Osher-Fatemi, utilizando un marco de conjuntos de nivel donde enlaza contornos activos, segmentación Mumford-Shah y restauración de variación total.

Formulación de los modelos deformables en el dominio de la frecuencia

Los contornos activos o *snakes* fueron presentados por Kass *et al.* [126] como una herramienta inteligente para segmentación y seguimiento de objetos en secuencias de imágenes, y poco después, se presentó su extensión al caso de estructuras tridimensionales [252]. La idea de conectar nodos que minimicen un funcional de energía basado en las derivadas, y que esté dentro de un sistema lineal de segundo orden, fue desarrollada inicialmente para realizar tareas de interpolación no uniforme en la solución de problemas mal condicionados [244]. Desde entonces, los modelos deformables son muy utilizados en visión por computador [165, 57], análisis de imágenes médicas [228], animación de gráficos por ordenador [85, 81], creación de vida artificial [283] y un largo etcétera.

La implementación de estructuras unidimensionales está descrita con detalle en [141]. En este caso, el problema de regularización recae en la inversión de una matriz a bandas que genera el núcleo del procedimiento iterativo. Para las mallas activas y modelos bidimensionales, la formulación resulta más compleja que en el caso de contornos, y el núcleo no se puede extraer directamente de una aproximación matricial. Dos de las soluciones propuestas son, o alinear todos los nodos de la malla para construir una matriz de rigidez grande y con datos dispersos, o bien realizar un análisis molecular [252]. Dadas las posibles geometrías de una superficie (o estructura con más dimensiones), los detalles de la implementación numérica no son simples [245], y la aproximación más empleada de la matriz de rigidez dispersa se construye de acuerdo a un mallado [81, 180]. Por otro lado, a pesar de los intentos para aliviar las conocidas limitaciones de la formulación original como, por ejemplo, por medio de inflado interno [57], reformando la topología [160], mediante la aproximación multietapa [147], con la codificación de la información

a priori [185], usando otro tipo de algoritmos [42, 133], etcétera, no hay una formulación simple alternativa a la original planteada en el dominio del espacio. Es más, en caso de simplicidad en el problema, como con mallas regulares triangulares y rectangulares, o con propiedades físicas invariantes en el espacio, las implementaciones anteriores no conllevan mecanismos más simples.

En este Capítulo se propone una formulación que permite caracterizar el funcionamiento de un modelo deformable desde una perspectiva frecuencial, lo que lleva a dos resultados: primero, una formulación en el dominio de la frecuencia que proporciona una caracterización sencilla del núcleo del proceso para modelos unidimensionales y bidimensionales (y fácilmente extendible a dimensiones mayores), y segundo, una implementación rápida que ofrece un ahorro computacional importante. La nueva formulación ofrece un marco interesante para diseñar las propiedades de rigidez del modelo además de las basadas en los parámetros clásicos de elasticidad y rigidez. De hecho, el uso de orden de rigidez fraccionario se puede manejar fácilmente con la formulación presentada, para obtener una aproximación diferente a una rigidez gradual. Este análisis en el dominio de la frecuencia no es una idea descabellada ya que los modelos deformables paramétricos son sistemas lineales (y bajo ciertas circunstancias son invariantes en el espacio) y éstos se suelen describir en el dominio de la frecuencia. Este Capítulo revisa la formulación original de los contornos activos y presenta la formulación en el dominio de la frecuencia, inicialmente válida para contornos cerrados; la extensión para contornos abiertos se consigue utilizando el concepto de extensiones ocultas. A continuación se extiende esta formulación a estructuras bidimensionales, lo que nos ofrece un procedimiento sencillo para resolver el problema de inversión matricial y una implementación computacionalmente eficiente. Finalmente, se muestran ejemplos concretos de la ventaja práctica de esta nueva formulación y se discute sobre el ahorro computacional; también se incluyen algunas ideas sobre el diseño de modelos deformables desde una perspectiva frecuencial.

3.1. Formulación frecuencial de contornos activos

Una *snake* es un contorno variante en el tiempo $\mathbf{v} = v(s, t)$ cuya forma está gobernada por un funcional de energías,

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}(\mathbf{v}). \quad (3.1)$$

La energía interna se define como

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_0^L \alpha(s) \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s^2} \right|^2 ds. \quad (3.2)$$

donde α y β son los parámetros que controlan la elasticidad y rigidez a lo largo del contorno y s es la variable espacial. El término de energía externa, $\mathcal{P}(\mathbf{v})$, reúne el efecto de las fuerzas externas

(por ejemplo, una función de los píxeles de una imagen o el efecto de gravedad o viento en una simulación física), así como fuerzas internas no lineales (por ejemplo, para mantener constante la distancia entre nodos vecinos).

Con elementos finitos, para la minimización del funcional (3.1)¹, el dominio espacial $0 < s < L$ se subdivide en N subdominios adyacentes y $\mathbf{v}$ se divide en subelementos (véase la Sección 2.1.2). Estos subelementos se construyen mediante una función de forma $f(s)$ que conecta los nodos de la *snake* y un vector de parámetros de la función de forma $\mathbf{u}(t)$. La minimización del funcional se consigue mediante las ecuaciones de movimiento de Lagrange, lo que conduce a la ecuación diferencial de segundo orden

$$M \mathbf{u}''(t) + C \mathbf{u}'(t) + K \mathbf{u}(t) = \mathbf{q}(s, t), \quad (3.3)$$

donde K es la matriz de rigidez, M y C son, respectivamente, las matrices diagonales de masa y rozamiento, y $\mathbf{q}$ es el vector de fuerzas externas (que incluye las contribuciones externas y las internas no lineales) y se determina a partir de la posición del contorno en el instante t . La matriz de rigidez K se construye de acuerdo a la función de forma y los valores de rigidez y elasticidad. Estos elementos confieren a la *snake* sus características dinámicas y de forma.

Tras discretizar las expresiones de las derivadas, la forma discreta de (3.3) es

$$(A_1 + A_2 + K) \mathbf{u}_\xi = A_1 \mathbf{u}_{\xi-1} + A_2 \mathbf{u}_{\xi-2} + \mathbf{q}_{\xi-1}, \quad (3.4)$$

donde ξ es la variable temporal discreta (asociada al periodo de muestreo $t = \xi \Delta t$), $A_1 = 2M/(\Delta t)^2 + C/\Delta t$, $A_2 = -M/(\Delta t)^2$, y $\mathbf{q}_{\xi-1}$ es el vector de fuerzas externas.

Aunque de forma general, K es una matriz cuadrada simétrica y con las diagonales principales no nulas (matriz a bandas), en muchas aplicaciones masa, rozamiento, elasticidad y rigidez (M , C , α y β) son independientes de s y toman el mismo valor para todos los elementos de la *snake*. Esta simplificación del modelo ofrece la posibilidad de formular la minimización del funcional (3.1) en el dominio de la frecuencia [275].

3.1.1. Contornos Cerrados

La formulación en el dominio de la frecuencia presentada en esta sección es aplicable inicialmente a contornos cerrados, que pueden ser considerados como señales periódicas, siendo su periodo la longitud L del contorno. Antes de continuar, definamos las siguientes señales²:

¹El análisis teórico y la implementación numérica de este problema fueron inicialmente planteados en la década de los 60 por el matemático ruso A. N. Tikhonov [256].

²Debido a que las funciones coordenadas del contorno activo son independientes, por claridad se utilizará una coordenada (la *snake* sólo tiene una componente), la extensión a más coordenadas es directa.

Figura 3.1.: (a) *Snake* cerrada que segmenta la zona interior de los pulmones y del corazón en una imagen de TAC (tomografía axial computerizada). (b) Contorno activo final, $v(s) = (x(s), y(s))^T$, (c) y (d) componentes $x(s)$ e $y(s)$ del contorno en función del parámetro espacial s .

- $u(s)$ es la señal que contiene los valores de los nodos

$$u(s) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \delta(s - s_n) \quad (3.5)$$

donde $s_n = n \frac{L}{N}$, $\delta(s)$ es la señal delta de Dirac, N es el número de nodos equiespaciados de la *snake* y u_n es el valor del n -ésimo nodo.

- $\hat{v}(s)$ es una señal periódica de periodo L definida por

$$\hat{v}(s) = \mathbf{v}(s), \quad 0 \leq s < L \quad (3.6)$$

$$\hat{v}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(s - nL) \quad (3.7)$$

y del mismo modo, la señal $\hat{u}(s)$ es la versión periódica de $u(s)$.

- Sean las señales $\hat{V}(\Omega)$, $U(\Omega)$ y $\hat{U}(\Omega)$ las transformadas de Fourier de $\hat{v}(s)$, $u(s)$ y $\hat{u}(s)$ respectivamente (véase un ejemplo ilustrativo en la Figuras 3.2 y Figura 3.3).

Figura 3.2.: (a)-(d) Señales en el dominio del espacio: (a) coordenada del contorno activo $\mathbf{v}(s)$, (b) señal $u(s)$ conteniendo el valor de los parámetros de la función de forma, (c) y (d) señales periódicas formadas por la repetición de las señales anteriores.

Figura 3.3.: (a)-(d) Módulo de las transformadas de Fourier de las señales anteriores: (a) $|V(\Omega)|$, (b) $|U(\Omega)|$, (c) $|\hat{V}(\Omega)|$ y (d) $|\hat{U}(\Omega)|$.

Debido a que la *snake* es cerrada, se puede representar como la señal periódica resultante de la convolución de la función de forma $f(s)$ y la señal $\hat{u}(s)$, i.e.,

$$\hat{v}(s) = f(s) * \hat{u}(s). \quad (3.8)$$

Asumiendo que α y β son constantes en s , el funcional de energía (3.2) se puede escribir conforme a la nueva nomenclatura como

$$S = \frac{\alpha}{2} \int_0^L |\hat{y}_1(s)|^2 ds + \frac{\beta}{2} \int_0^L |\hat{y}_2(s)|^2 ds. \quad (3.9)$$

donde $\hat{y}_m(s) = \partial^m \hat{v}(s) / \partial s^m$. La regla de Parseval relaciona la energía de una señal periódica con la energía de su serie de Fourier,

$$\frac{1}{L} \int_0^L |\hat{y}_m(s)|^2 ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_m(k)|^2, \quad (3.10)$$

donde $d_m(k)$ es el coeficiente k -ésimo del desarrollo en serie de Fourier de $\hat{y}_m(s)$. De esta manera, el funcional de energía (3.9) se puede expresar en el dominio de la frecuencia:

$$S = \frac{L}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha |d_1(k)|^2 + \beta |d_2(k)|^2. \quad (3.11)$$

Utilizando las siguientes relaciones y propiedades de las señales:

$$d_m(k) = \frac{1}{L} \hat{Y}_m(\Omega) \Big|_{\Omega=k\frac{2\pi}{L}}, \quad (3.12)$$

$$\hat{Y}_m(\Omega) = (j\Omega)^m \hat{V}(\Omega), \quad (3.13)$$

$$\hat{V}(\Omega) = F(\Omega) \hat{U}(\Omega), \quad (3.14)$$

donde $F(\Omega)$ es la transformada de Fourier de la función de forma $f(s)$, obtenemos

$$d_m(k) = \frac{1}{L} (j\Omega)^m F(\Omega) \hat{U}(\Omega) \Big|_{\Omega=k\frac{2\pi}{L}}. \quad (3.15)$$

Entonces, la ecuación (3.11) se puede escribir como

$$S = \frac{1}{2L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_s(\Omega) |\hat{U}(\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=k\frac{2\pi}{L}}, \quad (3.16)$$

donde

$$K_s(\Omega) = (\alpha |\Omega|^2 + \beta |\Omega|^4) |F(\Omega)|^2. \quad (3.17)$$

Según la ecuación (3.5), $\hat{U}(\Omega)$ es un espectro periódico definido en el intervalo de frecuencias $[0, \frac{2\pi}{L/N}]$, por lo que la ecuación (3.16) se puede simplificar en

$$S = \frac{1}{2L} \sum_{k=0}^{N-1} K(\Omega) |\hat{U}(\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=k\frac{2\pi}{L}}, \quad (3.18)$$

donde

$$K(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_s\left(\Omega - k\frac{2\pi}{L/N}\right). \quad (3.19)$$

El funcional de energía está ahora definido enteramente en el dominio de la frecuencia (3.18). Dado que $\hat{U}(\Omega)$ y $K(\Omega)$ tienen un espectro periódico, trasladar la señal continua $u(s)$ a su secuencia equivalente en el dominio espacial discreto, $u[n]$, conlleva que $s_n = n$ y $L = N$, es decir, los nodos de la *snake* están separados una distancia igual a uno en el dominio s . Esto implica que $\Omega \rightarrow \omega$ y entonces el funcional de energía (3.18) se convierte en

$$S = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} K(\omega) |\hat{U}(\omega)|^2 \Big|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}}, \quad (3.20)$$

donde $K(\omega)$ representa el *espectro de rigidez* y contiene las restricciones de suavidad del modelo deformable de la ecuación (3.2), pero formuladas en el dominio de la frecuencia:

$$K(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha |\Omega|^2 + \beta |\Omega|^4) |F(\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=\omega-2\pi k}. \quad (3.21)$$

Nótese que en (3.20) sólo son relevantes los valores de ω que son múltiplos de $2\pi/N$. El espectro $K(\omega)$ es el núcleo en la frecuencia del modelo deformable, y su homólogo en el espacio discreto $k[n]$ se corresponde con la primera columna (o fila) de la matriz de rigidez K de la formulación original de las *snakes* [141].

De acuerdo con el cálculo variacional, el espectro del vector de parámetros, $U(\omega, t)$ ³, que minimiza el funcional de energía debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange para una *snake* dinámica en el dominio de la frecuencia

$$m \frac{\partial^2 U(\omega, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial U(\omega, t)}{\partial t} + U(\omega, t) K(\omega) = Q(\omega, t), \quad (3.22)$$

donde m y c son la masa y el amortiguamiento del sistema de segundo orden temporal, y se consideran invariantes a lo largo de la *snake*, y $Q(\omega, t)$ es la transformada de Fourier de las fuerzas externas en el instante t . La implementación de (3.22) es viable asumiendo un paso de discretización temporal, Δt . Utilizando la nomenclatura $U_\xi(\omega) = U(\omega, \xi \Delta t)$ llegamos a la ecuación explícita en tiempo discreto del movimiento del contorno activo en la frecuencia

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} + K(\omega) \right) U_\xi(\omega) = \left(2 \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) U_{\xi-1}(\omega) + \left(-\frac{m}{\Delta t^2} \right) U_{\xi-2}(\omega) + Q_{\xi-1}. \quad (3.23)$$

Definiendo $H(\omega) = \eta / (\eta + K(\omega))$, $\eta = m/\Delta t^2 + c/\Delta t$, $a_1 = 1 + 1/(1 + c/m\Delta t)$ y $a_2 = -1/(1 + c/m\Delta t)$ la ecuación (3.23) puede escribirse de forma más compacta:

$$U_\xi(\omega) = H(\omega) (a_1 U_{\xi-1}(\omega) + a_2 U_{\xi-2}(\omega) + \eta^{-1} Q_{\xi-1}), \quad (3.24)$$

que puede trasladarse al dominio espacial mediante la transformada inversa de Fourier:

$$u_\xi[n] = h[n] \otimes (a_1 u_{\xi-1}[n] + a_2 u_{\xi-2}[n] + \eta^{-1} q_{\xi-1}[n]), \quad (3.25)$$

donde $\otimes$ denota la operación de convolución circular en el dominio espacial entre secuencias de la misma longitud.

3.1.2. Orden real de la derivada

Una observación interesante de los resultados anteriores es que el orden del parámetro de rigidez en el funcional de energía se convierte en el exponente en el espectro de rigidez (3.21). Entonces, la solución para el siguiente funcional de energía con orden fraccionario del parámetro de rigidez se puede realizar fácilmente:

$$S(\mathbf{v}) = \frac{\gamma}{2} \int_0^L \left| \frac{\partial^\sigma \mathbf{v}}{\partial s^\sigma} \right|^2 ds, \quad (3.26)$$

³La variable t denota la variación temporal de la transformada de los datos espaciales.

donde σ es un número real, $1 \leq \sigma \leq 2$. La caracterización de este funcional se lleva a cabo con el siguiente espectro de rigidez

$$K(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma |\Omega|^{2\sigma} |F(\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=\omega-2\pi k}. \quad (3.27)$$

Este resultado no es sorprendente ya que el dominio frecuencial es una alternativa común y sencilla para trabajar con derivadas fraccionarias. Por ejemplo, en el caso de la implementación de diferencias finitas, el nuevo núcleo de rigidez se construye de la siguiente forma

$$K(\omega) = \gamma |1 - e^{-j\omega}|^{2\sigma}. \quad (3.28)$$

La posibilidad de usar un orden fraccionario en la definición de energía interna de la *snake* plantea la duda de si la combinación de elasticidad y rigidez puede conseguirse con un orden fraccionario en lugar de por la suma de los correspondientes espectros de rigidez de orden entero. Debido a que ambas aproximaciones dan lugar a diferentes espectros, parece claro que darán lugar a distintos mecanismos (por otro lado se podría argumentar que el término polinómico en la ecuación (3.27) se aproximara por los dos primeros términos del desarrollo en serie de Taylor y entonces sería parecido al espectro de rigidez combinado (3.17)). La conclusión extraída de experimentos numéricos es que el uso de un orden real σ representa de manera más precisa la variación gradual de elasticidad y rigidez que la aproximación con α y β . En otras palabras, para $\sigma = 1,5$ la *snake* se comporta de una forma semielástica y semirígida, mientras que con $\alpha = \beta = 0,5$ la *snake* es sobre todo elástica.

3.1.3. Variación espacial de las propiedades de rigidez

Se podría argumentar que la formulación en la frecuencia está muy limitada debido a la asunción de la invarianza de las propiedades de rigidez en el dominio espacial. Sin embargo, en el caso de cambios armónicos en la elasticidad y la rigidez del contorno, la formulación anterior sigue siendo válida, cubriendo así un mayor rango de posibilidades. Asumamos que

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha_o \nu(s), \\ \beta(s) &= \beta_o \nu(s), \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde $\nu(s)$ representa la variación normalizada de las propiedades de rigidez y es una función continua que satisface que $\nu(s) > 0$, y su valor medio en el intervalo $[0, L]$ es igual a 1.

El funcional de energía (3.2) en esta situación general se convierte en

$$S = \frac{\alpha_o}{2} \int_0^L \nu(s) \left| \frac{\partial \mathbf{v}(s)}{\partial s} \right|^2 ds + \frac{\beta_o}{2} \int_0^L \nu(s) \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}(s)}{\partial s^2} \right|^2 ds. \quad (3.30)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable

$$s' = \overleftarrow{w}(s) = \int_0^s v(p) dp, \quad (3.31)$$

las integrales en la ecuación (3.30) se transforman en

$$S = \frac{\alpha_o}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial \mathbf{v}(\overrightarrow{w}(s'))}{\partial \overrightarrow{w}(s')} \right|^2 ds' + \frac{\beta_o}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}(\overrightarrow{w}(s'))}{\partial \overrightarrow{w}(s')^2} \right|^2 ds', \quad (3.32)$$

donde $\overrightarrow{w}(s)$ es la función inversa de $\overleftarrow{w}(s)$, i.e., $\overrightarrow{w}(\overleftarrow{w}(s)) = s$. Las funciones $\overrightarrow{w}$ y $\overleftarrow{w}$ constituyen el par de deformación espacial, y ambas son monótonamente crecientes en el intervalo $[0, L]$ y satisfacen que $\overleftarrow{w}(0) = \overrightarrow{w}(0) = 0$ y $\overleftarrow{w}(L) = \overrightarrow{w}(L) = L$.

El funcional (3.32) corresponde a una *snake* cuyas propiedades de rigidez son invariantes en el dominio s , y así ya es aplicable la formulación en la frecuencia. La *snake* asociada $\mathbf{v}_w(s)$ es una versión de la original $\mathbf{v}(s)$ deformada en el dominio s . El problema de como este remuestreo espacial afecta a los nodos de la nueva *snake*, como están relacionados los nodos de ambas *snake*, y cuantos nodos tiene la nueva *snake*, está fuera del alcance de esta Tesis. De todos modos, es importante mencionar que estas ideas tiene puntos en común a la técnica de procesamiento de señal propuesta en [23], en la que una técnica tiempo-frecuencia basada en tres operaciones secuenciales (una deformación temporal de la señal, un procesamiento con una técnica clásica, y deshacer esa deformación en el resultado) se analiza y propone como una solución general para un amplio rango de problemas en el análisis tiempo-frecuencia.

3.1.4. Contornos abiertos

Si la *snake* es abierta, la minimización del funcional de energía no se puede llevar a cabo usando una señal periódica como portadora del contorno, y los resultados de las secciones anteriores no son aplicables aquí a toda la *snake*. La formulación original ofrece para este caso núcleos que cambian de manera considerable conforme llegan a los extremos, y el procesamiento resultante es, aunque lineal, variante en el espacio.

A pesar de esta diferencia, es posible realizar un filtrado lineal invariante en el espacio igual al de la formulación original. La idea se basa en usar un núcleo invariante en el espacio, que resulta de la formulación para un contorno cerrado, y realizar el filtrado lineal sobre una *snake* extendida. La *snake* extendida se construye ensamblando en los extremos del contorno una extensión construida con los parámetros de la *snake*. Este procedimiento está inspirado en la técnica *Overlap & Save* para realizar filtrado lineal a partir de convoluciones circulares [186]. La Figura 3.4 compara el efecto de las condiciones de borde en la solución de la formulación original con el núcleo invariante en el espacio propuesto en esta Tesis, para un caso particular de parámetros de rigidez.

Figura 3.4.: Comparación de los núcleos de una *snake* abierta en uno de los extremos para las dos aproximaciones: con la línea de puntos se representa el núcleo de la formulación original, y en línea continua el basado en la aproximación frecuencial; los valores negativos del eje corresponden a los nodos de la *snake* oculta. Este ejemplo corresponde a la formulación con diferencias finitas y los parámetros de elasticidad $\alpha = 0$ y rigidez $\beta = 1$.

Las ecuaciones discretas del movimiento del contorno abierto se definen entonces como

$$\mathbf{z}_\xi = (a_1 \mathbf{u}_{\xi-1} + a_2 \mathbf{u}_{\xi-2} + \eta^{-1} \mathbf{g}_{\xi-1}), \quad (3.33)$$

$$\mathbf{u}_\xi = (\mathbf{h}^{+0} \otimes \mathbf{z}_\xi^{+\mathbf{d}_\xi})^-, \quad (3.34)$$

donde $\mathbf{u}$ es el vector de nodos y los operadores $+$ y $-$ funcionan de la siguiente manera:

- El vector $\mathbf{h}^{+0}$ es el núcleo de la convolución: es el resultado de ampliar $\mathbf{h}$ con N ceros situados en el centro del vector, esto es,

$$\mathbf{h}^{+0} = [h_0 \dots h_{N/2-1} \ 0^{(1)} \dots 0^{(N)} \ h_{N/2} \dots h_{N-1}]^T. \quad (3.35)$$

- El vector $\mathbf{v}_\xi^{+\mathbf{d}_\xi}$ es un vector extendido de $2N$ elementos, que se construye ensamblando los vectores de N elementos $\mathbf{v}_\xi$ y los N elementos del vector $\mathbf{d}_\xi$,

$$\mathbf{v}_\xi^{+\mathbf{d}_\xi} = [\mathbf{v}_\xi, \mathbf{d}_\xi]. \quad (3.36)$$

- El vector $\mathbf{p}^-$ contiene los primeros N elementos del vector $\mathbf{p}$ de $2N$ elementos.

En cada iteración se construye el vector $\mathbf{d}_\xi$ de las extensiones ocultas con el contenido del vector $\mathbf{v}_\xi$ de acuerdo con la siguiente regla:

$$d_\xi[n] = \begin{cases} v_\xi[N-1] + \lambda n' (v_\xi[N-1] - v_\xi[N-2]), & 0 \leq n < N/2 \\ v_\xi[0] + \lambda n'' (v_\xi[1] - v_\xi[0]), & N/2 \leq n < N \end{cases} \quad (3.37)$$

donde $n = 0, \dots, N - 1$, $n' = n + 1$, $n'' = n - N$ y $\lambda = \beta/(\alpha + \beta)$. La regla de extensión (3.37), por cada lado, consta de dos partes: la primera es el relleno con el valor del elemento del borde $v_{\xi,1}$ ($v_{\xi,N}$ en el otro extremo), lo que hace cero en el extremo la primera diferencia (aproximación de la primera derivada), y el segundo término, ponderado por λ , que hace cero la segunda diferencia en el extremo. En la Figura 3.5 se muestra un contorno abierto ajustándose en una imagen y sus componentes, en la Figura 3.6 se representan las extensiones para distintos valores de los parámetros de rigidez y elasticidad del contorno.

La existencia y formulación de la regla se demuestra en el Apéndice B y valida la implementación de *snakes* abiertas con filtrado lineal invariante en el espacio. De todos modos, para un caso general, esta regla depende de la matriz de rigidez y de los parámetros del sistema de segundo orden, y su caracterización con una expresión simple no es tarea fácil.

Las ecuaciones (3.33)-(3.37) representan la implementación de un contorno activo abierto mediante filtrado lineal invariante en el espacio. Éste se puede realizar con la transformada discreta de Fourier (DFT) de la siguiente manera:

$$\mathbf{z}_\xi = a_1 \mathbf{u}_{\xi-1} + a_2 \mathbf{u}_{\xi-2} + \eta^{-1} \mathbf{q}_{\xi-1}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{d}_\xi = \Gamma\{\mathbf{v}_\xi\}, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{w}_\xi = \text{IDFT}\{\text{DFT}\{[\mathbf{v}_\xi \ \mathbf{d}_\xi]\} \cdot \mathbf{H}\}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{u}_\xi = \mathbf{w}_\xi^-, \quad (3.41)$$

donde $\mathbf{H}$ representa la DFT del núcleo extendido $\mathbf{h}^{+0}$, y el operador $\Gamma\{\cdot\}$ implementa la regla (3.37). Debido a la convolución circular en (3.40), los últimos $N/2$ elementos del vector $\mathbf{d}_\xi$ están más juntos del extremo izquierdo del vector $\mathbf{v}_\xi$ que del derecho⁴. El vector $\mathbf{d}_\xi$ se considera como la *snake* 'oculta'.

El cálculo de una *snake* abierta en la formulación original necesita, desde un punto de vista teórico, N^2 operaciones (en la práctica, el núcleo de la matriz se considera a bandas y sólo se utilizan un pequeño número M de valores. Si N es una potencia de dos, el cálculo de (3.39)-(3.40) logra su implementación más eficiente por medio del algoritmo de la FFT, $N(4 \log_2 N + 2)$ operaciones, frente a las NM de la formulación original. Aun así, para el caso unidimensional, la implementación en el dominio espacial (3.33)-(3.37) es preferible a la implementación en el dominio de la frecuencia (3.38)-(3.41).

⁴La operación de convolución circular está definida para secuencias periódicas del mismo periodo. Su traslación al dominio de la frecuencia resulta en el producto de las DFT's de las secuencias.

(a)

(b)

(c)

(d)

Figura 3.5.: (a) *Snake* abierta realizando el seguimiento de un objeto en movimiento. (b) Contorno activo final, $v(s) = (x(s), y(s))^T$, (c) y (d) componentes $x(s)$ e $y(s)$ del contorno en función del parámetro espacial s .

Figura 3.6.: *Snake* extendida con diferentes valores de los parámetros de elasticidad α y rigidez β . En la figura se aprecia la *snake* visible $\mathbf{v}$ y las extensiones ocultas $\mathbf{d}$.

3.2. Formulación de mallas activas

Una malla activa dinámica puede definirse como una estructura tridimensional variante en el tiempo, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s_1, s_2, t) = (x(s_1, s_2, t), y(s_1, s_2, t), z(s_1, s_2, t))$, cuya forma está gobernada por un funcional de energía. El dominio paramétrico es bidimensional $\bar{s} = \{s_1, s_2\}$ y está definido en el rectángulo $0 < s_1 < L_1$ y $0 < s_2 < L_2$.

El funcional de energía interna se define como

$$S(\mathbf{v}) = S_\alpha(\mathbf{v}) + S_\beta(\mathbf{v}), \quad (3.42)$$

donde

$$S_\alpha(\mathbf{v}) = \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \alpha_1 \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_1} \right|^2 + \alpha_2 \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_2} \right|^2 ds_1 ds_2, \quad (3.43)$$

$$S_\beta(\mathbf{v}) = \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \beta_1 \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s_1^2} \right|^2 + \beta_2 \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s_2^2} \right|^2 + \beta_{12} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s_1 \partial s_2} \right|^2 ds_1 ds_2. \quad (3.44)$$

La minimización de este funcional se realiza comúnmente transformando el problema multidimensional en uno unidimensional [81]: primero volviendo a poner todos los nodos de la estructura en una sola línea: sobre esta *pseudosnake*, el siguiente paso es identificar los nodos que son vecinos y su correspondencia según el funcional de energía; el resultado es una matriz de rigidez mayor tamaño y dispersa, que ha de invertirse con procedimientos especiales; y, finalmente, su

inversa puede considerarse dispersa en la práctica (aunque teóricamente no lo es) y los valores relevantes han de detectarse y almacenarse.

Esta aproximación tiene varios inconvenientes: en primer lugar están la carga computacional, los requerimientos de memoria y las posibles inestabilidades en el caso de que valores relevantes sean desechados. En segundo lugar cabe destacar que si cambia algo en la estructura (se añaden o se eliminan nodos) es necesario reconstruir la matriz de rigidez entera y volver a invertir. Cuando tratamos con estructuras indexadas de forma irregular (muy frecuentes en visión por computador) estos inconvenientes no son tan importantes como la eficiencia, pero en el caso de utilizar estructuras regulares como la cartesiana o mallas triangulares, esta opción es compleja y muy costosa en cuanto a recursos (la estructura multidimensional siempre se traslada a una unidimensional).

Siguiendo las mismas ideas presentadas en el análisis de contornos activos, se puede deducir que la minimización del funcional (3.42) se consigue con el siguiente espectro de rigidez definido en el dominio frecuencial

$$K(\omega_1, \omega_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_1 |\Omega_1|^2 + \alpha_2 |\Omega_2|^2 + \beta_1 |\Omega_1|^4 + \beta_2 |\Omega_2|^4 + \beta_{12} |\Omega_1|^2 |\Omega_2|^2 \right) |F(\Omega_1, \Omega_2)|^2 |_{\Omega_i = \omega_i - k_i 2\pi} \quad (3.45)$$

donde Ω_i y ω_i son las frecuencias asociadas a las variables en el dominio del espacio s_i , y n_i , y $F(\Omega_1, \Omega_2)$ es la transformada de Fourier de la función de forma bidimensional $f(s_1, s_2)$. Por consiguiente, la ecuación que determina el comportamiento de la malla activa es

$$U_\xi(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega}) \left(a_1 U_{\xi-1}(\bar{\omega}) + a_2 U_{\xi-2}(\bar{\omega}) + \eta^{-1} Q_{\xi-1}(\bar{\omega}) \right), \quad (3.46)$$

donde $\bar{\omega} = \{\omega_1, \omega_2\}$ y $H(\bar{\omega}) = \eta / (\eta + K(\bar{\omega}))$.

El movimiento de la malla puede también describirse en el dominio del espacio por

$$\mathbf{u}_\xi = \mathbf{h} \otimes \left(a_1 \mathbf{u}_{\xi-1} + a_2 \mathbf{u}_{\xi-2} + \eta^{-1} \mathbf{q}_{\xi-1} \right) \quad (3.47)$$

donde $\mathbf{u}_\xi$ es una matriz con los parámetros de los nodos de la malla de $N_1 \times N_2$ nodos, y $\mathbf{h}$ es el núcleo de convolución circular 2D, resultado de la transformada discreta inversa de Fourier bidimensional de $H(\bar{\omega})$.

La implementación de (3.47) puede hacerse en el dominio de la frecuencia de manera idéntica a la vista para el caso unidimensional. El ahorro computacional en el caso 2D es considerable. De nuevo, debido a la convolución circular de (3.47), los nodos de los extremos están pegados a aquellos del extremo opuesto. Este hecho provoca que la forma resultante sea una malla cerrada o toroide.

3.2.1. Extensiones de mallas

Para resolver la limitación anterior, la solución propuesta basada en una *snake* oculta puede extenderse al caso bidimensional. Sea $\mathbf{z}_\xi$ la malla de tamaño $N_1 \times N_2$ y $\mathbf{d}_\xi$ las extensiones de la malla⁵. La malla extendida $\mathbf{z} \# \mathbf{d}$ se define como

$$\mathbf{z} \# \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^1 & \mathbf{d}^t & \mathbf{d}^2 \\ \mathbf{d}^l & \mathbf{z} & \mathbf{d}^r \\ \mathbf{d}^4 & \mathbf{d}^b & \mathbf{d}^3 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

donde los superíndices t, b, l y r indican respectivamente *arriba, abajo, izquierda y derecha*, y los cuatro superíndices numéricos corresponden con las cuatro esquinas de la malla extendida.

Dependiendo de la existencia y de los contenidos de cada extensión, la malla global evolucionará de distinta manera:

1. Si $\mathbf{d}$ es una malla vacía y por tanto no hay extensiones, la forma resultante es una malla cerrada o toroide.
2. Si no existen las extensiones de arriba y abajo o de la derecha e izquierda, la forma resultante es cerrada en una dimensión y abierta en la otra, cilíndrica.
3. Si la malla visible está totalmente rodeada por extensiones ocultas, la forma resultante es totalmente abierta.

En caso de que existan extensiones, la construcción de las mismas determinará el comportamiento del modelo en los extremos. En la aproximación 2D se utiliza un razonamiento similar a (3.37). Centrándonos en las extensiones $\mathbf{d}^t, \mathbf{d}^l$ y $\mathbf{d}^1$, éstas se construyen de la siguiente manera:

$$\mathbf{d}^t = [1 \ \overset{N_2}{\dots} \ 1]^T \mathbf{z}_{t,*} + \lambda_y [1 \ \dots \ N_2]^T (\mathbf{z}_{t,*} - \mathbf{z}_{t-1,*}), \quad (3.49)$$

$$\mathbf{d}^l = \mathbf{z}_{*,l} [1 \ \overset{N_1}{\dots} \ 1] + \lambda_x (\mathbf{z}_{*,l} - \mathbf{z}_{*,l-1}) [N_1 \ \dots \ 1], \quad (3.50)$$

y

$$\mathbf{d}^1 = \mathbf{d}_{*,l}^t [1 \ \overset{N_1}{\dots} \ 1] + [1 \ \overset{N_2}{\dots} \ 1]^T \mathbf{d}_{t,*}^r - \mathbf{z}_{tl}, \quad (3.51)$$

donde $\lambda_x = \beta_x / (\alpha_x + \beta_x)$ (λ_y se calcula del mismo modo), los subíndices en $\mathbf{z}_{t,*}$ y $\mathbf{z}_{*,l}$ denotan, respectivamente, la fila más hacia arriba y la columna más a la izquierda de una malla genérica $\mathbf{z}$. Note que la regla (3.49)-(3.50) es la extensión a 2D de (3.37), y (3.51) es la interpolación bilineal de las extensiones de las mallas adyacentes.

⁵Por claridad, a partir de ahora suprimimos en la notación el subíndice ξ de la iteración.

3.2.2. Coste computacional y diseño eficiente

Al principio de este Capítulo se presenta una nueva formulación de modelos deformables que posee dos características principales: un diseño del modelo deformable y una implementación de bajo coste en el dominio de la frecuencia. La primera ofrece la posibilidad de diseñar y entender el modelo activo desde otro punto de vista, y la segunda ofrece un importante ahorro computacional. Empecemos primero discutiendo el segundo punto.

El ahorro computacional para el caso unidimensional se considero brevemente al final de la Sección 3.1. La conclusión en este caso es que la formulación original presenta una ventaja moderada. De todos modos, cuando tratamos con mallas activas, la situación se vuelve favorable para la implementación en el dominio de la frecuencia. En una estructura 2D, el número de elementos relevantes en el núcleo espacial $\mathbf{h}$ es $M^2(M < N)$, lo que produce una carga computacional del orden de N^2M^2 (considerando una malla $N \times N$). En la implementación en el dominio frecuencial, las tareas a realizar son: una FFT de $(N + M) \times (N + M)$ muestras de valor real, un producto punto a punto con el núcleo frecuencial $\mathbf{H}$ de tamaño $(N + M) \times (N + M)$ y con valores reales, una IFFT, y el cálculo de las extensiones de la malla. La complejidad en cuanto a operaciones reales de esta aproximación se detalla en el lado superior de la Tabla 3.1. Por ejemplo, en el caso de $M = 11$ y $N = 16$, la implementación en el dominio frecuencial consigue una ventaja moderada frente a la implementación en el dominio del espacio.

Si el tamaño de la malla es mayor que el tamaño efectivo del núcleo ($N \gg M$), la carga computacional se reduce de forma significativa, tal y como se analiza en la parte inferior de la Tabla 3.1. En el caso de $N = 64, 128$ y $M = 7$, por ejemplo, la carga en la aproximación en el dominio de la frecuencia sería de menos de la mitad de operaciones que la del dominio del espacio. Otra opción para mallas grandes es realizar una implementación combinada espacio-frecuencia, que se basa en dividir la malla entera en submallas y aplicar el procesado en el dominio de la frecuencia en cada una (tal y como se realiza en el método de filtrado *Overlap & Add* [186]). Además, la aproximación propuesta también se beneficiaría de la implementación hardware eficiente del algoritmo de la FFT [15, 154].

El segundo tema a tratar está relacionado con la idea de diseñar un modelo activo en el dominio de la frecuencia y la posibilidad de utilizar un orden fraccionario para el valor del parámetro de rigidez. Esto no afecta solamente a la interpolación final sino al modo en el que el contorno evoluciona a ese estado de equilibrio (aspecto de interés, por ejemplo, en la animación por computador de estructuras físicas). El espectro de rigidez desvela cuanto se penaliza cada frecuencia del contorno. En todos los casos analizados, las frecuencias cercanas a cero se preservan y el resto se atenúan a partir de un cierto valor. Siguiendo este razonamiento sería posible, por ejemplo, preservar otras frecuencias espaciales estableciendo un nulo (o un valor muy bajo)

$N \geq M$	
Tarea	num. ops. reales
2D-FFT $\{2N \times 2N\}$	$1,5 (2N)^2 \log_2(2N)$
producto con H	$2 (2N)^2$
2D-IFFT $\{2N \times 2N\}$	$1,5 (2N)^2 \log_2(2N)$
extensiones ocultas	$3N^2$
Total	$N^2(12 \log_2 N + 23)$
$N \gg M$	
Tarea	num. ops. reales
2D-FFT $\{N \times N\}$	$1,5 (N)^2 \log_2(N)$
producto con H	$2 (N)^2$
2D-IFFT $\{N \times N\}$	$1,5 (N)^2 \log_2(N)$
extensiones ocultas	$4N M$
Total	$\approx N^2(3 \log_2 N + 2)$

Tabla 3.1.: Carga computacional de la malla activa de tamaño $N \times N$ implementada en la frecuencia.

en una cierta frecuencia central. Además, desde un punto de vista frecuencial, también es posible entender el movimiento de la *snake* y su dinámica.

Este Capítulo no tiene la intención de presentar la formulación en el dominio de la frecuencia como una alternativa mejor a la formulación original. Está claro que la formulación original es aplicable a cualquier tipo de estructura, tanto regular como irregular, y también con distribuciones de parámetros de rigidez variantes en el espacio. Esta última situación no puede manejarse por la formulación en el dominio de la frecuencia en la práctica (aunque se podría realizar mediante una técnica basada en el remuestreo). De todos modos, en el caso de estructuras cuasiregulares (como parches de estructuras regulares conectados, fusión de *snakes*, o división), la aproximación basada en las extensiones también se puede aplicar. Actualmente se está siguiendo esta línea para la simulación de ropa virtual elástica y flexible, considerando la ropa compuesta por parches con estructura regular cosidos a bordes irregulares. El ahorro computacional y la posibilidad de un rango amplio de ordenes de rigidez soportan esta línea de investigación.

3.3. Resultados de las simulaciones

Esta sección contiene algunos ejemplos de simulaciones que validan numéricamente las ideas presentadas en este Capítulo.

3.3.1. Espectro de rigidez

La Figura 3.7 muestra la comparativa entre los espectros de rigidez obtenidos con distintas variantes de *snakes*, así como con distintos parámetros de rigidez y funciones de forma. Las Figuras 3.7(b) y 3.7(c) muestran los espectros de rigidez, elástico y rígido, para las funciones de forma *B-spline*, Hermite y diferencias finitas respectivamente. El análisis de cada figura por separado revela que, sea cual sea la función de forma escogida, para un cierto orden de rigidez, cada espectro tiene el mismo ancho de banda eliminada, centrado en $\omega = 0$. La comparación entre ambas figuras muestra que el ancho de banda eliminada es mayor en el espectro de rigidez que en el de elasticidad. Este hecho se refleja en la Figura 3.7(d) para el caso en que la función de forma sea el polinomio de Hermite.

La banda eliminada condensa importantes propiedades del espectro de rigidez: el espectro pseudoinverso de $K(\omega)$, es decir $H(\omega)$, presenta una banda de paso en esa región, así, los componentes espectrales de la *snake* dentro de esa banda se preservarán. La solución media lineal de elasticidad y rigidez (mostrada en la Figura 3.7(d) en línea discontinua) no corresponde con el punto medio en términos de ancho de banda, y está más cerca del espectro elástico que del rígido. Por otro lado, un espectro fraccionario intermedio ($\sigma = 1,5$), mostrado en línea punteada, presenta una banda de paso en la mitad de ambos extremos. Por lo tanto, desde este punto de vista, la rigidez fraccionaria proporciona una mejor implementación de la combinación de elasticidad-rigidez que la combinación original de α y β .

3.3.2. Contornos abiertos

Para comprobar la validez de los contornos extendidos y la regla de extensión, se han implementado dos *snakes* abiertas mediante diferencias finitas, una usando la formulación original y la otra utilizando la implementación en el dominio de la frecuencia. Los detalles del experimento son: el contorno tiene sólo una componente, la longitud de la *snake* es $N = 64$ nodos, la *snake* está atraída a valores fijos no uniformemente espaciados (calculados de forma aleatoria a partir de una distribución uniforme $U(-1,1)$), y el valor de los nodos es inicialmente cero. Los resultados del experimento se muestran en la Figura 3.8. Las tres gráficas de la Figura 3.4 contienen tres núcleos de bordes espaciales, calculados con la formulación original (en línea discontinua), y el núcleo invariante en el espacio $h[n]$ que resulta de la formulación en el dominio de la frecuencia (en línea continua). Los valores negativos del eje horizontal corresponden a posiciones de nodos de la *snake* oculta. Los parámetros de rigidez son $\alpha = 0$, $\beta = 1$. La Figura 3.8(a) muestra la situación de la *snake* después de 500 iteraciones: los círculos representan los valores fijos (calculados aleatoriamente), los puntos son los nodos de la *snake* visible, y las líneas de los extremos son parte de las extensiones ocultas. Note que la *snake* visible es abierta. Finalmente, la Figura 3.8(b) muestra el

Figura 3.7.: Comparación de las implementaciones en la frecuencia con distintas funciones de forma: B-spline (curva 1), polinomios de Hermite (curva 2) y diferencias finitas (curva 3). La gráfica (a) muestra las funciones de forma en el dominio del espacio, la gráfica (b) muestra el espectro de rigidez elástico (en escala logarítmica) para $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, y la gráfica (c) el espectro de rigidez rígido (en escala logarítmica) para $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. La gráfica (d) muestra el espectro de rigidez para diferentes combinaciones de los parámetros de rigidez utilizando las funciones de forma de Hermite: las líneas continuas corresponden al caso elástico y rígido, la línea discontinua al caso $\alpha = 0,5$ y $\beta = 0,5$, y la línea de puntos al orden de rigidez fraccionario $\sigma = 1,5$.

Figura 3.8.: (a) *Snake* abierta (en línea de puntos) y extensiones (en línea continua), (b) evolución del error cuadrático medio entre la implementación original de la *snake* y la implementación en el dominio frecuencial.

error cuadrático entre las *snakes* de ambas formulaciones para tres situaciones de rigidez diferentes: totalmente elástico ($\alpha = 1, \beta = 0$), totalmente rígido ($\alpha = 0, \beta = 1$), y una situación intermedia ($\alpha = 0,5, \beta = 0,5$). La evolución muestra que ambos métodos convergen hacia el mismo estado final en todos los casos. En la evolución hacia el estado final, ambas *snakes* se comportan cualitativamente del mismo modo, esto valida el método para construir las extensiones del Apéndice B.

3.3.3. Cuestiones sobre interpolación

La posibilidad de utilizar un valor fraccionario de rigidez en lugar de una combinación lineal de soluciones basadas en α y β es un tema interesante de analizar en segmentación de imagen. El escenario elegido es la segmentación de un ventrículo del corazón en una imagen de ultrasonidos, ya que las imágenes de ultrasonidos normalmente no tienen contornos bien definidos. La Figura 3.9(a) contiene los resultados de los experimentos: la imagen de arriba a la izquierda muestra la posición inicial del contorno y el resto de imágenes muestran el contorno final resultante con diferentes ordenes de rigidez (mostrados en la esquina inferior derecha de cada imagen). Para cada caso, las características de la simulación son las mismas: el contorno tiene dos componentes $\mathbf{v}(s) = (x(s), y(s))^T$, cada componente tiene 100 nodos, $\eta = 500$ y las fuerzas externas de la imagen se basan en el Laplaciano de la imagen (previamente suavizada con un filtro gaussiano). Está claro que el contorno resultante en cada caso se ajusta adecuadamente a los bordes del ventrículo,

y, aunque los resultados son similares, hay un aspecto a tener en cuenta respecto a la suavidad de cada contorno: el grado de suavidad aumenta al aumentar el orden de rigidez σ , el cual está relacionado con el orden de la derivada a minimizar en la curva.

(a)

(b)

Figura 3.9.: Efecto del orden del parámetro de rigidez en la solución alcanzada por un contorno activo: (a) segmentación de una imagen de ultrasonidos y (b) interpolación de datos no uniformemente distribuidos.

Un ejemplo sintético que clarifica este último aspecto se incluye en la Figura 3.9(b). El ejemplo corresponde al efecto de utilizar diferentes ordenes de rigidez en un contorno 1D sujeto a ciertas posiciones fijas: los contornos resultantes para $\sigma = 1$ y $\sigma = 2$ en línea continua, en línea de puntos para $\sigma = 1,5$ y en línea discontinua para $\alpha = \beta = 0,5$. El contorno elástico ($\sigma = 1$) pro-

duce una interpolación lineal entre los nodos fijados, y el contorno rígido ($\sigma = 2$) produce una suave curva que pasa a través de esos nodos. Es interesante observar que la media lineal entre elasticidad y rigidez (línea discontinua) está más cerca del comportamiento elástico, mientras que el orden de rigidez intermedio $\sigma = 1,5$ (línea de puntos) produce una interpolación que puede considerarse intermedia. Estos resultados coinciden con la discusión sobre el ancho de la banda de paso observado en la Figura 3.7(d).

3.3.4. Modelos bidimensionales

Para validar la formulación frecuencial en una estructura bidimensional, se han simulado varios experimentos con mallas activas definidas en un espacio 3D. Cada malla 3D está compuesta por tres modelos deformables bidimensionales (o una malla 2D con tres valores en cada nodo). Las fuerzas externas de cada modelo se calculan con las tres componentes según una fuerza no lineal que hace a los nodos separarse de sus vecinos una determinada distancia [252]. Los resultados de estos experimentos en un cierto instante de la simulación se muestran en la Figura 3.10: la malla activa de la izquierda, Figura 3.10(a), es el resultado de no usar ninguna extensión, la malla se cierra en ella misma en las dos dimensiones del parámetro $\bar{s} = \{s_1, s_2\}$ dando lugar a un toroide (superficie cerrada). La malla situada en el centro, Figura 3.10(b), está cerrada en dos extremos opuestos y está abierta en los otros dos, dando lugar a una superficie cilíndrica deformable. Y, finalmente, la malla de la derecha, Figura 3.10(c), es una malla totalmente abierta. Por claridad en la representación, las extensiones de las mallas no se muestran en las gráficas. Los parámetros de rigidez son $\beta_1 = \beta_2 = 1$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_{12} = 0$, y la masa total $\eta = 10$.

Figura 3.10.: Implementación de mallas en el dominio de la frecuencia. (a) Malla sin extensiones con forma toroidal, (b) malla con extensiones ocultas en una dirección, que origina una forma cilíndrica, y (c) malla visible abierta totalmente rodeada de extensiones ocultas.

La Figura 3.11 muestra otras construcciones de mallas activas deformables donde se han añadido más restricciones y fuerzas externas.

Figura 3.11.: Construcciones de mallas activas implementadas en el dominio frecuencial y con restricciones adicionales de forma y de fuerzas externas.

Estudio de la convergencia

Los contornos activos o *snakes* son ampliamente utilizados en procesamiento de imagen y visión artificial: segmentación de imágenes, seguimiento de objetos en secuencias de vídeo, interpolación de imágenes ruidosas, etc. El principio básico de su funcionamiento es la capacidad de delimitar objetos mediante el trazado de una curva paramétrica suave condicionada a restricciones externas e internas, de una forma adaptativa mediante un algoritmo iterativo [132]. Desde su formulación inicial en 1988 [126], se han propuesto distintas variantes de los modelos deformables [50, 51, 52, 66, 195], pero las características paramétricas de los primeros ofrecen ventajas importantes en muchos problemas, especialmente en interpolación y segmentación de datos difusos y dispersos [266, 273].

La formulación clásica de las *snakes* [126, 141] viene dada en el dominio del espacio y se basa en un sistema de segundo orden. La rigidez y la elasticidad son los parámetros estáticos, y la masa y el rozamiento los parámetros dinámicos que se utilizan para su caracterización. En [269, 275] la formulación original se traslada al dominio de la frecuencia con lo que se consigue una formulación y diseño más sencillo, además de un importante ahorro computacional en comparación con la formulación original.

Como cualquier sistema adaptativo, las iteraciones requeridas por el contorno para delinear el objeto de interés son de gran importancia [90, 249, 273, 274], especialmente cuando se combina con algoritmos que controlan características dependientes de la *snake* para prevenir un posible comportamiento inestable [266]. La velocidad de convergencia depende especialmente de los parámetros dinámicos del sistema de segundo orden y de la distancia entre los nodos atraídos [264, 268]. Este Capítulo utiliza la formulación en la frecuencia para estudiar la convergencia de la *snake* en el ajuste iterativo de un contorno hasta que delimita el objeto de interés. El escenario

donde se va a desarrollar el análisis es el problema de segmentación de imagen, entendido como el proceso en el cual unos nodos son atraídos primero, y debido a la acción de las fuerzas externas y a la minimización del funcional de energía, el contorno evoluciona hacia un estado de equilibrio. Este Capítulo también muestra el procedimiento para la elección de los valores óptimos de los parámetros dinámicos [262, 263] durante el diseño del contorno activo, para mejorar su velocidad de convergencia en un problema de segmentación de imagen.

La organización del Capítulo es la siguiente: inicialmente se presentan los contornos activos y se define el escenario de aplicación, el problema de segmentación de objetos en imágenes. Tras analizar la convergencia en el dominio del espacio, de forma matricial, la formulación se traslada al dominio de la frecuencia donde se obtienen las condiciones para los distintos modos de convergencia. A continuación se estudia la mejora obtenida al utilizar un sistema de segundo orden con los parámetros óptimos frente a un sistema de primer orden, así como el caso general en el que los nodos atraídos estén dispuestos de manera no uniforme. Finalmente, ejemplos prácticos corroboran la validez del análisis teórico y las conclusiones cierran el Capítulo.

4.1. Premisas y motivación. Formulación en el dominio del espacio.

Un contorno activo o *snake* es una curva paramétrica variante en el tiempo $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s, t) = (x(s, t), y(s, t))^T$ en el plano de la imagen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde x e y son funciones coordenadas, $s \in [0, L]$ es el parámetro espacial y t es el tiempo. La forma de un contorno que interactúa con una imagen $I(x, y)$, está gobernada por un funcional de energía que contiene fuerzas internas y externas [141], $\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}(\mathbf{v})$. La energía interna de deformación, $\mathcal{S}(\mathbf{v})$, se define como

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = \int_0^L \alpha(s) \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s^2} \right|^2 ds \quad (4.1)$$

donde $\alpha(s)$ y $\beta(s)$ son los parámetros de elasticidad y rigidez respectivamente. La energía externa $\mathcal{P}(\mathbf{v})$ acopla la *snake* a la imagen por medio de una función escalar de potencial $P_I(x, y)$, obtenida normalmente a partir de $I(x, y)$ por medio de procesamiento de imagen y que depende del contenido de la imagen en los lugares donde yace la *snake*.

En una implementación práctica, el contorno activo se divide en N elementos utilizando una formulación con elementos finitos. Cada elemento se representa geométricamente con funciones de forma que implican parámetros de forma. Reuniendo los parámetros de forma de los N elementos en el vector $\mathbf{u}(t)$ obtenemos las ecuaciones de movimiento de un contorno activo que minimizan el funcional de energía. Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden es el siguiente:

$$M \frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} + C \frac{d \mathbf{u}(t)}{dt} + K \mathbf{u}(t) = \mathbf{q}(s, t), \quad (4.2)$$

donde M es la matriz de masa, C es la matriz de amortiguamiento, K es la matriz de rigidez, y $\mathbf{q}$ es el vector de fuerzas externas que depende de la posición del contorno en el instante t .

Para resolver las ecuaciones de movimiento (4.2), las derivadas de $\mathbf{u}(t)$ con respecto al tiempo, se reemplazan con sus aproximaciones discretas. Esto conduce a la fórmula de actualización

$$A \mathbf{u}_\xi = A_1 \mathbf{u}_{\xi-1} + A_2 \mathbf{u}_{\xi-2} + \mathbf{q}_{\xi-1}, \quad (4.3)$$

donde $A = M/(\Delta t)^2 + C/\Delta t + K$ y $A_1 = 2M/(\Delta t)^2 + C/\Delta t$ and $A_2 = -M/(\Delta t)^2$, que son matrices simétricas y a bandas diagonales. El vector $\mathbf{q}_{\xi-1}$ contiene las fuerzas externas en el instante de tiempo $t = (\xi - 1)\Delta t$. La matriz de rigidez K es una matriz cuadrada simétrica y a bandas (pocos elementos fuera de la diagonal principal son distintos de cero), que se ensambla a partir de las submatrices de rigidez de los elementos. Estas submatrices de rigidez dependen de las funciones de forma y establecen la relación existente entre nodos vecinos. Las funciones de forma generan matrices de rigidez diferentes y, por tanto, producen diferentes comportamientos de la *snake*, apropiados para distintas tareas.

Como cualquier sistema adaptativo, el número de iteraciones requeridas para que el contorno pueda delimitar el objeto que está segmentando es muy importante, y desde que se presentaron las *snakes*, no se han realizado estudios completos sobre este aspecto. La formulación clásica viene dada en el dominio del espacio, y el motor del procedimiento es un sistema lineal de segundo orden con la elasticidad y la rigidez como parámetros estáticos para su caracterización, y la masa y el amortiguamiento como parámetros dinámicos, pero no se ha realizado una investigación sobre como establecer estos valores para mejorar la convergencia.

4.1.1. Análisis de la convergencia en el dominio espacial

En un problema clásico de segmentación con contornos activos como los mostrados en las Figuras 4.1 y 4.2, en un cierto punto del proceso algunos nodos de la *snake*, no uniformemente espaciados, están atraídos por regiones de alta energía, y el resto de los nodos están libres. Definamos este escenario de interpolación no uniforme con el siguiente algoritmo iterativo:

$$\mathbf{z}_\xi = A^{-1}A_1 \mathbf{u}_{\xi-1} + A^{-1}A_2 \mathbf{u}_{\xi-2} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u}_\xi = (I_N - D)\mathbf{z}_\xi + DA^{-1}\mathbf{q}_{\xi-1} \quad (4.5)$$

donde I_N es la matriz identidad de dimensiones $N \times N$ y D es la matriz diagonal de muestreo, cuyos elementos de la diagonal son cero excepto en aquellas posiciones n_i en las que los nodos están atraídos por fuerzas externas. Llegado a este punto hay que hacer notar que este resultado puede parecer similar al algoritmo Papoulis-Gerchberg analizado en [89, 91]. De todos modos, allí la matriz del sistema iterativo de primer orden es la portadora de las restricciones impuestas a

la solución en cuanto a ancho de banda, y aquí, $A^{-1}A_1$, $A^{-1}A_2$ y el algoritmo iterativo resultante provienen de la minimización de la energía de la primera y segunda derivada¹ del contorno. Esta interpolación no incluye ninguna alusión al ancho de banda requerido por la señal, restricción impuesta por las otras técnicas de interpolación citadas. Sin embargo, la minimización de la derivada σ -ésima de una señal tiene un efecto en la suavidad y la correlación entre los valores contiguos de la señal, que indirectamente tiene un significado en el ancho de banda de la señal interpolada.

Figura 4.1.: Proceso de segmentación con un contorno cerrado.

Figura 4.2.: Proceso de segmentación con un contorno abierto.

¹En general minimizaremos la derivada σ -ésima. En el caso particular de $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ minimizamos la derivada primera (σ es igual a 1), y, en el caso de $\alpha = 0$ and $\beta = 1$, minimizamos la derivada segunda (σ es igual a 2).

Cada iteración del algoritmo se compone de dos etapas: filtrado y remuestreo. La etapa de filtrado se basa en un sistema lineal de segundo orden que impone las condiciones de suavidad sobre los datos mediante la minimización de las derivadas. La siguiente etapa restablece o actualiza el valor de los nodos conocidos en forma de fuerzas externas utilizando la matriz D . Combinando las ecuaciones (4.4) y (4.5) podemos escribir la regla para obtener el vector en la iteración ξ :

$$\mathbf{u}_\xi = BA'_1\mathbf{u}_{\xi-1} + BA'_2\mathbf{u}_{\xi-2} + DA^{-1}\mathbf{q}_{\xi-1} \quad (4.6)$$

donde $B = (I_N - D)A^{-1}(A_1 + A_2)$, $A'_1 = (A_1 + A_2)^{-1}A_1$ y $A'_2 = (A_1 + A_2)^{-1}A_2$. Es bien sabido que los métodos iterativos convergen si y sólo si el radio espectral (el mayor autovalor en valor absoluto) de las matrices de la iteración es estrictamente menor que la unidad [91, 260, 282]. Para estudiar la velocidad de convergencia asumamos variaciones lentas del vector de fuerzas externas, $\mathbf{q}_\xi = \mathbf{q}$, y que el vector $\mathbf{u}_\xi$ converge al vector $\mathbf{u}$, de manera que $\mathbf{u} = (I_N - D)A^{-1}(A_1 + A_2)\mathbf{u} + DA^{-1}\mathbf{q}^2$. El error en la iteración ξ -ésima es la diferencia entre el valor final y el de la iteración actual, $\mathbf{e}_\xi = \mathbf{u}_\xi - \mathbf{u}$, y los errores en cada iteración están relacionados por

$$\mathbf{e}_\xi = BA'_1\mathbf{e}_{\xi-1} + BA'_2\mathbf{e}_{\xi-2} \quad (4.7)$$

Esta ecuación en diferencias lineal de segundo orden describe la evolución residual del contorno activo. La matriz B puede expresarse como $B = LSL^{-1}$, siendo S una matriz diagonal con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, y L una matriz cuyas columnas son los autovectores unitarios ortogonales correspondientes, $\mathbf{v}_i$. Parece razonable asumir que la función que caracteriza la masa de un elemento, $\mu(s)$, y la función que caracteriza el rozamiento, $\gamma(s)$, sean constantes dentro de cada elemento. Además, en muchas aplicaciones la masa y el amortiguamiento no varían en función de s y toman el mismo valor para todos los elementos, con lo que las matrices A'_1 y A'_2 se pueden escribir como $A'_1 = (2m/\Delta t^2 + c/\Delta t)/(m/\Delta t^2 + c/\Delta t)I = a_1I$ y $A'_2 = (-m/\Delta t^2)/(m/\Delta t^2 + c/\Delta t)I = a_2I$. Entonces, (4.7) se convierte en

$$\mathbf{c}_\xi = a_1S\mathbf{c}_{\xi-1} + a_2D\mathbf{c}_{\xi-2}, \quad (4.8)$$

donde $\mathbf{c}_\xi = L^{-1}\mathbf{e}_\xi$ contiene la descomposición o proyección del error residual $\mathbf{e}_\xi$ en cada uno de los modos de vibración o dimensiones del espacio vectorial representado por los autovectores $\mathbf{v}_i$.

La ecuación en diferencias desacoplada (4.8) permite estudiar los modos naturales de convergencia. Para el modo natural i -ésimo, el error en la iteración resulta ser el siguiente

$$c_{i,\xi} = a_1\lambda_i c_{i,\xi-1} + a_2\lambda_i c_{i,\xi-2} \quad (4.9)$$

donde $i = 1, \dots, N$ y λ_i es el i -ésimo autovalor de la matriz B . La convergencia global de la *snake* puede dividirse en la suma de las componentes o proyecciones en cada modo natural. Analizando la ecuación en diferencias desacoplada (4.8) en el dominio Z , obtenemos:

$$\mathbf{C}_\xi(z) = a_1S\mathbf{C}_\xi(z)z^{-1} - a_2S\mathbf{C}_\xi(z)z^{-2}, \quad (4.10)$$

²Entonces se podría escribir $\mathbf{u} = Q\mathbf{q}$, y el filtro equivalente del método no iterativo (de un paso) vendría dado por la matriz $Q = (I_N - (I_N - D)A^{-1}(A_1 + A_2))^{-1}DA^{-1}$.

siendo cada componente del vector $\mathbf{C}_\xi(z)$ la transformada Z de cada una de las secuencias $c_{i,\xi}$ que componen el vector $\mathbf{c}_\xi$. Para calcular los polos de cada uno de los modos de vibración del error residual de convergencia es necesario resolver el sistema de ecuaciones cuadrático desacoplado

$$(I_N - a_1 S z^{-1} - a_2 S z^{-2}) \mathbf{C}_\xi(z) = I_N. \quad (4.11)$$

La expresión de los polos de los modos de vibración viene dada por

$$p_i^{1,2} = \frac{a_1 \lambda_i}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 \lambda_i^2 + 4 a_2 \lambda_i}, \quad (4.12)$$

dependiendo del signo del discriminante de (4.12), $\Delta_i = a_1^2 \lambda_i^2 + 4 a_2 \lambda_i$, la convergencia resultante de cada modo puede ser subamortiguada, críticamente amortiguada y sobreamortiguada.

Modo subamortiguado

Si el discriminante es menor que cero, $\Delta_i < 0$, o lo que es equivalente,

$$0 < \lambda_i < -4 a_2 / a_1^2 \quad (4.13)$$

el modo es subamortiguado: ambos polos de (4.12) son complejos conjugados y están situados en el plano complejo sobre una circunferencia de radio $r_0 = -a_2/a_1$ centrada en el punto $(r_0, 0)^3$, y la evolución temporal del modo de vibración viene descrita por

$$m_{i,\xi} = 2\rho_i^\xi \cos(\xi\theta_i) \quad (4.14)$$

donde ρ_i y θ_i son el módulo y la fase de p_i^1 respectivamente⁴. Dada la geometría del problema, la magnitud ρ_i está limitada por el doble del valor del radio r_0 , esto es, $\rho_i \leq 2 r_0 = -2 a_2 / a_1$.

Modo críticamente amortiguado

Cuando el discriminante es cero, $\Delta_i = 0$, el modo está críticamente amortiguado y el autovalor cumple la condición

$$\lambda_i = -4 a_2 / a_1^2 \quad (4.15)$$

y las raíces de (4.12) corresponden al mismo polo real $p_i = a_2 \lambda_i / 2$. La evolución temporal del modo viene descrita por

$$m_{i,\xi} = \xi \rho_i^\xi \quad (4.16)$$

de donde se deduce que no presenta oscilaciones en su convergencia a la solución final.

³Los puntos de una circunferencia de radio r_0 centrada en $(r_0, 0)$ están situados en $(x, \pm \sqrt{r_0^2 - (x - r_0)^2})$.

⁴El polo p_i^1 puede representarse en el plano complejo como $p_i^1 = \rho_i e^{i\theta_i}$.

Modo sobreamortiguado

Si el discriminante es mayor que cero, $\Delta_i > 0$, o de forma equivalente, $\lambda_i > -4a_2/a_1^2$, el modo es sobreamortiguado y tiene dos polos reales distintos. El polo dominante es, según la ecuación (4.12), $p_{i,1} = a_1\lambda_i/2 + \sqrt{a_1^2\lambda_i^2/4 + a_2\lambda_i}$.

4.2. Transformación al dominio de la frecuencia

La ecuación matricial que expresa la implementación iterativa del contorno activo es⁵

$$A \mathbf{u}_\xi = A_1 \mathbf{u}_{\xi-1} + A_2 \mathbf{u}_{\xi-2} + \mathbf{q}_{\xi-1}, \quad (4.17)$$

donde $A = M/\Delta t^2 + C/\Delta t + K$, $A_1 = 2M/\Delta t^2 + C/\Delta t$, $A_2 = -M/\Delta t^2$, y $\mathbf{q}_{\xi-1}$ es el vector de fuerzas externas en el instante $t = (\xi - 1)\Delta t$. La matriz M es una matriz diagonal de tamaño $N \times N$ donde el elemento M_{ii} contiene el valor m_i de masa en el elemento i -ésimo del contorno activo; igual ocurre con la matriz diagonal C , que contiene el valor del amortiguamiento de cada elemento del contorno. La matriz de rigidez K tiene dimensión $N \times N$ y es una matriz a bandas formada por la superposición de las submatrices de rigidez de cada elemento de la *snake*, ponderadas por el valor del coeficiente de elasticidad y de rigidez de cada nodo (véase Apéndice A). Asumiendo un mismo valor de masa y de rozamiento para todos los elementos de la *snake*, tenemos $m_i = m$, $c_i = c$ y la ecuación matricial queda

$$\left(\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) I_N + K \right) \mathbf{u}_\xi = \left(2 \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) I_N \mathbf{u}_{\xi-1} + \left(-\frac{m}{\Delta t^2} \right) I_N \mathbf{u}_{\xi-2} + \mathbf{q}_{\xi-1}, \quad (4.18)$$

donde I_N es la matriz identidad de tamaño $N \times N$. Asumiendo ahora que el contorno activo es cerrado y los parámetros de elasticidad y de rigidez no varían en toda la curva, es decir, $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, la matriz K es circulante y queda totalmente definida por su primera fila $k[n]$, $n = 0, \dots, N-1$, de dimensiones $1 \times N$. De igual modo, la matriz identidad también es circulante y queda definida por su primera fila, en este caso, una señal delta de Kronecker $\delta[n]$.

El producto de una matriz circulante con un vector es equivalente a la convolución circular de la primera fila de la matriz circulante con dicho vector [72, 134]. Entonces la ecuación (4.18) se puede escribir como:

$$\left(\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) \delta[n] + k[n] \right) \otimes u_\xi[n] = \left(2 \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) \delta[n] \otimes u_{\xi-1}[n] + \left(-\frac{m}{\Delta t^2} \right) \delta[n] \otimes u_{\xi-2}[n] + q_{\xi-1}[n], \quad (4.19)$$

donde $n = 0, \dots, N-1$, y $\otimes$ denota la operación de convolución circular de secuencias de longitud N . La duración de $u_\xi[n]$ se puede ver como infinita: en el caso de contornos cerrados esta repre-

⁵Por claridad en la notación se ha tratado el vector de los parámetros de forma también como una secuencia espacial de longitud N , es decir, $u_\xi[n] \Rightarrow \mathbf{u}_\xi$, con $n = 0, \dots, N-1$. Del mismo modo $q_{\xi-1}[n] \Rightarrow \mathbf{q}_{\xi-1}$.

sentación se corresponde con una señal periódica, y en el caso de una *snake* abierta, con una señal periódica con extensiones ocultas y una parte visible dada por la señal de duración limitada [275].

Sabiendo que la transformada discreta de Fourier (*DFT*) de la convolución circular de dos secuencias equivale en el dominio de la frecuencia al producto de las *DFT*'s de cada secuencia [186], obtenemos:⁶

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} + \mathbf{K}\right)\mathbf{U}_\xi = \left(2\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t}\right)\mathbf{U}_{\xi-1} + \left(-\frac{m}{\Delta t^2}\right)\mathbf{U}_{\xi-2} + \mathbf{Q}_{\xi-1}, \quad (4.20)$$

donde $k = 0, \dots, N-1$, $K[k]$ es la *DFT* de longitud N de la secuencia $k[n]$, $\mathbf{U}_\xi$, $\mathbf{U}_{\xi-1}$ y $\mathbf{U}_{\xi-2}$ son las *DFT*'s de longitud N del vector que contiene los parámetros de las funciones de forma y $\mathbf{Q}_{\xi-1}$ es la *DFT* de longitud N del vector de fuerzas externas $\mathbf{q}_{\xi-1}$. Ahora las operaciones matriciales se han convertido en productos de espectros en la frecuencia de señales, con lo que es posible despejar $\mathbf{U}_\xi$ en la parte izquierda de la ecuación (4.20). Con la finalidad de escribir la ecuación de forma más compacta vamos a utilizar las siguientes variables:

$$H[k] = \frac{\eta}{\eta + K[k]}, \quad (4.21)$$

$$\eta = m/\Delta t^2 + c/\Delta t, \quad (4.22)$$

$$\gamma = \Delta t c/m, \quad (4.23)$$

$$a_1 = 1 + (1 + \gamma)^{-1}, \quad (4.24)$$

$$a_2 = -(1 + \gamma)^{-1}. \quad (4.25)$$

$H[k]$ representa el filtro “inverso” de $K[k]$, η es la masa global que está relacionada con el ancho de banda del filtro $H[k]$, γ representa la relación entre el amortiguamiento y la masa, y las variables a_1 y a_2 son los coeficientes de la ecuación en diferencias de segundo orden. Nótese que la suma de a_1 y a_2 es la unidad. De esta manera, la ecuación que expresa la evolución del contorno activo en el dominio de la frecuencia es

$$\mathbf{U}_\xi = \mathbf{H}(a_1\mathbf{U}_{\xi-1} + a_2\mathbf{U}_{\xi-2} + \eta^{-1}\mathbf{Q}_{\xi-1}). \quad (4.26)$$

La ecuación (4.26) puede trasladarse al dominio del espacio mediante la transformada discreta de Fourier inversa, DFT^{-1} , para obtener la expresión del proceso iterativo que define el contorno activo

$$u_\xi[n] = h[n] \otimes (a_1 u_{\xi-1}[n] + a_2 u_{\xi-2}[n] + \eta^{-1} q_{\xi-1}[n]). \quad (4.27)$$

Dado que los parámetros de rigidez α y β son independientes de s , A^{-1} es una matriz circulante y está definida por su primera fila, dada por

$$h[n] = DFT^{-1}\{\eta(\eta + DFT\{k[n]\})^{-1}\}, \quad (4.28)$$

⁶Por claridad en la notación se ha tratado el vector que contiene la transformada discreta de Fourier de los parámetros de forma también como una secuencia de longitud N en el dominio de la frecuencia, es decir, $U_\xi[k] \Rightarrow \mathbf{U}_\xi$, con $k = 0, \dots, N-1$. Del mismo modo $\mathbf{U}_{\xi-1}$, $\mathbf{U}_{\xi-2}$, $\mathbf{K}$ y $\mathbf{Q}_{\xi-1}$.

donde $k[n] = k_\alpha[n] + k_\beta[n]$ es el núcleo espacial de rigidez [275].

Las Figuras 4.3 y 4.4 muestran el espectro del filtro $H(\omega) = \eta/(\eta + K(\omega))$ y la influencia de los parámetros η , α y β en el ancho de banda del filtro. Así mismo, en la Figura 4.5 se representa el espectro de rigidez $K(\omega)$ para las funciones de forma B-spline, polinomios de Hermite y diferencias finitas. En ellas puede apreciarse como $H(\omega)$ ⁷ es un filtro paso bajo con el módulo menor o igual a uno, y que tiene su máximo en la frecuencia de la componente continua (frecuencias múltiplos de 2π). La causa de que $H(\omega)$ tenga forma de filtro paso bajo se debe a que es el “inverso” del filtro $K(\omega)$, que es un filtro paso alto que representa la transformación en frecuencia de las derivadas.

Figura 4.3.: Respuesta en frecuencia del filtro $H(\omega) = \eta/(\eta + K(\omega))$ utilizando diferencias finitas como función de forma y variando el valor de la masa global $\eta = [0,01, 0,1, 1, 10, 100]$, para los valores de elasticidad y de rigidez siguientes: (a) y (c) $\alpha=0, \beta=1$, (b) y (d) $\alpha=1, \beta=0$. En la fila superior el eje de ordenadas está en escala lineal y en la fila inferior en escala logarítmica, $10 \log_{10}(|H(\omega)|^2)$.

El escenario iterativo anterior puede entenderse como un proceso de interpolación [152] si

⁷ El espectro del filtro $H[k]$ puede obtenerse como $H[k] = H(\omega)|_{\omega=k \frac{2\pi}{N}}$, $k = 0, \dots, N-1$, donde $H[k]$ es la transformada discreta de Fourier de longitud N (DFT_N) y $H(\omega)$ su transformada de Fourier.

(a) $\beta=0, \eta=0.1$.

(b) $\alpha=0, \eta=0.1$.

(c) $\beta=0, \eta=1$.

(d) $\alpha=0, \eta=1$.

(e) $\beta=0, \eta=10$.

(f) $\alpha=0, \eta=10$.

Figura 4.4.: Respuesta en frecuencia del filtro $H(\omega) = \eta/(\eta + K(\omega))$ utilizando diferencias finitas.

descomponemos la ecuación (4.27) en:

$$z_\xi[n] = a_1 u_{\xi-1}[n] + a_2 u_{\xi-2}[n], \quad (4.29)$$

$$u_\xi[n] = h[n] \otimes \left(z_\xi[n] - z_\xi[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - N_k] + \eta^{-1} q_{\xi-1}[n] \right), \quad (4.30)$$

donde $\otimes$ denota convolución circular, N_k son las posiciones de los nodos atraídos por las fuerzas externas, y $h[n]$ es la respuesta al impulso de un filtro paso bajo. En cada iteración del algoritmo, la señal se filtra con el sistema de segundo orden y se restauran los valores de los nodos conocidos, posiciones N_k . Obsérvese que (4.30) es una sustitución directa de los valores de los nodos, es decir, una restauración de los valores de los nodos conocidos de la señal, y que fueron cambiados por la etapa anterior de filtrado. La etapa de filtrado minimiza la energía del funcional (4.1) para conseguir una curva suave restringida por las fuerzas externas y la minimización de las derivadas de la señal. Vamos a comenzar el análisis suponiendo que los nodos atraídos están separados una distancia l , es decir, $N_k = kl$ (en la Sección 4.4 se analizará el caso general).

Figura 4.5.: Respuesta en frecuencia $K_\alpha(\omega)$ y $K_\beta(\omega)$ utilizando funciones de forma de Hermite, B-splines y diferencias finitas. En la fila superior, gráficas (a) y (b), el eje vertical está representado en escala lineal, y en las gráficas de la fila inferior, (c) y (d), en escala logarítmica, $10 \log_{10}(|K(\omega)|^2)$.

Las ecuaciones (4.29)-(4.30) pueden trasladarse al dominio de la frecuencia por medio de la transformada de Fourier, obteniéndose

$$Z_\xi(\omega) = a_1 U_{\xi-1}(\omega) + a_2 U_{\xi-2}(\omega), \quad (4.31)$$

$$U_\xi(\omega) = H(\omega) \left(Z_\xi(\omega) - \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} Z_\xi(\omega - k\omega_0) + \eta^{-1} Q_{\xi-1}(\omega) \right), \quad (4.32)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/l$. Compactando las ecuaciones (4.31)-(4.32) en una sola ecuación:

$$\begin{aligned} U_\xi(\omega) &= a_1 H(\omega) U_{\xi-1}(\omega) + a_2 H(\omega) U_{\xi-2}(\omega) \\ &\quad - \frac{a_1}{l} H(\omega) \sum_{k=0}^{l-1} U_{\xi-1}(\omega - k\omega_0) - \frac{a_2}{l} H(\omega) \sum_{k=0}^{l-1} U_{\xi-2}(\omega - k\omega_0) \\ &\quad + \eta^{-1} H(\omega) Q_{\xi-1}(\omega). \end{aligned} \quad (4.33)$$

La ecuación (4.33) representa un filtrado lineal, $U_\xi(\omega) = G_\xi(\omega) Q_{\xi-1}(\omega)$, dado que $Q_{\xi-1}(\omega) = Q_{\xi-1}(\omega - k\omega_0)$. Asumiendo reposo inicial, el filtro equivalente en la iteración ξ viene dado por:

$$\begin{aligned} G_\xi(\omega) &= a_1 H(\omega) G_{\xi-1}(\omega) + a_2 H(\omega) G_{\xi-2}(\omega) \\ &\quad - \frac{a_1}{l} H(\omega) \sum_{k=0}^{l-1} G_{\xi-1}(\omega - k\omega_0) - \frac{a_2}{l} H(\omega) \sum_{k=0}^{l-1} G_{\xi-2}(\omega - k\omega_0) \\ &\quad + \eta^{-1} H(\omega). \end{aligned} \quad (4.34)$$

La ecuación (4.34) muestra que para una frecuencia ω dada, el filtro equivalente $G_\xi(\omega)$ depende de los valores de éste en las frecuencias $\omega + k\omega_0$. Considerando frecuencias $\omega = i\omega_0 + \Delta\omega$ ($i = 0, \dots, l-1$, y $|\Delta\omega| \leq \omega_0/2$) en la ecuación (4.34), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mathbf{G}_\xi = H(a_1 \mathbf{G}_{\xi-1} + a_2 \mathbf{G}_{\xi-2}) + \eta^{-1} \mathbf{H}, \quad (4.35)$$

donde $\mathbf{G}_\xi = [G_\xi(\Delta\omega), G_\xi(\omega_0 + \Delta\omega), \dots, G_\xi((l-1)\omega_0 + \Delta\omega)]^T$ es un vector que contiene los valores del espectro $G_\xi(\omega)$ en los valores de ω indicados, el vector $\mathbf{H}$ se define de igual manera, y la matriz H es

$$H = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} (l-1)H(\Delta\omega) & -H(\Delta\omega) & & -H(\Delta\omega) \\ -H(\omega_0 + \Delta\omega) & (l-1)H(\omega_0 + \Delta\omega) & & -H(\omega_0 + \Delta\omega) \\ & & \ddots & \\ -H((l-1)\omega_0 + \Delta\omega) & -H((l-1)\omega_0 + \Delta\omega) & & (l-1)H((l-1)\omega_0 + \Delta\omega) \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

que puede escribirse de forma compacta de la siguiente manera:

$$H = \text{diag}(\mathbf{H}) - \frac{1}{l} \mathbf{H} [1 \ \cdot^l \ 1]. \quad (4.37)$$

En la situación final $G_\xi(\omega) = G(\omega)$ y la ecuación (4.34) se convierte en

$$G(\omega) (1 - H(\omega)) = \eta^{-1} H(\omega) \left(1 - \frac{\eta}{l} \sum_{k=0}^{l-1} G(\omega - k\omega_0) \right) \quad (4.38)$$

que proporciona una conclusión directa sobre la solución final: la solución depende de la suma de los parámetros de masa y de amortiguamiento que se utilizan para construir el filtro $H(\omega)$. Asimismo, la ecuación (4.35) nos lleva a

$$\mathbf{G} = \eta^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}, \quad (4.39)$$

que describe el núcleo de filtrado equivalente en el estado final. El proceso inverso, esto es, a partir de una situación final deseada $G(\omega)$, obtener un núcleo $H(\omega)$, no tiene una formulación explícita. De forma general $G(\omega)$ depende de los parámetros de rigidez y de la masa total η . Esto significa que para un valor de η constante, la solución alcanzada en el estado final es la misma independientemente de la relación entre el amortiguamiento y la masa, γ . De todos modos, la velocidad de la *snake* hacia la situación final sí que depende de γ [268], como se verá en la siguiente sección.

4.2.1. Análisis de la convergencia en el dominio de la frecuencia

Está demostrado que las iteraciones del algoritmo convergen si la densidad de nodos (muestras) con valores conocidos de entre el conjunto de nodos que forman el contorno activo (señal) superan un valor mínimo; este valor naturalmente se incrementa con el ancho de banda de los datos⁸. Si este valor está por encima de la densidad mínima, las iteraciones del algoritmo convergen independientemente de la distribución de los nodos atraídos por las fuerzas externas. Siguiendo las ideas presentadas en el análisis de la convergencia en el dominio del espacio, la sustracción del valor final en la expresión recursiva (4.35), esto es, $\mathbf{R}_\xi = \mathbf{G}_\xi - \mathbf{G}_\infty$, da lugar a una ecuación en diferencias de segundo orden que describe la evolución residual del contorno activo

$$\mathbf{R}_\xi = a_1 \mathbf{H} \mathbf{R}_{\xi-1} + a_2 \mathbf{H} \mathbf{R}_{\xi-2}. \quad (4.40)$$

La matriz $\mathbf{H}$ puede expresarse como $\mathbf{H} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^{-1}$, donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, y $\mathbf{L}$ es una matriz cuyas columnas son los autovectores unitarios y ortogonales correspondientes, $\mathbf{V}_i$. El vector $\mathbf{R}_\xi$ se puede trasladar directamente al dominio del espacio mediante la transformada de Fourier inversa, proporcionando la evolución residual del contorno activo como la suma de los modos desacoplados en el dominio del espacio. Cada modo, $\mathbf{v}_i = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{V}_i\}$, se puede interpretar como el armónicos de vibración de una cuerda cuyas propiedades de elasticidad y rigidez están definidas por la formulación original basada en α y β .

⁸La densidad mínima está relacionada con la densidad de Nyquist-Landau [91].

Entonces, el error residual (4.40) se puede poner

$$\mathbf{S}_\xi = a_1 D \mathbf{S}_{\xi-1} + a_2 D \mathbf{S}_{\xi-2}, \quad (4.41)$$

donde $\mathbf{S}_\xi = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}_\xi$. Con el mismo procedimiento seguido en el análisis de la convergencia en el dominio espacial, la ecuación en diferencias desacoplada (4.41) permite estudiar los modos naturales de convergencia y proporciona los polos de los modos de vibración:

$$p_i^{1,2} = \frac{a_1 \lambda_i}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 \lambda_i^2 + 4 a_2 \lambda_i}, \quad (4.42)$$

Dependiendo del signo del discriminante de la ecuación (4.42), $\Delta_i = a_1^2 \lambda_i^2 + 4 a_2 \lambda_i$, el modo de convergencia resultante puede ser subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado.

Modo subamortiguado

Si el discriminante es menor que cero el modo es subamortiguado y el autovalor cumple la condición $0 < \lambda_i < (1 + \gamma) / (1 + \frac{1}{2}\gamma)^2$. Ambos polos en (4.42) son complejos conjugados y están situados sobre una circunferencia de radio $r_0 = (2 + \gamma)^{-1}$ centrada en el punto $(r_0, 0)$. La evolución temporal del modo de vibración viene descrita por $m_{i,\xi} = 2\rho_i^\xi \cos(\xi\theta_i)$, donde ρ_i y θ_i son el módulo y la fase de p_i^1 respectivamente. Dada la geometría del problema, ρ_i está limitado por el doble del radio r_0 , esto es, $\rho_i \leq 2 r_0 = (1 + \frac{1}{2}\gamma)^{-1}$.

Modo críticamente amortiguado

Cuando el discriminante es cero el modo está críticamente amortiguado y el autovalor cumple la condición $\lambda_i = (1 + \gamma) / (1 + \frac{1}{2}\gamma)^2$. Ambas soluciones de la ecuación (4.42) corresponden al mismo polo real $p_i = (1 + \frac{1}{2}\gamma) / (1 + \gamma) \lambda_i$, la evolución temporal del modo no es oscilante y viene descrita por $m_{i,\xi} = \xi \rho_i^\xi$.

Modo sobreamortiguado

En el modo sobreamortiguado el discriminante es mayor que cero y el autovalor satisface $(1 + \gamma) / (1 + \frac{1}{2}\gamma)^2 < \lambda_i < 1$. El polo dominante es, según la ecuación (4.42):

$$p_i^1 = \frac{1 + \frac{1}{2}\gamma}{1 + \gamma} \lambda_i + \sqrt{\frac{(1 + \frac{1}{2}\gamma)^2}{(1 + \gamma)^2} \lambda_i^2 - \frac{1}{1 + \gamma} \lambda_i}. \quad (4.43)$$

Figura 4.6.: Las líneas continuas representan el valor absoluto de los polos de los modos de vibración p_i , los autovalores λ_i de la matriz H están representados en líneas de puntos y el umbral $th = -4a_2/a_1^2 = (1 + \gamma)/(1 + \frac{1}{2}\gamma)^2$ está representado con línea discontinua. Note que cuando el valor absoluto del autovalor es mayor que el umbral, los polos complejos conjugados correspondientes evolucionan hacia dos polos reales diferentes. Los parámetros de simulación son los siguientes: $l = 4$, $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ y la función de forma es la de diferencias finitas.

El valor del polo es monótonamente creciente conforme γ aumenta. En el caso de $\gamma \gg 1$, el polo tiende al autovalor $p_i = \lambda_i$ (véase Figura 4.6(a)), y la ecuación (4.17) tiende hacia un sistema de primer orden ($a_1 \approx 1, a_2 \approx 0$).

Puesto que η , la suma de los parámetros de masa y de amortiguamiento, se ha mantenido constante en el análisis anterior, la solución final es independiente de la relación entre el amortiguamiento y la masa γ . Con el análisis realizado hasta este punto se puede describir el comportamiento de los autovalores y sus polos asociados en el sistema de segundo orden, variando los parámetros γ y η . Esto se muestra en las Figuras 4.6(a) y 4.6(b) respectivamente. El eje x representa el valor de γ y η . Las líneas continuas representan el valor de los polos (4.42), los autovalores de la matriz H están representados con líneas de puntos, y en línea discontinua, el umbral $th = -4a_2/a_1^2 = (1 + \gamma)/(1 + \frac{1}{2}\gamma)^2$. Nótese que cuando el autovalor es mayor que el umbral, los polos complejos conjugados asociados se convierten en dos polos reales distintos.

4.3. Mejora del sistema de segundo orden

En este punto, es interesante analizar la mejora que se consigue al utilizar un sistema lineal de primer orden [89] o al usar un sistema lineal de segundo orden como el descrito en (4.3). En el primer caso, la velocidad de convergencia viene dada por el autovalor mayor, λ_{max} , de la matriz

del proceso iterativo $B = (I_N - D)A^{-1}$. En el sistema de segundo orden, debemos elegir los parámetros de masa y amortiguamiento que generan las matrices M y C , y que darán lugar a a_1 y a_2 , para hacer que el polo mayor, p_{max} , asociado al autovalor mayor de B , sea un polo real doble y, de esta manera, produzca un comportamiento críticamente amortiguado y la convergencia más rápida. Entonces

$$p_{max} = \frac{1 + \frac{1}{2}\gamma}{1 + \gamma} \lambda_{max}, \quad (4.44)$$

con la restricción

$$(1 + \frac{1}{2}\gamma)^2 \lambda_{max} - (1 + \gamma) = 0. \quad (4.45)$$

Dada la condición anterior, para obtener la mayor velocidad del sistema de segundo orden es necesario calcular el valor óptimo de γ , que produce la convergencia críticamente amortiguada, esto es

$$\gamma_{opt} = \frac{2}{\lambda_{max}} (1 - \lambda_{max} + \sqrt{1 - \lambda_{max}}). \quad (4.46)$$

Figura 4.7.: Mejora de la velocidad de convergencia de un sistema de segundo orden respecto a uno de primer orden. En la parte superior se muestra el valor del autovalor del sistema de primer orden, λ_{max} , y el valor del polo mayor del sistema de segundo orden, p_{max} , utilizando el valor óptimo de γ . Los valores de λ_{max} y p_{max} determinan la velocidad de convergencia del sistema de primer y segundo orden respectivamente. La parte inferior refleja la mejora del sistema de segundo orden en términos de número de parámetros equivalentes.

Por claridad es conveniente expresar la mejora en términos de complejidad o número de parámetros equivalentes del sistema de segundo orden, $N_p = (1 - p_{max})^{-1}$. Entonces, llamando $N_e = (1 - \lambda_{max})^{-1}$ al número de parámetros equivalentes en el sistema de primer orden, para el sistema de segundo orden obtenemos

$$N_p = \frac{N_e + 2N_e^{3/2} + N_e^2}{2N_e + N_e^{3/2} + N_e^{1/2}} \approx \sqrt{N_e} \quad (4.47)$$

Dependiendo del valor de λ_{max} , se puede alcanzar una mejora significativa. La parte superior de la Figura 4.7 compara la velocidad del sistema de primer y segundo orden, y la parte inferior muestra de forma más clara la mejora del sistema de segundo orden en términos de complejidad.

4.4. Caso no uniforme

Cuando la distancia de separación entre los nodos no es constante, es decir, $N_k \neq kl$, los resultados de la sección anterior siguen siendo válidos después de algún razonamiento. Para delimitar la convergencia de los nodos cuando no están uniformemente distribuidos, se va a utilizar el análisis de la convergencia realizado para una distribución uniforme de nodos y el teorema de entrelazado de Cauchy⁹ de la teoría de números de Álgebra para la estimación numérica de autovalores:

Teorema 1 Sea S una matriz $N \times M$ real, con $M \leq N$, tal que $S^T S = I$. Sea B una matriz real y simétrica de orden N , se define $V = S^T B S$ como su submatriz principal, de orden M . Si B tiene sólo autovalores reales, podemos ordenarlos en orden decreciente $\lambda_{max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_N = \lambda_{min}$ y sean los autovalores de V también reales y $\theta_{max} = \theta_1 \geq \theta_2 \dots \geq \theta_M = \theta_{min}$. Entonces, los autovalores de B y V están entrelazados y para cada $j = 1, \dots, M$ se cumplen las siguientes inigualdades:

$$\lambda_j \geq \theta_j \geq \lambda_{N-M+j}. \quad (4.48)$$

Para identificar cada una de las matrices del teorema elegimos el escenario de aplicación en el dominio del espacio: La señal $\mathbf{u}$ es periódica con periodo N y contiene los nodos de la *snake*, de la ecuación (4.6) la matriz $B = (I_N - D)A^{-1}(A_1 + A_2)$ tiene dimensiones $N \times N$ y V es una submatriz principal de B de tamaño $M \times M$ ¹⁰. Debido al proceso de segmentación, sólo algunos nodos son atraídos a regiones de alta energía. Para un caso de distribución uniforme, estos nodos están situados en las posiciones $n_i = 1, l, 2l, \dots, kl$. La matriz diagonal de muestreo D contiene solamente ceros o unos y su diagonal, $diag(D)$, se denomina conjunto de muestreo asociado a la operación de muestreo. Por claridad y sin pérdida de generalidad consideraremos $N = 2l$. Entonces

$$diag(D) = [\overbrace{100\dots 00}^l \overbrace{100\dots 00}^l]$$

será un vector $1 \times N$ que representa dos huecos de tamaño $l - 1$ entre nodos atraídos. El conjunto

⁹La demostración de este teorema se puede encontrar en [118].

¹⁰Se puede obtener la matriz V a partir de B con la operación $V = S^T B S$, utilizando $S = eye(N, M)$, donde $eye(N, M)$ genera una matriz $N \times M$ con unos en la diagonal y ceros en el resto de posiciones.

de muestreo asociado a la submatriz V viene dado por

$$\text{diag}(D_B) = [\overbrace{100\dots 00}^l \overbrace{100\dots 0}^{l-(N-M)}]$$

que es equivalente a una distribución no uniforme de nodos atraídos en el contorno activo interpolador, un hueco de tamaño $l - 1$ y otro de tamaño $l - (N - M) - 1$. Aplicando el teorema de entrelazado de Cauchy, obtenemos que los autovalores de la matriz V , $\theta_1 \geq \theta_2 \dots \geq \theta_M$, satisfacen que $\lambda_j \geq \theta_j$, es decir, están acotados por los autovalores de la matriz B . Por lo tanto, la velocidad de convergencia de una distribución no uniforme con el mayor hueco de longitud l está acotada por la velocidad de convergencia de una distribución uniforme donde la distancia entre los nodos es l .

Entre todas las posibles distribuciones de nodos con la misma densidad de nodos atraídos, la velocidad de convergencia del algoritmo de interpolación es máxima cuando las distancias entre los nodos atraídos son múltiplos de un número entero. La peor velocidad de convergencia se produce cuando esos nodos están contiguos (y entonces, para la misma densidad, los huecos entre los nodos atraídos son mayores). Así, para un conjunto dado, la velocidad de convergencia es independiente de la longitud de la señal, y sólo depende del mayor hueco entre nodos atraídos.

4.5. Diseño práctico y simulaciones

Para validar los resultados teóricos obtenidos en el análisis, se ha aplicado una *snake* cerrada a un problema de segmentación de imagen. Como las dos coordenadas en el dominio del espacio de la *snake* son independientes, sólo se muestran los resultados para la coordenada x . La Figura 4.8(a) muestra la situación final de una *snake* para varias combinaciones de elasticidad y rigidez, donde los nodos atraídos por las fuerzas externas han sido distribuidos no uniformemente con un espaciado medio de valor 8 y su valor se ha obtenido aleatoriamente con una función de distribución uniforme en $[-1,1]$. La parte inferior, la Figura 4.8(b) representa el filtro equivalente $G(\omega)$ en cada caso, donde se puede comprobar la influencia de α , β y η sobre el ancho de banda del filtro equivalente y sobre el contorno final resultante.

4.5.1. Mejora del sistema de segundo orden

En la Figura 4.9 se muestra una comparativa entre un sistema interpolador de primer y uno de segundo orden. Los parámetros dinámicos del sistema de segundo orden se han fijado para optimizar la velocidad de convergencia del contorno activo. La parte superior de la Figura 4.9(a) muestra las restricciones sobre los datos y la señal interpolada resultante. En ambos casos, usando

Figura 4.8.: Resultados de la simulación con una *snake* de diferencias finitas con $\alpha = 0, \beta = 1$ (línea punteada), $\alpha = 0,5, \beta = 0,5$ (línea a trazos) y $\alpha = 1, \beta = 0$ (línea continua). (a) Contorno final para la coordenada x de los nodos, y (b), espectro del filtro equivalente $G(\omega)$.

un sistema de primer y uno de segundo orden, la solución alcanzada es la misma. La diferencia está en la velocidad de convergencia. La parte inferior de la gráfica muestra la evolución de algunos puntos del contorno, $(|u_\xi - u_\infty|)$. La Figura 4.9(b) muestra los autovectores correspondientes a los dos autovalores mayores de la matriz B , donde se puede apreciar la correspondencia de esos autovectores con los huecos más grandes entre muestras contiguas.

La matriz B tiene tantos autovalores iguales a cero como nodos con restricciones (nodos atraídos por fuerzas externas). La restauración del valor de estos nodos puede entenderse como un proceso con una convergencia muy rápida: los autovalores asociados son cero y sus autovectores correspondiente son deltas de Kronecker situadas en la posición del nodo con la restricción. Los autovalores y autovectores de B dependen de $\mathbf{H}$ y de D , y por tanto de la distribución de los nodos.

4.5.2. Aproximación numérica de la complejidad

Cuando los autovalores están cercanos a la unidad, es difícil apreciar las diferencias entre las velocidades de sus sistemas. Otra forma de expresar la velocidad de convergencia es mediante la complejidad del sistema, definida como

$$N_e = (1 - \lambda_{\max})^{-1} \quad (4.49)$$

donde $\lambda_{\max}$ es el mayor autovalor de la matriz H definida en (4.37).

Aunque los resultados anteriores son analíticos, hay que mencionar que el valor de masa

Figura 4.9.: (a) La parte superior de la figura representa la señal interpolada y los nodos con restricciones. La parte inferior ilustra la comparación de la convergencia para un sistema de primer y segundo orden (los nodos estudiados se encuentran en mitad del hueco). (b) Autovectores correspondientes a los dos autovalores mayores de la matriz B .

η utilizado para conseguir un cierto grado de interpolación es alto en la práctica, lo que implica una convergencia lenta hacia la situación estable final. Este hecho se muestra en la Figura 4.10 donde se representa la complejidad del sistema N_e (inversamente proporcional a la velocidad de convergencia) en función de la masa η para diferentes valores de espaciado entre los nodos atraídos l , así como el efecto del orden de interpolación σ . Cada curva está ajustada por dos líneas asintóticas (con trazo de puntos), una de ellas definida por:

$$N_e = l, \quad (4.50)$$

y la otra asíntota está descrita con precisión por la siguiente relación

$$\log_{10}(N_e) = \log_{10}(\eta) + \sigma (\kappa_1 \log_{10}(l) + \kappa_2), \quad (4.51)$$

donde $\kappa_1 \approx 2$, $\kappa_2 \approx -1$ ¹¹. El frontera de intersección entre ambas rectas se representa con una línea discontinua y viene descrita por la siguiente ecuación

$$\log_{10}(\eta) = (1 - \sigma\kappa_1) \log_{10}(l) - \sigma\kappa_2 \quad (4.52)$$

Según los resultados anteriores, el método de interpolación más rápido se basaría en utilizar un valor pequeño de masa η que se corresponde con un valor pequeño de complejidad del método

¹¹Un ajuste más preciso se consigue con los siguientes valores $\kappa_1 = 1,97$, $\kappa_2 = -0,95$. La ecuación (4.51) describe exactamente la dependencia de la convergencia especialmente para $l \geq 3$.

Figura 4.10.: Análisis numérico de la complejidad $N_e = (1 - \lambda_{max})^{-1}$ para diferentes distancias entre nodos atraídos, l , y distintos órdenes $\sigma = 1$ (equivalente en la formulación original a $\alpha = 1, \beta = 0$), y $\sigma = 2$, ($\alpha = 0, \beta = 1$). Las líneas de puntos son las asíntotas calculadas según (4.50) y (4.51), y la línea discontinua está calculada con (4.52) y define la región de inflexión en la velocidad de convergencia.

$N_e = l$. Sin embargo, además de la velocidad de convergencia, la masa η afecta también en el filtro de interpolación resultante $G(\omega)$. La Figura 4.11 contiene los filtros interpoladores resultantes $G(\omega)$ para el caso $l = 4$, y para valores del orden $\sigma = 1$ y $\sigma = 2$. En línea continua se muestra el filtro de interpolación equivalente $G(\omega)$ utilizando un valor de masa alto, en línea de puntos está el resultado de usar la masa correspondiente al punto de inflexión (4.52), y cada uno de los otros filtros es el resultado de utilizar una masa diez veces mayor que la utilizada en el espectro inmediatamente inferior. La masa del punto de inflexión, η_o , logra una interpolación final aceptable, pero si se requiere una banda de transición más estrecha y lóbulos secundarios más reducidos, el valor de la masa debe incrementarse. Y, un incremento en un orden de magnitud en η implica el mismo incremento en N_e (4.51), lo que podría dar lugar a una convergencia inadmisiblemente lenta.

4.5.3. Modos de convergencia

Desde el punto de vista de la velocidad de convergencia hacia la situación final, la Figura 4.12, muestra la dependencia de la evolución de los nodos con el valor de γ . Con el mismo $H(\omega)$ se han utilizado tres valores distintos de γ , provocando que el modo de convergencia predominante (el generado por el mayor autovalor) sea subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado. La parte superior de cada gráfica contiene la situación de los polos de los modos de convergencia y la parte inferior la evolución temporal del error de un nodo hacia su estado final.

Figura 4.11.: Filtro equivalente $G(\omega)$ para órdenes $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ y diferentes valores de masa global η .

El modo de amortiguamiento crítico es el más rápido y corresponde a la situación en la que el mayor autovalor tiene el mínimo valor absoluto, alcanzando la curva su estado final en el menor número de iteraciones. Variaciones de este valor dan lugar a una convergencia más lenta. La Figura 4.13 representa la evolución de la situación de los polos al aumentar el valor del parámetro γ . Partiendo de un valor pequeño, los polos son complejos conjugados y el modo resultante está subamortiguado; al incrementar el parámetro se llega al valor de γ_0 y la situación de amortiguamiento crítico con un polo real y doble. Y por último, al superar esta situación, el modo es sobreamortiguado y los dos polos son reales y distintos, uno disminuye su valor y el otro lo aumenta, imponiendo la velocidad de convergencia más lenta.

4.5.4. Acotación caso no uniforme

Desde el punto de vista del diseño práctico, el principal interés está en como establecer los parámetros a_1 y a_2 para obtener la convergencia más rápida. Los datos de entrada son la posición de los nodos atraídos por las zonas de alta energía y los parámetros estáticos de la *snake*. Dado que el valor de los parámetros específicos a_1 y a_2 no pueden extraerse para un caso general, se buscará el hueco de mayor tamaño, l_{max} , y se obtendrán los parámetros que aceleran la convergencia en el caso en que los nodos atraídos estuviesen repartidos con una distancia entre huecos constante e igual a l_{max} . Así aceleramos la convergencia del modo más lento, ya que la velocidad de convergencia de distribución no uniforme está acotada por la del caso uniforme donde la longitud de los huecos coincide con la longitud del mayor hueco del caso no uniforme.

La Figura 4.14 muestra un ejemplo gráfico de distribución uniforme y no uniforme de nodos

Figura 4.12.: Las gráficas superiores ilustran la situación de los polos de los modos de convergencia y la parte superior la evolución temporal de un nodo de la *snake* hacia su estado final, $\log(\text{abs}((x - x_{\text{end}})/(x_{\text{ini}} - x_{\text{end}})))$.

Figura 4.13.: Evolución de la situación de los polos con γ .

$l = 2$	$N = 4$	$\lambda_{max} = 0,6149$
	$M = 3$	$\theta_{max} = 0,7213$
$l = 3$	$N = 6$	$\lambda_{max} = 0,7586$
	$M = 5$	$\theta_{max} = 0,7558$
	$M = 4$	$\theta_{max} = 0,7558$
$l = 4$	$N = 8$	$\lambda_{max} = 0,8010$
	$M = 7$	$\theta_{max} = 0,7990$
	$M = 6$	$\theta_{max} = 0,7981$
	$M = 5$	$\theta_{max} = 0,7971$
$l = 5$	$N = 10$	$\lambda_{max} = 0,8354$
	$M = 9$	$\theta_{max} = 0,8307$
	$M = 8$	$\theta_{max} = 0,8295$
	$M = 7$	$\theta_{max} = 0,8294$
	$M = 6$	$\theta_{max} = 0,8269$

Tabla 4.1.: Autovalores de la matriz B y sus submatrices principales V utilizando los siguientes parámetros de los contornos activos: $\alpha = 0$, $\beta = 1$, y η óptimo.

Figura 4.14.: Representación gráfica de la distribución de nodos asociada a la matriz B , sus submatrices principales V , y el autovalor mayor en cada caso.

atraídos por fuerzas externas y el autovalor mayor de su matriz correspondiente. En la distribución uniforme, la distancia entre nodos atraídos es $l = 4$. El contorno activo cerrado tiene $N = 8$ nodos y el valor de los parámetros de elasticidad y de rigidez es $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ respectivamente. En la Figura se puede comprobar como las submatrices principales se corresponden con el caso de una distribución no uniforme de nodos atraídos, y la Tabla 4.1 muestra como el autovalor mayor del caso no uniforme está acotado por el autovalor mayor del caso uniforme.

4.5.5. Parámetros óptimos

El mayor autovalor λ_{max} de la matriz H depende de los parámetros de rigidez y principalmente de l , la longitud del hueco mayor entre dos nodos atraídos. Así, dado un conjunto de nodos, donde los nodos atraídos no están uniformemente distribuidos, el algoritmo empezaría detectando la longitud del mayor hueco entre los nodos atraídos, entonces calcularía el valor óptimo de masa según (4.52), y de ahí obtiene N_e y así los parámetros necesarios del sistema de segundo orden: λ , γ , a_1 y a_2 . Esta elección óptima de los parámetros dinámicos de la *snake* se describe en el Algoritmo 1.

Algorithm 1 Diseño de parámetros dinámicos óptimos para *snakes*

```

 $\eta = l^{(1-\sigma k_1)} 10^{(-\sigma k_2)}$ 
 $N_e = \max\{l, \eta l^{(\sigma k_1)} 10^{(\sigma k_2)}\}$ 
 $\lambda = 1 - 1/N_e$ 
 $\gamma = 2\lambda^{-1}((1 - \lambda) + \sqrt{1 - \lambda})$ 
 $a_1 = 1 + (1 + \gamma)^{-1}$ 
 $a_2 = -(1 + \gamma)^{-1}$ 
 $\mathbf{K} = \alpha \mathbf{K}_\alpha + \beta \mathbf{K}_\beta$ 
 $\mathbf{H} = \eta (\eta + \mathbf{K})^{-1}$ 
while  $flag = 1$  do
     $\mathbf{u} = DFT^{-1}\{\mathbf{H}(a_1 \mathbf{U}_\xi + a_2 \mathbf{U}_{\xi-1})\} + \eta^{-1} \mathbf{q}_{\xi-1}$ 
     $\mathbf{U}_{\xi-1} = \mathbf{U}_\xi$ 
     $\mathbf{U}_\xi = DFT\{\mathbf{u}\}$ 
    if  $\|\mathbf{U}_{\xi-1} - \mathbf{U}_\xi\| < tol$  then  $flag = 0$ 
end while

```

4.5.6. Estabilidad

Vamos a proceder a dar condiciones suficientes de estabilidad de la convergencia del algoritmo iterativo, o, de manera equivalente, que el mayor autovalor de la matriz del sistema de segundo orden sea menor o igual a la unidad. En el proceso iterativo (4.6), construimos la matriz $B = (I_N - D)A^{-1}(A_1 + A_2)$ de dimensiones $N \times N$, donde se puede observar que B es el producto Hadamard de dos factores, en este caso, matrices simétricas. El producto Hadamard es una submatriz del producto Kronecker de los factores, y cada autovalor del producto Kronecker de dos matrices cuadradas surge del producto de los autovalores de los factores [119]. Los autovalores del primer factor, $(I_N - D)$, son $\{0, 1\}$ y los del segundo, $A^{-1}(A_1 + A_2)$, vienen dados por $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ y son menores o iguales a la unidad dado que la matriz $A^{-1}(A_1 + A_2)$ es una matriz simétrica y,

asumiendo constantes para todo el contorno activo los parámetros de rigidez y de elasticidad, su elemento $\{i, j\}$ está definido por $h[(j - i)_N]$ ¹², donde $h[n] = \text{IDFT}_N\{H[k]\}$ ¹³ de la ecuación (4.21). La condición que asegura que la matriz tiene su mayor autovalor menor o igual a uno es que está basada en un filtro paso bajo con una ganancia menor o igual a uno (véase Figura 4.3) y los autovalores de la matriz están relacionados con un muestreo del espectro frecuencial del filtro paso bajo¹⁴.

Debido a que el mayor autovalor de la matriz $A^{-1}(A_1 + A_2)$, $\lambda_{\max}$, es menor o igual a uno, el problema puede resolverse de forma no iterativa¹⁵ dado que $(I_N - D)A^{-1}(A_1 + A_2)$ no es singular, o utilizando alguno de los métodos iterativos conocidos (Jacobi, JOR, Gauss-Seidel, SOR, gradiente conjugado, y otros). De todos modos, B puede tener autovalores arbitrariamente cercanos a la unidad, lo que conduce a problemas de interpolación muy mal condicionados. Cuando esto ocurre, la utilidad de los métodos iterativos es reducida debido a su lenta convergencia, y el método no iterativo puede producir resultados sin sentido. La lenta convergencia del algoritmo iterativo es equivalente al mal condicionamiento del método no iterativo. Dado que, conforme el mayor autovalor de B tiende a la unidad, el autovalor más pequeño de $(I_N - B)$ tiende a cero.

4.6. Conclusiones

La formulación de los contornos activos en el dominio de la frecuencia propuesta en [275] revela una nueva perspectiva para estudiar y diseñar *snakes*. En el dominio de la frecuencia se pueden realizar análisis que no son posibles mediante la formulación clásica en el dominio del espacio. En este Capítulo se ha presentado un análisis de la velocidad de convergencia de los contornos activos y se ha concluido con un algoritmo para la obtención de los parámetros dinámicos óptimos que aceleran la convergencia de los contornos activos en un problema de segmentación de imagen. Las principales conclusiones son:

- La solución final alcanzada depende de la suma de las propiedades de masa y de rozamiento, η , y del filtro $H(\omega)$. Y esta situación final es independiente de la relación entre las propiedades de masa y de rozamiento, γ .
- La velocidad con la que la *snake* alcanza su situación estable final, depende de la relación entre la masa y el rozamiento $\gamma = M/C$.

¹²La operación $(n)_N = n \bmod N$ denota el resto después de la división entera.

¹³Además $h[n]$ es una secuencia con simetría par, $h[n] = h[(-n)_N]$, con lo que su transformada de Fourier y su transformada discreta de Fourier son reales.

¹⁴La descomposición de una matriz $N \times N$ que representa un filtro produce N autovectores que son la base de Fourier (N exponenciales complejas, $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ con $k = 0, \dots, N-1$, $n = 0, \dots, N-1$) y N autovalores que son el valor del espectro en frecuencias $\frac{2\pi}{N}k$, $k = 0, \dots, N-1$.

¹⁵Utilizando el filtro equivalente $\mathbf{u} = Q\mathbf{q}$, con $Q = (I_N - (I_N - D)A^{-1}(A_1 + A_2))^{-1}DA^{-1}$.

El análisis realizado en la frecuencia permite mayor capacidad de diseño del contorno activo adecuado a un problema de segmentación de imagen, permitiendo establecer los parámetros dinámicos que confieren al contorno activo el comportamiento óptimo en cuanto a convergencia hacia la solución final. Según los resultados anteriores, la *snake* interpoladora más rápida se basaría en un valor pequeño de masa η , pero si se requiere una segmentación más fina, se ha de incrementar el valor de la masa global. Un aumento en un orden de magnitud en η implica el mismo incremento en N_e y esto puede dar lugar a una prohibitiva y lenta velocidad de convergencia. Entonces, para un valor de masa global η , con lo cual se está fijando la forma final, el interés se centra en ajustar γ y así los parámetros del sistema de segundo orden, de forma que la *snake* alcance su máxima velocidad de convergencia.

Aplicaciones

A continuación se detallan algunas de las aplicaciones en las cuales se han empleado contornos activos o modelos deformables de orden superior. Inicialmente se han utilizado en el procesamiento de imágenes médicas, para la estimación de movimiento deformable y para la reconstrucción tomográfica con compensación de movimiento. Con posterioridad se pensó en la posibilidad de su empleo en la caracterización y modelado de músculos artificiales, dada su eficacia para el seguimiento de objetos en secuencias de vídeo.

5.1. Caracterización de músculos artificiales

Los dispositivos contruidos con polímeros conductores¹ son capaces de transformar energía eléctrica en trabajo mecánico en un medio líquido, mediante una reacción electroquímica. En base a este principio se construyeron y patentaron músculos artificiales [191, 192, 193] realizados con esta tecnología y con un diseño multicapa. El interés de estos dispositivos se centra en su capacidad de imitar los movimientos de los músculos naturales: al aplicar una corriente eléctrica en el músculo en un medio electrolítico, el extremo libre del músculo se dobla describiendo un movimiento angular macroscópico. El movimiento de estos dispositivos se basa en cambios de volumen del polímero conductor, asociados a los procesos de oxidación y reducción. Por otro lado, el movimiento angular está causado por el gradiente de tensión dentro del dispositivo, debido a los cambios de volumen de la delgada capa de conductor polimérico.

El método utilizado para estudiar tanto las propiedades mecánicas y cinemáticas del múscu-

¹Este trabajo ha sido realizado bajo el proyecto [39].

Figura 5.1.: Proyecciones en el plano XZ (fila superior) y YZ (fila inferior) en los instantes $t=1$, $t=5$, $t=12$ y $t=20$ del movimiento angular descrito por el dispositivo.

lo artificial, como la velocidad de movimiento o la energía de curvatura, parte de un sistema de visión estereoscópica y un modelo deformable 3D que modela y sigue el contorno del músculo.

Esta sección está estructurada siguiendo los pasos del método propuesto para la caracterización de los músculos artificiales. Primero se presenta el sistema de adquisición de imágenes implementado, así como el modelo deformable 3D desarrollado para realizar el seguimiento. A continuación se detallan los parámetros de interés extraídos y se muestran los resultados de los experimentos.

5.1.1. Método

Originalmente, la caracterización y el estudio de las variaciones de curvatura del músculo sometido a una corriente eléctrica se hacía de forma manual. Dentro del proyecto [39] se propuso inicialmente un sistema basado en una cámara de video y un contorno activo en 2D [267]. Esta primera aproximación aporta parámetros relevantes para el modelado del músculo, pero tiene el inconveniente de que el movimiento captado es el que se produce en el plano normal a la cámara. Para superar esta limitación se amplía el sistema de visión a dos cámaras, y se utiliza un contorno activo 3D para modelar el músculo y conseguir así resultados más precisos e independientes de la situación de la cámara respecto al movimiento del músculo [265].

El método de caracterización de músculos artificiales se divide en dos fases. La primera es

la adquisición de los pares de imágenes estéreo (véase Figura 5.1), seguida de un preprocesado para extraer las características de la imagen que sirven de fuerzas externas al modelo deformable. La segunda fase consiste en el seguimiento del dispositivo mediante un modelo deformable tridimensional y la obtención de su posición espacial en cada pareja de imágenes.

Sistema de visión estereoscópica

La arquitectura del sistema utilizado para la adquisición de los fotogramas está compuesto por dos cámaras de vídeo conectadas a una estación de trabajo. Con el fin de obtener la situación del músculo a partir de las dos proyecciones que proporcionan las dos cámaras y ajustar el contorno activo, es necesario disponer de la posición de las cámaras con respecto al músculo [222, 208]. Las cámaras están situadas ortogonalmente en el plano XY enfrente del músculo, siguiendo el esquema de la Figura 5.2. El sistema controla y maneja la posición de las cámaras y realiza la adquisición de imágenes mediante una tarjeta de adquisición multicanal [32]. El interfaz gráfico del software de adquisición de imágenes estéreo se muestra en la Figura 5.3.

Figura 5.2.: Esquema del sistema de visión estereoscópica.

Una vez adquiridas, las imágenes son segmentadas con un algoritmo basado en la técnica denominada “competición de regiones” [289]. El objeto resultante en cada imagen es refinado mediante filtrado morfológico [224, 225]. Estas operaciones producen un contorno preciso que define la proyección del músculo y proporciona las fuerzas externas de la imagen en los planos XZ e YZ , en el algoritmo posterior de seguimiento con el modelo deformable.

Figura 5.3.: Interfaz para la adquisición de vídeo estéreo.

Contornos activos en 3D

La capa polimérica experimenta un movimiento de torsión que, aunque no es complejo, es claramente no rígido (véase Figura 5.1). A pesar de la popularidad de los métodos de combinación de bloques (*block-matching*) para estimar la correspondencia espacial entre pares de imágenes, la tarea de seguir movimiento no rígido se lleva a cabo de forma más eficaz con modelos deformables [245]. En la aproximación 3D presentada en este trabajo, el seguimiento del músculo se realiza a partir de múltiples proyecciones y un único contorno activo paramétrico 3D:

$$\mathbf{v}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))^T. \quad (5.1)$$

El contorno está situado en el espacio $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donde x , y y z son funciones coordenadas que dependen del parámetro $s \in [0, L]$ y del tiempo t [141].

El comportamiento del contorno viene dado por la minimización del funcional de energía,

$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}(\mathbf{v})$, que se compone de un término $\mathcal{S}(\mathbf{v})$ referente a las fuerzas internas de deformación de la curva, y del término $\mathcal{P}(\mathbf{v})$ que tiene en cuenta las distintas fuerzas externas necesarias para que el contorno activo pueda seguir el comportamiento del músculo: por un lado incorpora fuerzas extraídas de la imagen como la atracción a bordes de objetos o ajustes adicionales del algoritmo de contornos activos para considerar aspectos mecánicos específicos del músculo. Dado que la tira polimérica sufre una torsión, sin estirarse ni encogerse, la longitud del contorno activo se fuerza a que permanezca constante a lo largo del tiempo. El extremo superior del músculo mantiene su posición constante al estar fijo y, por ello, el primer nodo del contorno activo se mantiene fijo a lo largo del proceso de estimación del movimiento del músculo. Las fuerzas externas producidas por el gradiente de la imagen actúan sobre las proyecciones del contorno activo 3D en los planos XZ e YZ, mientras que las fuerzas externas debidas a la longitud de la curva lo hacen directamente sobre la curva, ya que dependen únicamente de la forma en 3D y no de las proyecciones 2D de la curva.

Para la implementación del modelo deformable se recurre a la discretización y a la formulación de elementos finitos. Como las imágenes capturadas y preprocesadas tienen un nivel muy bajo de ruido, se ha construido el contorno activo utilizando polinomios de Hermite [141].

Dado que el contorno activo depende de las proyecciones del músculo, surge un problema cuando el movimiento de torsión de éste alcanza 90° . En esta situación, el extremo inferior del contorno activo estaría atraído por el extremo inferior de la proyección, en lugar de por el extremo inferior del músculo. Para solventar este problema de oclusión y mejorar la precisión en la estimación de la curva, después de cada iteración, las fuerzas externas de la componente z se ponderan a partir de ambas proyecciones. Se han probado diferentes algoritmos para detectar y dar prioridad a la proyección de la coordenada z donde no se produce solapamiento [265].

5.1.2. Resultados experimentales

Para implementar el método propuesto y facilitar el procesado y la extracción de parámetros, se ha desarrollado una aplicación cuyo interfaz gráfico se muestra en la Figura 5.4. La aplicación tiene un núcleo principal basado en contornos activos deformables, al que se le han añadido utilidades para la automatización y simplificación del procesado, así como utilidades basadas en las características del problema para reducir el coste computacional. La Figura 5.4 muestra como la curva 3D se ajusta en cada una de las proyecciones del músculo en la secuencia de vídeo. Tras ajustar en cada pareja de imágenes un contorno activo al músculo, se obtienen los siguientes resultados: vectores de movimiento y distribución de la energía de curvatura a lo largo del músculo en el tiempo.

El experimento se ha realizado aplicando sobre un músculo artificial (polímero conductor

Figura 5.4.: Interfaz gráfico de la aplicación para el seguimiento y el ajuste del contorno activo 3D al músculo artificial.

tricapa) una intensidad de corriente eléctrica constante de +5mA durante 30 segundos, que produce un movimiento angular de 90° en el extremo libre del músculo. Después se aplica una corriente de -5mA sobre el músculo para recuperar la posición original. Este movimiento completo hasta volver a la situación original es lo que se denomina un “ciclo”. La diferencia de potencial y el consumo de corriente por el músculo se mide directamente sobre el dispositivo.

Movimiento paramétrico

Al mantenerse constante la longitud del músculo durante el experimento y al quedar el contorno activo correctamente ajustado en cada fotograma, $v(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))^T$, el vector de desplazamiento se define como la diferencia de posición de la curva entre dos pares de fotogramas consecutivos. El movimiento se obtiene como la tasa de variación: cociente entre el desplazamiento y el tiempo transcurrido entre fotogramas, es decir,

$$\vec{vel}(s, t) = \left(\frac{\Delta x(s, t)}{\Delta t}, \frac{\Delta y(s, t)}{\Delta t}, \frac{\Delta z(s, t)}{\Delta t} \right) \quad (5.2)$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta x(s, t) &= x(s, t + \Delta t) - x(s, t) \\ \Delta y(s, t) &= y(s, t + \Delta t) - y(s, t) \\ \Delta z(s, t) &= z(s, t + \Delta t) - z(s, t)\end{aligned}\tag{5.3}$$

y Δt es el tiempo transcurrido entre fotogramas, $\Delta t = 1/fps$ y fps es el número de pares de fotogramas por segundo.

Figura 5.5.: Movimiento del músculo durante el experimento.

En la Figura 5.5 se representa la trayectoria del movimiento que realiza el músculo. El conjunto de contornos muestra la situación del dispositivo en instantes temporales equiespaciados. En la fila superior de la Figura 5.7 se muestra el desplazamiento del músculo entre dos fotogramas de la secuencia adquirida. Este movimiento del dispositivo se representa sobre el músculo en módulo y dirección mediante vectores de desplazamiento.

Energía de curvatura

La curvatura de un contorno en un punto se define como la inversa del radio del arco que describe el contorno en ese punto [238]. Como la curvatura es función del radio, una versión invariante con la escala es la siguiente:

$$E_{curv}^e(s) = \frac{\left| \hat{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s^2} \right|}{\pi \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \right|}\tag{5.4}$$

Figura 5.6.: Variación de la energía de curvatura y tensión aplicada en el tiempo.

donde $\hat{n}$ es el vector unitario normal al contorno. Integrando sobre cada elemento del contorno y sumando los resultados de las integrales se obtiene la energía total para todo el contorno.

En la gráfica izquierda de la Figura 5.6 se muestra la variación con el tiempo de la energía total de curvatura almacenada en el dispositivo. La gráfica de la parte derecha muestra la energía consumida por el dispositivo al realizar el movimiento, que se consigue con una intensidad de corriente constante de +3mA. Se observa que existe una relación entre la energía de curvatura y la energía consumida por el músculo al curvarse. Esto prueba la alta eficiencia del dispositivo, ya que la energía suministrada se utiliza para curvar el músculo. La fila inferior de la Figura 5.7 muestra la distribución de la energía que se obtiene a lo largo del músculo en ciertos fotogramas de la secuencia de vídeo estéreo.

Ciclo de vida

El ciclo de vida del músculo artificial consiste en un número de movimientos de torsión, que serán usuales en las futuras aplicaciones del dispositivo. Consideramos como parámetros clave para describir las propiedades mecánicas del músculo tanto el movimiento paramétrico como la energía de curvatura calculada a partir del contorno 3D [261].

La parte izquierda de la Figura 5.8 muestra la evolución del voltaje producida por el paso de corriente en los ciclos 1, 250 y 500. Se observa una evolución casi lineal: la pendiente de la recta y el voltaje suben conforme aumenta el número de ciclos que ha sufrido el músculo artificial. En cada ciclo, el consumo total de energía del dispositivo se puede calcular con la integral de la curva de potencial multiplicado por la corriente constante. La parte derecha de la Figura 5.8 expone los valores de energía total consumida, ajustados por una curva cuadrática. Así, a partir de estos

Figura 5.7.: Distribución del movimiento y energía de curvatura del dispositivo.

resultados, se puede concluir que la energía utilizada por el músculo para efectuar el movimiento de torsión aumenta con el número de ciclos de trabajo.

Figura 5.8.: Tensión y energía medida directamente en el músculo.

Por otro lado, a partir del método basado en el sistema de visión, obtenemos la energía de curvatura del músculo para los ciclos de trabajo. La Figura 5.9 muestra las curvas de energía de curvatura para los ciclos 1, 250 y 500 y su ajuste mediante una recta. Se puede ver que la pendiente de las rectas decrece con el número de ciclos del músculo. Dado que la energía de curvatura representa el movimiento del dispositivo, se puede deducir que este movimiento se reduce conforme aumentan el número de ciclos de trabajo del músculo. Esta evolución puede ajustarse mediante una exponencial decreciente. En la izquierda se muestra la evolución de la energía de curvatura

ra a lo largo del tiempo para varios ciclos. De nuevo, esto prueba que a igual energía eléctrica consumida, la energía de curvatura utilizada por el músculo decrece con el número de ciclos.

Figura 5.9.: Energía de curvatura en ciclos 1, 250, 500 y durante el ciclo de vida.

Por lo tanto, de los resultados experimentales anteriores podemos concluir que la eficiencia de los músculos artificiales se reduce con su uso: ciclos sucesivos bajo el mismo flujo de corriente eléctrica requieren mayor consumo de energía, mientras que se alcanza un movimiento menor.

5.1.3. Conclusiones

En esta sección se ha presentado un método basado en un sistema de visión para el seguimiento y obtención de la posición de un músculo artificial. Con este sistema de visión estereoscópica es posible obtener la situación del dispositivo polimérico en cada instante. Sobre los pares de imágenes estereó se detecta la posición y el movimiento del músculo mediante un contorno activo en 3D. A partir de esos datos se obtiene información del dispositivo, como la velocidad de movimiento, la energía de curvatura, etc, en cualquier dirección del espacio. Nótese que estos parámetros no se pueden medir directamente por encontrarse el músculo en un medio líquido.

Los resultados obtenidos se cotejan con los valores electroquímicos obtenidos durante el experimento, tales como carga consumida, corriente, o diferencia de potencial en los extremos del músculo. El estudio realizado sobre el dispositivo polimérico en medio húmedo revela que la carga consumida es proporcional a la curvatura sufrida por el músculo. La distribución del grado de torsión a lo largo del dispositivo se mantiene constante durante el movimiento; esta distribución está relacionada con la calidad y la eficiencia del dispositivo construido.

Por último, hay que comentar que el movimiento detectado es solamente el que se produce en uno de los bordes del dispositivo. La línea actual de trabajo y el siguiente objetivo es la utili-

Figura 5.10.: Caracterización del músculo mediante una malla activa 3D.

zación de una malla activa 3D (ver Figura 5.10) en lugar de un contorno activo 3D. Para ello se está estudiando la forma de implementar de manera eficiente la malla activa, ya que al aumentar el número de puntos del modelo deformable el coste computacional aumenta considerablemente, y pone en peligro la viabilidad de implementación en tiempo real.

5.2. Reconstrucción tomográfica con compensación de movimiento

Esta sección primero revisa el problema del movimiento de órganos en tomografía computerizada, y después muestra un método original que efectúa una reconstrucción de imágenes tomográficas con compensación de movimiento. El método propuesto está basado en modelos deformables. El primer paso en la compensación del movimiento es el cálculo de éste directamente a partir de la reconstrucción tomográfica clásica (sin compensación de movimiento), evitando los artefactos selectivamente. La estimación de movimiento proporcionada por el ajuste e interpolación con los modelos deformables se utiliza para reducir los artefactos de la imagen cuando se aplica a la reconstrucción. Los resultados preliminares muestran que el método produce imágenes con artefactos de bajo nivel en prototipos con movimiento sintético.

5.2.1. Introducción

La tomografía es una técnica de registro gráfico de imágenes corporales, correspondientes a un plano determinado. De acuerdo con los mecanismos utilizados y los procedimientos técnicos seguidos, existen tomografías de rayos X, axial computerizada, de ultrasonido, de emisión de positrones y de resonancia magnética. El interés principal de la tomografía es obtener la localización espacial y temporal de los órganos físicos registrados en una secuencia de imágenes. Los aspectos físicos de las diferentes modalidades de tomografía se analizan en [48].

La Tomografía Axial Computerizada (TAC o sólo TC) permite reconstruir una imagen del interior de un objeto a partir de sus proyecciones transversales. Cuando existen órganos dinámicos en el objeto, su movimiento produce inconsistencias en los datos proyectados en el principio y final de una exploración con el escáner, produciendo artefactos en la imagen reconstruida. Los resultados que se pueden obtener a partir de una imagen reconstruida con un bajo nivel de artefactos son una mejor resolución de la imagen, mayor precisión en la delineación de tejidos sanos durante el movimiento y determinación de los bordes de las regiones que se están moviendo dentro de la zona. En [277, 278] se trata el análisis teórico, las limitaciones fundamentales, el diseño eficiente y la validación experimental para la tomografía variante en el tiempo.

El primer prototipo capaz de explorar con un escáner el corazón latiendo y los pulmones moviéndose ha sido el DSR (Dynamic Spatial Reconstructor) desarrollado en la clínica Mayo [218]. En el proyecto DynCT [122] se intenta completar la localización espacial de los órganos con una localización temporal para seguir secuencias de imágenes dinámicas. Asociada a esta dimensión temporal está la naturaleza dinámica de los órganos, que se debe tanto al movimiento (informa-

ción morfológica), como al metabolismo (información funcional). La introducción de la dimensión temporal es muy importante para estudiar el movimiento cardíaco, y las imágenes en tiempo real se hacen imprescindibles cuando el sistema se utiliza para controlar un tratamiento o para ayudar al cirujano durante el procedimiento quirúrgico en una intervención guiada por vídeo.

5.2.2. Estimación y compensación del movimiento

Desde los primeros estudios de Hounsfield y Cormak, la medicina nuclear y la tomografía de rayos X han discurrido por caminos paralelos en la reconstrucción de imágenes. En ambas modalidades, el tiempo de adquisición de una imagen es largo, por ello el movimiento del paciente es un tema crítico. En los primeros artículos relacionados con el proyecto DSR ya se trata la manera de reducir los artefactos debidos al movimiento del corazón. La idea consiste en tener en cuenta sólo algunas proyecciones, asociadas a unos periodos temporales, y completar las proyecciones que faltan retroproyectando la imagen de los objetos estimados a partir de la secuencia completa de imágenes [97, 128, 179]. El movimiento respiratorio es también una fuente de artefactos en las imágenes del corazón [257]. Recientemente se ha propuesto un sistema SPECT de miocardio con técnicas de disparo que se basan en la respiración [54] que utilizan medidas del ECG y un monitor respiratorio.

Se han propuesto distintas técnicas para compensar el movimiento. En la patente [142] se describe un método para compensar el movimiento del paciente asociado a la inspiración y espiración. Se utiliza la determinación de los centroides en imágenes sucesivas, reescalando en cada proyección la alineación de los centroides. En [217], la reducción de los artefactos del movimiento se consigue utilizando una técnica específica de retroproyección de píxel. En [65], la compensación del movimiento respiratorio se trata utilizando un modelo que describe la variación temporal de la magnificación y desplazamiento de los órganos a lo largo de dos ejes. En [121] se describe un esquema de ponderación adaptativa para la supresión de artefactos debidos al movimiento respiratorio. El esquema de ponderación está basado en la observación de que los artefactos de movimiento están causados por la inconsistencia entre los datos de las proyecciones de principio y fin de la exploración. Incorporando esta información del movimiento del paciente, obtenida mediante medidas externas, se propone una combinación optimizada para conseguir el mejor compromiso entre los artefactos debidos al movimiento del paciente y el ruido de la imagen.

El movimiento se suele describir mediante un campo de vectores de desplazamiento asociado con la transformación espacial que enlaza la localización de cada punto en un fotograma dado con su localización en el siguiente fotograma. En [166] se encuentra una sinopsis de problemas actuales y métodos para el cálculo y análisis del movimiento en la imagen, exponiendo los modelos subyacentes y las asunciones que los respaldan. Algunos métodos de compensación del movimiento se dedican a la reconstrucción del campo de vectores [182, 205]. En [109] se puede en-

contrar una revisión actual sobre tomografía tridimensional para campos vectoriales y tensoriales. Las aproximaciones más importantes se pueden clasificar en métodos basados en la correlación y métodos diferenciales [235].

Métodos basados en la correlación

Los métodos basados en la correlación calculan los vectores de desplazamiento que optimizan la similitud entre dos imágenes. La imagen se descompone en bloques y se define el desplazamiento como aquel que optimiza para cada bloque la correlación dentro de una zona de búsqueda. El algoritmo de *block matching* se puede aplicar a ecocardiogramas e imágenes de resonancia magnética para estimar el movimiento de la pared del corazón [26]. Si se considera la imagen como una lista de objetos, se necesita la estimación de movimiento orientado a objetos [53, 234].

En el análisis del movimiento, la condición de tiempo real es importante por lo que se proponen algoritmos rápidos, bien restringiendo la estimación de movimiento a una pequeña área de búsqueda cuyo centro está predicho [130], bien reconstruyendo los bloques con compensación de movimiento en el dominio comprimido utilizando un filtrado paso bajo adaptable [139]. En [211] se propone un criterio de emparejamiento rápido basado en un criterio de clasificación de la diferencia de píxel para la implementación VLSI de un estimador de movimiento basado en bloques.

Métodos diferenciales

En aproximaciones diferenciales, el movimiento de un objeto viene descrito como un flujo óptico y se utiliza una ecuación diferencial que enlaza las variaciones temporales y espaciales. La ecuación en derivadas parciales se resuelve en un marco variacional. El interés en tomodensitometría es que las hipótesis de conservación de la masa tienen un significado físico. De todos modos, esta aproximación es muy costosa computacionalmente y son preferidas para la codificación de video en tiempo real las aproximaciones basadas en la correlación.

Los métodos diferenciales se introdujeron en [117], y en [16, 25, 29] se analiza el funcionamiento de las técnicas de flujo óptico. En [230, 231, 103] se presenta la aplicación de estos métodos al cálculo de los vectores de velocidad 3D en imágenes cine-CT de un corazón humano.

5.2.3. Método para corregir los artefactos de movimiento en tomografía

A pesar de la popularidad de los métodos de bloques, la tarea de seguir movimiento no rígido se lleva a cabo mejor con modelos deformables o contornos activos [126]. Las características del movimiento en este problema sugieren el uso de esta última técnica, dado que el *phantom* experimenta un movimiento de expansión que, aunque no es complejo, es claramente no rígido. Las *snakes* (modelos de contornos activos) fueron presentadas por vez primera en 1987 y hoy en día se ha convertido en una técnica estándar en varios campos del procesamiento de imagen, como análisis de imágenes médicas [228] o seguimiento de objetos en movimiento en secuencias de video [249].

Para validar el método, se ha añadido movimiento sintético a un *phantom* especialmente diseñado. El método extrae una estimación del movimiento de imágenes reconstruidas utilizando geometría de haces paralelos [124]. Para abordar este problema mal condicionado es necesario algún conocimiento previo: el método asume que la forma del objeto principal que se mueve es conocida. Una vez obtenidos los campos de los vectores de movimiento, se reconstruye la imagen con compensación de movimiento utilizando el algoritmo de retroproyección específico de píxel [217]. El proceso consta de los siguientes pasos:

Diseño del movimiento de *phantom* y sinograma resultante

La validación experimental debe incluir prototipos (*phantoms*) experimentales, como recoge el informe de la Comunidad Europea EUR 16262 [83] sobre los criterios de calidad en tomografía computerizada. En [239] se revisan los *phantoms* más usados y se proponen nuevos *phantoms* con bajo contraste para tomografía computerizada. En nuestro problema, el *phantom* consiste en un conjunto de regiones elípticas de distinto tamaño y contraste. Este *phantom* representa un corte axial que contiene el corazón. A estas elipses se le ha añadido movimiento que simula el latido del corazón. El *phantom* contiene dos elipses estáticas externas y un círculo interno (con movimiento de inflado y traslación) que incluye a su vez dos elipses y dos círculos pequeños. El sinograma resultante de una exploración completa del escáner utilizando 256 sensores y 560 proyecciones puede verse en la Figura 5.12. Los datos referentes a las elipses que forman el *phantom* se encuentran en la siguiente tabla, donde cada línea contiene los parámetros de geometría, contraste y movimiento de cada una de las elipses.

0.0	0.0	0.9	0.7	0.0	1.0
0.0	0.0	0.7	0.5	0.0	-1.0
0.0	-0.05	0.3	0.3	0.0	1.0
0.0	-0.6	0.1	0.05	0.0	0.5


```
-0.15 -0.05 0.1 0.2 0.0 -0.1
0.05 0.22 0.015 0.015 0.0 0.4
0.23 0.1 0.02 0.02 0.0 0.2
0.12 -0.15 0.12 0.12 0.0 -0.1
0.00 0.00 0.100 0.100 0.00 0.00
0.00 0.00 0.100 0.100 0.00 0.00
```

Column 1: x0 the x-coordinate of the center of the ellipse
 Column 2: y0 the y-coordinate of the center of the ellipse
 Column 3: a the length of the horizontal semi-axis of the ellipse
 Column 4: b the length of the vertical semi-axis of the ellipse
 Column 5: phi the angle (in degrees) between the horizontal semi-axis
 of the ellipse and the x-axis of the image
 Column 6: A the additive intensity value of the ellipse

Los datos relativos al movimiento de cada elipse vienen dados en el siguiente fichero de configuración:

```
500.0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
179 0 179 0 0 0.05 0 0.05 0.05 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
179 0 179 0 -0.03 0.04 0 0.03 0.05 0
179 0 0 0 0.01 0.1 0 0 0 0
179 0 0 0 0.05 0.05 0 0 0 0
179 0 179 0 0.04 0.05 0 0.02 0.03 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
=====
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
```

1st line = acquisition time in milliseconds

1 = period of translation, should be odd, if no movement = 0.
 2 = period of rotation, should be odd, if no movement = 0.
 3 = period of deformation, should be odd, if no movement = 0.
 4 = period of oscillation, should be odd, if no movement = 0.
 5 = length of translation in x direction, normalized to range (-1,1).
 6 = length of translation in y direction, normalized to range (-1,1).
 7 = angle of rotation, must be in degrees.
 8 = length of deformation of the major axis, normalized to (-1,1).
 9 = length of deformation of the minor axis, normalized to (-1,1).
 10 = length of oscillation in x and y direction, normalized (-1,1).

Figura 5.11.: Corte axial del *phantom* durante el movimiento. El ángulo α indica la situación de los sensores en ese momento.

Reconstrucción de la imagen en ángulos específicos

Para la estimación del movimiento se necesitan algunas reconstrucciones consecutivas. Cada una de esas imágenes muestra la posición de los objetos en un determinado instante de tiempo. En presencia de movimiento, todas las imágenes reconstruidas contienen artefactos (véase Figura 5.13). Los artefactos son especialmente visibles en las direcciones perpendiculares al ángulo inicial de reconstrucción, y en la proximidad del objeto en movimiento (se produce una incoherencia entre las proyecciones de la misma zona en instantes distintos debido al movimiento de esa zona). Sin embargo, con la suposición de movimiento suave, los bordes de los objetos cercanos a esas áreas (con menos artefactos) son útiles para estimar la posición de los objetos.

Figura 5.12.: Sinograma del *phantom*.

Figura 5.13.: Imágenes reconstruidas cada 45° sin compensación de movimiento utilizando Ramlack y ventana de Parzen. La reconstrucción abarca 180° del sinograma empezando en el ángulo indicado por α (el ángulo $\alpha=0$ se corresponde con la posición inferior de la dirección vertical y el ángulo crece en sentido horario).

Extracción de bordes

Las imágenes reconstruidas a partir del sinograma son filtradas con un filtro de gradiente direccional. El ángulo del filtro direccional en cada fotograma debe elegirse para evitar los artefactos existentes en dicho fotograma. El filtrado selectivo mantendrá la información correcta correspondiente al ángulo bajo estudio. Los artefactos de movimiento son causados por la inconsistencia de los datos de las proyecciones al principio y al final de un barrido de 180 grados del escáner. Los artefactos tienen la dirección normal al ángulo de inicio de la reconstrucción. En el experimento, los ángulos de inicio están separados 45 grados. El ángulo del gradiente direccional se ha elegido en la mitad de dos ángulos de inicio consecutivos. Si el ángulo de inicio de cada reconstrucción es α , entonces la dirección del gradiente será $g = \alpha + 90^\circ + 45^\circ/2$. Una vez que las imágenes reconstruidas son filtradas, se le aplica una máscara. Esta máscara se obtiene como el valor medio de los píxeles donde existe movimiento en la secuencia de imágenes.

Figura 5.14.: Filtrado de las imágenes reconstruidas con un filtro de gradiente direccional para preservar la información correcta de las imágenes en la dirección $\alpha + 90^\circ + 22,5^\circ$.

Ajuste del contorno activo

Basándose en los bordes previamente obtenidos y en una estimación del área en cada fotograma (véase Tabla 5.1), se ajusta un contorno activo a los bordes del gradiente. Este contorno paramétrico llega a su equilibrio cuando se compensan las fuerzas internas y externas. En este experimento, las fuerzas empleadas han sido las siguientes:

- Fuerzas de inflado [56], para alcanzar el área deseada.
- Fuerzas de la imagen, para atraer la curva a los bordes.
- Fuerzas de curvatura, para mantener una forma dada.

Ángulo α	-22.5°	22.5°	67.5°	112.5°
Dirección gradiente g	90.0°	135.0°	180.0°	225.0°
Radio	0.6038	0.6309	0.6691	0.6962
Área	1.1454	1.2503	1.4066	1.5227

Tabla 5.1.: Radio y área del círculo interno para cada ángulo de reconstrucción

Los parámetros de forma se almacenan cuando la *snake* alcanza el estado de equilibrio. La información de forma del contorno también se almacena en el parámetro de rigidez β . En un círculo, β tiene una distribución uniforme, pero en una forma arbitraria, cada elemento de la *snake* variará su β de forma adaptativa para minimizar el conjunto de fuerzas, tomando así la forma arbitraria deseada en cada elemento del contorno.

Figura 5.15.: Ajuste del contorno activo utilizando las fuerzas de la imagen y las restricciones de forma en el tercer fotograma correspondiente a $\alpha = 67,5^\circ$ y dirección del gradiente de $g = 180^\circ$.

Estimación del movimiento

El movimiento está descrito por los vectores de desplazamiento asociados a la transformación espacial que enlaza la situación de cada punto en un fotograma dado con su situación en el siguiente fotograma. A partir de los parámetros de forma de un contorno activo, los vectores de desplazamiento de los píxeles donde la curva está situada se obtienen mediante la substracción de coordenadas. En el resto de puntos de la imagen, los vectores de desplazamiento para cada componente se obtienen mediante interpolación [273] utilizando una superficie deformable (véase Figura 5.16). De esta manera, el movimiento es extendido suavemente a todas las áreas de la imagen (véase Figura 5.17).

Figura 5.16.: Filtrado iterativo del mapa de vectores de movimiento utilizando una superficie deformable, y como restricciones los valores de los vectores de movimiento en los puntos conocidos.

Reconstrucción de la imagen

Una vez que se han estimado todos los valores de los vectores de movimiento (MFV), el método realiza una reconstrucción de la imagen con compensación de movimiento. Para este propósito se ha adaptado el algoritmo de retroproyección de píxel [217]. Dado que sólo son conocidos cuatro MFV, el movimiento equivalente en cualquier ángulo de la reconstrucción se calcula como la acumulación de los MFV previos y la parte correspondiente al MFV (asunción de distribución lineal del movimiento entre instantes de MFV).

Figura 5.17.: Mapas de vectores de movimiento entre los fotogramas 2-3 y 3-4. La columna izquierda muestra el valor de la componente v_x y la columna derecha el valor la componente v_y de cada uno de los vectores de movimiento $v = (v_x, v_y)$ de los píxeles de la imagen.

5.2.4. Resultados y conclusiones

En la Figura 5.18 se muestra el diagrama de bloques utilizado para la reconstrucción tomográfica sin compensación de movimiento y con compensación de movimiento utilizando la

Figura 5.18.: Diagrama de bloques del proceso de reconstrucción tomográfica realizado en el lenguaje de programación visual Cantata del sistema Khoros.

información proporcionada por los contornos activos (las reconstrucciones se han realizado en el lenguaje de programación visual Cantata del sistema Khoros). La Figura 5.19 muestra la reconstrucción original a partir del sinograma y la reconstrucción con compensación de movimiento utilizando el algoritmo descrito. A partir de la solución del método se extraen las siguientes conclusiones: todas las formas de los objetos son restauradas adecuadamente, los efectos visuales de los artefactos son claramente reducidos y se mejora la resolución de la imagen. Además, los pequeños puntos que aparecen dentro del círculo central son perfectamente visibles en la imagen corregida, mientras que no podían distinguirse en la reconstrucción original. De todos modos, los artefactos de la imagen no son eliminados totalmente, debido a la limitación de la estimación del movimiento.

En esta sección se ha mostrado un método basado en contornos activos para estimar y compensar el movimiento en la reconstrucción de imágenes de tomografía computerizada. Este método intenta minimizar los artefactos producidos por el movimiento natural del corazón. El método se ha probado con éxito en imágenes sintéticas con movimiento suave y deformable. Debido a

la naturaleza mal condicionada del problema y la existencia de múltiples soluciones válidas, el proceso propuesto necesita de conocimiento previo, en este caso la forma del objeto.

Figura 5.19.: Reconstrucción tomográfica a partir del ángulo indicado por α : (a) y (b) sin compensación de movimiento, directamente del sinograma y (c) con compensación de movimiento extraído a partir de reconstrucciones parciales del sinograma.

Conclusiones

En esta Tesis se han revisado las formulaciones en el dominio espacial de los contornos activos; se han descrito los problemas intrínsecos de la formulación original y las soluciones aportadas en el estado de la técnica; se ha trasladado la formulación de los contornos activos paramétricos al dominio de la frecuencia proporcionando dos resultados importantes: el primero es la posibilidad de diseñar y entender el modelo deformable desde otro punto de vista hasta ahora no explorado, y el segundo, un importante ahorro computacional en la implementación.

La formulación de los modelos deformables en el dominio de la frecuencia no pretende resolver ninguno de los problemas de los contornos activos referidos a la sensibilidad a la inicialización, robustez frente al ruido, etc., pero sí que permite una implementación más eficiente del algoritmo iterativo del sistema de segundo orden con relación a la formulación clásica en el dominio espacial con la notación matricial. Con la formulación en el dominio de la frecuencia, el problema de inversión de la matriz del sistema se convierte en un producto de espectros de señales, y puede verse como un filtrado. Utilizando la formulación frecuencial, la extensión al caso de mallas deformables es directa sin más que utilizar la transformada de Fourier bidimensional, mientras que en el dominio espacial se han de plantear diversas estrategias (que no pongan en peligro la estabilidad del sistema) para simplificar el modelo y conseguir una implementación matricial tratable.

Gracias a la traslación de la formulación de los contornos activos al dominio de la frecuencia, es posible realizar un análisis de la convergencia de una *snake* en un problema de segmentación de imagen. Con el análisis realizado también es posible determinar la evolución del contorno y controlar la influencia de las fuerzas dependientes de él que lo conducen a minimizar su energía. Por último, en esta Tesis se han aportado las reglas de diseño para establecer el valor óptimo de

los parámetros dinámicos del contorno activo, lo que permite acelerar su convergencia cuando se segmenta un objeto de una imagen.

6.1. Líneas futuras

La principal contribución de esta Tesis es el análisis de la convergencia de un contorno activo y las reglas para elegir los parámetros dinámicos del sistema iterativo para que el contorno delimite el objeto a segmentar con la máxima velocidad. Las líneas futuras de investigación están relacionadas con la aplicación del análisis de la convergencia en otros ámbitos y en otras formulaciones: la extensión al caso de superficies deformables [165, 247, 252] con objeto de acelerar su velocidad de convergencia, así como la exportación del procedimiento seguido en el análisis para su aplicación en las técnicas de conjuntos de nivel [188, 227].

El análisis de la convergencia de una superficie deformable es necesario en aplicaciones de estimación de movimiento deformable, para realizar el filtrado de los vectores de movimiento con la menor cantidad de iteraciones [168, 170]. Otra utilidad de esta línea de investigación es la aplicación de mallas deformables en tres dimensiones para el seguimiento y caracterización de músculos artificiales mediante un sistema de visión estereoscópica y modelos deformables [32, 261].

Cuando se dispone de conocimiento previo sobre la forma del objeto a segmentar o del que hay que realizar un seguimiento en vídeo, el uso de plantillas deformables reduce el número de parámetros del sistema, pero las plantillas siguen estando formadas por una serie de nodos [31, 286]. Una línea de investigación consistiría en el estudio de la evolución dinámica de los nodos respecto los parámetros que definen la plantilla y buscar la equivalencia con el análisis realizado para el caso de un contorno activo.

Una aplicación de esta Tesis sería la combinación del resultado de segmentación en una imagen proporcionado por el algoritmo *watershed* de la morfología matemática con el algoritmo de los contornos activos, que minimiza la energía de las derivadas del contorno del objeto segmentado [181, 196, 287]. La línea de investigación aquí sería como establecer el refinamiento del contorno inicial dado por *watershed* con una *snake* de forma que llegase a la situación final con el menor número de iteraciones. También sería interesante estudiar la extensión al caso 3D, utilizando el análisis de convergencia de superficies deformables, para la posible incorporación de estos resultados en el suavizado de los resultados de segmentación del algoritmo de *watershed* en datos volumétricos.

Otra línea futura de investigación es el registro elástico de imágenes [18], complementando

así una de las líneas de investigación del grupo dedicada al registro deformable de imágenes médicas. El registro de imagen es el procedimiento encargado de poner dos imágenes en un sistema de referencia común que permita la fusión de la información que contienen. En el registro automático de imágenes PEC-TC (Tomografía por Emisión de Positrones - Tomografía Axial Computerizada), las imágenes de PET ofrecen información acerca del metabolismo de los tejidos y las imágenes TC obtienen información anatómica. La principal dificultad radica en las deformaciones elásticas que experimentan los órganos, tanto por los distintos protocolos de adquisición de las imágenes como por la propia actividad metabólica. Hay dos grandes grupos de técnicas de registro: las basadas en referencias extraídas de las imágenes y las basadas en el contenido íntegro de las imágenes. En el primer caso es posible establecer, de forma relativamente rápida y sencilla, un registro cuya precisión y robustez vendrán dadas por la precisión y robustez con las que se sea capaz de localizar dichas referencias. En el segundo caso se evita la necesidad de referencias y, por consiguiente, la limitación en la precisión que comportan, pero el precio a pagar es una convergencia más lenta y con mayor tendencia a quedar atrapada en mínimos locales. La línea de investigación consistiría en la localización de ciertas referencias anatómicas con la ayuda del reconocimiento de patrones y contornos activos, ajustar las deformaciones elásticas más importantes y filtrar el resto de vectores de correspondencia mediante una malla deformable.

Funciones de forma

En este apéndice se van a obtener los núcleos de rigidez de los modelos deformables a partir de la formulación en el dominio del espacio y de la frecuencia.

A.1. Solución espacial

La aproximación de la *snake*¹ mediante elementos finitos en la ecuación (2.7) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(s, t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0(s, t) & \mathbf{v}_1(s, t) & \dots & \mathbf{v}_{N-1}(s, t) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} x_0(s, t) & x_1(s, t) & \dots & x_{N-1}(s, t) \\ y_0(s, t) & y_1(s, t) & \dots & y_{N-1}(s, t) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0(s) \mathbf{u}_{0,x}(t) & \mathbf{N}_1(s) \mathbf{u}_{1,x}(t) & \dots & \mathbf{N}_{N-1}(s) \mathbf{u}_{N-1,x}(t) \\ \mathbf{N}_0(s) \mathbf{u}_{0,y}(t) & \mathbf{N}_1(s) \mathbf{u}_{1,y}(t) & \dots & \mathbf{N}_{N-1}(s) \mathbf{u}_{N-1,y}(t) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{0,x}(t) & \mathbf{u}_{1,x}(t) & \dots & \mathbf{u}_{N-1,x}(t) \\ \mathbf{u}_{0,y}(t) & \mathbf{u}_{1,y}(t) & \dots & \mathbf{u}_{N-1,y}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_1(s) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{N}_{N-1}(s) \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{u}^T(t) \mathbf{N}(s)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

¹En este caso la *snake* es de dos dimensiones. La extensión del contorno a tres o más dimensiones es directa.

El funcional de energía (2.1) con la aproximación de elementos finitos es el siguiente

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\alpha(s) \left| \mathbf{u}^T(t) N'(s) \right|^2 + \beta(s) \left| \mathbf{u}^T(t) N''(s) \right|^2 \right) ds + \mathcal{P}(\mathbf{v}). \quad (\text{A.2})$$

Utilizando la expresión de la norma de un vector fila x : $|x|^2 = \langle x, x \rangle = x \cdot x^T$, la expresión anterior se convierte en:

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\alpha(s) \mathbf{u}^T(t) N'(s) \left(\mathbf{u}^T(t) N'(s) \right)^T + \beta(s) \mathbf{u}^T(t) N''(s) \left(\mathbf{u}^T(t) N''(s) \right)^T \right) ds + \mathcal{P}(\mathbf{v}). \quad (\text{A.3})$$

Teniendo en cuenta que la transposición del producto de matrices dice que $(AB)^T = B^T A^T$, y que la integral se realiza sobre el dominio espacial s , $\mathbf{u}(t)$ se considera constante y puede salir fuera de la integral,

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \int_0^L \left(\alpha(s) N'(s) N'^T(s) + \beta(s) N''(s) N''^T(s) \right) ds \mathbf{u}(t) + \mathcal{P}(\mathbf{v}). \quad (\text{A.4})$$

La forma discreta de $\mathcal{E}(\mathbf{v})$ para el contorno activo puede escribirse como

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T K \mathbf{u} + \mathbf{P} \quad (\text{A.5})$$

donde K es la matriz de rigidez, y $\mathbf{P}$ es la versión discreta del potencial externo.

$$K = K_\alpha + K_\beta \quad (\text{A.6})$$

$$K_\alpha = \int_0^L \alpha(s) N'(s) N'^T(s) ds \quad (\text{A.7})$$

$$K_\beta = \int_0^L \beta(s) N''(s) N''^T(s) ds \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{P} = \int_0^L N^T(s) \mathbf{q} ds \quad (\text{A.9})$$

La solución de mínima energía se obtiene igualando el gradiente de (A.5) a cero, que es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones algebraicas

$$K \mathbf{u} = -\nabla \mathbf{P} = \mathbf{f} \quad (\text{A.10})$$

donde $\mathbf{f}$ se denomina vector de fuerzas externas generalizadas. La matriz de rigidez $K = K_\alpha + K_\beta$ para toda la *snake* tiene dimensión $N \times N$ y se construye ensamblando las submatrices de rigidez de cada elemento de la *snake*. El valor de un elemento de la matriz total de rigidez vendrá dado por la submatriz de su elemento y por las aportaciones de las submatrices de rigidez de los nodos adyacentes.

Utilizando un mismo valor de los parámetros de elasticidad, $\alpha_i = \alpha$, y rigidez, $\beta_i = \beta$ para toda la *snake*, la matriz de rigidez K es circulante [72, 134] y teniendo en cuenta las contribuciones

de los nodos adyacentes a un nodo en particular, se puede construir cada una de las filas de esa matriz mediante un desplazamiento circular de un vector principal de rigidez $k[n] = k_\alpha[n] + k_\beta[n]$ de dimensiones $1 \times N$.

A continuación se presentan, para cada uno de los N elementos e de la *snake*, las submatrices cuadradas $M \times M$ de rigidez K_α^e y K_β^e obtenidas con la formulación original en el dominio del espacio [141].

A.1.1. Funciones de forma de Hermite

En el caso de *snakes* de Hermite, $x(s)$ ($0 \leq s \leq l$, donde l es la longitud del parámetro del elemento de la *snake*) la curva entre dos nodos se aproxima por una función polinómica parametrizada por la posición y la pendiente en los puntos extremos del elemento $s = 0$ y $s = l$. Se puede demostrar que $x_e(s) = \mathbf{N}_e \mathbf{u}_{e,x}$, donde $\mathbf{u}_{e,x} = [x_i \ \theta_i \ x_{i+1} \ \theta_{i+1}]^T$ son los parámetros de forma del elemento e y $\mathbf{N}_e$ es la matriz de forma de Hermite

$$\mathbf{N}_e(s) = [1 \ s \ s^2 \ s^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3/l^2 s^2 + 2/l^3 s^3 \\ s - 2/l s^2 + 1/l^2 s^3 \\ 3/l^2 s^2 - 2/l^3 s^3 \\ -1/l s^2 + 1/l^2 s^3 \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.11})$$

donde l es la longitud del dominio del elemento de *snake*. Si se asume que la función de tensión $\alpha(s)$ y la función de rigidez $\beta(s)$ son constantes dentro de cada elemento, las matrices de rigidez asociadas a los componentes de tensión y rigidez para el elemento e son respectivamente

$$K_\alpha^e = \frac{\alpha_e}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad K_\beta^e = \frac{\beta_e}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Utilizando la expresión de los polinomios de Hermite, que tiene como parámetros de forma el valor de los nodos $[v_{n-1} \ v_n \ v_{n+1} \ v_{n+2}]$, y utilizando un espaciado unitario, tenemos:

$$K_\alpha^e = \frac{\alpha_e}{120} \begin{bmatrix} 4 & -7 & 2 & 1 \\ -7 & 136 & -131 & 2 \\ 2 & -131 & 136 & -7 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \end{bmatrix}, \quad K_\beta^e = \frac{\beta_e}{2} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & -1 \\ -5 & 14 & -13 & 4 \\ 4 & -13 & 14 & -5 \\ -1 & 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Generalmente no está disponible una forma analítica de las fuerzas externas $\mathbf{q}(\mathbf{v})$ de (2.6). Por consiguiente, se puede emplear la cuadratura de Gauss-Legendre para aproximar el valor de la integral en el vector de fuerzas externas $\mathbf{f}$.

Para hacer el proceso de ensamblaje de la matriz global idéntico para todas las funciones de forma, vamos a introducir el concepto de matrices de ensamblaje. Suponga una *snake* con n elementos y N nodos ($N = n$ si la *snake* es cerrada y $N = n + 1$ si es abierta). Para el elemento e de la *snake* ($0 \leq e \leq n - 1$), las matrices de ensamblaje son $G_\alpha^e = G_\beta^e = G_f^e = G^e$, donde

$$G_{jk}^e = \begin{cases} 1 & \text{si } (j + de) \bmod (dN) = k \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

son matrices $(2 \cdot d) \times (d \cdot N)$, y d es el número de grados de libertad de cada nodo en un elemento (aquí $d = 2$). Por esto, K_α , K_β y $\mathbf{f}$ se pueden ensamblar de la siguiente forma

$$K_\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} (G_\alpha^i)^T K_\alpha^i (G_\alpha^i), \quad (\text{A.15})$$

$$K_\beta = \sum_{i=0}^{n-1} (G_\beta^i)^T K_\beta^i (G_\beta^i), \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{f} = \sum_{i=0}^{n-1} (G_f^i)^T \mathbf{f}^i. \quad (\text{A.17})$$

Sólo la matriz de forma y las matrices de ensamblaje están determinadas específicamente por las funciones de forma. Por lo tanto, en la siguiente sección nos centraremos en la deducción de la matriz de forma y las matrices de ensamblaje para funciones de forma *B-spline*, y brevemente comentaremos otras clases de funciones de forma que son aplicables para las *snakes*.

A.1.2. Funciones de forma B-splines

Para las funciones de forma *B-splines*, la función coordenada $x(s)$ de $\mathbf{v}(s)$ se construye como una suma ponderada de N_B funciones base $B_n(s)$, $n = 0, \dots, N_B - 1$ de la siguiente manera: $x(s) = \mathbf{B}(s)^T \mathbf{Q}^x$, donde $\mathbf{B}(s) = [\mathbf{B}_0(s), \dots, \mathbf{B}_{N_B-1}(s)]^T$, $\mathbf{Q}^x = [x_0, \dots, x_{N_B-1}]^T$ y x_i son los pesos aplicados a las respectivas funciones base $\mathbf{B}_n(s)$ [36, 259].

La duración de un *B-spline* se utiliza como elemento en nuestra formulación de elementos finitos (duración y elemento aquí son términos intercambiables). Por tanto, determinaremos las variables nodales (los parámetros de forma de la *snake*), la matriz de forma y la matriz de ensamblaje asociada a la duración de un *B-spline*. Por ejemplo, la matriz de forma de un *B-spline* cúbico regular es

$$\mathbf{B}(s) = [1 \ s \ s^2 \ s^3] \begin{bmatrix} 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 - 1/2 s + 1/2 s^2 - 1/6 s^3 \\ 2/3 - 1 s^2 + 1/2 s^3 \\ 1/6 + 1/2 s + 1/2 s^2 - 1/2 s^3 \\ 1/6 s^3 \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.18})$$

y las matrices de rigidez para el elemento e son

$$K_{\alpha}^e = \alpha_e \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 6 & 7 & -12 & -1 \\ 7 & 34 & -29 & -12 \\ -12 & -29 & 34 & 7 \\ -1 & -12 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad K_{\alpha}^e = \beta_e \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

La matriz de ensamblaje G^e puede definirse como:

$$(G^e)_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (j + b_{\sigma}) \bmod (N_B) = k \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

donde b_{σ} es el índice de la función base.

De forma similar a la de arriba, podemos construir otras clases de funciones de forma; por ejemplo, funciones de forma NURBS [248], funciones de forma Catmull-Rom, funciones de forma de Bézier y funciones de forma de Fourier. Estas últimas son funciones de forma globales sobre la *snake* entera [232], así la matriz de ensamblaje asociada se convierte en la matriz identidad.

A.1.3. Elementos de *snake* en forma de diferencias finitas

A pesar de las diferencias entre *snakes* implementadas con elementos finitos y *snakes* con diferencias finitas, éstas últimas también pueden construirse con el procedimiento de elementos finitos. Para una *snake* con n nodos, K_{α}^e es una matriz 2×2 y su matriz de ensamblaje correspondiente G_{α}^e es una matriz $2 \times n$

$$K_{\alpha}^e = \alpha_e \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

$$(G_{\alpha}^e)_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (j + e) \bmod n = k \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

donde $0 \leq e \leq n - 2$ para una *snake* abierta y $0 \leq e \leq n - 1$ para una *snake* cerrada. K_{β}^e es una matriz 3×3 y su matriz de ensamblaje asociada, G_{β}^e , es una matriz $3 \times n$

$$K_{\beta}^e = \beta_e \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \beta_e \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

$$(G_{\beta}^e)_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (j + e) \bmod n = k \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

donde $0 \leq e \leq n - 3$ para una *snake* abierta y $0 \leq e \leq n - 1$ para una *snake* cerrada. La matriz de ensamblaje asociada $1 \times n$, G_f^e se define como:

$$(G_f^e)_{0,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } e = k \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

donde $0 \leq e \leq n - 1$ tanto para una *snake* abierta como cerrada.

Con la anterior formulación con diferencias finitas, disponemos de una construcción uniforme con elementos finitos para una gran cantidad de representaciones de *snakes*.

A.1.4. Secuencia de rigidez

Las secuencias de rigidez en el dominio del espacio, $k_\alpha[n]$ y $k_\beta[n]$, se pueden obtener sumando las diagonales principales de las submatrices de rigidez K_α^e y K_β^e y colocando el resultado de la diagonal principal en la posición central, correspondiente a $n = 0$. El vector resultante de tamaño $1 \times N$ tendrá $2M - 1$ elementos no nulos.

La suma de las diagonales de las submatrices produce los siguientes resultados para las funciones de forma B-splines:

$$\begin{aligned} \Sigma_\alpha &= \alpha \frac{1}{120} \begin{bmatrix} -1 & -24 & -15 & 80 & -15 & -24 & -1 \end{bmatrix}, \\ \Sigma_\beta &= \beta \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 16 & -9 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

polinomios de Hermite:

$$\begin{aligned} \Sigma_\alpha &= \alpha \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -145 & 280 & -145 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \\ \Sigma_\beta &= \beta \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 8 & -23 & 32 & -23 & 8 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y utilizando diferencias finitas:

$$\begin{aligned} \Sigma_\alpha &= \alpha \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \\ \Sigma_\beta &= \beta \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para las funciones de forma B-spline, las secuencias de rigidez son las siguientes:

$$\begin{aligned} k_\alpha[n] &= \alpha \left(\frac{2}{3} \delta[n] - \frac{1}{8} (\delta[n+1] + \delta[n-1]) - \frac{1}{5} (\delta[n+2] + \delta[n-2]) - \frac{1}{120} (\delta[n+3] + \delta[n-3]) \right), \\ k_\beta[n] &= \beta \left(\frac{8}{3} \delta[n] - \frac{3}{2} (\delta[n+1] + \delta[n-1]) + \frac{1}{6} (\delta[n+3] + \delta[n-3]) \right). \end{aligned}$$

Para los polinomios de Hermite:

$$\begin{aligned} k_\alpha[n] &= \alpha \left(\frac{7}{3} \delta[n] - \frac{29}{24} (\delta[n+1] + \delta[n-1]) - \frac{1}{30} (\delta[n+2] + \delta[n-2]) + \frac{1}{120} (\delta[n+3] + \delta[n-3]) \right), \\ k_\beta[n] &= \beta \left(16\delta[n] - \frac{23}{2} (\delta[n+1] + \delta[n-1]) - 4 (\delta[n+2] + \delta[n-2]) + \frac{1}{2} (\delta[n+3] + \delta[n-3]) \right). \end{aligned}$$

Y para las funciones de forma con diferencias finitas:

$$\begin{aligned} k_\alpha[n] &= \alpha (-\delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1]), \\ k_\beta[n] &= \beta (\delta[n+2] - 4\delta[n+1] + 6\delta[n] - 4\delta[n-1] + \delta[n-2]). \end{aligned}$$

A.2. Solución frecuencial

En esta sección se van a obtener los núcleos de rigidez a partir de la formulación en el dominio de la frecuencia. La implementación práctica se consigue aplicando (3.21) para los contornos activos, y (3.45) para el caso bidimensional.

A.2.1. B-splines

La función de forma de un B-spline viene dado por el siguiente polinomio cúbico definido a tramos

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}|s|^3 - |s|^2 + \frac{2}{3} & 0 \leq |s| < 1 \\ -\frac{1}{6}|s|^3 + |s|^2 - 2|s| + \frac{4}{3} & 1 \leq |s| < 2 \\ 0 & |s| \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

y su transformada de Fourier es

$$F(\Omega) = 16 \operatorname{sinc}^4 \left(\frac{\Omega}{2\pi} \right), \quad (\text{A.27})$$

donde $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Aplicando la ecuación (3.21), el núcleo en el dominio de la frecuencia resultante es

$$K(\omega) = 256 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha \frac{Z(\Omega)}{\Omega^6} + \beta \frac{Z(\Omega)}{\Omega^4} \Big|_{\Omega=\omega-2\pi k}, \quad (\text{A.28})$$

donde

$$Z(\Omega) = \sin^8 \left(\frac{\Omega}{2} \right). \quad (\text{A.29})$$

El sumatorio infinito se puede calcular realizando la operación equivalente en el dominio del espacio (producto de un tren de deltas de periodo unitario), y volviendo de nuevo al dominio de la frecuencia. Así, la ecuación (A.28) se puede simplificar en

$$K(\omega) = \alpha \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cos(\omega) - \frac{2}{5} \cos(2\omega) - \frac{1}{60} \cos(3\omega) \right) + \beta \left(\frac{8}{3} - 3 \cos(\omega) + \frac{1}{3} \cos(3\omega) \right). \quad (\text{A.30})$$

Finalmente, el núcleo en el dominio del espacio se obtiene mediante la trasformada inversa de Fourier de $K(\omega)$,

$$k[n] = k_\alpha[n] + k_\beta[n], \quad (\text{A.31})$$

donde

$$k_\alpha[n] = \alpha \left(\frac{2}{3} \delta[n] - \frac{1}{8} (\delta[n+1] + \delta[n-1]) - \frac{1}{5} (\delta[n+2] + \delta[n-2]) - \frac{1}{120} (\delta[n+3] + \delta[n-3]) \right), \quad (\text{A.32})$$

$$k_\beta[n] = \beta \left(\frac{8}{3} \delta[n] - \frac{3}{2} (\delta[n+1] + \delta[n-1]) + \frac{1}{6} (\delta[n+3] + \delta[n-3]) \right), \quad (\text{A.33})$$

y $\delta[n]$ es la delta de Kronecker. Este núcleo en el espacio es idéntico al obtenido mediante la formulación original.

En el caso bidimensional, la función de forma *B-spline* está definida por el producto cartesiano de funciones de forma de variable individual, esto es, $f(s_1, s_2) = f(s_1)f(s_2)$. La transformada de Fourier bidimensional de la función de forma es entonces

$$F(\Omega_1, \Omega_2) = F(\Omega_1)F(\Omega_2), \quad (\text{A.34})$$

donde $F(\Omega_i)$ está en (A.27). La propiedad multiplicativa favorece el cálculo de (3.45), al descomponer el problema en dos problemas independientes. El núcleo espacial de rigidez resulta finalmente de la siguiente forma

$$\begin{aligned} k[n_1, n_2] &= k_{\alpha_1}[n_1]k_0[n_2] + k_0[n_1]k_{\alpha_2}[n_2] \\ &\quad + k_{\beta_1}[n_1]k_0[n_2] + k_0[n_1]k_{\beta_2}[n_2] + \beta_{12}k_{\alpha=1}[n_1]k_{\alpha=1}[n_2], \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

donde $k_0[n]$ es la transformada inversa de Fourier del espectro de potencia de la función de forma, esto es,

$$K_0(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=\omega-2\pi k} \quad (\text{A.36})$$

que para *B-splines* es la siguiente

$$k_0[n] = \frac{151}{315} \delta[n] + \frac{397}{1,680} (\delta[n+1] + \delta[n-1]) + \frac{1}{5,040} (\delta[n+3] + \delta[n-3]) \quad (\text{A.37})$$

A.2.2. Polinomios cúbicos de Hermite

Aunque en principio un polinomio de Hermite requiere el valor de dos nodos y el de la pendiente de la curva en dichos nodos, su función de forma también se puede definir utilizando sólo los valores de los nodos mediante el siguiente polinomio cúbico definido a tramos

$$f(s) = \begin{cases} \frac{3}{2}|s|^3 - \frac{5}{2}|s|^2 + 1 & 0 \leq |s| < 1 \\ -\frac{1}{2}|s|^3 + \frac{5}{2}|s|^2 - 4|s| + 2 & 1 \leq |s| < 2 \\ 0 & |s| \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

y su transformada de Fourier es

$$F(\Omega) = 3 \operatorname{sinc}^4\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) - 2 \operatorname{sinc}^3\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right). \quad (\text{A.39})$$

Siguiendo el mismo procedimiento aplicado sobre B-splines, el núcleo espacial con polinomios de Hermite es el siguiente

$$k_\alpha[n] = \alpha \left(\frac{7}{3} \delta[n] - \frac{29}{24} (\delta[n+1] + \delta[n-1]) - \frac{1}{30} (\delta[n+2] + \delta[n-2]) + \frac{1}{120} (\delta[n+3] + \delta[n-3]) \right), \quad (\text{A.40})$$

$$k_\beta[n] = \beta \left(16\delta[n] - \frac{23}{2} (\delta[n+1] + \delta[n-1]) - 4 (\delta[n+2] + \delta[n-2]) + \frac{1}{2} (\delta[n+3] + \delta[n-3]) \right), \quad (\text{A.41})$$

$$k_0[n] = \frac{57}{70} \delta[n] - \frac{71}{560} (\delta[n+1] + \delta[n-1]) - \frac{1}{28} (\delta[n+2] + \delta[n-2]) + \frac{1}{560} (\delta[n+3] + \delta[n-3]). \quad (\text{A.42})$$

A.2.3. Diferencias finitas

Uno podría estar interesado en lo siguiente: dado un núcleo en el dominio del espacio $k[n]$, encontrar la función de forma correspondiente. El procedimiento estaría basado en invertir el proceso expuesto en la secciones anteriores y es complicado: el método para invertir los pasos (A.28) a (A.30) no es fácil de realizar.

Sin embargo, se ha intentado resolver este problema inverso para el caso de la formulación con diferencias finitas, esto es, encontrar la función de forma que corresponde al siguiente núcleo en el dominio del espacio:

$$k[n] = k_\alpha[n] + k_\beta[n] \quad (\text{A.43})$$

$$k_\alpha[n] = \alpha (-\delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1]) \quad (\text{A.44})$$

$$k_\beta[n] = \beta (\delta[n+2] - 4\delta[n+1] + 6\delta[n] - 4\delta[n-1] + \delta[n-2]) \quad (\text{A.45})$$

y los esfuerzos no han dado ningún resultado concluyente. Una aproximación intuitiva fue considerar la siguiente función de forma:

$$f(s) = \begin{cases} 1 - |s| & |s| \leq 1 \\ 0 & |s| > 1 \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

que realiza una interpolación lineal entre los nodos de la *snake*. El núcleo espacial resultante casi se ajusta a (A.44) y (A.45), excepto por el hecho que su segunda derivada presenta puntos con singularidades infinitas. Otra opción sugerida como función de forma fue considerar la delta de Dirac, $f(s) = \delta(s)$, $F(\Omega) = 1$, que genera infinitas soluciones singulares inmanejables, en este caso tanto con la primera como con la segunda derivada.

Nuestra conclusión es que, en este caso, el dominio espacial continuo s debe descartarse en el proceso y el núcleo frecuencial se construye directamente a partir del dominio espacial discreto n . El núcleo en el dominio de la frecuencia se construye entonces como

$$K(\omega) = \alpha |1 - e^{-j\omega}|^2 + \beta |1 - e^{-j\omega}|^4. \quad (\text{A.47})$$

Nótese que el valor absoluto del operador diferencia $1 - e^{-j\omega}$ equivale a un producto con su complejo conjugado. El núcleo frecuencial (A.47) es el homólogo en el dominio de Fourier de (A.43)-(A.45).

En el caso bidimensional, el núcleo frecuencial se construye relacionado directamente con los dominios en tiempo discreto n_1 y n_2 ,

$$K(\omega_1, \omega_2) = \alpha_1 |1 - e^{-j\omega_1}|^2 + \alpha_2 |1 - e^{-j\omega_2}|^2 + \beta_1 |1 - e^{-j\omega_1}|^4 + \beta_2 |1 - e^{-j\omega_2}|^4 + \beta_{12} |1 - e^{-j\omega_1}|^2 |1 - e^{-j\omega_2}|^2. \quad (\text{A.48})$$

El núcleo espacial de rigidez para el caso bidimensional queda de la siguiente forma

$$k[n_1, n_2] = k_{\alpha_1}[n_1]\delta[n_2] + \delta[n_1]k_{\alpha_2}[n_2] + k_{\beta_1}[n_1]\delta[n_2] + \delta[n_1]k_{\beta_2}[n_2] + \beta_{12}k_{\alpha=1}[n_1] * k_{\alpha=1}[n_2]. \quad (\text{A.49})$$

Extensiones de la *snake*

El contenido de las extensiones de la *snake* es un tema crucial en la implementación de una *snake* abierta para que sea estable al utilizar un filtrado invariante en el espacio. La regla para calcular las extensiones de la *snake* se basa en la idea de forzar a que sea cero la diferencia σ -ésima, cuando está formando parte de la *snake* visible. Sea el operador diferencia σ -ésima definido para diferencias finitas en el dominio de la frecuencia por

$$\Phi_{\sigma}(\omega) = \left(1 - e^{-j\omega}\right)^{\sigma}, \quad (\text{B.1})$$

que, expandido con su serie de Taylor produce la siguiente ecuación

$$\Phi_{\sigma}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sigma!}{k! (\sigma - k)!} e^{-j\omega k}. \quad (\text{B.2})$$

Utilizando la transformada inversa de Fourier, el operador se puede trasladar al dominio del espacio y se obtiene la expresión

$$\phi_{\sigma}[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sigma!}{k! (\sigma - k)!} \delta[n - k]. \quad (\text{B.3})$$

Truncando el desarrollo de Taylor en el tercer término, el operador de la diferencia σ -ésima ($\sigma \geq 1$) es entonces

$$\phi_{\sigma}[n] \approx \delta[n] - \sigma \delta[n - 1] + \frac{1}{2} \sigma (\sigma - 1) \delta[n - 2], \quad (\text{B.4})$$

donde se puede comprobar la igualdad con la primera y segunda diferencia discreta en los casos $\sigma = 1$ y $\sigma = 2$.

Sea la *snake* extendida

$$\hat{z}[n] = z[n] + d[n], \quad (\text{B.5})$$

donde $z[n]$ tiene valores no nulos para índices negativos $n < 0$, esto es, $z[n \geq 0] = 0$, y $d[n]$ es la extensión a la derecha¹ que satisface que $d[n < 0] = 0$. La minimización del funcional de energía de la *snake* extendida se logra cuando la diferencia σ -ésima de la señal extendida para $n \geq 0$ es cero, es decir,

$$(\phi_\sigma[n] * \hat{z}[n])u[n] = 0, \quad (\text{B.6})$$

donde $u[n]$ es el escalón unitario. Esto conduce al siguiente valor de la extensión respecto de la señal original,

$$\phi_\sigma[n] * d[n] = 0. \quad (\text{B.7})$$

Sustituyendo el operador de la diferencia σ -ésima en (B.7), se consigue una implementación práctica de éste con la operación recursiva (para $n \geq 0$):

$$d[n] = \sigma d[n-1] - \frac{1}{2} \sigma (\sigma - 1) d[n-2], \quad (\text{B.8})$$

donde los estados iniciales son $d[-1] = z[-1]$ y $d[-2] = z[-2]$. Para el caso de ordenes enteros, $\sigma = 1$, la extensión de la *snake* es constante e igual al valor de la *snake* visible en el extremo,

$$d[n] = d[n-1], \quad (\text{B.9})$$

y, para $\sigma = 2$, la extensión es una rampa que sigue la tendencia de la *snake* en el extremo,

$$d[n] = d[n-1] + (d[n-1] - d[n-2]). \quad (\text{B.10})$$

¹Existe otra extensión a la izquierda del intervalo, pero se omite por claridad en la explicación y dada la simetría del problema.

Publicaciones

- [1] Berenguer, R. y R. Verdú: *Sistema de visión por computador para tracking automático y caracterización de objetos en 3D*. XX Symposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI), 2005.
- [2] Berenguer, R., R. Verdú, J. Morales, J. Larrey, J.L. Sancho y L. Weruaga: *Vision System for Automatic Tracking and Characterization of 3D Objects*. Int. Conf. on Multimedia, Image Processing and Computer Vision, 1, 2005.
- [3] Berenguer, R., R. Verdú, J. Morales y L. Weruaga: *Estimación de Parámetros de músculos artificiales usando contornos activos y visión estereoscópica*. XVII Symposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI), 2002.
- [4] García, P. J., J. Madrid, R. Verdú, A. R. Figueiras y J. L. Sancho: *Imputation of Missing Data Using Multitask Learning*. Int. Conf. on Multimedia, Image Processing and Computer Vision, 1, 2005.
- [5] García, P. J., R. Verdú y J. L. Sancho: *Aprendizaje Multitarea mediante Arquitecturas Neuronales basadas en Subredes Privadas*. XX Symposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI), 2005.
- [6] Morales, J., R. Verdú, R. González y L. Weruaga: *Fuzzy Non-Rigid Motion Estimation Robust to Rotation*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing, 2004.
- [7] Morales, J., R. Verdú, J. Larrey y L. Weruaga: *Dual Models for Regularization of Multiple-Choice Situations in Image Matching*. Int. Conf. on Multimedia, Image Processing and Computer Vision, 1, 2005.
- [8] Morales, J., R. Verdú y J. L. Sancho: *Estimación Iterativa de Movimiento No Rígido Basada en Modelos Paramétricos*. Teleco Forum, 1, 2004.

- [9] Morales, J., R. Verdú, J. L. Sancho y L. Weruaga: *Multiple Feature Models for Image Matching*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing, 2005.
- [10] Morales, J., R. Verdú, R. Berenguer y L. Weruaga: *Non-Rigid Motion Estimation Based on Fuzzy Models*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Digital Signal Processing, July 2002.
- [11] Morales, J., R. Verdú, D. J. Planes, C. Gonzalez, L. Nuñez y L. Weruaga: *Automatic Contour Determination of Moving Volumes in the Thoracic Area for Radiotherapy Planning*. Biennial European Society for Therapeutic Radiology and Oncology Meeting, September 2001.
- [12] Morales, J., R. Verdú, L. Weruaga y R. Berenguer: *Estimación de movimiento no rígido mediante modelos difusos*. XVII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI), September 2002.
- [13] Morales, J., L. Weruaga y R. Verdú: *Estimación de movimiento deformable 3D en datos de TAC del tórax humano*. XVIII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI), September 2003.
- [14] Sastre, J., R. Verdú, J. M. López y A. Ferreras: *Improved Huffman code tables for H.263/H.263+ based video compression applications*. Proc. of the IEEE Int. Symp. on Signal Processing and its Applications, 2005.
- [15] Verdú, R. y R. Berenguer: *Caracterización del ciclo de vida de músculos artificiales mediante visión estereoscópica y snakes*. XX Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI), 2005.
- [16] Verdú, R., R. Berenguer, J. Morales, G. Vázquez, T.F. Otero y L. Weruaga: *Mechanical Characterization of the Life Cycle of Artificial Muscles through Stereoscopic Computer Vision and Active Contours*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing, 2005.
- [17] Verdú, R. y J. Morales: *Diseño óptimo de parámetros dinámicos de contornos activos en segmentación de imágenes*. XX Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI), 2005.
- [18] Verdú, R., J. Morales, R. Berenguer y L. Weruaga: *Optimum Design of Dynamic Parameters of Active Contours for Improving their Convergence in Image Segmentation*. En Blanc-Talon, Jacques, Wilfried Philips, Dan Popescu y Paul Scheunders (editores): *Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems: 7th International Conference.*, volumen 3708 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, páginas 483 – 490. Springer-Verlag GmbH, 2005.
- [19] Verdú, R., J. Morales y L. Weruaga: *Análisis de la convergencia de snakes en segmentación de imágenes*. XIX Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI), 2004.
- [20] Verdú, R., R. Berenguer, J. Morales, G. Vázquez, T. F. Otero y L. Weruaga: *3D Mechanical Characterization of Artificial Muscles with stereoscopic computer vision and active contours*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing, September 2003.

- [21] Verdú, R., R. Berenguer, J. Morales, G. Vázquez, T. F. Otero y L. Weruaga: *Snakes y visión stereoscópica en el modelado 3D de músculos artificiales*. XVIII Symposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI), September 2003.
- [22] Verdú, R., J. Morales, R. Berenguer y L. Weruaga: *Active Contours for Heart Motion-Compensated Reconstruction in Computed Tomography*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Digital Signal Processing, July 2002.
- [23] Verdú, R., J. Morales, A. J. Fernandez-Romero, M. T. Cortés, T. F. Otero y L. Weruaga: *Mechanical Characterization of Artificial Muscles with Computer Vision*. Proc. of SPIE Annual Int. Symposium on Smart Structures and Materials, 2002.
- [24] Verdú, R., J. Morales, R. González y L. Weruaga: *Convergence Analysis of Active Contours in Image Segmentation*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing, páginas 2749–2752, 2004.
- [25] Verdú, R., J. Morales y L. Weruaga: *Efficient frequency design of deformable models*. Proc. of Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems (ACIVS), páginas 223–229, September 2004.
- [26] Weruaga, L., J. Morales, L. Núñez y R. Verdú: *Estimating Volumetric Motion in Human Thorax With Parametric Matching Constraints*. IEEE Trans. Medical Imaging, 22(6):766–772, June 2003.
- [27] Weruaga, L., J. Morales y R. Verdú: *Active training on the CMAC nonlinear adaptive system*. XII European Signal Processing Conference, páginas 589–592, september 2004.
- [28] Weruaga, L., R. Verdú y J. Morales: *Frequency Domain Formulation of Active Parametric Deformable Models*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 26(12):1568–1578, 2004.

Bibliografía

- [1] Abrantes, A. J. y J. S. Marques: *A class of constrained clustering algorithms for object boundary extraction*. IEEE Trans. Image Processing, 5:1507–1521, 1996.
- [2] Adjoudani, A. y C. Benoit: *On the integration of auditory and visual parameters in an HMM-based ASR*. Proc. NATO ASI Conf. on Speechreading by Man and Machine: Models, Systems and Applications, páginas 461–472, 1995.
- [3] Allen, P., B. Yoshimi y A. Timcenko: *Real-time visual servoing*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, páginas 851–856, 1991.
- [4] Aloimonos, J.: *Active Perception*. Erlbaum, 1993.
- [5] Aloimonos, J., I. Weiss y A. Bandyopadhyay: *Active vision*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, 1987.
- [6] Amadiou, O., E. Debreuve, M. Barlaud y G. Aubert: *Inward and outward curve evolution using level set method*. Int. Conf. on Image Processing, 1999.
- [7] Amini, A., R. Owen, L. Staib, P. Anandan y J. Duncan: *Non-rigid motion models for tracking the left ventricular wall*. LNCS: Information processing in medical images, 1991.
- [8] Amini, A., S. Tehrani y T. Weymouth: *Using dynamic programming for minimizing the energy of active contours in the presence of hard constraints*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 95–99, 1988.
- [9] Amini, A.A., T.E. Weymouth y R.C. Jain: *Using dynamic programming for solving variational problems in vision*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 12(9):855–867, 1990.
- [10] Aubert, G. y P. Kornprobst: *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. Springer-Verlag, 2001.
- [11] Ayache, N., I. Cohen y I. Herlin: *Medical image tracking*. En Blake, A. y A. Yuille (editores): *Active Vision*, páginas 285–302. MIT Press, 1992.

- [12] Ayache, N. y O. Faugueras: *Building, registration and fusing noisy visual maps*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, 1987.
- [13] Ayache, N. y B. Faverjon: *Efficient registration of stereo images by matching graph descriptions of edge segments*. Int. J. of Computer Vision, páginas 107–131, 1987.
- [14] Azarbayejani, A., T. Starner, B. Horowitz y A. Pentland: *Visually controlled graphics*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 15(6):602–605, 1993.
- [15] Baas, Bevan M.: *An approach to low-power, high-performance, FFT processor design*. PhD Dissertation, Stanford University, Stanford, CA, February 1999.
- [16] Bainbridge-Smith, A. y R. G. Lane: *Determining optical flow using a differential method*. Image and Vision Computing, 15:11–22, 1997.
- [17] Bajcsy, R.: *Active perception*. Proc. IEEE, 76:996–1005, 1988.
- [18] Bajcsy, R. y S. Kovacic: *Multiresolution elastic matching*. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 46:1–21, 1989.
- [19] Baker, H. y T. Binford: *Depth from edge and intensity based stereo*. Proc. Int. Joint Conf. Artificial Intelligence, páginas 631–636, 1981.
- [20] Ballard, D.: *Generalising the Hough transform to detect arbitrary shapes*. Pattern Recognition, 12(2):111–122, 1981.
- [21] Ballard, D. y C. Brown: *Computer Vision*. Prentice-Hall, New Yersey, 1982.
- [22] Bar-Shalom, Y. y T. Fortmann: *Tracking and Data Association*. Academic Press, 1988.
- [23] Baraniuk, R.G. y D.L. Jones: *Warped wavelet bases: unitary equivalence and signal processing*. Proc. of IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing, páginas 320–323, April 1993.
- [24] Barret, W. y E. Mortensen: *Interactive live-wire boundary extraction*. Medical Image Analysis, 1(4):331–341, 1997.
- [25] Barron, J. L., D. J. Fleet y S. S. Beauchemin: *Performance of optical flow techniques*. Int. J. of Computer Vision, 12(1):43–77, 1994.
- [26] Basset, A. y M. Orkisz: *Dense motion field estimation involving discontinuities applied to echocardiographic image sequences*. Proc. Ultrasonics Symposium, páginas 1573–1576, 1994.
- [27] Bathe, K. J. y E. Wilson: *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1976.
- [28] Baumberg, A. y D. Hogg: *Learning flexible models from image sequences*. Proc. European Conf. Computer Vision, páginas 299–308, 1994.
- [29] Beauchemin, S. S. y J. L. Barron: *The computation of optical flow*. ACM Computing Surveys, 27(3):433–467, 1995.

- [30] Belhumeur, P.: *A binocular stereo algorithm for reconstructing sloping creased and broken surfaces in the presence of half-occlusion*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 431–438, 1993.
- [31] Bennett, A. y I. Craw: *Finding image features for deformable templates and detailed prior statistical knowledge*. Proc. British Machine Vision Conf., páginas 233–239, 1991.
- [32] Berenguer, R., R. Verdú, J. Morales, J. Larrey, J.L. Sancho y L. Weruaga: *Vision System for Automatic Tracking and Characterization of 3D Objects*. Int. Conf. on Multimedia, Image Processing and Computer Vision, 1, 2005.
- [33] Black, M. y Y. Yacoob: *Tracking and recognizing rigid and non-rigid facial motions using local parametric models of image motion*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 374–381, 1995.
- [34] Blake, A.: *Computational modelling of hand-eye coordination*. Phil. Trans. R. Soc., 337:351–360, 1992.
- [35] Blake, A. y M. Isard: *3D position, attitude and shape input using video tracking of hands and lips*. Proc. Siggraph, páginas 185–192, 1994.
- [36] Blake, A. y M. Isard: *Active Contours*. Springer-Verlag, 1998.
- [37] Bobick, A. y A. Wilson: *A state-based technique for the summarisation and recognition of gesture*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 382–388, 1995.
- [38] Bookstein, F.: *Principal Warps: Thin-Plate Splines and the Decomposition of Deformations*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 11(6):567 – 585, 1989.
- [39] BQU-2001-0477: *Polipirroles; Electrosíntesis y Caracterización de Propiedades Electroquímicas Mediante el Tratamiento Digital de Imágenes*, 2001.
- [40] Bregler, C. y Y. Konig: *Eigenlips for robust speech recognition*. Proc. of IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing, páginas 669–672, 1994.
- [41] Bregler, C. y S. Omohundro: *Nonlinear manifold learning for visual speech recognition*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 494–499, 1995.
- [42] Brigger, P., J. Hoeg y M. Unser: *B-Spline snakes: A flexible tool for parametric contour detection*. IEEE Trans. Image Processing, 9(9):1484–1496, September 2000.
- [43] Brown, C. y D. Terzopoulos (editores): *Real-time computer vision*. Cambridge, 1994.
- [44] Burr, D.: *Elastic matching of line drawings*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 3(6):708–713, 1981.
- [45] Buxton, B. y H. Buxton: *Computation of optic flow from the motion of edge features in image sequences*. J. Image and Vision Computing, 2:59–75, 1984.

- [46] Campbell, L. y A. Bobick: *Recognition of human body motion using phase space constraints*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 624–630, 1995.
- [47] Canny, J.: *A computational approach to edge detection*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 8(6):679–698, 1986.
- [48] Carlsson, C. A.: *Imaging modalities in X-ray computerized tomography and in selected volume tomography*. Phys. Med. Biol., 44:23–56, 1999.
- [49] Caselles, V., F. Catté, B. Coll y F. Dibos: *A geometric model for active contours in image processing*. Numerische Mathematik, 66(1):1–31, 1993.
- [50] Caselles, V., R. Kimmel y G. Sapiro: *Geodesic Active Contours*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 694–699, 1995.
- [51] Chan, T. F. y L. Vese: *Active contours without edges*. IEEE Trans. Image Processing, 10:266–277, 2001.
- [52] Chen, Y., H.D. Tagare, S. Thiruvankadam, F. Huang, D. Wilson, K.S. Gopinath, R.W. Briggs y E.A. Geiser: *Using prior shapes in geometric active contours in a variational framework*. Int. J. of Computer Vision, 50(3):315–328, 2002.
- [53] Cho, D. y R. Park: *An object oriented coder using block-based motion vectors and a residual image compensation*. IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology, 8(3):316–327, 1998.
- [54] Cho, K., S. Kumiata, S. Okada S y T. Kumazaki: *Development of respiratory gated myocardial SPECT system*. J. of Nucl. Cardiology, 6(1):20–28, 1999.
- [55] Cipolla, R. y A. Blake: *The dynamic analysis of apparent contours*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 616–625, 1990.
- [56] Cohen, L.: *On active contour models and balloons*. Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding, 53(2):211–218, 1991.
- [57] Cohen, L., E. Bardinet y N. Ayache: *Surface reconstruction using active contour models*. SPIE Conf. on Geometric Methods in Computer Vision, 1993.
- [58] Cohen, L. D. y I. Cohen: *Finite-element methods for active contour models and balloons for 2D and 3D images*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 15(11):1131–1147, November 1993.
- [59] Cootes, T., A. Hill, C. Taylor y J. Haslam: *The use of active shape models for locating structures in medical images*. J. Image and Vision Computing, 12(6):355–366, 1994.
- [60] Cootes, T. y C. Taylor: *Active shape models*. Proc. British Machine Vision Conf, páginas 265–275, 1992.
- [61] Cootes, T., C. Taylor, D. Cooper y J. Graham: *Active shape models-their training and application*. Computer Vision and Image Understanding, 61(1):38–59, 1995.

- [62] Cootes, T., C. Taylor, A. Lanitis, D. Cooper y J. Graham: *Building and using flexible models incorporating grey-level information*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 242–246, 1993.
- [63] Crandall, M., L. Evans y P. L. Lions: *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. of American Mathematical Society, 282:485–502, 1984.
- [64] Crandall, M. y P. L. Lions: *Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. of American Mathematical Society, 277:1–42, 1983.
- [65] Crawford, C. R., K. F. King, C. J. Ritchie y J. D. Godwin: *Respiratory compensation in projection imaging using a magnification and displacement model*. IEEE Trans. Medical Imaging, 15(3):327–332, 1996.
- [66] Cremers, D., C. Schnorr y J. Weickert: *Diffusion-snakes: Combining statistical shape knowledge and image information in a variational framework*. Proc. of 1st IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision, páginas 137–144, 2001.
- [67] Davatzikos, C. y J. L. Prince: *Adaptive active contour algorithms for extracting and mapping thick curves*. Proc. Computer Vision and Pattern Recognition, páginas 524–529, 1993.
- [68] Davatzikos, C. y J. L. Prince: *An active contour model for mapping the cortex*. IEEE Trans. Medical Imaging, 14:65–80, 1995.
- [69] Davatzikos, C. y J. L. Prince: *Convexity analysis of active contour problems*. Proc. Computer Vision and Pattern Recognition, páginas 674–679, 1996.
- [70] Davatzikos, C. y J. L. Prince: *Convexity analysis of active contour problems*. Image and Vision Computing, 17(1):27–36, 1999.
- [71] Davidson, C. y A. Blake: *Error-tolerant visual planning of planar grasp*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, 1998.
- [72] Davis, P. J.: *Circulant Matrices*. Wiley-Interscience, NY, 1979.
- [73] Delingette, H.: *Simplex Meshes: A General Representation for 3D Shape Reconstruction*. Proc. Computer Vision and Pattern Recognition, páginas 856–859, 1994.
- [74] Deriche, R. y O. Faugeras: *Tracking line segments*. Proc. European Conf. Computer Vision, páginas 259–268, 1990.
- [75] Dickmanns, E.: *Expectation-based dynamic scene understanding*. En Blake, A. y A. Yuille (editores): *Active Vision*, páginas 303–336. MIT, 1992.
- [76] Dickmanns, E. y V. Graefe: *Applications of dynamic monocular machine vision*. Machine Vision and Applications, 1:241–261, 1988.
- [77] Dickmanns, E. y V. Graefe: *Dynamic monocular machine vision*. Machine Vision and Applications, 1:223–240, 1988.

- [78] Dodd, B. y R. Campbell: *Hearing by eye: the psychology of lip reading*. Erlbaum, 1987.
- [79] Dreschler, L. y H. Nagel: *Volumetric model and 3D trajectory of a moving car derived from monocular TV-frame sequence of a street scene*. Proc. Int. Joint Conf. Artificial Intelligence, páginas 692–697, 1981.
- [80] Durrant-Whyte, H.: *Uncertain geometry in robotics*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 4(1):23–31, 1988.
- [81] Eberhardt, B., A. Weber y W. Straßer: *A Fast, Flexible Particle-System Model for Cloth Draping*. IEEE Computer Graphics and Applications, páginas 52–59, September 1996.
- [82] Essa, I. y A. Pentland: *Facial expression recognition using a dynamic model and motion energy*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 360–367, 1995.
- [83] European Commission's study group on development of quality criteria for computed tomography: *Quality criteria for computed tomography*. European Union Report EUR 16262t, 1998.
- [84] Falao, A. X., J. K. Udupa, S. Samarasekera y S. Sharma: *User-steered image segmentation paradigms: Live wire and live lane*. Graphical Models and Image Processing, 60:233–260, 1998.
- [85] Faloutsos, P., M. van de Panne y D. Terzopoulos: *Dynamic Free-form deformations for animation synthesis*. IEEE Trans. Visualization and Computer Graphics, 3(3):201–214, July 1997.
- [86] Faugeras, O.: *3D Computer Vision*. MIT Press, 1993.
- [87] Faugeras, O. y M. Hebert: *The representation, recognition and locating of 3D objects*. Int. J. Robotics Research, 5(3):27–52, 1986.
- [88] Faverjon, B. y J. Ponce: *On computing two-finger force-closure grasps of curved 2D objects*. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 3:424–429, 1991.
- [89] Ferreira, P. J. S. G.: *Interpolation and the discrete Papoulis-Gerchberg algorithm*. IEEE Trans. Signal Processing, 42(10):2596–2606, 1994.
- [90] Ferreira, P. J. S. G.: *Noniterative and faster iterative methods for interpolation and extrapolation*. IEEE Trans. Signal Processing, 44(11):3278–3282, November 1994.
- [91] Ferreira, P.J.S.G.: *Iterative and Noniterative Recovery of Missing Samples for 1D Band-Limited Signal*. En Marvasti, Farokh (editor): *Nonuniform Sampling: Theory and Practice*, Information Technology: Transmission, Processing, and Storage, páginas 235–281. Kluwer Academic/Plenum, New York, 2001.
- [92] Ferrier, N., S. Rowe y A. Blake: *Real time traffic monitoring*. Proc. 2nd Workshop on Applications of Computer Vision, páginas 81–88, 1994.
- [93] Finn, E. y A. Montgomery: *Automatic optically based recognition of speech*. Pattern Recognition Letters, 8(3):159–164, 1988.

- [94] Fischler, M. y R. Elschlager: *The representation and matching of pictorial structures*. IEEE Trans. Computers, 22(1), 1973.
- [95] Foley, J., A. van Dam, S. Feiner y J. Hughes: *Computer Graphics: Principles and Practice*, capítulo 13, páginas 563–604. Addison-Wesley, 1990.
- [96] Fua, P. y C Brechbühler: *Imposing hard constraints on deformable models through optimization in orthogonal subspaces*. Computer Vision and Image Understanding, 65:148–162, 1997.
- [97] Garden, K. L. y R. A. Robb: *3D reconstruction of the heart from few projections: a practical implementation of the McKinnon-Bates algorithm*. IEEE Trans. Medical Imaging, 5(4):233–239, 1986.
- [98] Gee, A. y R. Cipolla: *Determining the gaze of faces in images*. J. Image and Vision Computing, 12(10):639–647, 1994.
- [99] Gelb, A. (editor): *Applied Optimal Estimation*. MIT Press, 1974.
- [100] Gennery, D.: *Visual tracking of known three-dimensional objects*. Int. J. of Computer Vision, 7(3):243–270, 1992.
- [101] Giusto, D. D., F. Massidda y C. Perra: *FACE: fast active-contour curvature-based evolution*. Signal Processing: Image Communication, 19(6):517–538, July 2004.
- [102] Goncalves, L., E. di Bernardo, E. Ursella y P. Perona: *Monocular tracking of the human arm in 3D*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 764–770, 1995.
- [103] Gorce, J. M., D. Friboulet y I. E. Magnin: *Estimation of three-dimensional cardiac velocity fields: assessment of a differential method and application to three-dimensional CT data*. Medical Image Analysis, 1(3):245–261, 1996.
- [104] Grenander, U.: *Lectures in Pattern Theory I, II and III*. Springer, 1981.
- [105] Grimson, W.: *Computational experiments with a feature based stereo algorithm*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 7(1):17–34, 1985.
- [106] Grimson, W.: *Object recognition by computer*. MIT Press, 1990.
- [107] Grimson, W. y T. Lozano-Perez: *Model based recognition and localization from sparse range or tactile data*. Int. J. Robotics Research, 5(3):3–34, 1984.
- [108] Grimson, W., T. Lozano-Perez, W. Wells, G. Ettinger, S. White y R. Kikinis: *An automatic registration method for frameless stereotaxi, image guided surgery, and enhanced reality visualization*. Proc. Conf. Computer Vision and Pattern Recognition, páginas 430–436, 1994.
- [109] Gullberg, G. y M. Defrise: *Three-dimensional tomography for vector and tensor fields*. Proc. Int. Meeting on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine, páginas 369–372, 1999.

- [110] Hager, G.: *Sensor fusion and planning: a computational approach*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [111] Hallam, J.: *Resolving observer motion by object tracking*. Proc. Int. Joint Conf. Artificial Intelligence, 2:792–798, 1983.
- [112] Haralick, R.: *Edge and region analysis for digital image data*. Computer Graphics and Image Processing, 12(1):60–73, 1980.
- [113] Harris, C.: *Tracking with rigid models*. En Blake, A. y A. Yuille (editores): *Active Vision*, páginas 59–74. MIT Press, 1992.
- [114] Heuring, J. y D. Murray: *Visual head tracking and slaving for visual telepresence*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1996.
- [115] Hinton, G., C. Williams y M. Revow: *Adaptive elastic models for hand-printed character recognition*. Advances in Neural Information Processing Systems, 4, 1992.
- [116] Hogg, D.: *Model-based vision: a program to see a walking person*. J. Image and Vision Computing, 1(1):5–20, 1983.
- [117] Horn, B. K. P. y B. G. Schunk: *Determining optical flow*. Artificial Intelligence, 17:185–203, 1981.
- [118] Horn, R. A. y C. R. Johnson: *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- [119] Horn, R. A. y C. R. Johnson: *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [120] Hou, Z. y C. Han: *Force field analysis snake: an improved parametric active contour model*. Pattern Recognition Letters, 26(5):513–526, 2005.
- [121] Hsieh, J.: *Adaptive motion artifact suppression in CT*. Proc. of the SPIE, 2847:429–437, 1996.
- [122] IST-1999-10515: *DynCT: Real Time Motion Compensated Reconstruction and Visualisation for Dynamic Computed Tomography*, 1999.
- [123] Jiang, G. S. y D. Peng: *Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations*. SIAM J. of Scientific Computing, 21:2126–2143, 2000.
- [124] Kak, A. C. y M. Slaney: *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, 1988.
- [125] Kang, H. W.: *G-wire: A livewire segmentation algorithm based on a generalized graph formulation*. Pattern Recognition Letters, 26:2042–2051, 2005.
- [126] Kass, M., A. Witkin y D. Terzopoulos: *Snakes: Active contour models*. Int. J. of Computer Vision, 1(4):321–331, 1988.
- [127] Kaucic, R., B. Dalton y A. Blake: *Real-time liptracking for audio-visual speech recognition applications*. Proc. European Conf. Computer Vision, páginas 376–387, 1996.

- [128] Kinnon, G. C. y R. H. T. Bates: *Towards imaging the beating heart usefully with a conventional CT scanner*. IEEE Trans. Biomed. Engineering, 28(2):123–127, 1981.
- [129] Koller, D., J. Weber y J. Malik: *Robust multiple car tracking with occlusion reasoning*. Proc. European Conf. Computer Vision, páginas 189–196, 1994.
- [130] Kossentini, F. y Y. W. Lee: *Computation-constrained fast MPEG-2 encoding*. IEEE Signal Processing Letters, 4(8):224–226, 1997.
- [131] Kutulakos, K. y J. Valliano: *Non-euclidean object representations for calibration-free video overlay*. En Ponce, J., A. Zisserman y M. Hebert (editores): *Object Representation in Computer Vision II*, capítulo Non-euclidean object representations for calibration-free video overlay, páginas 381–401. Springer-Verlag, 1996.
- [132] Lai, K.F. y R.T. Chin: *Deformable contours: Modeling and extraction*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 17(11):1084–1090, 1995.
- [133] Lam, K. y H. Yan: *Fast Greedy Algorithm for Active Contours*. Electronic Letters, 30:21–23, 1994.
- [134] Lancaster, P.: *Theory of Matrices*. Academic Press, NY, 1969.
- [135] Lanitis, A., C. Taylor y T. Cootes: *A unified approach to coding and interpreting face images*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 368–373, 1995.
- [136] Larsen, O. V. y P. Radeva: *Calculating the Bounds on the Optimal Parameters of Elasticity for a Snake*. Technical report, Aalborg University, Laboratory of Image Analysis, Denmark, 1994.
- [137] Larsen, O. V., P. Radeva y E. Martí: *Guidelines for choosing optimal parameters of elasticity for snakes*. Proc. Int. Conf. on Computer Analysis and Image Processing, páginas 106–113, 1995.
- [138] Larsen, O.V., P. Radeva y E. Martí: *Bounds on the Optimal Elasticity Parameters for a Snake*. Proc. Int. Conf. Image Analysis and Processing, páginas 37–44, 1995.
- [139] Li, H. y H. Shi: *A fast algorithm for reconstructing motion-compensated blocks in compressed domain*. J. of Visual Languages and Computing, 10(6):607–623, 1999.
- [140] Lia, C., J. Liub y M. D. Fox: *Segmentation of external force field for automatic initialization and splitting of snakes*. Pattern Recognition, 38:1947 – 1960, 2005.
- [141] Liang, J., T. McInerney y D. Terzopoulos: *United snakes*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 933–940, 1999.
- [142] Lin, W. T.: *Compensation for movement in computed tomography equipment*. United States Patent, Patent number: 5,579,358., 1996.
- [143] Lowe, D.: *Fitting parameterised 3D model to images*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 13(5):441–450, 1991.

- [144] Lowe, D.: *Robust model-based motion tracking through the integration of search and estimation*. Int. J. of Computer Vision, 8(2):113–122, 1992.
- [145] Malladi, R., J. Sethian y B. Vemuri: *Evolutionary fronts for topology independent shape modeling and recovery*. Proc. European Conf. Computer Vision, páginas 1–13, 1994.
- [146] Malladi, R., J. Sethian y B. Vemuri: *Shape modeling with front propagation: A level set approach*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 17(2):158–175, 1995.
- [147] Mao, W., J. Evans, L. Hassebrook y C. Knapp: *A multistage, optimal active contour model*. IEEE Trans. Image Processing, 5:1586–1591, November 1996.
- [148] Marais, P., R. Guillemaud, M. Sakuma, A. Zisserman y L. Brady: *Visualising cerebral asymmetry*. Visualisation in Biomedical Computing, Lecture notes in Computer Science. Springer-Verlag., página 411–416, 1996.
- [149] Mardia, K., N. Ghali, M. Howes, T. Hainsworth y N. Sheehy: *Techniques for online gesture recognition*. J. Image and Vision Computing, 11(5):283–294, 1993.
- [150] Marr, D.: *Vision*. Freeman, San Francisco, 1982.
- [151] Marr, D. y E. Hildreth: *Theory of edge detection*. Proc. Roy. Soc. London B., 207:187–217, 1980.
- [152] Marvasti, F.: *Nonuniform Sampling: Theory and Practice*. Information Technology: transmission, processing, and storage. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2001.
- [153] Matthies, L., T. Kanade y R. Szeliski: *Kalman filter-based algorithms for estimating depth from image sequences*. Int. J. of Computer Vision, 3:209–236, 1989.
- [154] Matusiak, R.: *Extended precision radix-4 FFT implemented on TMS320C62xx*. Report SPRA297, Texas Instruments, november 1998.
- [155] Mayhew, J., Y. Zheng y S. Cornell: *The adaptive control of a four-degrees-of-freedom stereo camera head*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. B, 337(5):315–326, 1992.
- [156] McInerney, T. y D. Terzopoulos: *A Dynamic Finite Element Surface Model for Segmentation and Tracking in Multidimensional Medical Images with Application to Cardiac 4D Image Analysis*. Computerized Medical Imaging and Graphics, 19(1):69–83, 1995.
- [157] McInerney, T. y D. Terzopoulos: *Topologically adaptable snakes*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 840–845, 1995.
- [158] McInerney, T. y D. Terzopoulos: *Deformable models in medical image analysis: a survey*. Medical Image Analysis, 1(2):91–108, 1996.
- [159] McInerney, T. y D. Terzopoulos: *Topology Adaptive Deformable Surfaces for Medical Image Volume Segmentation*. IEEE Trans. Medical Imaging, 18:840–850, 1999.

- [160] McInerney, T. y D. Terzopoulos: *T-snakes: Topology adaptive snakes*. Medical Image Analysis, 4:73–91, 2000.
- [161] Menet, S., P. Saint-Marc y G. Medioni: *B-snakes: Implementation and application to stereo*. Proc. DARPA, páginas 720–726, 1990.
- [162] Metaxas, D. y I. A. Kakadiaris: *Elastically adaptive deformable models*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 24(10):1310–1321, 2002.
- [163] Metaxas, D., E. Koh y N. Badler: *Multi-Level Shape Representation Using Global Deformations and Locally Adaptive Finite Elements*. Int. J. of Computer Vision, 25(1):42–46, 1997.
- [164] Metaxas, D. y D. Terzopoulos: *Shape and Nonrigid Motion Estimation through Physics-Based Synthesis*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 15(6):580–591, 1993.
- [165] Metaxas, Dimitris N.: *Physics-based deformable models, applications to computer vision, graphics and medical imaging*. Engineering and Computer Science. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1996.
- [166] Mitiche, A. y P. Bouthemy: *Computation and analysis of image motion : a synopsis of current problems and methods*. Int. J. of Computer Vision, 19(1):29–55, 1996.
- [167] Montanari, U.: *On the optimal detection of curves in noisy pictures*. Commun. ACM, 14(5):335–345, 1971.
- [168] Morales, J.: *Estimación de movimiento no rígido mediante modelos deformables*. Tesis de Doctorado, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación, Universidad Politécnica de Cartagena, 2005.
- [169] Morales, J., R. Verdú, R. González y L. Weruaga: *Fuzzy Non-Rigid Motion Estimation Robust to Rotation*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing, 2004.
- [170] Morales, J., R. Verdú, J. L. Sancho y L. Weruaga: *Multiple Feature Models for Image Matching*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing, 2005.
- [171] Morales, J., R. Verdú, R. Berenguer y L. Weruaga: *Non-Rigid Motion Estimation Based on Fuzzy Models*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Digital Signal Processing, July 2002.
- [172] Mortensen, E. N. y W. A. Barrett: *Intelligent scissors for image composition*. Proc. Computer Graphics, páginas 191–198, 1995.
- [173] Mortensen, E. N. y W. A. Barrett: *Interactive segmentation with intelligent scissors*. Graphical Models and Image Processing, 60:349–384, 1998.
- [174] Mumford, D.: *Perception as Bayesian inference*. En Knill, D. y W. Richard (editores): *Pattern theory: a unifying perspective*, páginas 25–62. Cambridge University Press, 1996.

- [175] Mundy, J. y A. Heller: *The evolution and testing of a model-based object recognition system*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 268–282, 1990.
- [176] Mundy, J. y A. Zisserman: *Geometric invariance in computer vision*. MIT Press, 1992.
- [177] Murray, D., F. Du, P. McLauchlan, I. Reid, P. Sharkey y J. Brady: *Design of stereo heads*. En Blake, A. y A. Yuille (editores): *Active Vision*, páginas 303–336. MIT Press, 1992.
- [178] Murray, D., P. McLauchlan, I. Reid y P. Sharkey: *Reactions to peripheral image motion using a head/eye platform*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 403–411, 1993.
- [179] Nassi, M., W. R. Brody B. P. Medoff y A. Macovski: *Iterative reconstruction-reprojection: an algorithm for limited data cardiac-computed tomography*. IEEE Trans. Biomed. Engineering, 29(5):333–341, 1982.
- [180] Neuenschwander, W., P. Fua, G. Székely y O. Kübler: *Velcro Surfaces: Fast Initialization of Deformable Models*. Computer Vision, Graphics, and Image Understanding, páginas 237–245, February 1997.
- [181] Nguyen, H. T., M. Worring y R. Boomgaard: *Watersnakes: Energy-Driven Watershed Segmentation*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 25(3):330–342, 2003.
- [182] Norton, S. J.: *Unique tomographic reconstruction of vector fields using boundary data*. IEEE Trans. Image Processing, 1(3):406–412, 1992.
- [183] O’Gorman, F.: *Edge detection using Walsh functions*. J. Artificial Intelligence, 10:215–223, 1978.
- [184] Ohta, Y. y T. Kanade: *Stereo by intra- and inter-scan line search using dynamic programming*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 7(2):139–154, 1985.
- [185] Olstad, B. y A.H. Torp: *Encoding of a priori information in active contour models*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 18(9):863–872, September 1996.
- [186] Oppenheim, A.V. y R.W. Schaffer: *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, Second edición, 1999.
- [187] Osher, S. y R. Fedkiw: *The Level Set Method and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, 2002.
- [188] Osher, S. y N. Paragios (editores): *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*. Springer-Verlag New York, Inc., 2003.
- [189] Osher, S. y J. Sethian: *Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation*. J. of Computational Physics, 79:12–49, 1988.
- [190] Osher, S. y C. W. Shu: *High order essentially non-oscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations*. J. of Computational Physics, 28:902–921, 1991.
- [191] Otero, T. F.: *Patent EP-9200095 and EP-9202628*, 1992.

- [192] Otero, T. F.: *Conducting polymers, electrochemistry and biomimicking processes*. Modern Aspects of Electrochemistry, 33:307–434, 1999.
- [193] Otero, T. F. y J. M. Sansiñena: *Bilayer dimensions and movement of artificial muscles*. Bioelectrochem. Bioenergetics, 47, 1997.
- [194] Papanikolopoulos, N., P. Khosla y T. Kanade: *Vision and control techniques for robotic visual tracking*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, páginas 851–856, 1991.
- [195] Paragios, N. y R. Deriche: *Geodesic Active Contours and Level Sets for the Detection and Tracking of Moving Objects*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 22(3):266–280, 2000.
- [196] Park, J. y J. M. Keller: *Snakes on the Watershed*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 23(10):1201–1205, 2001.
- [197] Pelizzari, C., K. Tan, D. Levin, G. Chen y J. Balter: *Interactive 3D patient - image registration*. Proc. Int. Conf. on Information Processing in Medical Imaging, páginas 132–141, 1993.
- [198] Pentland, A. y S. Sclaroff: *Closed-Form Solutions for Physically Based Modeling and Recognition*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 13(7):715–729, 1991.
- [199] Perona, P. y J. Malik: *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 12(7):629–639, 1990.
- [200] Petajan, E., B. Bischofy, D. Bodoff y N. Brooke: *An improved automatic lipreading system to enhance speech recognition*. Proc. Human Factors in Computing Systems, páginas 19–25, 1988.
- [201] Peterfreund, N.: *Robust tracking of position and velocity with Kalman snakes*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 21(6):564–569, 1999.
- [202] Pollard, S., J. Mayhew y J. Frisby: *PMF: a stereo correspondence algorithm using a disparity gradient*. Perception, 14:449–470, 1985.
- [203] Ponce, J., J. Burdick y E. Rimon: *Computing the immobilizing three-finger grasp of planar objects*. Proc. Workshop on Computational Kinematics, páginas 281–300, 1995.
- [204] Precioso, F., M. Barlaud, T. Blu y M. Unser: *Robust Real-Time Segmentation of Images and Videos Using a Smooth-Spline Snake-based algorithm*. IEEE Trans. Image Processing, 14(7):910–924, 2005.
- [205] Prince, J. L.: *Convolution backprojection formulas for 3D vector tomography with application to MRI*. IEEE Trans. Image Processing, 5(10):1462–1472, 1996.
- [206] Pujol, O., D. Gil y P. Radeva: *Fundamentals of Stop and Go active models*. Image and Vision Computing, 23(8):681–691, 2005.
- [207] Rabiner, L. y J. Bing-Hwang: *Fundamentals of speech recognition*. Prentice-Hall, 1993.

- [208] Radeva, P., R. Toledo, C. Von Land y J. Villanueva: *3D Vessel reconstruction from biplane angiograms using snakes*. Computers in Cardiology, 25:773–776, 1998.
- [209] Ramer, E.: *The transformation of photographic images into stroke arrays*. IEEE Trans. Circuits and Systems, 22(3):363–374, 1975.
- [210] Rao, B., H. Durrant-Whyte, J. Sheenstem for tracking y surveillance: *A fully decentralized multi-sensor system for tracking and surveillance*. Int. J. Robotics Research, 12(1):20–44, 1993.
- [211] Rath, G. B. y A. Makur: *A fast matching criterion for VLSI implementation of block-based motion estimation*. Signal Processing, 73:297–301, 1999.
- [212] Rehg, J. y T. Kanade: *Visual tracking of high DOF articulated structures: an application to human hand tracking*. Proc. European Conf. Computer Vision, 2:35–46, 1994.
- [213] Reynard, D., A. Wildenberg, A. Blake y J. Marchant: *Learning dynamics of complex motions from image sequences*. Proc. European Conf. Computer Vision, páginas 357–368, 1996.
- [214] Rimon, E. y A. Blake: *Caging 2D bodies by one-parameter, two-fingered gripping systems*. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, páginas 1458–1464, 1996.
- [215] Rimon, E. y J. Burdick: *A configuration space analysis of bodies in contact - I. 1st order mobility*. Mech. Mach. Theory, 30(6):897–912, 1995.
- [216] Rimon, E. y J. Burdick: *A configuration space analysis of bodies in contact - II. 2nd order mobility*. Mech. Mach. Theory, 30(6):913–928, 1995.
- [217] Ritchie, C. J., C. R. Crawford, J. D. Godwin, K. F. King y Y. Kim: *Correction of computed tomography motion artifacts using pixel-specific back-projection*. IEEE Trans. Medical Imaging, 15(3):333–342, 1996.
- [218] Robb, R. A., E. A. Hoffman, L. J. Sinak, L. D. Harris y E. L. Ritman: *High-speed three-dimensional X-ray computed tomography: the Dynamic Spatial Reconstructor*. Proc. of the IEEE, 71(3):308–319, 1983.
- [219] Roberts, L.: *Machine perception of three-dimensional solids*. En Tippet, J. (editor): *Optical and Electro-optical Information Processing*. MIT Press, 1965.
- [220] Sadamani, R.: *Adaptive snakes: control of damping and material parameters*. Proc. SPIE Geometric Methods in Computer Vision, 1570, 1991.
- [221] Sapiro, G.: *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*. Cambridge University Press, 2001.
- [222] Sbert, C. y A. F. Solé: *Stereo reconstruction of 3D curves*. Int. Conf. on Pattern Recognition, 2000.

- [223] Scott, G.: *The alternative snake - and other animals*. Proc. 3rd Alvey Vision Conference, páginas 341–347, 1987.
- [224] Serra, J.: *Image Analysis and Mathematical Morphology*, volumen I. Academic Press, London, 1982.
- [225] Serra, J.: *Image Analysis and Mathematical Morphology: Theoretical Advances*, volumen II. Academic Press, London, 1988.
- [226] Sethian, J. A.: *Level Set Methods*. Cambridge University Press, 1996.
- [227] Sethian, J. A.: *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge University Press, 1999.
- [228] Singh, A., D. Goldgof y D. Terzopoulos (editores): *Deformable Models in Medical Image Analysis*. IEEE Computer Society Press, 1998.
- [229] Smith, A.: *Blue screen matting*. Proc. Siggraph, páginas 259–268, 1996.
- [230] Song, S. M. y R. M. Leahy: *Computation of 3D velocity fields from 3D cine CT images of a human heart*. IEEE Trans. Medical Imaging, 10(3):295–306, 1991.
- [231] Song, S. M., R. M. Leahy, D. P. Boyd, B. H. Brundage y S. Nape: *Determining Cardiac Velocity Fields and Intraventricular Pressure Distribution from a Sequence of Ultrafast CT Cardiac Images*. IEEE Trans. Medical Imaging, 13(2):386–397, 1994.
- [232] Staib, L.H. y J.S. Duncan: *Boundary finding with parametrically deformable models*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 14(11):1061–1075, November 1992.
- [233] State, A., G. Hirota, D. Chen, B. Garrett y M. Livingston: *Superior augmented reality registration by integrating land mark tracking and magnetic tracking*. Proc. Siggraph, páginas 429–438, 1996.
- [234] Stiller, C.: *Object-based estimation of dense motion fields*. IEEE Trans. Image Processing, 6(2):234–250, 1997.
- [235] Stiller, C. y J. Konrad: *Estimating Motion in Image Sequences*. IEEE Signal Processing Magazine, páginas 70–91, July 1999.
- [236] Stork, D., G. Wolff y E. Levine: *Neural Network lipreading system for improved speech recognition*. Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks, 2:289–295, 1992.
- [237] Strang, G. y G. Fix: *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA, 1973.
- [238] Stroud, K. A.: *Engineering Mathematics*. McMillan, 1987.
- [239] Suess, C., W. A. Kalender y J. M. Coman: *New low-contrast resolution phantoms for computed tomography*. Med. Phys., 26(2):296–302, 1999.

- [240] Sullivan, G.: *Visual interpretation of known objects in constrained scenes*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. B., 337:361–370, 1992.
- [241] Taylor, M., A. Blake y A. Cox: *Visually guided grasping in 3D*. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, páginas 761–766, 1994.
- [242] Terzopoulos, D.: *Regularization of inverse visual problems involving discontinuities*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 8(4):413–424, 1986.
- [243] Terzopoulos, D.: *On Matching Deformable Models to Images*. En America, Optical Society of (editor): *Topical Meeting on Machine Vision*, volumen 12 de *Technical Digest Series*, páginas 160–167, Washington, DC, 1987.
- [244] Terzopoulos, D.: *The computation of visible surface representations*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 10(4):417–438, July 1988.
- [245] Terzopoulos, D.: *Deformable models: classic, topology-adaptive and generalized formulations*. En Osher, S. y N. Paragios (editores): *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics*, capítulo 2, páginas 21–40. Springer-Verlag New York, Inc., 2003.
- [246] Terzopoulos, D. y K. Fleischer: *Deformable models*. The Visual Computer, 4(6):306–331, 1988.
- [247] Terzopoulos, D. y D. Metaxas: *Dynamic 3D models with local and global deformations: deformable superquadrics*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 13(7):703–714, 1991.
- [248] Terzopoulos, D. y H. Qin: *Dynamic NURBS with geometric constraints for interactive sculpting*. ACM Trans. on Graphics, 13(2):103–136, 1994.
- [249] Terzopoulos, D. y R. Szeliski: *Tracking with Kalman snakes*. En Blake, A. y A. Yuille (editores): *Active Vision*, páginas 3–20. MIT Press, Cambridge, MA, 1992.
- [250] Terzopoulos, D. y K. Waters: *Analysis of facial images using physical and anatomical models*. Proc. Int. Conf. Computer Vision, páginas 727–732, 1990.
- [251] Terzopoulos, D. y K. Waters: *Analysis and synthesis of facial image sequences using physical and anatomical models*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 15(6):569–579, 1993.
- [252] Terzopoulos, D., A. Witkin y M. Kass: *Constraints on deformable models: recovering 3D shape and nonrigid motion*. Artificial Intelligence, 36:91–123, 1988.
- [253] Teytaud, O. y D. Sarrut: *Convergence speed of deformable models*. Proc. of Int. Joint Conf. on Neural Network, 4:2850–2855, 2001.
- [254] Thompson, D. W. y J. L. Mundy: *Three dimensional model matching from an unconstrained viewpoint*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, páginas 208–220, 1987.
- [255] TIC-2002-03033: *M3DICA: Interfaz Gráfico Avanzado de Análisis de Información Volumétrica Dinámica para el Diagnóstico y Tratamiento de Problemas Oncológicos y Coronarios*, 2002.

- [256] Tikhonov, A. N. y V. Y. Arsenin: *Solutions for Ill-Posed Problems*. Wiley New York, 1977.
- [257] Tsui, B., W. Segars y D. Lalush: *Effects of upward creep and respiratory motions in myocardial SPECT*. IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conf., 1999.
- [258] Uenohara, M. y T. Kanade: *Vision-based object registration for real-time image overlay*. En Ayache, N. (editor): *Computer Vision, Virtual Reality and Robotics in Medicine*. Springer-Verlag, 1995.
- [259] Unser, M., A. Aldroubi y M. Eden: *B-spline signal processing: Part I-theory; part II-efficient design and applications*. IEEE Trans. Signal Processing, 41(2):821–848, February 1993.
- [260] Varga, R. S.: *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- [261] Verdú, R., R. Berenguer, J. Morales, G. Vázquez, T.F. Otero y L. Weruaga: *Mechanical Characterization of the Life Cycle of Artificial Muscles through Stereoscopic Computer Vision and Active Contours*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing, 2005.
- [262] Verdú, R. y J. Morales: *Diseño óptimo de parámetros dinámicos de contornos activos en segmentación de imágenes*. XX Symposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI), 2005.
- [263] Verdú, R., J. Morales, R. Berenguer y L. Weruaga: *Optimum Design of Dynamic Parameters of Active Contours for Improving their Convergence in Image Segmentation*. En Blanc-Talon, Jacques, Wilfried Philips, Dan Popescu y Paul Scheunders (editores): *Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems: 7th International Conference.*, volumen 3708 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, páginas 483 – 490. Springer-Verlag GmbH, 2005.
- [264] Verdú, R., J. Morales y L. Weruaga: *Análisis de la convergencia de snakes en segmentación de imágenes*. XIX Symposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI), 2004.
- [265] Verdú, R., R. Berenguer, J. Morales, G. Vázquez, T. F. Otero y L. Weruaga: *3D Mechanical Characterization of Artificial Muscles with stereoscopic computer vision and active contours*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing, September 2003.
- [266] Verdú, R., J. Morales, R. Berenguer y L. Weruaga: *Active Contours for Heart Motion-Compensated Reconstruction in Computed Tomography*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Digital Signal Processing, July 2002.
- [267] Verdú, R., J. Morales, A. J. Fernandez-Romero, M. T. Cortés, T. F. Otero y L. Weruaga: *Mechanical Characterization of Artificial Muscles with Computer Vision*. Proc. of SPIE Annual Int. Symposium on Smart Structures and Materials, 2002.
- [268] Verdú, R., J. Morales, R. González y L. Weruaga: *Convergence Analysis of Active Contours in Image Segmentation*. Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing, páginas 2749–2752, 2004.

- [269] Verdú, R., J. Morales y L. Weruaga: *Efficient frequency design of deformable models*. Proc. of Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems (ACIVS), páginas 223–229, September 2004.
- [270] Vese, L. y S. Osher: *The Level Set Method links Active Contours, Mumford-Shah Segmentation and Total Variation Restoration*. Informe técnico, 0205, UCLA CAM, 2002.
- [271] Waite, J. y W. Welsh: *Head boundary location using snakes*. British Telecom Tech. J., 8(3), 1990.
- [272] Wang, Yue y Eam Khwang Teoh: *Dynamic B-snake model for complex objects segmentation*. Image and Vision Computing, 23(12):1029–1040, 2005.
- [273] Weruaga, L., J. Morales, L. Núñez y R. Verdú: *Estimating Volumetric Motion in Human Thorax With Parametric Matching Constraints*. IEEE Trans. Medical Imaging, 22(6):766–772, June 2003.
- [274] Weruaga, L., J. Morales y R. Verdú: *Active training on the CMAC nonlinear adaptive system*. XII European Signal Processing Conference, páginas 589–592, september 2004.
- [275] Weruaga, L., R. Verdú y J. Morales: *Frequency Domain Formulation of Active Parametric Deformable Models*. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence, 26(12):1568–1578, 2004.
- [276] Williams, L.: *Performance-driven facial animation*. Proc. Siggraph, páginas 235–242, 1990.
- [277] Willis, N. P. y Y. Bresler: *Optimal scan for time-varying tomography I: theoretical analysis and fundamental limitations*. IEEE Trans. Image Processing, 4(5):642–653, 1995.
- [278] Willis, N. P. y Y. Bresler: *Optimal scan for time-varying tomography II: efficient design and experimental validation*. IEEE Trans. Image Processing, 4(5):654–666, 1995.
- [279] Wloka, M. y B. Anderson: *Resolving occulsion in augmented reality*. Proc. Symposium on Interactive 3D graphics, páginas 5–12, 1995.
- [280] Xu, C. y J. L. Prince: *Generalized gradient vector flow external forces for active contours*. Signal Processing, 71(2):131–139, 1998.
- [281] Xu, C. y J. L. Prince: *Snakes, shapes, and gradient vector flow*. IEEE Trans. Image Processing, 7(3):359–369, 1998.
- [282] Young, D. M.: *Iterative Solution of Large Linear Systems*. Academic Press, Orlando, 3 edición, 1971.
- [283] Yu, Q. y D. Terzopoulos: *Synthetic motion capture for interactive virtual worlds*. En Proc. Computer Animation, páginas 2–10. IEEE CS Press, Los Alamitos, CA, 1998.
- [284] Yuille, A.: *Generalized deformable models, statistical physics, and matching problems*. Neural Computation, 2:1–24, 1990.
- [285] Yuille, A., D. Cohen y P. Hallinan: *Feature extraction from faces using deformable templates*. Proc. Conf. Computer Vision and Pattern Recognition, páginas 104–109, 1989.

- [286] Yuille, A. y P. Hallinan: *Deformable templates*. En Blake, A. y A. Yuille (editores): *Active Vision*, páginas 20–32. MIT Press, 1992.
- [287] Zhao, C. G. y T. G. Zhuang: *A hybrid boundary detection algorithm based on watershed and snake*. *Pattern Recognition Letters*, 26(9):1256–1265, 2005.
- [288] Zhou, L. y C. Kambhamettu: *Extending Superquadrics with Exponent Functions: Modeling and Reconstruction*. *Graphical Models and Image Processing*, 63(1):1–20, 2001.
- [289] Zhu, S. C. y A. L. Yuille: *Region Competition: Unifying Snakes, Region Growing, and Bayes/MDL for Multiband Image Segmentation*. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 18(9):884–900, 1996.
- [290] Zinkiewicz, O. y K. Morgan: *Finite elements and approximation*. Wiley, New York, 1983.
- [291] Zucker, S., R. Hummel y A. Rosenfeld: *An application of relaxation labelling to line and curve enhancement*. *IEEE Trans. Computers*, 26(4):394–403, 1977.