UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍAS DE LA
INFORMACIÓN Y LAS COMUNICACIONES

**FORMULACIÓN DE MODELOS DEFORMABLES
PARAMÉTRICOS MULTIDIMENSIONALES
EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA**

2013

Autor

Rafael Berenguer Vidal

Director

Rafael Verdú Monedero

UMI Number: 3645725

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.

UMI 3645725

Published by ProQuest LLC (2014). Copyright in the Dissertation held by the Author.

Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against unauthorized copying under Title 17, United States Code

ProQuest LLC.
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106 - 1346

A mis padres

Agradecimientos

Resultaría complejo el poder incluir en esta página a todas las personas que de una u otra forma, me han apoyado con su confianza, conocimientos y experiencia, en la ardua y dilatada tarea que ha supuesto la elaboración de esta tesis doctoral. Por este motivo, voy a intentar sintetizar en los siguientes párrafos a todos ellos, siendo consciente que son muchos a los que quiero mostrar mi agradecimiento, pero que por brevedad me es imposible citar de forma explícita.

En primer lugar, quiero manifestar mi sincero e inmenso reconocimiento a mi director, el Dr. Rafael Verdú Monedero, Profesor Titular de la *Universidad Politécnica de Cartagena*. Solamente la amistad que nos une desde hace casi dos décadas, explica la infinita paciencia, desinteresada atención y minuciosa orientación que ha mostrado durante todos los años que ha conllevado la realización de este trabajo.

También deseo agradecer al resto de miembros del *Grupo de Teoría y Tratamiento de la Señal* de esta universidad, por su colaboración y deferencia para la participación en diferentes proyectos de investigación, publicaciones y ponencias, los cuales han supuesto enormes desafíos pero han conllevado a la generación de los resultados sintetizados en esta tesis doctoral.

Asimismo quisiera mostrar mi agradecimiento al Dr. Majid Mirmehdi por concederme la oportunidad de realizar una estancia predoctoral en el *Visual Information Laboratory* de la *Universidad de Bristol*, donde pude realizar las pruebas para la validación de los modelos aquí propuestos.

Por otra parte, es justo reconocer la consideración ofrecida por parte de los miembros de la *Universidad Católica de Murcia*, y en especial el apoyo y aliento de mis compañeros del *Grado en Ingeniería en Sistemas de Telecomunicaciones*, donde he impartido docencia durante todos estos años.

A nivel personal, quiero expresar mi inmenso agradecimiento a todos y cada uno de los miembros de mi extensa familia. Son muchos los que de una u otra forma, me han apoyado con ánimos, consejos, sugerencias y revisiones. En especial quiero destacar la ayuda proporcionada por todos mis hermanos así como las recomendaciones y correcciones de mi ahijada Maite, profesora del *Institut für Mathematik* de la *Universidad Técnica de Berlín*. Y por supuesto, no podría faltar aquí mi infinita gratitud a mis padres por su apoyo incondicional durante tantos y tantos años, y que estarían orgullosos de tener un doctor más en la familia. A ellos va dedicado todo el trabajo realizado.

Abstract

Deformable models are mathematical methods used for delineating boundaries of objects by means of curves, surfaces or volumes that deform under the influence of internal and external forces. The foundations of these mathematical models draw from the areas of Geometry, Physics and Approximation Theory. Geometry allows the representation of shape and position of the objects and the constraints on them placed by their physical properties. Finally approximation theory provides the means for the fitting of the models to the target data.

These models have been used and further developed extensively in the last three decades due to their wide range of applications in the field of image processing and computer vision. The main motivation is to provide reliable tools to analyze, model and reconstruct datasets where the challenge lies in retrieving high-level information from low-level signals while minimizing the impact of noise and other unwanted effects. Among their vast range of applications are pattern recognition, object and motion tracking as well as image segmentation. In addition, their usage in the simulation of soft tissue, computer animation and non-destructive testing of products makes these models particularly valuable. Furthermore, in the field of medical imaging, the widely recognized value of deformable models arises from their ability to segment, match and track images of anatomic structures exploiting features derived from datasets.

The name “deformable models” stems from the use of elasticity theory at the physical level, generally within a setting of Lagrangian dynamics. This allows us to consider deformable models as elastic bodies which respond naturally to applied forces and constraints. Let us first consider the internal forces of the model. The internal forces and constraints provide the physical characteristics to the model, such as elasticity, stiffness or mass. Typically, deformation energy functions defined in terms of the geometric degrees of freedom are associated with the deformable model. Thus, the internal forces are defined in order to preserve the smoothness in the shape of the model. In addition, taking a physics-based view of classical optimal approximation, external potential energy functions are defined in terms of the data to which the model is to be fitted. These potential energies give rise to external forces, which drive the model to follow the shape and position of the data.

The shape of the model is usually determined from the minimization of an energy functional through an iterative process. The final state is achieved when equilibrium is reached between internal and external forces. This can result either in a static or in a dynamic scenario, i.e. when the data does not or does change over time, respectively. Thus, the deformable model is able to emulate the shape and physical properties of objects, in particular those with non-rigid motion or deformation.

Deformable models are classified into two general approaches, parametric and geometric, depending on how the model is defined. Parametric models, also known as explicit ones, are mathematical structures whose deformations are determined by the displacement of a discrete number of control points along the structure. The main advantage of the parametric models is based on their convergence speed, which depends on the predetermined number of control points. However, the main drawback of these models is the difficulty to change the topology of the model. Consequently, the basic topology must be created before the deformation. The second class of deformable models, namely the geometric or implicit ones, use a distance transformation to define the shape of the n -dimensional object as a level set of an $(n + 1)$ -dimensional object. The main advantage of this approach is its ability to change the topology of the model according to the data and its robustness to changes in the initialization. By contrast, its main drawback is a slower speed of adaptation compared to parametric models.

This PhD Thesis presents a new approach of parametric deformable models and proves their validity. The aim of this work is to extend the classical theory to the formulation of general multidimensional deformable models while at the same time translating the formulation and iterative process into the Fourier domain. The goal of this approach is the analysis, characterization and segmentation of information retrieved from multidimensional datasets in a faster and more efficient way than previous approaches. The frequency transformation is precisely a key point for this purpose because it provides a significant increase in the computational efficiency of the iterative process. In fact, this frequency approach is more efficient than the implementations with the lowest computational cost that can be found in the spatial domain. In addition, a method for designing the optimal dynamic parameters of the model is appended to this new formulation. This method for designing the parameters is based on the spectra of the data to be processed. Hence, the method allows to optimize the iterative system in order to increase the speed of adaptation to the dataset under analysis.

We begin this thesis with a review of the mathematical framework of one-dimensional parametric deformable models formulated in the spatial domain. These one-dimensional models, known commonly as *snakes*, have been used extensively in several applications of image processing. Furthermore, the inherent problems of the classical implementation of deformable models are described together with their current state of the art solutions.

Then, deformable models are extended to e dimensions by simply using the primary energy functional with e parametric variables. These e -dimensional models are used in a d -dimensional scenario, where $e \leq d$. Typically the models are applied in $\mathbb{R}^3$ and thus, $d = 3$. As mentioned above, the shape of the model is obtained through the minimization of the energy functional. According to variational calculus, this implies that the model must satisfy the Euler-Lagrange equations. Thus in the more general, multidimensional case, a system of d partial differential equations (PDEs) is derived and must be solved to obtain the shape and position of the model.

In order to calculate the solution of the system numerically, it is necessary to discretize the spatial and temporal variables of the model. Similar to the majority of the approaches given in the literature, the method of finite elements is used here for space discretization. This allows us to represent the model by simply using a particular shape function and an e -dimensional array of nodal variables. Through the use of different shape functions, the behavior of the resulting model can be influenced to fit the desired application.

Then, Galerkin's finite elements method is applied to the PDEs yielding a second order system in matrix form. This system allows the description of the iterative process and stands for the equation of motion of the model. This equation, which is formulated in the spatial domain, is used in most approaches of parametric deformable models owing to its simplicity and effectiveness. Nevertheless, when used with multi-dimensional models, the computational and memory requirements are substantial due to the large dimensions of the system matrices. Therefore this equation does not allow an efficient use of the models in these scenarios.

One of the contributions of the thesis is the reformulation of the equation of motion to increase computational efficiency when used with multidimensional models. For this purpose, the system matrices and the matrices of nodes are rewritten. This is done to represent the product of two-dimensional sparse matrices as e -dimensional convolutions of e -dimensional arrays. Although initially this reformulation does not result in an improvement in the required number of operations, the reduction in memory requirements is already considerable. More significant, however, is the fact that when this equation is transformed into the frequency domain, the convolutions become pointwise products of the frequency components. Thus, when the equation of motion is represented in the Fourier domain, the computational cost is reduced by several orders of magnitude in each of the dimensions of the model. Hence, the overall increase of efficiency is remarkable.

Frequency formulation requires that both datasets and models are periodic, which implies that models are closed in all parametric variables. Since getting a proper adjustment in certain datasets demands the use of open models, a mechanism to emulate periodicity with open models must be employed. Similarly to other previous approaches in the bibliography, hidden extensions are used in the formulation. These extensions involve the addition of a set of nodes at the ends

of the coordinate functions that yields the periodicity. Thus, from the viewpoint of the iterative process, the model is periodic and therefore closed. However, these extensions are hidden “in the sense that” they are only used during some computations in the iterative process. Once the iteration ends and conditions are imposed to the whole model, the extensions are deleted resulting in a visible open model, which was computed by means of the equation of motion in the frequency domain. Accordingly, in this thesis hidden extensions are generalized to be used with e -dimensional models allowing the use of multidimensional open models with the frequency formulation.

Since the size of these extensions depends on the size of the impulse response of the equivalent filter of the system, this filter needs to be explored in detail. By using two different temporal discretizations in the equation of motion, two iterative schemes have been proposed in this thesis. These schemes, implicit and explicit, provide two different iterative systems with an infinite and a finite length impulse response respectively. Besides the conditioning effect on the extensions, each of these has its own characteristics in the iterative process. Thus, the implicit model produces a faster convergence and holds for softer convergence conditions than the explicit scheme, at the expense of using an equivalent filter with an impulse response whose length is infinite.

At this point it is noteworthy that an important problem to work out is the dynamic behavior of the deformable model evolving towards its final equilibrium. Therefore, a convergence and stability analysis is particularly necessary since the energy functional that governs the shape of the model depends on the internal parameters and the external data. Note that this dependence is occasionally nonlinear, e.g. the inflation or stretching forces derived from the dataset. Thus, in the design of the global dynamic behavior it is mandatory to control the definition of the energy functional in order to guarantee that the existing feedback does not produce an unstable performance.

Consequently a thorough study of the convergence and stability is carried out. The equation of motion and the iterative process are analyzed in it. Note that this investigation is performed with the expressions translated into the frequency domain. Just because it is conducted in the Fourier domain, the main advantage of this analysis is that the results are independent of both the number of dimensions of the model and the shape function used in the spatial discretization. In fact, stability and convergence conditions can easily be calculated from the modulus of the transfer function of the filter, which varies for each frequency component. This implies that the convergence of the model depends on the frequency, and hence different stability and convergence requirements hold for each frequency.

This brings us to another major contribution of this dissertation. The results of the convergence analysis allow us to set the parameters of the system to ensure that the model will converge for the frequencies of interest and other conditions, such as the shape function and the iterative scheme. Furthermore, the magnitude of the poles of the iterative system are computed, which

provides not only stability but also a mechanism to optimize the iterative system for the fastest speed of convergence for a given frequency range.

Hence, when a deformable model is applied to a specific dataset, the spectrum of the multidimensional data is analyzed and the frequency band with maximum energy is allocated. Thus, the fastest speed of convergence can be achieved for the frequency components with the highest energy, and therefore on average for the whole signal. Again, a benefit of this approach is its applicability to models of any number of dimensions, shape function and iterative schemes.

The proposed frequency-based approach of multidimensional models is validated in 3D and 4D scenarios with different applications. First, models are applied to characterize noisy topographical data, which are used to prove the robustness of the models against noise. Moreover, these experiments have been utilized to check the effectiveness of the algorithm of optimization of the speed of convergence depending on the bandwidth of the data. Subsequently, models are applied in segmentation and motion tracking of 3D and 4D medical images, specifically with CT images. Finally, the models are used in soft tissue simulation, where an external pressure is applied on a specific area of human organs and their soft tissue are deformed accordingly. The results of these experiments prove the effectiveness and efficiency of the approach outlined in this thesis.

In this thesis we have completely treated the cases of $e = 1$ and $e = 2$ and laid out the theoretical foundations for general dimensions. However, the topics for further research resulting from this are still diverse. Of course, the system matrices for $e \geq 3$ need to be obtained and one could aim at extending the models defined for other shape-functions than the ones considered here. In addition, it should be interesting to integrate the proposed formulations for implicit models similarly to MetaMorphs or Topological Active Volumes, or to incorporate additional techniques to further improve efficiency (like parallel implementations or use of GPU hardware). And finally, not only could the method be extended to other medical imaging modalities, but also be applied beyond that to any of the fields already mentioned.

Resumen

Los modelos deformables son métodos matemáticos que se utilizan para delinear los bordes o parte externa de objetos por medio de curvas, superficies o volúmenes que se deforman bajo la influencia de fuerzas internas y externas. Los fundamentos de estos modelos matemáticos están basados en la geometría, la física y la teoría de la aproximación. La geometría permite representar la forma y posición de los objetos. La física impone restricciones sobre la variación de dicha forma y posición a lo largo del tiempo. Finalmente, la teoría de aproximación proporciona los medios para ajustar los modelos a los objetos que se desean caracterizar.

Estos modelos se han utilizado ampliamente en las últimas tres décadas debido a su amplio abanico de aplicaciones en las áreas del procesamiento de imagen y la visión por computador. La principal motivación para el empleo de los modelos se fundamenta en la necesidad de disponer de herramientas fiables que permitan analizar, modelar y reconstruir conjuntos de datos. La obtención de estas herramientas supone un reto, puesto que deben ser capaces de recuperar información de alto nivel a partir de señales de bajo nivel, reduciendo al mínimo el impacto del ruido y otros efectos no deseados.

Entre la amplia gama de aplicaciones de los modelos deformables podemos destacar el reconocimiento de patrones, el seguimiento del movimiento de los objetos así como la segmentación de imágenes. Además, su uso en la simulación de tejidos blandos, la animación por ordenador de objetos elásticos y los ensayos no destructivos de productos, convierten a estos modelos en herramientas particularmente valiosas. Por otra parte, los modelos deformables tienen también un gran interés en el campo de la imagen médica. En concreto, los modelos son ampliamente utilizados para la segmentación y seguimiento de estructuras anatómicas extraídas a partir de los conjuntos de datos médicos.

El nombre de “modelos deformables” surge del uso de la teoría de la elasticidad en el plano físico, por lo general dentro del marco de la dinámica de Lagrange. Esto nos permite considerar los modelos deformables como cuerpos elásticos que responden de forma natural a las fuerzas y restricciones aplicadas. Consideremos en primer lugar las fuerzas internas del modelo. Dichas

fuerzas y restricciones internas proporcionan al modelo sus características físicas, como elasticidad, rigidez o masa. De forma habitual, las funciones de energía de deformación asociadas al modelo deformable son definidas con relación a los grados de libertad geométricos deseados. Esto es, las fuerzas internas se definen con el fin de preservar la suavidad en la forma del modelo. Además, tomando el punto de vista físico de la teoría de la aproximación clásica, las funciones potenciales de energía externas se definen en función de los datos a los que el modelo se va a ajustar. Estas energías potenciales dan lugar a fuerzas externas, las cuales impulsan el modelo a seguir la forma y la posición de los datos.

La forma del modelo se determina habitualmente a partir de la minimización de un funcional de energía a través de un proceso iterativo. Dicho proceso se detiene cuando se alcanza el equilibrio entre las fuerzas internas y externas, pudiéndose aplicar en un escenario estático o dinámico, esto es, cuando los datos no cambian a lo largo el tiempo o cuando sí lo hacen. Así pues, el modelo deformable es capaz de emular la forma y las propiedades físicas de los objetos, y en particular aquéllos con movimiento o deformación no rígida.

Basándonos en su definición, podemos dividir los modelos deformables en dos tipos principales, paramétricos y geométricos. Los modelos paramétricos, también conocidos como explícitos, son estructuras matemáticas cuya deformación se determina por el desplazamiento de un número discreto de puntos de control a lo largo de la estructura. La principal ventaja de los modelos paramétricos reside en su alta velocidad de convergencia, que depende fundamentalmente de un número predeterminado de puntos de control. Sin embargo, su principal inconveniente reside en la dificultad para cambiar dinámicamente la topología del modelo en el proceso de adaptación a estos conjuntos de datos. En consecuencia, la topología básica debe ser creada antes de la aplicación a los datos. La segunda clase de modelos deformables, los llamados geométricos o implícitos, utilizan una transformación para definir la forma del objeto n -dimensional como un conjunto de nivel de un objeto $(n + 1)$ -dimensional. La principal ventaja de los implícitos es su capacidad para cambiar la topología del modelo de acuerdo a los datos, así como su robustez frente a los cambios en la inicialización. Por el contrario, su principal inconveniente es una menor velocidad de adaptación en comparación con los modelos paramétricos.

Esta tesis doctoral presenta un nuevo enfoque de los modelos deformables paramétricos, justificando asimismo su validez. El propósito de este trabajo es extender la teoría clásica a la formulación de modelos deformables multidimensionales, trasladando al mismo tiempo la formulación y el proceso iterativo al dominio de Fourier. El interés de este nuevo enfoque reside en analizar, caracterizar y segmentar información extraída de conjuntos de datos multidimensionales mediante un procedimiento más rápido y eficiente que las aproximaciones anteriores. La transformación a la frecuencia es, precisamente, un punto clave para este propósito, ya que proporciona un aumento significativo de la eficiencia computacional del proceso iterativo. De hecho, este enfoque frecuencial es más eficiente que la implementación con el menor coste computacional que

puede encontrarse en el dominio espacial. Además, se ha desarrollado un método para el diseño óptimo de la parámetros dinámicos del modelo. Este método está basado en el espectro de la datos a procesar. Así, el método permite optimizar el sistema iterativo con el fin de aumentar la velocidad de la adaptación al conjunto de datos bajo análisis.

En esta tesis se procede en primer lugar con una revisión del marco matemático de los modelos deformables paramétricos unidimensionales, formulados en el dominio espacial. Estos modelos unidimensionales, conocidos comúnmente como *snakes*, se han utilizado ampliamente en numerosas aplicaciones de procesamiento de imagen en los últimos años. Asimismo, se describen los problemas inherentes de la implementación clásica de estos modelos deformables, junto con las soluciones propuestas en el estado del arte actual.

A continuación, los modelos deformables se extienden a e dimensiones utilizando el funcional de energía primario con e variables paramétricas. Estos modelos e -dimensionales son utilizados en un escenario d -dimensional, donde $e \leq d$. Por lo general, los modelos se aplican en $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto, $d = 3$, aunque pueden aplicarse en mayores dimensiones. Como se ha indicado anteriormente, la forma del modelo se obtiene a través de la minimización de un funcional de energía. Según el cálculo variacional, esto implica que el modelo debe satisfacer las ecuaciones de Euler-Lagrange. Así, en el caso multidimensional general se obtiene un sistema de d ecuaciones diferenciales parciales (PDEs), el cual debe resolverse para obtener la forma y la posición del modelo.

Con el fin de calcular numéricamente la solución del sistema, es necesario discretizar las variables espaciales y temporales del modelo. Al igual que en la mayoría de las aproximaciones de la literatura, utilizamos el método de elementos finitos para la discretización espacial. Esto nos permite representar el modelo utilizando una determinada función de forma y un array e -dimensional de variables nodales. Según la función de forma elegida, el modelo presentará un determinado comportamiento, el cual puede ser ajustado de esta forma a la aplicación deseada.

Seguidamente, se aplica el método de los elementos finitos de Galerkin a las PDEs, generando un sistema matricial de segundo orden. Este sistema describe el proceso iterativo y representa la ecuación del movimiento del modelo. Esta ecuación, que se formula en el dominio espacial, es utilizada en la mayoría de los planteamientos de los modelos deformables paramétricos debido a su simplicidad y eficacia. Sin embargo, cuando se utiliza con modelos multidimensionales, los requisitos de cálculo y de memoria son considerables debido a las grandes dimensiones de las matrices del sistema. Por lo tanto, esta ecuación del movimiento no permite un uso eficiente de los modelos en estos escenarios.

Una de las aportaciones de la tesis es la reformulación de la ecuación del movimiento para aumentar la eficiencia computacional de los modelos multidimensionales. Con este fin, se reescri-

ben tanto las matrices del sistema como las de los nodos para poder representar el producto de matrices dispersas bidimensionales como convoluciones e -dimensionales de arrays compactos, también e -dimensionales. Aunque inicialmente esta reformulación no da lugar a una disminución del número de operaciones, la reducción en los requisitos de memoria es ya notable en este primer paso. Más importante si cabe, es el hecho de que cuando esta ecuación se transforma al dominio de la frecuencia, las convoluciones se convierten en productos, elemento a elemento, de los arrays frecuenciales los cuales requieren una menor carga computacional. Así pues, cuando la ecuación del movimiento se representa en el dominio de Fourier, el coste computacional del proceso iterativo se reduce en varios órdenes de magnitud en cada una de las dimensiones del modelo. Por este motivo, el aumento global de la eficiencia computacional es notable en el dominio de Fourier.

La formulación en la frecuencia requiere que tanto los conjuntos de datos como los modelos utilizados sean periódicos, lo que implica que estos modelos deben ser cerrados en todas las variables paramétricas. Dado que para conseguir un ajuste adecuado en ciertos conjuntos de datos es necesario el empleo de modelos abiertos, se hace necesario la implementación de un mecanismo que emule periodicidad con modelos abiertos. De manera similar a otras aproximaciones en la bibliografía, se utilizan extensiones ocultas en la formulación propuesta. Estas extensiones implican la adición de un conjunto de nodos en los extremos de las funciones de coordenadas que generen dicha periodicidad. Así, desde el punto de vista del proceso iterativo, el modelo es periódico y por lo tanto cerrado. Sin embargo, estas extensiones están ocultas “bajo la óptica” de que sólo se utilizan durante que ciertos cálculos en el proceso iterativo. Una vez la iteración termina y se aplican las condiciones a todo el modelo, las extensiones se eliminan resultando es un modelo abierto visible, obtenido por medio de la ecuación del movimiento en el dominio de la frecuencia. En consecuencia, en esta tesis las extensiones ocultas de la bibliografía se generalizan para poder ser utilizadas con modelos e -dimensionales permitiendo el uso de modelos multidimensionales abiertos con la formulación en el dominio de Fourier.

Dado que las dimensiones de estas extensiones dependen del tamaño de la respuesta impulsional del filtro equivalente del sistema, este filtro debe ser explorado en detalle. En esta tesis se proponen dos discretizaciones temporales diferentes para la ecuación del movimiento, las cuales resultan en dos esquemas iterativos con desiguales características. Estos dos esquemas, implícito y explícito, proporcionan un filtro equivalente con respuesta impulsional infinita y finita respectivamente. Además del efecto condicionante en el tamaño de las extensiones, cada una de estos esquemas posee sus propias características en el proceso iterativo. Así, el esquema implícito produce una convergencia más rápida presentando condiciones de convergencia más suaves que el esquema explícito, a expensas de la utilización de un filtro equivalente con una respuesta al impulso cuya longitud es infinita.

En este punto es importante destacar que una cuestión fundamental a tratar es el comportamiento dinámico del modelo deformable durante su evolución hacia su posición final de equi-

librio. Por lo tanto, es particularmente necesario el análisis de la convergencia y estabilidad del proceso iterativo, debido a que el funcional de energía que gobierna la forma del modelo depende tanto de los parámetros internos como de los datos externos. Notar que esta dependencia es en ocasiones no lineal, como por ejemplo, en el caso de las fuerzas de inflado o estiramiento derivadas del conjunto de datos. Con ello, en el diseño del comportamiento dinámico global, es obligatorio el control del funcional de energía con el fin de garantizar que la realimentación existente no produce un funcionamiento inestable.

Por consiguiente, se lleva a cabo un estudio en detalle de los requisitos de convergencia y estabilidad del proceso iterativo. Es interesante observar que la presente investigación se realiza con las expresiones trasladadas al dominio de la frecuencia. Precisamente porque se realiza en el dominio de Fourier, la principal ventaja de este análisis consiste en que los resultados son independientes tanto del número de dimensiones del modelo como de la función de forma utilizada en la discretización espacial. De hecho, el análisis concluye que las condiciones de estabilidad y convergencia se pueden calcular fácilmente a partir del módulo de la función de transferencia del filtro equivalente, la cual varía para cada componente frecuencial. Esto implica que la convergencia del modelo depende de la frecuencia, y por lo tanto, es posible obtener diferentes condiciones de estabilidad y convergencia para cada uno de los componentes frecuenciales del modelo.

Esto nos lleva a otra importante contribución de la tesis. Los resultados del análisis de convergencia nos permiten establecer los parámetros del sistema que aseguren la convergencia del modelo para las frecuencias de interés, teniendo en cuenta el resto de condiciones tales como la función de la forma o el esquema iterativo elegido. En concreto, el procedimiento propuesto permite calcular los parámetros del modelo en función de la magnitud deseada para los polos del sistema iterativo. Este mecanismo es de gran interés debido a que además de garantizar la estabilidad, permite optimizar el sistema iterativo para obtener la máxima velocidad de convergencia para un rango de frecuencias dado.

Así pues, cuando se aplica el modelo deformable a un determinado conjunto de datos, se analiza en primer lugar el espectro de dichos datos, identificando la banda de frecuencia con máxima energía. Se optimiza a continuación el proceso iterativo para obtener la máxima velocidad de convergencia para estos componentes frecuenciales más energéticos. Con ello, aumentamos en promedio la velocidad de convergencia global, ya que dichos componentes son los más significativos y, por tanto, tienen una mayor importancia en el conjunto de los datos a adaptar. Una vez más resaltamos que una ventaja de este procedimiento es su aplicabilidad a modelos de cualquier número de dimensiones, función de forma y esquema iterativo.

La aproximación frecuencial propuesta de los modelos deformables multidimensionales se ha validado en escenarios 3D y 4D en diferentes aplicaciones. En primer lugar, los modelos se han aplicado en la caracterización de datos topográficos con ruido, utilizados para comprobar

precisamente la robustez de los modelos contra el ruido. Por otra parte, este experimento ha sido empleado para confirmar la eficacia del algoritmo de optimización de la velocidad de convergencia en función de la banda frecuencial de interés de los datos. Posteriormente, se ha hecho uso de los modelos para la segmentación y seguimiento del movimiento de objetos en imágenes médicas 3D y 4D, en particular imágenes TAC. Finalmente, se han simulado tejidos blandos mediante los modelos deformables, donde al aplicar una presión externa en un área específica, se ha producido una deformación en el tejido acorde con dicha presión. Los resultados de estos experimentos demuestran la eficacia y eficiencia del enfoque de los modelos presentados.

En esta tesis hemos tratado por completo los casos de $e = 1$ y $e = 2$ dimensiones, quedando expuestos los fundamentos teóricos para el caso multidimensional general. De esta manera, surgen diversos temas de interés para futuras investigaciones. En primer lugar, sería interesante obtener las matrices del sistema para $e \geq 3$, así como extender los modelos a funciones de forma distintas a las consideradas en este trabajo. Además, tendría también un gran interés la integración de la formulación propuesta con modelos de tipología implícita, de manera similar a los MetaMorphs o los volúmenes activos topológicos (TAV). La incorporación de técnicas adicionales para mejorar aún más la eficiencia (como implementaciones paralelas o el uso de hardware de la GPU) es también un tema cuyo estudio es recomendable. Y como última línea de trabajo, destacaríamos la utilización de los modelos propuestos con otras modalidades de imagen médica y también su aplicación a otros campos diferentes de los anteriormente mencionados.

Índice

Abstract	ix
Resumen	xv
1. Introducción y estado del arte	1
1.1. Introducción	1
1.2. Aplicaciones	2
1.3. Estado del arte	5
1.4. Objetivos y motivación	12
1.5. Descripción del resto de capítulos	14
2. Formulación de los modelos deformables en el dominio del espacio	17
2.1. Modelos deformables paramétricos multidimensionales	17
2.1.1. Modelos estáticos	21
2.1.2. Modelos dinámicos	23
2.2. Formulación en el dominio del espacio de los modelos deformables	24
2.2.1. Discretización espacial mediante elementos finitos	24
2.2.2. Formulación mediante <i>B-splines</i>	28
2.2.3. Formulación mediante diferencias finitas	43
2.3. Discretización temporal	60
2.3.1. Esquema implícito.	60
2.3.2. Esquema explícito.	62
3. Formulación de los modelos deformables en el dominio de la frecuencia	63
3.1. Transformación al dominio de la frecuencia	63
3.2. Formulación frecuencial del esquema implícito	64
3.3. Formulación frecuencial del esquema explícito	72
4. Análisis de la convergencia y estabilidad	77

4.1. Esquema implícito	79
4.1.1. Sistema de primer orden	79
4.1.2. Sistema de segundo orden	81
4.2. Esquema explícito	90
4.2.1. Sistema de primer orden	90
4.2.2. Sistema de segundo orden	94
4.3. Validación de la convergencia del modelo	105
4.3.1. Régimen transitorio	106
4.3.2. Régimen estacionario	109
4.3.3. Señales con múltiples componentes espectrales	121
4.3.4. Discusión sobre el estudio de la convergencia	123
5. Implementación de los modelos deformables	127
5.1. Diseño práctico de los modelos deformables	127
5.2. Extensiones ocultas del modelo	150
5.3. Análisis computacional	160
6. Resultados y aplicaciones	165
6.1. Caracterización de datos topográficos	166
6.2. Segmentación de órganos y estructuras anatómicas en imagen médica	174
6.3. Deformación de tejidos blandos	190
7. Conclusions	199
7.1. Future lines of research	201
8. Conclusiones	203
8.1. Líneas futuras	205
A. Convenciones y notación matemática	209
A.1. Notación matemática	209
A.2. Operadores en derivadas parciales	210
B. Ecuaciones matriciales	213
B.1. Desarrollo de las ecuaciones matriciales	213
B.2. Funciones de forma y matrices del sistema	217
B.2.1. Matrices de composición	218
B.2.2. Matrices para funciones de forma <i>B-spline</i>	220
B.2.3. Matrices para funciones de forma diferencias finitas	227
B.3. Secuencias de forma y de rigidez en el dominio del espacio	231
B.4. Secuencias de forma y de rigidez en el dominio de Fourier	233
C. Representación de los filtros del sistema	237

C.1. Respuestas en frecuencia de los filtros del sistema $H(\bar{\omega})$ y $H'(\bar{\omega})$	237
C.1.1. Modelos con esquema implícito	237
C.1.2. Modelos con esquema explícito	242
C.2. Relación entre núcleo rigidez y función de forma $K(\bar{\omega})/F(\bar{\omega})$	244
D. Publicaciones	245
Bibliografía	249

Capítulo 1

*A large part of mathematics which becomes useful
developed with absolutely no desire to be useful,
and in a situation where nobody could possibly know
in what area it would become useful;
and there were no general indications that it ever would be so.*

(John von Neumann)

Introducción y estado del arte

1.1. Introducción

LOS modelos deformables son una clase de métodos de modelado con base física que permiten la descripción de objetos a través de curvas, superficies o volúmenes que se deforman bajo la influencia de fuerzas internas y externas. Las fuerzas internas proporcionan características físicas al modelo, tales como elasticidad, rigidez o masa, mientras que las fuerzas externas impulsan el modelo para seguir la forma de los datos a caracterizar.

Los fundamentos matemáticos de los modelos deformables representan la confluencia de Geometría, Física y Teoría de la Aproximación [Terzopoulos, 1986, 1987]. La Geometría sirve para representar la forma del objeto, la Física impone restricciones sobre la variación de su forma y posición a lo largo del tiempo, y la Teoría de Aproximación proporciona la base matemática que respalda el ajuste de los modelos a los datos. De forma general, la forma y posición de los modelos se determina a partir de la minimización de un funcional de energía a través de un proceso iterativo. En este funcional intervienen las energías internas de deformación y las energías externas

procedentes de los datos. Así, la posición final del modelo se obtiene cuando se alcanza el equilibrio entre las fuerzas internas y externas. Es decir, un modelo deformable puede interpretarse físicamente como un cuerpo elástico que responde de forma natural y bajo ciertas restricciones a las fuerzas aplicadas sobre él.

En este marco, las funciones de energía potencial externas se definen en función de los datos de interés, imágenes o volúmenes, a los que el modelo debe ajustarse. Estas funciones de energía originan fuerzas externas que deforman el modelo para que se ajuste a los datos. Al mismo tiempo, la energía de deformación respecto al estado natural del modelo origina fuerzas elásticas internas. Esto es, las restricciones de forma tales como continuidad, suavidad, elasticidad, plasticidad y simetría actúan como fuerzas internas. Bajo la influencia de fuerzas internas y externas, los modelos evolucionan hasta conformar las estructuras de interés de los datos. Es importante destacar también que los modelos deformables son, en esencia, sistemas dinámicos. Por este motivo, son apropiados para el estudio de objetos naturales en movimiento y por tanto, son capaces de emular la forma y las propiedades físicas de los objetos, especialmente aquellos con movimiento o deformación no rígida.

1.2. Aplicaciones

Esta capacidad de los modelos deformables ha originado una extensa actividad investigadora en ya más de dos décadas. La principal motivación de estos trabajos ha sido el proporcionar herramientas fiables que permitan analizar, modelar y reconstruir conjuntos de datos de 2, 3 y 4 dimensiones en una amplia gama de aplicaciones. Entre otros podemos destacar síntesis y animación de imágenes, análisis de imágenes, visión por computador, diseño geométrico asistido por ordenador (CAD) y otros campos relacionados. El principal desafío en estas aplicaciones es recuperar información de alto nivel de las señales de bajo nivel y reducir al mínimo el efecto del ruido y otros efectos no deseados.

Dentro del campo de reconocimiento de patrones, [Molloy y Whelan, 2000] utiliza los modelos para identificación de objetos genéricos con o sin movimiento, [Lladó et al., 2011] extrae la forma tridimensional de objetos a partir de una única cámara y [Zhang et al., 2012] es capaz de reconocer y localizar vehículos en la imagen, como se ve puede observar en las Figuras 1.1 y 1.2. Íntimamente relacionadas con las anteriores tenemos también las aplicaciones de seguimiento de objetos, donde los modelos deformables se utilizan para realizar un análisis del objeto y su movimiento. Así, [Blake y Isard, 1994] determina la posición y movimiento de labios y manos a partir de secuencias de vídeo, [Ray y Acton, 2004] realiza el seguimiento del movimiento de leucocitos y [Tehrani Niknejad et al., 2012] propone un método para el seguimiento múltiple de vehículos a partir de un vídeo generado por una cámara.

Figura 1.1.: Vista frontal y lateral de la cara reconstruida en varios fotogramas mediante un modelo deformable. (Imágenes extraídas de [Lladó et al., 2011]).

Figura 1.2.: Ejemplo de ajuste y reconocimiento de diferentes tipos de vehículos en diferentes ángulos y con diferentes niveles de oclusión. (Imágenes extraídas de [Zhang et al., 2012]).

Con respecto al área de los gráficos por computador, [Terzopoulos et al., 1987] introduce el uso de los modelos deformables para la creación de objetivos virtuales con comportamiento elástico y [Eberhardt et al., 1996] utiliza elementos finitos para modelar tejidos y su movimiento en animación. De forma similar, [Desbrun y Gascuel, 1996] propone un nuevo paradigma para simular objetos altamente deformables mediante un sistema de partículas o nodos entrelazados entre sí y [Nealen et al., 2006] hace una revisión de las contribuciones más significativas de la década para producir animaciones realistas de objetos animados con deformaciones elásticas. La Figura 1.3 muestra un ejemplo de esta deformación.

Figura 1.3.: Deformación altamente plástica y la fractura dúctil. (Imágenes extraídas de [Nealen et al., 2006]).

Otra área en la que ha habido una intensa actividad investigadora es la segmentación de imagen. Por ejemplo, [Bredno et al., 2003] propone un modelo de 2, 3 ó 4 dimensiones para segmentación multicanal de datos. Por su parte, [Falcao y Bergo, 2004] describe un método de segmentación combinando el *watershed* con modelos deformables. En [Berenguer et al., 2007], proponemos el empleo de modelos deformables para segmentar músculos artificiales en un entorno tridimensional y a partir de su forma calcular su movimiento y aceleración, tal y como ilustra la Figura 1.4. Por último [del Fresno et al., 2009], detalla un método de segmentación híbrida el cual combina el crecimiento de regiones y modelos deformables para preservar la topología de la superficie de las estructuras anatómicas de interés.

Figura 1.4.: Movimiento y velocidad de desplazamiento en diferentes puntos del músculo artificial. (Imágenes extraídas de [Berenguer et al., 2007]).

Precisamente en el campo de la imagen médica es donde los modelos deformables han tenido y continúan poseyendo un gran interés. En el libro [El-Baz et al., 2011] se ofrece un análisis exhaustivo del estado del arte de los métodos de segmentación en imagen médica, muchos de ellos empleando modelos deformables de diferentes tipos. De igual forma, algunos capítulos de [Bankman, 2008] estudian también el procesado y análisis de imagen médica mediante modelos deformables. En la Figura 1.8 se muestra el uso de modelos deformables unidimensionales para segmentación de una imagen de ultrasonidos. Asimismo, en la Figura 1.12 tenemos la segmentación de una rodilla mediante volúmenes activos topológicos (TAV) [Barreira et al., 2010].

Un caso concreto de aplicaciones de imagen médica es la simulación de tejidos blandos. Un ejemplo lo tenemos con [Choi et al., 2003] donde se propone un método de propagación de fuerzas para la simulación interactiva de la deformación que sufren tejidos blandos para un sistema con realimentación háptica en tiempo real utilizado para el aprendizaje médico. Otros trabajos proponen diferentes aproximaciones para similares aplicaciones de entrenamiento médico como [Chanthasopeephan et al., 2007] donde se modela el corte que se puede producir en el tejido, [Joldes et al., 2009] que proporciona un conjunto de algoritmos de modelado, [Zhong et al., 2009] donde el modelo se basa en el proceso de reacción-difusión acoplado a una carga mecánica y [Zhu y Gu, 2012] que utiliza una combinación del método de elementos de contorno (BEM) con el método de masa-muelle. Por último, [Morooka et al., 2013] combina el empleo de los modelos deformables con el análisis de componentes principales (PCA) para reducir el número de dimensiones a un vector con menor número de ellas. En este último caso, la aplicación es distinta a las anteriores puesto que los tejidos simulados se unen con imágenes reales en un sistema de realidad aumentada para cirugía con laparoscopia.

Figura 1.5.: Deformación de un modelo de un hígado aplicando diferentes máscaras de deformación. (Imágenes extraídas de [Zhu y Gu, 2012]).

Además de las aplicaciones indicas anteriormente, los modelos han sido utilizado en aplicaciones industriales. Por ejemplo, en [Heinzl et al., 2007] los modelos se utilizan para realizar medidas de componentes industriales multimaterial a partir de datos CT tridimensionales, como muestra la Figura 1.6. Por su parte, en [Hedwiger et al., 2008] se presenta un método para la exploración interactiva de los volúmenes industriales CT como piezas de metal fundido, con el objetivo de detectar, clasificar y cuantificar sus características. Otras aplicaciones, como ensayos no destructivos de productos han sido también realizado mediante modelos deformables [Nacereddine et al., 2006, Hedwiger et al., 2008].

1.3. Estado del arte

Los modelos deformables unidimensionales, también llamados contornos activos o *snakes* fueron introducidos en [Kass et al., 1988] como una herramienta inteligente para la segmentación

Figura 1.6.: Extracción de superficies a partir de un CT con dos procedimientos (a) y (b). Combinación de ambas superficies en (c). (Imágenes extraídas de [Heinzl et al., 2007]).

y seguimiento de objetos en secuencias de imágenes. Aunque el planteamiento original se aplicaba sólo a imágenes bidimensionales, como en el ejemplo de la Figura 1.7, poco tiempo después fue generalizada a 3 dimensiones por [Terzopoulos et al., 1988].

Figura 1.7.: Seguimiento del movimiento de los labios mediante *snakes* en una secuencia de vídeo. (Imágenes extraídas de [Kass et al., 1988]).

La idea de conectar nodos que minimicen un funcional de energía basado en las derivadas, y que esté dentro de un sistema lineal de segundo orden, fue desarrollada inicialmente para realizar tareas de interpolación no uniforme en la solución de problemas mal condicionados [Terzopoulos,

1988]. Desde entonces, los modelos deformables han tenido un gran uso y son herramientas muy conocidas en la literatura. En [Montagnat et al., 2001] se proporciona una clasificación exhaustiva de los diferentes enfoques en función de sus fundamentos matemáticos. Además, los libros [Bankman, 2008, El-Baz et al., 2011] describen la formulación de los modelos más utilizados en la literatura y que se aplican al análisis de imágenes médicas.

En primer lugar es importante realizar una distinción entre las representaciones discretas y continuas. Con las representaciones discretas, la geometría del modelo es conocida sólo por un conjunto finito de puntos. Algunos ejemplos de aproximaciones discretas son los sistemas de partículas [Desbrun y Gascuel, 1996], modelos masa-muelle [Vasilescu y Terzopoulos, 1992] y las mallas simplex [Delingette, 1994, Montagnat y Delingette, 2005]. Por el contrario, las representaciones continuas ofrecen la capacidad para realizar operaciones y cálculos diferenciales en cualquier parte del modelo. Por ejemplo, permiten obtener los vectores normales a la superficie o su curvatura en cualquier punto del mismo. Esto es debido a que estos modelos poseen al menos una continuidad C^1 . No obstante debemos remarcar que durante el proceso iterativo los modelos deben ser discretizados y, por tanto, operan sobre un conjunto de puntos o nodos, pero la función continua se pueden componer fácilmente tras cada iteración.

Los modelos deformables continuos se pueden clasificar en modelos explícitos e implícitos. En los modelos explícitos [Kass et al., 1988, Terzopoulos et al., 1988, Molloy y Whelan, 2000, Bredno et al., 2003, Liang et al., 2006, Chen y Guan, 2011], también conocidos como modelos paramétricos, el objeto se representa por medio de mallas (curvas, superficies o volúmenes) cuya forma evoluciona bajo el control de fuerzas internas y externas. Algunos ejemplos de aproximaciones discretas son por ejemplo las representaciones de soporte finito de polinomios [Liang et al., 2006], plantillas deformables [Yuille y Hallinan, 1992] y descomposición modal. La deformación de la forma es la principal ventaja de este tipo de modelos, ya que permite un ajuste rápido a diferentes objetos. Estos modelos tienen habitualmente parámetros estáticos, en concreto, elasticidad y rigidez, y parámetros dinámicos como la masa y el rozamiento. La combinación de todos ellos permiten adaptar el modelo al conjunto de datos. Sin embargo, el principal inconveniente de estos modelos explícitos es la dificultad de cambiar la topología del modelo, por lo que la topología básica debe ser creada antes de la deformación. En la Figura 1.8 se muestra un ejemplo de un modelo unidimensional paramétrico en una aplicación de segmentación.

Con el fin de superar esta limitación, en [McInerney y Terzopoulos, 1995a, 2000] se proponen las *T-snakes*, las cuales son una extensión de las clásicas *snakes* o contornos activos, con la novedad de que proporcionan flexibilidad en la topología mediante una reparametrización iterativa de los contornos. De esta forma, una o más *T-snakes* se pueden crear o destruir de forma dinámica y dividirse o fundirse de manera ininterrumpida si es necesario para adaptarse a la topología del objeto, como se muestra en la Figura 1.9. En [McInerney y Terzopoulos, 1995a] se pueden ver numerosos ejemplos de *T-snakes* aplicadas en imagen.

Figura 1.8.: Segmentación de una imagen de ultrasonidos mediante contornos deformables. (Imágenes extraídas de [Verdú-Monedero, 2005]).

Figura 1.9.: Segmentación utilizando T-snakes. (a) Imagen de un corte cerebral en una resonancia magnética. (b) Vasos sanguíneos en una angiografía de retina. (Imágenes extraídas de [McInerney y Terzopoulos, 2000].)

Por otra parte, han aparecido en los últimos años diferentes trabajos que intentan solventar el problema de la inicialización de la topología de los modelos. En concreto, [Delingette y Montagnat, 2000, Duan y Qin, 2004, Lachaud y Taton, 2005] han propuesto técnicas basadas en la detección de las auto-intersecciones de la malla durante su evolución y la fusión de las regiones que colisionan mediante un conjunto de reglas de remallado. La Figura 1.10 ilustra la aplicación de estas técnicas en una reconstrucción de una superficie tridimensional. Del mismo modo, [Pons y Boissonnat, 2007] muestra un enfoque en el que la malla se actualiza iterativamente mediante el cálculo de la triangulación de Delaunay en el modelo.

Figura 1.10.: Reconstrucción de una superficie a partir de una imagen volumétrica de una silla. (Imágenes extraídas de [Duan y Qin, 2004]).

El término de energía externa de los modelos paramétricos se basa en la información proporcionada por los bordes de los datos. De hecho, este término se define como una función de un determinado mapa de bordes de los datos. Este mapa de bordes se calcula habitualmente como la norma del gradiente de los datos $\nabla f(\cdot)$, a los que previamente se le ha aplicado un filtro gaussiano. Es decir, $f(\cdot) = |g(\cdot) * d(\cdot)|$ donde $d(\cdot)$ corresponde a los datos y $g(\cdot)$ es el filtro gaussiano. El mapa de bordes $\nabla f(\cdot)$ es normal a los bordes del objeto y apunta hacia ellos. Por lo tanto, $\nabla f(\cdot)$ es conocido como el campo de fuerzas externas ya que empuja el modelo hacia los bordes deseados.

El campo de fuerzas $\nabla f(\cdot)$ se almacena en la práctica en un array, el cual tiene el mismo número de dimensiones que los datos que se quieren modelar. Así, si los datos son tridimensionales también lo serán los arrays de fuerzas. Estos arrays gradiente tienen una gran magnitud en la proximidad inmediata de la frontera del objeto y son casi nulos lejos de la frontera, en zonas homogéneas. Precisamente debido a esta característica, los modelos presentan algunas dificultades en la captación inicial. Si el modelo se encuentra lejos del borde del objeto, la captación por parte de las fuerzas externas es compleja. Asimismo, la convergencia a las concavidades del modelo contorno no es del todo satisfactoria. Por este motivo es necesaria una inicialización de los modelos relativamente cerca de los datos deseados.

Diversas investigaciones puntualizan estas limitaciones y proponen enfoques alternativos para el cálculo de fuerzas. Entre otros, podemos destacar el empleo de multiresolución [Leroy et al., 1996], los modelos de carga de partículas (CPM) [Jalba et al., 2004], los contornos activos cargados en base a electrostática (CACE) [Yang et al., 2006], así como la convolución del campo vectorial [Li y Acton, 2007]. Otra solución popular en la literatura es el flujo de vector de gradiente (GVF) [Xu y Prince, 1998b, 2000, Cheng y Foo, 2006] y su generalización GGVF [Xu y Prince, 1998a, Ray y Acton, 2004, Boukerroui, 2012]. En general, los campos de fuerza obtenidos con estas soluciones mejoran la convergencia a las concavidades grandes y preservan los bordes débiles. Asimismo, debemos destacar también la inclusión recientemente de modelos con aprendizaje impulsado, los cuales propagan el modelo deformable de una forma probabilística. Entre ellos destacan los campos aleatorios de Markov (MRF) [Huang et al., 2004, 2006] o los campos aleatorios condicionales (CRFs) [Tsechpenakis y Metaxas, 2007, 2009].

Otra clase de modelos deformables continuos son los modelos implícitos, también llamados modelos geométricos basados en curvas de nivel o *level sets* [Malladi et al., 1995, Cremers et al., 2007, Yeo et al., 2011]. En este tipo de modelos, los contornos y las superficies se representan implícitamente como curvas de nivel de una función escalar de mayores dimensiones. La evolución de estos modelos implícitos se basa en la teoría de evolución de curvas. Este tipo de representación proporciona flexibilidad topológica en el proceso iterativo, por lo que los cambios topológicos son manejados automáticamente. La Figura 1.11 ilustra esta capacidad. Las diferentes curvas de nivel se van adaptando a los datos, modificando automáticamente la topología del modelo a la información encontrada.

Figura 1.11.: Segmentación de una forma con topología compleja. La figura muestra los conjuntos de nivel en: (a) Inicialización; (b) Iteración 60; (c) Estado final en la iteración 390 (Imágenes extraídas de [Malladi et al., 1995]).

Como desventaja, en los modelos implícitos es más complicado la interacción con el usuario. Asimismo, el coste computacional es mayor que en los modelos paramétricos. En verdad, en los últimos años han aparecido en la literatura diferentes propuestas de optimización que conllevan un aumento de la eficiencia computacional. Aun así, la eficiencia computacional de los modelos paramétricos es, por lo general, mayor que en el caso de los implícitos. En [El-Baz et al., 2011] se proporciona una descripción detallada de los principales enfoques propuestos para la optimización de los modelos geométricos. El número de trabajos existentes en la literatura sobre modelos deformables paramétricos y métodos basados en modelos implícitos demuestra que ambas aproximaciones son útiles en tareas de procesamiento de imagen y visión por computador.

En los últimos años, las nuevas aproximaciones publicadas relacionadas con los modelos deformables se han centrado en la caracterización de la parte interna de los objetos. La formulación de los *MetaMorphs* [Huang y Metaxas, 2008] integra tanto la forma como la textura interior, y se desarrolla como una generalización de los modelos deformables paramétricos y los geométricos. La forma externa se representa implícitamente y la textura interior se captura usando una aproximación basada en el núcleo no paramétrico de la función de densidad de probabilidad de la intensidad.

Por otra parte, los volúmenes activos topológicos (TAV) [Barreira et al., 2010] son modelos deformables paramétricos tridimensionales basados en el enfoque de redes activas. Este modelo tiene dos tipos diferentes de nodos: nodos externos para el ajuste de la superficie y nodos internos para el modelado de la topología interna. Tanto *MetaMorphs* como TAV permiten cambios topológicos en su estructura con el fin de ajustarse a las concavidades, detectar agujeros y encontrar objetos separados en la escena. En la Figura 1.12 se muestra el empleo de una superficie TAV en un proceso de segmentación de una rodilla a partir de una imagen CT.

Figura 1.12.: Segmentación de una rodilla a partir de una imagen CT. La columna izquierda muestra la reconstrucción utilizando isocurvas en un software de generación de gráficos 3D y en la columna derecha tenemos la reconstrucción mediante TAV. (Imágenes extraídas de [Barreira et al., 2010]).

La mayoría de las aproximaciones de los modelos deformables arriba mencionadas están definidas en el dominio espacial [Liang et al., 2006]. En este dominio, el problema de la regularización recae sobre la inversión de una matriz a bandas que genera el núcleo del procedimiento iterativo. Para las mallas activas y modelos bidimensionales, la formulación resulta más compleja que en el caso de contornos, y el núcleo no se puede extraer directamente de una aproximación matricial. Dos de las soluciones propuestas son, o alinear todos los nodos de la malla en forma de vector para construir una matriz de rigidez grande y con datos dispersos, o bien, realizar un análisis molecular [Terzopoulos et al., 1988].

Dadas las posibles geometrías de una superficie o estructura con más dimensiones, los detalles de la implementación numérica no son simples [Terzopoulos, 2003]. Además, en las aproximaciones más empleadas, la matriz de rigidez se construye mediante un mallado [Eberhardt et al., 1996, Neuenschwander et al., 1997]. Por otro lado, a pesar de los intentos para aliviar las conocidas limitaciones de la formulación original como, por ejemplo, por medio de inflado interno [Cohen et al., 1993], modificando la topología [McInerney y Terzopoulos, 2000], mediante la aproximación multietapa [Mao et al., 1996], con la codificación de la información a priori [Olstad y Torp, 1996], usando otro tipo de algoritmos [Lam y Yan, 1994, Brigger et al., 2000], etcétera, no hay una formulación simple alternativa a la original planteada en el dominio del espacio. Es más, en caso de simplicidad en el problema, como con mallas regulares triangulares y rectangulares, o con propiedades físicas invariantes en el espacio, las implementaciones anteriores no conllevan mecanismos más simples. Esto nos lleva a una enredada extensión a sistemas multidimensionales, debido a la alta carga computacional resultante para los modelos con un gran número de grados de libertad.

En [Weruaga et al., 2004b] la formulación original de los contornos activos se traslada al dominio de la frecuencia, lo que lleva a dos resultados: primero, una formulación en el dominio de la frecuencia que proporciona una caracterización sencilla del núcleo del proceso para modelos unidimensionales y bidimensionales (y fácilmente extendible a dimensiones mayores), y segundo, una implementación rápida que ofrece un ahorro computacional importante.

Esta nueva formulación ofrece un marco interesante para diseñar las propiedades de rigidez del modelo además de las basadas en los parámetros clásicos de elasticidad, masa y rozamiento. Este análisis en el dominio de la frecuencia es un concepto muy interesante ya que los modelos deformables paramétricos son sistemas lineales (y bajo ciertas circunstancias son invariantes en el espacio) y éstos pueden ser descritos en el dominio de la frecuencia.

1.4. Objetivos y motivación

Hemos visto en la Sección 1.3 que la formulación clásica de los modelos deformables paramétricos [Kass et al., 1988, Liang et al., 2006] viene dada normalmente en el dominio del espacio y se basa en un sistema de segundo orden. Se ha comparado en dicha sección los modelos explícitos con los implícitos, analizando las ventajas e inconvenientes de cada tipología. En este trabajo se consideran para una nueva aproximación los modelos paramétricos, por sus ventajas de velocidad y su capacidad para parametrizar dinámicamente la forma y posición de los datos. También se han indicado en la sección mencionada, las ventajas de la aproximación frecuencial sobre el enfoque espacial [Weruaga et al., 2004b].

Precisamente esta aproximación frecuencial es una de las principales motivaciones de esta tesis. Dadas las ventajas de este enfoque en los modelos unidimensionales, se ha considerado que su extensión a modelos de mayores dimensiones, tales como mallas o volúmenes activos, puede ser de gran interés en la caracterización de datos de tres y más dimensiones. Por este motivo el objetivo principal de este trabajo es la obtención de un nuevo marco matemático para los modelos paramétricos multidimensionales. Esta nueva formulación debe estar totalmente definida en el dominio de la frecuencia de forma similar a [Weruaga et al., 2004b] y para su desarrollo se debe partir directamente del marco clásico de los contornos activos [Liang et al., 2006]. El reto es alcanzar una formulación que pueda expresarse por completo en la frecuencia, y que por tanto, la posición y forma del modelo pueda obtenerse a partir de un proceso iterativo, implementable mediante un filtrado iterativo discreto definido por completo en el dominio de Fourier. Esto va a permitir una reducción de la carga computacional en los modelos multidimensionales, mucho mayor que la ya de por sí se consigue con los modelos unidimensionales [Verdú-Monedero et al., 2008b].

Otro objetivo de esta tesis, es el empleo de diferentes funciones de forma en la discretización espacial sin que esto requiera una reformulación de los modelos. Es decir, se pretende alcanzar una formulación para el proceso iterativo, que sea aplicable a diferentes funciones de forma, sin más que cambiar algunos parámetros del modelo. Esta característica se ha alcanzado con contornos activos [Liang et al., 2006], por lo que su generalización a mayores dimensiones puede suponer también una ventaja en el uso de los modelos con datos de diferente tipología.

Debemos destacar también que, como cualquier sistema adaptativo, el número de iteraciones requeridas para delinear el objeto de interés son de gran importancia [Ferreira, 1994, Weruaga et al., 2003, 2004a], especialmente cuando se combinan con algoritmos que controlan características dependientes del modelo para prevenir un posible comportamiento inestable [Verdú et al., 2002]. Los modelos incluyen un conjunto de parámetros que definen su comportamiento, es decir, principalmente la elasticidad, la rigidez, la masa y la amortiguación. Además hacen uso de otros parámetros que caracterizan cómo el modelo se ajusta a los datos. La elección de estos parámetros no es una tarea trivial y puede restringir tanto el ajuste final del modelo como su velocidad de convergencia [Verdú et al., 2004].

Por esta razón, es altamente recomendable el estudio de la influencia de estos parámetros en la evolución temporal del modelo y su convergencia a los datos. En [Verdú-Monedero et al., 2008b] se analiza la convergencia de los contornos activos, es decir, los modelos unidimensionales, utilizando una descomposición nodal sobre la base de un estudio de los autovalores en el dominio espacial. El trabajo [Verdú-Monedero et al., 2008b] está limitado a los contornos activos pero proporciona las condiciones que aceleran su convergencia y la convierte en óptima. Es decir, la velocidad de convergencia se basa principalmente en la elección apropiada de los parámetros dinámicos del contorno.

Así, el tercer objetivo de este trabajo es llevar a cabo un estudio similar a [Verdú-Monedero, 2005, Verdú-Monedero et al., 2008b] pero aplicado al marco general de los modelos paramétricos multidimensionales. Por lo tanto, su formulación resultante debe ser analizada con el fin de obtener un procedimiento para maximizar la velocidad de convergencia, manteniendo al mismo tiempo la estabilidad del proceso iterativo. Se pretende que este análisis se realice completamente en el dominio de la frecuencia, con el fin de poder desacoplar cada componente frecuencial del resto. Es decir, el reto es conseguir poder maximizar la velocidad de convergencia en cada componente frecuencial del modelo ya que esto permitiría aplicar los resultados del estudio de la convergencia a modelos de cualquier número de dimensiones y funciones de forma, evitando las restricciones que encontradas en [Verdú-Monedero et al., 2008b].

1.5. Descripción del resto de capítulos

Esta tesis doctoral está dividida en 7 capítulos y 4 anexos. En el Capítulo 1, el cual termina con esta sección, se ha realizado una introducción sobre los modelos deformables, en la que se han planteado sus fundamentos. También se han descrito brevemente las aplicaciones más importantes de la literatura en las que se ha hecho uso de los modelos deformables. Posteriormente se ha llevado a cabo una revisión del estado de la técnica en cuanto a los diferentes enfoques de los modelos, referenciándose las publicaciones más relevantes hasta la fecha. Por último, se han definido las motivaciones y objetivos de esta tesis.

En el Capítulo 2 se describe el marco matemático de los modelos paramétricos en el dominio espacial, analizándose en primer lugar el funcional de energía para modelos estáticos, incorporando a continuación los términos que permiten que los modelos tengan comportamiento dinámico. Es importante destacar que esta formulación variacional se escribe directamente para modelos e -dimensionales. En este mismo capítulo, se describe con detalle la discretización para las variables espaciales, realizada mediante elementos finitos, y la discretización temporal la cual conlleva la aparición de dos esquemas iterativos. Debido a su extensión y en aras de una mayor claridad en la explicación, parte de esta formulación se especifica en los anexos al final del documento. En concreto en el Anexo A se incluye la notación matemática y los operadores matemáticos utilizados. De igual forma, en el Anexo B se detalla el cálculo de las ecuaciones matriciales y las matrices del sistema y secuencias de rigidez.

Posteriormente, la formulación obtenida se traslada al dominio de Fourier en el Capítulo 3. Aquí se detalla el proceso de conversión y la transformación de la ecuación matricial en un sistema iterativo de segundo orden, en el que cada componente frecuencial del modelo se obtiene a partir de dicho componente en iteraciones anteriores. Se concreta el proceso para los dos sistemas iterativos resultantes y se especifican las expresiones de los filtros equivalentes del sistema.

Los valores de estos filtros discretos se incluyen asimismo en el Anexo B y sus representaciones gráficas se muestran en el Anexo C.

A partir de esta formulación frecuencial y las expresiones de los filtros del sistema, en el Capítulo 4 se procede a un análisis de las condiciones de convergencia y estabilidad de los modelos deformables. Se estudian los casos de modelos de primer y segundo orden definidos mediante ambos esquemas iterativos, y se obtienen las condiciones suficientes de convergencia y estabilidad. En este mismo capítulo se valida la efectividad de estas condiciones de convergencia primero sobre señales con un único componente espectral y posteriormente con señales reales. Asimismo, se propone un algoritmo para optimizar la velocidad de convergencia de los modelos en función del ancho de banda de los datos a caracterizar.

Finalmente los Capítulos 5 y 6 estudian el uso y rendimiento de los modelos en aplicaciones reales. En el Capítulo 5 se especifica con detalle el diseño práctico de los modelos deformables, describiendo las diferentes etapas del preprocesado de los datos, del cálculo de las fuerzas externas y los pasos a ejecutar durante el propio proceso iterativo. Se describe el procedimiento para la adición de extensiones ocultas en el caso de modelos abiertos y se lleva a cabo un análisis de los requerimientos computacionales de la formulación propuesta, comparándolos con las aproximaciones espaciales utilizadas en la literatura. A continuación, en el Capítulo 6, se utilizan los modelos deformables en tres aplicaciones: caracterización de datos topográficos, segmentación de datos médicos y simulación de tejidos blandos. Se muestran los resultados del ajuste del modelo a los datos en cada una de ellas así como su capacidad para minimizar el ruido y los artefactos del conjunto de datos.

El los Capítulos 7 y 8 aportan las conclusiones y las líneas futuras de desarrollo. A continuación aparecen los Anexos antes mencionados A, B y C y el Anexo D que recoge las publicaciones que han dado lugar a esta tesis doctoral. Por último figura la Bibliografía con la referencia completa de todos los trabajos citados en este documento.

The formulation of the problem is often more essential than its solution, which may be merely a matter of mathematical or experimental skill.

(Albert Einstein)

Formulación de los modelos deformables en el dominio del espacio

2.1. Modelos deformables paramétricos multidimensionales

UN modelo deformable paramétrico multidimensional es una curva, superficie o hiper-superficie paramétrica variante en el tiempo definida para d dimensiones como una función paramétrica en el espacio $\mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{v} := \mathbf{v}(\mathbf{s}, t) = [v_1(\mathbf{s}, t), \dots, v_d(\mathbf{s}, t)]^\top, \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{s} := [s_1, \dots, s_e]$ con $s_j \in [0, L_j]$ y $e \leq d$ es el vector de las variables paramétricas del dominio espacial, t es el tiempo y $v_i(\mathbf{s}, t)$ es cada una de las funciones coordenadas¹ para la dimensión i . Cuando $e = 1$ el modelo corresponde a una curva, $e = 2$ genera una superficie y $e = 3$ define un volumen. Modelos con más de tres dimensiones son posibles, recibiendo la denominación genérica de hiper-superficie. Los modelos unidimensionales reciben normalmente la denominación de contornos activos, o *snakes* [Kass et al., 1988]. En el caso de los modelos bidimensionales, la denominación más utilizada en la bibliografía son las mallas activas o mallas deformables [Vasilescu y Terzopoulos, 1992]. La Figura 2.1 muestra tres ejemplos de modelos deformables actuando

¹El símbolo $^\top$ denota transposición.

en un escenario tridimensional, esto es $d = 3$, y con diferentes tamaños del vector de variables paramétricas $\mathbf{s}$, en concreto $1 \leq e \leq 3$.

Figura 2.1.: Modelos deformables en un escenario tridimensional. Parámetros: $d = 3$ y (a) $e = 1$; (b) $e = 2$; (c) $e = 3$. Nodos del modelo dibujados como puntos rojos. Las líneas representan las variables paramétricas.

Los modelos deformables pueden definirse como cerrados o abiertos, para cada una de sus d

funciones coordenadas v_i y cada una de sus e variables paramétricas s_j . Así, un modelo es cerrado para una función coordenada i y una variable paramétrica j si satisface,

$$v_i(\mathbf{s}) \Big|_{s_j=0} = v_i(\mathbf{s}) \Big|_{s_j=L_j}, \quad (2.2)$$

siendo abierto para dicha función coordenada y variable paramétrica si no cumple esta condición. Notar que la expresión (2.2) implica que dicha función coordenada v_i puede interpretarse como una función periódica con período L_j para su variable paramétrica s_j .

Es importante destacar que un modelo deformable puede ser cerrado para algunas variables paramétricas y abierto en otras. De este modo, un modelo es cerrado para una variable paramétrica s_j en todas sus funciones coordenadas si satisface,

$$v_i(\mathbf{s}) \Big|_{s_j=0} = v_i(\mathbf{s}) \Big|_{s_j=L_j} \quad \forall i. \quad (2.3)$$

Por ejemplo, el modelo mostrado en la Figura 2.1(a) es cerrado en su única variable paramétrica s_1 , el representado en 2.1(b) es cerrado para la variable s_1 y abierto para la s_2 y por último, el modelo de la Figura 2.1(c) es abierto para sus tres variables paramétricas. Del mismo modo, el modelo dibujado en la Figura 2.2(a) es abierto en sus dos variables s_1 y s_2 , mientras que el mostrado en 2.2(b) es abierto según la variable s_1 y cerrado para s_2 . En estos ejemplos, estas propiedades se cumplen para sus tres funciones coordenadas² v_i , con $1 \leq i \leq 3$.

Figura 2.2.: Comparativa de modelos deformables con $d = 3$ y $e = 2$: (a) Abierto para ambas variables paramétricas s_1 y s_2 ; (b) Abierto para la variable s_1 y cerrado para la variable s_2 ; (c) Cerrado para ambas variables paramétricas.

Cuando todas las funciones coordenadas v_i tienen el mismo valor para los valores extremos de todas las variables paramétricas s_j ,

$$v_i(\mathbf{s}) \Big|_{s_j=0} = v_i(\mathbf{s}) \Big|_{s_j=L_j} \quad \forall i \quad \forall j, \quad 1 \leq i \leq d, \quad 1 \leq j \leq e, \quad (2.4)$$

²En este ejemplo, las tres funciones coordenadas se corresponden con los tres ejes. Es decir, $v_1 = v_x$, $v_2 = v_y$ y $v_3 = v_z$.

se dice que el modelo deformable es cerrado en su totalidad. Por tanto, todas sus funciones coordenadas serán periódicas para todas las variables paramétricas del modelo. En caso contrario, el modelo será parcialmente abierto, y las funciones coordenadas no serán periódicas en al menos alguna variable paramétrica s_j . Las Figuras 2.1(a) y 2.2(c) ilustran ejemplos de modelos totalmente cerrados. El primero de ellos con su única variable s_1 y el segundo caso en sus dos variables paramétricas s_1 y s_2 .

Es importante señalar, que en ocasiones, modelos deformables aparentemente cerrados, son en realidad modelos abiertos para alguna de sus variables paramétricas. En la práctica, combinando la periodicidad de las funciones coordenadas y otras restricciones que se aplican al modelo, podemos construir modelos deformables cuya topología esté adaptada a las diferentes aplicaciones y necesidades.

La Figura 2.3 ilustra este procedimiento con algunos ejemplos de construcción de modelos paramétricos. En los tres casos, tenemos modelos abiertos en la variable s_1 y cerrados en s_2 . Sin embargo, en estos ejemplos fijaremos algunos nodos del modelo a cierto valor constante. En el caso mostrado en la Figura 2.3(a) definimos el valor de cada función coordenada $v_i(s_1, s_2)$ igual a una constante C_i cuando $s_1 = L_1$ independientemente del valor de s_2 . Esto provoca que el conjunto de nodos descritos colapse en un solo punto y, por tanto, el modelo se cierre. El mismo procedimiento se ha aplicado en las Figuras 2.3(b) y 2.3(c), en los dos extremos de la variable s_1 . De esta forma, transformamos el modelo de la Figura 2.2(b) en estos tres ejemplos.

Figura 2.3.: Modelos deformables con $d = 3$ y $e = 2$. Los tres modelos son abiertos para s_1 y cerrados para s_2 . El efecto de unión en los extremos se consigue fijando restricciones para uno o los dos extremos de s_1 . (a) Para unir todos los nodos en un punto, fijamos $v_i(L_1, s_2) = C_i \forall s_2$, es decir, $0 \leq s_2 \leq L_2$. El valor de C_i es constante y se define para cada función coordenada v_i . (b)(c) Además de la restricción anterior se fija $v_i(0, s_2) = D_i$, donde D_i es también una constante y s_2 toma todos los valores dentro del mismo rango.

2.1.1. Modelos estáticos

En una primera aproximación vamos a examinar la formulación y proceso de estimación del modelo como un proceso estático e independiente del tiempo. Por tanto, el modelo se considerará en esta sección como $\mathbf{v} := \mathbf{v}(\mathbf{s})$, analizándose en la Sección 2.1.2 la evolución de este proceso en sistemas dinámicos teniendo en cuenta la variable tiempo.

La forma del modelo deformable está gobernada por un funcional de energía que incluye componentes internos y externos [Kass et al., 1988],

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}(\mathbf{v}), \quad (2.5)$$

donde el primer término $\mathcal{S}(\mathbf{v})$ representa la energía interna de deformación y el segundo término $\mathcal{P}(\mathbf{v})$ recoge el resto de energías que influyen sobre el modelo.

El término $\mathcal{S}(\mathbf{v})$ caracteriza por tanto la deformación de un modelo elástico y flexible. De forma similar al expresado en [Liang et al., 2006], mediante [Verdú-Monedero et al., 2008a] dicho componente se puede generalizar para un modelo multidimensional, quedando definido como,

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\alpha(\mathbf{s}) \|\nabla v_i(\mathbf{s})\|^2 + \beta(\mathbf{s}) |\Delta v_i(\mathbf{s})|^2 \right) d\mathbf{s}, \quad (2.6)$$

donde $\Omega := [0, L_1] \times \dots \times [0, L_d]$ es el dominio de integración de la integral múltiple, v_i con $1 \leq i \leq d$ es cada una de las funciones coordenadas que definen el modelo. Los símbolos ∇ y Δ denotan los operadores gradiente y Laplaciano respectivamente.

Las dos funciones físicas paramétricas no negativas $\alpha(\mathbf{s})$ y $\beta(\mathbf{s})$, representan las características físicas de elasticidad y rigidez que se simulan en cualquier punto $\mathbf{s}$ del modelo. Incrementando $\alpha(\mathbf{s})$, aumenta la elasticidad del modelo. De esta forma se eliminan las ondulaciones y bucles favoreciendo una parametrización uniforme del mismo. Como contrapartida se incrementa su tendencia a contraerse, pudiendo llegar colapsarse en un punto a menos que se compense esta tendencia con otras fuerzas externas o restricciones impuestas al modelo. Por otra parte, el parámetro $\beta(\mathbf{s})$ permite controlar la rigidez global o local del sistema. Por ejemplo, fijando este parámetro a un valor cero en una determinada zona, el modelo podrá doblarse generando una arista o un vértice, según los parámetros espaciales s_j en que $\beta(\mathbf{s})$ sea nulo. Por el contrario, si se incrementa este parámetro, el modelo aumentará su rigidez, aunque seguirá teniendo cierta flexibilidad que le permitirá adaptarse a diferentes formas.

Aplicando los operadores gradiente y Laplaciano (véase el Anexo A.2) a cada una de las funciones coordenadas v_i en (2.6) se obtiene,

$$\|\nabla v_i(\mathbf{s})\|^2 = \left(\partial_{s_1} v_i(\mathbf{s}) \right)^2 + \dots + \left(\partial_{s_d} v_i(\mathbf{s}) \right)^2 \in \mathbb{R}, \quad (2.7a)$$

$$|\Delta v_i(\mathbf{s})|^2 = \left| \partial_{s_1 s_1} v_i(\mathbf{s}) + \cdots + \partial_{s_e s_e} v_i(\mathbf{s}) \right|^2 \in \mathbb{R}, \quad (2.7b)$$

donde ∂_{s_j} y $\partial_{s_j s_j}$ denota la primera y segunda derivada parcial con respecto a la variable s_j . De esta forma, para cada v_i el resultado de la integral es un escalar, combinándose todos ellos mediante el sumatorio para proporcionar la energía interna de deformación.

El término $\mathcal{P}(\mathbf{v})$ de (2.5), representa el conjunto de las energías que se aplican sobre el modelo. En este término se pueden incluir energías procedentes de información externa, como un conjunto de imágenes u objetos de diferentes dimensiones. Cuando esta información se obtiene a partir de varias imágenes, $\mathcal{P}(\mathbf{v})$ se suele calcular mediante funciones escalares de potencial, cuyos mínimos locales coinciden con bordes u otras características de interés de la imagen [Liang et al., 2006]. Asimismo, se pueden añadir otras restricciones (aplicadas como fuerzas internas no lineales) definidas dentro del propio modelo, como limitaciones de distancia entre nodos vecinos o condiciones sobre longitud, área o volumen para el caso de modelos cerrados. El funcional de energía (2.5) alcanza un mínimo cuando la energía interna $\mathcal{S}(\mathbf{v})$ se compensa con la energía $\mathcal{P}(\mathbf{v})$.

De acuerdo con el cálculo variacional, el modelo $\mathbf{v}(\mathbf{s})$ que minimiza la energía $\mathcal{E}(\mathbf{v})$ debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange [Liang et al., 2006], que generalizada para el caso multidimensional [Verdú-Monedero et al., 2008a] produce un sistema de d ecuaciones en derivadas parciales (PDEs) sintetizado en la siguiente ecuación vectorial,

$$-\nabla \cdot (\alpha(\mathbf{s}) \nabla \mathbf{v}(\mathbf{s})) + \Delta(\beta(\mathbf{s}) \Delta \mathbf{v}(\mathbf{s})) = \mathbf{q}(\mathbf{v}(\mathbf{s})). \quad (2.8)$$

donde $\nabla \cdot$ representa el operador divergencia. Aplicando los operadores gradiente, divergencia y Laplaciano al vector de funciones coordenadas $\mathbf{v}(\mathbf{s})$ (véase el Anexo A.2), tenemos,

$$-\nabla \cdot (\alpha(\mathbf{s}) \nabla \mathbf{v}(\mathbf{s})) = - \begin{bmatrix} \partial_{s_1} (\alpha(\mathbf{s}) \partial_{s_1} v_1(\mathbf{s})) + \cdots + \partial_{s_e} (\alpha(\mathbf{s}) \partial_{s_e} v_1(\mathbf{s})) \\ \vdots \\ \partial_{s_1} (\alpha(\mathbf{s}) \partial_{s_1} v_d(\mathbf{s})) + \cdots + \partial_{s_e} (\alpha(\mathbf{s}) \partial_{s_e} v_d(\mathbf{s})) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d, \quad (2.9a)$$

$$\Delta(\beta(\mathbf{s}) \Delta \mathbf{v}(\mathbf{s})) = \begin{bmatrix} (\partial_{s_1 s_1} + \cdots + \partial_{s_e s_e}) (\beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} v_1(\mathbf{s}) + \cdots + \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_e s_e} v_1(\mathbf{s})) \\ \vdots \\ (\partial_{s_1 s_1} + \cdots + \partial_{s_e s_e}) (\beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} v_d(\mathbf{s}) + \cdots + \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_e s_e} v_d(\mathbf{s})) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d. \quad (2.9b)$$

El sistema de ecuaciones (2.8) expresa el balance entre energías internas y externas cuando el modelo se encuentra en equilibrio. Los dos primeros términos representan las energías internas de estiramiento y curvatura respectivamente, mientras que el tercer término,

$$\mathbf{q}(\mathbf{v}(\mathbf{s})) = -\nabla_{v_i} P(\mathbf{v}(\mathbf{s})) + \mathbf{f}(\mathbf{v}(\mathbf{s})) \in \mathbb{R}^d, \quad (2.10)$$

caracteriza las fuerzas externas que acoplan el modelo a los datos externos y las restricciones sobre el modelo del objeto. Éstas pueden suponer limitaciones sobre distancias mínimas o máximas

entre nodos, áreas o volúmenes formados por el modelo, relaciones entre ciertos nodos como las mostradas en la Figura 2.3, o incluso determinación fija de la posición de ciertos nodos del modelo.

El término $\nabla_{v_i} P$ representa el gradiente con respecto a las coordenadas v_i de la función potencial P , por lo que las energías externas se obtienen como,

$$-\nabla_{v_i} P(\mathbf{v}(\mathbf{s})) = -[\partial_{v_1} P(\mathbf{v}(\mathbf{s})), \dots, \partial_{v_d} P(\mathbf{v}(\mathbf{s}))]^T \in \mathbb{R}^d. \quad (2.11)$$

Por otra parte, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^d$ representa el vector que proporciona las restricciones para cada función coordenada.

Analizando las ecuaciones (2.8-2.11), si suponemos que cada función coordenada de $\mathbf{f}$ se puede determinar de forma independiente del resto de coordenadas³, se obtiene un sistema de d ecuaciones en derivadas parciales desacopladas, pudiendo resolverse cada una de forma independiente del resto,

$$\begin{aligned} -\partial_{s_1}(\alpha(\mathbf{s})\partial_{s_1} v_i(\mathbf{s})) - \dots - \partial_{s_e}(\alpha(\mathbf{s})\partial_{s_e} v_i(\mathbf{s})) + \\ (\partial_{s_1 s_1} + \dots + \partial_{s_e s_e})(\beta(\mathbf{s})\partial_{s_1 s_1} v_i(\mathbf{s}) + \dots + \beta(\mathbf{s})\partial_{s_e s_e} v_i(\mathbf{s})) = \\ \partial_{v_i} P(\mathbf{v}(\mathbf{s})) + f_i(\mathbf{v}(\mathbf{s})), \quad 1 \leq i \leq d, \quad i \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde f_i es la función coordenada i del vector de restricciones $\mathbf{f}$. La aproximación habitual para resolver las ecuaciones (2.12) consiste en aplicar algoritmos de cálculo numérico [Bathe y Wilson, 1976].

2.1.2. Modelos dinámicos

Aunque se puede interpretar el proceso de minimización de energía como un problema estático, resulta de mayor aplicación e interés construir un sistema dinámico que esté gobernado por el funcional (2.5) y que permita que el sistema pueda evolucionar a lo largo del tiempo. Construyendo el sistema mediante los principios de la mecánica lagrangiana, se obtienen modelos deformables dinámicos, que unifican la descripción de forma y movimiento, haciendo posible cuantificar no sólo la forma en condiciones estáticas, sino también su evolución a lo largo del tiempo. De esta forma, el modelo puede utilizarse para caracterizar formas y realizar el seguimiento de objetos móviles en secuencias de vídeo tanto mono-, $I(x, y, t)$, como estereoscópica, $I_j(x, y, t)$, así como datos tridimensionales con variación temporal, comúnmente denominados como conjuntos de datos 4D, $I(x, y, z, t)$.

Así pues, es habitual introducir en el modelo variante en el tiempo $\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$, una densidad de masa $\mu(\mathbf{s})$ y una densidad de rozamiento⁴ $\gamma(\mathbf{s})$, ambas normalmente constantes en el tiempo. De

³Esta suposición es habitual en la práctica para la mayoría de aplicaciones de los modelos deformables.

⁴En la bibliografía es frecuente denominar también a $\gamma(\mathbf{s})$ densidad de pérdidas o densidad de amortiguamiento.

este modo, el sistema de ecuaciones en derivadas parciales para un modelo deformable con la energía interna dada por (2.6) y las energías externas y restricciones dadas por (2.10) es,

$$\mu(\mathbf{s})\partial_{tt}\mathbf{v}(\mathbf{s}, t) + \gamma(\mathbf{s})\partial_t\mathbf{v}(\mathbf{s}, t) - \nabla \cdot (\alpha(\mathbf{s})\nabla\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)) + \Delta(\beta(\mathbf{s})\Delta\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)) = \mathbf{q}(\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)), \quad (2.13)$$

donde ∂_t y ∂_{tt} denota respectivamente la primera y segunda derivada parcial con respecto al tiempo. Los dos primeros términos de la parte izquierda del sistema de ecuaciones en derivadas parciales representan las fuerzas inerciales debidas a la masa y las fuerzas de amortiguamiento debidas al rozamiento. Como en (2.8), el resto de términos representan las energías internas de estiramiento y curvatura. La situación final se alcanza cuando las energías internas y externas se compensan llevando el modelo deformable a una situación de equilibrio (esto es, $\partial\mathbf{v}/\partial t = \partial^2\mathbf{v}/\partial t^2 = \mathbf{0}$). Llegados a esta situación estable, la ecuación (2.8) es igual a la ecuación (2.13).

Si desarrollamos el sistema (2.13) de forma similar a (2.12), obtenemos un sistema de d ecuaciones en derivadas parciales desacopladas,

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{s})\partial_{tt}v_i(\mathbf{s}, t) + \gamma(\mathbf{s})\partial_tv_i(\mathbf{s}, t) - \partial_{s_1}(\alpha(\mathbf{s})\partial_{s_1}v_i(\mathbf{s}, t)) - \dots - \partial_{s_e}(\alpha(\mathbf{s})\partial_{s_e}v_i(\mathbf{s}, t)) + \\ (\partial_{s_1s_1} + \dots + \partial_{s_es_e})(\beta(\mathbf{s})\partial_{s_1s_1}v_i(\mathbf{s}, t) + \dots + \beta(\mathbf{s})\partial_{s_es_e}v_1(\mathbf{s}, t)) = \\ \partial_{v_i}P(\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)) + f_i(\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)), \quad 1 \leq i \leq d, \quad i \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

que al igual que (2.12) permite obtener el valor de cada componente $v_i(\mathbf{s}, t)$ de forma independiente al resto.

2.2. Formulación en el dominio del espacio de los modelos deformables

2.2.1. Discretización espacial mediante elementos finitos

Las implementaciones prácticas de los modelos deformables se realizan habitualmente en tiempo y espacio discreto dentro de un proceso iterativo. Por este motivo, para calcular numéricamente la solución de energía mínima es necesario discretizar los términos $\mathcal{E}(\mathbf{v})$ y $\mathcal{P}(\mathbf{v})$.

La discretización temporal se realizará mediante un muestreo periódico de la variable temporal t . Para la discretización espacial en cambio, se va a representar el modelo deformable $\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$ como combinación lineal de funciones base o elementos finitos. Así, $\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$ se dividirá en elementos finitos, definidos a su vez mediante d funciones coordenadas con e parámetros del dominio espacial cada una.

El dominio $[0, L_j]$ de cada variable paramétrica s_j donde $1 \leq j \leq e$, quedará dividido en N_j intervalos. Por tanto, el modelo se puede expresar como la unión de $N_1 \cdots N_e$ elementos,

$$\mathbf{v}(\mathbf{s}, t) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{n_e=0}^{N_e-1} \mathbf{v}^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t), \quad (2.15)$$

donde $\mathbf{v}^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t)$ es cada uno de los elementos y el superíndice n_j indica el tramo concreto del parámetro espacial s_j . Esto es, dado un cierto valor del índice n_j , su variable paramétrica s_j abarcará el subdominio,

$$\left[n_j \frac{L_j}{N_j} \leq s_j < (n_j + 1) \frac{L_j}{N_j} \right]. \quad (2.16)$$

El modelo deformable se define mediante d funciones coordenadas (2.1), siendo estas funciones independientes entre sí como hemos concluido en la Sección 2.1.2. Por tanto, este procedimiento se podrá aplicar de forma separada a cada una,

$$v_i(\mathbf{s}, t) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{n_e=0}^{N_e-1} v_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t), \quad (2.17)$$

donde $v_i(\mathbf{s}, t)$ es la función coordenada i del modelo $\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$ y $v_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t)$ es cada uno de los elementos finitos en que se descompone dicha función coordenada i . Bajo esta premisa, el desarrollo siguiente se presenta para una función coordenada i genérica, siendo análogo para el resto de coordenadas.

Habitualmente estos elementos finitos se construyen geoméricamente mediante una función de forma y sus parámetros,

$$v_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t) = \mathbf{N}_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}) \mathbf{u}_i^{n_1, \dots, n_e}(t), \quad (2.18)$$

donde $\mathbf{N}_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s})$ es la función de forma y $\mathbf{u}_i^{n_1, \dots, n_e}(t)$ son los vectores de parámetros de cada elemento $\{n_1, \dots, n_e\}$ de la función coordenada i . La Figura 2.1 muestra esta formación del modelo mediante nodos y funciones de forma. Los puntos rojos de la figura representan los nodos del modelo, $\mathbf{u}_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s})$, mientras que las líneas en azul representan el resultado del producto de los nodos y la función de forma, es decir $v_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t)$.

La expresión (2.18) corresponde con el caso más general, en el cual la función de forma $\mathbf{N}_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s})$ puede cambiar de un segmento a otro, y depende a su vez de la coordenada i . Si suponemos un modelo completamente cerrado (2.3), utilizamos la misma función de forma en todos los nodos y coordenadas, esta expresión se puede simplificar como,

$$v_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{s}) \mathbf{u}_i^{n_1, \dots, n_e}(t). \quad (2.19)$$

Este resultado implica que podemos utilizar la misma función de forma $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ en todo el modelo y a lo largo del tiempo, simplificándose notablemente el mecanismo de cálculo en el proceso de modelado, como analizaremos a continuación.

Las funciones de forma de mayor empleo en la bibliografía son los polinomios de Hermite, B-splines y diferencias finitas [Zienkiewicz et al., 2005, Unser et al., 1993, Liang et al., 2006]. Para el caso unidimensional, $e = 1$ o contornos activos, los polinomios de Hermite se han utilizado profusamente en la bibliografía [Liang et al., 2006]. El motivo de su uso es fundamentalmente su sencillez, ya que cada segmento del modelo queda definido completamente por sus propios parámetros. Esto es, las funciones de forma quedan circunscritas al interior del elemento, y por tanto, cada segmento del modelo queda totalmente definido mediante el producto de estas funciones de forma con los parámetros del segmento. En concreto, en los polinomios de Hermite cada elemento del modelo queda totalmente definido por la posición x y pendiente θ en sus extremos $s = 0$ y $s = l$, tal y como indica la Figura 2.4(a). No obstante, si queremos garantizar continuidad a lo largo del modelo, los valores de x y θ en el final de un segmento deben ser iguales a los valores en el inicio del segmento contiguo.

Figura 2.4.: Comparativa en la construcción de la curva unidimensional $v(s)$ mediante: (a) Polinomios de Hermite; (b) B-splines cuadráticos.

Esta característica no aparece en otras funciones de forma como los B-splines, donde para polinomios de segundo o mayor orden, las funciones de forma se expanden a varios segmentos del contorno. Por ejemplo en la Figura 2.4(b), se muestra un modelo construido mediante B-splines cuadráticos. Cada función de forma se expande a 3 segmentos, ya que está formada mediante la combinación lineal de tres funciones de forma. Por tanto, cada elemento del modelo $v(s)$ estará afectado por tres funciones de forma con sus respectivos parámetros.

A pesar de esta sencillez en el caso de los modelos unidimensionales, la generalización al caso multidimensional de los polinomios de Hermite no es trivial [Dodonov y Man'ko, 1994, Lamata et al., 2011]. Al trabajar con modelos multidimensionales, el polinomio será dependiente de varias variables paramétricas. Dado que los polinomios de Hermite se definen mediante las pendientes del polinomio en los extremos de los segmentos, en polinomios de Hermite de dos ó más dimensiones se produce una interrelación entre los valores de las pendientes del polinomio con respecto a cada variable paramétrica. Estas pendientes deben calcularse mediante derivadas parciales, lo cual produce una formulación compleja.

Asimismo, la formulación de Hermite multidimensional no permite separar el polinomio resultante en el producto de polinomios unidimensionales. Es decir, las funciones de forma de Hermite no son separables. Dado que ésta es una condición necesaria para la obtención de la formulación espacial y frecuencial a partir del funcional de energía (2.13) tal y como se determina en el Anexo B.1, en el presente trabajo se ha optado por el empleo de las funciones de forma B-splines y diferencias finitas. Estas dos funciones de forma sí son separables. Por tanto, permiten la descomposición de la función multidimensional en funciones de forma dependientes de una única variable independiente.

Tal y como se ha indicado en la Sección 2.1.2, el valor de cada componente $v_i(\mathbf{s}, t)$ puede obtenerse de forma independiente al resto mediante la ecuación (2.14). Por tanto, la formulación de elementos finitos puede ser desarrollada para una función coordenada genérica i dentro del rango $1 \leq i \leq d$ con $i \in \mathbb{N}$. Aplicando el método de Galerkin tal y como detalla en el Anexo B.1, la ecuación (2.14) puede escribirse en forma matricial como,

$$\mathbf{M} \mathbf{d}_{tt} \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{C} \mathbf{d}_{tt} \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}_i(t) = \mathbf{q}_i(t), \quad (2.20)$$

donde $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ representan la matrices globales de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente. El array global de parámetros $\mathbf{u}_i(t)$ determina la forma y posición de todos los elementos del modelo deformable para la función coordenada i .

Este array $\mathbf{u}_i$ tiene a priori el mismo número de dimensiones que el modelo. Es decir, es e -dimensional. A su vez, el tamaño del array para cada dimensión depende del número de elementos en que se haya discretizado dicha dimensión del modelo así como de los grados de libertad de las funciones de forma. Notar, que para poder operar de forma matricial en la ecuación (2.20) el array $\mathbf{u}_i$ se reordena en forma de vector según ordenación lexicográfica tal y como se indica en el Anexo A.1.

Las matrices globales $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ se construyen mediante matrices de ensamblaje a partir de las matrices de cada elemento $\mathbf{M}^n$, $\mathbf{C}^n$ y $\mathbf{K}^n$. Este proceso de composición así como las dimensiones del array de parámetros $\mathbf{u}_i$ son descritas en las Secciones 2.2.2 y 2.2.3, donde se emplean funciones de forma B-splines y diferencias finitas respectivamente.

Dado que esta formulación se puede aplicar a cada función coordenada de forma independiente, con el fin de simplificar la notación, se suprime a partir de esta sección el subíndice i que indica en los arrays v_i y $\mathbf{u}_i$ la función coordenada.

2.2.2. Formulación mediante B-splines

Los B-splines multidimensionales son curvas que permiten representar cada función coordenada $v(s)$ en función de una suma ponderada de funciones base $B_n(s)$ [Unser et al., 1993, Liang et al., 2006]. Cada una de estas funciones base se define habitualmente como un polinomio o una combinación lineal de polinomios. Tal y como indica se indica en [Unser, 1999], una característica que presentan estas curvas es la de separabilidad, la cual permite representar una función base multidimensional como el productorio de funciones base unidimensionales. Por este motivo, analizaremos en primer lugar los B-splines en una y dos dimensiones generalizando posteriormente la formulación al caso multidimensional.

Formulación en el caso unidimensional. Las *splines* unidimensionales son curvas que permiten representar cada función coordenada $v(s)$ ⁵ en función de un parámetro s que se incrementa a lo largo de la curva. Un *spline* de orden b es una función polinómica definida a trozos, consistente en segmentos polinómicos concatenados o *spans*, cada uno formado por varios polinomios de orden b , unidos en los nodos o puntos de unión.

Los *splines* son interesantes debido a su capacidad para representar eficientemente modelos deformables y su proceso de adaptación a los datos. Los modelos sencillos se pueden representar con una curva formada por pocos *spans*. Los modelos más complejos se pueden representar utilizando polinomios de mayor orden, aunque es preferible mantener un orden reducido e incrementar en cambio el número de *spans* a utilizar. Utilizando polinomios de grado reducido el proceso computacional se mantiene estable y sencillo incluso para modelos complejos. Habitualmente se utilizan polinomios cuadráticos ($b = 3$) o cúbicos ($b = 4$).

Los B-splines son un caso concreto de funciones *spline*, eficientes desde el punto de vista computacional. En una formulación de B-splines, la función coordenada $v(s)$ se construye como una suma ponderada de N_1 funciones base $B_n(s)$, $0 \leq n \leq N_1 - 1$ (de ahí “B”-splines) [Blake y Isard, 1998]. En el caso más sencillo, cada función base está formada por b polinomios cada uno definidos sobre un *span* en el eje s . En caso necesario, el orden del polinomio se indica mediante el parámetro b con la nomenclatura $B_{n,b}(s)$. Los *spans* se unen en los nodos como muestra la Figura 2.5.

Habitualmente se fija para el segmento o *span* una longitud unidad. Así, el concepto *span* se utiliza como elemento o segmento en esta formulación de elementos finitos, y por este motivo, los conceptos elemento y *span* son términos intercambiables para esta función de forma [Unser, 1999].

⁵Recordar que con el fin de simplificar la notación, a partir de este punto suprimimos el subíndice i de la función coordenada $v_i(s)$. Por tanto, en esta sección y subsiguientes, al utilizar el término $v(s)$ nos estaremos refiriendo a $v_i(s)$.

Figura 2.5.: (a) Función base $B_{0,4}(s)$ B-spline cúbico (orden $b = 4$). Los puntos en $s = 0, 1, 2, 3, 4$ marcan las transiciones entre los segmentos polinomiales de la función. (b) En el caso regular en el que se los puntos están equiespaciados (en valores enteros de la variable s), cada función base B-spline es una copia desplazada de la anterior.

La función *spline* total se construye mediante,

$$v(s, t) = \sum_{n=0}^{N_1-1} B_n(s) u^n(t), \quad (2.21)$$

donde n representa el índice del *span* y $u^n(t)$ es el peso aplicado a la n -ésima función base $B_n(s)$, como muestra la Figura 2.6. Notar que en función del orden del polinomio, las funciones base pueden extenderse a más de un *span* y por tanto, para conocer la curva resultante en cada segmento hay que considerar la aportación de cada una de las funciones base que son no nulas en dicho segmento. Esta información se utiliza posteriormente para la obtención de las matrices de composición en las matrices de forma obtenidas a partir de las $B_n(s)$.

Figura 2.6.: Construcción del *spline* total $v(s, t)$ mediante la suma ponderada de funciones base B-splines cúbicas.

Las funciones base utilizadas en B-splines pueden ser periódicas o no periódicas dentro del intervalo cerrado $0 \leq s \leq L$ donde L es la longitud del intervalo de interés. Las bases periódicas se definen como bases bi-infinitas que ofrecen periodicidad en todos los segmentos [Blake y Isard,

1998]. De esta forma, cada función base se construye como una copia trasladada de la base de un segmento anterior (véase Figura 2.7). Para este tipo de bases en cada extremo del segmento tendremos un único nodo, por lo que la multiplicidad de los nodos será igual a la unidad.

Figura 2.7.: Funciones base B-splines cúbicas periódicas sobre el rango $0 \leq s \leq 5$. Cada B-spline es una copia desplazada de la anterior, con desplazamiento circular en extremos para cumplir con la propiedad de periodicidad.

Por el contrario, las bases no periódicas son más complejas de construir ya que requieren la introducción de nodos múltiples en sus extremos. El empleo de las bases no periódicas puede ser interesante para los modelos deformables no cerrados, puesto que permiten un control total sobre las condiciones de contorno, es decir el valor de la función $v(s)$ y sus derivadas en los extremos $s = 0$ y $s = L$ del intervalo (véase Figura 2.8). De igual forma, en este tipo de bases se pueden incluir varios nodos en los límites de algunos segmentos. Así, se puede reducir la continuidad de la curva en ciertos puntos, esto es, el número de derivadas continuas, permitiendo escalones y otros tipos de discontinuidades en ellos.

Figura 2.8.: Funciones base B-splines cúbicas no periódicas sobre el rango $0 \leq s \leq 5$. En este caso las funciones base no son copias desplazadas de otras funciones dado que se incluyen funciones especiales en los extremos de los intervalos para controlar las condiciones de contorno.

A pesar de las ventajas que presentan las bases no periódicas, estas funciones tienen falta de regularidad así como una formulación más compleja que las bases periódicas. Esto impide una

fácil obtención de matrices de composición regulares, requerimiento para que la formulación de los modelos se pueda trasladar fácilmente al dominio frecuencial, tal y como se analizará en la Sección 3.1.

Por este motivo, en este trabajo se opta por utilizar las bases periódicas, que sí permiten una fácil transformación al dominio de Fourier. La falta de continuidad en extremos de modelos abiertos se formulará mediante el empleo de extensiones ocultas, como se indica en la Sección 5.2 puesto que la periodicidad se requerirá para la formulación frecuencial del modelo como se muestra en la Sección 3.1.

Para ambas funciones base, [Unser, 1999] propone un algoritmo eficiente para generar las funciones *splines* en función del orden de los polinomios y las multiplicidades de cada nodo. El n -ésimo polinomio de orden b para un *span* σ , $B_{n,b}^\sigma$ puede ser calculado mediante,

$$B_{n,1}^\sigma(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_n \leq \sigma < k_{n+1}, \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (2.22)$$

$$B_{n,b}^\sigma(s) = \frac{(s + \sigma - k_n)B_{n,b-1}^\sigma(s)}{k_{n+b-1} - k_n} + \frac{(k_{n+b} - s - \sigma)B_{n+1,b-1}^\sigma(s)}{k_{n+b} - k_{n+1}}, \quad (2.23)$$

donde b es el orden del polinomio, k_j son los valores de los nodos calculados a partir de las multiplicidades m_j en los puntos de unión j . Dado que para funciones base periódicas $m_j = 1 \ \forall j$, los valores de k_j coincidirán con los puntos de unión, tal que $k_j = j \in [0, N_1 - 1]$. Y en este caso los polinomios de cada *span* serán copias desplazadas de los polinomios del primer *span*.

El soporte de un función base se define como los segmentos en los cuales dicha función es no nula. Para un determinado *span* σ , el índice b_σ que indica la primera función base cuyo soporte incluye el *span*, puede calcularse como,

$$b_\sigma = \left(\sum_{j=0}^{\sigma} m_j - b \right) \bmod N_1. \quad (2.24)$$

Por tanto,

$$I_\sigma := [b_\sigma \quad (b_\sigma + 1) \bmod N_1 \quad \cdots \quad (b_\sigma + b - 1) \bmod N_1], \quad (2.25)$$

es el vector con los índices de las variables del nodo u^n y los b segmentos del polinomio $B_{n,b}^\sigma$ que aparecen en el *span* σ ⁶. Así, la función para un determinado *span* σ , expresada como $v(s, t)^\sigma$, se puede construir como,

$$v(s, t)^\sigma := v(s, t) \Big|_{\sigma < s \leq \sigma+1} = \sum_{n=b_\sigma}^{(b_\sigma+b-1) \bmod N_1} B_{n,b}^\sigma(s) u^n(t). \quad (2.26)$$

⁶Para B-splines cerrados, los cuales son utilizados en este trabajo, los índices debe ser replicadas adecuadamente [Blake y Isard, 1998]

La Figura 2.9 muestra un ejemplo de obtención de la función $v(s, t)$ a partir de la composición de $N_1 = 8$ funciones base. Notar que en este caso con B-splines cúbicos, $b = 4$ y, por tanto, el soporte de cada función base abarcará 4 segmentos.

Figura 2.9.: Construcción de la función $v(s, t)$ a partir de la composición de $N_1 = 8$ splines cúbicos periódicos $B_{n,4}$. Debajo de cada $span \sigma$ se muestra los índices I_σ de las variables del nodo u^n que aparecen en dicho $span$, es decir, el soporte de cada función base.

Identificando los b polinomios de cualquier segmento $B_{n,b}^\sigma(s)$ como las funciones de forma $\mathbf{N}(s)$, se puede obtener fácilmente la ecuación del movimiento [Liang et al., 2006]. Por ejemplo, la matriz de forma para un B-spline cúbico periódico y por tanto regular, es,

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{B}(s) = [1 \ s \ s^2 \ s^3] \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6}s^3 \\ \frac{2}{3} - s^2 + \frac{1}{2}s^3 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^3 \\ \frac{1}{6}s^3 \end{bmatrix}^T, \quad (2.27)$$

donde la primera columna muestra el valor del polinomio $B_{b_0,4}^0(s)$, representando las restantes filas el resto de funciones base definidas por I_0 para el $span 0$. Es decir,

$$\mathbf{B}(s) = \left[B_{b_0,4}^0(s) \ B_{(b_0+1) \bmod N_1,4}^0(s) \ B_{(b_0+2) \bmod N_1,4}^0(s) \ B_{(b_0+3) \bmod N_1,4}^0(s) \right]. \quad (2.28)$$

La Figura 2.10 muestra la construcción de las funciones base que aparecen en dicho $span$ a partir de las expresiones mostradas en (2.27). Para obtener las funciones base en el resto de segmentos desplazamos estas funciones base a lo largo de la variable paramétrica s .

La ecuación (B.10) deducida en el Anexo B.1 permite calcular las matrices elementales para el caso unidimensional a partir de las funciones de forma $\mathbf{N}(s)$ definidas en (2.27). Esta expresión se puede simplificar fácilmente para el caso unidimensional anulando los términos en que aparece ∂_{s_2} y $\partial_{s_2 s_2}$, coincidiendo con la expresión mostrada por [Liang et al., 2006]. A partir de esta expresión para el cálculo unidimensional y suponiendo los parámetros μ_σ , γ_σ , α_σ y β_σ constantes dentro del $span$ y que éste tiene longitud unidad, se pueden obtener fácilmente las matrices elementales de masa $\mathbf{M}^{e:\sigma}$, amortiguamiento $\mathbf{C}^{e:\sigma}$ y rigidez $\mathbf{K}^{e:\sigma}$ para el elemento σ del modelo. Dichas matrices se detallan en (B.16) dentro del Anexo B.2.2.

Figura 2.10.: Construcción de las funciones base para el $\text{span } \sigma$.

Con estas matrices elementales se puede aplicar la ecuación del movimiento a cada segmento mediante las pesos $u^n(t)$ que definen la función $v(s, t)^\sigma$ en el segmento σ . Tal y como muestra (2.26), I_σ indica qué pesos determinan la función en dicho segmento. La Figura 2.9 muestra para el caso concreto de $N_1 = 8$ y *splines* cúbicos los pesos a considerar en cada segmento.

No obstante, dado que para *splines* con $b > 1$, los pesos de las funciones base afectan a varios segmentos, la implementación práctica se realiza uniendo los subsistemas de los diferentes segmentos en un sistema global. En este sistema aparecerán todos los pesos de las funciones base $\mathbf{u}^n(t) = [u^0(t) \cdots u^{N_1-1}(t)]^\top$.

Para la construcción del sistema global, se interpreta la ecuación del movimiento de cada segmento σ como un sistema de ecuaciones diferenciales determinado por las matrices elementales $\mathbf{M}^{e:\sigma}$, $\mathbf{C}^{e:\sigma}$ y $\mathbf{K}^{e:\sigma}$. A partir de este punto supondremos que los parámetros μ , γ , α y β son idénticos en todos los segmentos, lo que conduce a que estas matrices elementales son a su vez idénticas en todos los segmentos: $\mathbf{M}^e = \mathbf{M}^{e:\sigma}$, $\mathbf{C}^e = \mathbf{C}^{e:\sigma}$ y $\mathbf{K}^e = \mathbf{K}^{e:\sigma} \forall \sigma$.

Se reordena en cada segmento las ecuaciones del sistema y se incrementa las dimensiones de las matrices mediante la inclusión de elementos nulos para que en el sistema de cada segmento aparezcan todos los pesos $\mathbf{u}^n(t)$ del sistema global definidos como un vector con orden idéntico, y manteniendo a su vez la igualdad matemática de las expresiones en cada segmento. Tras este proceso se procede a la adición de todos los subsistemas. La justificación del proceso se basa en que la función $v(s, t)$ se define como una combinación lineal de funciones base (2.21), y aplicando la propiedad de linealidad, el sistema global también puede considerarse como una combinación lineal de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Mediante este último paso, obtenemos las matrices globales del sistema $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$, como el sumatorio de cada una de las matrices elementales transformadas de los diferentes segmentos, tal y como se ha indicado arriba, para permitir esta unión. Este proceso puede generalizarse para diferentes matrices de forma introduciendo las matrices de ensamblaje [Liang et al., 2006]. Para

el caso de *B-splines* suponiendo un modelo con n_e elementos y N_1 nodos⁷, todas las matrices de ensamblaje para un determinado segmento σ con $0 \leq \sigma \leq N_1 - 1$ son idénticas, $\mathbf{G}_M^\sigma = \mathbf{G}_C^\sigma = \mathbf{G}_\alpha^\sigma = \mathbf{G}_\beta^\sigma = \mathbf{G}_q^\sigma = \mathbf{G}^\sigma$, quedando definidas por,

$$(\mathbf{G}^\sigma)_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (j + b_\sigma) \bmod N_1 = k, \\ 0 & \text{resto.} \end{cases} \quad (2.29)$$

Esta matriz $\mathbf{G}^\sigma$ tiene unas dimensiones $b \times N_1$, siendo b es el número de grados de libertad u orden del polinomio del modelo.

Las matrices globales $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ y el vector de fuerzas $\mathbf{q}$ se ensamblan a partir de las matrices elementales y la matriz de composición $\mathbf{G}^\sigma$ mediante las ecuaciones (B.13). Recordamos que las matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ tienen unas dimensiones $N_1 \times N_1$ y las del vector $\mathbf{q}$ son $N_1 \times 1$, las cuales son acordes con los N_1 parámetros del array global de parámetros $\mathbf{u}$. Así, aplicando (2.20) estas matrices permiten calcular directamente la ecuación del movimiento al sistema global para cada coordenada i del modelo deformable unidimensional.

Con el fin de simplificar el proceso iterativo, es necesario establecer un conjunto de suposiciones. En la práctica, es habitual asumir que la densidad de masa y densidad de rozamiento son constantes dentro de cada elemento. Asimismo, en la mayoría de aplicaciones, estos dos parámetros no varían y se mantienen constantes para todos los elementos del modelo, $\mu_\sigma = \mu$ y $\gamma_\sigma = \gamma$. También es frecuente asumir que los parámetros estáticos, elasticidad y rigidez, no varían a lo largo del modelo, esto es, $\alpha_\sigma = \alpha$ y $\beta_\sigma = \beta$. Si añadimos además, el supuesto de modelo cerrado, aplicando (B.13) y (B.16) obtenemos las matrices descritas en (B.17-B.21).

Podemos observar que estas matrices son circulantes [Horn y Johnson, 1990] y quedan completamente definidas por su primera fila, propiedad que se utilizará en la Sección 2.3 para simplificar el proceso de cálculo en el dominio de la frecuencia.

Formulación en el caso bidimensional. Generalizando para más dimensiones, cada función coordenada del modelo deformable se puede construir como una suma ponderada de funciones base $B_n(\mathbf{s})$,

$$v(\mathbf{s}, t) = \sum_n B_n(\mathbf{s}) u^n(t), \quad (2.30)$$

donde $\mathbf{n} := [n_1, \dots, n_e]$ son los índices de los segmentos en cada dimensión, $\mathbf{s} := [s_1, \dots, s_e]$ es el vector de las variables paramétricas espaciales del modelo y $u^n(t)$ son los pesos aplicados a dichas funciones base [Blake y Isard, 1998, Craig, 1999].

Los *B-splines* multidimensionales son funciones separables y se pueden expresar co-

⁷Cuando el modelo es cerrado $N_1 = n_e$. Éste es el caso considerado en esta sección.

mo el producto de los B-splines unidimensionales correspondientes [Unser, 1999], $B_{\mathbf{n}}(\mathbf{s}) = B_{n_1}(s_1)B_{n_2}(s_2) \cdots B_{n_e}(s_e)$. De esta forma, (2.30) puede escribirse sin pérdida de generalidad como,

$$v(\mathbf{s}, t) = \sum_{\mathbf{n}} B_{n_1}(s_1)B_{n_2}(s_2) \cdots B_{n_e}(s_e)u^{\mathbf{n}}(t). \quad (2.31)$$

Particularizando para el caso bidimensional, esta expresión queda,

$$v^{2D}(s_1, s_2, t) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} B_{n_1}(s_1)B_{n_2}(s_2)u^{n_1, n_2}(t) \quad (2.32)$$

donde $u^{n_1, n_2}(t)$ representa la matriz bidimensional de parámetros del modelo,

$$\mathbf{u}^{n_1, n_2}(t) = \begin{bmatrix} u^{0,0}(t) & \cdots & u^{0, N_2-1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^{N_1-1, 0}(t) & \cdots & u^{N_1-1, N_2-1}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

De forma general la matriz de parámetros tendrá siempre el mismo número de dimensiones que el modelo deformable. Notar que la propiedad de separabilidad se puede aplicar a las funciones base pero en cambio no es aplicable a los pesos, los cuales afectan a las funciones base en todas las dimensiones. La Figura 2.11 muestra un ejemplo de construcción de función base bidimensional formada por el producto de dos B-splines cúbicos unidimensionales.

Figura 2.11.: Función base $B_{0,4}(\mathbf{s})$ a partir del producto de las funciones base $B_{0,4}(s_1)$ y $B_{0,4}(s_2)$.

A partir de (2.31), la obtención de las funciones base multidimensionales consiste en aplicar (2.27) a cada dimensión l de s_l , y realizar el sumatorio de los productos de las funciones base para obtener $v(\mathbf{s}, t)$. En cada dimensión se pueden utilizar polinomios de diferente orden b_l , aunque habitualmente las funciones base en todas las dimensiones suelen tener idéntico orden b .

Los *spans* multidimensionales, pueden estar incluidos en los soportes de varias funciones base para cada dimensión. Así, al igual que en (2.24),

$$b_{\sigma_l} = \left(\sum_{j=0}^{\sigma_l} m_j - b \right) \bmod N_l, \quad (2.34)$$

indica la primera función base para la dimensión l cuyo soporte incluye el segmento. Y de igual forma suponiendo orden b en las funciones base de todos los segmentos,

$$I_{\sigma_l} = [b_{\sigma_l} \quad (b_{\sigma_l} + 1) \bmod N_l \quad \cdots \quad (b_{\sigma_l} + b - 1) \bmod N_l], \quad (2.35)$$

indica los índices de las variables del nodos $\mathbf{u}^n(t)$ en la dimensión l y los b segmentos del polinomio $B_{n_l, b}^{\sigma_l}$.

Generalizando (2.26), la función $v(\mathbf{s}, t)^{\bar{\sigma}}$ para un determinado $span \bar{\sigma} = [\sigma_1, \dots, \sigma_e]$ se puede construir como,

$$v(\mathbf{s}, t)^{\bar{\sigma}} = \sum_{n_1=b_{\sigma_1}}^{(b_{\sigma_1}+b-1) \bmod N_1} \cdots \sum_{n_e=b_{\sigma_e}}^{(b_{\sigma_e}+b-1) \bmod N_e} B_{n_1, b}^{\sigma_1}(s_1) \cdots B_{n_e, b}^{\sigma_e}(s_e) \mathbf{u}^n(t). \quad (2.36)$$

Limitaremos en esta sección el modelo deformable a un modelo bidimensional. La Figura 2.12 muestra un ejemplo de obtención de la función bidimensional $v(s_1, s_2, t)$ a partir de la composición de $N_1 = N_2 = 8$ funciones base. En este caso se ha utilizado $b = 4$ y, por tanto, el soporte de cada función base abarcará 4 segmentos en cada dimensión, es decir una malla de $4 \cdot 4$ spans. Para este caso, (2.36) se simplifica como,

$$v(s_1, s_2, t)^{\sigma_1, \sigma_2} = \sum_{n_1=b_{\sigma_1}}^{(b_{\sigma_1}+3) \bmod N_1} \sum_{n_2=b_{\sigma_2}}^{(b_{\sigma_2}+3) \bmod N_2} B_{n_1, 4}^{\sigma_1}(s_1) B_{n_2, 4}^{\sigma_2}(s_2) \mathbf{u}^{n_1, n_2}(t). \quad (2.37)$$

Para obtener la ecuación del movimiento global del modelo deformable (2.20) es necesario calcular en primer lugar las ecuaciones del movimiento para cada elemento. Este proceso se realiza aplicando (B.10) a las funciones base $\mathbf{N}(s_1, s_2)$. Tal y como indica la Sección 2.2.1, dicha expresión sólo es válida, si se puede descomponer $v(s_1, s_2, t)$ como el producto escalar de dos vectores $\mathbf{N}(s_1, s_2)$ y $\mathbf{u}^{n_1, n_2}(t)$. En este caso aplicado a un segmento tal y como indica (2.37), sí es posible esta formulación sin más que identificar, $\mathbf{N}(s_1, s_2) = B_{n_1, 4}^{\sigma_1}(s_1) B_{n_2, 4}^{\sigma_2}(s_2)$.

De forma similar al caso unidimensional, utilizando B-splines cúbicos periódicos para ambas dimensiones, las matrices de forma quedan definidas por $\mathbf{B}(s_1) = \mathbf{B}(s)|_{s=s_1}$ y $\mathbf{B}(s_2) = \mathbf{B}(s)|_{s=s_2}$, donde $\mathbf{B}(s)$ se define en (2.27). Así, para los spans 0 de la dimensión s_1 , tendríamos las funciones base,

$$\mathbf{B}(s_1) = [B_{b_0, 4}^0(s_1) \quad B_{(b_0+1) \bmod N_1, 4}^0(s_1) \quad B_{(b_0+2) \bmod N_1, 4}^0(s_1) \quad B_{(b_0+3) \bmod N_1, 4}^0(s_1)], \quad (2.38)$$

siendo equivalente en la dimensión 2 sin más que sustituir s_1 por s_2 . Para obtener las funciones base del resto de segmentos para cualquiera de las dos dimensiones, se deben desplazar a lo largo de la variable paramétrica correspondiente.

Con el fin de simplificar la nomenclatura, y dado que las funciones base son idénticas en todos los segmentos, supondremos para la obtención de las matrices elementales con las funciones

Figura 2.12.: Construcción de la función $v(s_1, s_2, t)$ a partir de la composición de $N = N_1 N_2 = 64$ B-splines cúbicos bidimensionales periódicos $B_{i,4}(s_1)B_{j,4}(s_2)$. Encima de cada $span \sigma_1$ ó I_{σ_2} se muestra los índices I_{σ_1} ó I_{σ_2} de las variables del nodo u^{n_1, n_2} que aparecen en dicho $span$ bidimensional. Para ilustrar el soporte de las funciones base, se resalta a modo de ejemplo la función base $B_{0,4}(s_1)B_{0,4}(s_2)$ en su descomposición unidimensional y se dibuja como curvas de nivel sobre el plano bidimensional.

de forma indicadas, un determinado segmento genérico definido por,

$$v(s_1, s_2, t) = \sum_{n_1=0}^3 \sum_{n_2=0}^3 B_{n_1}(s_1) B_{n_2}(s_2) u^{n_1, n_2}(t), \quad (2.39)$$

particularizando posteriormente para cada segmento mediante las variables pesos u correspondientes. En esta expresión,

$$B(s_l) = [B_0(s_l) \ B_1(s_l) \ B_2(s_l) \ B_3(s_l)], \quad (2.40)$$

donde $l = 1, 2$ y $B(s)$ coincide con el definido en (2.27). Bajo esta premisa, (2.39) puede escribirse en forma de producto matricial como,

$$v(s_1, s_2, t) = \mathbf{N}(s_1, s_2) \mathbf{u}(t), \quad (2.41)$$

donde,

$$\mathbf{u}(t) = [u^{0,0}(t) \ \dots \ u^{0,3}(t) \ u^{1,0}(t) \ \dots \dots \ u^{3,3}(t)]^T, \quad (2.42a)$$

$$\mathbf{N}(s_1, s_2) = [B_0(s_1)B_0(s_2) \ \dots \ B_0(s_1)B_3(s_2) \ B_1(s_1)B_0(s_2) \ \dots \dots \ B_3(s_1)B_3(s_2)]. \quad (2.42b)$$

De estas expresiones se observa que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{N}$ se forman leyendo por filas los datos matriciales (2.33) e incorporándolos a sendos vectores, lo que equivale a la ordenación lexicográfica indicada en (A.3). El proceso puede realizarse de forma análoga leyendo los datos por columnas. En este caso, obtendríamos una formulación que aunque difiere en las matrices elementales resultantes, es equivalente en las expresiones finales.

Al igual que en el caso unidimensional, suponiendo los parámetros μ_{σ_1, σ_2} , $\gamma_{\sigma_1, \sigma_2}$, $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2}$ y $\beta_{\sigma_1, \sigma_2}$ constantes dentro del *span* y unas dimensiones de éste $L_1 = L_2 = 1$, se pueden sustituir (2.42b) en (B.10), obteniendo de forma directa las matrices elementales para este caso bidimensional, $\mathbf{M}^{e: \sigma_1, \sigma_2}$, $\mathbf{C}^{e: \sigma_1, \sigma_2}$ y $\mathbf{K}^{e: \sigma_1, \sigma_2}$ detalladas en (B.22-B.25). Estas matrices son cuadradas con unas dimensiones de $b_1 b_2 \times b_1 b_2$. Para en el caso de B-splines cúbicos en ambas dimensiones, estas matrices tienen unas dimensiones de 16×16 .

Al igual que en el caso unidimensional, con estas matrices elementales bidimensionales se puede aplicar la ecuación del movimiento a cada *span* mediante las pesos $u^{n_1, n_2}(t)$ que definen la función $v(s_1, s_2, t)^{\sigma_1, \sigma_2}$ en el subdominio $\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Sin embargo, para B-splines con $b > 1$, los pesos de las funciones base afectan a varios subdominios (2.37). Por este motivo, en el caso bidimensional la implementación práctica también se realiza uniendo los subsistemas de los diferentes segmentos en un sistema global. En este caso, los segmentos serán bidimensionales y este solape se producirá en cada una de las dos dimensiones. En el sistema global aparecerán todos los pesos de las funciones base,

$$\mathbf{u}^{n_1, n_2}(t) = [u^{0,0}(t) \ \dots \ u^{0, N_2-1}(t) \ u^{1,0}(t) \ \dots \ u^{1, N_2-1}(t) \ \dots \dots \ u^{N_1-1, 0}(t) \ \dots \ u^{N_1-1, N_2-1}(t)]^T, \quad (2.43)$$

en un vector con ordenación lexicográfica análoga a la de cada elemento.

El proceso de construcción del sistema global es similar al caso unidimensional. En primer lugar se interpreta la ecuación del movimiento de cada segmento $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ como un sistema de ecuaciones diferenciales determinado por las matrices elementales $\mathbf{M}^{e:\sigma_1,\sigma_2}$, $\mathbf{C}^{e:\sigma_1,\sigma_2}$ y $\mathbf{K}^{e:\sigma_1,\sigma_2}$. Supondremos asimismo que los parámetros μ , γ , α y β son idénticos en todos los segmentos, obteniendo de esta forma idénticas matrices elementales en todos los segmentos: $\mathbf{M}^e = \mathbf{M}^{e:\sigma_1,\sigma_2}$, $\mathbf{C}^e = \mathbf{C}^{e:\sigma_1,\sigma_2}$ y $\mathbf{K}^e = \mathbf{K}^{e:\sigma_1,\sigma_2} \forall \sigma_1, \sigma_2$.

Reordenamos las ecuaciones del sistema en cada segmento e incrementamos las dimensiones de las matrices mediante la inclusión de elementos nulos. De esta forma, en el sistema de cada segmento aparecen todos los pesos $\mathbf{u}^{n_1, n_2}(t)$ del sistema global, definidos como un vector con idéntico orden, manteniendo a su vez la igualdad matemática de las expresiones en cada uno de los segmentos. Tras este proceso se procede a la adición de todos los subsistemas. Mediante este último paso, obtenemos las matrices globales del sistema $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$, como el sumatorio de cada una de las matrices elementales transformadas y desplazadas, tal y como se ha indicado arriba.

Al igual que en el caso unidimensional, podemos generalizar el proceso para diferentes matrices de forma mediante las matrices de ensamblaje. En este caso, las matrices tienen una complejidad mayor porque deben recoger los soportes de las funciones base para cada una de las dos dimensiones y además se debe tener en cuenta que el vector de pesos, aunque en la implementación se utiliza en forma vectorial, en realidad se corresponde con información bidimensional.

Para el caso de funciones de forma bidimensionales con B-splines en un modelo con $N = N_1 N_2$ elementos⁸, las matrices de ensamblaje para el segmento $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, donde $0 \leq \sigma_1 \leq N_1 - 1$ y $0 \leq \sigma_2 \leq N_2 - 1$, son $\mathbf{G}_{\mathbf{M}}^{\sigma_1, \sigma_2} = \mathbf{G}_{\mathbf{C}}^{\sigma_1, \sigma_2} = \mathbf{G}_{\alpha}^{\sigma_1, \sigma_2} = \mathbf{G}_{\beta}^{\sigma_1, \sigma_2} = \mathbf{G}_{\mathbf{q}}^{\sigma_1, \sigma_2} = \mathbf{G}^{\sigma_1, \sigma_2}$.

Estas matrices pueden definirse mediante el producto de Kronecker entre las matrices de composición de cada dimensión $\mathbf{G}^{\sigma_1, \sigma_2} = \mathbf{G}^{\sigma_1} \otimes \mathbf{G}^{\sigma_2}$,

$$(\mathbf{G}^{\sigma_1, \sigma_2})_{mn} = \begin{cases} \mathbf{G}_s^{\sigma_2} & \text{si } (m + b_{\sigma_1}) \bmod N_1 = n, \\ \mathbf{0} & \text{resto,} \end{cases} \quad (2.44a)$$

$$(\mathbf{G}^{\sigma_2})_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (j + b_{\sigma_2}) \bmod N_2 = k, \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (2.44b)$$

donde $\mathbf{G}^{\sigma_2}$ es la matriz de composición de una dimensión definido en (2.29), y por tanto, tiene unas dimensiones de $b \times N_2$. En el Anexo A.1 se describe esta operación matricial del producto de Kronecker. Por otra parte, $\mathbf{G}^{\sigma_1, \sigma_2}$ resulta de un tamaño de $b^2 \times N_1 N_2$. Para ambas matrices, b es el número de grados de libertad u orden del polinomio del modelo. Notar que estas matrices de composición son válidas para la construcción por filas del vector de pesos según indica (2.42a).

⁸Supondremos modelo cerrado en ambas dimensiones. Por lo tanto, para las dos dimensiones el número de elementos coincide con el número de nodos.

Para la ordenación por columnas habría que cambiar el orden de las matrices en el producto de Kronecker.

Las matrices globales $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ se ensamblan mediante las ecuaciones (B.14) y tienen unas dimensiones $N_1 N_2 \times N_1 N_2$. De forma análoga, el array de fuerzas externas $\mathbf{q}$ se construye con (B.14f) y su tamaño es $N_1 N_2 \times 1$. Las dimensiones de estos elementos son acordes con los $N = N_1 N_2$ parámetros del array global de parámetros $\mathbf{u}^{n_1, n_2}$. Así, al igual que con el caso unidimensional, aplicando (2.20) estas matrices permiten calcular directamente la ecuación del movimiento al sistema global para cada coordenada i del modelo deformable bidimensional. Es importante recordar que en esta expresión, los pesos de las funciones base $\mathbf{u}^{n_1, n_2}$ se escriben en forma de vector columna.

De nuevo, con el fin de simplificar el algoritmo iterativo, se establecen un conjunto de suposiciones. Se asume que las densidades de masa y rozamiento, así como los parámetros estáticos, elasticidad y rigidez, se mantienen constantes a lo largo del modelo. Esto es, $\mu_{\sigma_1, \sigma_2} = \mu$, $\gamma_{\sigma_1, \sigma_2} = \gamma$, $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2} = \alpha$ y $\beta_{\sigma_1, \sigma_2} = \beta \forall \sigma_1, \sigma_2$. Por otra parte, se añade el supuesto de que el modelo a emplear es cerrado para cada una de las dos dimensiones, postergando el caso de modelos abiertos para la Sección 5.2. Bajo estas condiciones calculamos estas matrices globales mediante (2.44), (B.14) y (B.22-B.25).

Las matrices globales resultantes son circulantes y anidadas [Horn y Johnson, 1990]. Esto es, podemos construirlas como una matriz compuesta de forma circulante por $N_1 \times N_1$ submatrices de dimensiones $N_2 \times N_2$ que son, a su vez, circulantes. En el Anexo B.2.2 se detalla la estructura de las matrices globales y los valores de cada una de las submatrices, para el caso de masa, amortiguamiento y rigidez. Notar que la matrices globales quedan completamente definidas por las primeras filas de las submatrices, que coinciden con la primera fila de la matriz global.

Posteriormente en la Sección 2.3 se describirá una nueva aproximación a la formulación de los modelos, en la que los pesos se reordenan con la forma matricial original (2.33). Esta formulación se obtiene teniendo en cuenta que las matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}_\alpha$ y $\mathbf{K}_\beta$ son circulantes y anidadas, resultando de gran interés por su facilidad en la conversión del proceso iterativo al dominio de la frecuencia.

Formulación en el caso multidimensional. En la presente Sección 2.2.2 se ha mostrado la formulación de la ecuación del movimiento para un modelo deformable uni- y bidimensional en el dominio del espacio. Este proceso, puede generalizarse de forma similar a modelos de mayores dimensiones.

Un modelo deformable e -dimensional $\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$ definido por d funciones coordenadas, un vec-

tor de parámetros $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_e]$ y el tiempo t , se pueden descomponer en cada una de sus funciones coordenadas $v_i(\mathbf{s}, t)$. Estas funciones son independientes entre sí, como se ha justificado en la Sección 2.1.2. Por tanto la formulación se aplica de forma independiente a cada una de las funciones coordenadas. Éstas se descomponen a su vez como la unión de $N = N_1 N_2 \dots N_e$ elementos,

$$v_i(\mathbf{s}, t) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{n_e=0}^{N_e-1} v_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t) \quad (2.45)$$

donde $v_i(\mathbf{s}, t)$ es la función coordenada i del modelo $\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$ y $v_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t)$ es cada uno de los elementos finitos en que se descompone dicha función coordenada i .

También para el caso multidimensional, estos elementos finitos se construyen geométricamente mediante una función de forma y sus parámetros,

$$v_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t) = \mathbf{N}_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}) \mathbf{u}_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t), \quad (2.46)$$

donde $\mathbf{N}$ es la función de forma y $\mathbf{u}$ es el vector de parámetros de cada elemento. De nuevo, suponiendo modelo cerrado para todas las variables paramétricas, misma función de forma en todos los nodos y coordenadas, y valores constantes de los parámetros dentro de los segmentos, esta expresión se puede simplificar como,

$$v_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{s}) \mathbf{u}_i^{n_1, \dots, n_e}(t). \quad (2.47)$$

El siguiente paso consiste en obtener la ecuación del movimiento para e dimensiones. En primer lugar, hay que aplicar (2.47) en (2.14). De forma similar a los casos de 1 y 2 dimensiones, se trata de aplicar el método de Galerkin, introduciendo una función de prueba arbitraria $w(\mathbf{s})$ y calcular el residuo medio ponderado (ver Anexo B.1). Aplicando integración por partes para el número de dimensiones requeridas, y considerando que la función de prueba también se puede descomponer como una combinación lineal de funciones base $w(\mathbf{s}) = \mathbf{N}(\mathbf{s})\mathbf{c}$, se pueden obtener las matrices de las ecuaciones del movimiento (B.9).

Al igual que para el caso bidimensional, este proceso puede realizarse si suponemos que tanto los arrays de vectores de forma $\mathbf{N}$ como el array de parámetros $\mathbf{u}_i$ pueden escribirse de forma vectorial, y por tanto, $v_i(\mathbf{s}, t)$ es una función escalar de varias variables independientes que se obtiene como el producto escalar de los vectores $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ y $\mathbf{u}_i(t)$. Esta condición requiere que las funciones de forma multidimensionales se puedan descomponer en el producto de funciones de forma unidimensionales como muestra la ecuación (2.36).

Para el caso de los B-splines multidimensionales esta condición sigue siendo cierta y además las funciones de forma se obtienen fácilmente a partir de los splines unidimensionales. Por ejemplo, utilizando B-splines cúbicos en todas las dimensiones, las matrices de forma quedarán

definidas por $\mathbf{B}(s_j) = \mathbf{B}(s)|_{s=s_j}$ donde $\mathbf{B}(s)$ se define en (2.27). De nuevo para simplificar la nomenclatura, se considera un segmento genérico definido y se omite el subíndice i que indica la función coordenada,

$$v(\mathbf{s}, t)^{\bar{\sigma}} := \sum_{n_1=0}^3 \cdots \sum_{n_e=0}^3 B_{n_1,b}^{\sigma_1}(s_1) \cdots B_{n_e,b}^{\sigma_e}(s_e) u^{\mathbf{n}}(t). \quad (2.48)$$

Por otra parte, el array e -dimensional de parámetros, tendrá que reordenarse en forma lexicográfica (A.3). Por ejemplo, para 3 dimensiones resulta como,

$$\mathbf{u}(t) = [u^{0,0,0}(t) \cdots u^{0,0,3}(t) \ u^{0,1,0}(t) \cdots u^{0,3,3}(t) \ u^{1,0,0}(t) \cdots \cdots u^{3,3,3}(t)], \quad (2.49)$$

siendo el vector de funciones de forma correspondiente con el vector de parámetros (2.49) y la función base tridimensional la mostrada en la Figura 2.13. Notar que al igual que en el caso bidimensional esta ordenación no es única. Así, es posible tener varios vectores de pesos y funciones de forma, los cuales conducen a diferentes ecuaciones del movimiento, aunque todas con igual validez una vez definida la ordenación. Para dimensiones superiores el proceso de ordenación es análogo.

Figura 2.13.: Función base tridimensional $B_{\bar{0},4}(\mathbf{s})$ construida a partir del producto de los B-splines cúbicos unidimensionales, $B_{\bar{0},4}(\mathbf{s}) = B_{0,4}(s_1)B_{0,4}(s_2)B_{0,4}(s_3)$.

A continuación hay que obtener a partir de las expresiones obtenidas mediante el método de Galerkin para el caso multidimensional [Zienkiewicz et al., 2005], las matrices elementales $\mathbf{M}^{e:\sigma_1, \dots, \sigma_e}$, $\mathbf{C}^{e:\sigma_1, \dots, \sigma_e}$ y $\mathbf{K}^{e:\sigma_1, \dots, \sigma_e}$. De nuevo supondremos que los parámetros μ , γ , α y β son constantes, lo que conduce a unas matrices de masa, amortiguamiento y rigidez idénticas en todos los spans del modelo. Estas matrices junto a la ecuación del movimiento (2.20) permiten caracterizar cada segmento del modelo.

Al igual que modelos de menores dimensiones, las funciones de forma tienen soportes que abarcan varios segmentos y por tanto, el modelo debe ser procesado conjuntamente. Por este motivo, es necesario obtener las matrices de composición para poder determinar la posición del modelo deformable en su totalidad. Generalizando el proceso de obtención de estas matrices, para el caso de *splines* cúbicos multidimensionales la matriz de composición para un determinado segmento $\bar{\sigma}$ se calcula mediante,

$$\mathbf{G}^{\sigma_1, \dots, \sigma_e} = \mathbf{G}^{\sigma_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{G}^{\sigma_e}, \quad (2.50)$$

donde $\otimes$ representa el producto de Kronecker (ver ecuación A.2) y $\mathbf{G}^{\sigma_j}$ es la matriz de composición para B-*splines* unidimensionales (2.44). Esta expresión es válida para un reordenación de pesos y funciones de forma como la descrita en (2.49). La matriz $\mathbf{G}^{\sigma_1, \dots, \sigma_e}$ resulta de un tamaño de $b^e \times (N_1 N_2 \dots N_e)$. Las matrices globales $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}_\alpha$, $\mathbf{K}_\beta$ y $\mathbf{q}$ se ensamblan mediante las ecuaciones (B.15) a partir de las matrices elementales y matriz de composición (2.50).

Las matrices globales resultantes tienen unas dimensiones de $(N_1 N_2 \dots N_e) \times (N_1 N_2 \dots N_e)$. Y de nuevo, mediante su aplicación en la ecuación del movimiento del sistema global (2.20) se puede obtener directamente la evolución de la coordenada i del modelo deformable e -dimensional a lo largo del tiempo. Recordar que en este sistema los pesos de las funciones base $\mathbf{u}^{n_1, \dots, n_e}$ se escriben en forma vectorial (2.49).

Al igual que en el caso bidimensional, las matrices globales son circulantes y anidadas. Esto es, se pueden interpretar como una matriz circulante de $N_1 \times N_1$ submatrices de dimensiones $(N_2 N_3 \dots N_e) \times (N_2 N_3 \dots N_e)$. Cada una de estas submatrices se pueden interpretar, a su vez, como una matriz circulante formada por $N_2 \times N_2$ submatrices de dimensiones $(N_3 N_4 \dots N_e) \times (N_3 N_4 \dots N_e)$. Esta descomposición continua hasta llegar a unas submatrices circulantes de dimensiones $(N_{e-1} N_e) \times (N_{e-1} N_e)$ formadas por $N_{e-1} \times N_{e-1}$ submatrices circulantes de dimensiones $N_e \times N_e$.

Dado que en cada nivel de descomposición, una matriz circulante queda definida mediante su primera fila de elementos, aplicando este razonamiento a la descomposición completa, obtenemos que las matrices globales para el caso multidimensional $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}_\alpha$ y $\mathbf{K}_\beta$ quedan definidas por completo a partir de su primera fila. Al igual que en los casos de menores dimensiones, esta propiedad se utilizará en la Sección 2.3 para simplificar el proceso de cálculo en el dominio de la frecuencia, reordenando los pesos a la forma de array e -dimensional original.

2.2.3. Formulación mediante diferencias finitas

Otro tipo de elementos finitos utilizado para la implementación de los modelos deformables multidimensionales es el método de diferencias finitas. Este procedimiento aproxima las solucio-

nes a las ecuaciones diferenciales reemplazando las expresiones de las derivadas por cocientes de diferencias de la señal.

A pesar de las diferencias sustanciales entre los modelos implementados con elementos finitos como los B-Splines descritos en la Sección 2.2.2 y los modelos definidos mediante diferencias finitas, éstos últimos también pueden construirse con el procedimiento de elementos finitos descrito anteriormente. Para este fin, debemos utilizar la delta de Dirac $\delta(\mathbf{s})$ como función de forma en la ecuación (2.19). Notar que en este caso, la función de forma queda circunscrita sólo a un elemento e -dimensional del modelo, y por tanto, no hay solapes de varias funciones de forma en los diferentes segmentos como en el caso de los B-splines. Esta característica simplifica la formulación y reduce el coste computacional con respecto a las funciones B-Splines.

Asimismo, es importante destacar que la delta de Dirac es una función separable para cada dimensión, $\delta(\mathbf{s}) = \delta(s_1, s_2, \dots, s_e) = \delta(s_1)\delta(s_2) \cdots \delta(s_e)$, requisito indispensable para aplicar la formulación anterior. Esto nos permitiría, al menos teóricamente, obtener mediante (B.10) las matrices de la ecuación del movimiento del modelo (2.20), y por consiguiente, determinar la posición y forma de cada coordenada i del modelo a lo largo del tiempo.

No obstante, el cálculo de las matrices con la delta continua $\delta(\mathbf{s})$ no tiene solución analítica, lo cual obliga a aproximar la función de forma mediante una delta discreta $\delta[\mathbf{n}]$ y sus derivadas mediante sus aproximaciones discretas. Así, se pueden obtener unas matrices del sistema que permiten calcular la evolución del modelo mediante (2.20) de forma análoga al caso de los B-splines descrito anteriormente.

Analizaremos en primer lugar el empleo de las diferencias finitas en modelos de una y dos dimensiones generalizando posteriormente al caso multidimensional. Al igual que en la Sección 2.2.2, el procedimiento es independiente para cada función coordenada del modelo. Por tanto, en las siguientes secciones se suprime el subíndice i que indica la coordenada.

Formulación en el caso unidimensional. El modelo deformable unidimensional o *snake* definido mediante diferencias finitas se puede expresar mediante,

$$v(s, t) = \sum_{n=0}^{N_1-1} \delta(s - nL) u^n(t) \quad (2.51)$$

donde n representa el índice del segmento, N_1 el número de segmentos, L su longitud y $u^n(t)$ son los pesos aplicados a cada función de forma. Habitualmente se fija para los segmentos longitud unidad, coincidiendo por tanto el número del segmento con su posición según la variable s .

La Figura 2.14 muestra un ejemplo de obtención de la función $v(s, t)$ a partir de la compo-

sición de $N_1 = 8$ funciones base. En esta figura se puede observar que para diferencias finitas, el soporte de cada función base abarcará 1 sólo segmento, al contrario que con B-Splines de orden b cuya función base abarca b segmentos.

Figura 2.14.: Construcción de la función $v(s, t)$ a partir de la composición de $N_1 = 8$ funciones base $\delta(s - nL)$ ponderadas por las variables del nodo $u^n(t)$ correspondientes. Notar que $L = 1$. Dado que $v(s, t)$ es un modelo cerrado los valores de los nodos extremos son idénticos.

Mediante (B.10) se pueden calcular las matrices elementales para el caso bidimensional. Podemos simplificar esta expresión para el caso unidimensional anulando los términos en los que aparece ∂_{s_2} y $\partial_{s_2 s_2}$. Para aplicar esta ecuación, vamos a aproximar la función de forma por una delta discreta, su primera derivada por una diferencia regresiva y su segunda derivada por una segunda diferencia centrada,

$$\delta(s) \Rightarrow \delta[n], \quad (2.52a)$$

$$d_s \delta(s) \Rightarrow \frac{1}{\Delta s} (\delta[n] - \delta[n-1]) = \delta[n] - \delta[n-1], \quad (2.52b)$$

$$d_{ss} \delta(s) \Rightarrow \frac{1}{(\Delta s)^2} (\delta[n+1] - 2 \cdot \delta[n] + \delta[n-1]) = \delta[n+1] - 2 \cdot \delta[n] + \delta[n-1], \quad (2.52c)$$

donde d_s y d_{ss} son respectivamente la primera y segunda derivada, Δs es la distancia entre diferencias finitas que coincide con la longitud del segmento, habitualmente fijada como tamaño unidad.

Para el cálculo de las matrices elementales mediante (B.10), aplicaremos las aproximaciones anteriores. Y por tanto, la matriz de forma empleada en dichas expresiones $\mathbf{N}(s)$ será también una aproximación discreta. Para las matrices $\mathbf{M}^e$ y $\mathbf{C}^e$ la matriz $\mathbf{N}(s)$ tendrá tamaño unidad dado que la función de forma $\delta[n]$ queda circunscrita sólo a su segmento correspondiente. En cambio, en el cálculo de las matrices $\mathbf{K}_\alpha^e$ y $\mathbf{K}_\beta^e$ aparece respectivamente la primera y segunda derivada de la función de forma. Dado que sus aproximaciones incluyen respectivamente términos de 2 y 3 segmentos, sus matrices $\mathbf{N}(s)$ tendrán como dimensiones 2×1 y 3×1 para recoger la aportación

de estos segmentos,

$$\mathbf{N}(s) \Rightarrow [\delta[n]] \cdot [u^n(t)] \Rightarrow \tilde{\mathbf{N}} = [1] \quad (2.53a)$$

$$d_s \mathbf{N}(s) \Rightarrow [-\delta[n-1] \ \delta[n]] \cdot [u^{n-1}(t) \ u^n(t)]^T \Rightarrow \tilde{\mathbf{N}}_s = [-1 \ 1] \quad (2.53b)$$

$$d_{ss} \mathbf{N}(s) \Rightarrow [\delta[n-1] \ -2\delta[n] \ \delta[n+1]] \cdot [u^{n-1}(t) \ u^n(t) \ u^{n+1}(t)]^T \Rightarrow \tilde{\mathbf{N}}_{ss} = [1 \ -2 \ 1] \quad (2.53c)$$

donde $\tilde{\mathbf{N}}$, $\tilde{\mathbf{N}}_s$ y $\tilde{\mathbf{N}}_{ss}$ representan las aproximaciones discretas a las integrales de las funciones de forma de las expresiones $\mathbf{N}(s)$, $d_s \mathbf{N}(s)$ y $d_{ss} \mathbf{N}(s)$. La Figura 2.15 muestra los pesos utilizados para el cálculo de la variable u^n para cada una de las matrices elementales $\mathbf{M}^e$, $\mathbf{C}^e$, $\mathbf{K}_\alpha^e$ y $\mathbf{K}_\beta^e$.

Figura 2.15.: Pesos que aparecen en los vectores correspondientes con las matrices elementales: (a) $\mathbf{M}^e$ y $\mathbf{C}^e$; (b) $\mathbf{K}_\alpha^e$; (c) $\mathbf{K}_\beta^e$. El nodo a calcular en cada iteración se indica mediante $\odot$ mientras que los nodos intervinientes en el cálculo se muestran con el símbolo $\circ$.

A partir de estas aproximaciones, la ecuación (B.10) y suponiendo los parámetros μ_σ , γ_σ , α_σ y β_σ constantes dentro de cada segmento σ , se pueden obtener fácilmente las matrices elementales para el cálculo unidimensional detalladas en la expresión (B.43).

Con estas matrices elementales se pueden intentar aplicar la ecuación del movimiento a cada segmento mediante el peso $u^n(t)$ que define la función en dicho segmento. Esto es válido para las matrices $\mathbf{M}^e$ y $\mathbf{C}^e$. No obstante, para la matriz de rigidez vemos que es necesario considerar también los pesos de segmentos contiguos, $[u^{n-1}(t)u^n(t)]^T$ para la matriz $\mathbf{K}_\alpha^e$ y $[u^{n-1}(t)u^n(t)u^{n+1}(t)]^T$ para la matriz $\mathbf{K}_\beta^e$. Así, al igual que en el caso de los B-splines, la implementación práctica se realiza uniendo los subsistemas de los diferentes segmentos en un sistema global. En este sistema aparecerán todos los pesos de las funciones base $\mathbf{u}^n(t) = [u^0(t) \ \dots \ u^{N_1-1}(t)]^T$. Para la construcción del sistema global se procede de forma análoga al procedimiento descrito en la Sección 2.2.2, por lo que a continuación se describe de forma resumida este proceso.

En primer lugar se interpreta la ecuación del movimiento de cada segmento σ , como un subsistema de ecuaciones diferenciales determinado por $\mathbf{M}^{e:\sigma}$, $\mathbf{C}^{e:\sigma}$ y $\mathbf{K}^{e:\sigma}$. Suponemos que μ , γ , α y β son idénticos en todos los segmentos, lo que conduce a que $\mathbf{M}^e = \mathbf{M}^{e:\sigma}$, $\mathbf{C}^e = \mathbf{C}^{e:\sigma}$ y $\mathbf{K}^e = \mathbf{K}^{e:\sigma} \ \forall \sigma$. Se reordena en cada segmento las ecuaciones del sistema para que en cada subsistema aparezcan todos los pesos $\mathbf{u}^n(t)$ del sistema global. Tras este proceso se procede a la adición de todos los subsistemas, obteniendo de forma directa las matrices globales del sistema $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$, como el sumatorio de cada una de las matrices elementales transformadas de los diferentes segmentos.

Este proceso se puede generalizar para las diferentes matrices de forma introduciendo las matrices de ensamblaje [Liang et al., 2006]. Para el caso de diferencias finitas, suponiendo un modelo formado por n_e elementos y N_1 nodos⁹, las matrices de ensamblaje para el segmento σ , con $0 \leq \sigma \leq N_1 - 1$, quedan definidas por,

$$(\mathbf{G}_M^\sigma)_{1k} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = k, \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (2.54a)$$

con dimensiones $1 \times N_1$,

$$(\mathbf{G}_C^\sigma)_{1k} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = k, \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (2.54b)$$

cuyas dimensiones son asimismo $1 \times N_1$. Por otra parte, tenemos,

$$(\mathbf{G}_\alpha^\sigma)_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (j + \sigma) \bmod N_1 = k, \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (2.54c)$$

donde $0 \leq j \leq 1$ y, por tanto, sus dimensiones son $2 \times N_1$,

$$(\mathbf{G}_\beta^\sigma)_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (j + \sigma) \bmod N_1 = k, \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (2.54d)$$

donde $0 \leq j \leq 2$ con dimensiones $3 \times N_1$ y por último,

$$(\mathbf{G}_q^\sigma)_{1k} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = k, \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (2.54e)$$

con dimensiones $1 \times N_1$. Las matrices globales se ensamblan a partir de las matrices elementales y las matrices de composición detalladas en (B.13).

Las matrices globales resultantes, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ tienen unas dimensiones $N_1 \times N_1$ y la matriz $\mathbf{q}$, $N_1 \times 1$, las cuales son acordes con los N_1 parámetros del array global de parámetros $\mathbf{u}$. Así, aplicando (2.20) estas matrices permiten calcular directamente la ecuación del movimiento al sistema global para cada coordenada i del modelo deformable unidimensional.

En la anterior formulación con diferencias finitas, disponemos de una construcción uniforme con elementos finitos para ambas funciones de forma tanto B-splines como diferencias finitas para el caso de modelos deformables unidimensionales.

Vamos a establecer un conjunto de suposiciones para simplificar el proceso iterativo de la ecuación del movimiento con estas matrices globales. Como hemos indicado previamente en esta

⁹Cuando el modelo es cerrado $N_1 = n_e$. Éste es el caso considerado en esta sección.

misma sección, es habitual asumir que la densidades de masa y rozamiento, así como los parámetros de elasticidad y rigidez, no varían a lo largo del modelo. Esto es, $\mu_\sigma = \mu$, $\gamma_\sigma = \gamma$, $\alpha_\sigma = \alpha$ y $\beta_\sigma = \beta$. También estamos suponiendo en esta sección que el modelo deformable es cerrado. Así, uniendo (B.13) y (B.43) el cálculo de estas matrices conduce a las matrices (B.44).

Podemos observar que también para el caso de diferencias finitas estas matrices son circulares y quedan completamente definidas por su primera fila, propiedad que se utilizará en la Sección 2.3 para simplificar el proceso de cálculo en el dominio de la frecuencia.

Formulación en el caso bidimensional. Para más de una dimensión, cada función coordenada del modelo deformable se puede construir como una suma ponderada de funciones base $\delta(\mathbf{s})$,

$$v(\mathbf{s}, t) = \sum_{\mathbf{n}} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{n}_{\mathbf{L}}) u^{\mathbf{n}}(t), \quad (2.55)$$

donde $\mathbf{n}_{\mathbf{L}} = [n_1 L_1, \dots, n_e L_e]$ es el vector del producto de los índices de los segmentos en cada dimensión por la longitud de dichos segmentos. En caso de que los segmentos tengan la misma longitud L en todas las dimensiones, esta expresión se simplifica como $\mathbf{n}_{\mathbf{L}} = L[n_1, \dots, n_e]$. El vector $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_e]$ representa las variables paramétricas espaciales del modelo y $u^{\mathbf{n}}(t)$ son los pesos aplicados a dichas funciones base [Blake y Isard, 1998]. Habitualmente se fija para los segmentos longitud unidad en todas las dimensiones coincidiendo, por tanto, el número del segmento $\mathbf{n}$ con su posición según la variable $\mathbf{s}$.

Por la propiedad de separabilidad de la función delta de Dirac, podemos representar cada función base multidimensional como el sumatorio del producto de las funciones base unidimensionales que contribuyen en dicho elemento. Así pues, (2.55) puede escribirse sin pérdida de generalidad como,

$$v(\mathbf{s}, t) = \sum_{\mathbf{n}} \delta(s_1 - n_1 L_1) \cdots \delta(s_e - n_e L_e) u^{\mathbf{n}}(t), \quad (2.56)$$

simplificándose para el caso bidimensional como,

$$v(s_1, s_2, t) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \delta(s_1 - n_1 L_1) \delta(s_2 - n_2 L_2) u^{n_1, n_2}(t) \quad (2.57)$$

donde $u^{n_1, n_2}(t)$ representa la matriz bidimensional de parámetros del modelo,

$$\mathbf{u}^{n_1, n_2}(t) = \begin{bmatrix} u^{0,0}(t) & \cdots & u^{0, N_2-1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^{N_1-1, 0}(t) & \cdots & u^{N_1-1, N_2-1}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

De forma general, la matriz de parámetros tendrá siempre el mismo número de dimensiones que el modelo deformable. Notar que al igual que en el caso de los B-splines (véase Sección 2.2.3), la

propiedad de separabilidad se puede aplicar a las funciones base pero en cambio no es aplicable a los pesos, los cuales afectan a las funciones base en todas las dimensiones.

Limitaremos en esta sección el modelo deformable a un modelo bidimensional. La Figura 2.16 muestra un ejemplo de obtención de la función bidimensional $v(s_1, s_2, t)$ a partir de la composición de $N_1 = N_2 = 8$ funciones base. En esta figura se puede observar que para diferencias finitas, el soporte de cada función base abarcará un sólo segmento bidimensional, al contrario que con B-splines de orden b cuya función base abarca $b + 1$ segmentos en cada dimensión, es decir una malla de $b \cdot b$ segmentos.

Para obtener la ecuación del movimiento global del modelo deformable (2.20) calculamos en primer lugar las ecuaciones del movimiento para cada elemento. Este proceso se realiza aplicando (B.10) a las funciones base $\mathbf{N}(s_1, s_2)$. Como se indica en la Sección 2.2.1, dicha expresión sólo es válida, si se puede descomponer $v(s_1, s_2, t)$ como el producto escalar de dos vectores $\mathbf{N}(s_1, s_2)$ y $u^{n_1, n_2}(t)$. En el caso de diferencias finitas aplicado a un segmento tal y como indica (2.57), sí es posible esta formulación sin más que identificar,

$$\mathbf{N}(s_1, s_2) = \delta(s_1 - n_1 L_1) \delta(s_2 - n_2 L_2). \quad (2.59)$$

Así, supondremos para la obtención de las matrices elementales un determinado segmento genérico v^{σ_1, σ_2} definido por,

$$v(s_1, s_2, t)^{\sigma_1, \sigma_2} = \delta(s_1 - n_1 L_1) \delta(s_2 - n_2 L_2) u^{n_1, n_2}(t), \quad (2.60)$$

particularizando posteriormente para cada segmento mediante las variables pesos u correspondientes.

Para aplicar las funciones (2.60) a la ecuación (B.10), tenemos que aproximar estas funciones de forma por una delta discreta bidimensional. Asimismo aproximaremos sus primeras derivadas parciales por las correspondientes diferencias regresivas y segundas derivadas parciales por las correspondientes diferencias centrales,

$$\mathbf{N}(s_1, s_2) = \delta(s_1) \delta(s_2) \Rightarrow \delta[n_1] \delta[n_2] \quad (2.61a)$$

$$\partial_{s_1} (\delta(s_1) \delta(s_2)) \Rightarrow \frac{\delta[n_2]}{\Delta s_1} (\delta[n_1] - \delta[n_1 - 1]) = -\delta[n_1 - 1] \delta[n_2] + \delta[n_1] \delta[n_2] \quad (2.61b)$$

$$\partial_{s_2} (\delta(s_1) \delta(s_2)) \Rightarrow \frac{\delta[n_1]}{\Delta s_2} (\delta[n_2] - \delta[n_2 - 1]) = -\delta[n_1] \delta[n_2 - 1] + \delta[n_1] \delta[n_2] \quad (2.61c)$$

$$\begin{aligned} \partial_{s_1 s_1} (\delta(s_1) \delta(s_2)) &\Rightarrow \frac{\delta[n_2]}{(\Delta s_1)^2} (\delta[n_1 + 1] - 2\delta[n_1] + \delta[n_1 - 1]) = \\ &= \delta[n_1 - 1] \delta[n_2] - 2\delta[n_1] \delta[n_2] + \delta[n_1 + 1] \delta[n_2] \end{aligned} \quad (2.61d)$$

$$\begin{aligned} \partial_{s_2 s_2} (\delta(s_1) \delta(s_2)) &\Rightarrow \frac{\delta[n_1]}{(\Delta s_2)^2} (\delta[n_2 + 1] - 2\delta[n_2] + \delta[n_2 - 1]) = \\ &= \delta[n_1] \delta[n_2 - 1] - 2\delta[n_1] \delta[n_2] + \delta[n_1] \delta[n_2 + 1], \end{aligned} \quad (2.61e)$$

Figura 2.16.: Construcción de la función $v(s_1, s_2, t)$ a partir de la composición de $N = N_1 N_2 = 64$ funciones base $\delta(s_1 - n_1 L_1) \delta(s_2 - n_2 L_2)$ ponderadas por las variables del nodo $u^{n_1, n_2}(t)$ correspondientes. Notar que $L_1 = L_2 = L = 1$. Dado que $v(s_1, s_2, t)$ es un modelo cerrado para ambas dimensiones, los valores de los nodos extremos son idénticos. Para ilustrar la composición de la función base bidimensional como producto de funciones base unidimensionales, se resalta a modo de ejemplo la función base $\delta(s_1 - 3) \delta(s_2 - 2)$.

donde ∂_{s_i} y $\partial_{s_i s_i}$ son respectivamente la primera y segunda derivada parcial con respecto a la variable dimensional s_i , Δs_i es la distancia entre diferencias finitas para la dimensión i que coincide con la longitud del segmento en dicha dimensión. Habitualmente se fija longitud unidad para los segmentos en ambas dimensiones.

Para el cálculo de las matrices elementales mediante la ecuación (B.10), aplicaremos las aproximaciones anteriores. Y por tanto, la matriz de forma empleada en dichas expresiones $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ será también una aproximación discreta. La matriz $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ vinculada a las matrices $\mathbf{M}^e$ y $\mathbf{C}^e$ tendrá tamaño unidad dado que la función de forma $\delta[n_1]\delta[n_2]$ queda circunscrita sólo a su segmento correspondiente. En cambio, en el cálculo de las matrices $\mathbf{K}_\alpha^e$ y $\mathbf{K}_\beta^e$ aparecen respectivamente las primeras y segundas derivadas parciales de la función de forma,

$$\mathbf{N}(\mathbf{s}) \Rightarrow \begin{cases} [\delta[n_1]\delta[n_2]] \cdot [u^{n_1, n_2}(t)] \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{N}} = [1] \end{cases} \quad (2.62a)$$

$$\partial_{s_1} \mathbf{N}(\mathbf{s}) \Rightarrow \begin{cases} [-\delta[n_1 - 1]\delta[n_2] \quad \delta[n_1]\delta[n_2]] \cdot [u^{n_1-1, n_2}(t) \quad u^{n_1, n_2}(t)]^\top \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{N}}_{s_1} = [-1 \quad 1] \end{cases} \quad (2.62b)$$

$$\partial_{s_1 s_1} \mathbf{N}(\mathbf{s}) \Rightarrow \begin{cases} [\delta[n_1 - 1]\delta[n_2] \quad -2\delta[n_1]\delta[n_2] \quad \delta[n_1 + 1]\delta[n_2]] \cdot [u^{n_1-1, n_2}(t) \quad u^{n_1, n_2}(t) \quad u^{n_1+1, n_2}(t)]^\top \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{N}}_{s_1 s_1} = [1 \quad -2 \quad 1] \end{cases} \quad (2.62c)$$

$$\partial_{s_2} \mathbf{N}(\mathbf{s}) \Rightarrow \begin{cases} [-\delta[n_1]\delta[n_2 - 1] \quad \delta[n_1]\delta[n_2]] \cdot [u^{n_1, n_2-1}(t) \quad u^{n_1, n_2}(t)]^\top \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{N}}_{s_2} = [-1 \quad 1] \end{cases} \quad (2.62d)$$

$$\partial_{s_2 s_2} \mathbf{N}(\mathbf{s}) \Rightarrow \begin{cases} [\delta[n_1]\delta[n_2 - 1] \quad -2\delta[n_1]\delta[n_2] \quad \delta[n_1]\delta[n_2 + 1]] \cdot [u^{n_1, n_2-1}(t) \quad u^{n_1, n_2}(t) \quad u^{n_1, n_2+1}(t)]^\top \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{N}}_{s_2 s_2} = [1 \quad -2 \quad 1] \end{cases} \quad (2.62e)$$

donde $\tilde{\mathbf{N}}$, $\tilde{\mathbf{N}}_{s_i}$ y $\tilde{\mathbf{N}}_{s_i s_i}$ representan las aproximaciones discretas a las integrales de las funciones de forma de las expresiones $\mathbf{N}(\mathbf{s})$, $\partial_{s_i} \mathbf{N}(\mathbf{s})$ y $\partial_{s_i s_i} \mathbf{N}(\mathbf{s})$. A partir de estas aproximaciones, la ecuación (B.10) y suponiendo los parámetros μ_{σ_1, σ_2} , $\gamma_{\sigma_1, \sigma_2}$, $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2}$ y $\beta_{\sigma_1, \sigma_2}$ constantes dentro de cada segmento, donde $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ indica el número de segmento, se pueden obtener fácilmente las matrices elementales para el cálculo bidimensional.

Las matrices elementales $\mathbf{M}^e$ y $\mathbf{C}^e$ tienen tamaño unidad debido a que la matriz $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ tiene también este tamaño. Como se puede observar en (2.62a), la función de forma queda circunscrita sólo a su segmento y, por tanto, sólo se ve ponderada por el peso u^{n_1, n_2} correspondiente. En cambio, en el cálculo de las matrices $\mathbf{K}_\alpha^e$ y $\mathbf{K}_\beta^e$ aparecen respectivamente las aproximaciones de las primeras y segundas derivadas parciales de la función de forma. Estas aproximaciones incluyen, en cada dimensión, términos de 2 y 3 segmentos como se observa en (2.62b-2.62e). Así, cada una de las aproximaciones de $\partial_{s_i} \mathbf{N}(\mathbf{s})$ y $\partial_{s_i s_i} \mathbf{N}(\mathbf{s})$ tendrán como dimensiones 2×1 y 3×1 para recoger la aportación de estos segmentos.

No obstante, al aplicar en el caso bidimensional las aproximaciones discretas (2.62b) y (2.62d) a la ecuación (B.10d), vemos que en la matriz elemental $\mathbf{K}_\alpha^e$ aparecen los pesos $[u^{n_1-1,n_2} \ u^{n_1,n_2-1} \ u^{n_1,n_2}]$, es decir, pesos procedentes de las aproximaciones para las dos dimensiones. De igual forma, al aplicar (2.62c) y (2.62e) a la ecuación (B.10e) para calcular $\mathbf{K}_\beta^e$ aparecen los pesos $[u^{n_1-1,n_2} \ u^{n_1,n_2-1} \ u^{n_1,n_2} \ u^{n_1+1,n_2} \ u^{n_1,n_2+1}]$. La Figura 2.17 muestra los pesos utilizados para el cálculo de la variable u^{n_1,n_2} para cada una de las matrices elementales $\mathbf{M}^e$, $\mathbf{C}^e$, $\mathbf{K}_\alpha^e$ y $\mathbf{K}_\beta^e$.

Para obtener una formulación compacta, similar a la obtenida para el caso de los B-splines, se reordenan estos pesos en forma vectorial de forma análoga a (2.42). Asimismo, con el fin de dotar de una mayor regularidad y simplificación en las matrices de composición, se incluyen en estos vectores el resto de pesos mostrados en dicha Figura 2.17. Estos pesos adicionales serán multiplicados por elementos nulos de las matrices elementales. Por tanto, su aportación será nula en el cálculo final, pero a cambio van a proporcionar regularidad en la formulación de las matrices globales del modelo.

Figura 2.17.: Pesos que aparecen en los vectores correspondientes con las matrices elementales: (a) $\mathbf{M}^e$ y $\mathbf{C}^e$; (b) $\mathbf{K}_\alpha^e$; (c) $\mathbf{K}_\beta^e$. El nodo a calcular en cada iteración se indica mediante $\odot$, los nodos intervinientes en el cálculo se muestran con $\circ$ y el símbolo $\bullet$ indica los nodos con aportación nula al cálculo.

De esta forma, para cada una de las matrices elementales los pesos a incluir serán,

$$\mathbf{u}_M(t) = \mathbf{u}_C(t) = [u^{n_1,n_2}(t)], \quad (2.63a)$$

$$\mathbf{u}_\alpha(t) = [u^{n_1-1,n_2-1}(t) \ u^{n_1-1,n_2}(t) \ u^{n_1,n_2-1}(t) \ u^{n_1,n_2}(t)], \quad (2.63b)$$

$$\mathbf{u}_\beta(t) = [u^{n_1-1,n_2-1}(t) \ u^{n_1-1,n_2}(t) \ u^{n_1-1,n_2+1}(t) \ u^{n_1,n_2-1}(t) \ u^{n_1,n_2}(t) \ u^{n_1,n_2+1}(t) \ u^{n_1+1,n_2-1}(t) \ u^{n_1+1,n_2}(t) \ u^{n_1+1,n_2+1}(t)], \quad (2.63c)$$

$$\mathbf{u}_\beta(t) = [u^{n_1-1,n_2-1}(t) \ u^{n_1-1,n_2}(t) \ u^{n_1-1,n_2+1}(t) \ u^{n_1,n_2-1}(t) \ u^{n_1,n_2}(t) \ u^{n_1,n_2+1}(t) \ u^{n_1+1,n_2-1}(t) \ u^{n_1+1,n_2}(t) \ u^{n_1+1,n_2+1}(t)], \quad (2.63d)$$

donde u indica los pesos que intervienen de forma activa en el cálculo y u corresponde a los pesos adyacentes con aportación nula.

Con estos vectores de pesos, las matrices elementales $\mathbf{M}^e$ y $\mathbf{C}^e$ tendrán tamaño unidad, $\mathbf{K}_\alpha^e$ unas dimensiones de 4×4 y $\mathbf{K}_\beta^e$ tamaño 9×9 . Aplicando las aproximaciones (2.62) con los pesos ordenados según (2.63) a la expresión de cálculo (B.10) se pueden calcular la expresiones elementales, $\mathbf{M}^{e:\sigma_1,\sigma_2}$, $\mathbf{C}^{e:\sigma_1,\sigma_2}$ y $\mathbf{K}^{e:\sigma_1,\sigma_2}$ detalladas en (B.45-B.48).

Al igual que en el caso unidimensional, con estas matrices elementales se puede intentar aplicar la ecuación del movimiento a cada segmento mediante el peso $u^{n_1,n_2}(t)$ que define la función en el segmento $\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Esto es válido para las matrices $\mathbf{M}^e$ y $\mathbf{C}^e$. No obstante, para la matriz de rigidez vemos que es necesario considerar también los pesos de segmentos contiguos, es decir, los indicados por (2.63c) para la matriz $\mathbf{K}_\alpha^e$ y (2.63d) para la matriz $\mathbf{K}_\beta^e$. Así, al igual que en el caso de los B-splines, la implementación práctica se realiza uniando los subsistemas de los diferentes segmentos en un sistema global. En este caso, los segmentos serán bidimensionales produciéndose el solape en cada una de las dos dimensiones. En el sistema global aparecerán todos los pesos de las funciones base $u^{n_1,n_2}(t)$, en un vector con ordenación idéntica a (2.43). Para la construcción del sistema global se procede de forma similar al procedimiento descrito en la Sección 2.2.2, por lo que se resume aquí este proceso.

En primer lugar se interpreta la ecuación del movimiento de cada segmento $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, como un subsistema de ecuaciones diferenciales determinado por $\mathbf{M}^{e:\sigma_1,\sigma_2}$, $\mathbf{C}^{e:\sigma_1,\sigma_2}$ y $\mathbf{K}^{e:\sigma_1,\sigma_2}$. Suponemos que μ , γ , α y β son idénticos en todos los segmentos, lo que conduce a que $\mathbf{M}^e = \mathbf{M}^{e:\sigma_1,\sigma_2}$, $\mathbf{C}^e = \mathbf{C}^{e:\sigma_1,\sigma_2}$ y $\mathbf{K}^e = \mathbf{K}^{e:\sigma_1,\sigma_2} \forall \sigma_1, \sigma_2$. Se reordena en cada segmento las ecuaciones del sistema para que en cada subsistema aparezcan todos los pesos $u^{n_1,n_2}(t)$ del sistema global. Tras este proceso se procede a la adición de todos los subsistemas, obteniendo de forma directa las matrices globales del sistema $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$, como el sumatorio de cada una de las matrices elementales transformadas de los diferentes segmentos.

Al igual que en el caso unidimensional, podemos generalizar el proceso para diferentes matrices de forma mediante las matrices de ensamblaje. En este caso, las matrices deben recoger los segmentos afectados por las aproximaciones de las derivadas parciales para cada una de las dos dimensiones y además se debe tener en cuenta que el vector de pesos, aunque en la formulación se utiliza en forma vectorial, en realidad se corresponde con información bidimensional.

Para el caso de funciones de forma bidimensionales con diferencias finitas en un modelo con $N = N_1 N_2$ elementos¹⁰, las matrices de ensamblaje para el segmento $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, con $0 \leq \sigma_1 \leq N_1 - 1$ y $0 \leq \sigma_2 \leq N_2 - 1$ se definen como el producto de Kronecker entre las matrices de composición de

¹⁰ Al igual que con el resto de modelos descritos en esta sección, supondremos modelo cerrado en ambas dimensiones. Por lo tanto, el número de elementos coincide con el número de nodos.

cada dimensión. Esto es, $\mathbf{G}_M^{\sigma_1, \sigma_2} = \mathbf{G}_M^{\sigma_1} \otimes \mathbf{G}_M^{\sigma_2}$, $\mathbf{G}_C^{\sigma_1, \sigma_2} = \mathbf{G}_C^{\sigma_1} \otimes \mathbf{G}_C^{\sigma_2}$, $\mathbf{G}_\alpha^{\sigma_1, \sigma_2} = \mathbf{G}_\alpha^{\sigma_1} \otimes \mathbf{G}_\alpha^{\sigma_2}$, $\mathbf{G}_\beta^{\sigma_1, \sigma_2} = \mathbf{G}_\beta^{\sigma_1} \otimes \mathbf{G}_\beta^{\sigma_2}$ y $\mathbf{G}_q^{\sigma_1, \sigma_2} = \mathbf{G}_q^{\sigma_1} \otimes \mathbf{q}_q^{\sigma_2}$.

Las siguientes expresiones detallan los valores de estas matrices de composición,

$$(\mathbf{G}_M^{\sigma_1, \sigma_2})_{1n} = \begin{cases} \mathbf{G}_M^{\sigma_2} & \text{si } \sigma_1 = n, \\ \mathbf{0} & \text{resto,} \end{cases} \quad (\mathbf{G}_M^{\sigma_2})_{1k} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_2 = k, \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (2.64a)$$

donde $\mathbf{G}_M^{\sigma_2}$ es la matriz de composición unidimensional con unas dimensiones de $1 \times N_2$ y, por tanto, la matriz de composición bidimensional $\mathbf{G}_M^{\sigma_1, \sigma_2}$ tendrá unas dimensiones de $1 \times (N_1 N_2)$,

$$(\mathbf{G}_C^{\sigma_1, \sigma_2})_{1n} = \begin{cases} \mathbf{G}_C^{\sigma_2} & \text{si } \sigma_1 = n, \\ \mathbf{0} & \text{resto,} \end{cases} \quad (\mathbf{G}_C^{\sigma_2})_{1k} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_2 = k, \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (2.64b)$$

donde $\mathbf{G}_C^{\sigma_2}$ tiene las dimensiones de $1 \times N_2$ y, por tanto, $\mathbf{G}_C^{\sigma_1, \sigma_2}$ tendrá tamaño $1 \times (N_1 N_2)$,

$$(\mathbf{G}_\alpha^{\sigma_1, \sigma_2})_{mm} = \begin{cases} \mathbf{G}_\alpha^{\sigma_2} & \text{si } (m + \sigma_1) \bmod N_1 = n, \\ \mathbf{0} & \text{resto,} \end{cases} \quad (\mathbf{G}_\alpha^{\sigma_2})_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (j + \sigma_2) \bmod N_2 = k, \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (2.64c)$$

donde $0 \leq m \leq 1$ y $0 \leq j \leq 1$. Por tanto, las dimensiones de la matriz compuesta unidimensional $\mathbf{G}_\alpha^{\sigma_2}$ son $2 \times N_2$, y la matriz compuesta bidimensional $\mathbf{G}_\alpha^{\sigma_1, \sigma_2}$ tiene un tamaño $4 \times (N_1 N_2)$.

$$(\mathbf{G}_\beta^{\sigma_1, \sigma_2})_{mm} = \begin{cases} \mathbf{G}_\beta^{\sigma_2} & \text{si } (m + \sigma_1) \bmod N_1 = n, \\ \mathbf{0} & \text{resto,} \end{cases} \quad (\mathbf{G}_\beta^{\sigma_2})_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (j + \sigma_2) \bmod N_2 = k, \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (2.64d)$$

donde $0 \leq m \leq 2$ y $0 \leq j \leq 2$. Por tanto, las dimensiones de $\mathbf{G}_\alpha^{\sigma_2}$ son $3 \times N_2$, y $\mathbf{G}_\alpha^{\sigma_1, \sigma_2}$ tiene un tamaño $9 \times (N_1 N_2)$.

$$(\mathbf{G}_q^{\sigma_1, \sigma_2})_{1n} = \begin{cases} \mathbf{G}_q^{\sigma_2} & \text{si } \sigma_1 = n, \\ \mathbf{0} & \text{resto,} \end{cases} \quad (\mathbf{G}_q^{\sigma_2})_{1k} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_2 = k, \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (2.64e)$$

donde $\mathbf{G}_q^{\sigma_2}$ tiene un tamaño de $1 \times N_2$ y, $\mathbf{G}_q^{\sigma_1, \sigma_2}$ dimensiones $1 \times (N_1 \cdot N_2)$. Notar que estas matrices de composición son válidas para la construcción por filas del vector de pesos según indica (2.63). La ordenación por columnas sería igualmente correcta, pero habría que cambiar el orden de las matrices en el producto de Kronecker.

Las matrices globales $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ y el vector de fuerzas $\mathbf{q}$ se pueden ensamblar a partir de cada una de las matrices elementales, sus correspondientes matrices de composición (2.64) y las expresiones indicadas en (B.14).

Notar que las dimensiones de las matrices elementales concuerdan con las matrices de composición, generando matrices globales de idénticas dimensiones. Así, las matrices globales $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ tienen un tamaño de $(N_1 N_2) \times (N_1 N_2)$ y el vector $\mathbf{q}$, $(N_1 N_2) \times 1$, las cuales son acordes con

los $N = N_1 N_2$ parámetros del array global de parámetros $\mathbf{u}^{n_1, n_2}$. Así, al igual que con el caso unidimensional, mediante (2.20) y estas matrices se puede calcular directamente la ecuación del movimiento del sistema global para cada coordenada i del modelo deformable bidimensional. Recordamos que en esta expresión, los pesos de las funciones base $\mathbf{u}^{n_1, n_2}$ se escriben en forma de vector columna.

Si comparamos estas expresiones con las obtenidas para el caso de *B-splines*, las cuales están descritas en el Anexo B.2.2, podemos comprobar que disponemos de una construcción uniforme con elementos finitos para ambas funciones de forma para los modelos deformables bidimensionales.

De nuevo, con el fin de simplificar el algoritmo iterativo, se establecen un conjunto de suposiciones. Se asume que las densidades de masa y rozamiento, así como los parámetros estáticos, elasticidad y rigidez, se mantienen constantes a lo largo del modelo. Esto es, $\mu_{\sigma_1, \sigma_2} = \mu$, $\gamma_{\sigma_1, \sigma_2} = \gamma$, $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2} = \alpha$ y $\beta_{\sigma_1, \sigma_2} = \beta \forall \sigma_1, \sigma_2$. Por otra parte, se añade el supuesto de que el modelo a emplear es cerrado para cada una de las dos dimensiones, postergando el caso de modelos abiertos para la Sección 5.2. Bajo estas condiciones, podemos calcular estas matrices mediante las expresiones (2.64), (B.14) y (B.45-B.48), disponiendo de su valor detallado en (B.49-B.52).

Estas matrices resultantes tienen unas dimensiones de $(N_1 N_2) \times (N_1 N_2)$. Al igual que con *B-splines*, estas matrices de bloques son circulantes y anidadas. Esto es, si dividimos estas matrices compuestas en $N_1 \times N_1$ submatrices de dimensiones $N_2 \times N_2$, se observa que la matrices globales quedan completamente definidas por la primera fila de las submatrices, cada una de las cuales, es a su vez una matriz circulante y definida, por tanto, por su primera fila. Esta propiedad de las matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ permite obtener una nueva aproximación a la formulación de los modelos, donde los pesos se reordenan con la forma matricial original. En la Sección 2.3 se detalla este procedimiento, lo que conduce en la Sección 3.1 a una conversión del proceso iterativo al dominio de la frecuencia.

Formulación en el caso multidimensional. En la presente Sección 2.2.3 se ha mostrado la formulación de la ecuación del movimiento para un modelo deformable uni- y bidimensional definido mediante diferencias finitas en el dominio del espacio. Este proceso, puede generalizarse de forma similar a mayores dimensiones.

Como hemos descrito en la Sección 2.2.2, partimos de un modelo deformable e -dimensional $\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$ definido por d funciones coordenadas, un vector de parámetros $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_e]$ y el tiempo t , el cual se puede descomponer en cada una de sus funciones coordenadas $v_i(\mathbf{s}, t)$ independientes

entre sí (véase Sección 2.1.2),

$$v_i(\mathbf{s}, t) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{n_e=0}^{N_e-1} v_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t) \quad (2.65)$$

donde $v_i(\mathbf{s}, t)$ es la función coordenada i del modelo $\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$ y $v_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t)$ es cada uno de los elementos finitos en que se descompone dicha función coordenada i . Suponiendo un modelo cerrado, la misma función de forma en todos los nodos y coordenadas y valores constantes de los parámetros dentro de los segmentos, los elementos finitos se pueden construir mediante,

$$v_i^{n_1, \dots, n_e}(\mathbf{s}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{s}) \mathbf{u}_i^{n_1, \dots, n_e}(t). \quad (2.66)$$

donde $\mathbf{N}$ es la función de forma y $\mathbf{u}$ es el vector de parámetros de cada elemento.

Aplicando este proceso a cada función coordenada¹¹ y sustituyendo la delta de Dirac como función de forma, cada función coordenada del modelo deformable se puede construir como una suma ponderada de funciones base $\delta(\mathbf{s})$,

$$v(\mathbf{s}, t) = \sum_{\mathbf{n}} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{n}_{\mathbf{L}}) u^{\mathbf{n}}(t), \quad (2.67)$$

donde $\mathbf{n}_{\mathbf{L}} = [n_1 L_1, \dots, n_e L_e]$ es el vector del producto de los índices de los segmentos en cada dimensión por la longitud de dichos segmentos. En caso de que los segmentos tengan la misma longitud L en todas las dimensiones, esta expresión se simplifica como $\mathbf{n}_{\mathbf{L}} = L[n_1, \dots, n_e]$. Habitualmente se fija para los segmentos longitud unidad en todas las dimensiones. El vector $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_e]$ representa las variables paramétricas espaciales del modelo y $u^{\mathbf{n}}(t)$ son los pesos aplicados a dichas funciones base [Blake y Isard, 1998].

Por la propiedad de separabilidad de la función delta de Dirac, podemos representar cada función coordenada multidimensional como el sumatorio de todos los elementos $\mathbf{n}$ del modelo. Cada elemento quedará definido como el producto de las funciones base unidimensionales y el peso que define dicho elemento. Así pues, (2.67) puede escribirse sin pérdida de generalidad como,

$$v(\mathbf{s}, t) = \sum_{\mathbf{n}} \delta(s_1 - n_1 \cdot L_1) \cdots \delta(s_e - n_e \cdot L_e) u^{\mathbf{n}}(t), \quad (2.68)$$

Notar que la propiedad de separabilidad se puede aplicar a las funciones base pero en cambio no es aplicable a los pesos, los cuales afectan a las funciones base en todas las dimensiones.

Tal y como se ha descrito en la Sección 2.2.2, para obtener la ecuación del movimiento para e dimensiones hay que sustituir (2.68) en (2.14). Con este fin, se aplica el método de Galerkin [Zienkiewicz et al., 2005] de forma similar al proceso descrito en el Anexo B.1. Así, se introduce una función de prueba arbitraria $w(\mathbf{s})$ y se calcula el residuo medio ponderado con la ecuación (B.2). Aplicando integración por partes para el número de dimensiones requeridas, y considerando que

¹¹Al igual que para una y dos dimensiones, omitimos a partir de este punto el subíndice i que indica la coordenada.

la función de prueba también se puede descomponer como una combinación lineal de funciones base $w(\mathbf{s}) = \mathbf{N}(\mathbf{s})\mathbf{c}$, se pueden obtener las matrices de las ecuaciones del movimiento (2.20). Se calcula en primer lugar las ecuaciones del movimiento para cada elemento. Observar que al igual que en el caso bidimensional, para poder realizar este proceso es necesario que tanto los arrays de vectores de forma $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ como el array de parámetros $\mathbf{u}_i(t)$ puedan escribirse de forma vectorial. Esto es, que $v(\mathbf{s}, t)$ sea una función escalar de varias variables independientes que se pueda obtener como el producto escalar de los vectores $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ y $\mathbf{u}_i(t)$.

En el caso de diferencias finitas sí es posible esta formulación sin más que identificar,

$$\mathbf{N}(\mathbf{s}) = \delta(s_1 - n_1 L_1) \cdots \delta(s_e - n_e L_e), \quad (2.69)$$

como se deduce de (2.68). Así, supondremos para la obtención de las matrices elementales un determinado segmento genérico $v(\mathbf{s}, t)^{\bar{\sigma}}$ definido por,

$$v(\mathbf{s}, t)^{\bar{\sigma}} = \delta(s_1 - n_1 L_1) \cdots \delta(s_e - n_e L_e) u^n(t), \quad (2.70)$$

particularizando posteriormente para cada segmento mediante las variables pesos $u(t)$ correspondientes. De forma similar a los casos en una y dos dimensiones, para aplicar las funciones (2.71) a la ecuación (B.10), hay que aproximar estas funciones de forma por una delta discreta multidimensional. Asimismo, es necesario aproximar sus primeras y segundas derivadas parciales por las correspondientes diferencias.

Aplicaremos las aproximaciones anteriores en el cálculo de las matrices elementales, y por tanto, la matriz de forma empleada en dichas expresiones $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ será también una aproximación discreta. Para las matrices $\mathbf{M}^e$ y $\mathbf{C}^e$ la matriz $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ tendrá tamaño unidad dado que la función de forma $\delta[n_1] \cdots \delta[n_e]$ queda circunscrita sólo a su segmento correspondiente. En cambio, en el cálculo de las matrices $\mathbf{K}_\alpha^e$ y $\mathbf{K}_\beta^e$ tendrá mayores dimensiones puesto que aparecen respectivamente las primeras y segundas derivadas parciales con respecto a las diferentes variables paramétricas n_j . Notar que al igual que en los casos de menores dimensiones, las primeras derivadas parciales se aproximan por las correspondientes diferencias regresivas y segundas derivadas parciales por las correspondientes segundas diferencias centrales.

Con el fin de conseguir una regularidad en la formulación similar a la obtenida para el caso de los B-splines, se va a reordenar estos pesos en forma vectorial con la ordenación lexicográfica indicada en (A.3) de forma análoga a (2.42). Asimismo, al igual que en el caso bidimensional, en estos vectores se incluyen los pesos que aparecen en las aproximaciones de las derivadas y los pesos adyacentes a éstos. La aportación de estos pesos adicionales será nula en las expresiones, pero proporciona regularidad en la formulación final. Por ejemplo, para 3 dimensiones los pesos

a incluir en los vectores que afectan a las matrices elementales serán,

$$\mathbf{u}_M(t) = \mathbf{u}_C(t) = [\mathbf{u}^{n_1, n_2, n_3}(t)], \quad (2.71a)$$

$$\mathbf{u}_\alpha(t) = \begin{bmatrix} u^{n_1-1, n_2-1, n_3-1}(t) & u^{n_1-1, n_2-1, n_3}(t) & u^{n_1-1, n_2, n_3-1}(t) & u^{n_1-1, n_2, n_3}(t) \\ u^{n_1, n_2-1, n_3-1}(t) & u^{n_1, n_2-1, n_3}(t) & u^{n_1, n_2, n_3-1}(t) & u^{n_1, n_2, n_3}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.71b)$$

$$\mathbf{u}_\beta(t) = \begin{bmatrix} u^{n_1-1, n_2-1, n_3-1}(t) & u^{n_1-1, n_2-1, n_3}(t) & u^{n_1-1, n_2-1, n_3+1}(t) & \\ & u^{n_1-1, n_2, n_3-1}(t) & u^{n_1-1, n_2, n_3}(t) & u^{n_1-1, n_2, n_3+1}(t) \\ & u^{n_1-1, n_2+1, n_3-1}(t) & u^{n_1-1, n_2+1, n_3}(t) & u^{n_1-1, n_2+1, n_3+1}(t) \\ & u^{n_1, n_2-1, n_3-1}(t) & u^{n_1, n_2-1, n_3}(t) & u^{n_1, n_2-1, n_3+1}(t) \\ & u^{n_1, n_2, n_3-1}(t) & u^{n_1, n_2, n_3}(t) & u^{n_1, n_2, n_3+1}(t) \\ & u^{n_1, n_2+1, n_3-1}(t) & u^{n_1, n_2+1, n_3}(t) & u^{n_1, n_2+1, n_3+1}(t) \\ & u^{n_1+1, n_2-1, n_3-1}(t) & u^{n_1+1, n_2-1, n_3}(t) & u^{n_1+1, n_2-1, n_3+1}(t) \\ & u^{n_1+1, n_2, n_3-1}(t) & u^{n_1+1, n_2, n_3}(t) & u^{n_1+1, n_2, n_3+1}(t) \\ & u^{n_1+1, n_2+1, n_3-1}(t) & u^{n_1+1, n_2+1, n_3}(t) & u^{n_1+1, n_2+1, n_3+1}(t) \end{bmatrix} \quad (2.71c)$$

donde $\mathbf{u}$ indica los pesos que intervienen de forma activa en el cálculo y u corresponde a los pesos adyacentes con aportación nula para calcular $\mathbf{u}_M(t)$, $\mathbf{u}_C(t)$, $\mathbf{u}_\alpha(t)$ y $\mathbf{u}_\beta(t)$. La Figura 2.18 muestra la posición en el espacio tridimensional de estos pesos para cada una de las matrices elementales.

Figura 2.18.: Pesos que aparecen en los vectores correspondientes con las matrices elementales del modelo tridimensional: (a) $\mathbf{M}^e$ y $\mathbf{C}^e$; (b) $\mathbf{K}_\alpha^e$; (c) $\mathbf{K}_\beta^e$. El nodo a calcular en cada iteración se indica mediante $\odot$, los nodos intervinientes en el cálculo se muestran con $\circ$ y el símbolo $\bullet$ indica los nodos con aportación nula al cálculo.

Con estos vectores de pesos, las matrices elementales $\mathbf{M}^e$ y $\mathbf{C}^e$ tendrán tamaño unidad, $\mathbf{K}_\alpha^e$ unas dimensiones de $2^e \times 2^e$ y $\mathbf{K}_\beta^e$ tamaño $3^e \times 3^e$. Las matrices elementales se obtienen aplicando las aproximaciones con los pesos ordenados según (2.71) a la expresión de cálculo (B.10).

Al igual que con modelos de menores dimensiones, las matrices elementales $\mathbf{K}_\alpha^e$ y $\mathbf{K}_\beta^e$ afectan a varios segmentos de forma simultánea y por tanto, el modelo debe ser procesado conjuntamente uniendo los subsistemas de los diferentes segmentos en un sistema global. Con este fin, obtendremos las matrices de composición para poder determinar la posición del modelo deformable en su totalidad. En este caso, los segmentos serán e -dimensionales produciéndose el solape en cada una de las e dimensiones. En el sistema global aparecerán todos los pesos de las funciones base, en un vector con ordenación análoga a la de cada elemento. Por ejemplo, para 3 dimensiones esta ordenación sería,

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u^{0,0,0}(t) \dots u^{0,0,N_3-1}(t) u^{0,1,0}(t) \dots u^{0,1,N_3-1}(t) u^{0,2,0}(t) \dots u^{0,N_2-1,0}(t) \dots u^{0,N_2-1,N_3-1}(t) \\ u^{1,0,0}(t) \dots u^{1,0,N_3-1}(t) u^{1,1,0}(t) \dots u^{N_1-1,N_2-1,0}(t) \dots u^{N_1-1,N_2-1,N_3-1}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

Al igual que en el caso bidimensional esta ordenación no es única. Así, es posible tener varios vectores de pesos y funciones de forma, los cuales conducen a diferentes ecuaciones del movimiento, aunque todas con igual validez una vez definida la ordenación. Para superiores dimensiones el proceso de ordenación es análogo.

Generalizando el proceso de obtención de estas matrices, para el caso de diferencias finitas multidimensionales la matriz de composición para un determinado segmento $\bar{\sigma} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_e\}$ se calcula mediante,

$$\mathbf{G}^{\sigma_1, \dots, \sigma_e} = \mathbf{G}^{\sigma_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{G}^{\sigma_e}, \quad (2.73)$$

donde $\otimes$ representa el producto de Kronecker y $\mathbf{G}^{\sigma_j}$ corresponde con las diferentes matrices de composición obtenidas para diferencias finitas unidimensionales $\mathbf{G}_M^{\sigma_j}$, $\mathbf{G}_C^{\sigma_j}$, $\mathbf{G}_\alpha^{\sigma_j}$, $\mathbf{G}_\beta^{\sigma_j}$ ó $\mathbf{G}_q^{\sigma_j}$ definidas en el conjunto de ecuaciones (2.54). Esta expresión es válida para un reordenación de pesos y funciones de forma como la descrita en (2.72). Las matrices $\mathbf{G}_M^{\bar{\sigma}}$, $\mathbf{G}_C^{\bar{\sigma}}$ y $\mathbf{G}_q^{\bar{\sigma}}$ tienen un tamaño de $1 \times (N_1 \dots N_e)$, $\mathbf{G}_\alpha^{\bar{\sigma}}$ de $2^e \times (N_1 \dots N_e)$ y $\mathbf{G}_\beta^{\bar{\sigma}}$ de $3^e \times (N_1 \dots N_e)$.

Las matrices globales de este sistema e -dimensional se ensamblan mediante las expresiones descritas en (B.15), las matrices de composición calculadas mediante (2.73) y las matrices elementales. Al igual que para el caso de B-splines detallado en la Sección 2.2.2, las matrices globales resultantes tienen unas dimensiones de $(N_1 \dots N_e) \times (N_1 \dots N_e)$ y mediante la ecuación del movimiento del sistema global (2.20) permiten obtener directamente la evolución de la coordenada i del modelo deformable e -dimensional a lo largo del tiempo.

Es importante destacar que al igual que en el caso bidimensional, estas matrices globales son circulantes y anidadas. Esto es, se pueden interpretar como una matriz circulante de $N_1 \times N_1$ submatrices de dimensiones $(N_2 \dots N_e) \times (N_2 \dots N_e)$. Cada una de estas submatrices se puede interpretar, a su vez, como una matriz circulante formada por $N_2 \times N_2$ submatrices de dimensiones $(N_3 \dots N_e) \times (N_3 \dots N_e)$. Esta descomposición continua hasta llegar a unas submatrices circulantes de dimensiones $(N_{e-1} N_e) \times (N_{e-1} N_e)$ formadas por $N_{e-1} \times N_{e-1}$ submatrices circulantes de dimensiones $N_e \times N_e$.

Dado que en cada nivel de descomposición, una matriz circulante queda definida mediante su primera fila de elementos, aplicando este razonamiento a la descomposición completa, obtenemos que las matrices globales para el caso multidimensional $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}_\alpha$ y $\mathbf{K}_\beta$ quedan definidas por completo a partir de su primera fila. Al igual que en los casos de menores dimensiones, esta propiedad se utiliza en la Sección 2.3 para simplificar el proceso de cálculo en el dominio de la frecuencia, reordenando los pesos a la forma de array e -dimensional original.

2.3. Discretización temporal

En la Sección 2.2 se ha obtenido la ecuación del movimiento global del modelo deformable (2.20), la cual permite determinar la forma y posición de la coordenada i de todos los elementos del modelo e -dimensional. En esta expresión, $\mathbf{u}_i(t)$ representa el array global de parámetros o pesos del modelo, el cual resulta de la reordenación del array e -dimensional de pesos por filas como muestra (2.42a) para dos o para más dimensiones (2.49). Por otra parte, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ representan respectivamente las matrices globales de masa, amortiguamiento y rigidez, calculadas a partir de las matrices elementales para cada función de forma tal y como se ha descrito en las Secciones 2.2.2 y 2.2.3 para el caso de funciones de forma *B-splines* y diferencias finitas respectivamente.

En esta sección vamos a aplicar una discretización a la variable tiempo y a sus derivadas, obteniendo por tanto un sistema discreto tanto en espacio como en tiempo. En función de la aproximación utilizada para dichas derivadas surgen dos posibles sistemas iterativos, uno con estructura implícita y otro con explícita. Aunque ambos sistemas son fundamentalmente similares y presentan un funcionamiento equivalente, poseen una característica diferenciadora importante. El filtro multidimensional equivalente del sistema implícito tendrá una respuesta impulsional de duración infinita (IIR) mientras que para el explícito su longitud será finita (FIR). El tamaño de las respuestas impulsionales es clave cuando se utilizan modelos deformables abiertos, como analizaremos en la Sección 5.2. Por este motivo, presentaremos la formulación completa para ambos procesos iterativos detallando posteriormente los puntos fuertes y débiles de cada una de las dos aproximaciones.

2.3.1. Esquema implícito.

Para resolver la ecuación del movimiento mediante el sistema iterativo, se va discretizar la variable tiempo, $t = \xi \Delta t$, siendo Δt el incremento de tiempo y $\xi \in \mathbb{N}$ el índice de iteración. Se emplea la notación $\mathbf{u}(\xi \Delta t) = \mathbf{u}_\xi$. Asimismo, la primera y segunda derivadas temporales de $\mathbf{u}(t)$ se

reemplazan respectivamente por las aproximaciones regresivas como muestra,

$$d_t \mathbf{u}(t) = \frac{d \mathbf{u}(t)}{dt} \simeq \frac{\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (2.74a)$$

$$d_{tt} \mathbf{u}(t) = \frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} \simeq \frac{\mathbf{u}(t) - 2\mathbf{u}(t - \Delta t) + \mathbf{u}(t - 2\Delta t)}{\Delta t^2}. \quad (2.74b)$$

La Figura 2.19(a) muestra los valores de ξ que representa cada una de las aproximaciones. En esta figura se especifica a su vez que el índice de tiempo discreto que se toma de referencia para las fuerzas externas $\mathbf{q}$ tiene el valor $\xi - 1$.

Con las aproximaciones de las derivadas (2.74), la ecuación del movimiento (2.20) se puede escribir como,

$$\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_\xi - 2\mathbf{u}_{\xi-1} + \mathbf{u}_{\xi-2}) + \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} (\mathbf{u}_\xi - \mathbf{u}_{\xi-1}) + \mathbf{K} \mathbf{u}_\xi = \mathbf{q}_{\xi-1} \quad (2.75)$$

donde $\mathbf{u}_\xi$ representa el vector de parámetros en el instante ξ y $\mathbf{q}_{\xi-1}$ contiene las fuerzas externas en el instante $t = (\xi - 1)\Delta t$. Suponiendo las densidades de masa $\mu(\mathbf{s})$ y amortiguamiento $\gamma(\mathbf{s})$ constantes para todo el modelo, las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{C}$ pueden escribirse como $\mathbf{M} = m\mathbf{F}$ y $\mathbf{C} = c\mathbf{F}$, en modelos de 1, 2 y e dimensiones tanto para funciones de forma B-splines como diferencias finitas (ver Secciones 2.2.2 y 2.2.3). Los parámetros m y c representan la masa y amortiguamiento del modelo y $\mathbf{F}$ es la matriz de forma que se obtiene de las expresiones arriba indicadas. Con esto, (2.75) se puede formular como,

$$\left(\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) \mathbf{F} + \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_\xi = \left(\frac{2m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) \mathbf{F} \mathbf{u}_{\xi-1} + \left(\frac{-m}{\Delta t^2} \right) \mathbf{F} \mathbf{u}_{\xi-2} + \mathbf{q}_{\xi-1}, \quad (2.76)$$

Figura 2.19.: Aproximaciones discretas de las derivadas temporales: (a) Esquema implícito; (b) Esquema explícito.

2.3.2. Esquema explícito.

En este caso, utilizaremos la misma discretización temporal, $t = \xi \Delta t$, pero las derivadas temporales de $\mathbf{u}(t)$ se reemplazan por las siguientes aproximaciones discretas representadas por la Figura 2.19(b),

$$\mathbf{d}_t \mathbf{u}(t) = \frac{d \mathbf{u}(t)}{dt} \simeq \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t}, \quad (2.77a)$$

$$\mathbf{d}_{tt} \mathbf{u}(t) = \frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} \simeq \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - 2\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t - \Delta t)}{\Delta t^2}. \quad (2.77b)$$

Asimismo, el índice temporal que se utiliza de referencia para las fuerzas externas es ξ . Con estas suposiciones, la ecuación del movimiento (2.20) queda como,

$$\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_{\xi+1} - 2\mathbf{u}_\xi + \mathbf{u}_{\xi-1}) + \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} (\mathbf{u}_{\xi+1} - \mathbf{u}_\xi) + \mathbf{K} \mathbf{u}_\xi = \mathbf{q}_\xi \quad (2.78)$$

donde $\mathbf{u}_\xi$ y $\mathbf{q}_\xi$ son equivalentes a los mostrados en la expresión (2.75). Bajo las mismas suposiciones que para el caso implícito, la ecuación (2.78) puede escribirse como,

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) \mathbf{F} \mathbf{u}_{\xi+1} = \left(\left(\frac{2m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) \mathbf{F} - \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_\xi - \frac{m}{\Delta t^2} \mathbf{u}_{\xi-1} + \mathbf{q}_\xi, \quad (2.79)$$

Capítulo 3

*If you want to find the secrets of the universe,
think in terms of energy, vibration and frequency.*

(Nikola Tesla)

Formulación de los modelos deformables en el dominio de la frecuencia

3.1. Transformación al dominio de la frecuencia

LAS matrices $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ presentan unas interesantes características que permiten simplificar las expresiones (2.76) y (2.79) reduciendo sustancialmente el número de operaciones en el proceso iterativo. Para esta simplificación resulta de interés transformar el dominio espacial discreto,

$$\mathbf{n} := [n_1, \dots, n_e], \quad (3.1)$$

al dominio de la frecuencia,

$$\bar{\omega} := [\omega_1, \dots, \omega_e]. \quad (3.2)$$

De esta forma se obtiene un sistema iterativo definido complemente en el dominio de la frecuencia, el cual permite calcular directamente las variables $\mathbf{u}$ transformadas. Este sistema iterativo exige una carga computacional notablemente inferior al sistema equivalente definido en el dominio espacial.

Es importante indicar que no se aplica ninguna transformación al dominio temporal discreto

ξ . Por tanto, las iteraciones del sistema se realizan a lo largo de la variable temporal ξ sobre las variables $\mathbf{u}$ transformadas al dominio de Fourier.

En esta sección se detalla dicho proceso para el caso de 1, 2 y e dimensiones. Este procedimiento se describe de forma conjunta para ambas funciones de forma. Esto es debido a que las expresiones (2.76) y (2.79) permiten independizar y por tanto extender la formulación a cualquier función de forma que cumpla el requerimiento de ser separable, tal y como se indica en la Sección 2.2. En todos los casos supondremos que el modelo bajo análisis es cerrado en todas sus dimensiones, estudiando el caso de modelos abiertos en la Sección 5.2.

3.2. Formulación frecuencial del esquema implícito

Modelos unidimensionales. Para el caso unidimensional, las matrices $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ se obtienen a partir de (B.17-B.21) y (B.44). Ambas matrices, de tamaño $N_1 \times N_1$, son circulares y quedan definidas por sus primeras filas $\mathbf{f}$ y $\mathbf{k}$. Estos vectores fila $\mathbf{f}$ y $\mathbf{k}$ tienen longitud N_1 y están detallados en el Anexo B.3. Notar que la expresión (2.76) es válida para las dos funciones de forma analizadas. Por tanto, el razonamiento descrito a continuación se podrá aplicar de igual forma a *B-splines* y diferencias finitas, sin más que sustituir el vector $\mathbf{f}$ y $\mathbf{k}$ correspondiente.

El resultado de multiplicar una matriz circular con un vector es equivalente a realizar una convolución circular de la primera fila de la matriz con dicho vector [Davis, 1979]. Así pues, (2.76) puede escribirse como,

$$\left(\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) \mathbf{f} + \mathbf{k} \right) \otimes \mathbf{u}_\xi = \left(\frac{2m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_{\xi-1} + \left(\frac{-m}{\Delta t^2} \right) \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_{\xi-2} + \mathbf{q}_{\xi-1}, \quad (3.3)$$

donde $\otimes$ indica la convolución circular entre secuencias de longitud N_1 . Definimos las variables,

$$\eta = m/\Delta t^2 + c/\Delta t, \quad (3.4a)$$

$$\gamma = \Delta t \, c/m, \quad (3.4b)$$

$$a_1 = 1 + (1 + \gamma)^{-1}, \quad (3.4c)$$

$$a_2 = -(1 + \gamma)^{-1}, \quad (3.4d)$$

donde η representa la masa global del modelo y γ es la relación entre amortiguamiento y masa. De forma similar, a_1 y a_2 son los coeficientes de primer y segundo orden del sistema iterativo. Notar que la suma de estos dos coeficientes es la unidad.

Con las definiciones (3.4), la ecuación del movimiento (3.3) puede escribirse como,

$$\eta^{-1} (\eta \mathbf{f} + \mathbf{k}) \otimes \mathbf{u}_\xi = a_1 \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_{\xi-1} + a_2 \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_{\xi-2} + \eta^{-1} \mathbf{q}_{\xi-1}. \quad (3.5)$$

Aplicando la transformada de Fourier ($\mathcal{FT}$) a la convolución circular de dos secuencias¹, se obtiene el producto de sus $\mathcal{FT}$'s,

$$\eta^{-1}(\eta F(\omega) + K(\omega)) \cdot U_{\xi}(\omega) = a_1 F(\omega) \cdot U_{\xi-1}(\omega) + a_2 F(\omega) \cdot U_{\xi-2}(\omega) + \eta^{-1} Q_{\xi-1}(\omega), \quad (3.6)$$

donde $F(\omega)$, $K(\omega)$, $U_{\xi}(\omega)$, $U_{\xi-1}(\omega)$, $U_{\xi-2}(\omega)$ y $Q_{\xi-1}(\omega)$ son las $\mathcal{FT}$'s de sus respectivas secuencias espaciales y el símbolo $\cdot$ representa el producto frecuencia a frecuencia de los espectros. Así, las operaciones matriciales se convierten en el producto del espectro de las señales y es posible aislar $U_{\xi}(\omega)$ de la parte izquierda de la ecuación (3.6),

$$U_{\xi}(\omega) = H(\omega) \left(a_1 U_{\xi-1}(\omega) + a_2 U_{\xi-2}(\omega) + \frac{Q_{\xi-1}(\omega)}{\eta F(\omega)} \right). \quad (3.7)$$

Las fuerzas internas del modelo son impuestas por el filtro,

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{K(\omega)}{\eta F(\omega)}}, \quad (3.8)$$

el cual representa el filtro inverso del núcleo de rigidez frecuencial $K(\omega)$. Aplicando la transformada de Fourier a las secuencias definidas en (B.53) se pueden obtener directamente las expresiones de $F(\omega)$ y $K(\omega)$ (B.60), utilizables en el proceso iterativo para las dos funciones de forma analizadas en este trabajo, B-splines y diferencias finitas.

La Figura 3.1 muestra el espectro en la frecuencia de $K_{\alpha}(\omega)$ y $K_{\beta}(\omega)$ para ambas funciones de forma. El espectro del núcleo espacial de rigidez $K(\omega)$ es la suma ponderada por α y β de ambos espectros (B.60d y B.61d). De ambas figuras se puede observar que dicho núcleo es un filtro paso alto que contiene la respuesta frecuencial de las derivadas.

El espectro de los vectores $F(\omega)$ que se obtiene de las matrices de forma se muestra en la Figura 3.2. En este caso, el comportamiento varía claramente según la función de forma elegida, siendo un filtro paso bajo para B-splines o un valor constante de amplitud unidad para el caso de diferencias finitas.

Con estos espectros, mediante (3.8) se puede obtener la respuesta en frecuencia del filtro $H(\omega)$ para las diferentes funciones de forma y parámetros α , β y η . Para todos los casos $H(\omega)$ es un filtro paso bajo con una amplitud menor o igual a uno, teniendo su máximo en la frecuencia continua. $H(\omega)$ tiene comportamiento paso bajo debido a que es el filtro inverso de $K(\omega)$, con comportamiento paso alto. En la Figura C.1 se representa el módulo de $H(\omega)$ para diferentes valores de estos parámetros. En dicha figura se puede observar que el ancho de banda del filtro crece con η y β y decrece con α , siendo mayor para la función de forma de diferencias finitas que para B-splines.

¹En este desarrollo suponemos que el modelo deformable es cerrado. Es decir, que satisface la igualdad (2.4). Para modelos abiertos se deben añadir extensiones ocultas como indica la Sección 5.2.

Figura 3.1.: Módulo de la respuesta en frecuencia de (a) $K_\alpha(\omega)$ y (b) $K_\beta(\omega)$ utilizando como funciones de forma: B-splines y diferencias finitas.

Figura 3.2.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $F(\omega)$ utilizando como funciones de forma: B-splines y diferencias finitas.

Es importante destacar que a menor ancho de banda del filtro, el efecto de suavizado será mayor. Esto conlleva que en el proceso de adaptación del modelo a los datos, el modelo sea más inmune al ruido y a los artefactos de los datos. Por el contrario, el modelo tendrá más dificultad para adaptarse a los detalles pequeños de los datos, como huecos y resaltos, es decir, a sus componentes de alta frecuencia. Por este motivo, la elección del filtro y sus características, dependerá de la aplicación en concreto. En el Capítulo 5 se detalla el procedimiento para la elección de dichos parámetros.

Otra característica de gran interés del filtro $H(\omega)$ es la longitud de su respuesta impulsional. Para estimar dicha longitud, debemos analizar en primer lugar $K(\omega)$ y su relación con $H(\omega)$. El filtro $K(\omega)$ es un filtro cuya respuesta espacial tiene una duración finita (FIR). A su vez, el filtro $H(\omega)$ se calcula como el inverso de $K(\omega)$ como muestra (3.8). Así, se puede deducir que el filtro del

sistema $H(\omega)$ presenta polos en su respuesta en frecuencia mostrando por tanto una respuesta al impulso de longitud infinita (IIR). Esta característica es de gran importancia al añadir las extensiones ocultas en los modelos no cerrados. La Sección 5.2 describe esta problemática y cómo influye en la implementación práctica del modelo.

Modelos bidimensionales. En el caso bidimensional, las matrices $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ se obtienen a partir de las matrices descritas en los Anexos B.2.2-B.2.3. Esto es, las matrices (B.26-B.42) para B-splines y (B.49-B.52) para diferencias finitas. Ambas matrices, tienen tamaño $(N_1 N_2) \times (N_1 N_2)$ y permiten aplicar la ecuación (2.76) con los datos $\mathbf{u}_\xi$ dispuestos en formato vector de tamaño $N = N_1 N_2$. Tal y como muestra la expresión (2.43), el vector de datos $\mathbf{u}_\xi$ se forma a partir de la matriz de datos original $\mathbf{u}_\xi^{n_1, n_2}$,

$$\mathbf{u}_\xi^{n_1, n_2} = \begin{bmatrix} u_\xi^{0,0} & \dots & u_\xi^{0, N_2-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_\xi^{N_1-1,0} & \dots & u_\xi^{N_1-1, N_2-1} \end{bmatrix}, \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{u}_\xi = \left[u_\xi^{0,0} \dots u_\xi^{0, N_2-1} u_\xi^{1,0} \dots u_\xi^{1, N_2-1} \dots u_\xi^{N_1-1,0} \dots u_\xi^{N_1-1, N_2-1} \right]^T. \quad (3.9b)$$

Tal y como se determina en las Secciones 2.2.2 y 2.2.3, estas matrices son circulares y anidadas. Esto es, las matrices generales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ se pueden dividir en $N_1 \times N_1$ submatrices de dimensiones $N_2 \times N_2$, quedando definidas por la primera fila de submatrices. Cada una de estas submatrices es, a su vez, una matriz circular, quedando también definida por su primera fila. Con estas propiedades, las matrices globales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ quedan completamente definidas por sus primeras filas, de tamaño $1 \times (N_1 N_2)$. Asimismo, tanto las submatrices como las matrices generales son hermiticas y pares.

A continuación, aplicamos un procedimiento similar al descrito en el caso unidimensional a partir de la ecuación (2.76). Las propiedades de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ permiten reescribir el producto de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ por el vector $\mathbf{u}_\xi$ (3.9b) como una convolución circular bidimensional. Como operandos de la convolución tendremos las primeras filas de estas matrices dispuestas en forma matricial y los datos $\mathbf{u}_\xi^{n_1, n_2}$ también en formato matricial (3.9a). Para tal fin, reordenamos en forma de matrices bidimensionales las primeras filas de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$, obteniendo las matrices de forma $\mathbf{f}$ y el núcleo espacial de rigidez $\mathbf{k}$, para B-splines (B.55-B.58) y para diferencias finitas (B.59). Ambas matrices $\mathbf{f}$ y $\mathbf{k}$ tienen dimensiones $N_1 \times N_2$.

Al igual que con el caso unidimensional, mediante las definiciones (B.55-B.59), la expresión (2.76) es válida para las dos funciones de forma analizadas. Por tanto, el razonamiento descrito a

continuación se podrá aplicar de igual forma a B-splines y diferencias finitas, sin más que sustituir en la expresión el $\mathbf{f}$ y $\mathbf{k}$ correspondiente.

Así pues, podemos escribir el producto de las matrices $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ por el vector $\mathbf{u}_\xi$ como una convolución circular bidimensional de las matrices $\mathbf{f}$ y $\mathbf{k}$ con la matriz $\mathbf{u}_\xi^{n_1, n_2}$. Por tanto la ecuación (2.76) puede escribirse como,

$$\eta^{-1}(\eta\mathbf{f} + \mathbf{k}) \otimes \mathbf{u}_\xi = a_1 \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_{\xi-1} + a_2 \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_{\xi-2} + \eta^{-1} \mathbf{q}_{\xi-1}. \quad (3.10)$$

donde $\otimes$ indica la convolución circular bidimensional entre matrices de tamaño $N_1 \times N_2$ y $\mathbf{u}_\xi$ expresa la matriz de datos original² (3.9a). Los parámetros η , a_1 y a_2 coinciden con los definidos en (3.4).

Aplicando la transformada de Fourier bidimensional ($2D - \mathcal{FT}$) a la convolución circular de dos secuencias bidimensionales, se obtiene el producto de sus espectros,

$$\begin{aligned} \eta^{-1}(\eta F(\omega_1, \omega_2) + K(\omega_1, \omega_2)) \cdot U_\xi(\omega_1, \omega_2) = \\ a_1 F(\omega_1, \omega_2) \cdot U_{\xi-1}(\omega_1, \omega_2) + a_2 F(\omega_1, \omega_2) \cdot U_{\xi-2}(\omega_1, \omega_2) + \eta^{-1} Q_{\xi-1}(\omega_1, \omega_2), \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $F(\omega_1, \omega_2)$, $K(\omega_1, \omega_2)$, $U_\xi(\omega_1, \omega_2)$, $U_{\xi-1}(\omega_1, \omega_2)$, $U_{\xi-2}(\omega_1, \omega_2)$ y $Q_{\xi-1}(\omega_1, \omega_2)$ son las $2D - \mathcal{FT}$'s de sus respectivas secuencias espaciales bidimensionales y el símbolo $\cdot$ representa el producto frecuencia a frecuencia entre los espectros.

De nuevo los productos matriciales se convierten en el producto del espectro de las señales y es posible aislar $U_\xi(\omega_1, \omega_2)$ de la parte izquierda de la ecuación (3.11),

$$U_\xi(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1, \omega_2) \left(a_1 U_{\xi-1}(\omega_1, \omega_2) + a_2 U_{\xi-2}(\omega_1, \omega_2) + \frac{Q_{\xi-1}(\omega_1, \omega_2)}{\eta F(\omega_1, \omega_2)} \right). \quad (3.12)$$

El filtro,

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{1 + \frac{K(\omega_1, \omega_2)}{\eta F(\omega_1, \omega_2)}}, \quad (3.13)$$

impone las fuerzas internas del modelo bidimensional y es inverso al filtro $K(\omega_1, \omega_2)$. Al igual que en el caso unidimensional, aplicando la transformada de Fourier bidimensional a las secuencias definidas en (B.55-B.59) se pueden obtener directamente las expresiones de $F(\omega_1, \omega_2)$ y $K(\omega_1, \omega_2)$ utilizables en el proceso iterativo. Para el caso de los B-splines tenemos (B.62) y para diferencias finitas (B.63). A partir de estas expresiones (B.62-B.63), mediante (3.13) se puede obtener para ambas funciones de forma la respuesta en frecuencia del filtro del sistema $H(\omega_1, \omega_2)$,

²Para simplificar la notación, se suprime a partir de esta expresión, los superíndices n_1, n_2 que indican la disposición matricial de los datos $\mathbf{u}_\xi$.

La Figura 3.3 muestra el espectro en la frecuencia de $K_\alpha(\omega_1, \omega_2)$ y $K_\beta(\omega_1, \omega_2)$ para ambas funciones de forma. El espectro del núcleo espacial de rigidez $K(\omega_1, \omega_2)$ es la suma ponderada por α y β de ambos espectros (B.62d y B.63d). De ambas figuras se puede observar que dicho núcleo es un filtro paso alto bidimensional que contiene la respuesta frecuencial de las derivadas espaciales.

Figura 3.3.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $K_\alpha(\omega_1, \omega_2)$ para (a) B-splines y (b) diferencias finitas. Módulo de la respuesta en frecuencia de $K_\beta(\omega_1, \omega_2)$ para (c) B-splines y (d) diferencias finitas.

El espectro de las matrices $F(\omega_1, \omega_2)$ que se obtienen de las matrices de forma se muestra en la Figura 3.4. De forma análoga al caso unidimensional, podemos observar que la función de forma tiene comportamiento de un filtro paso bajo para B-splines y una función de valor constante de amplitud unidad para el caso de diferencias finitas.

Con estos espectros, mediante (3.13) se puede obtener la respuesta en frecuencia del filtro $H(\omega_1, \omega_2)$ para diferentes funciones de forma y parámetros α , β y η . Para todos los casos $H(\omega_1, \omega_2)$ es un filtro paso bajo con una amplitud menor o igual a la unidad, teniendo su valor máximo en la frecuencia continua. El filtro $H(\omega_1, \omega_2)$ tiene comportamiento paso bajo debido a que es el filtro inverso de $K(\omega_1, \omega_2)$, con comportamiento paso alto. Las Figuras C.2-C.10 del Anexo C muestran la influencia de estos parámetros en el ancho de banda del filtro, el cual crece con η y β y de-

Figura 3.4.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $F(\omega_1, \omega_2)$ utilizando como funciones de forma (a) B-splines y (b) diferencias finitas.

crece con α , siendo mayor para la función de forma de diferencias finitas que para B-splines. Las implicaciones del ancho de banda se detallan en el Capítulo 5.

De nuevo, el filtro del sistema $H(\omega_1, \omega_2)$ presenta una respuesta impulsional en el dominio del espacio con una longitud infinita como puede deducirse de sus expresiones de cálculo. Esta característica implica las condiciones para calcular la longitud de las extensiones ocultas, tal y como se detalla en la Sección 5.2.

Modelos e -dimensionales. En esta sección se describe la generalización al caso multidimensional de la formulación en el dominio de la frecuencia. Para el caso multidimensional, las matrices $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ se obtienen a partir de (B.15). Ambas matrices, tienen tamaño $(N_1 \cdots N_e) \times (N_1 \cdots N_e)$ y permiten aplicar la ecuación (2.76) con los datos $\mathbf{u}_\xi$ dispuestos en formato vector de tamaño $N = N_1 \cdots N_e$. Tal y como muestran las expresiones (2.49) y (2.72), el vector de datos $\mathbf{u}_\xi$ se forma a partir de la matriz de datos original $\mathbf{u}_\xi^{n_1, \dots, n_e}$. Por ejemplo, para 3 dimensiones,

$$\mathbf{u}_\xi^{n_1, n_2, n_3} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\xi^{0,0,0} & \dots & u_\xi^{0, N_2-1, 0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_\xi^{N_1-1, 0, 0} & \dots & u_\xi^{N_1-1, N_2-1, 0} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} u_\xi^{0,0, N_3-1} & \dots & u_\xi^{0, N_2-1, N_3-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_\xi^{N_1-1, 0, N_3-1} & \dots & u_\xi^{N_1-1, N_2-1, N_3-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.14a)$$

$$\mathbf{u}_\xi = \begin{bmatrix} u_\xi^{0,0,0} & \dots & u_\xi^{0,0, N_3-1} & u_\xi^{0,1,0} & \dots & u_\xi^{0,1, N_3-1} & \dots & u_\xi^{1,0,0} & \dots & u_\xi^{1,0, N_3-1} & \dots \\ u_\xi^{N_1-1, N_2-1, 0} & \dots & u_\xi^{N_1-1, N_2-1, N_3-1} \end{bmatrix}, \quad (3.14b)$$

donde $\mathbf{u}_\xi^{n_1, n_2, n_3}$ es la matriz tridimensional de parámetros y $\mathbf{u}_\xi$ es la reordenación lexicográfica en forma de vector de dicha matriz (ver Anexo A.1). Estas estructuras se pueden generalizar para datos de mayores dimensiones $\mathbf{u}_\xi^{n_1, \dots, n_e}$.

Tal y como se determina en las Secciones 2.2.2 y 2.2.3, estas matrices son circulantes y anidadas. Esto es, las matrices generales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ se pueden dividir en $N_1 \times N_1$ submatrices de dimensiones $(N_2 \cdots N_e) \times (N_2 \cdots N_e)$. Cada una de estas submatrices se puede interpretar, a su vez, como una matriz circulante formada por $N_2 \times N_2$ submatrices de dimensiones $(N_3 \cdots N_e) \times (N_3 \cdots N_e)$. Esta descomposición continúa hasta llegar a unas submatrices circulantes de dimensiones $(N_{e-1} N_e) \times (N_{e-1} N_e)$ formadas por $N_{e-1} \times N_{e-1}$ submatrices circulantes de dimensiones $N_e \times N_e$. Tanto las matrices generales como cada una de las matrices resultantes de la descomposición son hermíticas. Con estas propiedades, las matrices globales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ quedan completamente definidas por sus primeras filas, de tamaño $1 \times (N_1 \cdots N_e)$.

A partir de la ecuación (2.76), se puede aplicar un procedimiento similar a los casos uni- y bidimensionales basado en reescribir el producto de las matrices $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ por el vector $\mathbf{u}_\xi$ (3.14b) como una convolución circular e -dimensional. Los operandos de esta convolución serán la primera fila de estas matrices reordenada de nuevo en forma de matriz e -dimensional y los datos $\mathbf{u}_\xi^{n_1, \dots, n_e}$ dispuestos también en formato matricial (3.14a).

Así pues, se reordena la primera fila de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ en forma de matriz e -dimensional obteniendo las matrices de forma $\mathbf{f}_B^{eD}$ y $\mathbf{f}_{FD}^{eD}$, y los núcleos espaciales de rigidez $\mathbf{k}_B^{eD}$ y $\mathbf{k}_{FD}^{eD}$, para B-splines y para diferencias finitas respectivamente. Estas matrices $\mathbf{f}$ y $\mathbf{k}$ tienen unas dimensiones de $N_1 \times \cdots \times N_e$. Reescribiendo (2.76) mediante convoluciones circulares e -dimensionales de la matriz $\mathbf{u}_\xi^{n_1, \dots, n_e}$ con $\mathbf{f}^{eD}$ y $\mathbf{k}^{eD}$ obtenemos³,

$$\eta^{-1} (\eta \mathbf{f} + \mathbf{k}) \otimes \mathbf{u}_\xi = a_1 \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_{\xi-1} + a_2 \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_{\xi-2} + \eta^{-1} \mathbf{q}_{\xi-1}. \quad (3.15)$$

donde $\otimes$ indica la convolución circular e -dimensional entre matrices de tamaño $N_1 \times \cdots \times N_e$ y $\mathbf{u}_\xi$ expresa la matriz de datos (3.14a). En esta expresión se han empleado las definiciones de (3.4).

Aplicando la transformada de Fourier e -dimensional ($eD - \mathcal{FT}$) a la convolución circular de dos secuencias e -dimensionales obtenemos el producto de sus transformadas,

$$\eta^{-1} (\eta F(\bar{\omega}) + K(\bar{\omega})) \cdot U_\xi(\bar{\omega}) = a_1 F(\bar{\omega}) \cdot U_{\xi-1}(\bar{\omega}) + a_2 F(\bar{\omega}) \cdot U_{\xi-2}(\bar{\omega}) + \eta^{-1} Q_{\xi-1}(\bar{\omega}), \quad (3.16)$$

donde $F(\bar{\omega})$, $K(\bar{\omega})$, $U_\xi(\bar{\omega})$, $U_{\xi-1}(\bar{\omega})$, $U_{\xi-2}(\bar{\omega})$ y $Q(\bar{\omega})$ son las $eD - \mathcal{FT}$'s de sus respectivas secuencias espaciales e -dimensionales y $\bar{\omega}$ es el vector de frecuencias definido en (3.2). El símbolo $\cdot$ representa

³Con el fin de simplificar la notación al igual que en el caso de 1 y 2 dimensiones, se suprime el superíndice eD que indica que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{k}$ corresponden al caso e -dimensional así como los superíndices $n_1, \dots, n_e$ que indican la disposición matricial de los datos $\mathbf{u}_\xi$.

el producto entre los componentes espectrales de las señales. Esto permite aislar $U_\xi(\bar{\omega})$ de la parte izquierda de la ecuación (3.16),

$$U_\xi(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega}) \left(a_1 U_{\xi-1}(\bar{\omega}) + a_2 U_{\xi-2}(\bar{\omega}) + \frac{Q_{\xi-1}(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \right). \quad (3.17)$$

donde $H(\bar{\omega})$ representa el filtro inverso e -dimensional de $K(\bar{\omega})$, cuya expresión de cálculo coincide la obtenida para menores dimensiones (3.8) y (3.13),

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{1 + \frac{K(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})}}. \quad (3.18)$$

El espectro del núcleo espacial de rigidez $K(\bar{\omega})$ es un filtro paso alto e -dimensional que contiene la respuesta frecuencial de las derivadas parciales. El comportamiento frecuencial de $F(\bar{\omega})$, que se obtiene de las matrices de forma, es un filtro paso bajo para *B-splines* mientras que para el caso de diferencias finitas tiene un valor constante de amplitud unidad en todas las dimensiones. Mediante (3.13) y los espectros de $F(\bar{\omega})$ y $K(\bar{\omega})$ se puede obtener la respuesta en frecuencia del filtro $H(\bar{\omega})$ para diferentes funciones de forma y parámetros α , β y η . Para todos los casos $H(\bar{\omega})$ es un filtro paso bajo con una amplitud menor o igual a uno con su máximo en la frecuencia continua. El ancho de banda del filtro, crece con η y β y decrece con α , siendo mayor para la función de forma de diferencias finitas que para *B-splines*.

3.3. Formulación frecuencial del esquema explícito

Modelos unidimensionales. Para el esquema explícito partimos de la ecuación (2.79). Al igual que con el caso implícito, las matrices $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ son circulares y quedan definidas por sus primeras filas $\mathbf{f}$ y $\mathbf{k}$, descritas en (B.53-B.54). De esta forma, (2.79) puede escribirse como,

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_\xi = \left(\left(\frac{2m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) \mathbf{f} - \mathbf{k} \right) \otimes \mathbf{u}_{\xi-1} - \frac{m}{\Delta t^2} \otimes \mathbf{u}_{\xi-2} + \mathbf{q}_{\xi-1}, \quad (3.19)$$

donde $\otimes$ indica la convolución circular entre secuencias de longitud N_1 . Con las definiciones de η , γ , a_1 y a_2 indicadas en (3.4), la ecuación (3.19) puede escribirse como,

$$\mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_\xi = (a_1 \mathbf{f} - \eta^{-1} \mathbf{k}) \otimes \mathbf{u}_{\xi-1} + a_2 \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_{\xi-2} + \eta^{-1} \mathbf{q}_{\xi-1}. \quad (3.20)$$

Aplicando la transformada de Fourier ($\mathcal{FT}$) obtenemos la expresión en el dominio de la frecuencia,

$$F(\omega) \cdot U_\xi(\omega) = (a_1 F(\omega) - \eta^{-1} K(\omega)) \cdot U_{\xi-1}(\omega) + a_2 F(\omega) \cdot U_{\xi-2}(\omega) + \eta^{-1} Q_{\xi-1}(\omega), \quad (3.21)$$

donde $F(\omega)$, $K(\omega)$, $U_\xi(\omega)$, $U_{\xi-1}(\omega)$, $U_{\xi-2}(\omega)$ y $Q_{\xi-1}(\omega)$ son las $\mathcal{FT}$'s de sus respectivas secuencias espaciales y el símbolo $\cdot$ representa el producto frecuencia a frecuencia entre los vectores. Las operaciones matriciales se convierten, por tanto, en el producto del espectro de las señales y podemos obtener,

$$U_\xi(\omega) = \left(a_1 - \frac{K(\omega)}{\eta F(\omega)} \right) \cdot U_{\xi-1}(\omega) + a_2 U_{\xi-2}(\omega) + \frac{Q_{\xi-1}(\omega)}{\eta F(\omega)}. \quad (3.22)$$

donde el significado físico de los parámetros η , γ , a_1 , a_2 es equivalente al indicado en (3.4).

Aplicando la transformada de Fourier a las secuencias definidas en (B.53-B.54) obtenemos las mismas expresiones de $F(\omega)$ y $K(\omega)$ definidas en (B.60). Con estas expresiones la respuesta en frecuencia del filtro del sistema para el caso explícito se puede calcular para ambas funciones de forma mediante,

$$H'(\omega) = a_1 - \frac{K(\omega)}{\eta F(\omega)}. \quad (3.23)$$

Las características espectrales de $F(\omega)$, $K_\alpha(\omega)$, $K_\beta(\omega)$ y $K(\omega)$ son análogas a las detalladas en el caso implícito. Las Figuras 3.1 y 3.2 muestran la representación gráfica de los espectros de dichas señales.

Con $F(\omega)$ y $K(\omega)$, mediante la expresión (3.23) se puede obtener la respuesta en frecuencia del filtro $H'(\omega)$ para las diferentes funciones de forma y parámetros α , β , η y γ . Como se puede comprobar en la Figura C.11 del Anexo C, el comportamiento del filtro $H'(\omega)$ depende claramente de los parámetros elegidos, pudiendo tener para algunas frecuencias un módulo mayor que la unidad y ser, por tanto, inestable bajo dichas frecuencias, en concreto para altas frecuencias. En las Secciones 4.2.1 y 4.2.2 se definen las condiciones y valores requeridos de los diferentes parámetros para que este sistema sea estable.

Modelos bidimensionales. De nuevo partimos de la ecuación (2.79). Al igual que con el caso implícito, las matrices globales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ tienen tamaño $(N_1 N_2) \times (N_1 N_2)$ y son circulantes y anidadas. Así, las matrices $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ quedan completamente definidas por sus primeras filas, de tamaño $1 \times (N_1 N_2)$. Aplicando el mismo procedimiento descrito en el caso implícito, podemos reescribir el producto de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ por el vector $\mathbf{u}_\xi$ (3.9b) como una convolución circular bidimensional. Los operandos de la convolución serán los datos $\mathbf{u}_\xi^{n_1, n_2}$ dispuestos en formato matricial (3.9a) y las matrices $\mathbf{f}^{2D}$ y $\mathbf{k}^{2D}$ definidas en (B.55-B.59) para cada una de las dos funciones de forma.

Así, escribimos (2.79) como convolución bidimensional de las matrices $\mathbf{f}$ y $\mathbf{k}$ con la matriz $\mathbf{u}_\xi^{n_1, n_2}$,

$$\mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_\xi = (a_1 \mathbf{f} - \eta^{-1} \mathbf{k}) \otimes \mathbf{u}_{\xi-1} + a_2 \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_{\xi-2} + \eta^{-1} \mathbf{q}_{\xi-1}. \quad (3.24)$$

donde $\otimes$ indica la convolución circular bidimensional entre secuencias discretas de tamaño $N_1 \times N_2$ y $\mathbf{u}_\xi$ representa los datos $\mathbf{u}_\xi^{n_1, n_2}$. Los parámetros η , γ , a_1 y a_2 coinciden con los definidos en

(3.4). Aplicando la $2D - \mathcal{FT}$ a la expresión (3.24) transformamos las convoluciones circulares bidimensionales en productos de espectros bidimensionales. Con ello, obtenemos la expresión en el dominio de la frecuencia,

$$F(\omega_1, \omega_2) \cdot U_\xi(\omega_1, \omega_2) = (a_1 F(\omega_1, \omega_2) - \eta^{-1} K(\omega_1, \omega_2)) \cdot U_{\xi-1}(\omega_1, \omega_2) + a_2 F(\omega_1, \omega_2) \cdot U_{\xi-2}(\omega_1, \omega_2) + \eta^{-1} Q_{\xi-1}(\omega_1, \omega_2), \quad (3.25)$$

donde $F(\omega_1, \omega_2)$, $K(\omega_1, \omega_2)$, $U_\xi(\omega_1, \omega_2)$, $U_{\xi-1}(\omega_1, \omega_2)$, $U_{\xi-2}(\omega_1, \omega_2)$ y $Q_{\xi-1}(\omega_1, \omega_2)$ son las $2D - \mathcal{FT}$'s de sus respectivas secuencias espaciales bidimensionales y el símbolo $\cdot$ representa el producto frecuencia a frecuencia de las transformadas. De esta forma, podemos aislar la transformada de los parámetros del modelo de la parte izquierda de la ecuación,

$$U_\xi(\omega_1, \omega_2) = \left(a_1 - \frac{K(\omega_1, \omega_2)}{\eta F(\omega_1, \omega_2)} \right) \cdot U_{\xi-1}(\omega_1, \omega_2) + a_2 U_{\xi-2}(\omega_1, \omega_2) + \frac{Q_{\xi-1}(\omega_1, \omega_2)}{\eta F(\omega_1, \omega_2)}. \quad (3.26)$$

Como en el caso unidimensional, aplicando la transformada de Fourier bidimensional a las secuencias definidas en (B.55-B.59) se pueden obtener directamente las expresiones de $F(\omega_1, \omega_2)$ y $K(\omega_1, \omega_2)$, definidas en (B.62-B.63) para B-splines y diferencias finitas. A partir de estas expresiones la respuesta en frecuencia del filtro se puede calcular para ambas funciones de forma con,

$$H'(\omega_1, \omega_2) = a_1 - \frac{K(\omega_1, \omega_2)}{\eta F(\omega_1, \omega_2)}. \quad (3.27)$$

La expresión (3.27) permite obtener la respuesta en frecuencia del filtro $H'(\omega_1, \omega_2)$ para las diferentes funciones de forma y parámetros α , β , η y γ . La Figuras C.12-C.14 muestran el comportamiento del filtro $H'(\omega_1, \omega_2)$ en función de los diferentes parámetros. Aunque se observa una tendencia general en la forma del filtro en función del valor de cada parámetro, su amplitud máxima depende de los valores concretos asignados a los diferentes parámetros en su totalidad. Al igual que en el caso unidimensional, el filtro puede tener módulo mayor que la unidad para algunas frecuencias, provocando inestabilidad en dichas frecuencias. En las Secciones 4.2.1 y 4.2.2 se analizan las condiciones de estabilidad para que el sistema descrito.

Modelos e -dimensionales. La generalización al caso multidimensional también es posible para el modelo explícito con un procedimiento similar al descrito para el caso implícito. De nuevo, las matrices $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ de tamaño tamaño $(N_1 \cdots N_e) \times (N_1 \cdots N_e)$ se obtienen a partir de (B.15). Estas matrices permiten aplicar la ecuación (2.76) distribuyendo la matriz de datos original $\mathbf{u}_\xi^{n_1, \dots, n_e}$ en un vector de datos $\mathbf{u}_\xi$ como muestra (3.14).

Tal y como se indica en las Secciones 2.2.2 y 2.2.3, las matrices generales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ son circulantes y anidadas. Esto permite aplicar un procedimiento similar a los casos uni- y bidimensionales basado en reescribir el producto de las matrices $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ por el vector $\mathbf{u}_\xi$ (3.14b) como una convolución circular e -dimensional.

Así, se reordena la primera fila de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$ en forma de matriz e -dimensional obteniendo las matrices de forma $\mathbf{f}_B^{eD}$ y $\mathbf{f}_{FD}^{eD}$, y los núcleos espaciales de rigidez $\mathbf{k}_B^{eD}$ y $\mathbf{k}_{FD}^{eD}$, para B-splines y para diferencias finitas respectivamente. Las matrices $\mathbf{f}$ y $\mathbf{k}$ tienen dimensiones $N_1 \times \dots \times N_e$. Aplicando convoluciones circulares e -dimensionales podemos obtener de forma similar al caso en 1 y 2 dimensiones⁴,

$$\mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_\xi = \left(a_1 \mathbf{f} - \eta^{-1} \mathbf{k} \right) \otimes \mathbf{u}_{\xi-1} + a_2 \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_{\xi-2} + \eta^{-1} \mathbf{q}_{\xi-1}, \quad (3.28)$$

donde $\otimes$ indica la convolución circular e -dimensional entre matrices de tamaño $N_1 \times \dots \times N_e$ y $\mathbf{u}_\xi$ expresa la matriz de datos (3.14a). En esta expresión se han empleado las definiciones de (3.4).

Aplicando la transformada de Fourier e -dimensional ($eD - \mathcal{FT}$) a la convolución circular de dos secuencias e -dimensionales obtenemos el producto de sus transformadas,

$$F(\bar{\omega}) \cdot U_\xi(\bar{\omega}) = \left(a_1 F(\bar{\omega}) - \eta^{-1} K(\bar{\omega}) \right) \cdot U_{\xi-1}(\bar{\omega}) + a_2 F(\bar{\omega}) \cdot U_{\xi-2}(\bar{\omega}) + \eta^{-1} Q_{\xi-1}(\bar{\omega}), \quad (3.29)$$

donde $F(\bar{\omega})$, $K(\bar{\omega})$, $U_\xi(\bar{\omega})$, $U_{\xi-1}(\bar{\omega})$, $U_{\xi-2}(\bar{\omega})$ y $Q_{\xi-1}(\bar{\omega})$ son las $eD - \mathcal{FT}$'s sus respectivas secuencias espaciales e -dimensionales y $\bar{\omega}$ es el vector de frecuencias definido en (3.2). El símbolo $\cdot$ representa el producto entre los componentes espectrales de las señales. Así, podemos aislar $U_\xi(\bar{\omega})$,

$$U_\xi(\bar{\omega}) = \left(a_1 - \frac{K(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \right) \cdot U_{\xi-1}(\bar{\omega}) + a_2 U_{\xi-2}(\bar{\omega}) + \frac{Q_{\xi-1}(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})}, \quad (3.30)$$

donde,

$$H'(\bar{\omega}) = a_1 - \frac{K(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})}, \quad (3.31)$$

representa el filtro inverso e -dimensional de $K(\bar{\omega})$, cuya expresión de cálculo coincide la obtenida para menores dimensiones, es decir las ecuaciones (3.23) y (3.27).

El espectro del núcleo espacial de rigidez $K(\bar{\omega})$ es un filtro paso alto e -dimensional que contiene la respuesta frecuencial de las derivadas en el dominio del espacio. El comportamiento frecuencial de $F(\bar{\omega})$, que se obtiene de las matrices de forma, es un filtro paso bajo para B-splines y tiene un valor constante de amplitud unidad en todas las dimensiones para el caso de diferencias finitas. Mediante los espectros de $F(\bar{\omega})$ y $K(\bar{\omega})$ se puede obtener la respuesta en frecuencia del filtro $H'(\bar{\omega})$ para diferentes funciones de forma y parámetros α , β , η y γ . Al igual que en los casos de 1 y 2 dimensiones, el filtro $H'(\bar{\omega})$ puede tener amplitud mayor que uno para ciertas frecuencias. Por este motivo, tal y como se analiza en las Secciones 4.2.1 y 4.2.2 hay que definir correctamente los diferentes parámetros para que el sistema no trabaje en un régimen inestable.

⁴Con el fin de simplificar la notación al igual que en el caso de 1 y 2 dimensiones, se suprime el superíndice eD que indica que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{k}$ corresponden al caso e -dimensional así como los superíndices $n_1, \dots, n_e$ que indican la disposición en array de los datos $\mathbf{u}_\xi$.

Capítulo 4

*True stability results when presumed order
and presumed disorder are balanced.
A truly stable system expects the unexpected,
is prepared to be disrupted,
waits to be transformed.*

(Tom Robbins)

Análisis de la convergencia y estabilidad

DADA la naturaleza dinámica de las ecuaciones en diferencias (3.7) y (3.22), es importante describir sus características de convergencia y estabilidad. En el proceso iterativo se estima la forma de un determinado objeto. Algunos nodos son capturados por los bordes del conjunto de datos, mientras que otros nodos sólo se ven influenciados por la dinámica del modelo. Por tanto, cada iteración del proceso iterativo puede entenderse como un proceso en dos pasos. La Figura 4.1 ilustra el proceso. En primer lugar, algunos nodos, no uniformemente distribuidos, son capturados por medio de las fuerzas externas generadas por el gradiente de los datos. Entonces, se aplican los filtros $H(\bar{\omega})$ o $H'(\bar{\omega})$ a todos los nodos como fuerzas internas de suavizado.

En este capítulo se va a realizar un estudio sobre las condiciones de convergencia y estabilidad para el proceso iterativo en la adaptación del modelo deformable. Para llevar a cabo dicho análisis consideramos las expresiones del proceso iterativo en el dominio de la frecuencia, (3.17-3.18) para el caso implícito y (3.30-3.31) para el caso explícito. Estas expresiones son aplicables a modelos en diferentes dimensiones, tal y como se ha descrito en la Sección 3.1. Por este motivo, el estudio de las condiciones de convergencia y estabilidad se realizará sobre el caso genérico e -dimensional, pudiéndose utilizar de forma directa en modelos de diferentes dimensiones.

Figura 4.1.: Esquema iterativo representado como un proceso en dos pasos: 1ª fase, captura de los datos mediante el gradiente de los datos; 2ª fase, aplicación de las fuerzas internas de elasticidad y rigidez mediante los filtros $H(\bar{\omega})$ o $H'(\bar{\omega})$.

Como se ha introducido en el Capítulo 3, en este análisis utilizamos las señales transformadas al dominio de la frecuencia para las variables espaciales. Recordar que la variable temporal se ha discretizado pero no transformado.

Con estos supuestos, la ecuación del movimiento para el esquema implícito (3.17) pasa a ser,

$$U_{\xi}(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega}) \left(a_1 U_{\xi-1}(\bar{\omega}) + a_2 U_{\xi-2}(\bar{\omega}) + \frac{Q_{\xi-1}(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \right), \quad (4.1)$$

y para el esquema explícito (3.30) se convierte en,

$$U_{\xi}(\bar{\omega}) = H'(\bar{\omega}) U_{\xi-1}(\bar{\omega}) + a_2 U_{\xi-2}(\bar{\omega}) + \frac{Q_{\xi-1}(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})}. \quad (4.2)$$

En ambas expresiones, $\bar{\omega}$ representa las e variables frecuenciales (3.2), los parámetros η , a_1 y a_2 son los definidos en (3.4), ξ indica el índice temporal, $U(\bar{\omega})$ representa los parámetros del modelo a calcular y $F(\bar{\omega})$ es la función de forma del modelo, la cual queda determinada en las expresiones (B.60a, B.61a, B.62a y B.63a). Los filtros del proceso iterativo para los esquemas implícito $H(\bar{\omega})$ y explícito $H'(\bar{\omega})$ se determinan mediante las expresiones (3.18) y (3.31), obteniendo la función de rigidez del modelo $K(\bar{\omega})$ mediante (B.60d, B.61d, B.62d y B.63d).

Llegado a este punto es importante destacar que dado que el proceso iterativo está comple-

tamente definido en el dominio de la frecuencia, pueden aislarse los parámetros del modelo $U(\bar{\omega})$ en cada una de las frecuencias $\bar{\omega}$. Es decir, la transformada de Fourier permite descomponer el proceso iterativo global como una base ortogonal de sistemas iterativos, actuando cada uno de ellos sobre un componente frecuencial de la señal a procesar, esto es, las fuerzas externas que se aplican mediante $Q_{\xi-1}(\bar{\omega})$. La Figura 5.1 del Capítulo 5 esquematiza el algoritmo de cálculo de la posición y forma del modelo en cada iteración ξ .

Esta característica presenta notables ventajas en la implementación práctica del proceso iterativo, lo que reduce sustancialmente el elevado coste computacional del esquema iterativo en modelos multidimensionales [Neuenschwander et al., 1997]. En el Capítulo 5 se detalla el proceso de implementación del modelo deformable mediante matrices de forma y rigidez, obtenidas a partir de las transformadas discretas de Fourier de las diferentes señales.

Asimismo, la descomposición frecuencial del sistema iterativo permite el estudio de la convergencia de forma independiente para cada uno de los componentes frecuenciales $U(\bar{\omega})$, siendo aplicable a modelos deformables de cualquier dimensión sin más que particularizar la $F(\bar{\omega})$ y $K(\bar{\omega})$ del modelo a utilizar.

Con todo ello, vamos a realizar para ambos esquemas de funcionamiento, un primer análisis en el que reduciremos el proceso a un sistema iterativo de primer orden. Posteriormente aplicaremos el estudio al sistema completo de segundo orden, utilizando el razonamiento descrito en el sistema simplificado.

4.1. Esquema implícito

4.1.1. Sistema de primer orden

El sistema de primer orden se obtiene cuando la masa del modelo es nula, $m = 0$. Esto es, cuando la densidad de masa es siempre nula, $\mu(\mathbf{s}) = 0$. Tal y como muestra la ecuación (2.13), con este valor de masa el término sujeto a la segunda derivada temporal desaparece. Esto es, $\mu(\mathbf{s})\partial_{tt}\mathbf{v}(\mathbf{s}, t) = 0$. Así, tras aplicar la discretización temporal, no aparecen términos que dependen de $\xi - 1$ y, por tanto, resulta un sistema iterativo de primer orden. Con el fin de aplicar este razonamiento de forma directa a la expresión (4.1), anulamos el término m y, de esta forma, los parámetros quedan como,

$$\eta = c/\Delta t, \quad a_1 = 1, \quad (4.3a)$$

$$\gamma \rightarrow \infty, \quad a_2 = 0, \quad (4.3b)$$

y la expresión (4.1) se simplifica como,

$$U_\xi(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega}) \left(U_{\xi-1}(\bar{\omega}) + \frac{Q_{\xi-1}(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \right). \quad (4.4)$$

Para determinar la convergencia del modelo, analizamos el error residual en la iteración ξ -ésima, definido como la diferencia entre el valor de la iteración actual y el valor final,

$$E_\xi(\bar{\omega}) = U_\xi(\bar{\omega}) - U_\infty(\bar{\omega}), \quad (4.5)$$

Este análisis se va realizar para los diferentes valores de $\bar{\omega}$, con el fin de determinar la convergencia en todos los componentes frecuenciales del modelo. De forma similar a [Verdú-Monedero et al., 2008b], se fijan dos suposiciones principales. En primer lugar asumimos variaciones lentas del término de fuerzas externas $Q_{\xi-1}(\bar{\omega})$, considerándose estas fuerzas como constantes a lo largo del tiempo $Q(\bar{\omega})$. En segundo lugar, se espera que los componentes espectrales de las variables nodales $U_\xi(\bar{\omega})$ converjan a su valor final de equilibrio $U_\infty(\bar{\omega})$,

$$Q_{\xi-1}(\bar{\omega}) \approx Q(\bar{\omega}), \quad (4.6a)$$

$$U_\xi(\bar{\omega}) \rightarrow U_\infty(\bar{\omega}) = U(\bar{\omega}). \quad (4.6b)$$

Los resultados experimentales del Capítulo 6 muestran que estas suposiciones son perfectamente admisibles. Bajo estos supuestos, a partir de la ecuación (4.4) se obtiene,

$$U_\xi(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega}) \left(U_{\xi-1}(\bar{\omega}) + \frac{Q(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \right), \quad (4.7a)$$

$$U(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega}) \left(U(\bar{\omega}) + \frac{Q(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \right), \quad (4.7b)$$

$$E_\xi(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega}) (U_{\xi-1}(\bar{\omega}) - U(\bar{\omega})) = H(\bar{\omega}) E_{\xi-1}(\bar{\omega}). \quad (4.7c)$$

Suponiendo que en la iteración inicial el error residual era $E_0(\bar{\omega})$, el valor del error en una iteración cualquiera ξ se puede obtener a partir del error inicial como,

$$E_\xi(\bar{\omega}) = (H(\bar{\omega}))^\xi E_0(\bar{\omega}). \quad (4.8)$$

Si queremos asegurar la estabilidad cuando $\xi \rightarrow \infty$, es necesario garantizar que $|H(\bar{\omega})| \leq 1 \forall \bar{\omega}$. Para garantizar la convergencia, será necesario satisfacer $|H(\bar{\omega})| < 1 \forall \bar{\omega}$. De esta forma, aseguramos que todos los componentes frecuenciales del error decrecen con ξ . Por las expresiones que nos permiten obtener $H(\bar{\omega})$, es decir (3.18), (B.60a), (B.61a), (B.62a) y (B.63a), se puede demostrar que para las dos funciones de forma analizadas y para cualquier número de dimensiones, la función de transferencia del filtro $H(\bar{\omega})$ es una función real positiva par tal que,

$$H : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{H}, \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{H} :=]0, 1] \subset \mathbb{R}, \quad (4.9b)$$

$$\bar{\Omega} := \underbrace{]-\pi, \pi] \times \dots \times]-\pi, \pi]}_e \subset \mathbb{R}^e. \quad (4.9c)$$

$H(\bar{\omega})$ presenta un espectro periódico, repitiéndose sus valores cada 2π en cada dimensión del dominio frecuencial. Así, $H(\bar{\omega})$ alcanza su máximo en la frecuencia $\bar{\omega} = \bar{0}$ y en múltiplos de $\bar{2\pi}$. Es decir, $H(\bar{\omega})|_{\max} = H(\bar{\omega})|_{\bar{\omega}=\bar{0}} = H(\bar{\omega})|_{\bar{\omega}=2k\pi} = 1$, donde k es un número entero que puede ser distinto para cada dimensión. Para el resto de frecuencias, $H(\bar{\omega})$ tiene un valor menor que la unidad. Notar que el valor de $H(\bar{\omega})$ decrece monótonamente a medida que nos separamos de estos valores $\bar{\omega} = \bar{2k\pi}$. Por otra parte, su valor mínimo tiene lugar en las frecuencias $\bar{\omega} = \overline{(2k+1)\pi}$, siendo siempre mayor que cero. Esto es, $H(\bar{\omega})|_{\min} = H(\bar{\omega})|_{\bar{\omega}=\overline{(2k+1)\pi}} > 0$. Gráficamente se puede comprobar este resultado también a partir de las Figuras C.1-C.10 incluidas en el Anexo C.1.

Este resultado garantiza que bajo los supuestos anteriores el sistema iterativo converge para todos los componentes frecuenciales $\bar{\omega} \neq \bar{0}$. A lo largo de las iteraciones, el sistema minimiza el error residual, esto es, las diferencias entre la posición inicial y la posición final inducida por las fuerzas externas e internas del modelo. En cambio, para la componente continua $\bar{\omega} = \bar{0}$ y múltiplos de $\bar{2\pi}$, el filtro tiene amplitud unidad, lo que no puede garantizar su convergencia, aunque si su estabilidad.

Esto significa que el error residual de los valores medios para cada una de las funciones coordenadas, es decir, el error en la posición media del modelo, podría no reducirse mediante las fuerzas internas. Sin embargo, se puede garantizar que este error no aumentará, al tener el filtro amplitud unidad para dicha componente continua. Además, las fuerzas externas irán empujando globalmente el modelo a los datos, por lo que finalmente la componente continua también tenderá a igualarse a la proporcionada por el conjunto de datos, como se puede comprobar en las aplicaciones mostradas en el Capítulo 6.

4.1.2. Sistema de segundo orden

Para analizar la convergencia del sistema de segundo orden en el esquema implícito partimos de la ecuación (4.1). Asignando un valor no nulo a la masa, $m \neq 0 \rightarrow a_2 \neq 0$, obtenemos una sistema iterativo de segundo orden que incluye el término $U_{\xi-2}(\bar{\omega})$.

En este caso, no podemos aplicar un procedimiento como el utilizado en el sistema de primer orden. Para cualquier valor $\gamma \neq 0$ los parámetros de primer y segundo orden están presentes y acotados por $1 < a_1$ y $|a_2| < 1$. El filtro tiene idéntico valor y está por tanto acotado por $H(\bar{\omega}) \leq 1$. Así, el término $a_1 H(\bar{\omega})$ puede ser mayor que 1 para algunas $\bar{\omega}$. Esto provoca el crecimiento con cada iteración de los componentes frecuenciales asociados, generando inestabilidad en el sistema.

Por otra parte, el término de primer orden $U_{\xi-1}(\bar{\omega})$ se convierte en la siguiente iteración en el término de segundo orden $U_{\xi-2}(\bar{\omega})$. Éste es multiplicado en cada iteración por $a_2 H(\bar{\omega})$, cuyo valor

está acotado por $|a_2 H(\bar{\omega})| < 1 \forall \bar{\omega}$. Este parámetro de segundo orden a_2 , puede llegar a compensar el efecto de inestabilidad del parámetro a_1 . Por este motivo, es necesario el análisis en conjunto de la influencia de ambos parámetros sobre el sistema.

Como en el caso de primer orden, asumimos (4.6). Asimismo, analizamos para los diferentes valores de $\bar{\omega}$, el error residual en la iteración ξ -ésima, definido en (4.5). Bajo estas consideraciones, a partir de la ecuación (4.1) se obtiene,

$$U_\xi(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega}) \left(a_1 U_{\xi-1}(\bar{\omega}) + a_2 U_{\xi-2}(\bar{\omega}) + \frac{Q(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \right), \quad (4.10a)$$

$$U(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega}) \left(a_1 U(\bar{\omega}) + a_2 U(\bar{\omega}) + \frac{Q(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \right), \quad (4.10b)$$

$$E_\xi(\bar{\omega}) = a_1 H(\bar{\omega}) E_{\xi-1}(\bar{\omega}) + a_2 H(\bar{\omega}) E_{\xi-2}(\bar{\omega}). \quad (4.10c)$$

Aplicando la transformada Z con respecto a la variable temporal esta ecuación resulta en,

$$E(\bar{\omega}, z) = a_1 H(\bar{\omega}) E(\bar{\omega}, z) z^{-1} + a_2 H(\bar{\omega}) E(\bar{\omega}, z) z^{-2}. \quad (4.11)$$

Dado que esta ecuación representa un sistema iterativo discreto de segundo orden, podemos calcular los polos del sistema mediante,

$$p_{1,2}(\bar{\omega}) = \frac{a_1 H(\bar{\omega})}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 H^2(\bar{\omega}) + 4a_2 H(\bar{\omega})}. \quad (4.12)$$

Como se analiza en esta sección, estos polos van a proporcionar información sobre la convergencia y estabilidad para cada componente frecuencial $U(\bar{\omega})$ a lo largo del proceso iterativo.

Utilizando un procedimiento similar al utilizado por [Verdú-Monedero et al., 2008b], pero aplicado directamente en el dominio de Fourier, vamos a reducir el orden del sistema (4.1) expresándolo en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} U_\xi(\bar{\omega}) \\ U_{\xi-1}(\bar{\omega}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 H(\bar{\omega}) & a_2 H(\bar{\omega}) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{\xi-1}(\bar{\omega}) \\ U_{\xi-2}(\bar{\omega}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{H(\bar{\omega}) Q_{\xi-1}(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Aplicando las siguientes definiciones,

$$\mathbf{U}_\xi(\bar{\omega}) = \begin{bmatrix} U_\xi(\bar{\omega}) \\ U_{\xi-1}(\bar{\omega}) \end{bmatrix}, \quad (4.14a)$$

$$\mathbf{H}(\bar{\omega}) = \begin{bmatrix} a_1 H(\bar{\omega}) & a_2 H(\bar{\omega}) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.14b)$$

$$\mathbf{Q}_{\xi-1}(\bar{\omega}) = \begin{bmatrix} \frac{H(\bar{\omega}) Q_{\xi-1}(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.14c)$$

el sistema se puede escribirse como un sistema de primer orden,

$$\mathbf{U}_\xi(\bar{\omega}) = \mathbf{H}(\bar{\omega}) \mathbf{U}_{\xi-1}(\bar{\omega}) + \mathbf{Q}_{\xi-1}(\bar{\omega}). \quad (4.15)$$

El vector $\mathbf{U}(\bar{\omega})$ recibe el nombre de modelo equivalente. De nuevo asumimos (4.6) y analizamos el error residual equivalente en la iteración ξ -ésima $\mathbf{E}_\xi(\bar{\omega})$ definido como,

$$\mathbf{E}_\xi(\bar{\omega}) = \begin{bmatrix} E_\xi(\bar{\omega}) \\ E_{\xi-1}(\bar{\omega}) \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

donde $E_\xi(\bar{\omega})$ es el error residual en la frecuencia definido en (4.5). Con esto, obtenemos el siguiente sistema de primer orden para el error equivalente,

$$\mathbf{E}_\xi(\bar{\omega}) = \mathbf{H}(\bar{\omega}) (\mathbf{U}_{\xi-1}(\bar{\omega}) - \mathbf{U}(\bar{\omega})) = \mathbf{H}(\bar{\omega}) \mathbf{E}_{\xi-1}(\bar{\omega}). \quad (4.17)$$

Suponiendo para la iteración inicial un error residual de $\mathbf{E}_0(\bar{\omega})$, el valor del vector error en una iteración cualquiera ξ se puede calcular como,

$$\mathbf{E}_\xi(\bar{\omega}) = (\mathbf{H}(\bar{\omega}))^\xi \mathbf{E}_0(\bar{\omega}) \quad (4.18)$$

La matriz $\mathbf{H}(\bar{\omega})$ describe explícitamente las características de convergencia del componente frecuencial $\bar{\omega}$ del modelo equivalente $\mathbf{U}(\bar{\omega})$. Esta matriz puede ser diagonalizada usando su descomposición en autovectores y autovalores. Esto es, $\mathbf{H}(\bar{\omega}) = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^{-1}$ donde $\mathbf{D}(\bar{\omega})$ es una matriz diagonal con los autovalores $\lambda_1(\bar{\omega})$ y $\lambda_2(\bar{\omega})$. Por otra parte, $\mathbf{L}(\bar{\omega})$ es una matriz cuyas columnas son los autovectores correspondientes.

Estos autovalores de $\mathbf{H}(\bar{\omega})$ pueden calcularse a partir de la ecuación (4.14b) y coinciden con los polos obtenidos en (4.12). Es decir, $\lambda_{1,2}(\bar{\omega}) = p_{1,2}(\bar{\omega})$. Por tanto, ambos elementos proporcionan la misma información sobre los modos de convergencia del sistema iterativo así como la evolución del modelo hacia la situación final.

Dependiendo del signo del discriminante de la ecuación (4.12),

$$\Delta(\bar{\omega}) = a_1^2 H^2(\bar{\omega}) + 4a_2 H(\bar{\omega}). \quad (4.19)$$

para cada vector de frecuencias $\bar{\omega}$, estos polos (o autovalores) pueden ser dos valores complejos conjugados, dos valores reales distintos o bien un polo único doble, resultando en un proceso subamortiguado, sobreamortiguado o críticamente amortiguado respectivamente.

Como se indica en [Varga, 1962, Young, 1971], los métodos iterativos expresados en forma matricial convergen si y sólo si el radio espectral de la matriz de iteración $\mathbf{H}(\bar{\omega})$ es estrictamente menor que la unidad, $\rho(\mathbf{H}(\bar{\omega})) < 1$. El radio espectral se calcula como el máximo de los módulos de los autovalores de la matriz,

$$\rho(\mathbf{H}(\bar{\omega})) := \max \{ |\lambda_i(\bar{\omega})| \}_{i=1,2}, \quad (4.20)$$

De igual forma, el sistema es estable si $\rho(\mathbf{H}(\bar{\omega})) \leq 1$. Notar que cada componente espectral $\bar{\omega}$ del modelo $\mathbf{U}(\bar{\omega})$ está relacionado con un $\rho(\mathbf{H}(\bar{\omega}))$ distinto y muestra, por tanto, un comportamiento diferente. Así pues, para asegurar convergencia y estabilidad, las condiciones $|\lambda_{1,2}(\bar{\omega})| < 1$ y

$|\lambda_{1,2}(\bar{\omega})| \leq 1$ deben ser satisfechas respectivamente, para todos los componentes espectrales del modelo en los tres modos de convergencia posibles.

Régimen transitorio y estacionario. Llegados a este punto es importante distinguir entre las dos etapas que tienen lugar en el proceso de adaptación del modelo al conjunto de datos. Durante la primera fase, denominada régimen transitorio del proceso iterativo, el modelo se mueve rápidamente desde la forma y posición de inicialización hasta la forma aproximada del objeto a ser estimado. Un ejemplo de este proceso se puede apreciar entre las Figuras 4.2(a) y 4.2(b). El error durante esta etapa muestra un comportamiento oscilatorio en todos los modos de convergencia y su envolvente puede ser aproximada por,

$$\Gamma(E_\xi(\bar{\omega})) \approx |\varrho(\bar{\omega})| \tilde{\lambda}(\bar{\omega})^\xi, \quad (4.21)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ denota la función envolvente y el término $\varrho(\bar{\omega})$ se refiere a la diferencia en el componente frecuencial $\bar{\omega}$ del modelo entre la inicialización del modelo y el estado final. Es decir,

$$\varrho(\bar{\omega}) = U_0(\bar{\omega}) - U_\infty(\bar{\omega}). \quad (4.22)$$

En la ecuación (4.21), $|\tilde{\lambda}(\bar{\omega})|$ recoge la información de los autovalores, la cual determina el modo de convergencia de cada componente espectral. Para autovalores dobles complejos,

$$|\tilde{\lambda}(\bar{\omega})| = |\lambda_1(\bar{\omega})| = |\lambda_2(\bar{\omega})| \quad (4.23a)$$

para autovalor único,

$$|\tilde{\lambda}(\bar{\omega})| = |\lambda(\bar{\omega})| \quad (4.23b)$$

y para autovalores dobles reales,

$$|\tilde{\lambda}(\bar{\omega})| = \frac{|\lambda_1(\bar{\omega}) + \lambda_2(\bar{\omega})|}{2}. \quad (4.23c)$$

Es importante resaltar que la aproximación asumida en (4.6a) no se cumple normalmente en el régimen transitorio. Esto es debido a que la posición del modelo varía rápidamente y, por tanto, las fuerzas externas que se aplican en cada punto también lo hacen. Por este motivo, los autovalores λ_1 y λ_2 calculados anteriormente, aunque permiten aproximar la evolución del error mediante (4.21), realmente no coinciden con los polos del sistema que se obtendrían sin tener en cuenta dicha aproximación (4.6a).

En la Sección 4.3, se simula la evolución del error durante el estado transitorio en modelos uni- y bidimensionales y se compara con la aproximación teórica (4.21) para los tres modos de convergencia.

Figura 4.2.: Ejemplo de adaptación de modelo deformable a un conjunto de datos. Por la evolución en la forma del modelo se observa que de forma aproximada entre (a) y (b) el modelo ha iterado en régimen transitorio y entre (b) y (c) la adaptación se ha realizado en régimen estacionario. Los nodos y variables paramétricas están dibujadas en azul. Las flechas en color rojo indican las fuerzas externas generadas mediante el gradiente de los datos.

Una vez el modelo llega a los límites del conjunto de datos a ser caracterizado, comienza la segunda etapa del proceso adaptativo. Esta fase recibe el nombre de régimen estacionario y se puede apreciar en las Figuras 4.2(b)-4.2(c). En el transcurso de esta etapa, el modelo tiende a alcanzar el equilibrio entre fuerzas internas y externas. Esta fase tiene una mayor duración que la anterior, dado que implica un ajuste fino del modelo a los datos. Además, dependiendo del modo de convergencia, la velocidad en el ajuste del modelo varía sustancialmente. Desde el punto de vista teórico, la máxima velocidad de convergencia debe alcanzarse cuando el sistema trabaja en amortiguamiento crítico, aunque esto normalmente no es posible para todos los componentes espectrales del sistema. Por este motivo, la evolución del modelo en este régimen estacionario es examinada a continuación de forma diferenciada en cada uno de los tres posibles modos de convergencia.

Modo críticamente amortiguado. Analizamos en primer lugar este modo, el cual tiene lugar cuando se cumple $\Delta(\bar{\omega}) = 0$, donde el discriminante $\Delta(\bar{\omega})$ está definido en (4.19). Por tanto, igualando a cero la expresión $a_1^2 H(\bar{\omega})^2 + 4a_2 H(\bar{\omega}) = 0$, sustituyendo los valores de las constantes a_1 y a_2 y teniendo en cuenta que en todos los casos $0 < H(\bar{\omega}) \leq 1$, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado,

$$H(\bar{\omega})\gamma^2 + (4H(\bar{\omega}) - 4)\gamma + (4H(\bar{\omega}) - 4) = 0, \quad (4.24)$$

que permite calcular el valor del parámetro γ que anula $\Delta(\bar{\omega})$ en función del valor del filtro $H(\bar{\omega})$,

$$\gamma_{c;1,2}(\bar{\omega}) = \frac{2}{H(\bar{\omega})} \left(1 - H(\bar{\omega}) \pm \sqrt{1 - H(\bar{\omega})} \right), \quad (4.25)$$

donde $\gamma_{c;1,2}(\bar{\omega})$ son por tanto los valores del parámetro γ que permite trabajar en amortiguamiento crítico para la frecuencia $\bar{\omega}$. El significado físico del parámetro γ es una densidad de amortiguación

y, por tanto, debe tener un valor positivo. Como el caso “-” de la expresión (4.25) proporciona un $\gamma_c(\bar{\omega}) < 0$, este caso no es válido y el valor del γ crítico que determina el modo críticamente amortiguado será,

$$\gamma_c(\bar{\omega}) = \frac{2}{H(\bar{\omega})} \left(1 - H(\bar{\omega}) + \sqrt{1 - H(\bar{\omega})} \right). \quad (4.26)$$

Este parámetro $\gamma_c(\bar{\omega})$ dependerá de la amplitud del filtro $H(\bar{\omega})$, la cual depende a su vez de la frecuencia $\bar{\omega}$,

$$H : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \gamma_c : \mathbf{H} \rightarrow]0, \gamma_{c_{\max}}[, \quad (4.27)$$

donde $\mathbf{H}$ y $\bar{\Omega}$ son los definidos en (4.9b-4.9c). La Figura 4.3(a) muestra el valor de $\gamma_c(\bar{\omega})$ en función de $H(\bar{\omega})$. Notar que a medida que aumentan las diferentes frecuencias $\bar{\omega}$ se reduce el valor de $H(\bar{\omega})$ y, por tanto, se incrementa el valor de $\gamma_c(\bar{\omega})$. Esto es,

$$\gamma_{c_{\max}} = \gamma_c(\bar{\omega})|_{H(\bar{\pi})} = \gamma_c(\bar{\pi}). \quad (4.28)$$

Por el contrario, a la frecuencia $\bar{\omega} = \bar{0}$, el valor del filtro $H(\bar{0}) = 1$, por lo que,

$$\gamma_{c_{\min}} = \gamma_c(\bar{\omega})|_{H(\bar{0})} = \gamma_c(\bar{0}) = 0. \quad (4.29)$$

Ahora bien, por su significado físico γ debe ser positivo y por tanto, su rango queda limitado a $0 < \gamma_c(\bar{\omega}) \leq \gamma_{c_{\max}}$. Esto impide trabajar en modo críticamente amortiguado en la frecuencia continua, dado que $\gamma = 0$ no es un valor utilizable.

Sustituyendo el valor de $\gamma_c(\bar{\omega})$ en la expresión (4.12) y teniendo en cuenta que los autovalores coinciden con los polos $\lambda_{1,2}(\bar{\omega}) = p_{1,2}(\bar{\omega})$, obtenemos el valor de $\lambda_c(\bar{\omega})$ para este modo de convergencia,

$$\lambda_c(\bar{\omega}) = \frac{H(\bar{\omega})}{2} \left(1 + \frac{H(\bar{\omega})}{H(\bar{\omega}) - 2(H(\bar{\omega}) - 1 - \sqrt{1 - H(\bar{\omega})})} \right). \quad (4.30)$$

La función de transferencia del filtro para $\bar{\omega} \neq \bar{0}$ tiene un valor entre $0 < H(\bar{\omega}) < 1$. Así, el autovalor queda acotado por $0 < \lambda_c(\bar{\omega}) < 1$,

$$H : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \lambda_c : \mathbf{H} \rightarrow]0, 1[, \quad (4.31)$$

donde $\mathbf{H}$ y $\bar{\Omega}$ son los definidos en (4.9b-4.9c). De esta forma, podemos asegurar que cuando el sistema trabaja en amortiguamiento crítico converge para todas las frecuencias posibles de funcionamiento. La Figura 4.3(b) muestra el valor de $\lambda_c(\bar{\omega})$ en función de $H(\bar{\omega})$.

El parámetro γ se fija normalmente constante durante del proceso iterativo, por ejemplo, $\gamma = \gamma_s$. Por tanto, el proceso evoluciona a través del modo críticamente amortiguado sólo para las frecuencias $\bar{\omega}_s$ cuya amplitud del filtro sea $H(\bar{\omega}_s) = H_{cs}$, donde el valor H_{cs} puede ser calculado mediante,

$$H_{cs} = \frac{4(1 + \gamma_s)}{(2 + \gamma_s)^2}. \quad (4.32)$$

Para el resto de frecuencias $\bar{\omega} \neq \bar{\omega}_s$, el sistema lleva a cabo la adaptación bien bajo el modo subamortiguado o bien sobre el modo sobreamortiguado como muestra la Figura 4.4.

Figura 4.3.: (a) Valor del parámetro $\gamma_c(\bar{\omega})$ que determina el modo críticamente amortiguado en función de $H(\bar{\omega})$. (b) Autovalor $\lambda_c(\bar{\omega})$ para el modo críticamente amortiguado en función de $H(\bar{\omega})$. En ambas gráficas, la abscisa $H(\bar{\omega})$ tiene un valor máximo unidad para la frecuencia continua, $H(\bar{0}) = 1$ y decrece a medida que $\bar{\omega} \rightarrow \bar{\pi}$ alcanzándose el mínimo precisamente en esa frecuencia, $H_{\min}(\bar{\omega}) = H(\bar{\pi})$.

Modo subamortiguado. Dado un cierto vector de frecuencias $\bar{\omega}$, si $\gamma_s < \gamma_c(\bar{\omega})$ el discriminante resultante es menor que cero, es decir $\Delta(\bar{\omega}) < 0$. Por tanto, para todas las frecuencias $\bar{\omega}$ que satisfacen $H(\bar{\omega}) < H_{cs}$, con H_{cs} detallado en la ecuación (4.32), el sistema evoluciona bajo un modo subamortiguado, siendo los autovalores complejos conjugados situados dentro de la circunferencia de radio unidad,

$$H : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \lambda_{1,2;\Delta<0} : \mathbf{H} \rightarrow \Lambda_{\Delta<0}, \quad (4.33a)$$

$$\Lambda_{\Delta<0} := \{c \in \mathbb{C} : 0 < |c| \leq 1\} \quad (4.33b)$$

donde $\bar{\Omega}$ y $\mathbf{H}$ son los dominios definidos en (4.9b-4.9c).

Así pues, para cada valor del filtro $H(\bar{\omega})$, cuando el parámetro γ_s elegido se encuentra por debajo de la curva $\gamma_c(\bar{\omega})$ de la Figura 4.4, el sistema trabaja en modo subamortiguado. O dicho de otro modo, una vez fijado γ_s , las frecuencias $\bar{\omega}$ que generen una amplitud de filtro que satisfaga $H(\bar{\omega}) < H_{cs}$ tendrán el modo subamortiguado. Notar que este resultado se aplica de forma combinada al vector multidimensional de frecuencias $\bar{\omega}$. Es decir, incrementando una frecuencia y reduciendo otra podemos obtener el mismo valor de $H(\bar{\omega})$. Por ejemplo, para el caso bidimensional, aumentando el valor de ω_1 y reduciendo ω_2 , se puede disponer de idéntico tipo de funcionamiento.

La Figura 4.5 muestra el módulo de los dos autovalores $\lambda_{1,2}(\bar{\omega})$, en función del filtro $H(\bar{\omega})$ y del parámetro γ . La línea discontinua roja dibujada sobre la superficie en tonos de gris, corresponde al valor de $\gamma_c(\bar{\omega})$. Por tanto, los autovalores con modo subamortiguado son los situados debajo de esta línea. Se puede comprobar que el valor máximo de los autovalores se corresponde con la

Figura 4.4.: Modos de convergencia para diferentes valores del filtro $H(\bar{\omega})$ y del parámetro γ . Fijado un determinado γ_s para el proceso, los componentes frecuenciales $\bar{\omega}$ que resulten en un $H(\bar{\omega}) < H_{cs}$ evolucionan en modo subamortiguado. Los componentes que produzcan un $H_{cs} < H(\bar{\omega})$ iteran en modo sobreamortiguado.

frecuencia continua, $\lambda_{1,2;\bar{\omega}=\bar{0}} = 1$. Notar que ambos autovalores tienen el mismo módulo dentro de esta zona de funcionamiento, y por tanto, ambas Figuras 4.5(a) y 4.5(b) son idénticas por debajo de la curva $\gamma_c(\bar{\omega})$.

De este resultado podemos concluir que cuando se utiliza el esquema implícito, si el sistema trabaja en modo subamortiguado el proceso iterativo será estable para cualquier frecuencia $\bar{\omega}$ y además será convergente para la componente continua (frecuencias $\bar{\omega} = \bar{0}$ y $\bar{\omega} = \overline{2k\pi}$).

Modo sobreamortiguado. El discriminante es mayor que cero, $\Delta(\bar{\omega}) > 0$, para el vector de frecuencias $\bar{\omega}$ que satisface las desigualdad $\gamma_c(\bar{\omega}) < \gamma_s$. En este caso sobreamortiguado, cada componente espectral del sistema iterativo presenta dos autovalores reales positivos con distinto valor acotados por el intervalo $]0, 1]$,

$$H : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \lambda_{1,2;\Delta>0} : \mathbf{H} \rightarrow]0, 1] \subset \mathbb{R} \quad (4.34a)$$

donde $\bar{\Omega}$ y $\mathbf{H}$ son los dominios definidos en (4.9b-4.9c). El autovalor $\lambda_{1;\Delta>0}$ se corresponde con el signo " + " de la expresión (4.12) y será por tanto el de mayor valor de los dos. Dado que la velocidad de convergencia de cada componente espectral $\bar{\omega}$ del sistema iterativo depende de su

Figura 4.5.: Módulos de los autovalores para diferentes valores de $H(\bar{\omega})$ y parámetro γ : (a) $\lambda_1(\bar{\omega})$; (b) $\lambda_2(\bar{\omega})$. En línea discontinua se marca $\gamma_c(\bar{\omega})$, esto es, la frontera entre el modo sobreamortiguado ($\Delta(\bar{\omega}) > 0$) y subamortiguado ($\Delta(\bar{\omega}) < 0$).

autovalor correspondiente, $\lambda_{1;\Delta>0}$ será el autovalor dominante que fijará la velocidad de convergencia del sistema iterativo en la frecuencia $\bar{\omega}$.

Aplicando un razonamiento similar al caso anterior, en el modo sobreamortiguado el valor del filtro cumple $H_{cs} < H(\bar{\omega})$, con H_{cs} definido en (4.32). Por tanto, dado un cierto $H(\bar{\omega})$, cuando γ_s se sitúa por encima de la curva discontinua $\gamma_c(\bar{\omega})$ de la Figura 4.4, el sistema evoluciona en modo sobreamortiguado. Recordar que esta curva, se obtiene mediante la expresión (4.26).

Así pues, la zona situada por encima de la línea en trazo discontinuo de la Figura 4.5 muestra el módulo de los dos autovalores $\lambda_1(\bar{\omega})$ y $\lambda_2(\bar{\omega})$ trabajando en sobreamortiguado. El valor máximo de los autovalores se corresponde con la frecuencia continua, $\lambda_1(\bar{0}) = 1$, proporcionando el mismo resultado en cuanto a convergencia y estabilidad que el descrito en el caso subamortiguado. Notar que para esta zona, $\lambda_1(\bar{\omega}_s) > \lambda_2(\bar{\omega}_s) \forall \bar{\omega}$.

En consecuencia, cada componente espectral del modelo itera en uno de los tres posibles modos de convergencia en función de la amplitud del filtro $H(\bar{\omega})$ y el parámetro γ_s elegido. Para todos los modos, los autovalores están acotados por $]0, 1]$ si $\bar{\omega} \neq \bar{0}$. Para el caso concreto de $\bar{\omega} = \bar{0}$ los autovalores son iguales a la unidad y el modo de iteración es sobreamortiguado. En conclusión, el sistema operativo propuesto definido por medio de un esquema implícito converge para todas las frecuencias excepto para $\bar{\omega} = \bar{0}$, donde al menos podemos garantizar la estabilidad. Por tanto, el error residual se reduce a lo largo de las iteraciones al aproximando el modelo a los datos.

4.2. Esquema explícito

4.2.1. Sistema de primer orden

Para el caso explícito, el sistema de primer orden se obtiene igualmente cuando la masa del modelo es nula, $m = 0$ ó $\mu(s) = 0$, desapareciendo como muestra (2.13) el término sujeto a la segunda derivada temporal. Para este sistema, los parámetros η , γ , a_1 y a_2 coinciden con los definidos en (4.3). Con estos valores, la expresión (4.2) se simplifica como,

$$U_\xi(\bar{\omega}) = H'(\bar{\omega}) U_{\xi-1}(\bar{\omega}) + \frac{Q_{\xi-1}(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})}, \quad (4.35a)$$

$$H'(\bar{\omega}) = 1 - \frac{K(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})}. \quad (4.35b)$$

Para determinar la convergencia y estabilidad del modelo, vamos a utilizar los mismos supuestos del esquema implícito y resumidos en la ecuación (4.6). Es decir, variaciones lentas del

término de fuerzas externas $Q(\bar{\omega})$ y que las variables nodales $U(\bar{\omega})$ convergen a su valor en equilibrio. Asimismo se utiliza un procedimiento de análisis similar al descrito en la Sección 4.1.1. Bajo estas premisas, a partir de la ecuación (4.35a) se obtienen,

$$U_{\xi}(\bar{\omega}) = H'(\bar{\omega}) U_{\xi-1}(\bar{\omega}) + \frac{Q(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})}, \quad (4.36a)$$

$$U(\bar{\omega}) = H'(\bar{\omega}) U(\bar{\omega}) + \frac{Q(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})}, \quad (4.36b)$$

$$E_{\xi}(\bar{\omega}) = H'(\bar{\omega}) (U_{\xi-1}(\bar{\omega}) - U(\bar{\omega})) = H'(\bar{\omega}) E_{\xi-1}(\bar{\omega}). \quad (4.36c)$$

Suponiendo que un error residual en la iteración inicial de $E_0(\bar{\omega})$, el valor del error en una iteración cualquiera ξ se puede obtener a partir del error inicial como,

$$E_{\xi}(\bar{\omega}) = (H'(\bar{\omega}))^{\xi} E_0(\bar{\omega}) \quad (4.37)$$

Este resultado nos lleva a que para asegurar la estabilidad del sistema iterativo cuando $\xi \rightarrow \infty$, hay que garantizar que $|H'(\bar{\omega})| \leq 1 \forall \bar{\omega}$, estando $H'(\bar{\omega})$ definido en (4.35b). Para asegurar la convergencia, debe cumplirse además que $|H'(\bar{\omega})| < 1 \forall \bar{\omega}$. Por tanto, es necesario analizar el término $H'(\bar{\omega})$ para determinar su valor máximo.

El valor de $K(\bar{\omega})/F(\bar{\omega})$ y, por tanto el de $|H'(\bar{\omega})|$, puede ser calculado fácilmente para cada función de forma, vector de frecuencias $\bar{\omega}$ y número de dimensiones e , mediante las expresiones (B.60a, B.61a, B.62a y B.63a). Para todos los casos, $K(\bar{\omega})/F(\bar{\omega})$ es una función positiva par monótona creciente con las frecuencias $\bar{\omega}$, lo que en la práctica significa que tiene comportamiento paso alto. Asimismo, para el intervalo de frecuencias $0 \leq \omega_j \leq \pi$, con $1 \leq j \leq e$, su rango de valores está acotado por,

$$0 \leq \frac{K(\bar{\omega})}{F(\bar{\omega})} \leq \left. \frac{K(\bar{\omega})}{F(\bar{\omega})} \right|_{\max}. \quad (4.38)$$

El valor mínimo de esta relación tiene lugar para la frecuencia continua $\bar{\omega} = \bar{0}$,

$$\left. \frac{K(\bar{\omega})}{F(\bar{\omega})} \right|_{\min} = \frac{K(\bar{0})}{F(\bar{0})} = 0, \quad (4.39a)$$

mientras que el valor máximo se obtiene para los valores máximos de las frecuencias $\bar{\omega} = \bar{\pi}$,

$$\left. \frac{K(\bar{\omega})}{F(\bar{\omega})} \right|_{\max} = \frac{K(\bar{\pi})}{F(\bar{\pi})}. \quad (4.39b)$$

Notar que $K(\bar{\omega})/F(\bar{\omega})|_{\max}$ depende de la función de forma y dimensiones del modelo. La Tabla 4.1 muestra los valores máximos según los parámetros α y β para diferencias finitas y B-splines. Para el caso de diferencias finitas, se muestran además los límites según el orden de la derivada fraccionaria σ definido en (B.61e).

La Figura 4.6 representa el valor $K(\omega)/F(\omega)$ en el caso unidimensional para los diferentes valores de los parámetros α y β . Se puede comprobar gráficamente que efectivamente esta relación

Número de dimensiones	Función de Forma		
	Diferencias finitas	B-splines	
1	$4\alpha + 16\beta$	4^σ	$(\alpha + 10\beta)^{\frac{168}{17}}$
2	$8\alpha + 64\beta$	8^σ	$(2\alpha + \frac{336}{17}\beta)^{\frac{168}{17}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e	$4e\alpha + 4^{1+e}\beta$	$(4e)^\sigma$	No generalizada

Tabla 4.1.: Valores $K(\bar{\omega})/F(\bar{\omega})|_{\max}$ según la función de forma utilizada, el número de dimensiones del modelo y los parámetros α y β , o bien el parámetro σ .

tiene comportamiento frecuencial paso alto con una ganancia mayor para el caso de los B-splines que para las diferencias finitas. Asimismo, la relación entre los parámetros α y β también modifica la ganancia de esta relación.

Figura 4.6.: Respuesta en frecuencia de $K(\omega)/F(\omega)$ para modelos unidimensionales con diferentes valores de los parámetros α y β : (a) B-splines; (b) Diferencias finitas.

Las Figuras C.15-C.17 incluidas en el Anexo C.2, muestran esta misma relación $K(\bar{\omega})/F(\bar{\omega})$ para el caso de modelos bidimensionales. En este caso tenemos espectros en dos dimensiones pero con características espectrales análogas a las descritas para el caso unidimensional.

Una vez especificadas la cotas mínimas y máximas de $K(\bar{\omega})/F(\bar{\omega})$, podemos analizar la condición de estabilidad,

$$\left| 1 - \frac{K(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \right| \leq 1. \quad (4.40)$$

Consideremos en primer lugar el caso positivo del módulo,

$$1 - \frac{K(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{K(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})}. \quad (4.41)$$

Dado que por definición $\eta > 0$, la condición (4.41) se cumple siempre, satisfaciendo la igualdad

para $\bar{\omega} = \bar{0}$ y la desigualdad para el resto de frecuencias. Si analizamos ahora el caso negativo,

$$-\left(1 - \frac{K(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})}\right) \leq 1 \Rightarrow \eta \geq \frac{K(\bar{\omega})}{2F(\bar{\omega})}. \quad (4.42)$$

El valor del parámetro η debe satisfacer esta condición para cualquier frecuencia. Por tanto, fijaremos el valor de este parámetro según el valor $K(\bar{\omega})/F(\bar{\omega})|_{\max}$ descrito en la Tabla 4.1. La siguiente Tabla 4.2 resume esta condición de convergencia y estabilidad según la función de forma elegida y el número de dimensiones del modelo. Para garantizar la convergencia debe cumplirse que $\eta > \eta_{\min}$, mientras que el sistema sea estable el parámetro debe satisfacer $\eta \geq \eta_{\min}$.

Número de dimensiones	Función de Forma		
	Diferencias finitas	B-splines	
1	$(4\alpha + 16\beta)\frac{1}{2}$	$4^\sigma \frac{1}{2}$	$(\alpha + 10\beta)\frac{84}{17}$
2	$(8\alpha + 64\beta)\frac{1}{2}$	$8^\sigma \frac{1}{2}$	$(2\alpha + \frac{676}{17}\beta)\frac{84}{17}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e	$(4e\alpha + 4^{1+e}\beta)\frac{1}{2}$	$(4e)^\sigma \frac{1}{2}$	No generalizada

Tabla 4.2.: Parámetro $\eta_{\min}$ necesario para garantizar convergencia y estabilidad con modelos con esquema explícito de primer orden.

Así pues, la función de transferencia del filtro $H'(\bar{\omega})$ del sistema de primer orden definido mediante un esquema explícito cumple,

$$H' : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{H}', \quad (4.43a)$$

$$\mathbf{H}' := \left[1 - \frac{K(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \Big|_{\max}, 1 \right] \subset \mathbb{R}, \quad (4.43b)$$

donde $\bar{\Omega}$ es el dominio definido en (4.9c). Notar que el extremo derecho del intervalo de $\mathbf{H}'$ se obtiene cuando $\bar{\omega} = \bar{0}$. Por otra parte, si se fija el parámetro η al valor límite definido en la Tabla 4.2, esto es si $\eta = \eta_{\min}$, la ecuación (4.43b) se transforma en,

$$\mathbf{H}' =]-1, 1] \subset \mathbb{R}. \quad (4.43c)$$

Este resultado garantiza que bajo los supuestos anteriores y la correcta elección del parámetro η , el sistema iterativo converge para todas los componentes frecuenciales $\bar{\omega} \neq \bar{0}$. De nuevo, para la componente continua no podemos garantizar la convergencia pero si estabilidad.

4.2.2. Sistema de segundo orden

Para analizar la convergencia del sistema de segundo orden en el esquema explícito se parte de la ecuación (4.2) completa. Es decir, a la masa se le asigna un valor no nulo, $m \neq 0$, con lo que aparece el coeficiente de segundo orden, $a_2 \neq 0$. Por tanto, el término $U_{\xi-2}(\bar{\omega})$ está presente, generando un sistema iterativo de segundo orden.

Al igual que en el caso implícito, el análisis directo de la convergencia no es trivial. El módulo de $H'(\bar{\omega})$, el cual multiplica en cada iteración al término de primer orden $U_{\xi-1}(\bar{\omega})$, puede ser mayor que la unidad para algunas frecuencias $\bar{\omega}$. Por otra parte, en cada iteración se realiza el producto del término de segundo orden $U_{\xi-2}(\bar{\omega})$ por el coeficiente a_2 , el cual tiene módulo menor que la unidad. Dado que el resultado del proceso viene determinado por el efecto conjunto de los términos de primer y segundo orden, es necesario de nuevo el análisis en conjunto de la influencia de ambos términos sobre el sistema.

Como en el resto de casos, aplicamos las mismas suposiciones del esquema implícito indicadas en la expresión (4.6). Analizamos el error residual $E_\xi(\bar{\omega}) = U_\xi(\bar{\omega}) - U(\bar{\omega})$ en la iteración ξ -ésima para los diferentes valores frecuenciales. A partir de la ecuación (4.2) se obtiene,

$$U_\xi(\bar{\omega}) = H'(\bar{\omega}) U_{\xi-1}(\bar{\omega}) + a_2 U_{\xi-2}(\bar{\omega}) + \frac{Q(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})}, \quad (4.44a)$$

$$U(\bar{\omega}) = H'(\bar{\omega}) U(\bar{\omega}) + a_2 U(\bar{\omega}) + \frac{Q(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})}, \quad (4.44b)$$

con lo que el error residual puede ser calculado por medio del siguiente sistema de segundo orden,

$$E_\xi(\bar{\omega}) = H'(\bar{\omega}) E_{\xi-1}(\bar{\omega}) + a_2 E_{\xi-2}(\bar{\omega}). \quad (4.44c)$$

Aplicando la transformada Z a la variable temporal esta ecuación resulta en,

$$E(\bar{\omega}, z) = H'(\bar{\omega}) E(\bar{\omega}, z) z^{-1} + a_2 E(\bar{\omega}, z) z^{-2} \quad (4.45)$$

Como en el caso implícito, a partir de (4.45) podemos calcular los polos para este sistema iterativo discreto de segundo orden,

$$p'_{1,2}(\bar{\omega}) = \frac{1}{2} H'(\bar{\omega}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{H'^2(\bar{\omega}) + 4a_2}. \quad (4.46)$$

Estos polos proporcionan información sobre la convergencia y estabilidad del proceso iterativo para cada frecuencia $\bar{\omega}$, de forma análoga al esquema implícito analizado en la Sección 4.1.2.

Mediante el uso de los supuestos (4.6), las expresiones $U_\xi(\bar{\omega})$ y $E_\xi(\bar{\omega})$ detalladas respectivamente en (4.14) y (4.16), y las definiciones,

$$\mathbf{H}'(\bar{\omega}) = \begin{bmatrix} H'(\bar{\omega}) & a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{\xi-1}(\bar{\omega}) = \begin{bmatrix} \frac{Q_{\xi-1}(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

donde $H'(\bar{\omega})$ es el filtro definido en (4.35b), podemos transformar la ecuación (4.2) en un sistema matricial iterativo de primer orden,

$$\mathbf{U}_\xi(\bar{\omega}) = \mathbf{H}'(\bar{\omega}) \mathbf{U}_{\xi-1}(\bar{\omega}) + \mathbf{Q}_{\xi-1}(\bar{\omega}), \quad (4.48)$$

y expresar el error residual mediante,

$$\mathbf{E}_\xi(\bar{\omega}) = \mathbf{H}'(\bar{\omega}) (\mathbf{U}_{\xi-1}(\bar{\omega}) - \mathbf{U}(\bar{\omega})) = \mathbf{H}'(\bar{\omega}) \mathbf{E}_{\xi-1}(\bar{\omega}). \quad (4.49)$$

El valor del error para en cualquier iteración ξ puede estimarse por medio de,

$$\mathbf{E}_\xi(\bar{\omega}) = (\mathbf{H}'(\bar{\omega}))^\xi \mathbf{E}_0(\bar{\omega}). \quad (4.50)$$

donde $\mathbf{E}_0(\bar{\omega})$ es el error residual en la iteración inicial.

La descomposición espectral de la matriz $\mathbf{H}'(\bar{\omega})$ nos proporciona los autovalores $\lambda'_{1,2}(\bar{\omega})$, los cuales son iguales a los polos del sistema definido en (4.45), es decir, $\lambda'_{1,2}(\bar{\omega}) = p'_{1,2}(\bar{\omega})$. Estos polos pueden ser calculados mediante la expresión (4.46). De forma similar al esquema implícito, estos elementos proporcionan información sobre la convergencia del modelo a lo largo de las dos etapas del proceso iterativo, siendo éstas el régimen transitorio y estacionario. Además, el discriminante de la expresión (4.46),

$$\Delta'(\bar{\omega}) = H'(\bar{\omega})^2 + 4a_2, \quad (4.51)$$

determina el modo de convergencia. Esto significa que el sistema iterará bajo un modo subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado según sea el discriminante $\Delta'(\bar{\omega}) < 0$, $\Delta'(\bar{\omega}) = 0$ o bien $\Delta'(\bar{\omega}) > 0$ respectivamente.

De nuevo, debemos distinguir las dos etapas del proceso. En el estado transitorio el modelo se acerca rápidamente a los límites del objeto a caracterizar, debido al efecto predominante de las fuerzas externas con respecto a las fuerzas internas. En cambio, durante el régimen estacionario el movimiento de adaptación es más suave, y se produce un equilibrio fino entre fuerzas internas y externas hasta que el modelo alcanza la estabilidad. La Figura 4.2 muestra la evolución del modelo a lo largo de estas dos fases.

A lo largo del estado transitorio del proceso iterativo, el error residual puede ser de nuevo aproximado por la ecuación (4.21) donde $|\tilde{\lambda}(\bar{\omega})|$ debe ser calculado a partir de los autovalores $\lambda'_{1,2}(\bar{\omega})$ de forma análoga al caso implícito (4.23). Posteriormente, en la Sección 4.3, se muestra el resultado de la simulación de la evolución del error durante el estado transitorio en modelos uni- y bidimensionales con esquema explícito y se compara con la aproximación teórica (4.21) para los tres modos de convergencia con modelos de diferentes características.

Tras este estado transitorio, cuando el modelo se adapta a lo largo del régimen estacionario, el modo de convergencia es clave en la velocidad de adaptación del modelo al conjunto de datos.

Por esto, resulta de gran importancia determinar los parámetros del sistema que permiten que el sistema trabaje en modo críticamente amortiguado o relativamente cerca de él. En esta misma sección se analiza a continuación estas condiciones que resultan al aplicar este requisito. Asimismo, en la Sección 4.3 se muestran los resultados de las simulaciones realizadas con diferentes modelos iterando en régimen estacionario.

Para cualquiera de las dos fases del método iterativo, el proceso será estable si y sólo si, el radio espectral (4.20) de la matriz de iteración $\mathbf{H}'(\bar{\omega})$ (4.47) satisface $\rho(\mathbf{H}'(\bar{\omega})) \leq 1$ [Varga, 1962, Young, 1971]. Asimismo, será estable si cumple $\rho(\mathbf{H}'(\bar{\omega})) < 1$. Por este motivo se hace necesario analizar el módulo de los autovalores para garantizar que $|\lambda'_{1,2}(\bar{\omega})| < 1$ y $|\lambda'_{1,2}(\bar{\omega})| \leq 1 \forall \bar{\omega}$, en todos los modos de convergencia, si queremos asegurar respectivamente convergencia y estabilidad. Así pues, analizamos a continuación estas condiciones de convergencia según el modo de iteración del modelo.

Modo críticamente amortiguado. En primer lugar vamos a determinar los parámetros bajo los cuales el sistema trabaja en modo críticamente amortiguado. Esto es cuando el discriminante (4.51) satisface la condición $\Delta' = 0$. Reemplazando los valores de $H'(\bar{\omega})$, a_1 and a_2 in $H'(\bar{\omega})^2 + 4a_2 = 0$, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado,

$$(K'(\bar{\omega})^2 - 2K'(\bar{\omega}) + 1)\gamma^2 + (2K'(\bar{\omega})^2 - 6K'(\bar{\omega}))\gamma + (K'(\bar{\omega})^2 - 4K'(\bar{\omega})) = 0, \quad (4.52)$$

donde $K'(\bar{\omega})$ queda definido por,

$$K'(\bar{\omega}) = \frac{K(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})}. \quad (4.53)$$

y por tanto,

$$H'(\bar{\omega}) = a_1 - K'(\bar{\omega}) = \frac{2 + \gamma}{1 + \gamma} - K'(\bar{\omega}), \quad (4.54)$$

La expresión (4.52) nos permite calcular el parámetro γ para el caso críticamente amortiguado,

$$\gamma'_{c1,2}(\bar{\omega}) = \frac{-K'(\bar{\omega})^2 + 3K'(\bar{\omega}) \pm 2\sqrt{K'(\bar{\omega})}}{K'(\bar{\omega})^2 - 2K'(\bar{\omega}) + 1}. \quad (4.55)$$

El signo “-” de la raíz cuadrada proporciona un $\gamma_c(\bar{\omega}) < 0 \forall \bar{\omega}$. Debido a su significado físico, el parámetro γ debe ser positivo. Por tanto, el parámetro $\gamma_c(\bar{\omega})$ que rige el modo críticamente amortiguado para las frecuencias $\bar{\omega}$ es,

$$\gamma'_c(\bar{\omega}) = \frac{-K'(\bar{\omega})^2 + 3K'(\bar{\omega}) + 2\sqrt{K'(\bar{\omega})}}{K'(\bar{\omega})^2 - 2K'(\bar{\omega}) + 1}. \quad (4.56)$$

Notar que este parámetro depende de $K'(\bar{\omega})$, el cual a su vez, depende de la frecuencia $\bar{\omega}$. Destacamos a su vez, que para ciertas $\bar{\omega}$, $\gamma'_c(\bar{\omega}) < 0$, por lo que en esas frecuencias el sistema no podrá trabajar en modo críticamente amortiguado. La Figura 4.7(a) muestra el valor de γ'_c en función de $K'(\bar{\omega})$, para el rango de frecuencias en las que $\gamma'_c > 0$.

Tal y como se analiza en la Sección 4.2.1, a medida que aumentan las diferentes frecuencias $\bar{\omega}$, aumenta también el valor de $K'(\bar{\omega})$. En la frecuencia continua tenemos que $K'(\bar{0}) = 0$ y por tanto un primer valor mínimo para el parámetro es,

$$\gamma'_{c_{\min 1}} = \gamma'_c(\bar{0}) = \gamma'_c(\bar{\omega})|_{K'(\bar{\omega})=0} = 0. \quad (4.57)$$

El valor máximo de γ_c tiene lugar cuando $K'(\bar{\omega}) = 1$, con lo que,

$$\gamma'_{c_{\max}} = \gamma'_c(\bar{\omega})|_{K'(\bar{\omega})=1} \rightarrow \infty. \quad (4.58)$$

Si seguimos incrementando el valor del filtro a partir de $K'(\bar{\omega}) > 1$, el parámetro $\gamma_c(\bar{\omega})$ decrece, anulándose de nuevo en $K(\bar{\omega})' = 4$,

$$\gamma'_{c_{\min 2}} = \gamma'_c(\bar{\omega})|_{K'(\bar{\omega})=4} = 0. \quad (4.59)$$

Para frecuencias mayores, $\gamma'_c(\bar{\omega})|_{K(\bar{\omega})' > 4} < 0$, impidiendo al sistema trabajar en este modo de funcionamiento. Recordamos que por su significado físico, el parámetro γ ha de tener un valor finito y ser no nulo. Por tanto, en los valores de $K(\bar{\omega})' = \{0, 1, 4\}$ el sistema no podrá trabajar en amortiguamiento crítico ya que no existe ningún valor de γ que, con estas limitaciones, satisfaga (4.56). Notar también que aunque en modelos unidimensionales, la relación entre ω y $K'(\omega)$ es única, en modelos de dos o más dimensiones esto no es cierto. Esto significa que es posible disponer de un mismo valor de $K'(\bar{\omega})$ para diferentes valores del vector de frecuencias $\bar{\omega}$. Esta característica se puede apreciar en las Figuras C.15-C.17 del Anexo C.2, donde se muestra la relación $K(\omega_1, \omega_2)/F(\omega_1, \omega_2)$ para los modelos bidimensionales.

Sustituyendo el valor de $\gamma'_c(\bar{\omega})$ en la expresión (4.46) y teniendo en cuenta que $\lambda'_{1,2}(\bar{\omega}) = p'_{1,2}(\bar{\omega})$ obtenemos el valor de,

$$\lambda'_c(\bar{\omega}) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \gamma'_c(\bar{\omega})}}. \quad (4.60)$$

Así, el módulo del autovalor queda acotado por $0 < |\lambda'_c(\bar{\omega})| < 1$ dentro del rango de frecuencias,

$$K' : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{K}', \quad \lambda'_c : \mathbf{K}' \rightarrow]0, 1[, \quad (4.61a)$$

$$\mathbf{K}' :=]0, 1[\cup]1, 4[\subset \mathbb{R}. \quad (4.61b)$$

donde $\bar{\Omega}$ está definido en la ecuación (4.9c). La Figura 4.7(b) representa $\lambda'_c(\bar{\omega})$ para el rango válido de $K'(\bar{\omega})$.

A partir de este rango del parámetro $\lambda'_c(\bar{\omega})$ obtenemos que el sistema converge para todas las posibles frecuencias de funcionamiento de este modo de iteración. En cualquier caso, tal y como sucede en el caso implícito, el parámetro γ se fija normalmente constante durante todo el proceso iterativo, por ejemplo $\gamma = \gamma_s$. Por tanto, una vez fijado este valor γ_s tendremos 3 zonas de funcionamiento según la frecuencia $\bar{\omega}$ del componente espectral del modelo a analizar. La Figura 4.8 muestra la curva $\gamma'_c(\bar{\omega})$ así como las diferentes zonas de funcionamiento, cuya convergencia

Figura 4.7.: (a) Parámetro $\gamma'_c(\bar{\omega})$ que determina el modo críticamente amortiguado en función de $K'(\bar{\omega})$.
 (b) Módulo del autovalor $\lambda'_c(\bar{\omega})$ para el modo críticamente amortiguado en función de $K'(\bar{\omega})$. En ambas gráficas, la abscisa $K'(\bar{\omega}) = 0$ cuando $\bar{\omega} = \bar{0}$ y $K' \rightarrow K'_{\max}$ cuando $\bar{\omega} \rightarrow \bar{\omega}_{\max}$.

analizaremos a continuación en esta misma sección. Estas zonas, están separadas por el borde del modo críticamente amortiguado y pueden ser calculadas en función del parámetro γ_s elegido,

$$K'_{cs;1,2} = \frac{2 + \gamma_s \pm \sqrt{1 + \gamma_s}}{1 + \gamma_s}. \quad (4.62)$$

En concordancia, el proceso evoluciona a lo largo del modo críticamente amortiguado sólo para las $\bar{\omega}_s$ que entreguen un valor del filtro $K'(\bar{\omega}_s) = K'_{cs;1,2}$. Para el resto de frecuencias $\bar{\omega} \neq \bar{\omega}_s$, el modo de iteración del sistema será subamortiguado si $K'_{cs;1} < K'(\bar{\omega}) < K'_{cs;2}$ o sobreamortiguado si $K'(\bar{\omega}) < K'_{cs;1}$ o $K'_{cs;2} < K'(\bar{\omega})$. Por este motivo, las condiciones de convergencia y estabilidad globales para cualquier valor de $\bar{\omega}$, deben obtenerse del caso más restrictivo que resulte de los tres modos de funcionamiento como analizamos a continuación.

Modo subamortiguado. Este modo está presente para frecuencias $\bar{\omega}$ que conducen a un $\gamma_s < \gamma'_c(\bar{\omega})$. Esto conlleva un $\Delta'(\bar{\omega}) < 0$ y, por tanto, el sistema iterativo evoluciona bajo un modo subamortiguado. Este caso se produce cuando $H'(\bar{\omega})^2 < |4a_2|$. Ahora bien, el filtro,

$$H'(\bar{\omega}) = \frac{2 + \gamma_s}{1 + \gamma_s} - K'(\bar{\omega}), \quad (4.63)$$

puede ser positivo o negativo en función de los valores del término $(2 + \gamma_s)/(1 + \gamma_s)$ y de $K'(\bar{\omega})$. Notar que $H'(\bar{\omega})^2 > 0$ mientras que $a_2 < 0$.

Dado un determinado γ_s , si $K'(\bar{\omega})$ es menor que el término $(2 + \gamma_s)/(1 + \gamma_s)$, se satisface que $H'(\bar{\omega}) > 0$ y $H'(\bar{\omega})^2 > |4a_2|$. Por tanto, $\Delta'(\bar{\omega}) > 0$. Si por el contrario, el término $K'(\bar{\omega})$ crece lo suficiente, entonces $H'(\bar{\omega}) < 0$ pero $H'(\bar{\omega})^2$ será positivo y suficientemente grande para que

Figura 4.8.: Modos de convergencia para $\gamma(\bar{\omega})$ y $K'(\bar{\omega})$. Dado un cierto γ_s , los componentes frecuenciales $\bar{\omega}$ que resultan en $K'(\bar{\omega}) < K'_{cs;1}$ o $K'_{cs;2} < K'(\bar{\omega})$ evolucionan en modo sobreamortiguado y $K'_{cs;1} < K'(\bar{\omega}) < K'_{cs;2}$ en subamortiguado. La zona con $K'_{max} < K'(\bar{\omega})$ no es utilizable, dado que el módulo del mayor autovalor es mayor que la unidad.

de nuevo, $H'(\bar{\omega})^2 > |4a_2|$. En cambio, para la zona central en que $K'(\bar{\omega})$ no tiene un valor, ni suficientemente grande ni suficientemente pequeño, $H'(\bar{\omega})^2 < |4a_2|$. Por tanto, en este intervalo central, $\Delta'(\bar{\omega}) < 0$.

Si observamos la Figura 4.8 y le asignamos al parámetro γ un determinado valor $\gamma = \gamma_s$, veremos que a medida que varía $K'(\bar{\omega})$, encontramos las tres zonas diferenciadas $\{\Delta'(\bar{\omega}) > 0, \Delta'(\bar{\omega}) < 0, \Delta'(\bar{\omega}) > 0\}$, separadas por la frontera del modo críticamente amortiguado, es decir cuando el discriminante cumple $\Delta'(\bar{\omega}) = 0$. Los valores de K' que para un determinado γ_s proporcionan discriminante nulo, se pueden calcular con la ecuación (4.62).

Para cada vector de frecuencias $\bar{\omega}$ y, por consiguiente para cada valor de $K'(\bar{\omega})$, cuando el parámetro γ_s elegido para el sistema se encuentra por debajo de la curva de la Figura 4.8, el sistema trabaja de forma subamortiguada. Es decir, fijado un determinado parámetro γ_s , obtenemos a partir de (4.62) los dos valores $K'_{cs;1,2}$ en los que el sistema trabajará en modo críticamente amortiguado. Para las frecuencias $\bar{\omega}$ que generan un $K'_{cs;1} < K'(\bar{\omega}) < K'_{cs;2}$, el sistema se comportará de forma subamortiguada. La Figura 4.8 muestra las diferentes regiones de funcionamiento para el sistema trabajando bajo el esquema explícito.

De nuevo reiteramos que este resultado se aplica de forma combinada al vector multidimen-

sional de frecuencias $\bar{\omega}$. Es decir, incrementando una frecuencia y reduciendo otra, por ejemplo para el caso bidimensional incrementando ω_1 y reduciendo ω_2 , podemos obtener el mismo valor para $K'(\bar{\omega})$ y, por tanto, idéntico modo de funcionamiento.

De la ecuación (4.46) y asumiendo un valor del discriminante $\Delta'(\bar{\omega}) < 0$, podemos deducir los autovalores del sistema como,

$$\lambda'_{1,2;\Delta'<0}(\bar{\omega}) = \frac{1}{2}H'(\bar{\omega}) \pm \frac{1}{2}j\sqrt{-(H'(\bar{\omega})^2 + 4a_2)}. \quad (4.64)$$

Si calculamos el módulo de (4.64) $|\lambda'_{1,2;\Delta'<0}(\bar{\omega})| = \frac{1}{2}\sqrt{H'(\bar{\omega})^2 - (H'(\bar{\omega})^2 + 4a_2)}$, obtenemos que su valor es constante con la frecuencia. Es decir, depende sólo del parámetro γ_s como sigue,

$$|\lambda'_{1,2;\Delta'<0}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_s}}. \quad (4.65)$$

Dado que por su significado físico el parámetro $\gamma > 0$, $|\lambda'_{1,2;\Delta'<0}(\bar{\omega})| < 1 \forall \bar{\omega}$. Por tanto, cuando el sistema trabaja en modo subamortiguado, surgen dos autovalores complejos conjugados situados dentro de la circunferencia de radio unidad,

$$H' : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{H}', \quad \lambda'_{1,2;\Delta'<0} : \mathbf{H}' \rightarrow \Lambda_{\Delta'<0}, \quad (4.66a)$$

$$\mathbf{H}' := \left[\frac{-2}{\sqrt{1 + \gamma_s}}, \frac{2}{\sqrt{1 + \gamma_s}} \right] \subset \mathbb{R}, \quad (4.66b)$$

donde $\bar{\Omega}$ y $\Lambda_{\Delta'<0}$ son los dominios definidos en (4.9c) y (4.33b) respectivamente..

La Figura 4.9 muestra el módulo de los dos autovalores $\lambda'_{1,2}(\bar{\omega})$, en función del parámetro γ y del valor de $K'(\bar{\omega})$. La línea discontinua dibujada sobre la superficie en tonos de gris, corresponde al valor de $\gamma'_c(\bar{\omega})$. Por tanto, los autovalores para el modo subamortiguado son los situados debajo de esta línea. Se puede comprobar que el valor de dichos autovalores se corresponde con el determinado por (4.65). Notar que para esta zona, ambos autovalores tienen el mismo módulo.

Modo sobreamortiguado. Cuando el discriminante es mayor que cero, $\Delta'(\bar{\omega}) > 0$, el modo de funcionamiento será sobreamortiguado. Este modo tiene lugar para las frecuencias $\bar{\omega}$ en las que el parámetro γ_s elegido cumple que $\gamma'_c(\bar{\omega}) < \gamma_s$. Esta condición se cumple cuando $H'(\bar{\omega})^2 > |4a_2|$. Como hemos analizado en el caso subamortiguado, el valor del filtro $H'(\bar{\omega})$ mostrado en la ecuación (4.63) puede tener valor positivo o negativo. Por otra parte, si $K'(\bar{\omega})$ tiene un valor pequeño, $H'(\bar{\omega})^2 > |4a_2|$ y, por tanto, $\Delta'(\bar{\omega}) > 0$. Si $K'(\bar{\omega})$ crece lo suficiente, aunque $H'(\bar{\omega}) < 0$, el término $H'(\bar{\omega})^2$ será positivo y suficientemente grande para que de nuevo $H'(\bar{\omega})^2 > |4a_2|$. Por tanto, tendremos dos zonas de trabajo en modo sobreamortiguado como muestra la Figura 4.8.

Así, para cada frecuencia $\bar{\omega}$ y, por consiguiente para cada valor de $K'(\bar{\omega})$, cuando el parámetro γ_s elegido para el sistema se encuentra por encima de la curva $\gamma'_c(\bar{\omega})$ de la Figura 4.8, el sistema

Figura 4.9.: Módulos de los autovalores para diferentes valores de $H'(\bar{\omega})$ y parámetro γ : (a) $\lambda'_1(\bar{\omega})$; (b) $\lambda'_2(\bar{\omega})$. En línea discontinua se marca $\gamma'_c(\bar{\omega})$, esto es, la frontera entre el modo sobreamortiguado, $\Delta'(\bar{\omega}) > 0$, y subamortiguado, $\Delta'(\bar{\omega}) < 0$. La línea con trazo $-\cdot-$ muestra γ'_u , esto es, la frontera entre la zona de convergencia, $|\lambda'(\bar{\omega})| < 1$, y no convergencia, $|\lambda'(\bar{\omega})| > 1$, para el área sobreamortiguada donde $H'(\bar{\omega}) < 0$. Con etiquetas se marcan los valores de las curvas de nivel de las autovalores.

trabaja en modo sobreamortiguado. O dicho de otro modo, fijado un determinado parámetro γ_s , obtenemos a partir de (4.62) los dos valores $K'_{cs,1,2}$ en los que el sistema trabajará en modo críticamente amortiguado. Para las frecuencias $\bar{\omega}$ que generan un $K'(\bar{\omega}) < K'_{cs,1}$ o $K'_{cs,2} < K'(\bar{\omega})$, el sistema se comportará en modo sobreamortiguado. De nuevo, es importante indicar que este resultado se aplica de forma combinada al vector multidimensional de frecuencias $\bar{\omega}$. Es decir, incrementando una de las variables frecuenciales del vector $\bar{\omega}$ y reduciendo otra, podemos obtener el mismo valor para $K'(\bar{\omega})$ y, por tanto, idéntico modo de funcionamiento.

La Figura 4.8 muestra las diferentes regiones de funcionamiento para el sistema explícito. La zona $\Delta'(\bar{\omega}) > 0$ situada a la izquierda de la frontera de amortiguamiento crítico es la zona en que $H'(\bar{\omega}) > 0$, mientras que la zona situada a la derecha representa la región donde $H'(\bar{\omega}) < 0$. Vamos a analizar las condiciones de convergencia y estabilidad en cada una de estas dos zonas por separado. Posteriormente, consideraremos todas las condiciones en conjunto para determinar la convergencia y estabilidad del sistema en todas las frecuencias $\bar{\omega}$.

Partiendo de (4.46) y suponiendo que $\Delta'(\bar{\omega}) > 0$, tenemos que los autovalores están formados por la suma de dos términos. Para el caso sobreamortiguado el segundo de ellos es real y positivo, $\frac{1}{2}\sqrt{H'(\bar{\omega})^2 + 4a_2} > 0$. Con respecto al primer término de la expresión, $\frac{1}{2}H'(\bar{\omega})$, vamos a analizar en primer lugar el caso a la izquierda de la curva $\gamma'_c(\bar{\omega})$ de la Figura 4.8. Por tanto, supondremos que $H'(\bar{\omega}) > 0$. Dado que para este caso los dos términos son positivos, $|\lambda'_{1,2}(\bar{\omega})|_{\max}$ se producirá para el caso " + " del signo " $\pm$ " de (4.46). Así, $|\lambda'_{1,2}(\bar{\omega})| = \lambda'_{1,2}(\bar{\omega})$ y la condición de convergencia se producirá si,

$$\lambda'_{1,2;\Delta'>0,H'>0}(\bar{\omega}) = \frac{1}{2}H'(\bar{\omega}) + \frac{1}{2}\sqrt{H'(\bar{\omega})^2 + 4a_2} < 1. \quad (4.67)$$

Suponiendo fijo el valor de γ_s y, por tanto de a_2 , $\lambda'_{\max}$ tiene lugar para $H'(\bar{\omega}) = H'_{\max}$. Con el valor de $H'(\bar{\omega})$ de la ecuación (4.63) y teniendo en cuenta que $0 < K'(\bar{\omega}) < K'_{\max}$, el máximo valor de los autovalores se da para $K' = 0$, esto es cuando $\bar{\omega} = \bar{0}$. Por tanto,

$$|\lambda'_{1,2;\Delta'>0,H'>0}(\bar{\omega})|_{\max} = |\lambda'_{1,2}(\bar{0})| = 1. \quad (4.68)$$

Para el resto de frecuencias de esta zona, como $K'(\bar{\omega}) > 0$, el módulo de los autovalores son $|\lambda'_{1,2;\Delta'>0,H'>0}(\bar{\omega})| < 1$.

Si analizamos ahora el caso de la derecha de la curva $\gamma'_c(\bar{\omega})$ de la Figura 4.8, tenemos que $H'(\bar{\omega}) < 0$ y por tanto, $|\lambda'_{1,2;\Delta'>0,H'<0}(\bar{\omega})|_{\max}$ tendrá lugar para el " - " del signo " $\pm$ " de la expresión (4.46). Así, $|\lambda'_{1,2;\Delta'>0,H'<0}(\bar{\omega})| = -\lambda'_{1,2;\Delta'>0,H'<0}(\bar{\omega})$ y la condición de convergencia se transforma en,

$$|\lambda'_{1,2;\Delta'>0,H'<0}(\bar{\omega})| = \frac{-1}{2}H'(\bar{\omega}) + \frac{1}{2}\sqrt{H'(\bar{\omega})^2 + 4a_2} < 1. \quad (4.69)$$

Sustituyendo los valores de $H'(\bar{\omega})$ y a_2 , la ecuación (4.69) es equivalente a,

$$\frac{1}{2}\left(K'(\bar{\omega}) - \frac{2 + \gamma_s}{1 + \gamma_s}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(K'(\bar{\omega}) - \frac{2 + \gamma_s}{1 + \gamma_s}\right)^2 - \frac{4}{1 + \gamma_s}} < 1 \quad (4.70)$$

Fijado el valor de γ_s para el sistema, tal que se cumpla $0 < K'(\bar{\omega}) < K'_{\max}$, el máximo valor de los autovalores se da para $K'(\bar{\omega}) = K'_{\max}$, esto es cuando $\bar{\omega} = \bar{\pi}$. Por tanto,

$$|\lambda'_{1,2;\Delta>0,H'<0}(\bar{\omega})|_{\max} = |\lambda'_{1,2;\Delta>0,H'<0}(\bar{\pi})|. \quad (4.71)$$

Si sustituimos $K'(\bar{\omega}) = K'_{\max}$ en (4.70) y despejamos $K'_{\max}$ para el caso límite en que $|\lambda'_{1,2;\Delta>0,H'<0}(\bar{\omega})| = 1$ en (4.69), obtenemos que,

$$K'_{\max} = 2 \frac{2 + \gamma_s}{1 + \gamma_s}, \quad (4.72)$$

donde $K'_{\max}$ representa para cada valor de γ_s , el máximo valor de $K'(\bar{\omega})$ para asegurar la convergencia en esta zona de funcionamiento. Sustituyendo el valor de $K'(\bar{\omega})$ de la ecuación (4.53) en (4.72), obtenemos el valor mínimo del parámetro η para asegurar convergencia,

$$\frac{K(\bar{\omega})}{\eta F(\bar{\omega})} \Big|_{\max} < 2 \frac{2 + \gamma_s}{1 + \gamma_s} \Rightarrow \eta > \frac{1 + \gamma_s}{2 + \gamma_s} \frac{K(\bar{\omega})}{2F(\bar{\omega})} \Big|_{\max}. \quad (4.73)$$

Esta frontera de convergencia se muestra en la Figura 4.8. Notar que γ_s es el parámetro fijado para el modelo deformable. Dado que el valor de $K'_{\max}$ depende de $H'(\bar{\omega})$ y por tanto, de la función de forma y dimensiones del modelo, el parámetro η del sistema iterativo debe ser elegido adecuadamente. Así pues, sólo cuando $\eta > \eta_{\min}$, se satisface la expresión $|\lambda'_{1,2;\Delta>0,H'<0}(\bar{\omega})| < 1$.

La Tabla 4.3 muestra los valores de $\eta_{\min}$ para asegurar la convergencia en cada sistema en función del parámetro γ del sistema. Notar que en esta tabla los valores de $\eta_{\min}$ indicados han sido calculados para el caso más restrictivo. Es decir, estos valores de $\eta_{\min}$ permiten garantizar la estabilidad y convergencia incluso en el caso de que el espectro de los datos se extienda hasta la máxima frecuencia posible, esto es, $\bar{\omega}_{\max} = \bar{\pi}$.

Número de dimensiones	Función de Forma		
	Diferencias finitas	B-splines	
1	$(4\alpha + 16\beta) \frac{1}{2} \frac{1+\gamma_s}{2+\gamma_s}$	$4^\sigma \frac{1}{2} \frac{1+\gamma_s}{2+\gamma_s}$	$(\alpha + 10\beta) \frac{84}{17} \frac{1+\gamma_s}{2+\gamma_s}$
2	$(8\alpha + 64\beta) \frac{1}{2} \frac{1+\gamma_s}{2+\gamma_s}$	$8^\sigma \frac{1}{2} \frac{1+\gamma_s}{2+\gamma_s}$	$(2\alpha + \frac{676}{17}\beta) \frac{84}{17} \frac{1+\gamma_s}{2+\gamma_s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e	$(4e\alpha + 4^{1+e}\beta) \frac{1}{2} \frac{1+\gamma_s}{2+\gamma_s}$	$(4e)^\sigma \frac{1}{2} \frac{1+\gamma_s}{2+\gamma_s}$	No generalizada

Tabla 4.3.: Parámetro $\eta_{\min}$ necesario para garantizar la convergencia en sistemas con esquema explícito.

Así pues, si se cumple la condición $\eta > \eta_{\min}$, los autovalores para el modo sobreamortiguado serán reales positivos con distinto valor y acotados por el intervalo $]0, 1]$,

$$H' : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{H}', \quad \lambda'_{1,2;\Delta'>0} : \mathbf{H}' \rightarrow]0, 1] \subset \mathbb{R}, \quad (4.74a)$$

$$\mathbf{H}' := \left[\frac{-2 - \gamma_s}{1 + \gamma_s}, \frac{-2}{\sqrt{1 + \gamma_s}} \right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{1 + \gamma_s}}, \frac{2 + \gamma_s}{1 + \gamma_s} \right] \subset \mathbb{R}, \quad (4.74b)$$

donde $\bar{\Omega}$ es el dominio definido en (4.9c).

La Figura 4.9 muestra el módulo de los dos autovalores $\lambda'_1(\bar{\omega})$ y $\lambda'_2(\bar{\omega})$, en función del parámetro γ y del valor de $K'(\bar{\omega})$. La línea discontinua dibujada sobre la superficie en tonos de gris, corresponde al valor de $\gamma'_c(\bar{\omega})$. Por tanto, los autovalores trabajando con modo sobreamortiguado son los situados encima de esta línea. Se puede comprobar que para la zona situada a la izquierda de la curva, esto es $H'(\bar{\omega}) > 0$, son menores que 1 excepto en $\bar{\omega} = \bar{0}$ donde tienen valor unidad.

En la zona de la derecha de la figura se cumple $H'(\bar{\omega}) < 0$. Esta zona queda delimitada por la curva,

$$\gamma'_u = \frac{K'_{\max} - 4}{2 - K'_{\max}}, \quad (4.75)$$

donde $K'_{\max}$ es el valor máximo del filtro $K'(\bar{\omega})$ para el conjunto de los datos a procesar y el valor del parámetro η del modelo. Esta curva se ha dibujado en trazo $\cdot - \cdot$ en la figura. Así, en la zona situada entre las curvas $\gamma'_c(\bar{\omega})$ y γ'_u tendremos autovalores con módulo menor que la unidad. En cambio, en la zona situada a la derecha de la curva γ'_u , uno de los autovalores cumplirá $|\lambda'(\bar{\omega})| > 1$ y, por tanto, no será una zona de trabajo adecuada al presentar inestabilidad. Notar, que la condición de la Tabla 4.3 indica precisamente el límite de trabajo marcado por esta curva γ'_u definida mediante (4.75).

Es importante destacar que dado que el sistema iterativo es lineal, si los datos a procesar son de naturaleza paso bajo¹, podemos usar en la ecuación (4.73) el valor de $K'_{\max}$ sólo para la banda de frecuencia de interés, obteniendo un menor umbral para $\eta_{\min}$. Esto es interesante debido a que valores grandes de η incrementan la velocidad de convergencia en el estado transitorio, pero como contrapartida, el suavizado en el modelo es menor, especialmente con datos con oscilaciones abruptas. Como resultado, la reducción del valor de η mediante este procedimiento conduce a modelos suaves y al mismo tiempo estables.

No obstante es importante resaltar que debido a aspectos de implementación, la aplicación de las fuerzas externas implica una cuantificación de los valores de estas fuerzas externas. El procedimiento no lineal de la cuantificación puede provocar la aparición de componentes en la región inestable del espectro, a pesar de que en dicha región el conjunto de datos no incluyera originalmente ninguna componente espectral. La Sección 4.3 demuestra esta problemática mediante datos reales, proponiendo un mecanismo de filtrado de estos componentes. De esta forma, podemos asegurar la estabilidad en todo el espectro utilizando valores $\eta > \eta_{\min}$.

La expresión (4.75) resulta también de gran interés en el estudio de la convergencia en función del ancho de banda del conjunto de datos a modelar. Esto es debido a que establece la relación entre el valor del parámetro γ y del valor $K'_{\max}$ para asegurar la convergencia. El procedimiento

¹La mayoría de los datos usados en la práctica satisfacen este requisito.

para asegurar la estabilidad y convergencia es similar al descrito. En función del ancho de banda del sistema, esto es, $\bar{\omega}_{\max} = [\omega_{1_{\max}}, \dots, \omega_{e_{\max}}]$ y del valor de los parámetros α , β y η obtenemos el valor máximo de $K'(\bar{\omega})$,

$$K'_{\max} = K'(\bar{\omega})|_{\bar{\omega}=\bar{\omega}_{\max}}. \quad (4.76)$$

A partir de este valor de $K'_{\max}$, mediante la ecuación (4.75) determinamos el valor máximo de γ_s para que el sistema sea estable, $\gamma_s < \gamma'_u$. Así pues, el empleo de la expresión (4.73) fijando estabilidad para el ancho de banda útil de los datos, es equivalente a fijar los valores de α , β y γ , y posteriormente elegir el η mínimo necesario mediante la Tabla 4.3. La diferencia es que en el primero de los casos, la estabilidad queda garantizada sólo para un ancho de banda concreto mientras que en el segundo caso el sistema será estable para cualquier componente frecuencial. Recordar asimismo, que en el primer caso el parámetro η podrá tener un menor valor que en el caso estricto $\eta_{\min}$.

Como conclusión de esta sección, si se satisface la condición de la expresión (4.73), o bien la Tabla 4.3, el sistema definido mediante el esquema explícito es convergente para todas las frecuencias $\bar{\omega} \neq \bar{0}$ y estable para el vector de frecuencias $\bar{\omega} = \bar{0}$ y múltiplos de $\overline{2\pi}$.

4.3. Validación de la convergencia del modelo

En las Secciones 4.1 y 4.2 se han estudiado las condiciones suficientes para que el sistema iterativo sea estable y convergente, es decir, que el error residual tienda a cero con las iteraciones. Con el fin de validar dichos resultados teóricos, se han definido e implementados un conjunto de modelos deformables con diferentes dimensiones, funciones de forma y esquemas iterativos. Estos modelos han sido aplicados a conjuntos de datos con diferentes dimensiones y características espectrales, y posteriormente, sus resultados se han analizado y cotejado con los estudios teóricos de las secciones indicadas.

Las funciones coordenadas de los modelos son mutuamente independientes. Por lo tanto, el experimento puede ser aplicado individualmente a cada función coordenada. De igual forma, dado que todo el proceso se realiza en el dominio de la frecuencia, la transformada de Fourier permite representar el modelo mediante una base ortogonal de componentes espectrales e -dimensionales. Por tanto, el sistema iterativo puede ser entendido como un conjunto de sistemas independientes, cada uno procesando un componente espectral del modelo. Así pues, podemos analizar las condiciones de estabilidad para cada una de los componentes frecuenciales multidimensionales de cada una de las funciones coordenadas del modelo deformable. Y posteriormente, para garantizar la estabilidad y convergencia en el proceso global, exigimos el cumplimiento de estas condiciones para todas los componentes frecuenciales de todas las funciones coordenadas del modelo.

Aunque se han analizado las condiciones para sistemas de primer y segundo orden, en las siguientes secciones vamos a estudiar exclusivamente sistemas de segundo orden debido a su mayor interés, fundamentalmente por su mayor velocidad de adaptación a los datos [Verdú-Monedero et al., 2008b].

En el proceso iterativo vamos a suponer que se fija un parámetro γ constante para todos los casos, así como unos determinados α , β o σ^2 si utilizamos diferencias finitas como función de forma o bien α y β en el caso de B-splines. Estos parámetros se eligen en función de las propiedades que se pretendan potenciar en el comportamiento del modelo como se analizará en el Capítulo 5. En caso de ser necesario, el parámetro restante del sistema η , se fija para que el sistema cumpla las condiciones de estabilidad y convergencia. Dentro del grado de libertad que permitan estas condiciones, η también puede ser regulado según la aplicación a la que se pretenda aplicar el modelo.

Con el fin de proporcionar una mayor compresión del análisis, en una primera aproximación se ha elegido como datos a modelar señales sinusoidales con frecuencia $\bar{\omega}_s$ tanto en 1 dimensión $v_1(s, t)$ como en 2 dimensiones $v_1(s_1, s_2, t)$, en ambos casos permitiendo variación sólo en una de las funciones coordenadas. Dado que estas señales contienen un único componente espectral, podemos estudiar claramente la evolución de dicho componente frecuencial en el proceso de ajuste del modelo a dicha señal. Posteriormente, en la Sección 4.3.3, analizaremos señales con múltiples componentes espectrales. Como función de forma se han utilizado tanto B-splines como diferencias finitas. Asimismo se ha comprobado la evolución del error con el esquema implícito y explícito.

4.3.1. Régimen transitorio

En primer lugar, vamos a comprobar la evolución del error de los modelos en la etapa inicial de adaptación, que llamamos estado transitorio del proceso iterativo. Así, se elige para la simulación un modelo unidimensional con 128 nodos y un modelo bidimensional con 64×64 nodos. En ambos casos, los nodos son inicializados a un valor nulo y los parámetros se han definido como $\alpha = 0$, $\beta = 1$ and $\eta = 1$. Tal y como hemos indicado anteriormente, sólo simulamos el componente frecuencial $\bar{\omega}_s$.

Sustituyendo $H(\bar{\omega}_s)$ en la ecuación (4.26), se puede calcular el parámetro $\gamma_c(\bar{\omega}_s)$ para el esquema implícito. Una vez calculado este valor del parámetro γ_c , se elige el parámetro γ_s para probar los tres casos en que podemos trabajar en el esquema iterativo. Esto es, los modelos son aplicados a los datos utilizando $\gamma_s = \gamma_c$, $\gamma_s = \gamma_c/2$ y $\gamma_s = 2\gamma_c$, resultando respectivamente en un modo críticamente amortiguado, subamortiguado y sobreamortiguado. El mismo proceso es

²El parámetro σ se utiliza únicamente con diferencias finitas y está definido en la ecuación (B.61e).

usado con $H'(\bar{\omega}_s)$, realmente $K'(\bar{\omega}_s)$, y la ecuación (4.56) para $\gamma'_c(\bar{\omega}_s)$ en el esquema explícito. Las Figuras 4.10 y 4.11 muestran cómo los modelos se van ajustando a los datos sinusoidales a lo largo de las iteraciones.

Figura 4.10.: Modelo unidimensional en esquema implícito con diferencias finitas, $\alpha = 0, \beta = 1, \eta = 1$ y $\gamma_s = \gamma_c$. Datos en trazo continuo y nodos del modelo expresados con $\circ$.

Figura 4.11.: Modelo unidimensional en esquema implícito con diferencias finitas, $\alpha = 0, \beta = 1, \eta = 1$ y $\gamma_s = \gamma_c$. Datos en trazo continuo y nodos del modelo expresados con $\bullet$.

Según la ecuación (4.21), la evolución del error residual es regulada por el valor de $|\tilde{\lambda}(\bar{\omega})|^\xi$. Dado que tenemos un único componente frecuencial, todo el modelo evoluciona de la misma forma. En los tres modos de iteración, aparecen oscilaciones debido al desequilibrio continuo entre fuerzas internas y externas, que condicionan al modelo a una adaptación gradual a la situación final.

En la Figura 4.12 se muestra el error, así como los autovalores o polos asociados para cada uno de los tres modos. El error se ha calculado como la diferencia entre el componente frecuencial ω_s de los datos y el componente frecuencial ω_s del espectro del modelo. Como se puede observar, la evolución del modelo sigue fielmente a la expresión fijada por el autovalor correspondiente en los tres modos de funcionamiento. El mismo experimento se ha realizado con resultados similares mediante las dos funciones de forma, los dos esquemas de funcionamiento y utilizando señales

sinusoidales de diferentes frecuencias como datos a adaptar.

Figura 4.12.: Evolución del error cuadrático medio para un modelo unidimensional en esquema implícito con diferencias finitas, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\eta = 1$. Velocidad teórica de convergencia $|\tilde{\lambda}(\bar{\omega})|^\xi$. Valores de γ_s : (a) Subamortiguado, $\gamma_s = \gamma_c/2$ y $p_{1,2} = \lambda_{1,2} = 0,98872 \pm 0,01847j$; (b) Críticamente amortiguado, $\gamma_s = \gamma_c$ y $p = \lambda = 0,97836$; (c) Sobreamortiguado, $\gamma_s = 2\gamma_c$, $p_1 = \lambda_1 = 0,99384$ y $p_2 = \lambda_2 = 0,92397$.

Es importante destacar que en el régimen transitorio, la máxima velocidad de convergencia, no se alcanza en el modo críticamente amortiguado como sería de esperar. Como se observa en la Figura 4.12, la velocidad de adaptación es mayor en un modo ligeramente sobreamortiguado. La justificación de este resultado se basa en que tal y como se ha indicado en la Sección 4.1.2 las aproximaciones realizadas en este estudio se cumplen solamente cuando el modelo está suficientemente cerca de los datos. Esto es, al final del régimen transitorio y durante el régimen estacionario. Por este motivo, los polos que rigen la evolución del sistema no coinciden con el autovalor crítico λ_c para el sistema equivalente calculado con las aproximaciones citadas. En la Sección 4.3.3 se analiza la influencia del valor del parámetro γ_c en datos multicomponente en ambos regímenes de funcionamiento y su influencia en la velocidad global de convergencia del modelo a los datos.

Además es importante indicar que a partir de la frecuencia discreta $f_d = 0,2$, debido a la alta variabilidad de los datos y al propio efecto de las fuerzas internas, el modelo sigue con dificultad a los datos. Esta situación se puede solventar con un aumento del efecto de las fuerzas externas o bien con una disminución del efecto de las fuerzas internas (reduciendo los valores de α y β). No obstante, la mejor solución es un aumento del número de nodos del modelo. Esto provoca la reducción de la frecuencia discreta equivalente, satisfaciendo también empíricamente el análisis de convergencia efectuado.

Se ha efectuado un análisis similar a modelos de dos dimensiones. En este caso, la señal de prueba es un fador bidimensional con diferente frecuencia en las direcciones x e y . La Figura 4.13 muestra la evolución del error para cada uno de los tres modos de funcionamiento, esquemas y funciones de forma. De nuevo el error se ha calculado como la diferencia entre el componente frecuencial $\bar{\omega} = [\omega_{s,1}, \omega_{s,2}]$ de los datos y el mismo componente frecuencial del modelo. En todos

los casos, la evolución del modelo sigue fielmente a la expresión fijada por el autovalor correspondiente.

También para el caso bidimensional, esta prueba se ha realizado con fasores a diferentes frecuencias tanto en la dimensión x como en la y , con resultados similares. Y al igual que en el caso unidimensional, el modelo no puede seguir a los datos con gran variabilidad, es decir datos con componentes de alta frecuencia. Esto es debido al propio efecto de las fuerzas internas, las cuales son mucho mayores a las fuerzas externas que aparecen con este tipo de datos. Es decir, el efecto propio de suavizado que proporcionan los modelos predomina en este caso sobre las fuerzas externas. De nuevo, el incremento de nodos en las direcciones que haya esta alta variabilidad en los datos, es la alternativa más efectiva para solventar esta situación. Al incrementar el muestreo espacial, se reduce el espectro relativo de los datos, y se minimiza el efecto indicado.

El gradiente de los datos es usado como fuerzas externas en estos experimentos. Asimismo, las fuerzas se aplican completamente en el dominio de la frecuencia para minimizar el efecto de no de linealidad que pueden presentar en algunos casos su aplicación en el dominio espacial. Es importante resaltar aquí que si las fuerzas externas superan el umbral necesario para atraer al modelo a los datos, su valor o procedimiento concreto de cálculo no influyen sustancialmente en la velocidad de convergencia. Estas fuerzas sólo afectan en las oscilaciones que se producen en el error entre modelo y datos mostradas en las Figuras 4.12-4.13, siendo proporcional la frecuencia de las oscilaciones al valor de las fuerzas externas aplicadas.

4.3.2. Régimen estacionario

En esta sección, se analiza la evolución del modelo durante el régimen estacionario. En este caso, los modelos se encuentran cerca de los datos, acorde con las suposiciones que hemos establecido en las Secciones 4.1-4.2. De nuevo, utilizamos señales sinusoidales con frecuencia $\bar{\omega}_s$ con el fin de efectuar la caracterización de componentes frecuenciales de forma individualizada. Dado que el modelo puede ser considerado como un sistema lineal, sólo el componente $\bar{\omega}_s$ del modelo necesita ser estudiada.

Como se detalla en la Sección 4.1, todos los modelos con esquema implícito poseen autovalores con módulo menor que la unidad en todas las frecuencias excepto la continua. Por tanto, el sistema iterativo será convergente de forma inherente. Es decir, el parámetro η no es determinante en la convergencia, dado que el sistema será convergente para todas las frecuencias excepto la continua. Para la componente continua el sistema será estable. Asimismo, en función del valor del filtro $H(\bar{\omega})$ y el parámetro γ el sistema podrá trabajar en uno modo de funcionamiento u otro. Dado que γ se fija normalmente constante $\gamma = \gamma_s$, cada componente frecuencial del modelo podrá estar trabajando en un determinado modo, en función de su pulsación $\bar{\omega}$.

Figura 4.13.: Evolución del error cuadrático medio para un modelo bidimensional, $\alpha = 0$, $\beta = 0,1$ y $\eta = 1$. Velocidad teórica de convergencia $|\bar{\lambda}(\bar{\omega})|^\xi$. Primera fila, implícito y B-splines; Segunda fila, implícito y diferencias finitas; Tercera fila, explícito y B-splines; Cuarta fila, explícito y diferencias finitas. Valores de γ_s : Primera columna, caso subamortiguado, $\gamma_s = \gamma_c/2$; Segunda columna, caso críticamente amortiguado, $\gamma_s = \gamma_c$; Tercera columna, caso sobreamortiguado, $\gamma_s = 2\gamma_c$.

Con respecto al esquema explícito, sí que podemos tener los autovalores de la matriz mayores que la unidad para algunos componentes frecuenciales del modelo. Por este motivo, el parámetro η debe cumplir las condiciones de la Tabla 4.3 para garantizar la convergencia en todos los componentes frecuenciales de modelos basados en esquema explícito. Este $\eta_{\min}$ depende tal y como indica la Sección 4.2 de la función de forma así como el número de dimensiones y orden del proceso iterativo. Si se cumplen estas condiciones, al igual que en el esquema implícito, el sistema será convergente para todas las frecuencias excepto la continua, donde al menos será estable. Al igual que con el caso implícito, en función del valor del filtro $H'(\bar{\omega})$ y el parámetro γ_s elegido, cada componente frecuencial del sistema estará trabajando en un determinado modo de funcionamiento.

La Tabla 4.4 sintetiza estas condiciones para cada esquema de funcionamiento y orden del sistema. Notar que para el caso del sistema de segundo orden, cada componente frecuencial del modelo trabajará en uno de los tres modos de funcionamiento posibles: amortiguamiento crítico, subamortiguado o sobreamortiguado. Si el dato a adaptar incluye componentes en todas las frecuencias posibles, el modelo estará trabajando en los tres modos de forma simultánea. Por tanto, para asegurar convergencia y estabilidad para el modelo en su totalidad tenemos que cumplir las condiciones de los tres modos simultáneamente. La fila etiquetada como *Resumen* indica estas condiciones globales.

		Esquema implícito	Esquema explícito
Primer orden		η no determinante Convergencia $\forall \bar{\omega} \neq \bar{0}$ Estabilidad $\forall \bar{\omega}$	$\eta_{\min} \rightarrow$ Tabla 4.2 Convergencia $\forall \bar{\omega} \neq \bar{0}$ Estabilidad $\forall \bar{\omega}$
Segundo orden	A. Crítico	η no determinante Convergencia $\forall \bar{\omega}$ Estabilidad $\forall \bar{\omega}$	η no determinante Convergencia $\forall \bar{\omega}$ Estabilidad $\forall \bar{\omega}$
	Subamortiguado	η no determinante Convergencia $\forall \bar{\omega} \neq \bar{0}$ Estabilidad $\forall \bar{\omega}$	η no determinante Convergencia $\forall \bar{\omega}$ Estabilidad $\forall \bar{\omega}$
	Sobreamortiguado	η no determinante Convergencia $\forall \bar{\omega} \neq \bar{0}$ Estabilidad $\forall \bar{\omega}$	$\eta_{\min} \rightarrow$ Tabla 4.3 Convergencia $\forall \bar{\omega} \neq \bar{0}$ Estabilidad $\forall \bar{\omega}$
	Resumen	η no determinante Convergencia $\forall \bar{\omega} \neq \bar{0}$ Estabilidad $\forall \bar{\omega}$	$\eta_{\min} \rightarrow$ Tabla 4.3 Convergencia $\forall \bar{\omega} \neq \bar{0}$ Estabilidad $\forall \bar{\omega}$

Tabla 4.4.: Resumen de las condiciones de convergencia y estabilidad según el esquema y orden del sistema iterativo.

Para ambos esquemas, los autovalores de la matriz de iteración, o polos de la ecuación de segundo orden, además de indicar si el componente frecuencial del modelo cumple la condición de convergencia, permiten determinar cómo será la evolución de este error residual, e incluso optimizar los parámetros para tener la máxima velocidad de convergencia como estudiaremos a

continuación.

Cada componente frecuencial está asociado a una pareja de autovalores. La velocidad de convergencia de dicho componente quedará determinada por el módulo del mayor autovalor de dicha matriz. Dado que el modo de convergencia más rápido se da cuando estamos trabajando en modo críticamente amortiguado, podemos optimizar la velocidad de convergencia para un determinado componente frecuencial $\bar{\omega}_s$ del sistema si fijamos γ_s tal que $\gamma_s = \gamma_c(\bar{\omega}_s)$ ó $\gamma_s = \gamma'_c(\bar{\omega}_s)$. Notar que este resultado puede ser también alcanzado con datos de banda estrecha o con comportamiento paso bajo, fijando γ_c para la banda de frecuencias con más energía de la señal.

Esquema implícito. Para ilustrar el procedimiento, vamos a probar la convergencia con un modelo en una dimensión con $N_1 = 128$ nodos, diferencias finitas, esquema implícito, $\alpha = 0$, $\beta = 0,1$ y $\eta = 1$. Dicho modelo se intentará adaptar a los mismos datos de la Figura 4.10, es decir, una señal unidimensional con un único componente frecuencial ω_s . Mediante la ecuación (4.26) y el valor del filtro $H(\omega_s)$ calculado previamente, se determina el γ_c que permite trabajar en amortiguamiento crítico para dicha frecuencia. Para observar mejor la evolución en la situación final de régimen estacionario, el modelo se inicializa a un valor cercano a la posición final a alcanzar y se aplica a los datos con $\gamma_s = \gamma_c$, $\gamma_s = \gamma_c/2$ y $\gamma_s = 2\gamma_c$.

A partir de la Figura 4.4 se puede observar que fijado un valor de γ_s , hay componentes frecuenciales del modelo que trabajan con subamortiguado, otras con amortiguado y otras en amortiguamiento crítico. La fila superior de la Figura 4.14 permite comprobar esta afirmación. Aquí se muestra los polos del sistema de todas las posibles frecuencias para cada uno de los valores de γ_s analizados.

Los polos del sistema pueden encontrarse en dos localizaciones del plano $\mathbb{C}$. Los polos subamortiguados, esto es los polos complejos, están situados en una circunferencia con radio $r_0 = (2 + \gamma_s)^{-1}$ centrada en el punto $(r_0, 0)$. Los polos sobreamortiguados, es decir los polos dobles reales, se encuentran localizados en el eje real $\mathbb{R}$ dentro del intervalo $[0, 1]$.

Se han dibujado de forma diferenciada el vector de polos p_1 del otro vector p_2 , ambos obtenidos a partir de la ecuación (4.12). Como se puede observar en la primera fila de la Figura 4.14, algunas frecuencias trabajarán de forma subamortiguada puesto que los polos son complejos y conjugados, otras en modo sobreamortiguado ya que los dos polos son reales. Asimismo, tal y como calculamos mediante la ecuación (4.30), uno de los componentes frecuenciales tiene en cada caso amortiguamiento crítico y, por tanto, posee polo único doble.

La primera columna de la Figura 4.14 muestra cómo evoluciona el componente ω_s trabajando de forma subamortiguada, la segunda columna en amortiguamiento crítico y la tercera

Figura 4.14.: (a-c) Situación de los polos (indicados con p_1 $\bullet$ y p_2 $\circ$) para todas los componentes frecuenciales del modelo en esquema implícito con diferencias finitas, $\alpha = 0$, $\beta = 0,1$ y $\eta = 1$. Polos de el componente frecuencial ω_s , $p_{s;1}$ $\blacksquare$ y $p_{s;2}$ $\times$. (d-f) Detalle de los polos de ω_s . (g-f) Evolución del error residual para el componente frecuencial ω_s . Valores de γ_s : Primera columna, caso subamortiguado, $\gamma_s = \gamma_c/2$; Segunda columna, caso críticamente amortiguado, $\gamma_s = \gamma_c$; Tercera columna, caso sobreamortiguado, $\gamma_s = 2\gamma_c$.

columna en modo sobreamortiguado. Con el fin de clarificar la posición de los polos de dicho componente ω_s en cada uno de los tres modos, se han marcado los dos polos $p_{s;1}$ y $p_{s;2}$ con una iconografía diferente al resto de polos. La segunda fila de la figura muestra un detalle de la zona del círculo unidad en la que aparecen estos polos $p_{s;1}$ y $p_{s;2}$.

Si observamos la segunda columna de la Figura 4.14, vemos que con $\gamma_s = \gamma_c$, dicho componente frecuencial ω_s trabaja efectivamente en amortiguamiento crítico ya que ambos polos son idénticos, $p_{s;1} = p_{s;2}$. En cambio, en la primera columna vemos que dicho componente itera en modo subamortiguado al tener polos complejos y en la tercera columna converge de forma sobreamortiguada al presentar dos polos reales y diferentes.

Notar que fijando $\gamma_s = \gamma_c(\omega_s)$, sólo trabajamos en amortiguamiento crítico para el componente frecuencial ω_s . Por tanto, el resto de componentes $\omega \neq \omega_s$ trabajan en otros modos de funcionamiento. Como vemos, moviendo el valor de γ_s los valores de $p_{s;1}$ y $p_{s;2}$, se van desplazando desde la circunferencia donde se sitúan los polos complejos al eje real. El punto de cruce de estas dos localizaciones $(2(2 + \gamma_s)^{-1}, 0)$ corresponde a la posición de los polos donde se produce amortiguamiento crítico.

La fila inferior de la Figura 4.14 muestra el error residual de dicho componente frecuencial en cada uno de los tres modos de funcionamiento. El sistema trabajando de forma subamortiguada tiende a presentar una serie de oscilaciones. Una vez llega cerca de la posición final, el modelo queda oscilando alrededor de dicha posición. Las oscilaciones son proporcionales al ángulo de los polos. Así, polos con mayor parte compleja provocan que el sistema oscile durante un mayor número de iteraciones, reduciéndose su error a una velocidad menor.

Por otra parte, cuando el sistema itera en sobreamortiguado, las oscilaciones son mínimas o nulas en función del módulo del mayor autovalor. El modelo va tendiendo lentamente a la posición final, a una velocidad que depende del módulo de dicho autovalor.

Por último, si el modelo trabaja en amortiguamiento crítico el componente frecuencial optimizada tiende a oscilar en una primera parte, reduciéndose posteriormente las oscilaciones. En cualquier caso, el error residual se va reduciendo a una mayor velocidad que en los otros dos casos. En la Figura 4.14(h) se puede observar cómo el error residual se minimiza a una mayor velocidad que en 4.14g y 4.14(i).

Así pues, a partir de la imagen 4.14 podemos deducir que el modo de iteración más rápido, es decir, el modo con un menor $|p_{s;1}|$, está relacionado con el caso críticamente amortiguado. Este modo produce el descenso del error más rápido y, por tanto, el ajuste del modelo a los datos más fino. Notar que el resto de polos del sistema p_1 y p_2 , corresponden con el resto de componentes frecuenciales del modelo e iteran bajo el modo sub- o sobreamortiguado con una menor velocidad.

El mismo experimento se ha aplicado a modelos con diferentes parámetros, funciones de forma y esquemas de funcionamiento. Con respecto a los parámetros y funciones de forma, los resultados son similares en la gran mayoría de los casos. Por regla general, el modo críticamente amortiguado es el que proporciona una mayor velocidad de convergencia. No obstante, en este análisis del régimen estacionario, las fuerzas externas tienen una mayor influencia que en el transitorio descrito anteriormente. Por tanto, no podemos aplicar este procedimiento de validación hasta la iteración en la que se cumplan las suposiciones de fuerzas externas. Si se satisfacen estos supuestos, la mejor velocidad de convergencia se consigue en todos los casos cuando el sistema trabaja en amortiguamiento crítico.

El esquema explícito en modelos unidimensionales presenta en cambio una mayor complejidad en la validación. Como se ha analizado en la Sección 4.2.2, este esquema puede ser inestable para ciertas frecuencias. Por tanto, además de optimizar el sistema para un determinado componente frecuencial, tenemos que asegurar que el resto de componentes cumplen la condición de estabilidad. Esto puede realizarse satisfaciendo la condición fijada en la Tabla 4.4 o bien suprimiendo los componentes frecuenciales, normalmente de alta frecuencia, que provocan inestabilidad. En el estudio para el modelo bidimensional que describimos a continuación mostraremos estas dos aproximaciones.

Analizamos ahora los modelos bidimensionales definidos también mediante el esquema implícito, dimensiones $N_1 = N_2 = 64$, las dos funciones de forma y diferentes valores de los parámetros. Dichos modelos se intentarán adaptar a los mismos datos de la Figura 4.11, es decir, una señal bidimensional con un único componente frecuencial $\bar{\omega}_s = [\omega_{s;1}, \omega_{s;2}]$. Mediante la ecuación (4.26) y el filtro $H(\bar{\omega}_s)$ calculado previamente, se determina el parámetro γ_c que permite trabajar en amortiguamiento crítico para dicha pulsación $\bar{\omega}_s$. Inicializamos el modelo a un valor cercano a la posición final, para analizar la situación final de régimen estacionario. El modelo se prueba con los parámetros $\gamma_s = \gamma_c$, $\gamma_s = \gamma_c/2$ y $\gamma_s = 2\gamma_c$.

De nuevo, analizando la Figura 4.4 se puede comprobar que dado un valor de γ_s , hay componentes frecuenciales del modelo trabajando en modo subamortiguado, otras en sobreamortiguado y otras en amortiguamiento crítico. Las filas superiores de las Figuras 4.15 y 4.16 muestran los polos del sistema para todas las posibles frecuencias para cada uno de los valores de γ_s utilizados para las dos funciones de forma analizadas. Notar, que en el caso bidimensional tenemos dos matrices de polos de tamaño $N_1 \times N_2$. Por tanto, lo que se muestra en estas figuras son los $N = 2 \cdot 64 \cdot 64$ polos del sistema, acordes con las dimensiones $N_1 = N_2 = 64$ del modelo. Se han marcado de forma diferenciada una matriz de polos p_1 de la otra matriz p_2 .

Las figuras muestran efectivamente que los polos de los componentes frecuenciales son complejos conjugados, reales distintos ó únicos dobles. Y por tanto, cada componente frecuencial trabajará en el modo de funcionamiento determinado por sus polos. Los polos se sitúan en las

mismas localizaciones que en el caso unidimensional. Esto es, los polos complejos están localizados en una circunferencia con radio $r_0 = (2 + \gamma_s)^{-1}$ centrada en el punto $(r_0, 0)$ y los polos reales en el eje real $\mathbb{R}$ dentro de $[0, 1]$.

La fila central de la Figura 4.15 muestra el detalle de los polos correspondientes al componente frecuencial $\bar{\omega}_s$, es decir $p_{s;1}$ y $p_{s;2}$. Se puede comprobar que en la segunda columna de la figura el sistema trabaja efectivamente en amortiguamiento crítico para dicha frecuencia al ser ambos polos idénticos y reales. En cambio, en la primera y tercera columna dicho componente frecuencial trabaja en modo subamortiguado y sobreamortiguado, al tener polos complejos conjugados y reales distintos, respectivamente.

Las filas inferiores de las Figuras 4.15 y 4.16 muestran el error residual de dicho componente frecuencial en cada uno de los tres modos de funcionamiento. Tanto con *B-splines* como con diferencias finitas observamos un resultado similar al analizado en modelos unidimensionales. El modelo iterando en amortiguamiento crítico presenta una mayor velocidad de convergencia. En cambio al trabajar tanto en modo subamortiguado como en sobreamortiguado, tenemos una menor velocidad de convergencia, con oscilaciones en el primer caso y sin ellas en el segundo.

Como se puede observar comparando las Figuras 4.15 y 4.16, hay poca diferencia entre el empleo de diferencias finitas o *B-splines* desde el punto de vista de la convergencia, aunque en el primer caso hay una velocidad algo mayor debido al mayor suavizado que realizan estos últimos. Con respecto al empleo de diferentes parámetros, los resultados son similares en la mayoría de casos. No obstante, como se ha indicado para el caso unidimensional, este resultado se obtiene cuando el modelo se ha aproximado lo suficiente a su forma final para satisfacer los supuestos indicados en el análisis. Es decir, cuando estamos trabajando en el régimen estacionario.

Esquema explícito. Esta validación se ha aplicado con el mismo modelo trabajando en esquema explícito. La principal diferencia con el esquema implícito es la condición de convergencia que tiene que cumplir η , expresada por la Tabla 4.4. Los componentes frecuenciales con $\eta < \eta_{\min}$ poseen autovalores con módulo mayor que la unidad y por tanto, tendrán potencial inestabilidad.

El requisito de la Tabla 4.4 implica el establecimiento de un $\eta_{\min}$, que puede tener un elevado valor en función de la pulsación $\bar{\omega}_s$ y del resto de parámetros α , β y γ . El empleo de η con valor grande puede ser interesante en algunos casos, pues incrementa la velocidad de convergencia en el régimen transitorio. Pero al implicar filtros con un mayor ancho de banda, en algunos casos no permite que el modelo aplique un adecuado suavizado de los datos, interesante en algunas aplicaciones. Esto es debido a que, al contrario que con el caso implícito, el filtro del sistema $H'(\bar{\omega})$ no siempre tiene comportamiento paso bajo como el filtro $H(\bar{\omega})$ de los modelos implícitos.

Figura 4.15.: (a-c) Situación de los polos (indicados con p_1 • y p_2 ○) para todos los componentes frecuenciales de un modelo bidimensional en esquema implícito con B-splines, $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$ y $\eta = 1$. Polos del componente frecuencial $\bar{\omega}_s$ $p_{s;1}$ ■ y $p_{s;2}$ ×. (d-f) Detalle de los polos de $\bar{\omega}_s$. (g-f) Evolución del error residual para el componente frecuencial $\bar{\omega}_s$. Valores de γ_s : Primera columna, caso subamortiguado, $\gamma_s = \gamma_c/2$; Segunda columna, caso críticamente amortiguado, $\gamma_s = \gamma_c$; Tercera columna, caso sobreamortiguado, $\gamma_s = 2\gamma_c$.

Figura 4.16.: (a-c) Situación de los polos (indicados con p_1 ● y p_2 ○) para todas los componentes frecuenciales de un modelo bidimensional en esquema implícito con diferencias finitas, $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$ y $\eta = 1$. Polos del componente frecuencial $\bar{\omega}_s$ $p_{s,1}$ ■ y $p_{s,2}$ ×. (d-f) Evolución del error residual para el componente frecuencial $\bar{\omega}_s$. Valores de γ_s : Primera columna, caso subamortiguado, $\gamma_s = \gamma_c/2$; Segunda columna, caso críticamente amortiguado, $\gamma_s = \gamma_c$; Tercera columna, caso sobreamortiguado, $\gamma_s = 2\gamma_c$.

Además, en algunos casos el empleo de η con valor elevado implica un diseño de las fuerzas externas más complejo. Con η elevado, es más difícil lograr el equilibrio necesario para que el efecto de las fuerzas externas sea suficientemente grande para atraer al modelo a los datos, pero que su valor no sea excesivo para que las fuerzas internas puedan modelar su forma según los requerimientos de la aplicación.

Por este motivo, aunque para garantizar la convergencia y estabilidad del sistema tenemos que cumplir con las condiciones expresadas en la Tabla 4.4, si el modelo y datos a adaptar no utilizan la parte alta del espectro, podemos emplear un parámetro η de menor tamaño y que cumpla que todos los componentes frecuenciales del modelo trabajan en estabilidad. Con este fin, se sustituye el valor de $K'_{\max}(\bar{\omega})$ en (4.73) para el ancho de banda útil, y se obtiene el $\eta_{\min}$ para el espectro de interés.

Dado que en este estudio, estamos trabajando con señales con un único componente fre-

cuencial, si garantizamos que para el componente frecuencial el sistema se comporta de forma estable, el modelo iterará de forma estable en su totalidad. Las Figuras 4.17 y 4.18 muestran los resultados utilizando este procedimiento. Se ha probado el modelo mediante B-splines y diferencias finitas, y con tres valores de γ_s para que el modelo evolucione en los tres modos subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado.

Figura 4.17.: (a-c) Situación de los polos (indicados con p_1 ● y p_2 ○) para todas los componentes frecuenciales de un modelo bidimensional en esquema explícito con B-splines, $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$ y $\eta = 3$. Polos del componente frecuencial $\bar{\omega}_s$ $p_{s;1}$ ■ y $p_{s;2}$ ×. (d-f) Evolución del error residual para el componente frecuencial $\bar{\omega}_s$. Valores de γ_s : Primera columna, caso subamortiguado, $\gamma_s = \gamma_c/2$; Segunda columna, caso críticamente amortiguado, $\gamma_s = \gamma_c$; Tercera columna, caso sobreamortiguado, $\gamma_s = 2\gamma_c$.

Las filas superiores de ambas figuras muestran las matrices de polos del sistema, así como los polos $p_{s;1}$ y $p_{s;2}$ para la frecuencia de análisis $\bar{\omega}_s$. En este caso los polos sobreamortiguados son siempre negativos y los polos complejos se distribuyen alrededor de una circunferencia con radio $r_0 = (1 + \gamma_s)^{-1/2}$ y centro $(0, 0)$ del plano Z .

Como se puede comprobar mediante la expresión (4.46), con los parámetros elegidos para esta prueba, los polos $p_{s;1}$ y $p_{s;2}$ son complejos conjugados, un único polo real y doble o dos polos reales y diferentes, pero su módulo es en todos los casos menor a la unidad. Por el contrario, algunos polos del sistema tienen un módulo mayor que uno³. Notar que estos polos corresponden

³Para mejorar la visibilidad de los polos en la figuras, se han omitido en la representación los polos $|p_1| > 1,5$.

Figura 4.18.: (a-c) Situación de los polos (indicados con p_1 ● y p_2 ○) para todas las componentes frecuenciales de un modelo bidimensional en esquema explícito con diferencias finitas, $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$ y $\eta = 1$. Polos del componente frecuencial $\bar{\omega}_s$ p_{s1} ■ y p_{s2} ×. (d-f) Evolución del error residual para el componente frecuencial $\bar{\omega}_s$. Valores de γ_s : Primera columna, caso subamortiguado, $\gamma_s = \gamma_c/2$; Segunda columna, caso críticamente amortiguado, $\gamma_s = \gamma_c$; Tercera columna, caso sobreamortiguado, $\gamma_s = 2\gamma_c$.

a los componentes espectrales de alta frecuencia del modelo deformable. Dado que los datos no contienen energía en esta banda espectral, estos polos pueden ser despreciados. Sin embargo, si el modelo o las fuerzas externas tuvieran energía en dichas frecuencias, los valores nodales del sistema crecerían rápidamente hacia infinito en dichos componentes espectrales.

Las segundas filas de las Figuras 4.17 y 4.18 muestran la evolución del error residual. Al igual que con el esquema implícito, la evolución del modelo en amortiguamiento crítico presenta una mayor velocidad de convergencia que para el resto de modos, siempre que podamos asumir los supuestos definidos en el análisis de la Sección 4.2.2 y que el modelo no entre en inestabilidad, por no cumplir el $\eta_{\min}$ para el espectro del modelo o los datos. Este experimento ha sido llevado a cabo con diferentes valores de $\bar{\omega}_s$ y diferentes valores para los parámetros con un resultado análogo.

Aunque el cálculo de las fuerzas externas se detalla en el Capítulo 5 destacamos en esta sección que la aplicación de fuerzas externas pueden añadir un efecto de no linealidad en el proceso

iterativo. Por tanto, en función del modelo, esquema, función de forma, parámetros y la cuantificación del valor de las propias fuerzas externas, pueden aparecer a lo largo de las iteraciones componentes espectrales no existentes, ni en la inicialización del modelo ni en los datos a adaptar.

Estos componentes espectrales normalmente se minimizan a lo largo del proceso iterativo al no formar parte de los datos a adaptar. Es decir, estas no linealidades normalmente no requieren ser tenidas en cuenta siempre que trabajemos con esquema implícito o explícito estable para todas los componentes frecuenciales. Ahora bien, si utilizamos un modelo en esquema explícito sin cumplir la condición de la Tabla 4.4, es posible que alguna de estos componentes espectrales no deseadas crezca de forma inestable impidiendo utilizar el modelo deformable.

La Figura 4.19 ilustra este problema. Simulamos con los mismos datos de la Figura 4.11 y el modelo inicializado cerca de la posición final. En este caso, elegimos un η que satisface la condición $\eta_{\min}(\bar{\omega}_s) < \eta$ pero que no se cumple para el resto de frecuencias $\bar{\omega}_s < \bar{\omega} < \bar{\pi}$. Por tanto, el sistema es estable para la frecuencia $\bar{\omega}_s$ e inferiores pero puede ser inestable para mayores frecuencias. Teóricamente dado que el modelo y los datos sólo contienen la frecuencia $\bar{\omega}_s$, esto no debería suponer ningún problema de estabilidad, pero en la práctica esto no es así.

En la iteración $\xi = 1$ mostrada en la Figura 4.19 tenemos los componentes espectrales del modelo y algunos componentes frecuenciales de reducido valor, debido a las fuerzas externas y ruido de cuantificación⁴. Dado que estos componentes son potencialmente inestables debido a que poseen autovalores con módulo mayor que la unidad en sus matrices de iteración, estos pequeños valores son suficientes para que al cabo de pocas iteraciones se produzca un desbordamiento en estos componentes espectrales inestables, invalidando el proceso iterativo por completo.

Por tanto, si queremos trabajar en esquema explícito con un $\eta < \eta_{\min} \forall \bar{\omega}$ y no tener riesgo de inestabilidad en las frecuencias potencialmente inestables, debemos filtrar dichos componentes espectrales de alta frecuencia. Obviamente, este filtrado puede realizarse si dichos componentes están fuera del ancho de banda de interés del conjunto de datos a modelar. En cualquier caso, dado que el proceso iterativo se realiza completamente en la frecuencia, este filtrado es trivial y su coste computacional es reducido.

4.3.3. Señales con múltiples componentes espectrales

En esta sección, vamos a analizar la convergencia de modelos deformables aplicados a señales topográficas sintéticas y reales con múltiples componentes espectrales. Los modelos bidimen-

⁴Por motivos de implementación práctica del proceso iterativo, para el cálculo las fuerzas externas se realiza una cuantificación en el valor de los datos del modelo.

Figura 4.19.: Espectro del modelo bidimensional en esquema explícito con diferencias finitas, $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$, $\eta = 0,1$ y $\gamma_s = \gamma_c(\bar{\omega}_s)$ en situación de inestabilidad en la parte alta del espectro. Componentes frecuenciales de interés ($\bar{\omega}_s$) marcados en línea discontinua.

sionales que utilizaremos serán una superficie 3D que variará únicamente en la función coordenada z , mientras que las funciones coordenadas x y y quedarán invariantes a lo largo del proceso iterativo y ajustadas en forma de malla a las dimensiones horizontales de los datos.

Aunque estos conjuntos de datos tienen diferentes características espectrales, se puede aplicar el mismo método a todos ellos. El espectro de los datos se analiza, localizándose la banda de frecuencia con máxima energía. La frecuencia de referencia $\bar{\omega}_s$ se define entonces como el centro de esta banda. Con las ecuaciones (4.26) y (4.56) se calculan los parámetros $\gamma_c(\bar{\omega}_s)$ y $\gamma'_c(\bar{\omega}_s)$ para el esquema implícito y explícito respectivamente. Con ello, se obtiene la máxima velocidad de convergencia para los componentes con más energía de la señal, y por tanto de una forma global, para el conjunto de datos a caracterizar.

Notar que este procedimiento optimiza en realidad la velocidad de convergencia en el estado estacionario. Como se describe en la Sección 4.3.1, se puede alcanzar un mayor velocidad de convergencia en el estado transitorio usando modos ligeramente sobreamortiguados. No obs-

tante, dado que el estado transitorio es habitualmente significativo sólo para pocas iteraciones, especialmente en señales multicomponente, en la práctica el estado estacionario adquiere una mayor influencia en la convergencia total del modelo. Por tanto, la optimización de este último estado supone en la práctica el factor determinante en la optimización del modelo deformable al conjunto de datos.

La Figura 4.20 muestra los resultados para tres conjuntos de datos multicomponente. El ancho de banda de las señales de cada ejemplo es creciente con las filas. Es decir, el ancho de banda del conjunto de datos de la tercera fila es mayor que el de la segunda y éste mayor que el de la primera. Por otra parte, la primera y segunda columna muestran la señal y el modelo, al inicio del proceso iterativo y en la iteración $\xi = 45$ respectivamente. La tercera columna dibuja el error residual para cada conjunto de datos utilizando tres valores distintos de γ_s . Esto es, $\gamma_s = \gamma_c/2$, $\gamma_s = \gamma_c$ y $\gamma_s = 2\gamma_c$. Como se han indicado anteriormente el parámetro γ_c es calculado para el centro de la banda de frecuencias con máxima energía. Se puede observar que en todos los casos, la mayor velocidad de convergencia se obtiene con el parámetro γ_s apropiado, el cual conduce a una iteración críticamente amortiguada para la mayoría de la energía de la señal.

El mismo experimento se puede realizar utilizando modelos basados en esquema explícito. La única diferencia con el caso implícito mostrado se basa en que en este caso hay que determinar el $\eta_{\min}$ para todo el espectro posible o el optimizado para el ancho de banda del conjunto de datos a caracterizar.

Estos resultados validan el análisis realizado en las Secciones 4.1 y 4.2, tanto para señales con un único componente espectral, como para datos reales con múltiples componentes espectrales, permitiendo una optimización sencilla de los parámetros del modelo para alcanzar la máxima velocidad en el ajuste a los datos con modelos deformables de cualquier número de dimensiones y función de forma.

4.3.4. Discusión sobre el estudio de la convergencia

El objetivo de este Capítulo 4 es el estudio la convergencia de modelos paramétricos multidimensionales definidos en el dominio de Fourier a partir de los trabajos [Liang et al., 2006] y [Weruaga et al., 2004b], con el ánimo de asegurar la convergencia y estabilidad del sistema iterativo y acelerar la evolución del modelo desde la posición inicial hasta los datos objeto de ser caracterizados.

Resumimos ahora los resultados aportados. Se ha comprobado que los modelos deformables de cualquier dimensión definidos mediante *B-splines* y diferencias finitas pueden ser estables y

Figura 4.20.: Simulación con señales multicomponente mediante modelos deformables basados en esquema implícito. Conjuntos de datos: Primera fila datos sintéticos; segunda y tercera fila datos topográficos reales. Primera columna, datos y modelos en $\xi = 0$. Segunda columna, datos y modelos en $\xi = 45$. Tercera columna, evolución temporal del error residual medio para los valores de $\gamma_s = \gamma_c/2$ en línea punteada con marcas $\times$; $\gamma_s = \gamma_c$ en línea continua; $\gamma_s = 2\gamma_c$ en línea discontinua con marcas $\bullet$.

converger a los datos, tanto si se establecen con un esquema implícito como si el esquema utilizado es explícito. En este último caso es necesario cumplir unas determinadas condiciones.

Por otra parte, la definición del proceso iterativo completamente en el dominio de Fourier permite desacoplar cada una de los componentes frecuenciales del resto. De esta forma tanto el proceso iterativo como su análisis puede realizarse de forma independiente para cada una de los componentes. La excepción son las fuerzas externas, que al presentar en algunos casos un comportamiento no lineal, no permiten un desacople total en todas los componentes, al menos desde un punto de vista práctico.

Durante el transitorio del proceso iterativo, cada una de los componentes frecuenciales se aproxima a los datos en función del módulo de los autovalores correspondiente a dicha frecuencia. Así, el error absoluto es proporcional al módulo del mayor autovalor elevado a la propia iteración. Este proceso es relativamente independiente de las fuerzas externas y se cumple para los tres modos de iteración, subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado.

Una vez el modelo está próximo a la situación final, el componente espectral converge a una mayor velocidad si trabaja en el modo de amortiguamiento crítico. El componente frecuencial convergerá más rápido cuanto más cerca estén sus autovalores del caso crítico. Dado que no es posible trabajar en amortiguamiento crítico para todas las frecuencias del modelo, será de interés diseñar el sistema iterativo para que la zona del espectro con mayor energía tenga este modo de convergencia.

De forma similar al estudio realizado aquí, en [Verdú-Monedero et al., 2008b] se lleva a cabo un análisis de la convergencia de contornos activos basados en esquema implícito. Sin embargo, la convergencia de los contornos activos se estudia con una aproximación diferente a la realizada aquí con los modelos deformables. Estos contornos son analizados tanto en el dominio del espacio como en el dominio de la frecuencia, pero considerando todos los componentes espectrales de forma simultánea. Por el contrario, en este capítulo el sistema iterativo se considera desacoplado, permitiendo el análisis y optimización de cada componente espectral del modelo de forma individual.

Por tanto, los autovalores representan conceptos distintos en uno y otro trabajo. En [Verdú-Monedero et al., 2008b] los autovalores proporcionan información sobre la convergencia y estabilidad de cada uno de los modos de convergencia definidos por su correspondiente autovector en el dominio espacial. Cada uno de estos modos de convergencia puede afectar a un segmento del contorno o a varios de ellos. Es decir, tenemos una única matriz de iteración para todo el contorno sobre la que calculamos los autovalores y autovectores.

Por el contrario, al utilizar en este trabajo la base ortogonal de Fourier como base en el

análisis, cada uno de estos modos de convergencia se corresponde realmente con un componente frecuencial, cuya convergencia y estabilidad queda definida por sus autovalores correspondientes. Es decir, cada componente espectral posee una matriz de iteración con un par de autovalores que regulan la convergencia y estabilidad únicamente de ese componente.

En ambos casos el resultado final es similar. Los autovalores muestran tanto la velocidad de convergencia así como el modo de convergencia cuando el modelo se aproxima al dato en su fase final. Por otra parte, el autovector o componente frecuencial detalla la descomposición del modelo para la cual afecta dicho autovalor. Tanto en uno como en otro caso, con la elección adecuada de los parámetros podemos obtener los autovalores apropiados para alcanzar la máxima velocidad de convergencia del modelo a un determinado conjunto de datos según la aplicación en concreto. Esto es, aumentando el parámetro γ pasamos de una situación subamortiguada hasta una convergencia sobreamortiguada pasando el modo críticamente amortiguada. Tal y como hemos visto en la Sección 4.3.2 y en [Verdú-Monedero et al., 2008b]. La Figura 4.21 resume el desplazamiento de los polos $p_{s;1,2}$ correspondientes a la frecuencia $\bar{\omega}_s$ al variar γ .

Figura 4.21.: Situación de los polos del componente frecuencial $\bar{\omega}_s$ $p_{s;1}$ ■ y $p_{s;2}$ × al variar γ .

No obstante, el desacoplo en componentes frecuenciales que nos proporciona el análisis efectuado en este capítulo permite generalizar el diseño de modelos deformables, a cualquier dimensión, función de forma y esquema de funcionamiento. Esta generalización no es posible mediante el análisis de los contornos deformables indicado arriba. En el Capítulo 5 se estudiará de qué forma se pueden fijar los parámetros del modelo, utilizando el resultado de este estudio en diferentes aplicaciones de los modelos deformables multidimensionales en el Capítulo 6 .

An algorithm must be seen to be believed.

(Donald Knuth)

Implementación de los modelos deformables

5.1. Diseño práctico de los modelos deformables

EN el Capítulo 4 de esta tesis se ha llevado a cabo un análisis de estabilidad y convergencia en el dominio de la frecuencia partiendo de las ecuaciones (3.17) y (3.30) para los modelos multidimensionales implícitos e implícitos respectivamente. Se comprobado que se puede garantizar su estabilidad y convergencia, estableciendo un análisis para cada componente frecuencial del modelo de forma diferenciada. Como se ha detallado en dicho capítulo, dado que la formulación de los modelos se plantea en el dominio de la frecuencia, el sistema global se transforma en un conjunto de subsistemas iterativos desacoplados. Cada uno de estos subsistemas intenta adaptar el componente frecuencial $\bar{\omega}_k$ del modelo deformable a este mismo componente frecuencial $\bar{\omega}_k$ de los datos.

Por tanto, al proceder al diseño práctico de estos modelos deformables, el algoritmo supone que cada uno de los subsistemas itera de forma independiente al resto. La Figura 5.1 ilustra esta aproximación. Tanto para el caso implícito como explícito, el valor del componente frecuencial $\bar{\omega}_k$ del modelo en la iteración ξ , esto es $U_\xi(\bar{\omega}_k)$, se puede calcular a partir de este mismo componente

frecuencial en iteraciones anteriores $U_{\xi-1}(\bar{\omega}_k)$ y $U_{\xi-2}(\bar{\omega}_k)$, y el valor de las fuerzas externas $Q_{\xi-1}(\bar{\omega}_k)$ para dicho componente frecuencial. Las ecuaciones (3.17) y (3.30) definen estas operaciones. El mismo procedimiento se aplica en cada una de los componentes frecuenciales del sistema.

Figura 5.1.: Moléculas computacionales para un sistema de segundo orden: (a) Esquema implícito; (b) Esquema explícito. Al estar desacoplado el sistema, para el cálculo de cada valor $U(\bar{\omega}_k)$ no se emplean los valores de U en frecuencias distintas a $\bar{\omega}_k$.

A pesar de haber empleado la transformada de Fourier ($\mathcal{FT}$) de las secuencias espaciales en los Capítulos 3 y 4, resulta evidente que para implementar los modelos deformables mediante un sistema iterativo discreto es necesario el uso de la transformada discreta de Fourier e -dimensional ($e\mathcal{DFT}$) de dichas secuencias espaciales. De esta forma, el dominio espacial discreto $\mathbf{n}$ se transforma en un dominio frecuencial también discreto. Y por tanto, los arrays espaciales e -dimensionales del modelo, datos y fuerzas externas, se transforman en arrays e -dimensionales en el dominio de la frecuencia, los cuales pueden ser utilizados por el sistema de segundo orden de forma sencilla.

En las ecuaciones del movimiento para el caso implícito y explícito definidas en el dominio del espacio, (3.15) y (3.28), aparecen convoluciones circulares e -dimensionales entre secuencias con dimensiones $N_1 \times \dots \times N_e$. Utilizando la $e\mathcal{DFT}$ estas convoluciones se transforman en el producto de sus espectros¹, es decir, en el producto elemento a elemento, o producto de Hadamard de estos arrays e -dimensionales (ver Anexo A.1). Tal y como observamos en el Capítulo 3, esto nos permite aislar el componente espectral de los nodos del modelo para la iteración actual ξ para el caso implícito,

$$\hat{\mathbf{u}}_\xi = \hat{\mathbf{h}} \left(a_1 \hat{\mathbf{u}}_{\xi-1} + a_2 \hat{\mathbf{u}}_{\xi-2} + \left(\eta \hat{\mathbf{f}} \right)^{-1} \hat{\mathbf{q}}_{\xi-1} \right), \quad (5.1)$$

¹Esto implica que el modelo empleado es totalmente cerrado. Es decir, el modelo satisface la condición (2.4). En caso de utilizar un modelo abierto hay que añadir extensiones ocultas como describe la Sección 5.2.

y para el caso explícito,

$$\hat{\mathbf{u}}_\xi = \hat{\mathbf{h}}' \hat{\mathbf{u}}_{\xi-1} + a_2 \hat{\mathbf{u}}_{\xi-2} + (\eta \hat{\mathbf{f}})^{-1} \hat{\mathbf{q}}_{\xi-1}. \quad (5.2)$$

Los arrays e -dimensionales $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{f}}$ y $\hat{\mathbf{q}}$ se corresponden con las $e\mathcal{DFT}$ s de las secuencias espaciales $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ y $\mathbf{q}$. El filtro paso bajo e -dimensional $\hat{\mathbf{h}}$ puede ser calculado mediante,

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{\eta \hat{\mathbf{f}}}{\eta \hat{\mathbf{f}} + \hat{\mathbf{k}}}. \quad (5.3)$$

Asimismo, el filtro del sistema explícito $\hat{\mathbf{h}}'$, se obtiene con,

$$\hat{\mathbf{h}}' = a_1 - \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\eta \hat{\mathbf{f}}}, \quad (5.4)$$

donde $\hat{\mathbf{k}}$ es la $e\mathcal{DFT}$ del núcleo espacial de rigidez $\mathbf{k}$ del modelo utilizado.

El valor de las transformadas discretas $\hat{\mathbf{f}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ se puede obtener directamente a partir de las expresiones de las transformadas de Fourier de dichas secuencias. Así, el espectro de la función de forma $\hat{\mathbf{f}}$ se puede calcular como,

$$\hat{\mathbf{f}} = F[k_1, \dots, k_e] = F(\omega_1, \dots, \omega_e) \Big|_{\omega_j = k_j \frac{2\pi}{N_j}}, \quad (5.5)$$

con $k_j \in [0, N_j - 1]$ y $j \in [1, e]$, donde $F[k_1, \dots, k_e]$ es la transformada discreta de Fourier de $N_1 \times \dots \times N_e$ puntos de $\mathbf{f}$ y $F(\omega_1, \dots, \omega_e) = F(\bar{\omega})$ es la transformada de Fourier de la misma secuencia espacial. De igual forma, el núcleo espectral de rigidez $\hat{\mathbf{k}}$ se obtiene con,

$$\hat{\mathbf{k}} = K[k_1, \dots, k_e] = K(\omega_1, \dots, \omega_e) \Big|_{\omega_j = k_j \frac{2\pi}{N_j}}, \quad (5.6)$$

donde $K[k_1, \dots, k_e]$ es la transformada discreta de Fourier de $N_1 \times \dots \times N_e$ puntos de $\mathbf{k}$, $K(\omega_1, \dots, \omega_e) = K(\bar{\omega})$ es su transformada de Fourier y los índices k_j y j tienen los mismos rangos que en (5.5).

En la Sección B.4 se detallan las expresiones de $F(\bar{\omega})$ y $K(\bar{\omega})$ para el caso de modelos deformables uni- y bidimensionales, tanto empleando diferencias finitas como B-splines. Así pues, con dichas expresiones y las ecuaciones (5.3-5.6) el cálculo de los filtros discretos del sistema $\hat{\mathbf{h}}$ y $\hat{\mathbf{h}}'$ es directo.

Una vez disponemos de los valores de los filtros discretos, las ecuaciones (5.1-5.2) proporcionan un sistema iterativo eficiente para adaptar el modelo deformable al conjunto de datos. Las fuerzas internas se imponen con los filtros $\hat{\mathbf{h}}$ y $\hat{\mathbf{h}}'$ mientras que las fuerzas externas son aplicadas por medio del array $\hat{\mathbf{q}}$.

Tal y como se analiza en los Capítulos 3 y 4 y en las gráficas del Anexo C.1 las características espectrales de los filtros $\hat{\mathbf{h}}$ y $\hat{\mathbf{h}}'$ dependen de los parámetros del modelo α , β y η . Los parámetros

α y β representan la elasticidad y rigidez y η controla la masa global del modelo. El parámetro γ aunque no se utiliza en la construcción de los filtros, determina la evolución temporal del modelo. Esta característica también se analiza en [Verdú-Monedero et al., 2008b].

Así pues, el incremento de α genera un comportamiento del modelo más elástico. Por otra parte, la rigidez del modelo es directamente proporcional al valor del parámetro β . Finalmente, los parámetros γ y η controlan la inercia del modelo. Mención especial requiere el caso de los modelos explícitos, donde el parámetro η deberá además tener un valor mínimo con el fin de garantizar la estabilidad, tal y como se analiza en la Sección 4.2.

Así podemos sintetizar de forma breve que el algoritmo de ajuste básico consiste en ejecutar el proceso iterativo de segundo orden descrito por las ecuaciones (5.1-5.2), también detallado en la Figura 5.1. El Algoritmo 1 resume este procedimiento.

Algorithm 1: Proceso iterativo resumido

Data: Conjunto de datos d -dimensional $\mathbf{I}$.

Result: Nodos del modelo e -dimensional ajustado a los datos $\mathbf{u}$.

- 1 Configuración de parámetros
 - 2 Cálculo gradiente datos $\mathbf{q}$ y transformación a la frecuencia $\hat{\mathbf{q}}$
 - 3 Inicialización del modelo $\mathbf{u}$ y transformación a la frecuencia $\hat{\mathbf{u}}$
 - 4 Cálculo del filtro del sistema en la frecuencia $\hat{\mathbf{h}}$ ó $\hat{\mathbf{h}}'$
 - 5 **while** ($\bar{e}_\xi > \text{TOL}$ **and** $\xi \leq \text{maxiter}$) **do**
 - 6 Obtención del array de fuerzas $\hat{\mathbf{q}}_{\xi-1}$ para cada nodo $\hat{\mathbf{u}}_{\xi-1}$
 - 7 Aplicar ecuación del movimiento (5.1) ó (5.2)
 - 8 Calcular error medio $\bar{e}_\xi$ entre modelo y datos
 - 9 $\xi \leftarrow \xi + 1$
-

En los pasos 1-4 del algoritmo, es necesario configurar todos los parámetros del sistema, obtener las fuerzas externas a partir del gradiente de los datos e inicializar el modelo. Asimismo, es necesario calcular el filtro del sistema a utilizar, $\hat{\mathbf{h}}$ ó $\hat{\mathbf{h}}'$. Posteriormente se inicia el proceso iterativo en el que en cada iteración se determinarán qué fuerzas externas aparecen sobre cada nodo del modelo. Para ello se mapea la posición del nodo sobre el array d -dimensional de fuerzas calculado previamente. Con estas fuerzas externas se aplica la ecuación del movimiento y se obtiene la siguiente posición de los nodos en la iteración ξ . Por último, se comprueba si el modelo está lo suficientemente cerca al conjunto de datos, esto es, si podemos considerar que el modelo se ha ajustado suficientemente. Si esta condición se cumple o bien si hemos alcanzado el número máximo de iteraciones permitidas, el proceso iterativo termina. En caso contrario se inicia una nueva iteración. Es importante destacar que este proceso iterativo se realiza para cada una de las d funciones coordenadas de forma separada, ya que éstas son independientes entre sí.

Aunque el Algoritmo 1 expresa de forma breve los diferentes pasos del proceso iterativo, es necesario resaltar que estas etapas representan en la práctica un mayor número de acciones. Tanto la elección de los parámetros y sobre todo la obtención de las fuerzas supone una mayor complejidad a la citada en este primer algoritmo. En concreto, el preprocesado del conjunto de datos $\mathbf{I}$ es clave para adecuar el modelo a los datos y por este motivo este proceso requiere un análisis más detallado en esta sección. Asimismo, al mapeado de la posición de los nodos $\mathbf{u}$ al gradiente de los datos $\mathbf{I}$ para obtener las fuerzas en cada iteración $\mathbf{q}_{\xi-1}$, se le pueden aplicar diferentes aproximaciones, cada una de ellas con distintos resultados. En función de la aplicación en concreta de los modelos deformables, será más interesante utilizar una u otra aproximación. Por último, con funciones de forma *B-spline* suele ser habitual el empleo de nodos intermedios $\mathbf{v}$ interpolados entre los nodos del modelo $\mathbf{u}$. El empleo de estos nodos $\mathbf{v}$ permite un suavizado de las fuerzas externas, lo cual reduce el efecto de los artefactos y ruido del conjunto de datos.

Por tanto, pasamos ahora a profundizar con más detalle los diferentes procedimientos empleados en el proceso iterativo. Vamos a suponer que utilizamos un modelo deformable bidimensional, $e = 2$, que trabaja en un entorno tridimensional, $d = 3$, esto es, con tres funciones coordenadas x , y y z . La aplicación del algoritmo a modelos con diferente número de dimensiones e ó funciones coordenadas d sería análogo. Los Algoritmos 2-3 listan las diferentes etapas del proceso.

En el Algoritmo 2 tenemos la inicialización del sistema. En concreto, entre las líneas 1-3 se definen todos los parámetros del proceso iterativo, tanto los utilizados en el modelo deformable como los utilizados para el cálculo de las fuerzas y en el propio proceso. En esta misma sección se incluyen posteriormente una descripción breve de cada uno de ellos.

Posteriormente en las líneas 4-5 se definen las respuestas impulsionales $b3vss$ y $b3ss$. Estas matrices se construyen mediante funciones de forma *B-splines*, y se utilizan para el suavizado de datos y nodos intermedios, respectivamente.

En caso de utilizar el esquema explícito, es necesario calcular el $\eta_{\min}$ para garantizar estabilidad tal y como se analiza en la Sección 4.2. Este cálculo se realiza con el método de la línea 7 del algoritmo indicado.

A continuación se procede con la importación de los datos, línea 8, y el cálculo del array d -dimensional con los vectores de fuerzas, a partir del gradiente de los datos, línea 9. Para su cálculo, además del propio conjunto de datos $\mathbf{I}$, se emplean los parámetros de configuración como analizaremos posteriormente. Una vez obtenidas las fuerzas F_1 se procede con la inicialización del modelo en la línea 10. Dado que el sistema a implementar es de segundo orden, para obtener el valor de los nodos en la iteración actual $\mathbf{u}_{\xi}$ necesitamos conocer su valor en las dos iteraciones anteriores $\mathbf{u}_{\xi-1}$ y $\mathbf{u}_{\xi-2}$. De todas formas, en la inicialización se fijan todos los nodos de estas tres iteraciones a idéntico valor.

Como se describe a continuación en esta misma sección, resulta de interés para cálculo de las fuerzas el empleo de nodos intermedios $\mathbf{v}$, [Verdú-Monedero et al., 2008b], máxime cuando se utiliza función de forma *B-spline*. Esto conduce a que las fuerzas externas en cada iteración se calculen no sólo a partir de las posición de los nodos $\mathbf{u}$, si no que se tengan en cuenta las fuerzas generadas en la posición de nodos intermedios $\mathbf{v}$. Estos nodos se calculan en la línea 12. Notar que este método `GeneracionNodosIntermedios` será llamado dentro del proceso iterativo cada vez que sea necesario calcular las fuerzas externas que se aplican en la ecuación del movimiento.

Algorithm 2: Proceso iterativo detallado (inicialización)

Data: Conjunto de datos d -dimensional $\mathbf{I}$.

Result: Nodos del modelo e -dimensional ajustado a los datos $\mathbf{u}$.

```

1 {shpFun, sysSchm,  $\alpha, \beta, \eta, \gamma, N_1, N_2, N_{1O}, N_{2O}, enable_v, enable_{\gamma_{opt}}$ }  $\leftarrow$  ConfParamModel ;
  // Parámetros utilizados en la configuración del modelo deformable
2 {W3DSize, mapalg, tt, tt1, tt2, enablehor, maxstep}  $\leftarrow$  ConfParamFuerzas;
  // Para el cálculo del array gradiente y fuerzas en cada iteración
3 { $\xi$ , maxiter, TOL,  $\bar{\mathbf{e}}$ }  $\leftarrow$  ConfParamProceso;
  // Iteración y condiciones de finalización del proceso iterativo

4 b3vss  $\leftarrow$  CalculoFuncionInterpolacionFuerzas(tt) ;    // Para suavizado de datos
5 b3ss  $\leftarrow$  CalculoFuncionInterpolacionModelo(tt1, tt2) ; // Para nodos intermedios  $\mathbf{v}$ 

6 if sysSchm = explicit then
7    $\eta_{min} \leftarrow$  CalculoEtaMin( $\alpha, \beta, \gamma, shpFun$ ) ;           // Condición estabilidad
8    $\mathbf{I} \leftarrow$  CargaDatos ;                                       // Volumen tridimensional
9    $F_{\mathbf{I}} \leftarrow$  CalculoVolumenFuerzas( $\mathbf{I}, mapalg, enable_{hor}, W3DSize, b3vss$ ) ; // Volumen fuerzas

10 { $\mathbf{u}_{\xi}, \mathbf{u}_{\xi-1}, \mathbf{u}_{\xi-2}$ }  $\leftarrow$  InicializacionModelo( $N_1, N_2$ );
11 if enablev then
12    $\mathbf{v}_{\xi-1} \leftarrow$  GeneracionNodosIntermedios( $\mathbf{u}_{\xi-1}, N_{1O}, N_{2O}, b3ss, \alpha, \beta$ );
    // Si uso de nodos intermedios, cálculo de los nodos
13 { $\hat{\mathbf{h}}$ }  $\leftarrow$  CalculoFiltro( $N_1, N_2, N_{1O}, N_{2O}, \alpha, \beta, \eta, \eta_{min}, shpFun, sysSchm$ );
    // Si esquema explícito,  $\hat{\mathbf{h}}$  se refiere a  $\hat{\mathbf{h}}'$ 
14 if enable $\gamma_{opt}$  then
15    $\gamma \leftarrow$  CalculoGammaOpt( $\mathbf{I}, \hat{\mathbf{h}}$ ) ;                       // Gamma óptimo para los datos
16 { $a_1, a_2$ }  $\leftarrow$  CalculoParamSistema( $\gamma$ );
```

Por último, en la línea 13 se calcula el filtro bidimensional del sistema $\hat{\mathbf{h}}$ ó $\hat{\mathbf{h}}'$ mediante las ecuaciones (5.3-5.4) según estemos utilizando respectivamente un esquema implícito o explícito. A su vez, en la línea 15 se calcula el parámetro γ óptimo con las ecuaciones (4.26) ó (4.56). Es decir,

se obtiene el parámetro γ que permite que la banda de frecuencia con más energía del conjunto de datos trabaje en amortiguamiento crítico, como describe la Sección 4.3.3. Notar que para este método es necesario analizar el conjunto de datos $\mathbf{I}$ y obtener la frecuencia de la banda con mayor energía. Por último, la línea 16 implementa las ecuaciones (3.4c-3.4d) para calcular los parámetros del sistema iterativo a_1 y a_2 .

Algorithm 3: Proceso iterativo detallado (continuación)

```

17 while ( $\bar{e}_\xi > \text{TOL}$  and  $\xi \leq \text{maxiter}$ ) do // Inicio del proceso iterativo de adaptación
18   if  $\text{enable}_v$  then
19      $\mathbf{w}_{\xi-1} \leftarrow \mathbf{v}_{\xi-1}$ ;
20   else
21      $\mathbf{w}_{\xi-1} \leftarrow \mathbf{u}_{\xi-1}$ ;
22    $\mathbf{q}_{\xi-1} \leftarrow \text{CalculoFuerzasExternas}(\mathbf{w}_{\xi-1}, F_I, N_{1O}, N_{2O}, b_{3ss}, \alpha, \beta)$ ;
    // Mapeado de  $\mathbf{w}_\xi$  al volumen  $F_I$  y postprocesado posterior
23    $\mathbf{u}_\xi \leftarrow \text{ProcesoFiltrado}(\mathbf{u}_{\xi-1}, \mathbf{u}_{\xi-2}, \mathbf{q}_{\xi-1}, \hat{\mathbf{h}}, a_1, a_2, N_{1O}, N_{2O}, \text{maxstep}, \text{sysSchm})$ ;
    // Aplicación de la ecuación del movimiento para obtener valor nodos
24    $\bar{e}_\xi \leftarrow \text{CalculoError}(\mathbf{u}_\xi, \mathbf{u}_{\xi-1})$ ;
25    $\xi \leftarrow \xi + 1$ ;
26    $\mathbf{u}_{\xi-2} \leftarrow \mathbf{u}_{\xi-1}$ ;
27    $\mathbf{u}_{\xi-1} \leftarrow \mathbf{u}_\xi$ ;
28   if  $\text{enable}_v$  then
29      $\mathbf{v}_{\xi-1} \leftarrow \text{GeneracionNodosIntermedios}(\mathbf{u}_{\xi-1}, N_{1O}, N_{2O}, b_{3ss}, \alpha, \beta)$ ;

```

A continuación se inicia el proceso iterativo propiamente dicho, detallado en el Algoritmo 3. Este proceso se repite mientras que el error residual medio $\bar{e}$ sea mayor de la tolerancia fijada, TOL, o bien mientras que no superemos el número máximo de iteraciones, *maxiter*.

En cada iteración calculamos las fuerzas externas que aparecen en la posiciones de los nodos del modelo $\mathbf{u}$ o en la de los nodos intermedios $\mathbf{v}$. Por eso, en primer lugar se discrimina qué nodos van a tenerse en cuenta en función de la variable enable_v y posteriormente en la línea 22 se procede al cálculo de las fuerzas externas $\mathbf{q}$ a partir de los nodos y del array con los gradientes F_I . El resto de parámetros b_{3ss} , α y β se utilizan para el suavizado y aplicación de las extensiones ocultas, como analizamos posteriormente en la Sección 5.2. Las constantes N_{1O} y N_{2O} indican precisamente el tamaño de dichas extensiones.

Con estas fuerzas $\mathbf{q}$ se aplica en la línea 23 la ecuación del movimiento (5.1-5.2) obteniendo la posición de los nodos $\mathbf{u}$ en la iteración actual ξ a partir de los nodos en iteraciones anteriores $\xi - 1$ y $\xi - 2$. Tal y como hemos analizado en los Capítulos 3 y 4, este proceso tiene lugar en el dominio de Fourier y en él intervienen tanto las fuerzas externas $\mathbf{q}$ como las fuerzas internas de

deformación aplicadas por el filtro $\hat{\mathbf{h}}$.

En la línea 24 se calcula el error residual medio de los nodos. Esto permite estimar si el modelo se encuentra suficientemente cerca de la posición final de estabilidad, siendo ésta una de las condiciones de salida del proceso. Por último, en las líneas 25-29, realizamos el intercambio de variables para el proceso iterativo, y calculamos los nodos intermedios para proceder a la siguiente iteración en caso de ser necesario.

Destacamos que aunque en este resumen se han indicado las operaciones efectuadas con el array de nodos $\mathbf{u}$ como si de un array único se tratara, es importante notar que en realidad se dispone de tres arrays de datos, cada uno correspondiente a una función coordenadas. Por tanto, todo el proceso descrito, se aplica en realidad por triplicado, pero de forma independiente a cada array. Esto es, a cada una de las funciones coordenadas.

Tras esta descripción general del algoritmo vamos a proceder a una análisis más en detalle de los parámetros y métodos del mismo, que por su importancia o por no haber sido tratados en secciones anteriores, merecen una descripción pormenorizada.

Parámetros del sistema. La mayoría de parámetros utilizados en la implementación de los modelos han sido introducidos al inicio de la presente sección. La Tabla 5.1 resume los parámetros más importantes, su descripción y finalidad, así como los valores más habituales para ellos. En el primer bloque se describen los parámetros utilizados para definir las características del modelo deformable, a continuación se muestra un segundo bloque con los parámetros que constituyen el procedimiento de cálculo de las fuerzas externas así como su preprocesado antes de ser aplicadas en el proceso iterativo. Por último se indican las variables utilizadas en las iteraciones y condiciones de finalización del proceso.

Notar que debido a la elevada variación de las aplicaciones de los modelos deformables, y en concreto de los datos a caracterizar, resulta imposible especificar los valores óptimos de los parámetros para todas las posibles aplicaciones de los modelos. Más si cabe, si tenemos en cuenta que la elección de algunos de estos parámetros se realiza de forma empírica. No obstante, algunos de estos parámetros como en el caso de γ y η , si se pueden calcular analíticamente para optimizar y garantizar la convergencia en función del conjunto de datos, tal y como se indica en la Sección 4.3.4.

Por este motivo, los valores indicados en la Tabla 5.1 son los obtenidos para las aplicaciones descritas en el Capítulo 6. Representan por tanto, una referencia y será necesario estudiar los valores óptimos de dichos parámetros para otras aplicaciones de diferente tipología.

Parámetro	Descripción y uso	Valores estimados o fijados para los datos caracterizados
α	Elasticidad del modelo	Elegimos $\alpha = \{0, 0.01, 0.1, 0.5\}$. A mayor ancho de banda de datos menor α , si no el modelo se estira y no entra en los huecos.
β	Rigidez del modelo	Elegimos $\beta = \{0, 0.03, 0.3, 0.15\}$. A mayor ancho de banda de datos menor β , si no el modelo no se dobla a los huecos y resaltos.
η	Masa global del modelo	Elegimos $\eta = \{0.5, 1\}$ Debe satisfacer $\eta_{\min}$ para tener modelos estables.
γ	Relación entre amortiguamiento y masa	Elegimos como valores genéricos $\gamma = \{0.5, 1\}$. Puede ser calculado γ_{opt} para optimizar convergencia.
a_1	Coeficiente de primer orden del sistema	Calculado a partir de γ .
a_2	Coeficiente de segundo orden del sistema	Calculado a partir de γ .
$\{N_1, N_2\}$	Dimensiones del modelo bidimensional	$64 \times 64, 128 \times 128, 256 \times 256$ o mayores dimensiones.
$\{N_{10}, N_{20}\}$	Dimensiones de las extensiones ocultas	Fijamos $\{N_1, N_2\}$ ó $\{N_1/2, N_2/2\}$.
$shpFun$	Función de forma	Elegimos $shpFun = \{ \text{B-spline} \mid \text{diferencias finitas} \}$
$sysSchm$	Esquema iterativo	Elegimos $sysSchm = \{ \text{implicit} \mid \text{explicit} \}$
$enable_v$	Uso de nodos intermedios	Elegimos $enable_v = \{ \text{true} \mid \text{false} \}$.
$enable_{\gamma_{opt}}$	Uso de γ óptimo	Elegimos $enable_{\gamma_{opt}} = \{ \text{true} \mid \text{false} \}$.
$W3DSize$	Tamaño máscara filtrado fuerzas	Fijamos $W3DSize = \{3, 5\}$ con datos muy ruidosos y $W3DSize = 1$ con poco ruido o muy paso bajo.
$mapalg$	Algoritmo para cálculo fuerzas	Elegimos $mapalg = \{1, 2, 3\}$.
tt	Número de puntos entre nodos para el algoritmo de cálculo fuerzas	Elegimos $tt = \{1, 2, 3\}$. A mayor tt mayor precisión pero al aplicar fuerzas, mayor coste computacional.
$\{tt_1, tt_2\}$	Número de nodos intermedios entre los nodos del modelo	Elegimos $tt_i = \{2, 3, 4\}$. A mayor tt_i mayor precisión pero al aplicar fuerzas, mayor coste computacional.
$enable_{hor}$	Filtrado bidimensional en cada plano del volumen de datos	Elegimos $enable_{hor} = \{ \text{true} \mid \text{false} \}$.
$maxstep$	Normalización de fuerzas externas. Valor máximo de la fuerza medido en píxeles	Si $maxstep = 0$ no se utiliza normalización. Fijamos $0.5 < maxstep < 3$ para volúmenes de datos.
$\bar{e}$	Error residual medio	Calculado a partir del valor de $\mathbf{u}_\xi$ y $\mathbf{u}_{\xi-1}$.
TOL	Tolerancia del error	Fijamos $10^{-6} < TOL < 10^{-3}$ en función de la precisión requerida.
$maxiter$	Número máximo de iteraciones	Fijamos, $maxiter = 100$ para datos 3D y primer fotograma 4D, $maxiter = 20$ para subsiguientes fotogramas.
ξ	Variable iteración	Inicializada a $\xi = 1$.

Tabla 5.1.: Variables y parámetros principales del proceso iterativo. Descripción de los mismos y valores más habituales.

Cálculo de la función de Interpolación. En las líneas 4-5 del Algoritmo 2 se procede al cálculo de las matrices $b3vss$ y $b3ss$ que se utilizan respectivamente para la interpolación del volumen gradiente de fuerzas y de los nodos intermedios del modelo para obtener las fuerzas en cada iteración. Dichas funciones realizan el cálculo de un B-spline bidimensional similar al mostrado en la Figura 2.11. La única diferencia entre $b3vss$ y $b3ss$ son sus dimensiones. En el primer caso tenemos un B-spline de dimensiones $tt \times tt$ mientras que en el segundo caso tenemos un B-spline

de dimensiones $tt_1 \times tt_2$ (véase Tabla 5.1).

Para calcular dichas matrices se procede en primer lugar al cálculo de *B-splines* cúbicos periódicos unidimensionales según la expresión 2.27 y a continuación se multiplica cada *B-spline* unidimensional para obtener la función bidimensional como indica 2.31. Notar que estos splines $B(s)$ son cúbicos y se definen mediante cuatro segmentos en cada variable paramétrica. Por tanto, lo que indica el valor de tt , tt_1 y tt_2 son el número de muestras en la función continua del *B-spline* $B(s)$. Es decir, $b3vss$ es la matriz resultante de aplicar una malla de muestreo con dimensiones $tt \times tt$ a $B(s)$, y la matriz $b3ss$ es análoga con dimensiones $tt_1 \times tt_2$.

Importación de datos. La línea 8 del Algoritmo 2 hace la llamada al método que procede a la importación de los datos. Dicha importación depende claramente de la aplicación en concreto. Por este motivo, se traslada el análisis de este paso del algoritmo a las aplicaciones descritas en el Capítulo 6. No obstante, indicamos en la presente sección algunas ideas al respecto. En la mayoría de aplicaciones resultantes de este trabajo se utilizan modelos deformables en un entorno tridimensional. Esto es, utilizamos tres funciones coordenadas. Por tanto, el array **I** que se utilice posteriormente para calcular las fuerzas externas debe ser también tridimensional.

Ahora bien, el conjunto de datos de origen pueden tener un número diferente de dimensiones. Por ejemplo, en la Sección 6.1 se muestran aplicaciones de datos topográficos², los cuales están definidos mediante una matriz bidimensional de valores de alturas. En esta aplicación, dichas alturas se mapean al array tridimensional **I**. Para ello en cada columna de datos, la coordenada z correspondiente a la altura de las coordenadas $\{x, y\}$ se marca con un valor no nulo. En cambio el resto de elementos de la columna se dejan nulos.

La Figura 5.2 muestra este proceso. Al finalizar el mismo, tenemos un volumen binario, al que el modelo deformable deberá adaptarse. Notar que el rango para la coordenada z se ha reducido mediante una cuantificación, para disminuir el consumo de memoria que suponen estos volúmenes de datos. Este mismo proceso de carga de datos se realiza con otros datos bidimensionales, como cartografía submarina y datos meteorológicos.

Otras aplicaciones ya presentan de por sí un conjunto de datos tridimensionales, como por ejemplo algunos tipos de imagen médica como los descritos en la Sección 6.2. En este caso, no es necesario realizar ningún mapeado y la carga de datos es trivial, o bien, simplemente consiste en una importación y descompresión de datos según algún formato estándar como DICOM [Pianykh, 2008]. Así por ejemplo, la Figura 5.3 muestra la representación tridimensional de un tomografía axial computerizada ó TAC (CT) [Bankman, 2008] de un cráneo humano³.

²Fuente: www.ign.es

³Fuente: www.mathworks.com

Figura 5.2.: Ejemplo de conjunto de datos bidimensional, datos topográficos: (a) Representación con mapa de colores; (b) Representación tridimensional; (c) Mapeado a volumen tridimensional.

Figura 5.3.: Ejemplo de conjunto de datos tridimensional, TAC de cráneo humano.

De igual forma podemos disponer de conjuntos de datos con cuatro dimensiones. Básicamente consisten en una serie de volúmenes de datos 3D, cada uno de los cuales representa un instante temporal. La Figura 5.4 muestra tres instantes o *frames* de una resonancia magnética (MR) 4D [Bankman, 2008] de un corazón humano⁴. Este tipo de datos se puede manejar mediante dos aproximaciones distintas. La primera consiste en interpretar dicho conjunto de datos como un array de cuatro dimensiones $I[n_x, n_y, n_z, n_t]$. En la segunda en cambio, suponemos que lo que tenemos en realidad es un array de arrays tridimensionales, $[I_1[n_x, n_y, n_z], \dots, I_{t_{\max}}[n_x, n_y, n_z]]$.

En la práctica, el procedimiento utilizado habitualmente en la adaptación de los modelos deformables a datos 4D, consiste en ajustar el modelo a cada uno de los fotogramas 3D, inicia-

⁴Fuente: www.osirix-viewer.com/datasets

Figura 5.4.: Ejemplo de conjunto de datos 4D, MR de corazón humano.

lizando el modelo en la posición final obtenida en el fotograma anterior. Por tanto, dado que en cada proceso de adaptación sólo necesitamos disponer en memoria de un volumen en concreto, resulta más óptimo desde el punto de vista del consumo de memoria, la alternativa de interpretar el dato 4D como una serie de datos 3D.

Cálculo del volumen gradiente. Tras la creación del volumen con los datos I , en la línea 9 se procede al cálculo del volumen que contendrá las fuerzas externas F_I . Este volumen se calcula habitualmente como un gradiente a partir de I , esto es $F_I = \nabla(I)$. Ahora bien, por motivos de implementación, realmente lo que tendremos serán tres arrays tridimensionales $[F_{I,1}, F_{I,2}, F_{I,3}]$ cada uno almacenando el componente del gradiente de cada función coordenada. Es decir, $F_{I,i}$ será un array tridimensional que almacenará las fuerzas externas que se aplican en cada punto $\{x, y, z\}$ en la dirección del eje i .

A pesar de que el gradiente es la operación fundamental que permite obtener las fuerzas externas a partir de los bordes de los objetos, en la mayoría de casos es necesario un preprocesado de los datos antes de aplicar dicho gradiente. Uno de los motivos es la aparición de artefactos y pequeños resaltos o huecos, aspectos indeseados de los datos que se reducen aplicando un filtro paso bajo bidimensional a cada plano del volumen o directamente filtrando mediante una respuesta impulsional tridimensional al volumen por completo. En ambos casos, el filtrado gaussiano o bien mediante máscaras B-splines es el que mejores resultados proporciona. El parámetro $W3DSize$ se corresponde con el tamaño de dicha respuesta impulsional. Esto es, $W3DSize = 3$ indica que la respuesta impulsional del filtro tridimensional gaussiano tendrá unas dimensiones $3 \times 3 \times 3$. Si empleamos en cambio un filtro B-spline bidimensional, el array $b3vss$ se corresponde precisamente con la máscara de dicho filtro.

Además, en ciertas aplicaciones puede ser conveniente extender la influencia de las fuerzas

externas a una mayor distancia de los bordes de los objetos. Esto es interesante cuando el modelo puede tener una inicialización lejana a los datos de interés, ya que de este forma, el modelo es capturado por los datos de una forma más rápida.

Por ejemplo, en la Sección 6.1 se caracterizan datos topográficos mediante modelos deformables bidimensionales trabajando en un entorno tridimensional. En este caso, se construye el volumen a partir de los datos de alturas como se ha indicado anteriormente en esta misma sección. La Figura 5.5(a) muestra dicho volumen. Tras obtener el volumen se realiza un filtrado tridimensional con una máscara $W3DSize = 3$. La Figura 5.5(b) permite ver cómo el suavizado de los datos permitirá un array de fuerzas más progresivo.

Figura 5.5.: Cálculo de fuerzas con datos topográficos: (a) Construcción del volumen a partir de los datos; (b) Volumen tras filtrado tridimensional; (c) Gradiente para la coordenada vertical; (d) Gradiente tras filtrado unidimensional en la coordenada vertical.

Dado que en esta aplicación sólo se permite al modelo deformable 3D un grado de libertad en la coordenada z , sólo necesitaremos calcular el gradiente según dicha coordenada z . De nuevo, la Figura 5.5(c) muestra el resultado del gradiente. Notar que en la zona superior a la superficie, el gradiente es negativo, por lo que estas fuerzas externas empujarán al modelo deformable ha-

cia abajo, mientras que la zona inferior es positiva, con lo que el modelo se moverá hacia arriba. Por último, se aplica un filtrado unidimensional a cada *columna* de datos mediante B-splines unidimensionales, mostrándose en la Figura 5.5(d). Esto permite extender la zona de influencia del borde de los datos. Así, el modelo podrá ser capturado aunque este se encuentre inicialmente a una distancia elevada de los datos.

En las aplicaciones que se describen en la Sección 6.2, los datos a analizar son ya volúmenes tridimensionales. En este caso el procesado cambia ligeramente con respecto al descrito anteriormente. Puede ser necesario en algunos casos un filtrado paso bajo previo, mediante una respuesta impulsional tridimensional con tamaño $W3DSize = 3$. Esto es especialmente importante en datos con una baja relación señal a ruido. De igual forma, tras el cálculo del gradiente puede ser interesante un filtrado con B-splines para extender la influencia de los bordes.

En estas aplicaciones, se ha optado por utilizar un modelo deformable en el que la coordenada z se mantiene fija, mientras que las coordenadas x e y son las que se van desplazando para adaptarse al objeto. Por tanto, el gradiente a calcular en estas aplicaciones será sólo en las direcciones x e y , y el filtrado posterior será bidimensional y sobre cada plano de los volúmenes gradientes $F_{I,x}$ y $F_{I,y}$, mediante la máscara $b3vss$.

Adicionalmente, en el preprocesado de los datos se han utilizado operaciones básicas de morfología matemática [Serra, 1988]. También se ha utilizado morfología para eliminar huecos que aparecen en el interior del objeto. Esto permite tener una superficie del objeto con mayor consistencia y al calcular el gradiente de los datos, los vectores de fuerzas aparecen sólo sobre el contorno del objeto.

La Figura 5.6 ilustra este procedimiento. Con el fin de ofrecer una mayor claridad se muestra sólo un corte del volumen. El mismo procedimiento se aplica a todos ellos. En 5.6(a) aparece el volumen tras su filtrado paso bajo inicial. En primer lugar aplicamos la transformación de máximo extendido [Soille, 1999], cuyo resultado aparece en la Figura 5.6(b). Posteriormente unimos los puntos inconexos y producimos un cierre con un disco. El resultado se aprecia en las Figuras 5.6(c) y 5.6(d). Aunque en el ejemplo mostrado no ha sido necesario, en datos muy ruidosos, se puede aplicar un limpieza del borde para suprimir estructuras pequeñas conectadas a los bordes, así como una apertura. Con estos datos, y considerándolos como un array binario, podemos eliminar los pixels del interior, quedando un contorno que define el objeto como muestra la Figura 5.6(e).

Aplicamos un suavizado a este borde mediante la máscara B-splines bidimensional $b3vss$, obteniendo 5.6(f). Por último, calculamos el gradiente en dirección x e y como muestran las Figuras 5.6g y 5.6(h). Los dos últimos pasos indicados pueden invertirse, con análogos resultados. De nuevo, el gradiente $F_{I,x}$ guía al modelo a pegarse a los bordes verticales y $F_{I,y}$ hace lo propio moviendo el modelo en vertical acercando el modelo a los bordes horizontales.

Figura 5.6.: Ejemplo de cálculo de fuerzas con datos 4D: (a) Corte $z = 32$ del volumen de datos; (b-e) Diferentes etapas del preprocesado aplicando morfología matemática; (f) Filtrado bidimensional mediante B-splines; (g-h) Gradientes en las direcciones x e y , $F_{I,x}$ y $F_{I,y}$.

El preprocesado de los datos debe adaptarse a sus características, como ancho de banda y margen dinámico, así como su relación señal a ruido. Pero prácticamente en todos los casos, permite filtrar los elementos no deseados sin sacrificar en exceso los puntos y áreas de interés. Para ilustrar las ventajas del mismo, se muestra en la Figura 5.7 una comparativa en el cálculo de fuerzas con dos tipos de preprocesado.

Figura 5.7.: Ejemplo de cálculo de fuerzas con datos 3D: Primera fila, corte $z = 14$ del volumen de datos; Segunda, mismo corte tras el preprocesado; Tercera y cuarta, gradientes en direcciones x e y . Preprocesados: Primera columna, sin morfología matemática; Segunda, con morfología.

En este caso, el conjunto de datos es un TAC 3D de un cráneo humano con un elevado nivel de ruido. En ambos casos, el primer paso consiste en aplicarle un filtrado paso bajo al volumen mediante una respuesta impulsional tridimensional gaussiana con tamaño $W3DSize = 3$. La primera fila de la Figura 5.7 muestra un corte del volumen tras aplicar el filtrado. Ambas columnas muestran el mismo dato de partida.

Posteriormente el preprocesado difiere entre ambas aproximaciones. En la primera columna se procede a una umbralización y después se calcula el gradiente. Tras él, se realiza un filtrado a cada corte horizontal mediante *B-splines*. En la segunda columna en cambio, antes del gradiente aplicamos de nuevo morfología matemática. En este caso, primero se calcula la transformación de máximo extendido, entonces se rellenan los agujeros, aplicándose tras el relleno una apertura y una erosión. A partir del array resultante, se eliminan los puntos de interior, y tras el mismo filtrado paso bajo mediante *B-splines* que se realiza en la primera columna, se procede con el gradiente de los datos. La segunda fila de la Figura 5.7 muestra el resultado del preprocesado, mientras que en las dos últimas filas de la figura se puede observar el gradiente según las direcciones x e y .

Si inicializamos el modelo en forma de esfera o cilindro rodeando externamente el cráneo, en ambos casos el modelo tiende a converger a la forma del objeto. Sin embargo, se puede determinar a partir de la figura que el gradiente de la segunda columna permite ajustar el modelo a la forma del objeto de una forma más precisa que el primer caso. Igualmente se puede observar que el ruido de los datos se ve en gran medida suprimido por este preprocesado, quedando solamente unas pequeños artefactos alrededor de la forma teórica del objeto. Estos artefactos se suavizan posteriormente con el empleo de los modelos deformables descritos en este trabajo.

Generación de nodos intermedios. Si el parámetro $enable_v$ es verdadero, el proceso iterativo utiliza nodos intermedios $\mathbf{v}$ entre los nodos del modelo $\mathbf{u}$. Estos nodos $\mathbf{v}$ se utilizan en el cálculo de las fuerzas externas dentro de cada iteración $\mathbf{q}_{\xi-1}$. Esto es, en la línea 22 del Algoritmo 3. Por tanto, deben calcularse para la posición del modelo en cada iteración. Es decir, en la línea 12 del Algoritmo 2 en la inicialización, y posteriormente en cada iteración en la línea 29.

El procedimiento de cálculo de los nodos intermedios es sencillo y eficiente computacionalmente. Consiste en una interpolación bidimensional, realizada insertando ceros en las dos dimensiones del modelo y filtrando posteriormente con la matriz *B-spline* $b3ss$ como máscara. Previamente, si el modelo es abierto en alguna dimensión, hay que añadir extensiones ocultas en los extremos para evitar que en los extremos del modelo, disminuya el valor de los nodos al ponderarse con valores nulos.

La Figura 5.8 muestra un ejemplo de cálculo de estos nodos intermedios $\mathbf{v}$. En concreto se muestra un corte vertical del conjunto de datos, así como los nodos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que aparecen en la

posición de dicho corte. Como se puede observar, estos nodos $\mathbf{v}$ representan un suavizado de la posición de los nodos del modelo.

Figura 5.8.: Corte de un modelo deformable adaptándose a datos topográficos. En color sólido se muestra el conjunto de datos. Con el símbolo ■ se indican los nodos $\mathbf{u}$. Los nodos intermedios $\mathbf{v}$ están representados con el símbolo ●.

Dado que estos nodos $\mathbf{v}$ se emplean para calcular las fuerzas externas en lugar de los nodos originales $\mathbf{u}$, el conjunto de las fuerzas externas resultantes serán más inmunes a espúreos o artefactos de los datos. Ahora bien, un empleo excesivo de nodos impedirá que el modelo se pueda ajustar a valores con elevada variación, esto es, elevado ancho de banda. Por eso, en este tipo de aplicaciones será conveniente reducir el número de nodos intermedios entre nodos del modelo", o bien aumentar el número de nodos del modelo.

Por último, indicamos que si bien el empleo de nodos intermedios está pensado para el uso de B -spline como función de forma del modelo iterativo, estos nodos $\mathbf{v}$ pueden emplearse también con modelos basados en diferencias finitas.

Cálculo de las fuerzas externas. En la ecuación del proceso iterativo que se ejecuta en la línea 23 del Algoritmo 3, es necesario proporcionar los arrays de fuerzas $\mathbf{q}$. Es decir, necesitamos un array con el mismo número de dimensiones del modelo que indique las fuerzas externas para cada función coordenada con variación. Para las aplicaciones descritas en el Capítulo 6 es necesario por tanto arrays bidimensionales de fuerzas, sólo para la coordenada z como en la Sección 6.1 o bien para las coordenadas x e y en la Sección 6.2.

Como se acaba de ver, estas fuerzas pueden determinarse a partir de los nodos del modelo $\mathbf{u}$ o bien, a partir de los nodos intermedios $\mathbf{v}$. En ambos casos, la primera etapa del proceso obtiene el valor de fuerzas que aparece en el array gradiente tridimensional para las posiciones de los nodos $\mathbf{u}$ ó $\mathbf{v}$. A continuación, se realiza un mapeo del array tridimensional sobre la matriz bidimensional de fuerzas, cuyos índices son las variables paramétricas s_1 y s_2 . La Figura 5.9 muestra un detalle de estas matrices de fuerzas. Notar que las matrices son bidimensionales, porque los arrays de nodos $\mathbf{u}$ ó $\mathbf{v}$ también lo son.

Figura 5.9.: Detalle de un array bidimensional de fuerzas a partir de: (a) Nodos del modelo $\mathbf{u}$; (b) Nodos intermedios $\mathbf{v}$. En ambos casos, array de fuerzas antes del postprocesado.

Se puede observar que el empleo de nodos $\mathbf{v}$ permite una mayor resolución en el array de fuerzas. No obstante, hay que tener en cuenta que realmente el algoritmo necesita un vector de fuerzas para los nodos $\mathbf{u}$ del modelo. Por este motivo, una vez tenemos el array de fuerzas para los nodos $\mathbf{v}$, es necesario realizar un diezmado con su filtrado paso bajo correspondiente. Al igual que en otras etapas del algoritmo se emplean *B-splines* por sus propiedades mencionadas a lo largo de este trabajo.

Se han implementado diferentes aproximaciones de este procedimiento, tanto en la frecuencia como en el dominio del espacio, con resultados similares. En ambos casos, cuando el modelo es abierto, se ha hecho uso de las extensiones ocultas en los bordes del array según el procedimiento indicado en la Sección 5.2.

La Figura 5.10 ilustra el procedimiento. Partimos de la matriz de fuerzas calculada con los nodos $\mathbf{v}$ y mostrado en 5.10(a). Esta matriz tienen mayores dimensiones que la matriz de nodos. En este caso 256×256 frente a la matriz de nodos con tamaño 64×64 . Posteriormente añadimos extensiones ocultas y aplicamos el filtrado con *B-splines*. La segunda fila muestra estas dos matrices.

Por último eliminamos las extensiones y diezmamos espacialmente para obtener la matriz coherente con las dimensiones de los nodos, como se aprecia en la última fila de la figura. Esta matriz de fuerzas es más inmune a los artefactos y al ruido que obtener una matriz de fuerzas directamente a partir de los nodos $\mathbf{u}$, aun teniendo ambas idénticas dimensiones. Como contrapartida, el coste computacional se incrementa al tener que realizar el procesado. Sin embargo, es importante destacar que el coste computacional depende sólo del tamaño del modelo y no del tamaño del conjunto de datos como se detalla en la Sección 5.3. No obstante, el tamaño del conjunto de datos influye en los requerimientos de memoria del programa.

Notar que al igual que el resto de etapas del proceso iterativo, el cálculo de las fuerzas externas se realiza para cada función coordinada. Así pues, si permitimos variación en dos coordenadas del espacio tridimensional, será necesario realizar el cálculo de dos matrices de fuerzas en cada iteración.

Proceso de filtrado. El proceso de filtrado se ejecuta en el método de la línea 23 del Algoritmo 3. En esencia, se ejecutan las ecuaciones (5.1) ó (5.2) según el esquema iterativo elegido sea respectivamente implícito o explícito. Mediante estas expresiones, en el proceso de filtrado se aplican las fuerzas externas calculadas y las fuerzas internas mediante los filtros $\hat{\mathbf{h}}$ ó $\hat{\mathbf{h}}'$.

Este filtrado es sencillo y se realiza en el dominio de la frecuencia tal y como indican (5.1-5.2). Solamente hay que tener en cuenta que si el modelo es abierto, será necesario añadir extensiones ocultas según se describe en la Sección 5.2. En caso de no añadir dichas extensiones, al utilizar la transformada Discreta de Fourier se imponen a la señal condiciones de periodicidad en todas las dimensiones. Esto provoca que el modelo tienda a cerrarse en todas sus dimensiones a lo largo del proceso iterativo.

La Figura 5.11 muestra un modelo bidimensional adaptándose al TAC 3D mostrado en la Figura 5.2. Los nodos son las intersecciones de las líneas del modelo. Estas líneas son a su vez el resultado del producto en la frecuencia, o convolución en el dominio del espacio, de los valores de los nodos por las funciones de forma, tal y como se describe en la Sección 2.2. Asimismo, en la figura se han representado mediante flechas rojas las fuerzas externas aplicadas en cada uno de los nodos del modelo.

Notar que dado que el modelo deformable es bidimensional, $e = 2$, éste está definido mediante dos variables paramétricas s_1 y s_2 . A su vez, está construido sobre un espacio tridimensional, $d = 3$. Por tanto, las tres funciones coordinadas $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ y $\mathbf{u}_z$ indican respectivamente las posiciones x , y y z de los nodos, quedando definidas cada una de ellas mediante una matriz bidimensional. En la Figura 5.11 se puede observar cómo se sitúan estas matrices de parámetros sobre la forma tridimensional del objeto. Así, al desplazarnos por la variable paramétrica s_1 , nos

Figura 5.10.: Postprocesado de array de fuerzas externas con nodos v : (a) Array de fuerzas; (b) Adición de extensiones; (c) Filtrado mediante B-splines; (d) Eliminación de extensiones; (e) Diezmado espacial.

Figura 5.11.: Modelo adaptándose al conjunto de datos tridimensional de la Figura 5.2. Las flechas rojas indican las fuerzas externas que se aplican en cada nodo del modelo.

movemos alrededor del objeto como si de una coordenada cilíndrica se tratara. Por otra parte, la variable s_2 sirve para movernos a lo largo de la coordenada z . Notar que esta distribución de las variables paramétricas se corresponde con el ejemplo mostrado, en otras aplicaciones la colocación de las variables puede utilizar otra disposición.

La primera fila de la Figura 5.12 representa las funciones coordenadas u_x y u_y de dicho modelo. Estas gráficas representan los valores x e y de los nodos en función del valor de las variables paramétricas s_1 y s_2 . Se ha omitido la representación de u_z dado que en este ejemplo la función coordenada permanece fija a lo largo del tiempo y sirve sólo para posicionar cada nodo en un valor constante de la coordenada z . Por tanto, su representación equivaldría un plano creciente con s_2 y constante con s_1 . La segunda fila de la Figura 5.12, muestra las fuerzas externas q_x y q_y resultantes en cada función coordenada para cada nodo. Estas gráficas representan en valores positivos o negativos las fuerzas que aparecen en los nodos según los ejes x e y . De nuevo, no se ha representado la matriz de fuerzas para la coordenada z porque en este caso, el valor de la coordenada z de los nodos se fija en la inicialización y permanece constante. Por tanto, estas fuerzas son nulas para cualquier valor de ξ .

Como se observa de nuevo en la primera fila de la figura, las funciones coordenadas u_x y u_y , es decir los valores de x e y de los nodos, son periódicas⁵ para la variable s_1 . Por el contrario, aunque no se aprecie con detalle a través de la figura, se puede comprobar numéricamente que

⁵Consideramos que el rango representado es un período de la señal. Por tanto, la señal será periódica si los valores de las funciones coordenadas en los extremos coinciden, esto es $u_i(0, s_2) = u_i(63, s_2)$.

Figura 5.12.: Proceso de filtrado. Cálculo de fuerzas externas: Primera fila, funciones coordenadas u_x y u_y ; Segunda fila, fuerzas externas q_x y q_y correspondientes a dichas funciones coordenadas; Tercera fila, fuerzas externas normalizadas al rango $[-0,5 \ 0,5]$.

los valores no son periódicos para la variable s_2 . Por tanto, en este caso será necesario añadir extensiones ocultas para dicha coordenada s_2 .

Adicionalmente, en el proceso de filtrado es necesario ejecutar dos acciones. La primera de ellas es la normalización de las fuerzas. En ciertas aplicaciones es deseable que el movimiento del modelo sea suave, al menos en su etapa final de ajuste. Por eso, con el fin de asegurar una menor oscilación, es posible acotar los valores máximos de las fuerzas en el nodo. Esta normalización queda regulada por el parámetro *maxstep*. Por ejemplo, la tercera fila de la Figura 5.12 se muestra el resultado de normalizar las matrices de fuerzas $\mathbf{q}_x$ y $\mathbf{q}_y$ con un *maxstep* = 0,5. Así, las fuerzas quedan acotadas por el rango $[-0,5 \ 0,5]$.

Por último, si el esquema utilizado es explícito y se está utilizando un parámetro $\eta < \eta_{\min}$ es necesario filtrar los componentes espectrales con potencial inestabilidad. Este proceso es trivial, ya que se puede realizar directamente modificando el filtro del sistema $\hat{\mathbf{h}}'$ para que suprima por completo dicha zona de alta frecuencia del espectro de los datos. Al aplicar este filtro $\hat{\mathbf{h}}'$ en el proceso iterativo, los componentes inestables se suprimen por completo.

5.2. Extensiones ocultas del modelo

El planteamiento del proceso iterativo descrito en el dominio de la frecuencia mediante las ecuaciones (5.1-5.2), requiere que la señal a procesar sea periódica, condición aplicable inicialmente sólo a los modelos deformables completamente cerrados⁶. Para un modelo abierto, aunque sea sólo para una variable paramétrica, la minimización de su funcional de energía no puede ser realizada mediante una señal periódica que determine el modelo. No obstante, es posible realizar un filtrado lineal e invariante en el tiempo, aplicando el filtro invariante en el espacio definido sobre un modelo extendido [Weruaga et al., 2004b].

Este modelo extendido está formado por el modelo inicial abierto visible al que se le añaden unas extensiones ocultas unidas a los extremos de éste. Dichas extensiones son construidas a partir de los parámetros de ese mismo modelo. Cada variable paramétrica s_j tendrá ahora una longitud de $2N_j$ nodos. Es decir, N_j nodos del modelo visible más N_j nodos de las extensiones ocultas. Así, un modelo con 24×64 nodos visibles pasa a tener 48×128 nodos durante el proceso iterativo. Notar que las extensiones se aplican en el dominio del espacio, tanto en las variables nodales como en las matrices de fuerzas externas.

Con el empleo de las extensiones ocultas en los modelos abiertos, las ecuaciones discretas de

⁶Los modelos cerrados satisfacen la ecuación (2.3). El Capítulo 3 justifica este requerimiento de la formulación en el dominio de Fourier.

movimiento empleadas para la estimación de la posición y forma del modelo deformable (5.1-5.2) se transforman para el modelo implícito en,

$$\mathbf{q}_{\xi-1} = Q(\mathbf{u}_{\xi}), \quad (5.7a)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{\xi} = DFT\{\mathbf{q}_{\xi-1}^{+d}\}, \quad (5.7b)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\xi}^{+d} = \left(\widehat{a_1 \mathbf{h}^{+0}}\right) \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{\xi-1}^{+d} + \left(\widehat{a_2 \mathbf{h}^{+0}}\right) \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{\xi-2}^{+d} + \left(\widehat{\eta \mathbf{f}^{+0}}\right)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{\xi}, \quad (5.7c)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\xi-2}^{+d} = \widehat{\mathbf{u}}_{\xi-1}^{+d}, \quad (5.7d)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\xi-1}^{+d} = \widehat{\mathbf{u}}_{\xi}^{+d}, \quad (5.7e)$$

$$\mathbf{u}_{\xi} = \left(DFT^{-1}\left\{\widehat{\mathbf{u}}_{\xi}^{+d}\right\}\right)^-. \quad (5.7f)$$

A su vez, para el esquema explícito tendremos,

$$\mathbf{q}_{\xi-1} = Q(\mathbf{u}_{\xi}), \quad (5.8a)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{\xi} = DFT\{\mathbf{q}_{\xi-1}^{+d}\}, \quad (5.8b)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\xi}^{+d} = \left(\widehat{\mathbf{h}'^{+0}}\right) \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{\xi-1}^{+d} + a_2 \widehat{\mathbf{u}}_{\xi-2}^{+d} + \left(\widehat{\eta \mathbf{f}^{+0}}\right)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{\xi}, \quad (5.8c)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\xi-2}^{+d} = \widehat{\mathbf{u}}_{\xi-1}^{+d}, \quad (5.8d)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\xi-1}^{+d} = \widehat{\mathbf{u}}_{\xi}^{+d}, \quad (5.8e)$$

$$\mathbf{u}_{\xi} = \left(DFT^{-1}\left\{\widehat{\mathbf{u}}_{\xi}^{+d}\right\}\right)^-. \quad (5.8f)$$

Tanto en (5.7) como en (5.8), $\mathbf{u}_{\xi}$ es el array de nodos visibles del modelo, $\mathbf{q}_{\xi-1}$ es el vector de fuerzas externas, $\mathbf{d}$ se corresponde con las extensiones ocultas de los nodos o de las fuerzas, $\mathbf{h}$ y $\mathbf{h}'$ son los filtros definidos en (5.3-5.4) y los coeficientes a_1 y a_2 son los definidos en la ecuación (3.4). La función Q representa el método de obtención de las fuerzas externas para los nodos $\hat{\mathbf{u}}$ invocado en la línea 22 del Algoritmo 3. El operador $\mathbf{x}^{+d}$ representa el resultado de unir al array $\mathbf{x}$ las extensiones $\mathbf{d}$ tal y como se describe a continuación. De igual forma $\mathbf{z}^-$ representa el resultado de eliminar dichas extensiones al array $\mathbf{z}$. Los arrays $\widehat{\mathbf{h}^{+0}}$, $\widehat{\mathbf{h}'^{+0}}$, $\widehat{\mathbf{f}^{+0}}$, $\widehat{\mathbf{u}}_{\xi}^{+d}$, $\widehat{\mathbf{u}}_{\xi-1}^{+d}$ y $\widehat{\mathbf{u}}_{\xi-2}^{+d}$ representan respectivamente las $eDFT$ s de las secuencias espaciales $\mathbf{h}^{+0}$, $\mathbf{h}'^{+0}$, $\mathbf{f}^{+0}$, $\mathbf{u}_{\xi}^{+d}$, $\mathbf{u}_{\xi-1}^{+d}$ y $\mathbf{u}_{\xi-2}^{+d}$. Notar que las expresiones (5.7-5.8) se corresponden con el bucle del proceso iterativo definido en el Algoritmo 3, pero sin considerar el empleo de los nodos intermedios $\mathbf{v}$.

Extensiones en modelos unidimensionales. En aras de una mayor claridad en la explicación, desarrollamos en primer lugar la descripción de las extensiones ocultas para el caso de modelos unidimensionales, también llamados contornos activos o *snakes*, pasando posteriormente a su generalización a modelos de mayores dimensiones. Así pues, para los modelos unidimensionales el operador $\mathbf{x}^{+y}$ representa el resultado de unir los dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, ambos de longitud N_1 . Por otra parte, $\mathbf{z}^-$ es un vector que contiene los N_1 elementos centrales de los $2N_1$ del vector $\mathbf{z}$.

Dado que el filtrado se realiza sobre la *snake* extendida $\mathbf{u}_\xi^{+d}$ de tamaño $2N_1$ nodos, los filtros $\mathbf{h}$ y $\mathbf{h}'$ también deben tener unas dimensiones $1 \times 2N_1$. Por tanto, para los contornos abiertos se trabaja con un filtro extendido $\mathbf{h}^{+0}$, el cual se construye de la siguiente manera en el dominio espacial,

$$\mathbf{h}^{+0} = \left[h^0 \dots h^{N_1/2-1} \underbrace{0 \dots 0}_{N_1} h^{N_1/2} \dots h^{N_1-1} \right], \quad (5.9)$$

donde el superíndice i del elemento h^i representa la posición i -ésima del vector original $\mathbf{h}$. El filtro extendido para el caso explícito $\mathbf{h}^{'+0}$ y para la función de forma $\mathbf{f}^{+0}$ se construyen de forma análoga.

En cada iteración (5.7-5.8), tras el filtrado sobre el contorno extendido (5.7c,5.8c), se actualizan las variables extendidas en el dominio de la frecuencia $\mathbf{u}_{\xi-2}^{+d}$ (5.7d,5.8d) y $\mathbf{u}_{\xi-1}^{+d}$ (5.7e,5.8e), las cuales permiten calcular la posición de los nodos para la siguiente iteración. A continuación se extrae la parte visible de $\mathbf{u}_\xi$, de tamaño $1 \times N_1$. Este vector de nodos se utiliza para el cálculo de las fuerzas externas al inicio de cada iteración (5.7a,5.8a) las cuales deben extenderse y convertirse a la frecuencia (5.7b,5.8b) para poder ser utilizada en el filtrado de la siguiente iteración.

Previamente a estos bucles (5.7-5.8) se deben aplicar las extensiones ocultas al vector de nodos $\mathbf{u}_\xi$, esto es $\mathbf{u}_\xi^{+d}$. Las extensiones $\mathbf{d}$, de tamaño $1 \times N_1$, se añaden a un vector genérico $\mathbf{x}^{+d}$ con,

$$\mathbf{x}^{+d} = \left[d^0 \dots d^{N_1/2-1} \ x^0 \dots x^{N_1-1} \ d^{N_1/2} \dots d^{N_1-1} \right], \quad (5.10)$$

y se calculan de acuerdo a,

$$d^n = \begin{cases} x^0 + \lambda n' (x^1 - x^0) & n \geq N_1/2, \\ x^{N_1-1} + \lambda n'' (x^{N_1-1} - x^{N_1-2}) & n < N_1/2, \end{cases} \quad (5.11)$$

donde $n \in [0, N_1 - 1]$, $n' = n - N_1/2$, $n'' = n + 1$, y el superíndice i de los elementos d^i y x^i representa la posición i -ésima de los vectores $\mathbf{d}$ y $\mathbf{x}$. Es importante recordar, que la adición de extensiones es necesaria en todas las funciones coordenadas del modelo deformable. Así pues, el mismo procedimiento de obtención de extensiones es aplicado a cada vector de nodos de cada función coordenada.

Para el cálculo de las extensiones se hace uso del coeficiente λ definido como,

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, \quad (5.12)$$

donde α y β son los parámetros de elasticidad y rigidez del modelo. Este coeficiente λ determina el carácter de las extensiones tal y como muestra la Figura 5.13, apareciendo como casos extremos,

- Un caso elástico, $\lambda = 0$, debido a que $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. Representa la minimización de la energía de la primera derivada de la señal, manteniendo la extensión un valor constante.

- Un caso rígido, $\lambda = 1$, debido a que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. Se corresponde con la minimización de la energía de la segunda derivada de la señal, manteniendo constante la pendiente de la extensión.

Figura 5.13.: Extensiones para una coordenada del contorno en función de λ .

Notar que con las extensiones ocultas descritas no obtenemos realmente un modelo periódico. Sin embargo, mediante su uso el modelo no quedará deformado en los extremos durante el proceso de filtrado. Al final de esta sección analizamos su efecto utilizando tanto modelos implícitos como explícitos.

Extensiones en modelos bidimensionales. La solución propuesta para los modelos unidimensionales puede aplicarse también al caso bidimensional. En este caso, el filtrado se realiza sobre el modelo extendido $\mathbf{u}_\xi^{\text{d}}$ de tamaño $2N_1 \times 2N_2$. Por tanto, los filtros $\mathbf{h}$ y $\mathbf{h}'$ también deben tener unas dimensiones $2N_1 \times 2N_2$. Así pues, de forma análoga a (5.9), el filtro extendido bidimensional $\mathbf{h}^{+0}$ se construye insertando ceros en el dominio espacial,

$$\mathbf{h}^{+0} = \begin{bmatrix} h^{0,0} & \dots & h^{0,N_2/2-1} & 0 & \dots & 0 & h^{0,N_2/2} & \dots & h^{0,N_2-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^{N_1/2-1,0} & \dots & h^{N_1/2-1,N_2/2-1} & 0 & \dots & 0 & h^{N_1/2-1,N_2/2} & \dots & h^{N_1/2-1,N_2-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h^{N_1/2,0} & \dots & h^{N_1/2,N_2/2-1} & 0 & \dots & 0 & h^{N_1/2,N_2/2} & \dots & h^{N_1/2,N_2-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^{N_1-1,0} & \dots & h^{N_1-1,N_2/2-1} & 0 & \dots & 0 & h^{N_1-1,N_2/2} & \dots & h^{N_1-1,N_2-1} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

donde los superíndices $\{i, j\}$ del elemento $h^{i,j}$ representan la fila i y columna j de la matriz original $\mathbf{h}$. Los símbolos $\dots, \vdots$ y $\ddots$ representan los valores necesarios hasta complementar las dimensiones

$2N_1 \times 2N_2$ de la matriz $\mathbf{h}^{+0}$. El filtro extendido para el caso explícito $\mathbf{h}^{'+0}$ y para la función de forma $\mathbf{f}^{+0}$ se construyen de forma análoga.

Las extensiones que se aplican en las matrices de nodos y de fuerzas externas se calculan de forma similar al caso unidimensional. Definimos $\mathbf{z}$ como una matriz de tamaño $N_1 \times N_2$, y $\mathbf{d}$ como las extensiones correspondientes a dicha matriz. Así, la matriz extendida $\mathbf{z}^{+\mathbf{d}}$, de dimensiones $2N_1 \times 2N_2$, queda de la siguiente manera,

$$\mathbf{z}^{+\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_t & \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_l & \mathbf{z} & \mathbf{d}_r \\ \mathbf{d}_3 & \mathbf{d}_b & \mathbf{d}_4 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

donde los subíndices t, b, l, r significan superior, inferior, izquierda y derecha, respectivamente, mientras que los superíndices numéricos hacen referencia a las cuatro esquinas de la matriz extendida.

Para construir las extensiones, se aplica un razonamiento similar al realizado en la ecuación (5.11) obteniendo⁷,

$$\mathbf{d}_t = \underbrace{[1 \dots 1]_{N_1/2}}^T \mathbf{z}^{0,*} + \lambda \left[-\frac{N_1}{2} \dots -1 \right]^T (\mathbf{z}^{1,*} - \mathbf{z}^{0,*}), \quad (5.15)$$

$$\mathbf{d}_l = \mathbf{z}^{*,0} \underbrace{[1 \dots 1]_{N_2/2}} + \lambda (\mathbf{z}^{*,1} - \mathbf{z}^{*,0}) \left[-\frac{N_2}{2} \dots -1 \right], \quad (5.16)$$

$$\mathbf{d}_b = \underbrace{[1 \dots 1]_{N_1/2}}^T \mathbf{z}^{N_1-1,*} + \lambda \left[1 \dots \frac{N_1}{2} \right]^T (\mathbf{z}^{N_1-1,*} - \mathbf{z}^{N_1-2,*}), \quad (5.17)$$

$$\mathbf{d}_r = \mathbf{z}^{*,N_2-1} \underbrace{[1 \dots 1]_{N_2/2}} + \lambda (\mathbf{z}^{*,N_2-1} - \mathbf{z}^{*,N_2-2}) \left[1 \dots \frac{N_2}{2} \right], \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 = & \frac{1}{2} \left(\underbrace{[1 \dots 1]_{N_1/2}}^T \mathbf{d}_l^{0,*} + \left[-\frac{N_1}{2} \dots -1 \right]^T (\mathbf{d}_l^{1,*} - \mathbf{d}_l^{0,*}) + \right. \\ & \left. + \mathbf{d}_t^{*,0} \underbrace{[1 \dots 1]_{N_2/2}} + (\mathbf{d}_t^{*,1} - \mathbf{d}_t^{*,0}) \left[-\frac{N_2}{2} \dots -1 \right] \right), \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde λ está definido en la ecuación (5.12). Los superíndices $*$ denotan toda la fila o toda la columna de la matriz $\mathbf{z}$. Así $\mathbf{z}^{i,*}$ representa un vector fila de longitud N_2 y $\mathbf{z}^{*,j}$ es un vector columna de longitud N_1 . Así, las matrices $\mathbf{d}_t$ y $\mathbf{d}_b$ tienen unas dimensiones $N_1/2 \times N_2$ y las matrices $\mathbf{d}_l$ y $\mathbf{d}_r$ son en cambio $N_1 \times N_2/2$. A su vez, las dimensiones de los arrays $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ y $\mathbf{d}_4$ son $N_1/2 \times N_2/2$.

⁷Las extensiones $\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ y $\mathbf{d}_4$ se generan de la misma forma que $\mathbf{d}_1$, pero en cada caso, con las filas y columnas correspondientes.

Notar que las ecuaciones (5.15-5.18) representan la extensión a dos dimensiones de la ecuación (5.11) y la ecuación (5.19) es la interpolación bilineal entre las extensiones adyacentes de la malla.

El carácter de las extensiones, al igual que ocurre en los modelos unidimensionales, depende del coeficiente λ . Las Figuras 5.14-5.16 muestran un mismo modelo deformable con tres valores de λ , en concreto $\lambda = \{0, 0,5, 1\}$. Las figuras muestran las tres funciones coordenadas x , y y z y el modelo deformable resultante. La parte central de las funciones coordenadas corresponde a los nodos visibles, mientras que las extensiones son situadas alrededor tal y como indica la expresión (5.14). De igual forma, la parte visible del modelo es la zona interior representada en rojo, mientras que las extensiones se corresponden con el borde dibujado en color negro.

Figura 5.14.: Extensiones de un modelo bidimensional para el caso elástico, $\lambda = 0$.

Se puede observar que en el caso extremo $\lambda = 0$ se generan extensiones con valor constante. Por tanto, al visualizar los nodos en el contorno, estos nodos ocultos aparecen compactados en los extremos del modelo. Por el contrario, con $\lambda = 1$ las extensiones mantienen la pendiente de la malla y de esta forma la posición de los nodos ocultos crece de forma lineal a medida que nos separamos de la parte central del modelo. El caso $\lambda = 0,5$ muestra una situación intermedia.

Figura 5.15.: Extensiones de un modelo bidimensional con $\lambda = 0,5$, $\alpha = 0,5$ y $\beta = 0,5$.

Dependiendo de la existencia o no de las extensiones, un modelo totalmente abierto evoluciona durante el proceso iterativo de distinta manera, tal y como muestra la Figura 5.17,

1. Si no se fijan extensiones, el modelo adopta la forma de un toroide, quedando por tanto, cerrado en las dos variables paramétricas como se observa en la Figura 5.17(a).
2. Si se añaden extensiones sólo en una variable paramétrica, el modelo queda abierto en una dimensión y cerrado en la otra, como aparece en la Figura 5.17(b).
3. Si el modelo se rodea totalmente de extensiones ocultas, la forma resultante será de una malla totalmente abierta, como se muestra en la Figura 5.17(c).

Así pues, en función de la aplicación que se requiera para el modelo deformable, será necesario añadir extensiones ocultas en todas, ninguna o sólo algunas de las variables paramétricas. Por ejemplo, en la aplicación detallada en la Sección 6.1 será necesario añadir extensiones en las dos dimensiones porque la malla debe permanecer totalmente abierta. En cambio, en las aplica-

Figura 5.16.: Extensiones de un modelo bidimensional para el caso rígido, $\lambda = 1$.

ciones descritas en la Sección 6.2, dado que el modelo tiene que adoptar forma de cilindro o esfera para caracterizar los datos médicos, sólo se fijarán extensiones en la variable paramétrica s_2 , que permite desplazarlos en el eje z . La Figura 5.11 muestra la disposición de dichas variables.

La extrapolación de las extensiones que se ha descrito en esta sección, de modelos unidimensionales (5.11) a modelos bidimensionales (5.15-5.19), puede generalizarse a modelos de más dimensiones. De nuevo tendremos que las extensiones dependerán del factor λ el cual puede calcularse a partir de los parámetros α y β del modelo. Para $\lambda = 0$ las extensiones tendrán valor constante, mientras que con $\lambda = 1$ lo que quedará constante serán las pendientes que aparecen en los bordes del modelo visible.

Extensiones con filtros IIR y FIR. Al filtrar en el dominio de la frecuencia utilizando la transformada de Fourier, damos por supuesto que la señal es periódica. Por este motivo, si el modelo no tiene valores coincidentes en los bordes de cada función coordenada, a lo largo del proceso

Figura 5.17.: Evolución de un modelo deformable inicialmente abierto en función de las extensiones añadidas: (a) Cerrado en las dos variables paramétricas; (b) Abierto en una variable; (c) Abierto en las dos variables.

iterativo, el filtrado paso bajo provoca que los valores de los dos extremos vayan convergiendo como muestra la Figura 5.17.

Esta justificación puede analizarse también en el dominio del espacio. Si interpretamos las ecuaciones (5.1-5.2) en el dominio del espacio, los productos de transformadas se convierten en convoluciones circulares. Al aplicar las respuestas impulsionales paso bajo mediante convoluciones circulares, se produce un suavizado de los datos entre los extremos del modelo. Si los valores en los bordes son idénticos, como en el caso de los modelos cerrados, el filtrado funciona adecuadamente. Ahora bien, si los valores son diferentes, el filtrado en un extremo de la variable paramétrica afecta al extremo contrario.

Por este motivo, introducimos las extensiones ocultas. Así, conseguimos aislar el efecto de las respuestas impulsionales del filtro, al no afectar el filtrado a los dos extremos de los datos visibles simultáneamente. Sin embargo, su efectividad viene condicionada por la relación entre la longitud de las extensiones ocultas y la longitud de la respuesta impulsional.

Supongamos que tenemos un modelo unidimensional cuya longitud visible para una variable paramétrica es l_v . Ahora añadimos extensiones ocultas con la misma longitud $l_o = l_v$. Por tanto, la longitud del modelo extendido será $l_t = l_o + l_v = 2l_v$. Realmente lo que buscamos es que esta convolución circular sea equivalente a una convolución lineal [Oppenheim y Schafer, 1999]. Para este fin, el número de muestras l_t , debe ser mayor o igual que la duración de la convolución lineal de la parte visible del modelo l_v y de su respuesta impulsional l_h . Es decir, $l_t \geq l_v + l_h - 1$.

La Figura 5.18 ilustra esta problemática. Aquí tenemos una función coordinada con $l_v = 16$ nodos visibles, con 8 nodos ocultos en cada extremo, así $l_o = 16$. Por tanto, el tamaño máximo de la respuesta impulsional a utilizar en este caso será $l_h = 17$ muestras. Podemos observar en la figura que si aplicamos una respuesta impulsional de longitud $l_h \leq 17$, al calcular la salida en cualquiera de los dos nodos extremos sólo se utiliza los datos del propio extremo de los datos visibles y los nodos de la extensión oculta correspondiente a dicho extremo. Por tanto, aunque los valores del modelo en cada nodo sean diferentes, al filtrar paso bajo, los valores de cada extremo no influyen en el otro extremo.

Figura 5.18.: Aplicación de una respuesta impulsional con longitud $l_h = 17$ a un modelo unidimensional con extensiones ocultas.

El esquema explícito utiliza un filtro FIR (5.4) cuya respuesta impulsional tiene longitud finita. Por tanto, podemos dimensionar las extensiones al valor mínimo para eliminar totalmente el efecto de la no periodicidad del modelo durante el proceso iterativo. Por ejemplo, las funciones de forma con diferencias finitas proporcionan longitudes en la respuesta impulsional de pocos elementos, por lo que las extensiones son de tamaño muy reducido. En concreto, la longitud de las extensiones tendrán una longitud $l_o \geq P - 1$, siendo P la duración de la respuesta impulsional.

En cambio, el filtro correspondiente al esquema implícito, calculable mediante (5.3), es de tipo IIR. Este filtro se define directamente en el dominio de la frecuencia. Por este motivo, su respuesta al impulso en el dominio espacial se obtendrá a partir de su transformada de Fourier. En consecuencia, la longitud de la respuesta al impulso coincidirá con el tamaño de la transformada de Fourier. Dado que el tamaño de la transformada se fija normalmente al tamaño de la longitud de la variable paramétrica l_v , la longitud requerida para las extensiones ocultas en el esquema implícito será $l_o \geq l_v - 1$.

En ambos casos, se ha supuesto que el modelo era unidimensional. Para modelos de más dimensiones, las extensiones deben tener un tamaño que satisfagan las condiciones indicadas arriba en cada una de las dimensiones. Así, en el caso FIR, $N_{jO} \geq P_j - 1$, y para el caso IIR, $N_{jO} \geq N_j - 1$,

donde j hace referencia a la variable paramétrica s_j .

Es importante destacar que dado que el filtrado se realiza mediante el modelo extendido, de dimensiones $(N_1 + N_{10}) \times (N_2 + N_{20})$, el tamaño de las extensiones determina el número de operaciones necesario en cada iteración.

Por tanto, un esquema explícito permite el empleo de extensiones más reducidas y de esta forma, se requiere una menor carga computacional. Como contrapartida, la convergencia es algo más lenta y es necesario cumplir las condiciones de estabilidad como se ha analizado en la Sección 4.2. Por el contrario, los modelos implícitos muestran una velocidad de convergencia algo mayor y poseen estabilidad inherente, a costa de extensiones con mayores dimensiones. La Sección 5.3 analiza estos requerimientos computacionales.

5.3. Análisis computacional

En esta sección se analiza el coste computacional del proceso iterativo descrito en este trabajo, comparando la formulación espacial del Capítulo 2 con la formulación frecuencial del Capítulo 3. Con este fin, estudiaremos los requerimientos de memoria y carga de procesador de cada aproximación y los contrastaremos para diferentes modelos y aplicaciones.

Iniciamos el análisis con la aproximación frecuencial. En este trabajo hemos propuesto una formulación compacta en el dominio de la frecuencia (5.1-5.2), que nos permite adaptar el modelo a los datos mediante un sistema de segundo orden. Este sistema puede usarse en modelos definidos mediante e variables paramétricas, utilizando filtros e -dimensionales que procesan arrays de variables nodales y fuerzas, también e -dimensionales. Los modelos evolucionan en un espacio d -dimensional, requiriendo por tanto d funciones coordenadas. Cada función coordenada queda definida mediante su correspondiente array e -dimensional de nodos y fuerzas.

Con el fin de simplificar el análisis, vamos a suponer que tenemos los modelos definidos mediante una única función coordenada. De esta forma, el coste computacional final será el descrito a continuación multiplicado por el número de funciones coordenadas.

A partir de las ecuaciones (5.1-5.2) se puede comprobar que a lo largo del proceso iterativo, necesitamos almacenar 7 arrays de tamaño $N_1 \times \dots \times N_e$. Para el caso implícito estos arrays son⁸ $\hat{\mathbf{u}}_\xi$, $\hat{\mathbf{u}}_{\xi-1}$, $\hat{\mathbf{u}}_{\xi-2}$, $\hat{\mathbf{q}}_{\xi-1}$, $a_1 \hat{\mathbf{h}}$, $a_2 \hat{\mathbf{h}}$ y $\hat{\mathbf{h}}(\eta \hat{\mathbf{f}})^{-1}$. En el caso explícito tenemos en cambio 6 arrays, $\hat{\mathbf{u}}_\xi$, $\hat{\mathbf{u}}_{\xi-1}$,

⁸Notar que es posible reducir la memoria requerida si almacenamos sólo $\hat{\mathbf{h}}$ en lugar de $a_1 \hat{\mathbf{h}}$ y $a_2 \hat{\mathbf{h}}$. Pero por el contrario incrementaríamos el número de operaciones en cada iteración.

$\hat{\mathbf{u}}_{\xi-2}$, $\hat{\mathbf{q}}_{\xi-1}$, $\hat{\mathbf{h}}'$ y $(\eta\hat{\mathbf{f}})^{-1}$. Por tanto, necesitamos⁹,

$$M_{F1} = 7N_1 \cdots N_e \quad (5.20)$$

palabras para almacenar estas variables durante las iteraciones del proceso.

Con respecto a la estimación de la carga en cada iteración, es necesario efectuar tres productos de Hadamard entre las matrices del sistema, las cuales tienen unas dimensiones $N_1 \times \cdots \times N_e$. Es decir, en cada iteración se realizan tres productos entre cada uno de los elementos de las matrices. Para el caso implícito estos productos son $(a_1\hat{\mathbf{h}}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\xi-1}$, $(a_2\hat{\mathbf{h}}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\xi-2}$ y $(\hat{\mathbf{h}}(\eta\hat{\mathbf{f}})^{-1}) \cdot \hat{\mathbf{q}}_{\xi-1}$. En el caso explícito los productos son $\hat{\mathbf{h}}' \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\xi-1}$, $a_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\xi-2}$ y $(\eta\hat{\mathbf{f}})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{q}}_{\xi-1}$. Así pues, la complejidad¹⁰ es en principio de orden,

$$O_{F1} = 3O(N_1 \cdots N_e). \quad (5.21)$$

En algunas aplicaciones, las fuerzas externas no pueden ser obtenidas directamente en el dominio de la frecuencia. Para estos casos, es necesario ejecutar en cada iteración $\hat{\mathbf{q}}_{\xi-1} = e\mathcal{DFT}\{Q(e\mathcal{IDFT}\{\hat{\mathbf{u}}_{\xi-1}\})\}$ además de las operaciones indicadas arriba. La función Q representa el mapeado utilizado para la obtención de las fuerzas externas para los nodos $\hat{\mathbf{u}}$. Este procedimiento se llama en la línea 22 del Algoritmo 3. Dado que la complejidad de una $e\mathcal{FFT}$ es $O(N \log_2 N)$ donde $N = N_1 \cdots N_e$ [Oppenheim y Schafer, 1999], el algoritmo entonces queda como,

$$O_{F2} = 3O(N_1 \cdots N_e) + 2O(N_1 \cdots N_e \log_2(N_1 \cdots N_e)). \quad (5.22)$$

Adicionalmente, en la Sección 5.2 se ha determinado que con modelos abiertos es necesario la adición de extensiones, las cuales se construyen en el dominio del espacio. Como muestran las expresiones (5.7-5.8), en este caso es necesario aplicar de nuevo una $e\mathcal{DFT}$ y una $e\mathcal{IDFT}$. Además, ahora las matrices de nodos y fuerzas tienen tamaño doble y por tanto, el número de operaciones y memoria requerida serán ahora proporcionales a $N = 2N_1 \cdot 2N_2 \cdots 2N_e = 2^e N_1 \cdots N_e$. Por tanto, cuando sea necesario el empleo de extensiones ocultas, los requerimientos del algoritmo pasan a ser,

$$M_{F3} = 7 \cdot 2^e N_1 \cdots N_e, \quad (5.23a)$$

$$O_{F3} = 3O(2^e N_1 \cdots N_e) + 2O(2^e N_1 \cdots N_e \log_2(N_1 \cdots N_e)). \quad (5.23b)$$

Estudiamos ahora los requisitos de la formulación espacial descrita por las ecuaciones (2.76) y (2.79). Analicemos en primer lugar el caso implícito definido mediante (2.76). Con esta aproximación, la matriz,

$$A = \left(\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) \mathbf{F} + \mathbf{K} \right), \quad (5.24)$$

⁹Consideramos el peor caso con 7 arrays almacenados.

¹⁰Notar que además de los productos de Hadamard se realizan sumas de matrices. Sin embargo, dado que la complejidad de las operaciones suma es considerablemente menor que la de las operaciones producto, en este análisis sólo se tienen en cuenta el número de operaciones producto en multiplicaciones de matrices y en $\mathcal{DFT}$ s.

debe ser invertida para aislar $\mathbf{u}_\xi$. Esta matriz tiene unas dimensiones $(N_1 \cdots N_e) \times (N_1 \cdots N_e)$. Así pues, para el proceso iterativo es necesario almacenar 3 arrays de tamaño $(N_1 \cdots N_e) \times (N_1 \cdots N_e)$, los cuales son $A^{-1}(2m/\Delta t^2 + c/\Delta t)\mathbf{F}$, $A^{-1}(-m/\Delta t^2)\mathbf{F}$ y la propia matriz inversa A^{-1} . Adicionalmente, es necesario almacenar las variables nodales $\mathbf{u}_\xi$, $\mathbf{u}_{\xi-1}$, $\mathbf{u}_{\xi-2}$ y fuerzas $\mathbf{q}_{\xi-1}$, las cuales se disponen en forma de vector columna. Esto supone 4 vectores de longitud $N = N_1 \cdots N_e$. Así pues, los requisitos de memoria para la aproximación espacial suponen,

$$M_S = 3(N_1 \cdots N_e)^2 + 4N_1 \cdots N_e \quad (5.25)$$

palabras. Con respecto a la carga en el procesador, se efectúan 3 productos de matrices de tamaño $(N_1 \cdots N_e) \times (N_1 \cdots N_e)$ con un vector de longitud $N = N_1 \cdots N_e$, cada uno de los cuales requiere $(N_1 \cdots N_e)^2$ operaciones [Lancaster, 1969]. Así, el orden del algoritmo es,

$$O_S = 3O((N_1 \cdots N_e)^2). \quad (5.26)$$

El esquema explícito definido mediante la ecuación (2.79) utiliza unas matrices con valores diferentes, pero en ambos casos los requisitos de memoria y número de operaciones son idénticos a los del esquema implícito detallado en las expresiones (5.25-5.26).

La Tabla 5.2 muestra los requisitos de memoria y número de operaciones para algunos tamaños de modelo. Puede comprobarse que el ahorro computacional de la aproximación frecuencial con respecto a la espacial se incrementa con el tamaño y dimensiones del modelo.

Tamaño del modelo	Memoria requerida (palabras)			Carga de procesador (operaciones)		
	M_S	M_{F1}	M_{F3}	O_S	O_{F1}	O_{F3}
128×128	8.05e+008	1.14e+005	4.58e+005	8.05e+008	4.91e+004	3.87e+006
256×256	1.29e+010	4.58e+005	1.84e+006	1.29e+010	1.97e+005	1.76e+007
512×512	2.06e+011	1.84e+006	7.34e+006	2.06e+011	7.86e+005	7.86e+007
$64 \times 64 \times 64$	2.06e+011	1.84e+006	1.47e+007	2.06e+011	7.86e+005	2.33e+008
$128 \times 128 \times 128$	1.32e+013	1.47e+007	1.17e+008	1.32e+013	6.29e+006	2.16e+009
$256 \times 256 \times 256$	8.44e+014	1.17e+008	9.40e+008	8.44e+014	5.03e+007	1.97e+010

Tabla 5.2.: Memoria requerida M y carga computacional en cada iteración O , para algunos conjuntos de datos. El subíndice S indica la aproximación en el dominio del espacio. El subíndice $F1$ indica la aproximación frecuencial en la que no se realiza ninguna $e\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{T}$ durante la iteración (5.20-5.21). El subíndice $F3$ especifica la aproximación frecuencial que utiliza extensiones ocultas (5.23).

Notar que en este análisis no se han considerado las operaciones efectuadas en la inicialización del algoritmo, tales como la inversión de la matriz A para la aproximación frecuencial, los productos $A^{-1}(2m/\Delta t^2 + c/\Delta t)\mathbf{F}$ y $A^{-1}(-m/\Delta t^2)\mathbf{F}$ o la $e\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{T}$ y adición de extensiones a los valores iniciales de $\mathbf{u}_\xi$ en la aproximación frecuencial. De forma similar, no se han tenido en cuenta las operaciones comunes en ambas aproximaciones, tales como la carga computacional requerida para el cálculo del gradiente de los datos o la memoria requerida para almacenar el resultado de dicho gradiente. Tampoco se han considerado el empleo de nodos intermedios $\mathbf{v}$ en lugar de $\mathbf{u}$,

puesto que su empleo puede realizarse tanto en la aproximación espacial como frecuencial, y por tanto, no es una característica diferenciadora de este último.

De nuevo resaltamos que este proceso iterativo se realiza para cada función coordenada, ya que éstas son independientes entre sí. Así pues, las ecuaciones (5.1-5.2) ó (5.7-5.8) se aplican de forma separada a cada componente frecuencial, cada una de ellas con la carga computacional indicada en la Tabla 5.2. Se puede observar que con el empleo de la formulación frecuencial se alcanza un considerable eficiencia computacional de varios órdenes de magnitud.

Asimismo destacamos el elevado grado de paralelización que se puede alcanzar en el proceso iterativo. En primer lugar, los productos de Hadamard de las ecuaciones (5.1-5.2) ó (5.7-5.8) pueden ejecutarse de forma simultánea, puesto que cada uno de ellos es independiente del resto. Asimismo, internamente cada producto de Hadamard también puede paralelizarse puesto que el producto de cada elemento no depende del resto de elementos. Un razonamiento similar puede aplicarse con el algoritmo $eFFT$ y su inversa. De igual forma, dado que cada función coordenada se procesa por separado, pueden ejecutarse sus operaciones de forma simultánea. Todo ello permite una adecuada optimización del algoritmo para los actuales sistemas multinúcleo e incluso multiprocesador.

Capítulo 6

*I regarded as quite useless the reading of large treatises of pure analysis:
too large a number of methods pass at once before the eyes.
It is in the works of application that one must study them;
one judges their utility there and appraises the manner of making use of them.*

(Joseph-Louis Lagrange)

Resultados y aplicaciones

A continuación se detallan algunas de las aplicaciones en las cuales se han empleado los modelos deformables descritos en este trabajo. Inicialmente los modelos se han empleado en la caracterización de datos topográficos, dado que éstos se pueden modelar con modelos bidimensionales variando sólo una única función coordenada. Esto ha permitido analizar con detalle la eficacia de los modelos, al poder comparar su posición final con los datos reales. Asimismo se han analizado la bondad del modelado cuando los datos se degradan por ruido, empleando las diferentes funciones de forma y esquemas de funcionamiento.

Posteriormente se han aplicado los modelos en la segmentación de objetos presentes en imagen médica 3D y 4D, tales como órganos o partes de ellos. Con este fin, se ha desarrollado una aplicación que permite importar y exportar datos médicos, la segmentación y selección del área de interés y la posterior aplicación del modelo deformable al resultado. Así, se obtiene una función paramétrica en el escenario tridimensional que permite la caracterización estática o dinámica del órgano, según éste esté definido en 3D o 4D.

6.1. Caracterización de datos topográficos

Una de las primeras aplicaciones en las que se han probado los modelos deformables es la caracterización de datos topográficos o modelos de elevación digital del terreno (DEM) [Maune, 2007, Li et al., 2010]. Estos conjuntos de datos, están formados por matrices bidimensionales en las que cada elemento de la matriz representa la altura de una coordenada en la superficie de terreno, comúnmente un planeta, luna o asteroide. En el caso de la Tierra, normalmente las alturas se refieren sobre el nivel del mar. La distancia entre posiciones de la matriz, esto es, la resolución de los datos se encuentra entre magnitudes de pocos centímetros y decenas de metros. Notar que esta resolución equivale al concepto de período de muestreo de una señal bidimensional. Estos datos suelen obtenerse mediante sistemas de teledetección [Schowengerdt, 2007] como fotogrametría o radares de diferente índole como *Laser Imaging Detection and Ranging* LIDar o *Interferometric Synthetic Aperture Radar* IfSAR, en la mayoría de los casos instalados en satélites en órbita baja como RADARSAT, ERS ó SPOT.

Otros conjuntos de datos de similares características son los datos de elevación submarina, conocidos como barimetría, generados normalmente mediante sónares instalados en barcos. Hoy en día, se suelen emplear *MultiBeam EchoSounders* (MBES) que utilizan cientos de haces adyacentes estrechos [Olsen, 2007]. Con esta técnica, se consigue una resolución alta, del orden de algunos metros entre muestras.

En ambos casos y sobre todo en el caso de la barimetría, los datos presentan en ocasiones artefactos y otra serie de defectos, debido fundamentalmente a la aparición de ruido e interferencias.

En esta aplicación se pretende utilizar los modelos deformables bidimensionales para caracterizar los datos de elevación del terreno. Esto permite disponer de una expresión matemática para caracterizar la superficie del terreno. Al disponer de la formulación es posible realizar diferentes operaciones con los datos, como interpolar puntos intermedios, calcular pendientes y, en el caso de sensores en movimiento, estimaciones sobre velocidad o distancia. Asimismo, debido al efecto de suavizado de los modelos deformables es posible minimizar los efectos del ruido y de los artefactos del terreno.

Para este fin, partimos de las matrices de datos y procedemos a la construcción del volumen tridimensional de alturas tal y como describe la Sección 5.1. La Figura 5.2 resume este proceso. Una vez disponemos del volumen de datos se procede a calcular el volumen de fuerzas. Este volumen se calcula aplicando el gradiente y posteriormente se realiza un doble filtrado. En primer lugar, se aplica un filtro tridimensional y posteriormente un filtrado mediante *B-splines* unidimensionales según la coordenada z con el fin de que las fuerzas se extiendan a una mayor distancia de la

superficie, facilitando de esta forma la captura del modelo hacia el borde del terreno. La Figura 5.5 muestra el resultado de aplicar este preprocesado a un conjunto de datos topográficos.

Se aplica un modelo bidimensional para la caracterización de la superficie definida mediante el volumen tridimensional. Esto es, los parámetros del modelo se definen como $e = 2$ y $d = 3$. Por las características de la aplicación, el modelo se va a situar como una malla elástica que cubre toda la región de interés. Esta malla se va a inicializar a una altura constante, y posteriormente las fuerzas externas conducirán la malla hacia la superficie a caracterizar. Por tanto, sólo se va a permitir variación en la coordenada z , quedando las funciones coordenadas x e y de cada nodo fijadas a un valor constante.

La Figura 6.1 muestra un ejemplo de modelo bidimensional adaptándose a un conjunto de datos topográficos¹. En la primera fila podemos ver la representación tridimensional y la segunda fila aparecen los cortes $x = 15$ y $x = 163$ donde se detallan tanto los nodos del modelo como el contorno de los datos. En la figura se indican asimismo las fuerzas externas aplicadas en cada nodo y representadas aquí mediante flechas en verde.

Notar que al sólo tener variación en una función coordenada, se simplifica el proceso iterativo y se reduce consecuentemente la carga computacional requerida en el proceso, tal y como describe la Sección 5.3. Asimismo, se simplifica notablemente la estimación del error medio, indicador que utilizaremos como referencia del ajuste, dado que este error puede ser calculado como la resta entre la posición real de cada nodo y la posición teórica o interpolada del mismo.

En esta aplicación se desea también estudiar la eficacia de las dos funciones de forma analizadas en este trabajo, *B-splines* y diferencias finitas, a la hora de caracterizar los datos y minimizar el ruido y artefactos presentes en los conjuntos de datos. Por este motivo, se hace necesario el estudio de diferentes conjuntos de datos con diferentes relaciones de señal a ruido.

Así pues, se van a utilizar cuatro conjuntos de datos $\mathcal{DS}_1$ - $\mathcal{DS}_4$ en el experimento². Todos ellos proceden de su matriz bidimensional correspondiente y se transforman a volúmenes tridimensionales para la caracterización tal y como se ha indicado anteriormente. Aunque individualmente tienen diferentes dimensiones, éstas están acotadas por $320 < L_x < 600$, $400 < L_y < 420$ y $30 < L_z < 70$.

El ancho de banda de estos datos se incrementa con cada modelo. Por tanto, $\mathcal{DS}_1$ es el conjunto de datos con menor ancho de banda, esto es, el más paso bajo y por tanto el de variación más suave. Por el contrario, $\mathcal{DS}_4$ es el que contiene un mayor ancho de banda y por consiguiente, presenta mayores variaciones espaciales. La Figura 6.2 muestra los espectros de las matrices de

¹Fuente: www.ign.es

²Fuente: www.ign.es

(a) Modelo y fuerzas externas adaptándose a los datos

(b) Corte $x = 15$

(c) Corte $x = 163$

Figura 6.1.: Modelo bidimensional adaptándose a datos topográficos en la iteración $\xi = 5$. Nodos del modelo dibujados como puntos rojos. Las líneas representan las variables paramétricas. Las flechas en color verde indican las fuerzas externas que se aplican en cada nodo.

datos topográficos.

En todos los casos, se utilizan modelos bidimensionales para segmentar la superficie de los datos. Así, se aplican a los datos modelos con $N_1 \times N_2 = 64 \times 64$ nodos, definidos mediante B-spline

Figura 6.2.: $2D - \mathcal{DFT}$ s de las matrices bidimensionales de alturas $\mathcal{DS}_1 - \mathcal{DS}_4$. En los cuatro conjuntos de datos, los espectros están normalizados y representados en escala logarítmica.

o diferencias finitas y los parámetros especificados en la Tabla 6.1. Estos modelos se inician con forma de plano, paralelo a $z = 0$. Las fuerzas externas conducen el modelo adaptándose a la superficie a lo largo del proceso iterativo. Estas fuerzas se basan en el gradiente de los datos como se ha indicado en la Sección 5.1. Al mismo tiempo, las fuerzas internas regularizan la forma del modelo dentro del proceso. Esto es, la rigidez del modelo suaviza las pequeñas discontinuidades y otros artefactos al impedir que el modelo se adapte estos elementos. De igual forma, la elasticidad incrementa la velocidad de adaptación, estirando el modelo hacia los bordes de los datos.

Notar que en este experimento, tanto las fuerzas externas como internas resultan en un movimiento de los nodos, sólo a lo largo del eje z . En las Secciones 6.2 y 6.3 veremos aplicaciones

Parámetro	$\mathcal{DS}_1$		$\mathcal{DS}_2$		$\mathcal{DS}_3$		$\mathcal{DS}_4$	
	B-S	DF	B-S	DF	B-S	DF	B-S	DF
α	0		0,2	0,05	0,15	0,1	0,05	
β	1		0,6	0,15	0,5	0,25	0,15	
η	1		1	0,5	1	0,5	1	0,5
γ	γ_{opt}							
$\{N_1, N_2\}$	$\{64, 64\}$							
$\{N_{10}, N_{20}\}$	$\{0, 0\}$		$\{8, 8\}$				$\{32, 32\}$	
$sysSchm$	$implicit$							
$enable_v$	$false$		$true$	$false$	$true$	$false$	$true$	$false$
tt	7		11				15	

Tabla 6.1.: Parámetros utilizados para los conjuntos de datos $\mathcal{DS}_1 - \mathcal{DS}_4$.

donde se permite movimiento de los nodos en varias direcciones.

La Figura 6.3 muestra la evolución temporal de los modelos para cada conjunto de datos, cada uno de ellos dibujado en una fila de la figura³. La primera columna muestra el modelo en su posición inicial, esto es, en $\xi = 0$. La segunda y tercera columna ilustran respectivamente un estado intermedio $\xi = \{5, 10, 20\}$ y el modelo el estado final, cuando el modelo alcanza el equilibrio $\xi = \{15, 30, 40, 60\}$.

Debido al efecto de suavizado de los B-splines [Unser et al., 1993, Unser, 1999] y al filtro $\hat{h}$ tal y como hemos estudiado en el Capítulo 4, al modelo se le presupone que es capaz de compensar el efecto del ruido y artefactos. Para analizar dicha característica, el proceso adaptativo es simulado también añadiendo ruido blanco gaussiano AWGN con desviación estándar con valores entre $\sigma = 0,02D_{max}$ y $\sigma = 0,2D_{max}$, donde D_{max} es el máximo valor de la coordenada z de los datos. La Figura 6.4 muestra el mismo ejemplo de la Figura 6.1 pero añadiendo el ruido indicado⁴.

El mismo experimento es llevado a cabo utilizando tanto B-splines como diferencias finitas, para las diferentes potencias de ruido. Tras cada iteración, se registra el error medio calculado como la posición z de los nodos y la posición de los datos originales. La Figura 6.5 muestra el error medio de los nodos en cada conjunto de datos, función de forma y nivel de ruido añadido a lo largo del proceso iterativo.

Como se puede observar en la figura, en todos los casos el uso de la función de forma B-spline conduce a un menor error medio, así como un mejor ajuste entre el modelo y la superficie de los datos. Cuando no se aplica ruido, los resultados son prácticamente similares entre las dos funciones de forma. Sin embargo, a medida que añadimos más ruido a la señal, más significativa es la diferencia entre ambas funciones de forma.

³Vídeo del proceso de adaptación a $\mathcal{DS}_2 - \mathcal{DS}_4$: youtu.be/ExKKuTEGVjQ

⁴Vídeo del proceso de adaptación a $\mathcal{DS}_1$ con diferentes niveles de ruido: youtu.be/3-icqxYgphE

Figura 6.3.: Evolución temporal del modelo deformable para los conjuntos de datos $DS_1 - DS_4$.

Figura 6.4.: Modelo bidimensional adaptándose a datos topográficos. Ruido blanco añadido $\sigma = 0,02D_{max}$. Iteración $\xi = 10$. Nodos del modelo dibujados como puntos rojos. Las flechas en color cian indican las fuerzas externas que se aplican en cada nodo.

Con respecto al ancho de banda de la señal, aunque las diferencias no son elevadas, la ventajas de los *B-splines* sobre las diferencias finitas son mayores para señales con menor ancho de banda. Hay que tener en cuenta que superficies como ancho de banda pequeño como $\mathcal{DS}_1$ presentan suavidad en su superficie. Esto provoca que el efecto de suavizado adicional que proporcionan los *B-spline* sea muy adecuado, pues de esta forma se minimizan los efectos no deseados. Visto en el dominio de Fourier, como la señal original es paso bajo, al filtrar paso bajo mediante el modelo mantenemos las características de los datos descartando los componentes de alta frecuencia, que este caso se limitan al ruido.

Por el contrario, en los modelos con mayor ancho de banda, como $\mathcal{DS}_4$, el modelo no puede adaptarse tan suavemente al tener los datos grandes variaciones. O visto de nuevo en la frecuencia, el sistema iterativo no puede filtrar todas estos componentes de alta frecuencia, porque ahora además de ruido tenemos componentes frecuenciales correspondientes a los datos. Por este motivo, ahora las fuerzas externas toman una mayor influencia que las internas y se reduce la diferencia entre aplicar fuerzas internas con *B-spline* o diferencias finitas.

Dado que hemos considerado sólo el error medio en este análisis, podríamos pensar que los modelos con *B-spline* son siempre superiores. De hecho se ha comprobado que en modelos con

Figura 6.5.: Error medio entre el modelo y los conjuntos de datos $DS_1 - DS_4$.

variaciones suaves muestran mejores resultados y con modelos con anchos de banda elevados, tienen resultados similares a las diferencias finitas.

Sin embargo, las diferencias finitas presentan una ventaja significativa si consideramos también el ajuste del modelo a los pequeños detalles de los datos. Como se ha indicado arriba, el efecto de suavizado de los B-splines permite una reducción de ruido en los conjuntos de datos, pero impide un ajuste fino a datos con pequeños huecos, cavidades o resaltos. Para este tipo de datos, puede ser más conveniente el empleo de modelos basados en diferencias finitas. Esto es debido a que la compensación del ruido puede ser similar, pero las diferencias finitas permiten que el modelo se ajuste más a las variaciones originales del conjunto de datos.

6.2. Segmentación de órganos y estructuras anatómicas en imagen médica

Las imágenes médicas suponen un aspecto esencial de las ciencias radiológicas pues permiten la visualización de estructuras anatómicas e información metabólica del cuerpo humano [Dhawan, 2003]. Facultan una detallada comprensión de la anatomía humana así como de las funciones de los órganos en los procesos fisiológicos. Por tanto, la imagen médica es una herramienta esencial para el diagnóstico así como para la evaluación en el tratamiento de una enfermedad.

Las modalidades de imagen médica se pueden clasificar en dos tipos. En primer lugar tenemos las imágenes que detallan las estructuras físicas o anatomía. En segundo lugar tenemos aquellas que detallan el funcionamiento de los órganos o su metabolismo. Existe una extensa bibliografía sobre este campo, donde se detallan las características de cada modalidad de imagen y los fundamentos físicos de su obtención así como los algoritmos utilizados en su procesamiento [Barrett y Swindell, 1981, Dhawan, 1990, Cho et al., 1993, Bushbert, 2002].

Para el grupo de imagen médica anatómica, existen diferentes modalidades con diferentes características en función de su capacidad para discriminar los elementos constituyentes del cuerpo, tales como agua, huesos, tejidos blandos y otros fluidos. Entre las imágenes médicas de este tipo tenemos las imágenes basadas en rayos X (Radiografía y Mamografía de rayos X, Tomografía Computerizada CT), ultrasonidos y Resonancia Magnética (MRI). La Figura 6.6 muestra un corte de un cráneo humano registrado con las modalidades CT y MRI.

Figura 6.6.: Comparativa de dos modalidades de imagen médica anatómica: Izquierda, tomografía CT; Derecha, resonancia magnética MRI (imagen extraída de [Savage, 2013]).

Por otra parte, la caracterización de las modalidades de imagen médica funcional depende de su capacidad para discriminar los diferentes niveles del metabolismo causado por una actividad biomecánica específica. Entre las modalidades de imagen médica de este tipo tenemos la Resonancia Magnética Funcional (fMRI), Tomografía Computerizada por Emisión de Positrones (SPECT), la Tomografía por Emisión de Positrones (PET) y la imagen de fluorescencia.

En esta sección vamos a aplicar los modelos deformables a una modalidad de imagen médica estructural, en concreto tomografía CT. La tomografía axial computerizada (TAC o sólo CT) permite reconstruir una imagen del interior de un objeto a partir de proyecciones transversales de una fuente de rayos X sobre un detector plano [Carlsson, 1999]. Así, mediante algoritmos de procesamiento de imagen se puede obtener un volumen tridimensional que permite visualizar las estructuras físicas del cuerpo humano con un buen nivel de detalle [Bankman, 2008].

Al igual que con otras modalidades de imagen médica, la tomografía axial pueden ser estática o dinámica. En el primer caso, tenemos un volumen tridimensional que representa la estructura anatómica en un instante de tiempo. En el caso de una CT dinámica, la imagen queda en cambio definida por una matriz en cuatro dimensiones, donde las tres primeras representan las coordenadas espaciales y la cuarta representa el tiempo. Con este tipo de imágenes, es posible determinar la evolución temporal de la forma de los órganos bajo estudio. A modo ilustrativo, la Figura 5.4 muestra tres *frames* de una CT 4D de un corazón humano, esto es el volumen tridimensional en tres instantes de tiempo diferentes.

En casi todas las imágenes médicas, incluidas las CT, aparecen órganos y estructuras anatómicas cuya forma y posición puede ser de interés. Con el fin de delimitar la forma y posición de estos órganos, se aplica normalmente una segmentación, consistente en la separación de estas estructuras bajo estudio del fondo y del resto de estructuras.

El principal objetivo de un proceso de segmentación es la partición de una imagen o volumen en regiones que son homogéneas con respecto a una o más características [Bankman, 2008]. La segmentación es una herramienta de gran importancia en el procesamiento de imagen médica y puede ser útil en un gran número de aplicaciones. Entre ellas podemos citar la detección de bordes coronarios en angiogramas, la cuantificación de las lesiones de esclerosis múltiple [Udupa et al., 1997], simulaciones para planificación quirúrgica [Kikinis et al., 1996], la medición del volumen de tumores y su respuesta a la terapia [Brzakovic et al., 1990, Lucas-Quesada et al., 1996], registro de imagen médica [Larrey-Ruiz et al., 2008], imágenes del corazón a partir de cineangiografías [Goshtasby y Turner, 1995] y otros.

La segmentación de estructuras anatómicas es la primera etapa de la mayoría de tareas de análisis de imagen médica, tales como el registro, etiquetado y análisis de movimiento. Estas tareas requieren que las estructuras anatómicas en la imagen original se reduzcan a una representación

de sus formas compacta y analítica.

En la literatura figura una gran variedad de técnicas de segmentación. Sin embargo no hay una técnica estándar de segmentación que pueda producir resultados satisfactorios para todas las aplicaciones de imagen. La definición del objetivo de la segmentación varía acorde con el fin del estudio y del tipo de datos. Por este motivo, diferentes aproximaciones en la naturaleza de las imágenes conducen al uso de diferentes algoritmos de segmentación. En función del esquema de clasificación, las técnicas de segmentación pueden dividirse en,

- Manual, semiautomáticas o automáticas [Shareef et al., 1999].
- Basadas en píxel (métodos locales) o basadas en regiones (métodos globales) [Awcock y Awcock, 1995].
- Delineación manual, segmentación de bajo nivel (umbralización, crecimiento de regiones, etc.), y segmentación basados en modelos (multiespectral o técnicas de mapeado de características, programación dinámica, seguimiento de contornos, etc.) [Suetens et al., 1993].
- Técnicas clásicas (umbralización, basadas en borde y basadas en regiones), estadísticas, *fuzzy* y mediante redes neuronales [Rajab et al., 2004].

Las técnicas de segmentación más usadas pueden ser clasificadas en dos categorías. En primer lugar tendríamos la segmentación de regiones que tratan de identificar las regiones que satisfagan un determinado criterio de homogeneidad y las técnicas basadas en bordes, que buscan bordes y fronteras entre regiones con unas determinadas características [Castleman, 1996, Milan Sonka y Boyle, 2007]. La estrategia de segmentación basada en bordes normalmente opera analizando la magnitud de los bordes o mediante algún operador de la imagen. Por ejemplo, en este tipo de estrategias de segmentación suelen utilizarse operadores gradiente.

Dentro de la segmentación basada en bordes, la segmentación mediante modelos deformables ocupa un lugar destacable. Este tipo de segmentación está basada en modelos y ha sido aplicada a imagen médica de diferentes modalidades tales como rayos X, CT, MRI y ultrasonidos. Modelos bi- y tridimensionales han sido usados para segmentar, visualizar, y para el seguimiento y cuantificación de una gran variedad de estructuras anatómicas. Éstas incluyen el cerebro, corazón, cara, arterias, huesos y hasta tumores y células. En [Shen et al., 2011] se aporta un compendio de las técnicas más utilizadas en la literatura para la segmentación de imagen médica, entre las que se incluyen los modelos deformables.

Tal y como se resume en el Capítulo 1 y se describe con notorio detalle en [Shen et al., 2011], los modelos deformables han tenido un gran uso en segmentación de imagen médica en

los últimos años debido a sus características. Los modelos deformables son curvas, superficies o volúmenes que pueden adaptarse mediante su deformación a estructuras curvas, esféricas y con movimientos no rígidos. Dado que la mayoría de estructuras anatómicas presentan estas interesantes características, los modelos deformables son muy adecuados en estas aplicaciones.

En las primeras aproximaciones, la segmentación de estructuras 3D se realiza de forma separada en cada uno de los *slices* 2D del volumen de datos [Kass et al., 1988]. En cada corte se segmenta el objeto mediante un contorno deformable y posteriormente la secuencia de contornos se conectan formando una superficie 3D [Lin et al., 1989, Cohen y Cohen, 1993]. Sin embargo, segmentar un volumen 3D corte a corte es una tarea tediosa y requiere un post-procesado posterior. Además, puede producir inconsistencias entre los anillos obtenidos en cada corte. Por eso, en una segunda etapa, esta segmentación pasa a realizarse directamente mediante modelos tridimensionales aplicados directamente al volumen.

Los modelos deformables tridimensionales se usan por primera vez en visión por computador en 1988 [Terzopoulos et al., 1988]. Y muchos investigadores han explorado desde entonces el uso de modelos deformables para segmentar estructuras en volúmenes de imagen médica. En [Miller et al., 1991] se define una esfera y la deforma geoméricamente. En otros trabajos se utilizan elementos finitos y la formulación clásica de los contornos activos para deformar elásticamente un cilindro y una esfera [Cohen et al., 1993, Cohen y Cohen, 1993, McInerney y Terzopoulos, 1995b]. Posteriormente se han generalizado las *T-snakes* o contornos activos adaptativos con topología variable [McInerney y Terzopoulos, 1999a] a mayores dimensiones [McInerney y Terzopoulos, 1999b].

Como se indica en el Capítulo 1, los modelos deformables pueden clasificarse de forma general como modelos paramétricos, analizados en este trabajo, y los modelos geométricos o implícitos definidos como un *level-set* de una función de mayores dimensiones [Yezzi et al., 1997]. Estos últimos presentan la ventaja de poder modificar la topología dinámicamente pero por el contrario tienen una menor velocidad de adaptación que los paramétricos. Con el fin de abordar este problema se proponen los *Metamorphs* [Huang y Metaxas, 2008]. Estos modelos son semiparamétricos dado que presentan una doble aproximación. El interior de los mismos se representa de forma similar a los modelos geométricos mientras que las deformaciones del modelo se calculan de forma paramétrica.

En esta sección, vamos a aplicar los modelos deformables definidos en el dominio de la frecuencia en el Capítulo 3 a dos tomografías CT, de tres y cuatro dimensiones. En el primer caso tendremos una CT de un cráneo humano estático y en el segundo caso será un corazón humano registrado de forma dinámica a lo largo de 20 *frames* temporales.

La principal ventaja de los modelos deformables paramétricos aplicados a estructuras en

movimiento, es su elevada velocidad de adaptación y la posibilidad de determinar la velocidad y aceleración en cualquier punto del objeto en movimiento [Verdú et al., 2003, Berenguer et al., 2007] de gran utilidad en el caso del corazón [Huang et al., 1999, Park et al., 2003, Weruaga et al., 2003, Montagnat y Delingette, 2005, van Assen et al., 2008, Chen y Guan, 2011]. Con esta aproximación propuesta, al trabajar en el dominio de la frecuencia, tal y como se ha analizado en la Sección 5.3, la eficiencia computacional será elevada, y por tanto también lo será su velocidad de adaptación.

El principal inconveniente de la aproximación paramétrica de los modelos, como se resume en el Capítulo 1, es su dificultad para modificar dinámicamente la topología del modelo. Por tanto, sólo deben aplicarse a objetos con topología conocida a priori. Por otra parte, los modelos paramétricos presentan menos facilidades que los implícitos para adaptarse a pequeños huecos y resaltos en los datos, debido a sus características inherentes de suavizado. No obstante, esta adaptación es posible, siempre que se incremente el número de nodos del modelo en función de las características del área a modelar [Verdú-Monedero et al., 2008b], aunque hay que tener en cuenta que este aumento de nodos implica unos mayores requisitos computacionales.

Notar que para las aplicaciones que se analizan en esta sección, las estructuras a modelar tienen una topología perfectamente conocida, por lo que el modelo puede ser inicializado como un cilindro o esfera alrededor del objeto y esperar que se adapte adecuadamente a dicho objeto. Por otra parte, las estructuras anatómicas son esencialmente de naturaleza paso bajo, por lo que las posibles pequeñas variaciones bruscas que puedan aparecer son normalmente no deseadas. Por tanto, debido precisamente a sus características de suavizado, es de esperar que los modelos sean capaces de compensar el ruido y pequeños artefactos que puedan poseer los datos médicos.

Segmentación de una CT 3D de un cráneo humano. En la segmentación del conjunto de datos $\mathcal{DS}_5$, se inicia el proceso calculando el campo vectorial de fuerzas. Éste proporciona las fuerzas externas a aplicar en cada punto del modelo deformable y se obtiene siguiendo los pasos detallados en la Sección 5.1. En resumen, el procedimiento implica un preprocesado formado por un filtrado tridimensional paso bajo seguido de la aplicación de varias operaciones de morfología matemática. Así, es posible obtener el borde de la estructura tridimensional a segmentar minimizando los artefactos, huecos y otros elementos no deseados. La Figura 5.7 compara la obtención del borde del objeto con y sin el empleo de morfología. Posteriormente, se obtienen los nodos intermedios mediante una interpolación con *B-splines* y se determinan las fuerzas externas aplicando el gradiente al volumen.

Para este conjunto de datos, se utiliza un modelo bidimensional en el espacio tridimensional, por lo que es necesario utilizar tres funciones coordenadas, $d = 3$, definida cada una de ellas mediante dos variables paramétricas, $e = 2$. El modelo se inicializa como un cilindro alrededor del cráneo y a través de las iteraciones converge a la estructura ósea externa. Con el fin de simplificar

el proceso de adaptación, sólo se permite variación en las coordenadas x e y de cada nodo del modelo, quedando la coordenada z al valor constante de inicialización. Por tanto, sólo será necesario calcular el gradiente en estas dos direcciones x e y para la obtención de las fuerzas externas, reduciendo de esta forma la carga computacional.

La Figura 5.11 muestra cómo se sitúan las variables paramétricas para formar el modelo. La coordenada s_1 se define como una coordenada acimutal, fijándose sus dimensiones en $N_1 = 64$. Empíricamente se ha comprobado que es un valor de compromiso adecuado para caracterizar adecuadamente el objeto, teniendo en cuenta su espectro de baja frecuencia. La forma del modelo en la dirección vertical queda definida por s_2 . En este caso, dado que la información proporcionada por el conjunto de datos se limita a los vóxeles del volumen, el número de nodos se limita a $N_2 = 27$, que es el tamaño del volumen según la dirección z . Es decir, tendremos nodos del modelo en cada uno de los *slices*, los cuales permanecerán fijos a sus alturas z de inicialización. No obstante, el valor de N_2 podría incrementarse, permitiendo una interpolación vertical de la forma del objeto. Esto es especialmente interesante con CTs con baja resolución en el eje z .

Notar que el modelo utilizado es cerrado para la variable paramétrica s_1 y abierto para s_2 . Esto obliga a fijar unas extensiones ocultas en dicha dimensión s_2 tal y como se indica en la Sección 5.2. Por otra parte, el esquema utilizado en el proceso iterativo es implícito y, por tanto, no es requerida ninguna condición específica para garantizar la estabilidad y convergencia de dicho proceso iterativo, tal y como se especifica en la Sección 4.1. El resto de parámetros empleados en el modelo se detallan en la Tabla 6.2.

Parámetro	$\mathcal{DS}_5$	$\mathcal{DS}_6$	
		$t = 1$	$t > 1$
α	0,1	0,1	
β	0,25	0,1	
η	0,5	1	
γ	1,0	0,5	
$\{N_1, N_2\}$	$\{64, 27\}$	$\{64, 45\}$	
$\{N_{10}, N_{20}\}$	$\{0, 8\}$		
<i>Shape function</i>	B-spline		
<i>sysSchm</i>	<i>implicit</i>		
<i>enable_v</i>	<i>true</i>		
<i>tt</i>	1	3	
<i>maxiter</i>	200	300	30

Tabla 6.2.: Parámetros utilizados para los conjuntos de datos $\mathcal{DS}_5 - \mathcal{DS}_6$.

La primera columna de la Figura 6.7 muestra la evolución temporal del modelo en la posición inicial $\xi = 0$ y en las iteraciones $\xi = \{50, 100, 150\}$. A su vez, la Figura 6.8 ilustra mediante el corte $z = 14$ de dicho conjunto de datos, cómo el modelo se va adaptando al cráneo en las

iteraciones indicadas⁵.

Se ha utilizado como función de forma *B-spline* por lo que al igual que con los datos caracterizados en la Sección 6.1, el modelo deformable debe presentar cierta inmunidad frente al ruido. Con el fin de probar esta característica, se ha añadido ruido blanco gaussiano AWGN con desviación estándar con valores $\sigma = 0,05D_{max}$ y $\sigma = 0,2D_{max}$, donde D_{max} es el máximo valor de todos los vóxeles del volumen. La segunda y tercera columna de las Figuras 6.7 y 6.8 muestran la evolución del modelo para dichos niveles de ruido⁶.

Se puede observar que la evolución del modelo es muy similar en los tres casos, debido fundamentalmente a que el objeto a modelar es esencialmente paso bajo, es decir, con variaciones muy suaves. En este tipo de señales el empleo de *B-splines* implica un filtrado paso bajo con una frecuencia de corte reducida, anulando prácticamente todos los componentes frecuenciales del ruido y dejando prácticamente inalterado la forma del objeto. Este efecto se ha podido comprobar también con el conjunto de datos $\mathcal{DS}_1$ estudiado en la Sección 6.1.

La Figura 6.9 muestra el error residual cuadrático medio del modelo a lo largo del proceso iterativo. Aunque la reducción del error es menor para el caso de CT sin ruido, se puede determinar que la variación es muy similar en los tres casos. Con lo cual se puede afirmar que el modelo es bastante inmune al ruido al obtener similares resultados en los tres casos analizados.

Segmentación de una CT 4D de un corazón humano. De forma similar al experimento con el conjunto de datos $\mathcal{DS}_5$, aplicamos aquí el modelo deformable a una tomografía en cuatro dimensiones, esto es tres dimensiones espaciales y la cuarta dimensión correspondiente al tiempo. Este conjunto de datos es etiquetado como $\mathcal{DS}_6$.

Una de las dificultades que entraña el trabajar con este tipo de datos es su gran tamaño, puesto que los requisitos de almacenamiento y carga computacional que ya de por sí tienen los datos 3D, se multiplica de forma proporcional por el número de *frames* que posean los datos 4D. Por otra parte, aunque es frecuente que la mayoría de datos médicos se compartan en el estándar DICOM [Piankyh, 2008], la heterogeneidad de subtipos y los diferentes algoritmos de compresión utilizados, provocan que en ocasiones la importación de datos presente en algunos casos ciertas dificultades.

En imagen médica, la forma general, localización y orientación de las estructuras anatómicas es normalmente conocida. Este conocimiento puede ser incorporado en el modelo deformable

⁵Vídeo del proceso de adaptación a $\mathcal{DS}_5$ sin ruido añadido: youtu.be/cfq105B0fCo

⁶Vídeos del proceso de adaptación a $\mathcal{DS}_5$ con $\sigma = 0,1D_{max}$: youtu.be/jbNz5YXCmpY y $\sigma = 0,5D_{max}$: youtu.be/oJTREjeuWhc

Figura 6.7.: Modelo bidimensional abierto en una dimensión ajustando al conjunto de datos $\mathcal{DS}_5$, esto es, un TAC de un cráneo humano. Función de forma utilizada B-splines. Desviación estándar del ruido añadido: Primera columna $\sigma = 0$; segunda columna $\sigma = 0,05D$; tercera columna $\sigma = 0,2D$. Iteraciones: Primera fila: $\xi = 0$; segunda fila: $\xi = 50$; tercera fila: $\xi = 100$; cuarta fila: $\xi = 150$.

Figura 6.8.: Corte $z = 14$ del modelo bidimensional ajustando al conjunto de datos $\mathcal{DS}_5$. Función de forma utilizada B-splines. Desviación estándar del ruido añadido: Primera columna $\sigma = 0$; segunda columna $\sigma = 0,05D$; tercera columna $\sigma = 0,2D$. Iteraciones: Primera fila: $\xi = 0$; segunda fila: $\xi = 50$; tercera fila: $\xi = 100$; cuarta fila: $\xi = 150$.

Figura 6.9.: Error residual cuadrático medio del modelo adaptándose al conjunto de datos $\mathcal{DS}_5$ para los tres valores de ruido blanco añadido.

en la forma de condiciones iniciales, restricciones sobre los datos, restricciones sobre los parámetros y forma del modelo e incluso en el procedimiento de ajuste [Bardinet et al., 1996, Montagnat y Delingette, 1997]. Por este motivo, previamente a la segmentación de un órgano, es interesante saber su forma y localización aproximada para poder inicializar el modelo en una adecuada posición, topología y tamaño. Asimismo, en función del órgano que se desea segmentar es importante restringir el rango de valores que utilizaremos en la datos. Normalmente la intensidad de cada vóxel va asociado a un determinado tipo de tejido, por lo que preseleccionando el rango de intensidades a utilizar, podemos restringir el proceso a un determinado órgano, estructura anatómica o parte de ella.

Con este fin de acometer estas tareas y simplificar el proceso de segmentación con los modelos deformables, se ha desarrollado una aplicación basada en Matlab⁷. Esta aplicación va a permitir la importación de los datos médicos a través de la interfaz gráfica así como el resto de tareas y etapas del preprocesado.

Mediante esta implementación es posible importar los datos almacenados en formato DICOM, estando disponibles la importación de los diferentes subtipos del mismo. El procedimiento de almacenamiento de los datos es también un punto a destacar, puesto que en ocasiones los datos 3D y 4D se almacenan con un único fichero o contenedor, y en ocasiones cada corte se almacena en forma de fichero individual, proporcionándose un fichero de metadatos donde se indica cómo recomponer el volumen a partir de los diferentes archivos. Con la aplicación es posible incorporar datos almacenados con ambas aproximaciones. También es posible la inclusión de datos a partir de ficheros RAW y algunos formatos propietarios. La Figura 6.10 muestra la pantalla de importación.

⁷Se ha utilizado la versión 7.13 de Matlab y 7.3 del Image Processing Toolbox (R2011b).

Figura 6.10.: Interfaz de la aplicación para segmentación de imagen médica: Importación de datos.

Una vez los datos han sido incorporados, el asistente procede a la presegmentación de estos datos. En primer lugar se determina el rango de intensidades seleccionado para los vóxeles. Así, el usuario puede elegir de forma interactiva el límite inferior y superior que selecciona para el procesado según el tejido de interés: huesos, músculos, fibras, tejido graso, etc. En función del rango de valores elegido, variará la estructura a la que se adaptará el modelo deformable. A modo de ejemplo, la Figura 6.11 muestra en un corte de los datos, el resultado de aplicar el mismo modelo deformable al mismo conjunto de datos, pero variando el rango de intensidades elegido en la selección de intensidades.

Figura 6.11.: Detalle del corte $z = 20$ en un modelo bidimensional adaptado al conjunto de datos $\mathcal{DS}_6$. Comparativa según el rango de intensidades preseleccionado: (a) Rango de intensidad $[25, 255]$; (b) $[50, 255]$; (c) $[100, 255]$.

La parte superior de la Figura 6.12 muestra la imagen original y la máscara de selección de los datos, en función de la intensidad de vóxel elegida. Es posible elegir otras vistas del vo-

lumen para una selección más precisa. El algoritmo aplicará posteriormente una umbralización por exceso y defecto. Esto es, los valores de intensidades situados por debajo y encima del rango seleccionado se anularán para el resto de etapas del procesado.

Figura 6.12.: Interfaz de la aplicación: Selección de la intensidad y área de interés.

Asimismo, esta misma interfaz permite preseleccionar la región de interés (RoI). La selección puede hacerse de forma manual a través de primitivas geométricas o bien dibujando sobre los cortes axial, sagital o coronal del volumen. Esta RoI puede almacenarse para sucesivos experimentos en los que los datos son similares y sólo cambia ligeramente su posición y forma. No es necesario un ajuste preciso en esta preselección, dado que el modelo deformable se adaptará a los datos aunque aparezcan algunos elementos no deseados. Sin embargo, la minimización de estructuras con intensidades similares y cercanas al objeto a segmentar reduce el error en el ajuste y aumenta por tanto su precisión.

La Figura 6.13 muestra el resultado de esta preselección del rango de intensidades y región de interés. Sobre este volumen se aplica el preprocesado indicado en la Sección 5.1, se ejecuta un filtrado tridimensional paso bajo y tras él un filtrado morfológico como ilustra la Figura 5.6 en dicha sección. Este preprocesado permite obtener el borde del objeto a segmentar, por lo que el proceso iterativo funciona adecuadamente pegándose a este borde y compensando en su mayor parte los artefactos que pudieran quedar del preprocesado. Así pues, con los datos resultantes de este preprocesado se calcula el gradiente que será la fuente que proporciona las fuerzas externas de adaptación.

Figura 6.13.: Interfaz de la aplicación: Previsualización del área seleccionada.

Notar que este preprocesado, al igual que el resto del proceso adaptativo, se aplica sobre un conjunto de datos 4D. Con el fin de reducir los requerimientos de memoria y aumentar la velocidad de adaptación, todo el proceso se realiza *frame a frame* 3D. De esta forma, sólo es necesario almacenar un volumen 3D en memoria del conjunto $\mathcal{DS}_6$ en cada momento. Además, dado que el período de muestreo temporal de los *frames* suele ser pequeño, normalmente los datos varían muy poco entre *frame* y *frame*. Por este motivo, es habitual suponer que la posición de las estructuras a analizar en un *frame* va a ser muy similar a la posición de las estructuras en el siguiente *frame*.

Bajo esta hipótesis, se define un modelo bidimensional implícito que se adapta en un entorno tridimensional, esto es $e = 2$ y $d = 3$. Este modelo se inicializa de forma similar a $\mathcal{DS}_5$, es decir como un cilindro alrededor del objeto, pero sólo para el primer *frame*, $t = 1$. De nuevo, se define un modelo con la variable s_1 actuando como una coordenada acimutal con dimensiones $N_1 = 64$ y la variable s_2 que representa la dirección z , tal y como detalla la Figura 5.11.

Precisamente en la función coordenada z , las variables s_2 se fijan a un valor constante. El objetivo es que el número de nodos N_2 para la variable s_2 coincida con el número de *slices* de la zona se quiere segmentar. Esto es, tendremos un anillo de nodos situado en cada uno de los *slices* del conjunto de datos. Por tanto, en este experimento $N_2 = 45$, pues éste es el número de *slices* con datos de interés.

Al igual que con $\mathcal{DS}_5$, el modelo será cerrado para la variable s_1 y abierto para s_2 . Por este motivo, se añadirán extensiones ocultas como se especifica en la Sección 5.2. La Tabla 6.2 recoge todos los parámetros utilizados en el proceso iterativo para este conjunto de datos $\mathcal{DS}_6$. Notar que el parámetro γ elegido es un valor aproximado al γ_{opt} que permite optimizar la convergencia en función del ancho de banda de los datos como se indica en la Sección 4.3.3.

Con el fin de comprobar la eficacia del modelo en la segmentación de los datos y probar de nuevo su efectividad con ruido, se simula el experimento con el conjunto de datos $\mathcal{DS}_6$ original y también con dos niveles de ruido blanco añadido, en concreto con desviación estándar $\sigma = 0,05D_{max}$ y $\sigma = 0,2D_{max}$, donde D_{max} es la intensidad máxima en cualquier vóxel del volumen. Las Figuras 6.14 y 6.15 muestran el proceso de adaptación del modelo en una vista tridimensional y el detalle del corte $z = 20$. En ambas figuras la primera columna muestra el caso sin ruido⁸ y el resto de columnas los datos con ruido añadido⁹. Cada fila representa una iteración en el proceso iterativo, $\xi = [0, 50, 100, 300]$.

De nuevo vemos que la adaptación es relativamente rápida y no influye en exceso el ruido incorporado puesto que el modelo deformable se adapta al borde del objeto, minimizando el efecto del ruido añadido así como de los propios artefactos existentes en el conjunto de datos.

La Figura 6.16(a) muestra el error residual cuadrático medio del modelo durante el proceso de adaptación al conjunto de datos $\mathcal{DS}_6$ en el fotograma $t = 1$. Los resultados son similares a los descritos con los datos $\mathcal{DS}_5$. El modelo se adapta con adecuada velocidad al contorno del corazón y las diferencias entre los datos con y sin ruido no son significativas debido al suavizado que producen los modelos deformables.

Notar que este ajuste se corresponde con el fotograma $t = 1$. En este proceso iterativo se ha fijado un límite máximo de 300 iteraciones. Un procesamiento similar debe realizarse en el resto de *frames* de los datos 4D. Ahora bien, como hemos indicado anteriormente, la posición y forma del corazón en $t = 2$ será muy similar a la posición y forma en $t = 1$. Por tanto, resulta evidente que la inicialización del modelo en sucesivos fotogramas debe establecerse como la posición final en el fotograma anterior. Así pues, se han simulado el resto de *frames* utilizando esta inicialización. En estos fotogramas $t \geq 2$, dado que el modelo se encuentra en cada inicialización muy cerca de la posición final, se ha reducido el número máximo de iteraciones a 30.

La Figuras 6.17 y 6.18 muestran respectivamente la vista tridimensional y el corte $z = 20$ del modelo aproximándose a los datos en los fotogramas $t = \{2, 3, 4\}$. Se puede observar que el modelo alcanza rápidamente la posición final, adaptándose de forma similar al *frame* inicial $t = 1$ pero con un menor número de iteraciones.

La Figura 6.16(b) muestra el error residual cuadrático medio del modelo en el proceso de ajuste en $t = \{2, 3, 4\}$. El error durante la adaptación de los sucesivos fotogramas $t \geq 5$ es bastante similar, dado que las posiciones de los datos en los diferentes *frames* están también muy próximas.

⁸Videos del proceso de adaptación a $\mathcal{DS}_6$ para los fotogramas $t = [1, 20]$, sin ruido añadido, con un rango de intensidades $[22, 254]$: youtu.be/DeLBC5MKjCU y $[100, 254]$: youtu.be/509fMPYZ88

⁹Videos del proceso de adaptación a $\mathcal{DS}_6$ para los fotogramas $t = [1, 20]$, con un rango de intensidades $[100, 254]$, con $\sigma = 0,1D_{max}$: youtu.be/MJIPf0_v-GU y $\sigma = 0,5D_{max}$: youtu.be/OK0sgxH_V54

Figura 6.14.: Modelo bidimensional ajustando al conjunto de datos $\mathcal{DS}_6$, esto es, una MR 4D de un corazón humano. Fotograma $t = 1$. Función de forma utilizada B-splines. Desviación estándar del ruido añadido: Primera columna $\sigma = 0$; segunda columna $\sigma = 0,05D$; tercera columna $\sigma = 0,2D$. Iteraciones: Primera fila: $\xi = 0$; segunda fila: $\xi = 50$; tercera fila: $\xi = 100$; cuarta fila: $\xi = 300$.

Figura 6.15.: Corte $z = 20$ del modelo bidimensional ajustando al conjunto de datos $\mathcal{DS}_6$. Fotograma $t = 1$. Función de forma utilizada B-splines. Desviación estándar del ruido añadido: Primera columna $\sigma = 0$; segunda columna $\sigma = 0,05D$; tercera columna $\sigma = 0,2D$. Iteraciones: Primera fila: $\xi = 0$; segunda fila: $\xi = 50$; tercera fila: $\xi = 100$; cuarta fila: $\xi = 300$.

Figura 6.16.: Comparativa del error residual cuadrático medio del modelo adaptándose al conjunto de datos $\mathcal{DS}_6$: (a) Adaptación al fotograma $t = 1$ del volumen 4D con tres niveles de ruido añadido; (b) Adaptación a tres fotogramas $t = 2, 3, 4$ para sin ruido blanco añadido.

Notar que en esta figura no se ha mostrado la adaptación con ruido añadido, pero los resultados son análogos a los indicados en el fotograma $t = 1$.

6.3. Deformación de tejidos blandos

La simulación de objetos deformables es un área de investigación con una extensa tradición tanto en el área de *computer graphics* como en aplicaciones de realidad virtual y realidad aumentada [Zhang et al., 2004]. Uno de los usos en este campo es precisamente la simulación de objetos blandos y elásticos en creación de contenido 3D en cine y aplicaciones informáticas. Otro campo de aplicación se encuentra en la simulación de la cirugía para modelar el comportamiento de los tejidos blandos [Fung, 1993].

En estas aplicaciones de simulación de cirugía, el cirujano puede entrenar diferentes operaciones mediante un dispositivo que emula de la forma más fidedigna posible, la operación que realizará posteriormente sobre un paciente real. Es decir, el sistema modela los tejidos y órganos humanos para que el médico puedan practicar en el simulador antes de realizar operaciones con tejidos vivos [Choi et al., 2003, Joldes et al., 2009, Zhong et al., 2009]. Esto es especialmente interesante en sistemas de cirugía de invasión mínima en los que el instrumental médico actúa dentro del cuerpo humano mientras que la visualización se realiza desde el exterior a través de una cámara o sistema de visión.

Por tanto, la simulación de tejidos blandos que reaccionen a fuerzas externas presenta un

Figura 6.17.: Modelo bidimensional abierto en una dimensión ajustando al conjunto de datos $\mathcal{DS}_6$, esto es, una MR 4D de un corazón humano. Sin ruido añadido. Función de forma utilizada B-splines. Fotogramas analizados: Primera columna $t = 2$; segunda columna $t = 3$; tercera columna $t = 4$. Iteraciones: Primera fila: $\xi = 0$; segunda fila: $\xi = 5$; tercera fila: $\xi = 10$; cuarta fila: $\xi = 30$.

Figura 6.18.: Corte $z = 20$ del modelo bidimensional abierto en una dimensión ajustando al conjunto de datos $\mathcal{DS}_6$. Sin ruido añadido. Función de forma utilizada B-splines. Fotogramas analizados: Primera columna $t = 2$; segunda columna $t = 3$; tercera columna $t = 4$. Iteraciones: Primera fila: $\xi = 0$; segunda fila: $\xi = 5$; tercera fila: $\xi = 10$; cuarta fila: $\xi = 30$.

gran interés, especialmente si este proceso se realiza de una manera realista y en tiempo real. Así, estos tejidos sintéticos deben deformarse de forma similar a los tejidos reales cuando se aplica una presión en una determina área. En algunos trabajos se modela incluso cómo reaccionan los tejidos ante un corte en un zona del tejido [Chanthasopeepphan et al., 2007].

Recientemente otros trabajos han utilizado la simulación de tejidos blandos como apoyo en operaciones reales. Entre otros, podemos destacar un sistema de navegación médica [Hong et al., 2009], sistemas de ayuda al cirujano mediante realidad aumentada [Volonté et al., 2011] y en cirugía con laparoscopia [Morooka et al., 2013]. En todos los casos, lo que se busca es superponer a la imagen real vista por el cirujano, directamente o bien a través de una cámara endoscópica, objetos e imágenes virtuales que le guíen durante la operación. Por tanto, es importante, que los objetos virtuales tengan un comportamiento de deformación muy cercano al órgano o tejido real.

Tanto en unas aplicaciones como en otras, los tejidos blandos simulados deben deformarse en tiempo real atendiendo a las características físicas de los tejidos reales y a las fuerzas de presión o de tensión que se aplican sobre un punto o una zona del tejido. La mayoría de los métodos utilizados en esta finalidad se basan en el modelo de masa-muelle ó *mass-spring* [Choi et al., 2003, Zhang et al., 2004], en el que el objeto deformable se discretiza en un sistema de puntos de masa conectados por medio de muelles. La ventaja del modelo de masa-muelle es que el cálculo consume menos tiempo y el algoritmo es más fácil de implementar. Sin embargo, el modelo de masa-muelle no permite el modelado preciso de las propiedades del material, y aumentando el número de muelles conduce a un sistema más rígido.

Por otra parte, en la literatura aparece el modelado por elementos finitos (FEM) [Szekely et al., 2000, Basdogan et al., 2001] y el método de elementos de contorno (BEM) [Monserrat et al., 2001, Wang et al., 2007], los cuales son métodos centrados en un modelado preciso de la deformación del tejido suave. En FEM o BEM se aplica un análisis matemático riguroso sobre la base de la mecánica continua con el fin de modelar con precisión los comportamientos mecánicos, en concreto, la relación tensión-deformación de un tejido blando mediante la descomposición en un número de elementos de volumen o elementos de contorno. Sin embargo, estos métodos presentan unos requisitos computacionales elevados y sólo las variantes más simples, tales como funciones de forma lineales se han usado en la mayoría de aproximaciones en la simulación de tejido blando.

Sin embargo otros autores sí emplean FEM no lineales [Morooka et al., 2013] los cuales consiguen una simulación más realista para la deformación de objetos continuos con propiedades no lineales. Otros trabajos utilizan aproximaciones totalmente diferentes, como [Zhong et al., 2009] donde se plantea que el movimiento de deformación depende también de las propiedades eléctricas [Wu y Herzog, 2002], y por tanto, se plantea la deformación como una concentración de iones en el líquido intersticial, esto es, el líquido presente entre las células.

Sin entrar en detalle en el estudio de las diferentes aproximaciones para la simulación de tejidos blandos, se ha realizado una comparativa entre el planteamiento matemático presentado en este trabajo y las principales aproximaciones de la literatura. Los modelos deformables descritos en esta tesis quedan definidos mediante un conjunto de nodos situados en un determinado escenario, habitualmente $\mathbb{R}^3$. Estos modelos presentan unas propiedades de masa y una elasticidad, definidos por los parámetros μ y α que de alguna forma son análogos a las presentes en la aproximación masa-muelle indicada anteriormente. Es decir, al empujar sobre un nodo, los nodos cercanos se ven afectados y se mueven según el modelo utilizado. Por otra parte, la masa de los nodos del modelo crea cierta inercia en los nodos al desplazarse. Así pues, incrementando la masa se pueden simular el comportamiento de órganos con una mayor densidad.

Además, los modelos deformables planteados proporcionan dos parámetros para controlar la rigidez y la densidad de rozamiento, definidos por β y γ . Este parámetro β permite precisamente modelar la cierta rigidez que pueden tener los objetos al doblarse y que está presente en mayor o menor medida en los órganos y tejidos humanos [Fung, 1993]. Asimismo, la densidad de rozamiento puede ser interesante al permitir el modelado de ciertos órganos que pueden moverse dentro de una cavidad y que presentan un determinado rozamiento con los órganos y tejidos contiguos.

Por otra parte, el planteamiento de los modelos está basado en el empleo de elementos finitos, por lo que en el planteamiento matemático presenta cierta similitud con las aproximaciones FEM de simulación de tejidos. Finalmente el BEM merece ser considerado, el método de elementos de contorno usa las condiciones de contorno para resolver la ecuación integral en la frontera y a partir de ahí, calcular numéricamente la solución en el interior del dominio. Con este fin, habitualmente se discretiza la frontera y se obtiene un sistema de ecuaciones que se resuelve numéricamente mediante un sistema matricial. Por tanto, las simulaciones basadas en BEM presentan analogías con el modelo deformable presentado, tanto en la aplicación de las condiciones de contorno, esto es las fuerzas externas, así como en el esquema iterativo de su resolución.

Como resultado, es de suponer que los modelos deformables planteados en esta tesis puedan utilizarse en aplicaciones de modelado de tejidos blandos. Y con este fin, se han llevado a cabo una serie de experimentos para comprobar en un primer momento su validez en estas simulaciones.

Así pues, se parte de un modelo bidimensional $e = 2$ que se ha adaptado a un conjunto de datos definido en el espacio tridimensional $d = 3$. Notar que el modelo sobre el que se va a realizar la simulación del tejido tiene ya la forma del órgano. Además, durante el proceso de simulación del tejido, la adaptación a dicho conjunto de datos permanecerá activa. Esto es, las fuerzas de presión y tensión que simularemos en el objeto se sumarán a las fuerzas externas que conducen el modelo a su forma original.

La Figura 6.19 muestra el resultado de esta simulación. Aplicamos sobre una zona del modelo una fuerza de presión en dirección al interior del objeto. Como se puede observar en la primera fila de la figura, esta fuerza mueve los nodos presentes en la zona hacia el interior, y con ellos arrastra a los nodos situados en un entorno cercano. Cuando mayor sea la elasticidad aplicada al modelo, mayor será la deformación que aparece en el órgano. La rigidez es también un parámetro de gran importancia. Al incrementar ésta, la deformación tiende a aparecer sobre una superficie mayor, ya que la resistencia a la deformación es mayor. Por tanto, se produce una deformación de menor profundidad pero sobre una superficie mayor. Un coeficiente de rigidez muy elevado nos proporcionaría un comportamiento de deformación para el modelo, similar al mostrado por los tejidos óseos. Es decir, una deformación extremadamente pequeña. El resto de parámetros de masa y rozamiento influyen consecuentemente en la deformación resultante.

Notar que durante este proceso actúan tanto las fuerzas internas que dotan de las características mecánicas al modelo como las fuerzas externas. Éstas incluyen la propia fuerza de presión que empuja la región al interior del objeto y las fuerzas externas que intentan acomodar el modelo de nuevo sobre la plantilla resultante de los datos originales.

Una vez se suprime la fuerza de presión, el modelo tiende a adoptar la forma original condicionada por el conjunto de datos y por las propias fuerzas internas de deformación. La segunda y tercera línea de la Figura 6.19 muestran el resultado de las iteraciones $\xi = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$ una vez se suprime dicha presión externa. De nuevo, la evolución del modelo depende de los parámetros elegidos. Así, un modelo con una elasticidad elevada, provoca que la zona de aplicación de la presión tenga un movimiento oscilatorio tras suprimir la presión.

Se ha probado también la aplicación de fuerzas en diferentes direcciones, intensidades y sentidos. Así, en la Figura 6.20 se muestra el resultado de aplicar una fuerza de presión hacia el interior del objeto así como una tensión que estira simultáneamente el modelo hacia fuera. Ambas fuerzas son idénticas y tienen el doble nivel de intensidad que en el ejemplo de la Figura 6.19. El resultado es similar al primer caso. La primera fila muestra cómo el modelo se va deformando al aplicar dichas fuerzas, y la segunda y tercera fila ilustran cómo el modelo deformable va recuperando la forma original indicada por los datos. Las iteraciones mostradas se corresponden también con $\xi = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$.

Basándonos en los resultados de las figuras y en los valores de eficiencia computacional detallados en la Sección 5.3, a pesar de ser un estudio preliminar, parece razonable considerar que estos modelos deformables pueden tener también una aplicación práctica en la simulación de tejidos blandos. Por este motivo, proponemos esta idea como una línea de desarrollo futuro en la Sección 7.1. Será necesario no obstante, estudiar la influencia de los diferentes parámetros del modelo en el proceso de deformación y determinar su adecuación a los diferentes tejidos y órganos a simular, para determinar si la simulación de los modelos se adecuaba a la realidad de los

Figura 6.19.: Ejemplo #1 de deformación de tejidos blandos: (a-c) Se aplica una fuerza de presión sobre el modelo. Las flechas violeta indican las fuerzas aplicadas. Las pequeñas flechas verdes representan las fuerzas externas de adaptación al conjunto de datos. (d-i) Tras suprimir la fuerza el modelo recupera su forma original.

Figura 6.20.: Ejemplo #2 de deformación de tejidos blandos: (a-c) Se aplican fuerzas de presión y tensión sobre el modelo. Las flechas violeta indican las fuerzas aplicadas. Las pequeñas flechas verdes representan las fuerzas externas de adaptación al conjunto de datos. (d-i) Tras suprimir las fuerzas el modelo recupera su forma original.

datos reales con la precisión necesaria.

Además es importante destacar que la simulación aquí efectuada, se corresponde con un modelo bidimensional o malla deformable, $e = 2$. Este tipo de modelos puede resultar interesante para simular órganos huecos como estómago, ventrículos del corazón, venas y arterias, etc. Otra posible ampliación de este trabajo y también propuesta en la Sección 7.1 es el empleo de modelos con tres variables paramétricas $e = 3$, esto es, un volumen deformable. Este tipo de modelo podría resultar más apropiado en la simulación de deformaciones de órganos humanos compactos, como hígado o páncreas, dado que la deformación resultante incluiría no sólo el exterior del objeto si no también el interior del mismo.

Por tanto, podríamos disponer de una aproximación similar a las indicadas anteriormente, esto es masa-muelle o BEM que recoge las fuerzas que se aplican sobre la superficie y que influyen en su interior, pero con una mayor eficiencia y con un modelado no lineal resultante de aplicación de los parámetros del modelo. Esto permitiría también simular una deformación en un órgano cuando la fuerza aplicada se va introduciendo en el interior del propio objeto, como por ejemplo, cuando un bisturí actúa en el interior del órgano bajo simulación.

Notar que combinando este tipo de uso de los modelos con la aplicación descrita en la Sección 6.2 aumentamos la aplicabilidad de los modelos a casos reales. A partir de imagen médica real, se modela de forma sencilla un determinado órgano cuya deformación se pretende simular. La simulación de la deformación se obtiene igualmente, pero particularizada para el caso concreto de un determinado paciente cuya intervención se desee ensayar.

Conclusions

A new formulation of finite dimensional parametric deformable models has been presented in this dissertation. The approach has been to apply a generalization of the Euler-Lagrange equation to a multidimensional energy functional that gathers the internal and external forces determining the parametric deformable models. Therefore, it leads to the formulation of models with specific physical characteristics, such as elasticity, rigidity and mass, being able to adapt to the outline of the objects of interest. The evolution and properties of the deformable models are determined by a set of parameters denoted by α , β , γ and η^1 , the setting of which yields models with a vast amount of different features.

A system in matrix form arises from the discretization of the spatial variables of the functional by means of the finite element method. The derived iterative system has allowed us to compute the position and shape of the model by means of e -dimensional arrays of nodal variables. In this equation, e -dimensional convolutions are used as a filtering method in the spatial domain. From these expressions, a compact iterative system has been obtained by translating the whole system into the Fourier domain. The efficiency analysis of this frequency approach has demonstrated a significant improvement in comparison to previous approaches. This Fourier formulation is one of the main impacts of this thesis as these models can be used with the same computational efficiency for any number of dimensions.

The temporal variable of the iterative process has also been discretized using two different approximations for the time derivatives. This procedure has resulted in two different iterative schemes, called implicit and explicit. Each scheme is characterized by an equivalent e -dimensional filter, $H(\bar{\omega})$ or $H'(\bar{\omega})$ respectively, with specific properties in the iterative process. Since these fil-

¹These parameters characterize the elasticity, the rigidity, and the mass and damping densities of the model respectively.

ters define the dynamic behavior of the model, their impact on the iterative algorithm has been thoroughly studied in this work.

In the study of convergence of the proposed parametric deformable models the conditions assuring stability and maximizing the speed of convergence have been determined. This analysis has been done in complete generality, thus including the multidimensional deformable models defined in the frequency domain. The results have shown that this is independent of the number of dimensions of the model, as well as the shape function used for the finite elements discretization, depending only on the modulus of the filters of the system, $|H(\bar{\omega})|$ or $|H'(\bar{\omega})|$.

The shape of the model in the steady state depends on the parameter η and filters $H(\bar{\omega})$ or $H'(\bar{\omega})$, but its final shape is independent of γ . However, the behavior towards the final shape does depend on γ . Since the whole process is performed in the frequency domain, the iterative system is decoupled into its spectral components, allowing the calculation of the optimal γ that speeds up the convergence of each frequency component, and therefore of the whole model. Regarding stability, the parameter η plays a key role in models with explicit scheme. Thus, depending on the useful bandwidth of the data, an $\eta_{\min}$ must be set to guarantee the stability of the system. By contrast, all implicit scheme models are inherently stable. At the same time, the value of γ can be set to optimize the iterative system for a given frequency range of the dataset, which involves another interesting contribution of this thesis.

Therefore, the proposed formulation reveals an interesting perspective for designing and analyzing parametric deformable models. Now, frequency domain models with any number of dimensions and any shape function can easily be constructed by choosing the appropriate iterative matrices. Likewise, both implicit and explicit schemes can be selected by simply combining these matrices in the iterative system with a high computational efficiency. Besides, the frequency domain analysis conducted in this dissertation enables the optimization of the dynamic parameters based on the bandwidth of the data to be modeled, providing both good accuracy and high speed of convergence.

In order to validate the proposed formulation, deformable models have been tested in applications of object tracking and segmentation with diverse 3D and 4D datasets, specifically topographical and medical data. Furthermore, white gaussian noise has been added to the datasets in order to prove the robustness of the models against noise. These experiments have also allowed us to check the parameters optimization procedure outlined in the dissertation. Results prove that both formulation and the method for designing the parameters are applicable in the characterization even of multidimensional data in several image processing applications.

In summary, this general formulation of the parametric deformable models along with its convergence analysis performed in the doctoral Thesis, provide a valuable framework for the

simple use of deformable models in segmentation, tracking, simulation and characterization of multidimensional datasets, with high flexibility, velocity and enhanced effectiveness.

7.1. Future lines of research

An important number of lines of research can be drawn from the results of this work. The first one is related to the number of dimensions of the models. Although the frequency-based formulation described in Chapter 3 can be applied to models of any number of dimensions, the shape functions and stiffness spectra detailed in Appendix C, were computed only for models with $e = 2$ parametric variables. This implies the construction of the active meshes which have been used in the 3D and 4D applications detailed in Chapter 6. This future line involves the calculation of the frequency arrays for models of higher dimensions, i.e. $e \geq 3$.

Within this line of research, models with $e = 3$ or active volumes are particularly interesting. These three-dimensional structures represent a deformable volume, which can conform not only to the outline of an object, but also to its internal characteristics. Obviously the elasticity and rigidity are also included in this type of models. In this case the elasticity represents the compression or expansion capacity shown by the volume. Moreover, the stiffness is similar to the behavior outlined in active meshes, except that the volume can be bent into any of three parametric variables, and therefore the rigidity restricts such deformation.

Since these volumes represent an approach similar to the ones taken in MetaMorphs or Topological Active Volumes [Huang y Metaxas, 2008, Barreira et al., 2010], a comparison between the three-dimensional proposed parametric models and these implicit-explicit models should be conducted. In addition, given that active volumes should accommodate to the internal features of the object, the algorithm for calculating the external forces needs to be modified to provide these forces from the inner part of the dataset.

A parameter optimization procedure was proposed in this dissertation. Thus, depending on the bandwidth of the data, parameters can be fixed to speed up the convergence in the steady state. Although it is the most influential in the iterative process, we have shown in Section 4.3 that in the transient state, these parameters may not always provide the fastest convergence. Therefore, another line of research involves the analysis of this transient state to provide an algorithm to optimize the speed of adaptation in this stage. Note that this implies the use of dynamic parameters whose value may change along the iterations.

With regard to the values of the parameters, a more detailed study of the elasticity α and rigidity β is also of interest. These parameters rule the general behavior of the models, which

have some problems adapting to small holes and bumps of the data. Depending on the value set for these parameters, this high-frequency adaptation is feasible at the cost of reducing the noise robustness. Therefore, an analysis of the influence of these parameters on the accurate adjustment of the model is also recommended.

Moreover, a method to increase the convergence to boundary concavities with parametric active contours was proposed in [Verdú-Monedero et al., 2008b]. This procedure is based on the insertion of new nodal variables in areas where variation in the data is large. Similarly, another proposed future line in the thesis is the generalization of this approach to multidimensional models. Thus, when the model is near a concavity, the algorithm should detect the significant difference between model and edge data. Then it automatically inserts nodes in each of the parametric variables allowing a greater resolution in that region of the data.

In addition, an improved algorithmic implementation would also be advisable. That includes the incorporation of further techniques for improving the computational efficiency such as parallel implementations. This is all perfectly feasible due to the high degree of parallelization presented by the proposed formulation, since the processing of each spectral component of the model is completely independent of the other components. Thus, software implementations adapted to multicore hardware, such as modern GPUs, should allow 4D data processing with large models even on mobile devices, increasing the range of applications of these models.

Finally, it should be looked into finding further scopes and areas of application for this models. In Chapter 6, several applications have been used to prove the validity of the approach. The results have shown notable advantages of this approach in certain applications. For this reason, the following steps involve the use of the deformable models in other medical imaging modalities and other fields of image processing.

The use of the models for soft tissue simulation is also remarkable [Joldes et al., 2009]. Preliminary tests conducted in Section 6.3 show interesting deformation characteristics very close to human tissues. For this reason, this direction should be further explored in the future. Efficiency and deformation properties by applying an external pressure must be compared with other approaches in the literature, in order to provide a fast and efficient way to simulate different types of tissues. In this regard, the use of deformable volumes can provide an additional level of complexity and realism not only in medical imaging applications but also in virtual reality applications for the simulation of fluffy objects with non-rigid motion or deformation.

In conclusion, we have shown that this new formulation of deformable models is not only a valuable contribution in the field of multidimensional signal processing but also opens new areas in which research can be developed in the immediate future.

Conclusiones

EN esta tesis doctoral se ha propuesto una nueva formulación de modelos deformables paramétricos e -dimensionales en el dominio de Fourier. Este nuevo enfoque resulta de la generalización de la ecuación de Euler-Lagrange aplicada a un funcional de energía y trasladada posteriormente al dominio de la frecuencia. Este funcional reúne las energías internas y externas que intervienen en los modelos deformables paramétricos. Por lo tanto, el funcional conduce a la formulación de modelos con características físicas específicas, tales como elasticidad, rigidez y masa, siendo capaces de adaptarse al contorno de los objetos de interés. La evolución y propiedades de los modelos deformables quedan determinados por un conjunto de parámetros denotados por α , β , γ y η ¹. Por lo tanto, fijando estos parámetros, se pueden obtener modelos con diferentes características.

Para la discretización de las variables espaciales del funcional se ha aplicado el método de elementos finitos, obteniendo un sistema en forma de matriz. El sistema iterativo resultante permite calcular la posición y la forma del modelo a través de un array e -dimensional de variables nodales. En este sistema, se utilizan convoluciones e -dimensionales como método de filtrado en el dominio espacial. A partir de estas expresiones, se ha derivado un sistema iterativo compacto mediante la transformación de todo el sistema al dominio de Fourier. Al estudiar la eficiencia computacional de esta aproximación, se ha observado que presenta una mejora significativa en comparación con enfoques anteriores. Una de las principales contribuciones de la tesis es precisamente la formulación descrita, puesto que puede ser aplicada a modelos con cualquier número de dimensiones con una eficiencia computacional equivalente.

¹Estos parámetros caracterizan respectivamente la elasticidad, la rigidez, la densidad de masa y la relación entre amortiguamiento y masa del modelo.

La variable temporal del proceso iterativo se ha discretizado mediante el uso de dos aproximaciones diferentes para las derivadas temporales. Este procedimiento ha dado lugar a dos esquemas iterativos, implícito y explícito. Cada sistema se caracteriza, respectivamente, por un filtro equivalente de e -dimensional, $H(\bar{\omega})$ ó $H'(\bar{\omega})$, con propiedades específicas en el proceso iterativo. Dado que estos filtros definen el comportamiento dinámico del modelo, su impacto en el algoritmo iterativo ha sido estudiado con detalle.

En consecuencia, se ha examinado la convergencia de los modelos deformables paramétricos propuestos definiendo las condiciones que aseguran la estabilidad y maximizan la velocidad de convergencia. Este análisis se ha realizado en completa generalidad, incluyendo por tanto los modelos deformables multidimensionales definidos en el dominio de la frecuencia. Los resultados son independientes del número de dimensiones del modelo, así como de la función de forma utilizada para la discretización de los elementos finitos, dependiendo solamente del módulo de los filtros del sistema, $|H(\bar{\omega})|$ ó $|H'(\bar{\omega})|$.

La forma del modelo en el régimen permanente depende del parámetro η y de los filtros $H(\bar{\omega})$ ó $H'(\bar{\omega})$, pero su forma final es independiente de parámetro γ . Sin embargo, el comportamiento durante la evolución hacia la forma final sí que depende de γ . Por otra parte, dado que todo el proceso se lleva a cabo en el dominio de la frecuencia, el sistema iterativo queda desacoplado en sus componentes espectrales, lo que permite el cálculo del γ óptimo que acelera la convergencia de cada componente frecuencial, y por lo tanto, de todo el modelo. En cuanto a la estabilidad, el parámetro η juega un papel fundamental en los modelos con esquema explícito. Por lo tanto, dependiendo del ancho de banda útil de los datos, es necesario fijar un $\eta_{\min}$ para garantizar la estabilidad del sistema. Por el contrario, todos los modelos de esquema implícito son inherentemente estables. La posibilidad de fijar el valor de γ para optimizar el sistema iterativo para una determinada gama de frecuencias junto con el cálculo del $\eta_{\min}$ para garantizar la estabilidad representan otra interesante aportación de esta tesis.

Por lo tanto, la formulación propuesta revela una interesante perspectiva para el diseño y análisis de modelos deformables paramétricos con alta eficiencia computacional. Así, es posible construir modelos en el dominio de la frecuencia definidos con cualquier número de dimensiones, función de forma y esquema iterativo mediante la elección apropiada de las matrices iterativas. Además, el análisis en el dominio de frecuencia llevado a cabo en esta tesis permite la optimización de los parámetros dinámicos basada en el ancho de banda de los datos a modelar, proporcionando una buena precisión y una alta velocidad de convergencia.

Con el fin de validar la formulación propuesta, los modelos deformables han sido probados en aplicaciones de seguimiento y segmentación de objetos con diversos conjuntos de datos 3D y 4D, en concreto datos topográficos y médicos. Por otra parte, se ha añadido ruido gaussiano blanco a los conjuntos de datos con el fin de comprobar la robustez de los modelos contra el ruido.

Estos experimentos también han permitido comprobar la validez del proceso de optimización de parámetros descrito en la tesis. Los resultados prueban que tanto la formulación como el método para el diseño de parámetros pueden ser utilizados en la caracterización de los datos multidimensionales en varias aplicaciones de procesamiento de imágenes.

En resumen, esta formulación general de los modelos deformables paramétricos junto con su análisis de convergencia realizado en la tesis doctoral, proporcionan un marco valioso para el uso de modelos deformables en la segmentación, seguimiento, simulación y caracterización de conjuntos de datos multidimensionales diversos, con gran flexibilidad, velocidad y eficacia.

8.1. Líneas futuras

Es posible extraer un importante número de líneas de investigación futuras a partir de los resultados de este trabajo. La primera está relacionada con el número de dimensiones de los modelos. Aunque la formulación en la frecuencia descrita en el Capítulo 3 puede aplicarse a modelos de cualquier número de dimensiones, las funciones de forma y espectros rigidez detallados en el Anexo C, han sido calculados sólo para modelos con $e = 2$ variables paramétricas. Esto implica la construcción de las mallas activas que se han utilizado en las aplicaciones 3D y 4D detalladas en el Capítulo 6. Esta línea futura conlleva el cálculo de los arrays frecuenciales para los modelos con tres o más dimensiones, esto es, $e \geq 3$.

Dentro de esta línea de investigación, los modelos con $e = 3$ o volúmenes activos son especialmente interesantes. Estas estructuras tridimensionales representan un volumen deformable, que debe adaptarse no sólo al contorno de un objeto sino también a sus características internas. Obviamente, la elasticidad y la rigidez están también incluidas en este tipo de modelos. En este caso la elasticidad representa la capacidad de compresión o de expansión mostrada por el volumen. Por otra parte, la rigidez es similar al comportamiento descrito en mallas activas, excepto que el volumen se puede doblar en cualquiera de las tres variables paramétricas, y por lo tanto, la rigidez restringe tal deformación.

Dado que estos volúmenes representan un enfoque similar a los MetaMorphs o volúmenes de activos topológicos [Huang y Metaxas, 2008, Barreira et al., 2010], se debe llevar a cabo una comparación entre los modelos paramétricos propuestos y estos modelos implícito-explicitos. Además, dado que los volúmenes activos deben adaptarse a las características internas del objeto, el algoritmo para el cálculo de las fuerzas externas debe ser modificado para proporcionar estas fuerzas a la parte interna del conjunto de datos.

En esta tesis se ha propuesto un procedimiento de optimización de parámetros. Así, en fun-

ción del ancho de banda de los datos, es posible fijar los parámetros para acelerar la velocidad de convergencia durante el régimen permanente. A pesar de que esta fase del proceso iterativo es la más influyente en el proceso iterativo, se ha demostrado en la Sección 4.3 que en el estado transitorio, estos parámetros no siempre ofrecen la convergencia más rápida. Por lo tanto, otra línea de investigación implica el análisis de este estado transitorio para proporcionar un algoritmo de optimización durante esta etapa. Notar que esto implica el uso de parámetros dinámicos cuyo valor puede cambiar a lo largo de las iteraciones.

Con respecto a los valores de los parámetros, tendría también un gran interés un estudio más detallado de la elasticidad α y rigidez β . Estos parámetros gobiernan el comportamiento general de los modelos, los cuales tienen algunos problemas de adaptación a los pequeños agujeros y resaltos de los datos. Dependiendo de los valores asignados a estos parámetros, es posible esta adaptación a la alta frecuencia de los datos a costa de reducir la robustez frente al ruido. Por lo tanto, se recomienda asimismo un análisis de la influencia de estos parámetros en el ajuste exacto del modelo.

Por otra parte, en [Verdú-Monedero et al., 2008b] se propone un método para aumentar la convergencia en las concavidades de contornos activos paramétricos. El procedimiento se basa en la inserción de nuevas variables nodales en las zonas donde la variación en los datos es grande. De forma similar, otra línea futura propuesta es la generalización de este enfoque a los modelos multidimensionales. Así, cuando el modelo estuviera cerca de una concavidad, el algoritmo debería detectar la diferencia significativa entre el modelo y el borde de los datos. A continuación, se insertarían nodos automáticamente en cada una de las variables paramétricas, permitiendo una mayor resolución en estas regiones de los datos.

Además, es también recomendable una mejora en la implementación algorítmica. Esto incluye la incorporación de técnicas adicionales para la mejora de la eficiencia computacional, tales como las implementaciones paralelizadas. Todo esto es perfectamente factible, debido al alto grado de paralelización mostrado por la formulación propuesta, ya que el procesamiento de cada componente espectral del modelo es completamente independiente del resto de componentes. Por lo tanto, implementaciones software adaptadas a hardware multinúcleo, tales como las modernas GPUs, deberían permitir el procesamiento de datos 4D de gran tamaño, incluso en dispositivos móviles, aumentando la gama de aplicaciones de estos modelos.

Finalmente, se deberían buscar y definir nuevos ámbitos y áreas de aplicación de estos modelos. En el Capítulo 6, se han utilizado varias aplicaciones para demostrar la validez de esta aproximación. Los resultados han demostrado que en ciertas aplicaciones las ventajas de esta formulación es considerable. Por esta razón, los siguientes pasos implicarían el uso de los modelos deformables en otras modalidades de imágenes médicas e incluso en otros campos del procesamiento de imagen.

Por último, es destacable el uso de los modelos para la simulación de tejidos blandos [Joldes et al., 2009]. Las pruebas preliminares realizadas en la Sección 6.3 muestran interesantes características de deformación similares a las mostradas por los tejidos humanos. En consecuencia, se propone una línea de investigación relacionada con este campo para el futuro. La eficiencia y las propiedades de deformación debidas a la aplicación de una presión externa deberán ser comparadas con otras aproximaciones en la literatura, con el fin de proporcionar una manera rápida y eficiente para simular diferentes tipos de tejidos. En este sentido, el uso de volúmenes deformables puede proporcionar un nivel adicional de complejidad y realismo no sólo en aplicaciones de imágenes médicas, sino también en aplicaciones de realidad virtual para la simulación de objetos blandos con movimiento o deformación no rígida.

En conclusión, hemos mostrado que esta nueva formulación de los modelos deformables no es sólo una valiosa contribución en el campo del procesamiento de señales multidimensionales, si no que también abre nuevas e interesantes áreas de investigación que pueden ser desarrolladas en el futuro inmediato.

Convenciones y notación matemática

En este apéndice se detallan las expresiones matemáticas así como su notación, utilizadas en los diferentes capítulos de esta tesis.

A.1. Notación matemática

Para denotar el *producto de Hadamard* (o producto elemento a elemento) entre dos matrices utilizaremos la siguiente notación,

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1N_2}b_{1N_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_11}b_{N_11} & \cdots & a_{N_1N_2}b_{N_1N_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}, \quad (\text{A.1})$$

siendo ambas, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, matrices de tamaño $N_1 \times N_2$.

En este trabajo también se hace uso del *producto de Kronecker* entre dos matrices [Horn y Johnson, 1991] representado mediante,

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1N_2}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_11}\mathbf{B} & \cdots & a_{N_1N_2}\mathbf{B} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_1M_1 \times N_2M_2}, \quad (\text{A.2})$$

siendo las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de tamaño $N_1 \times N_2$ y $M_1 \times M_2$, respectivamente.

Otra operación sobre matrices utilizada es la *ordenación lexicográfica* de una matriz e -

dimensional de tamaño $N_1 \times \dots \times N_e$ como,

$$\vec{\mathbf{U}} = \left(\mathbf{U}(m_1, \dots, m_e) \right)_{m=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^{1 \times N}, \quad (\text{A.3})$$

donde $N = N_1 N_2 \dots N_e$ es el cardinal de la matriz $\mathbf{U}$. La posición $(m_1, \dots, m_e)$ de cada elemento de la matriz e -dimensional se traslada a la posición m -ésima del vector $\vec{\mathbf{U}}$, donde esta posición se obtiene con la expresión,

$$m = m_1 + \sum_{l=1}^{e-1} (m_{l+1} - 1) \prod_{k=1}^l N_k. \quad (\text{A.4})$$

A.2. Operadores en derivadas parciales

En diferentes secciones de este trabajo se hace uso de varios operadores en derivadas parciales (PDO), cuya notación y formulación pasamos a definir a continuación.

En primer lugar definimos el operador gradiente [Tai, 1997],

$$\nabla := \left(\partial_{s_j} \right)_{j=1, \dots, e} = \begin{bmatrix} \partial_{s_1} \\ \vdots \\ \partial_{s_e} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

donde ∂_{s_j} denota la derivada parcial con respecto al componente espacial j -ésimo. Si aplicamos el operador a una función escalar $v_i(\mathbf{s})$ con e variables $\mathbf{s} := [s_1, \dots, s_e]$ obtenemos,

$$\nabla v_i(\mathbf{s}) = [\partial_{s_1} v_i(\mathbf{s}), \dots, \partial_{s_e} v_i(\mathbf{s})] \in \mathbb{R}^e. \quad (\text{A.6})$$

Para la obtención de las ecuaciones del movimiento, utilizamos también la norma al cuadrado de este vector $\nabla v_i(\mathbf{s})$, calculable mediante,

$$\|\nabla v_i(\mathbf{s})\|^2 = \left(\partial_{s_1} v_i(\mathbf{s}) \right)^2 + \dots + \left(\partial_{s_e} v_i(\mathbf{s}) \right)^2 \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.7})$$

Aplicando el operador gradiente a una función vectorial d -dimensional $\mathbf{v}(\mathbf{s}) = [v_1(\mathbf{s}), \dots, v_d(\mathbf{s})]^\top$ con e variables espaciales $\mathbf{s}$, obtenemos la siguiente matriz, denomina comúnmente *matriz gradiente*,

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{s}) = \left(\partial_{s_j} v_i(\mathbf{s}) \right)_{j=1, \dots, e; i=1, \dots, d} = \begin{bmatrix} \partial_{s_1} v_1(\mathbf{s}) & \dots & \partial_{s_e} v_1(\mathbf{s}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{s_1} v_d(\mathbf{s}) & \dots & \partial_{s_e} v_d(\mathbf{s}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times e}. \quad (\text{A.8})$$

Al resultado de realizar el producto escalar (o producto interno) del vector gradiente y un vector e -dimensional $\mathbf{v}_l(\mathbf{s}) = [v_{l,1}(\mathbf{s}), \dots, v_{l,d}(\mathbf{s})]^\top$ se le denomina divergencia, y se calcula como,

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_l(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^e \partial_{s_j} v_{l,j}(\mathbf{s}) = \partial_{s_1} v_{l,1}(\mathbf{s}) + \dots + \partial_{s_e} v_{l,e}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.9})$$

Aplicando este operador a una función matricial $\mathbf{v}(\mathbf{s})$ de dimensiones $d \times e$ y con e variables espaciales $\mathbf{s}$, obtenemos el siguiente vector,

$$-\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{s}) = -\nabla \cdot \begin{bmatrix} v_{1,1}(\mathbf{s}) & \cdots & v_{1,e}(\mathbf{s}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{d,1}(\mathbf{s}) & \cdots & v_{d,e}(\mathbf{s}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial_{s_1} v_{1,1}(\mathbf{s}) + \cdots + \partial_{s_e} v_{1,e}(\mathbf{s}) \\ \vdots \\ \partial_{s_1} v_{d,1}(\mathbf{s}) + \cdots + \partial_{s_e} v_{d,e}(\mathbf{s}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{A.10})$$

El operador Laplaciano (u operador gradiente al cuadrado), por su parte, se define como la divergencia del gradiente, y se denota como sigue,

$$\Delta := \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \sum_{j=1}^e \partial_{s_j s_j}. \quad (\text{A.11})$$

Si aplicamos el operador a una función escalar $v_i(\mathbf{s})$ con e variables $\mathbf{s}$ obtenemos,

$$\Delta v_i(\mathbf{s}) = \partial_{s_1 s_1} v_i(\mathbf{s}) + \cdots + \partial_{s_e s_e} v_i(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.12})$$

De forma similar, la aplicación del operador Laplaciano sobre un vector d -dimensional $\mathbf{v}(\mathbf{s})$ con e variables espaciales $\mathbf{s}$ da como resultado el siguiente vector,

$$\Delta \mathbf{v}(\mathbf{s}) = \left(\sum_{j=1}^e \partial_{s_j s_j} v_i(\mathbf{s}) \right)_{i=1, \dots, d} = \begin{bmatrix} \partial_{s_1 s_1} v_1(\mathbf{s}) + \cdots + \partial_{s_e s_e} v_1(\mathbf{s}) \\ \vdots \\ \partial_{s_1 s_1} v_d(\mathbf{s}) + \cdots + \partial_{s_e s_e} v_d(\mathbf{s}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{A.13})$$

Ecuaciones matriciales

En este apéndice se describe el procedimiento de cálculo de las ecuaciones matriciales, las funciones de forma y matrices elementales y globales para cada función de forma empleadas en los modelos. Asimismo se proporciona las transformadas de Fourier de estas expresiones.

B.1. Desarrollo de las ecuaciones matriciales

[Liang et al., 2006] obtiene las ecuaciones matriciales para modelos unidimensionales aplicando el método de Galerkin al funcional de energía del modelo unidimensional. De forma similar, en este trabajo aplicamos dicho método a la ecuación generalizada para modelos multidimensionales. Así, la expresión (2.14) queda como,

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{s})\partial_{tt}v_i(\mathbf{s}, t) + \gamma(\mathbf{s})\partial_t v_i(\mathbf{s}, t) - \partial_{s_1}(\alpha(\mathbf{s})\partial_{s_1}v_i(\mathbf{s}, t)) - \cdots - \partial_{s_e}(\alpha(\mathbf{s})\partial_{s_e}v_i(\mathbf{s}, t)) + \\ (\partial_{s_1s_1} + \cdots + \partial_{s_es_e})(\beta(\mathbf{s})\partial_{s_1s_1}v_i(\mathbf{s}, t) + \cdots + \beta(\mathbf{s})\partial_{s_es_e}v_1(\mathbf{s}, t)) - q_i(\mathbf{s}, t) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

donde $q_i(\mathbf{s}, t) = \partial_{v_i}P(\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)) + f_i(\mathbf{v}(\mathbf{s}, t))$. Esta expresión representa la condición necesaria para la estabilidad del modelo en equilibrio. Su residuo medio ponderado puede ser calculado mediante,

$$I = \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{s}, t)w(\mathbf{s})d\mathbf{s} = 0, \quad (\text{B.2})$$

donde $\Psi(\mathbf{s}, t)$ representa la parte izquierda de (B.1) y $w(\mathbf{s})$ es una función de prueba arbitraria.

Asumamos ahora un modelo bidimensional, es decir, con $e = 2$ variables paramétricas. Aplicando integración por partes bidimensional [Zienkiewicz et al., 2005] una vez para el tercer término y dos veces para el cuarto término de (B.1-B.2), llegamos a la formulación débil del modelo

deformable,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} w(\mathbf{s}) \mu(\mathbf{s}) \partial_{tt} v_i(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} w(\mathbf{s}) \gamma(\mathbf{s}) \partial_t v_i(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} \\
 & + \int_{\Omega} \partial_{s_1} (w(\mathbf{s})) \alpha(\mathbf{s}) \partial_{s_1} v_i(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} \partial_{s_2} (w(\mathbf{s})) \alpha(\mathbf{s}) \partial_{s_2} v_i(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} \\
 & + \int_{\Omega} \partial_{s_1 s_1} (w(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} v_i(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} \partial_{s_2 s_2} (w(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_2 s_2} v_i(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} \\
 & + \int_{\Omega} \partial_{s_1 s_1} (w(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_2 s_2} v_i(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} \partial_{s_2 s_2} (w(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} v_i(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} \\
 & + \int_{\Omega} w(\mathbf{s}) q(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} + b = 0, \quad (\text{B.3})
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 b = & - \int_0^{L_2} \left[w(\mathbf{s}) \alpha(\mathbf{s}) \partial_{s_1} v_i(\mathbf{s}, t) \right]_0^{L_1} ds_2 - \int_0^{L_1} \left[w(\mathbf{s}) \alpha(\mathbf{s}) \partial_{s_2} v_i(\mathbf{s}, t) \right]_0^{L_2} ds_1 \\
 & + \int_0^{L_2} \left[w(\mathbf{s}) \partial_{s_1} (\beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} v_i(\mathbf{s}, t)) \right]_0^{L_1} ds_2 + \int_0^{L_1} \left[w(\mathbf{s}) \partial_{s_2} (\beta(\mathbf{s}) \partial_{s_2 s_2} v_i(\mathbf{s}, t)) \right]_0^{L_2} ds_1 \\
 & + \int_0^{L_2} \left[w(\mathbf{s}) \partial_{s_1} (\beta(\mathbf{s}) \partial_{s_2 s_2} v_i(\mathbf{s}, t)) \right]_0^{L_1} ds_2 + \int_0^{L_1} \left[w(\mathbf{s}) \partial_{s_2} (\beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} v_i(\mathbf{s}, t)) \right]_0^{L_2} ds_1 \\
 & - \int_0^{L_2} \left[\partial_{s_1} (w(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} v_i(\mathbf{s}, t) \right]_0^{L_1} ds_2 - \int_0^{L_1} \left[\partial_{s_2} (w(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_2 s_2} v_i(\mathbf{s}, t) \right]_0^{L_2} ds_1 \\
 & - \int_0^{L_2} \left[\partial_{s_1} (w(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_2 s_2} v_i(\mathbf{s}, t) \right]_0^{L_1} ds_2 - \int_0^{L_1} \left[\partial_{s_2} (w(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} v_i(\mathbf{s}, t) \right]_0^{L_2} ds_1,
 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

representa las condiciones de contorno en los cuatro extremos del dominio de integración $0 \leq s_1 \leq L_1$ y $0 \leq s_2 \leq L_2$.

Aproximaremos ahora la función $v_i(\mathbf{s}, t)$ mediante,

$$v_i(\mathbf{s}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{s}) \mathbf{u}_i(t), \quad (\text{B.5})$$

es decir, de forma idéntica a (2.19) pero considerando por el momento un modelo formado por un único segmento. Posteriormente combinaremos todos los modelos elementales para formar el modelo completo.

De nuevo, $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ representa las funciones de forma y $\mathbf{u}_i(t)$ es el array de parámetros de las funciones de forma. Ambos arrays tienen e dimensiones y tamaño n en cada una de ellas, donde e es el número de variables paramétricas del modelo y n es el número de variables nodales (o grados de libertad) de la función de forma. Por ejemplo, para un B-spline cúbico, el número de variables nodales es $n = 4$.

No obstante, en este trabajo suponemos que tanto las funciones de forma como el array de parámetros, pueden escribirse de forma vectorial y, por tanto, $v_i(\mathbf{s}, t)$ es una función escalar de

varias variables independientes que se obtiene como es el producto escalar de los vectores $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ y $\mathbf{u}_i(t)$. Esto es posible si las funciones de forma son separables. Habitualmente se utiliza una ordenación lexicográfica (ver Anexo A.1) a partir del array e -dimensional como procedimiento de reordenación de los elementos.

El cumplimiento de este supuesto nos permite extender el cálculo de la ecuaciones matriciales a modelos deformables con cualquier número de dimensiones. En las Secciones 2.2.2 y 2.2.3 se detalla el proceso de esta transformación de los arrays n -dimensionales, $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ y $\mathbf{u}$, en vectores unidimensionales para el caso concreto de B-splines y diferencias finitas, para una dimensión, dos dimensiones y para el caso genérico e -dimensional.

Con estos supuestos tenemos las diferentes derivadas parciales de $v_i(\mathbf{s}, t)$ con respecto al tiempo t y las variables espaciales s_1 y s_2 ,

$$\partial_{tt}v_i(\mathbf{s}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{s})d_{tt}\mathbf{u}_i(t) \quad \partial_t v_i(\mathbf{s}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{s})d_t\mathbf{u}_i(t) \quad (\text{B.6a})$$

$$\partial_{s_1 s_1}v_i(\mathbf{s}, t) = \partial_{s_1 s_1}(\mathbf{N}(\mathbf{s}))\mathbf{u}_i(t) \quad \partial_{s_1}v_i(\mathbf{s}, t) = \partial_{s_1}(\mathbf{N}(\mathbf{s}))\mathbf{u}_i(t) \quad (\text{B.6b})$$

$$\partial_{s_2 s_2}v_i(\mathbf{s}, t) = \partial_{s_2 s_2}(\mathbf{N}(\mathbf{s}))\mathbf{u}_i(t) \quad \partial_{s_2}v_i(\mathbf{s}, t) = \partial_{s_2}(\mathbf{N}(\mathbf{s}))\mathbf{u}_i(t) \quad (\text{B.6c})$$

donde ∂_{s_j} , $\partial_{s_j s_j}$, ∂_t y ∂_{tt} , denotan respectivamente la primera y segunda derivada parcial con respecto a las variables s_j y t . Asimismo, d_t y d_{tt} representan la primera y segunda derivada con respecto a t del array de parámetros $\mathbf{u}_i(t)$.

El método de Galerkin utiliza una función de prueba arbitraria $w(\mathbf{s})$ que tiene la forma,

$$w(\mathbf{s}) = \mathbf{N}(\mathbf{s})\mathbf{c}, \quad (\text{B.7})$$

donde $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ es la misma función de forma que en (B.5) y $\mathbf{c}$ es un vector arbitrario. Notar que $w(\mathbf{s})$ es un escalar. Por tanto, tenemos que,

$$w(\mathbf{s}) = w^\top(\mathbf{s}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{N}^\top(\mathbf{s}), \quad (\text{B.8})$$

Sustituyendo (B.5-B.6) y (B.8) en la ecuación (B.3), se puede extraer las expresiones $d_{tt}\mathbf{u}_i(t)$, $d_t\mathbf{u}_i(t)$ y $\mathbf{u}_i(t)$ de las integrales y eliminar el vector arbitrario $\mathbf{c}$. De esta forma se puede obtener las ecuaciones de movimiento del modelo en forma matricial,

$$\mathbf{M}d_{tt}\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{C}d_t\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{H}_i(t) + \mathbf{P}_i(t) = \mathbf{0} \quad (\text{B.9})$$

donde $\mathbf{M}$ es la matriz de masa, $\mathbf{C}$ es la matriz de amortiguamiento, $\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez, $\mathbf{H}_i$ es el vector de fuerzas y $\mathbf{P}_i$ son las fuerzas en el borde del dominio. Estas matrices y vectores quedan

definidos como,

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T(\mathbf{s}) \mu(\mathbf{s}) \mathbf{N}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (\text{B.10a})$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T(\mathbf{s}) \gamma(\mathbf{s}) \mathbf{N}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (\text{B.10b})$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\alpha} + \mathbf{K}_{\beta} \quad (\text{B.10c})$$

$$\mathbf{K}_{\alpha} = \int_{\Omega} \partial_{s_1}(\mathbf{N}^T(\mathbf{s})) \alpha(\mathbf{s}) \partial_{s_1} \mathbf{N}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} \partial_{s_2}(\mathbf{N}^T(\mathbf{s})) \alpha(\mathbf{s}) \partial_{s_2} \mathbf{N}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (\text{B.10d})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\beta} = & \int_{\Omega} \partial_{s_1 s_1}(\mathbf{N}^T(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} \mathbf{N}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} \partial_{s_2 s_2}(\mathbf{N}^T(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_2 s_2} \mathbf{N}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \\ & + \int_{\Omega} \partial_{s_1 s_1}(\mathbf{N}^T(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_2 s_2} \mathbf{N}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} \partial_{s_2 s_2}(\mathbf{N}^T(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} \mathbf{N}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (\text{B.10e})$$

$$\mathbf{H}_i = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T(\mathbf{s}) q_i(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} \quad (\text{B.10f})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i = & \left(- \int_0^{L_2} [\mathbf{N}^T(\mathbf{s}) \alpha(\mathbf{s}) \partial_{s_1} \mathbf{N}(\mathbf{s})]_0^{L_1} ds_2 - \int_0^{L_1} [\mathbf{N}^T(\mathbf{s}) \alpha(\mathbf{s}) \partial_{s_2} \mathbf{N}(\mathbf{s})]_0^{L_2} ds_1 \right. \\ & + \int_0^{L_2} [\mathbf{N}^T(\mathbf{s}) \partial_{s_1} (\beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} \mathbf{N}(\mathbf{s}))]_0^{L_1} ds_2 + \int_0^{L_1} [\mathbf{N}^T(\mathbf{s}) \partial_{s_2} (\beta(\mathbf{s}) \partial_{s_2 s_2} \mathbf{N}(\mathbf{s}))]_0^{L_2} ds_1 \\ & + \int_0^{L_2} [\mathbf{N}^T(\mathbf{s}) \partial_{s_1} (\beta(\mathbf{s}) \partial_{s_2 s_2} \mathbf{N}(\mathbf{s}))]_0^{L_1} ds_2 + \int_0^{L_1} [\mathbf{N}^T(\mathbf{s}) \partial_{s_2} (\beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} \mathbf{N}(\mathbf{s}))]_0^{L_2} ds_1 \\ & - \int_0^{L_2} [\partial_{s_1}(\mathbf{N}^T(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} \mathbf{N}(\mathbf{s})]_0^{L_1} ds_2 - \int_0^{L_1} [\partial_{s_2}(\mathbf{N}^T(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_2 s_2} \mathbf{N}(\mathbf{s})]_0^{L_2} ds_1 \\ & \left. - \int_0^{L_2} [\partial_{s_1}(\mathbf{N}^T(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_2 s_2} \mathbf{N}(\mathbf{s})]_0^{L_1} ds_2 - \int_0^{L_1} [\partial_{s_2}(\mathbf{N}^T(\mathbf{s})) \beta(\mathbf{s}) \partial_{s_1 s_1} \mathbf{N}(\mathbf{s})]_0^{L_2} ds_1 \right) \mathbf{u}_i(t) \end{aligned} \quad (\text{B.10g})$$

La ecuación (B.9) proporciona la formulación de elementos finitos para un único elemento, o dicho de otra forma, es la ecuación del movimiento para todo el modelo si éste está formado por un único elemento. Con el fin de conseguir una aceptable precisión mediante la aproximación de elementos finitos, es habitual discretizar el dominio de integración total en pequeños subdominios proporcionando un mallado de elementos finitos. Esto es, el modelo deformable se divide en pequeños elementos, cada uno de los cuales puede ser considerado a su vez como un modelo deformable cuyo comportamiento viene determinado por esta ecuación. Notar que el mallado tendrá el mismo número de dimensiones que el modelo deformable. Así, si trabajamos con modelos bidimensionales, dividiremos tanto s_1 como s_2 en un determinado número de intervalos. Para mayores dimensiones el proceso es análogo.

Definiendo $\mathbf{u}_i^n(t)$ como el array de parámetros para la coordenada i de un determinado elemento $\mathbf{n} = [n_1, \dots, n_e]$ del modelo, el comportamiento de dicho elemento vendrá regido por,

$$\mathbf{M}^n d_{tt} \mathbf{u}_i^n(t) + \mathbf{C}^n d_t \mathbf{u}_i^n(t) + \mathbf{K}^n \mathbf{u}_i^n(t) - \mathbf{H}_i^n(t) + \mathbf{P}_i^n(t) = \mathbf{0}, \quad (\text{B.11})$$

donde $\mathbf{M}^n$, $\mathbf{C}^n$ y $\mathbf{K}^n$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de dicho elemento $\mathbf{n}$.

Asimismo, $\mathbf{H}_i^n(t)$ es el vector de fuerzas de dicho elemento y $\mathbf{P}_i^n(t)$ contiene las fuerzas de contorno del elemento aplicados a las condiciones de contorno del mismo.

Al igual que en el caso unidimensional [Liang et al., 2006], la implementación práctica del modelo deformable multidimensional se realiza mediante la unión de los elementos discretos que conduce a una ecuación del movimiento global del modelo,

$$\mathbf{M}\mathbf{d}_{tt}\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{C}\mathbf{d}_{tt}\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{q}_i(t), \quad (\text{B.12})$$

donde $\mathbf{u}_i(t)$ es el array global de parámetros, el cual determina la forma y posición de la coordenada i de todos los elementos del modelo deformable. Este array tendrá el mismo número de dimensiones que el modelo. El tamaño de cada dimensión dependerá a su vez del número de elementos en que se haya discretizado dicha dimensión del modelo así como de los grados de libertad (número de variables nodales) utilizadas en las funciones de forma. Para poder operar de forma matricial este array se reordena en forma de vector como se indica en (2.43). $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ representan la matrices globales de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente, y se construyen normalmente mediante matrices de ensamblaje a partir de las matrices de cada elemento $\mathbf{M}^n$, $\mathbf{C}^n$ y $\mathbf{K}^n$. En la Sección B.2 se describen las matrices de ensamblaje y matrices elementales para *B-splines* y diferencias finitas respectivamente.

Por otra parte, en la ecuación del movimiento del elemento (B.11) aparece el término $\mathbf{P}_i^n(t)$. En el caso de modelos deformables cerrados, al ensamblar los diferentes elementos, las fuerzas de contorno se anulan entre los elementos contiguos, resultando en un vector nulo. Para modelos abiertos, estas fuerzas en el borde del dominio pueden suponerse nulas en los extremos, o bien, considerar los modelos abiertos como cerrados mediante el empleo de extensiones como se muestra en la Sección 5.2. Sin embargo, con el fin de aportar una mayor generalidad y claridad, introducimos en (B.12) el término $\mathbf{q}_i(t)$ que engloba las fuerzas externas.

El procedimiento descrito arriba, puede ser aplicado a modelos de mayor número de dimensiones utilizando la ecuación B.1 con $e > 2$. De esta forma, la ecuación del movimiento (B.12) puede ser utilizada para modelos de cualquier número de dimensiones utilizando las matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ apropiadas para dicho número de dimensiones y función de forma elegida. La única condición requerida consiste en que la función de forma cumpla la condición de separabilidad.

B.2. Funciones de forma y matrices del sistema

En esta sección se especifican las matrices de composición que permiten construir las matrices del sistema a partir de las matrices elementales. A continuación para cada función de forma se detallan las matrices elementales así como las matrices globales del sistema. Estas matrices se indi-

can de forma diferenciada para los modelos uni- y bidimensionales. Se describe asimismo el procedimiento de cálculo para obtener las matrices del sistema para el caso genérico e -dimensional.

B.2.1. Matrices de composición

Modelos unidimensionales. Las matrices globales del sistema $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ y el vector de fuerzas $\mathbf{q}$ se pueden construir a partir de las matrices de composición correspondientes $\mathbf{G}_M^n$, $\mathbf{G}_C^n$, $\mathbf{G}_\alpha^n$, $\mathbf{G}_\beta^n$ y $\mathbf{G}_q^n$, y los arrays elementales $\mathbf{M}^e$, $\mathbf{C}^e$, $\mathbf{K}^e$ y $\mathbf{q}^n$ respectivamente, tal y como indican las siguientes expresiones,

$$\mathbf{M} = \sum_{n=0}^{N_1-1} (\mathbf{G}_M^n)^\top \mathbf{M}^e (\mathbf{G}_M^n), \quad (\text{B.13a})$$

$$\mathbf{C} = \sum_{n=0}^{N_1-1} (\mathbf{G}_C^n)^\top \mathbf{C}^e (\mathbf{G}_C^n), \quad (\text{B.13b})$$

$$\mathbf{K}_\alpha = \sum_{n=0}^{N_1-1} (\mathbf{G}_\alpha^n)^\top \mathbf{K}_\alpha^e (\mathbf{G}_\alpha^n), \quad (\text{B.13c})$$

$$\mathbf{K}_\beta = \sum_{n=0}^{N_1-1} (\mathbf{G}_\beta^n)^\top \mathbf{K}_\beta^e (\mathbf{G}_\beta^n), \quad (\text{B.13d})$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_\alpha + \mathbf{K}_\beta, \quad (\text{B.13e})$$

$$\mathbf{q} = \sum_{n=0}^{N_1-1} (\mathbf{G}_q^n)^\top \mathbf{q}^n, \quad (\text{B.13f})$$

Notar que las matrices de composición $\mathbf{G}_M^n$, $\mathbf{G}_C^n$, $\mathbf{G}_\alpha^n$, $\mathbf{G}_\beta^n$ y $\mathbf{G}_q^n$ dependen de cada función de forma, quedando definidas en (2.29) y (2.54) para *B-splines* y diferencias finitas. Por tanto, las expresiones (B.13) pueden utilizarse para modelos definidos con diferentes funciones de forma, sin más que sustituir las matrices de composición correspondientes.

Modelos bidimensionales. Las matrices globales del sistema bidimensional $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ y el vector de fuerzas $\mathbf{q}$ se pueden construir a partir de las matrices de composición correspondientes $\mathbf{G}_M^{n_1, n_2}$, $\mathbf{G}_C^{n_1, n_2}$, $\mathbf{G}_\alpha^{n_1, n_2}$, $\mathbf{G}_\beta^{n_1, n_2}$ y $\mathbf{G}_q^{n_1, n_2}$, y los arrays elementales del caso bidimensional $\mathbf{M}^e$, $\mathbf{C}^e$, $\mathbf{K}^e$ y

$\mathbf{q}^{n_1, n_2}$ respectivamente,

$$\mathbf{M} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} (\mathbf{G}_{\mathbf{M}}^{n_1, n_2})^\top \mathbf{M}^e (\mathbf{G}_{\mathbf{M}}^{n_1, n_2}), \quad (\text{B.14a})$$

$$\mathbf{C} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} (\mathbf{G}_{\mathbf{C}}^{n_1, n_2})^\top \mathbf{C}^e (\mathbf{G}_{\mathbf{C}}^{n_1, n_2}), \quad (\text{B.14b})$$

$$\mathbf{K}_\alpha = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} (\mathbf{G}_\alpha^{n_1, n_2})^\top \mathbf{K}_\alpha^e (\mathbf{G}_\alpha^{n_1, n_2}), \quad (\text{B.14c})$$

$$\mathbf{K}_\beta = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} (\mathbf{G}_\beta^{n_1, n_2})^\top \mathbf{K}_\beta^e (\mathbf{G}_\beta^{n_1, n_2}), \quad (\text{B.14d})$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_\alpha + \mathbf{K}_\beta, \quad (\text{B.14e})$$

$$\mathbf{q} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} (\mathbf{G}_{\mathbf{q}}^{n_1, n_2})^\top \mathbf{q}^{n_1, n_2}. \quad (\text{B.14f})$$

Al igual que con los modelos unidimensionales, las matrices de composición $\mathbf{G}_{\mathbf{M}}^{n_1, n_2}$, $\mathbf{G}_{\mathbf{C}}^{n_1, n_2}$, $\mathbf{G}_\alpha^{n_1, n_2}$, $\mathbf{G}_\beta^{n_1, n_2}$ y $\mathbf{G}_{\mathbf{q}}^{n_1, n_2}$ dependen de cada función de forma, quedando definidas en este caso en las ecuaciones (2.44) y (2.64) para las dos funciones de forma analizadas en este trabajo.

Modelos e -dimensionales. Las matrices globales $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ y el vector de fuerzas $\mathbf{q}$ de los modelos multidimensionales se pueden construir de forma similar a los modelos de menores dimensiones,

$$\mathbf{M} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{n_e=0}^{N_e-1} (\mathbf{G}_{\mathbf{M}}^{n_1, \dots, n_e})^\top \mathbf{M}^e (\mathbf{G}_{\mathbf{M}}^{n_1, \dots, n_e}), \quad (\text{B.15a})$$

$$\mathbf{C} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{n_e=0}^{N_e-1} (\mathbf{G}_{\mathbf{C}}^{n_1, \dots, n_e})^\top \mathbf{C}^e (\mathbf{G}_{\mathbf{C}}^{n_1, \dots, n_e}), \quad (\text{B.15b})$$

$$\mathbf{K}_\alpha = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{n_e=0}^{N_e-1} (\mathbf{G}_\alpha^{n_1, \dots, n_e})^\top \mathbf{K}_\alpha^e (\mathbf{G}_\alpha^{n_1, \dots, n_e}), \quad (\text{B.15c})$$

$$\mathbf{K}_\beta = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{n_e=0}^{N_e-1} (\mathbf{G}_\beta^{n_1, \dots, n_e})^\top \mathbf{K}_\beta^e (\mathbf{G}_\beta^{n_1, \dots, n_e}), \quad (\text{B.15d})$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_\alpha + \mathbf{K}_\beta, \quad (\text{B.15e})$$

$$\mathbf{q} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{n_e=0}^{N_e-1} (\mathbf{G}_{\mathbf{q}}^{n_1, \dots, n_e})^\top \mathbf{q}^{n_1, \dots, n_e}. \quad (\text{B.15f})$$

Así, utilizamos las matrices de composición $\mathbf{G}_{\mathbf{M}}^{n_1, \dots, n_e}$, $\mathbf{G}_{\mathbf{C}}^{n_1, \dots, n_e}$, $\mathbf{G}_\alpha^{n_1, \dots, n_e}$, $\mathbf{G}_\beta^{n_1, \dots, n_e}$ y $\mathbf{G}_{\mathbf{q}}^{n_1, \dots, n_e}$, y los arrays elementales $\mathbf{M}^e$, $\mathbf{C}^e$, $\mathbf{K}_\alpha^e$, $\mathbf{K}_\beta^e$ y $\mathbf{q}^e$, que están definidos en las expresiones (2.50) y (2.73)

B.2.2. Matrices para funciones de forma B-spline

Modelos unidimensionales Las matrices elementales para los modelos unidimensionales con B-spline como función de forma son,

$$\mathbf{M}^{e;\sigma} = \frac{\mu_\sigma}{5040} \begin{bmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{e;\sigma} = \frac{\gamma_\sigma}{5040} \begin{bmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.16a})$$

$$\mathbf{K}_\alpha^{e;\sigma} = \frac{\alpha_\sigma}{120} \begin{bmatrix} 6 & 7 & -12 & -1 \\ 7 & 34 & -29 & -12 \\ -12 & -29 & 34 & 7 \\ -1 & -12 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_\beta^{e;\sigma} = \frac{\beta_\sigma}{6} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.16b})$$

donde $\mathbf{M}^{e;\sigma}$, $\mathbf{C}^{e;\sigma}$ y $\mathbf{K}^{e;\sigma} = \mathbf{K}_\alpha^{e;\sigma} + \mathbf{K}_\beta^{e;\sigma}$ son respectivamente las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez para el elemento σ del contorno.

Las matrices globales del sistema iterativo son simétricas y tienen unas dimensiones $N_1 \times N_1$. Se indican a continuación,

$$\mathbf{M} = \frac{\mu}{5040} \begin{bmatrix} 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 \\ 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 120 \\ 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 \\ 120 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 \\ 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{C} = \frac{\gamma}{5040} \begin{bmatrix} 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 \\ 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 120 \\ 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 \\ 120 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 \\ 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{K}_\alpha = \frac{\alpha}{120} \begin{bmatrix} 80 & -15 & -24 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -24 & -15 \\ -15 & 80 & -15 & -24 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -24 \\ -24 & -15 & 80 & -15 & -24 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & -24 & -15 & 80 & -15 & -24 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -24 & -15 & 80 & -15 & -24 & -1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & -1 & -24 & -15 & 80 & -15 & -24 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -24 & -15 & 80 & -15 & -24 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -24 & -15 & 80 & -15 & -24 \\ -24 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -24 & -15 & 80 & -15 \\ -15 & -24 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -24 & -15 & 80 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{K}_\beta = \frac{\beta}{6} \begin{bmatrix} 16 & -9 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -9 \\ -9 & 16 & -9 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 16 & -9 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -9 & 16 & -9 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 16 & -9 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & -9 & 16 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -9 & 16 & -9 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -9 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -9 & 16 & -9 \\ -9 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -9 & 16 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_\alpha + \mathbf{K}_\beta. \quad (\text{B.21})$$

donde $\cdots$ representa valores nulos hasta completar las dimensiones $N_1 \times N_1$ de la matrices. El símbolo $\ddots$ indica que se debe continuar los valores definidos en cada diagonal para mantener la simetría de las matrices. Estas expresiones son válidas para $N_1 \geq b + 3$. Así, para el caso de splines cúbicos mostrado, son válidas para $N_1 \geq b + 3 = 7$. Para tamaños de malla menores se pueden calcular igualmente utilizando la expresión (B.13).

Modelos bidimensionales Las matrices elementales para los modelos bidimensionales con B-spline como función de forma son,

$$\mathbf{M}^{\sigma_1, \sigma_2} = \frac{\mu_{\sigma_1, \sigma_2}}{5040^2} \begin{bmatrix} 400 & 2580 & 1200 & 20 & 2580 & 16641 & 7740 & 129 & 1200 & 7740 & 3600 & 60 & 20 & 129 & 60 & 1 \\ 2580 & 23760 & 18660 & 1200 & 16641 & 153252 & 120357 & 7740 & 7740 & 71280 & 55980 & 3600 & 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 1200 & 18660 & 23760 & 2580 & 7740 & 120357 & 153252 & 16641 & 3600 & 55980 & 71280 & 7740 & 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 20 & 1200 & 2580 & 400 & 129 & 7740 & 16641 & 2580 & 60 & 3600 & 7740 & 1200 & 1 & 60 & 129 & 20 \\ 2580 & 16641 & 7740 & 129 & 23760 & 153252 & 71280 & 1188 & 18660 & 120357 & 55980 & 933 & 1200 & 7740 & 3600 & 60 \\ 16641 & 153252 & 120357 & 7740 & 153252 & 1411344 & 1108404 & 71280 & 120357 & 1108404 & 870489 & 55980 & 7740 & 71280 & 55980 & 3600 \\ 7740 & 120357 & 153252 & 16641 & 71280 & 1108404 & 1411344 & 153252 & 55980 & 870489 & 1108404 & 120357 & 3600 & 55980 & 71280 & 7740 \\ 129 & 7740 & 16641 & 2580 & 1188 & 71280 & 153252 & 23760 & 933 & 55980 & 120357 & 18660 & 60 & 3600 & 7740 & 1200 \\ 1200 & 7740 & 3600 & 60 & 18660 & 120357 & 55980 & 933 & 23760 & 153252 & 71280 & 1188 & 2580 & 16641 & 7740 & 129 \\ 7740 & 71280 & 55980 & 3600 & 120357 & 1108404 & 870489 & 55980 & 153252 & 1411344 & 1108404 & 71280 & 16641 & 153252 & 120357 & 7740 \\ 3600 & 55980 & 71280 & 7740 & 55980 & 870489 & 1108404 & 120357 & 71280 & 1108404 & 1411344 & 153252 & 7740 & 120357 & 153252 & 16641 \\ 60 & 3600 & 7740 & 1200 & 933 & 55980 & 120357 & 18660 & 1188 & 71280 & 153252 & 23760 & 129 & 7740 & 16641 & 2580 \\ 20 & 129 & 60 & 1 & 1200 & 7740 & 3600 & 60 & 2580 & 16641 & 7740 & 129 & 400 & 2580 & 1200 & 20 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 & 7740 & 71280 & 55980 & 3600 & 16641 & 153252 & 120357 & 7740 & 2580 & 23760 & 18660 & 1200 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 & 3600 & 55980 & 71280 & 7740 & 7740 & 120357 & 153252 & 16641 & 1200 & 18660 & 23760 & 2580 \\ 1 & 60 & 129 & 20 & 60 & 3600 & 7740 & 1200 & 129 & 7740 & 16641 & 2580 & 20 & 1200 & 2580 & 400 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{C}^{e;\sigma_1,\sigma_2} = \frac{\gamma_{\sigma_1,\sigma_2}}{5040^2} \cdot \begin{bmatrix} 400 & 2580 & 1200 & 20 & 2580 & 16641 & 7740 & 129 & 1200 & 7740 & 3600 & 60 & 20 & 129 & 60 & 1 \\ 2580 & 23760 & 18660 & 1200 & 16641 & 153252 & 120357 & 7740 & 7740 & 71280 & 55980 & 3600 & 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 1200 & 18660 & 23760 & 2580 & 7740 & 120357 & 153252 & 16641 & 3600 & 55980 & 71280 & 7740 & 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 20 & 1200 & 2580 & 400 & 129 & 7740 & 16641 & 2580 & 60 & 3600 & 7740 & 1200 & 1 & 60 & 129 & 20 \\ 2580 & 16641 & 7740 & 129 & 23760 & 153252 & 71280 & 1188 & 18660 & 120357 & 55980 & 933 & 1200 & 7740 & 3600 & 60 \\ 16641 & 153252 & 120357 & 7740 & 153252 & 1411344 & 1108404 & 71280 & 120357 & 1108404 & 870489 & 55980 & 7740 & 71280 & 55980 & 3600 \\ 7740 & 120357 & 153252 & 16641 & 71280 & 1108404 & 1411344 & 153252 & 55980 & 870489 & 1108404 & 120357 & 3600 & 55980 & 71280 & 7740 \\ 129 & 7740 & 16641 & 2580 & 1188 & 71280 & 153252 & 23760 & 933 & 55980 & 120357 & 18660 & 60 & 3600 & 7740 & 1200 \\ 1200 & 7740 & 3600 & 60 & 18660 & 120357 & 55980 & 933 & 23760 & 153252 & 71280 & 1188 & 2580 & 16641 & 7740 & 129 \\ 7740 & 71280 & 55980 & 3600 & 120357 & 1108404 & 870489 & 55980 & 153252 & 1411344 & 1108404 & 71280 & 16641 & 153252 & 120357 & 7740 \\ 3600 & 55980 & 71280 & 7740 & 55980 & 870489 & 1108404 & 120357 & 71280 & 1108404 & 1411344 & 153252 & 7740 & 120357 & 153252 & 16641 \\ 60 & 3600 & 7740 & 1200 & 933 & 55980 & 120357 & 18660 & 1188 & 71280 & 153252 & 23760 & 129 & 7740 & 16641 & 2580 \\ 20 & 129 & 60 & 1 & 1200 & 7740 & 3600 & 60 & 2580 & 16641 & 7740 & 129 & 400 & 2580 & 1200 & 20 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 & 7740 & 71280 & 55980 & 3600 & 16641 & 153252 & 120357 & 7740 & 2580 & 23760 & 18660 & 1200 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 & 3600 & 55980 & 71280 & 7740 & 7740 & 120357 & 153252 & 16641 & 1200 & 18660 & 23760 & 2580 \\ 1 & 60 & 129 & 20 & 60 & 3600 & 7740 & 1200 & 129 & 7740 & 16641 & 2580 & 20 & 1200 & 2580 & 400 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.23})$$

$$\mathbf{K}_\alpha^{e;\sigma_1,\sigma_2} = \frac{\alpha_{\sigma_1,\sigma_2}}{302400} \cdot \begin{bmatrix} 120 & 457 & 60 & -7 & 457 & 903 & -564 & -61 & 60 & -564 & -720 & -36 & -7 & -61 & -36 & -1 \\ 457 & 3904 & 2509 & 60 & 903 & 6351 & 1395 & -564 & -564 & -6108 & -6468 & -720 & -61 & -577 & -481 & -36 \\ 60 & 2509 & 3904 & 457 & -564 & 1395 & 6351 & 903 & -720 & -6468 & -6108 & -564 & -36 & -481 & -577 & -61 \\ -7 & 60 & 457 & 120 & -61 & -564 & 903 & 457 & -36 & -720 & -564 & 60 & -1 & -36 & -61 & -7 \\ 457 & 903 & -564 & -61 & 3904 & 6351 & -6108 & -577 & 2509 & 1395 & -6468 & -481 & 60 & -564 & -720 & -36 \\ 903 & 6351 & 1395 & -564 & 6351 & 40392 & -1365 & -6108 & 1395 & -1365 & -27057 & -6468 & -564 & -6108 & -6468 & -720 \\ -564 & 1395 & 6351 & 903 & -6108 & -1365 & 40392 & 6351 & -6468 & -27057 & -1365 & 1395 & -720 & -6468 & -6108 & -564 \\ -61 & -564 & 903 & 457 & -577 & -6108 & 6351 & 3904 & -481 & -6468 & 1395 & 2509 & -36 & -720 & -564 & 60 \\ 60 & -564 & -720 & -36 & 2509 & 1395 & -6468 & -481 & 3904 & 6351 & -6108 & -577 & 457 & 903 & -564 & -61 \\ -564 & -6108 & -6468 & -720 & 1395 & -1365 & -27057 & -6468 & 6351 & 40392 & -1365 & -6108 & 903 & 6351 & 1395 & -564 \\ -720 & -6468 & -6108 & -564 & -6468 & -27057 & -1365 & 1395 & -6108 & -1365 & 40392 & 6351 & -564 & 1395 & 6351 & 903 \\ -36 & -720 & -564 & 60 & -481 & -6468 & 1395 & 2509 & -577 & -6108 & 6351 & 3904 & -61 & -564 & 903 & 457 \\ -7 & -61 & -36 & -1 & 60 & -564 & -720 & -36 & 457 & 903 & -564 & -61 & 120 & 457 & 60 & -7 \\ -61 & -577 & -481 & -36 & -564 & -6108 & -6468 & -720 & 903 & 6351 & 1395 & -564 & 457 & 3904 & 2509 & 60 \\ -36 & -481 & -577 & -61 & -720 & -6468 & -6108 & -564 & -564 & 1395 & 6351 & 903 & 60 & 2509 & 3904 & 457 \\ -1 & -36 & -61 & -7 & -36 & -720 & -564 & 60 & -61 & -564 & 903 & 457 & -7 & 60 & 457 & 120 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.24})$$

$$\mathbf{K}_\beta^{e;\sigma_1,\sigma_2} = \frac{\beta_{\sigma_1,\sigma_2}}{151200} \cdot \begin{bmatrix} 736 & 2082 & 1608 & 194 & 2082 & -8721 & -1824 & 903 & 1608 & -1824 & 924 & 552 & 194 & 903 & 552 & 31 \\ 2082 & 8784 & 8106 & 1608 & 8079 & -25962 & -18933 & 6576 & 6576 & -9288 & -3672 & 5124 & 903 & 5046 & 4419 & 552 \\ 1608 & 8106 & 8784 & 2082 & 6576 & -18933 & -25962 & 8079 & 5124 & -3672 & -9288 & 6576 & 552 & 4419 & 5046 & 903 \\ 194 & 1608 & 2082 & 736 & 903 & -1824 & -8721 & 2082 & 552 & 924 & -1824 & 1608 & 31 & 552 & 903 & 194 \\ 2082 & 8079 & 6576 & 903 & 8784 & -25962 & -9288 & 5046 & 8106 & -18933 & -3672 & 4419 & 1608 & 6576 & 5124 & 552 \\ -8721 & -25962 & -18933 & -1824 & -25962 & 111936 & 20334 & -9288 & -18933 & 20334 & -25449 & -3672 & -1824 & -9288 & -3672 & 924 \\ -1824 & -18933 & -25962 & -8721 & -9288 & 20334 & 111936 & -25962 & -3672 & -25449 & 20334 & -18933 & 924 & -3672 & -9288 & -1824 \\ 903 & 6576 & 8079 & 2082 & 5046 & -9288 & -25962 & 8784 & 4419 & -3672 & -18933 & 8106 & 552 & 5124 & 6576 & 1608 \\ 1608 & 6576 & 5124 & 552 & 8106 & -18933 & -3672 & 4419 & 8784 & -25962 & -9288 & 5046 & 2082 & 8079 & 6576 & 903 \\ -1824 & -9288 & -3672 & 924 & -18933 & 20334 & -25449 & -3672 & -25962 & 111936 & 20334 & -9288 & -8721 & -25962 & -18933 & -1824 \\ 924 & -3672 & -9288 & -1824 & -3672 & -25449 & 20334 & -18933 & -9288 & 20334 & 111936 & -25962 & -1824 & -18933 & -25962 & -8721 \\ 552 & 5124 & 6576 & 1608 & 4419 & -3672 & -18933 & 8106 & 5046 & -9288 & -25962 & 8784 & 903 & 6576 & 8079 & 2082 \\ 194 & 903 & 552 & 31 & 1608 & -1824 & 924 & 552 & 2082 & -8721 & -1824 & 903 & 736 & 2082 & 1608 & 194 \\ 903 & 5046 & 4419 & 552 & 6576 & -9288 & -3672 & 5124 & 8079 & -25962 & -18933 & 6576 & 2082 & 8784 & 8106 & 1608 \\ 552 & 4419 & 5046 & 903 & 5124 & -3672 & -9288 & 6576 & 6576 & -18933 & -25962 & 8079 & 1608 & 8106 & 8784 & 2082 \\ 31 & 552 & 903 & 194 & 552 & 924 & -1824 & 1608 & 903 & -1824 & -8721 & 2082 & 194 & 1608 & 2082 & 736 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.25})$$

donde $\mathbf{M}^{e;\sigma_1,\sigma_2}$, $\mathbf{C}^{e;\sigma_1,\sigma_2}$ y $\mathbf{K}^{e;\sigma_1,\sigma_2} = \mathbf{K}_\alpha^{e;\sigma_1,\sigma_2} + \mathbf{K}_\beta^{e;\sigma_1,\sigma_2}$ son respectivamente, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez para el elemento $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ del modelo. Para el caso general bidimensional, estas matrices son cuadradas con S filas y S columnas, siendo $S = b_1 b_2$. En el caso particular de B-splines cúbicos en ambas dimensiones, $S = b^2 = 4^2$.

Las matrices globales para el caso bidimensional son circulantes y anidadas [Horn y Johnson, 1990]. Esto significa que estas matrices globales quedan definidas por $N_1 \times N_1$ submatrices de dimensiones $N_2 \times N_2$ dispuestas según la siguiente estructura,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^1 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^0 & \square & \mathbf{R}^0 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^2 \\ \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^1 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^0 & \square & \mathbf{R}^0 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^3 \\ \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^1 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^0 & \square & \mathbf{R}^0 & \mathbf{R}^4 \\ \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^1 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^0 & \square & \mathbf{R}^0 \\ \mathbf{R}^0 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^1 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^0 & \square \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \square & \mathbf{R}^0 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^1 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^0 \\ \mathbf{R}^0 & \square & \mathbf{R}^0 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^1 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^4 \\ \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^0 & \square & \mathbf{R}^0 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^1 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^3 \\ \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^0 & \square & \mathbf{R}^0 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^1 & \mathbf{R}^2 \\ \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^0 & \square & \mathbf{R}^0 & \mathbf{R}^4 & \mathbf{R}^3 & \mathbf{R}^2 & \mathbf{R}^1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.26})$$

donde $\mathbf{R}$ es la matriz global de dimensiones $(N_1 N_2) \times (N_1 N_2)$ que representa a $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}_\alpha$ o $\mathbf{K}_\beta$. Por otra parte, $\mathbf{R}^l$ es cada una de las submatrices con dimensiones $N_2 \times N_2$ en las que se descompone la matriz global correspondiente. Las matrices $\mathbf{R}^l$ son a su vez circulantes, y por tanto, quedan completamente definidas por su primera fila. $\mathbf{R}^0$ es una submatriz nula con idénticas dimensiones al resto de submatrices. El signo $\square$ representa las matrices $\mathbf{R}^0$ necesarias para completar las dimensiones de la matriz global. Por último, $\ddots$ representa las matrices que hay que situar en las diagonales para que $\mathbf{R}$ sea simétrica.

Las submatrices correspondientes a cada matriz global son,

$$\mathbf{M}^1 = \frac{\mu}{5040^2} \begin{bmatrix} 5837056 & 2877456 & 289920 & 2416 & 0 & \dots & 0 & 2416 & 289920 & 2877456 \\ 2877456 & 5837056 & 2877456 & 289920 & 2416 & 0 & \dots & 0 & 2416 & 289920 \\ 289920 & 2877456 & 5837056 & 2877456 & 289920 & 2416 & 0 & \dots & 0 & 2416 \\ 2416 & 289920 & 2877456 & 5837056 & 2877456 & 289920 & 2416 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2416 & 289920 & 2877456 & 5837056 & 2877456 & 289920 & 2416 & 0 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & 0 & 2416 & 289920 & 2877456 & 5837056 & 2877456 & 289920 & 2416 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2416 & 289920 & 2877456 & 5837056 & 2877456 & 289920 & 2416 \\ 2416 & 0 & \dots & 0 & 2416 & 289920 & 2877456 & 5837056 & 2877456 & 289920 \\ 289920 & 2416 & 0 & \dots & 0 & 2416 & 289920 & 2877456 & 5837056 & 2877456 \\ 2877456 & 289920 & 2416 & 0 & \dots & 0 & 2416 & 289920 & 2877456 & 5837056 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.27})$$

$$\mathbf{M}^2 = \frac{\mu}{5040^2} \begin{bmatrix} 2877456 & 1418481 & 142920 & 1191 & 0 & \dots & 0 & 1191 & 142920 & 1418481 \\ 1418481 & 2877456 & 1418481 & 142920 & 1191 & 0 & \dots & 0 & 1191 & 142920 \\ 142920 & 1418481 & 2877456 & 1418481 & 142920 & 1191 & 0 & \dots & 0 & 1191 \\ 1191 & 142920 & 1418481 & 2877456 & 1418481 & 142920 & 1191 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1191 & 142920 & 1418481 & 2877456 & 1418481 & 142920 & 1191 & 0 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & 0 & 1191 & 142920 & 1418481 & 2877456 & 1418481 & 142920 & 1191 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1191 & 142920 & 1418481 & 2877456 & 1418481 & 142920 & 1191 \\ 1191 & 0 & \dots & 0 & 1191 & 142920 & 1418481 & 2877456 & 1418481 & 142920 \\ 142920 & 1191 & 0 & \dots & 0 & 1191 & 142920 & 1418481 & 2877456 & 1418481 \\ 1418481 & 142920 & 1191 & 0 & \dots & 0 & 1191 & 142920 & 1418481 & 2877456 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.28})$$

(B.29)

(B.30)

(B.31)

(B.32)

$$\mathbf{C}^3 = \frac{\gamma}{5040^2} \begin{bmatrix} 289920 & 142920 & 14400 & 120 & 0 & \cdots & 0 & 120 & 14400 & 142920 \\ 142920 & 289920 & 142920 & 14400 & 120 & 0 & \cdots & 0 & 120 & 14400 \\ 14400 & 142920 & 289920 & 142920 & 14400 & 120 & 0 & \cdots & 0 & 120 \\ 120 & 14400 & 142920 & 289920 & 142920 & 14400 & 120 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 120 & 14400 & 142920 & 289920 & 142920 & 14400 & 120 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & 120 & 14400 & 142920 & 289920 & 142920 & 14400 & 120 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 120 & 14400 & 142920 & 289920 & 142920 & 14400 & 120 \\ 120 & 0 & \cdots & 0 & 120 & 14400 & 142920 & 289920 & 142920 & 14400 \\ 14400 & 120 & 0 & \cdots & 0 & 120 & 14400 & 142920 & 289920 & 142920 \\ 142920 & 14400 & 120 & 0 & \cdots & 0 & 120 & 14400 & 142920 & 289920 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.33})$$

$$\mathbf{C}^4 = \frac{\gamma}{5040^2} \begin{bmatrix} 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 120 & 1191 \\ 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 120 \\ 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 \\ 120 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 \\ 1191 & 120 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.34})$$

$$\mathbf{K}_\alpha^1 = \frac{\alpha}{302400} \begin{bmatrix} 193280 & 29520 & -24192 & -1168 & 0 & \cdots & 0 & -1168 & -24192 & 29520 \\ 29520 & 193280 & 29520 & -24192 & -1168 & 0 & \cdots & 0 & -1168 & -24192 \\ -24192 & 29520 & 193280 & 29520 & -24192 & -1168 & 0 & \cdots & 0 & -1168 \\ -1168 & -24192 & 29520 & 193280 & 29520 & -24192 & -1168 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1168 & -24192 & 29520 & 193280 & 29520 & -24192 & -1168 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & -1168 & -24192 & 29520 & 193280 & 29520 & -24192 & -1168 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1168 & -24192 & 29520 & 193280 & 29520 & -24192 & -1168 \\ -1168 & 0 & \cdots & 0 & -1168 & -24192 & 29520 & 193280 & 29520 & -24192 \\ -24192 & -1168 & 0 & \cdots & 0 & -1168 & -24192 & 29520 & 193280 & 29520 \\ 29520 & -24192 & -1168 & 0 & \cdots & 0 & -1168 & -24192 & 29520 & 193280 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.35})$$

$$\mathbf{K}_\alpha^2 = \frac{\alpha}{302400} \begin{bmatrix} 29520 & -17865 & -15192 & -603 & 0 & \cdots & 0 & -603 & -15192 & -17865 \\ -17865 & 29520 & -17865 & -15192 & -603 & 0 & \cdots & 0 & -603 & -15192 \\ -15192 & -17865 & 29520 & -17865 & -15192 & -603 & 0 & \cdots & 0 & -603 \\ -603 & -15192 & -17865 & 29520 & -17865 & -15192 & -603 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -603 & -15192 & -17865 & 29520 & -17865 & -15192 & -603 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & -603 & -15192 & -17865 & 29520 & -17865 & -15192 & -603 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -603 & -15192 & -17865 & 29520 & -17865 & -15192 & -603 \\ -603 & 0 & \cdots & 0 & -603 & -15192 & -17865 & 29520 & -17865 & -15192 \\ -15192 & -603 & 0 & \cdots & 0 & -603 & -15192 & -17865 & 29520 & -17865 \\ -17865 & -15192 & -603 & 0 & \cdots & 0 & -603 & -15192 & -17865 & 29520 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.36})$$

$$\mathbf{K}_\alpha^3 = \frac{\alpha}{302400} \begin{bmatrix} -24192 & -15192 & -2880 & -72 & 0 & \cdots & 0 & -72 & -2880 & -15192 \\ -15192 & -24192 & -15192 & -2880 & -72 & 0 & \cdots & 0 & -72 & -2880 \\ -2880 & -15192 & -24192 & -15192 & -2880 & -72 & 0 & \cdots & 0 & -72 \\ -72 & -2880 & -15192 & -24192 & -15192 & -2880 & -72 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -72 & -2880 & -15192 & -24192 & -15192 & -2880 & -72 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & -72 & -2880 & -15192 & -24192 & -15192 & -2880 & -72 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -72 & -2880 & -15192 & -24192 & -15192 & -2880 & -72 \\ -72 & 0 & \cdots & 0 & -72 & -2880 & -15192 & -24192 & -15192 & -2880 \\ -2880 & -72 & 0 & \cdots & 0 & -72 & -2880 & -15192 & -24192 & -15192 \\ -15192 & -2880 & -72 & 0 & \cdots & 0 & -72 & -2880 & -15192 & -24192 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.37})$$

$$\mathbf{K}_\alpha^4 = \frac{\alpha}{302400} \begin{bmatrix} -1168 & -603 & -72 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -72 & -603 \\ -603 & -1168 & -603 & -72 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -72 \\ -72 & -603 & -1168 & -603 & -72 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & -72 & -603 & -1168 & -603 & -72 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -72 & -603 & -1168 & -603 & -72 & -1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & -1 & -72 & -603 & -1168 & -603 & -72 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -72 & -603 & -1168 & -603 & -72 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -72 & -603 & -1168 & -603 & -72 \\ -72 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -72 & -603 & -1168 & -603 \\ -603 & -72 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -72 & -603 & -1168 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.38})$$

$$\mathbf{K}_\beta^1 = \frac{\beta}{151200} \begin{bmatrix} 520960 & -38640 & -30720 & 10480 & 0 & \cdots & 0 & 10480 & -30720 & -38640 \\ -38640 & 520960 & -38640 & -30720 & 10480 & 0 & \cdots & 0 & 10480 & -30720 \\ -30720 & -38640 & 520960 & -38640 & -30720 & 10480 & 0 & \cdots & 0 & 10480 \\ 10480 & -30720 & -38640 & 520960 & -38640 & -30720 & 10480 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 10480 & -30720 & -38640 & 520960 & -38640 & -30720 & 10480 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & 10480 & -30720 & -38640 & 520960 & -38640 & -30720 & 10480 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 10480 & -30720 & -38640 & 520960 & -38640 & -30720 & 10480 \\ 10480 & 0 & \cdots & 0 & 10480 & -30720 & -38640 & 520960 & -38640 & -30720 \\ -30720 & 10480 & 0 & \cdots & 0 & 10480 & -30720 & -38640 & 520960 & -38640 \\ -38640 & -30720 & 10480 & 0 & \cdots & 0 & 10480 & -30720 & -38640 & 520960 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.39})$$

$$\mathbf{K}_\beta^2 = \frac{\beta}{151200} \begin{bmatrix} -38640 & -102465 & 2160 & 6225 & 0 & \cdots & 0 & 6225 & 2160 & -102465 \\ -102465 & -38640 & -102465 & 2160 & 6225 & 0 & \cdots & 0 & 6225 & 2160 \\ 2160 & -102465 & -38640 & -102465 & 2160 & 6225 & 0 & \cdots & 0 & 6225 \\ 6225 & 2160 & -102465 & -38640 & -102465 & 2160 & 6225 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 6225 & 2160 & -102465 & -38640 & -102465 & 2160 & 6225 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 6225 & 2160 & -102465 & -38640 & -102465 & 2160 & 6225 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 6225 & 2160 & -102465 & -38640 & -102465 & 2160 & 6225 \\ 6225 & 0 & \cdots & 0 & 6225 & 2160 & -102465 & -38640 & -102465 & 2160 \\ 2160 & 6225 & 0 & \cdots & 0 & 6225 & 2160 & -102465 & -38640 & -102465 \\ -102465 & 2160 & 6225 & 0 & \cdots & 0 & 6225 & 2160 & -102465 & -38640 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.40})$$

$$\mathbf{K}_\beta^3 = \frac{\beta}{151200} \begin{bmatrix} -30720 & 2160 & 12096 & 1104 & 0 & \cdots & 0 & 1104 & 12096 & 2160 \\ 2160 & -30720 & 2160 & 12096 & 1104 & 0 & \cdots & 0 & 1104 & 12096 \\ 12096 & 2160 & -30720 & 2160 & 12096 & 1104 & 0 & \cdots & 0 & 1104 \\ 1104 & 12096 & 2160 & -30720 & 2160 & 12096 & 1104 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1104 & 12096 & 2160 & -30720 & 2160 & 12096 & 1104 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & 1104 & 12096 & 2160 & -30720 & 2160 & 12096 & 1104 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1104 & 12096 & 2160 & -30720 & 2160 & 12096 & 1104 \\ 1104 & 0 & \cdots & 0 & 1104 & 12096 & 2160 & -30720 & 2160 & 12096 \\ 12096 & 1104 & 0 & \cdots & 0 & 1104 & 12096 & 2160 & -30720 & 2160 \\ 2160 & 12096 & 1104 & 0 & \cdots & 0 & 1104 & 12096 & 2160 & -30720 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.41})$$

$$\mathbf{K}_\beta^4 = \frac{\beta}{151200} \begin{bmatrix} 10480 & 6225 & 1104 & 31 & 0 & \cdots & 0 & 31 & 1104 & 6225 \\ 6225 & 10480 & 6225 & 1104 & 31 & 0 & \cdots & 0 & 31 & 1104 \\ 1104 & 6225 & 10480 & 6225 & 1104 & 31 & 0 & \cdots & 0 & 31 \\ 31 & 1104 & 6225 & 10480 & 6225 & 1104 & 31 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 31 & 1104 & 6225 & 10480 & 6225 & 1104 & 31 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & 31 & 1104 & 6225 & 10480 & 6225 & 1104 & 31 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 31 & 1104 & 6225 & 10480 & 6225 & 1104 & 31 \\ 31 & 0 & \cdots & 0 & 31 & 1104 & 6225 & 10480 & 6225 & 1104 \\ 1104 & 31 & 0 & \cdots & 0 & 31 & 1104 & 6225 & 10480 & 6225 \\ 6225 & 1104 & 31 & 0 & \cdots & 0 & 31 & 1104 & 6225 & 10480 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.42})$$

En todas las submatrices (B.27-B.42), el símbolo $\cdots$ representa valores nulos hasta completar sus dimensiones $N_2 \times N_2$. Notar que las matrices son simétricas de nuevo. El símbolo $\ddots$ representa los valores de las diagonales para mantener la simetría de las matrices. Estas expresiones son válidas para $N_{1,2} \geq b + 3$. Así, para el caso de splines cúbicos mostrado, son válidas para $N_{1,2} \geq b + 3 = 7$. Para tamaños de malla menores se pueden calcular igualmente utilizando (B.14).

B.2.3. Matrices para funciones de forma diferencias finitas

Modelos unidimensionales Las matrices elementales para los modelos unidimensionales utilizando diferencias finitas como función de forma son,

$$\mathbf{M}^{e;\sigma} = \mu_\sigma \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \mu_\sigma \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.43a})$$

$$\mathbf{C}^{e;\sigma} = \gamma_\sigma \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \gamma_\sigma \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.43b})$$

$$\mathbf{K}_\alpha^{e;\sigma} = \alpha_\sigma \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_\sigma \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.43c})$$

$$\mathbf{K}_\beta^{e;\sigma} = \beta_\sigma \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \beta_\sigma \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.43d})$$

donde $\mathbf{M}^{e:\sigma}$, $\mathbf{C}^{e:\sigma}$ y $\mathbf{K}^{e:\sigma} = \mathbf{K}_\alpha^{e:\sigma} + \mathbf{K}_\beta^{e:\sigma}$ son respectivamente las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez para el segmento σ del contorno deformable.

Las matrices globales para estos modelos deformables unidimensionales utilizando diferencias finitas resultan en,

$$\mathbf{M} = \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.44a})$$

$$\mathbf{K}_\alpha = \alpha \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_\beta = \beta \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.44b})$$

donde $\cdots$ representa valores nulos hasta completar tanto en horizontal como en vertical las dimensiones $N_1 \times N_1$ de estas matrices. El símbolo $\ddots$ representa los valores de las diagonales para conseguir que estas matrices sean simétricas. Estas expresiones son válidas para $N_1 \geq 7$. Para tamaños de malla menores se pueden calcular igualmente utilizando (B.13) con las matrices de composición correspondientes (2.54).

Modelos bidimensionales Las matrices elementales para los modelos bidimensionales con diferencias finitas como función de forma son,

$$\mathbf{M}^{e:\sigma_1, \sigma_2} = \mu_{\sigma_1, \sigma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \mu_{\sigma_1, \sigma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.45})$$

$$\mathbf{C}^{e:\sigma_1, \sigma_2} = \gamma_{\sigma_1, \sigma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \gamma_{\sigma_1, \sigma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.46})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\alpha^{e:\sigma_1, \sigma_2} &= \alpha_{\sigma_1, \sigma_2} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha_{\sigma_1, \sigma_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_\beta^{e;\sigma_1,\sigma_2} &= \beta_{\sigma_1,\sigma_2} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \beta_{\sigma_1,\sigma_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 16 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.48}$$

donde $\mathbf{M}^{e;\sigma_1,\sigma_2}$, $\mathbf{C}^{e;\sigma_1,\sigma_2}$ y $\mathbf{K}^{e;\sigma_1,\sigma_2} = \mathbf{K}_\alpha^{e;\sigma_1,\sigma_2} + \mathbf{K}_\beta^{e;\sigma_1,\sigma_2}$ son respectivamente las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez para el segmento $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ del modelo deformable.

Las matrices globales $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ para estos modelos deformables bidimensionales son circulares anidadas. Esto es, estas matrices tienen unas dimensiones $(N_1 N_2) \times (N_1 N_2)$ y pueden construirse mediante $N_1 \times N_1$ submatrices de dimensiones $N_2 \times N_2$, las cuales son a su vez circulares. De esta forma, las matrices de masa pueden escribirse como,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 & \mathbf{M}^0 & \square & \mathbf{M}^0 \\ \mathbf{M}^0 & \mathbf{M}^1 & \mathbf{M}^0 & \square \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \square & \mathbf{M}^0 & \mathbf{M}^1 & \mathbf{M}^0 \\ \mathbf{M}^0 & \square & \mathbf{M}^0 & \mathbf{M}^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^1 = \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{B.49}$$

donde $\mathbf{M}$ es la matriz global de masa, $\mathbf{M}^1$ tiene dimensiones $N_2 \times N_2$, $\mathbf{M}^0$ es una submatriz nula con idénticas dimensiones a $\mathbf{M}^1$, el signo $\square$ representa las matrices $\mathbf{M}^0$ necesarias para completar las dimensiones de la matriz global, $\dots$ representa los valores nulos necesarios para completar las dimensiones de $\mathbf{M}^1$ y $\ddots$ representa los valores de las diagonales para conseguir que estas matrices sean simétricas.

De igual forma, las matrices de amortiguamiento se definen como,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^1 & \mathbf{C}^0 & \square & \mathbf{C}^0 \\ \mathbf{C}^0 & \mathbf{C}^1 & \mathbf{C}^0 & \square \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \square & \mathbf{C}^0 & \mathbf{C}^1 & \mathbf{C}^0 \\ \mathbf{C}^0 & \square & \mathbf{C}^0 & \mathbf{C}^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^1 = \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{B.50}$$

donde $\mathbf{C}$ es la matriz global de amortiguamiento, $\mathbf{C}^1$ tiene dimensiones $N_2 \times N_2$, $\mathbf{C}^0$ es una submatriz nula con idénticas dimensiones a $\mathbf{C}^1$, el signo $\boxplus$ representa las matrices $\mathbf{C}^0$ necesarias para completar las dimensiones de la matriz global, $\cdots$ representa los valores nulos necesarios para completar las dimensiones de $\mathbf{C}^1$ y $\ddots$ representa los valores de las diagonales para conseguir que estas matrices sean simétricas.

Finalmente, las matrices de rigidez $\mathbf{K}_\alpha$ y $\mathbf{K}_\beta$ se construyen como,

$$\mathbf{K}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\alpha^1 & \mathbf{K}_\alpha^2 & \mathbf{K}_\alpha^0 & \boxplus & \mathbf{K}_\alpha^0 & \mathbf{K}_\alpha^2 \\ \mathbf{K}_\alpha^2 & \mathbf{K}_\alpha^1 & \mathbf{K}_\alpha^2 & \mathbf{K}_\alpha^0 & \boxplus & \mathbf{K}_\alpha^0 \\ \mathbf{K}_\alpha^0 & \mathbf{K}_\alpha^2 & \mathbf{K}_\alpha^1 & \mathbf{K}_\alpha^2 & \mathbf{K}_\alpha^0 & \boxplus \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \boxplus & \mathbf{K}_\alpha^0 & \mathbf{K}_\alpha^2 & \mathbf{K}_\alpha^1 & \mathbf{K}_\alpha^2 & \mathbf{K}_\alpha^0 \\ \mathbf{K}_\alpha^0 & \boxplus & \mathbf{K}_\alpha^0 & \mathbf{K}_\alpha^2 & \mathbf{K}_\alpha^1 & \mathbf{K}_\alpha^2 \\ \mathbf{K}_\alpha^2 & \mathbf{K}_\alpha^0 & \boxplus & \mathbf{K}_\alpha^0 & \mathbf{K}_\alpha^2 & \mathbf{K}_\alpha^1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.51a})$$

$$\mathbf{K}_\alpha^1 = \alpha \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_\alpha^2 = \alpha \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.51b})$$

donde $\mathbf{K}_\alpha^l$ con $l = 1, 2$ tienen dimensiones $N_2 \times N_2$, $\mathbf{K}_\alpha^0$ es una submatriz nula con idénticas dimensiones a $\mathbf{K}_\alpha^l$, el signo $\boxplus$ representa las matrices $\mathbf{K}_\alpha^0$ necesarias para completar las dimensiones de la matriz global, $\cdots$ representa los valores nulos necesarios para completar las dimensiones de $\mathbf{K}_\alpha^l$, y $\ddots$ representa los valores de las diagonales para conseguir las matrices indicadas sean simétricas.

$$\mathbf{K}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\beta^1 & \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^0 & \square & \mathbf{K}_\beta^0 & \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^2 \\ \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^1 & \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^0 & \square & \mathbf{K}_\beta^0 & \mathbf{K}_\beta^3 \\ \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^1 & \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^0 & \square & \mathbf{K}_\beta^0 \\ \mathbf{K}_\beta^0 & \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^1 & \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^0 & \square \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \square & \mathbf{K}_\beta^0 & \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^1 & \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^0 \\ \mathbf{K}_\beta^0 & \square & \mathbf{K}_\beta^0 & \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^1 & \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^3 \\ \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^0 & \square & \mathbf{K}_\beta^0 & \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^1 & \mathbf{K}_\beta^2 \\ \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^0 & \square & \mathbf{K}_\beta^0 & \mathbf{K}_\beta^3 & \mathbf{K}_\beta^2 & \mathbf{K}_\beta^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_\beta^1 = \beta \begin{bmatrix} 20 & -8 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -8 \\ -8 & 20 & -8 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 20 & -8 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & -8 & 20 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -8 & 20 & -8 \\ -8 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -8 & 20 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.52a})$$

$$\mathbf{K}_\beta^2 = \beta \begin{bmatrix} -8 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_\beta^3 = \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.52b})$$

donde $\mathbf{K}_\beta^l$ con $l = 1, 2, 3$ tienen dimensiones $N_2 \times N_2$, $\mathbf{K}_\beta^0$ es una submatriz nula con idénticas dimensiones a $\mathbf{K}_\beta^l$, el signo $\square$ representa las matrices $\mathbf{K}_\beta^0$ necesarias para completar las dimensiones de la matriz global, $\cdots$ representa los valores nulos necesarios para completar las dimensiones de $\mathbf{K}_\beta^l$ y $\cdot\cdot\cdot$ representa los valores de las diagonales para conseguir las matrices indicadas sean simétricas. Al igual con anteriores modelos, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_\alpha + \mathbf{K}_\beta$ es la matriz de rigidez global del sistema.

Es importante destacar que estas expresiones matriciales (B.49-B.52) son válidas para $N_{1,2} \geq 7$. Para tamaños de malla menores se pueden calcular igualmente utilizando (B.14) y las matrices de composición (2.64).

B.3. Secuencias de forma y de rigidez en el dominio del espacio

En esta sección se detallan las secuencias resultantes de aplicar la discretización por elementos finitos para las funciones de forma $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ y núcleos de rigidez $\mathbf{K}(\mathbf{s})$. El procedimiento de cálculo se detalla en la Sección 2.2. Para cada función de forma y número de dimensiones tendremos unas secuencias resultantes, pero todas ellas pueden utilizarse en las dos ecuaciones del movimiento (2.76) y (2.79), según se utilice un esquema implícito o explícito respectivamente.

Modelos unidimensionales. Los vectores de forma $\mathbf{f}$ y de rigidez $\mathbf{k}$ para los modelos unidimensionales definidos mediante funciones de forma B-splines son,

$$\mathbf{f}_B = \frac{1}{5040} \begin{bmatrix} 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.53a})$$

$$\mathbf{k}_{B_\alpha} = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 80 & -15 & -24 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & -24 & -15 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.53b})$$

$$\mathbf{k}_{B_\beta} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 16 & -9 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -9 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.53c})$$

$$\mathbf{k}_B = \alpha \mathbf{k}_{B_\alpha} + \beta \mathbf{k}_{B_\beta}, \quad (\text{B.53d})$$

y para diferencias finitas,

$$\mathbf{f}_{FD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.54a})$$

$$\mathbf{k}_{FD_\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.54b})$$

$$\mathbf{k}_{FD_\beta} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.54c})$$

$$\mathbf{k}_{FD} = \alpha \mathbf{k}_{FD_\alpha} + \beta \mathbf{k}_{FD_\beta}, \quad (\text{B.54d})$$

donde $\mathbf{f}_B$ es el vector de forma para B-splines y $\mathbf{f}_{FD}$ es el correspondiente para diferencias finitas. Por otra parte, $\mathbf{k}_B$ y $\mathbf{k}_{FD}$ representan los núcleos espaciales de rigidez. El símbolo $\dots$ representa valores nulos hasta completar los N_1 elementos de los vectores $\mathbf{f}$ y $\mathbf{k}$. Estos vectores definen respectivamente las matrices de forma $\mathbf{F}$ y de rigidez $\mathbf{K}$ para el caso de B-splines y diferencias finitas tal y como se describe en la Sección 2.2 y en [Weruaga et al., 2004b].

Modelos bidimensionales. Para los modelos bidimensionales definidos mediante funciones de forma B-splines tenemos las siguientes secuencias de forma y rigidez,

$$\mathbf{f}_B^{2D} = \frac{1}{5040^2} \begin{bmatrix} 5837056 & 2877456 & 289920 & 2416 & 0 & \dots & 0 & 2416 & 289920 & 2877456 \\ 2877456 & 1418481 & 142920 & 1191 & 0 & \dots & 0 & 1191 & 142920 & 1418481 \\ 289920 & 142920 & 14400 & 120 & 0 & \dots & 0 & 120 & 14400 & 142920 \\ 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 \\ 289920 & 142920 & 14400 & 120 & 0 & \dots & 0 & 120 & 14400 & 142920 \\ 2877456 & 1418481 & 142920 & 1191 & 0 & \dots & 0 & 1191 & 142920 & 1418481 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.55})$$

$$\mathbf{k}_{B_\alpha}^{2D} = \frac{1}{120^2 \cdot 21} \begin{bmatrix} 193280 & 29520 & -24192 & -1168 & 0 & \dots & 0 & -1168 & -24192 & 29520 \\ 29520 & -17865 & -15192 & -603 & 0 & \dots & 0 & -603 & -15192 & -17865 \\ -24192 & -15192 & -2880 & -72 & 0 & \dots & 0 & -72 & -2880 & -15192 \\ -1168 & -603 & -72 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & -72 & -603 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1168 & -603 & -72 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & -72 & -603 \\ -24192 & -15192 & -2880 & -72 & 0 & \dots & 0 & -72 & -2880 & -15192 \\ 29520 & -17865 & -15192 & -603 & 0 & \dots & 0 & -603 & -15192 & -17865 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.56})$$

$$\mathbf{k}_{B_\beta}^{2D} = \frac{1}{6^2 \cdot 4200} \begin{bmatrix} 520960 & -38640 & -30720 & 10480 & 0 & \cdots & 0 & 10480 & -30720 & -38640 \\ -38640 & -102465 & 2160 & 6225 & 0 & \cdots & 0 & 6225 & 2160 & -102465 \\ -30720 & 2160 & 12096 & 1104 & 0 & \cdots & 0 & 1104 & 12096 & 2160 \\ 10480 & 6225 & 1104 & 31 & 0 & \cdots & 0 & 31 & 1104 & 6225 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10480 & 6225 & 1104 & 31 & 0 & \cdots & 0 & 31 & 1104 & 6225 \\ -30720 & 2160 & 12096 & 1104 & 0 & \cdots & 0 & 1104 & 12096 & 2160 \\ -38640 & -102465 & 2160 & 6225 & 0 & \cdots & 0 & 6225 & 2160 & -102465 \end{bmatrix}, \quad (B.57)$$

$$\mathbf{k}_B^{2D} = \alpha \mathbf{k}_{B_\alpha}^{2D} + \beta \mathbf{k}_{B_\beta}^{2D}, \quad (B.58)$$

y para diferencias finitas las secuencias quedan como,

$$\mathbf{f}_{FD}^{2D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{FD_\alpha}^{2D} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (B.59a)$$

$$\mathbf{k}_{FD_\beta}^{2D} = \begin{bmatrix} 20 & -8 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -8 \\ -8 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{FD}^{2D} = \alpha \mathbf{k}_{FD_\alpha}^{2D} + \beta \mathbf{k}_{FD_\beta}^{2D}, \quad (B.59b)$$

donde $\mathbf{f}_B^{2D}$ es la matriz de forma para B-splines y $\mathbf{f}_{FD}^{2D}$ es la correspondiente para diferencias finitas. Por otra parte, $\mathbf{k}_B^{2D}$ y $\mathbf{k}_{FD}^{2D}$ representan los núcleos espaciales de rigidez. Los símbolos $\cdots$ y $\vdots$ representan valores nulos hasta completar las dimensiones de $N_1 \times N_2$ de las matrices $\mathbf{f}^{2D}$ y $\mathbf{k}^{2D}$. Estas matrices definen respectivamente las matrices de forma $\mathbf{F}$ y de rigidez $\mathbf{K}$ para el caso de B-splines y diferencias finitas tal y como se describe en la Sección 2.2.

B.4. Secuencias de forma y de rigidez en el dominio de Fourier

Aplicando la transformada de Fourier a las secuencias de forma y de rigidez detalladas en la Sección B.3 podemos obtener las expresiones de $F(\bar{\omega})$ y $K(\bar{\omega})$ que se utilizan en la expresión frecuencial del proceso iterativo descrito en la Sección 3.1, tanto para el esquema implícito como explícito.

Modelos unidimensionales. Para el caso de modelos unidimensionales tenemos las siguientes transformadas de los vectores de forma y rigidez (B.53-B.54). Transformando al dominio de

Fourier tenemos para los modelos definidos mediante B-splines los siguientes espectros,

$$F_B(\omega) = \frac{1}{2520} [1208 + 1191 \cos(\omega) + 120 \cos(2\omega) + \cos(3\omega)], \quad (\text{B.60a})$$

$$K_{B_\alpha}(\omega) = \frac{1}{60} [40 - 15 \cos(\omega) - 24 \cos(2\omega) - \cos(3\omega)], \quad (\text{B.60b})$$

$$K_{B_\beta}(\omega) = \frac{1}{3} [8 - 9 \cos(\omega) + \cos(3\omega)], \quad (\text{B.60c})$$

$$K_B(\omega) = \alpha K_{B_\alpha}(\omega) + \beta K_{B_\beta}(\omega), \quad (\text{B.60d})$$

donde $F_B(\omega)$, $K_{B_\alpha}(\omega)$, $K_{B_\beta}(\omega)$ y $K_B(\omega)$ son las transformadas de Fourier de las secuencias definidas en (B.53). De forma similar, para diferencias finitas se obtiene,

$$F_{FD}(\omega) = 1, \quad (\text{B.61a})$$

$$K_{FD_\alpha}(\omega) = 2 - 2 \cos(\omega), \quad (\text{B.61b})$$

$$K_{FD_\beta}(\omega) = 6 - 8 \cos(\omega) + 2 \cos(2\omega), \quad (\text{B.61c})$$

$$K_{FD}(\omega) = \alpha K_{FD_\alpha}(\omega) + \beta K_{FD_\beta}(\omega). \quad (\text{B.61d})$$

donde $F_{FD}(\omega)$, $K_{FD_\alpha}(\omega)$, $K_{FD_\beta}(\omega)$ y $K_{FD}(\omega)$ son las transformadas de Fourier de las secuencias definidas en (B.54). Para el caso concreto de diferencias finitas si definimos,

$$\sigma = \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta}, \quad (\text{B.61e})$$

y acotamos los valores $0 \leq \alpha \leq 1$ y $0 \leq \beta \leq 1$, el valor de σ queda acotado entre $1 \leq \sigma \leq 2$ y el núcleo frecuencial de rigidez se puede obtener directamente mediante,

$$K_{FD}(\omega) = [2(1 - \cos(\omega))]^\sigma. \quad (\text{B.61f})$$

Esta expresión permite interpretar el núcleo de rigidez como una derivada fraccionaria σ acorde con el cálculo variacional tal y como describe [Larrey-Ruiz et al., 2008].

Modelos bidimensionales. Al igual que en el caso unidimensional, aplicando la transformada de Fourier bidimensional a las secuencias definidas en (B.55-B.59) se pueden obtener directamente las expresiones de $F(\omega_1, \omega_2)$ y $K(\omega_1, \omega_2)$ utilizables en el proceso iterativo. Para el caso de los B-

splines se obtiene los espectros,

$$\begin{aligned}
 F_B(\omega_1, \omega_2) = & \frac{1}{5040^2} [5837056 + 5673924 \cos(\omega_1) \cos(\omega_2) \\
 & + 57600 \cos(2\omega_1) \cos(2\omega_2) + 4 \cos(3\omega_1) \cos(3\omega_2) \\
 & + 5754912 (\cos(\omega_1) + \cos(\omega_2)) + 579840 (\cos(2\omega_1) + \cos(2\omega_2)) \\
 & + 4832 (\cos(3\omega_1) + \cos(3\omega_2)) + 571680 (\cos(2\omega_1) \cos(\omega_2) + \cos(\omega_1) \cos(2\omega_2)) \\
 & + 4764 (\cos(3\omega_1) \cos(\omega_2) + \cos(\omega_1) \cos(3\omega_2)) \\
 & + 480 (\cos(3\omega_1) \cos(2\omega_2) + \cos(2\omega_1) \cos(3\omega_2))],
 \end{aligned} \tag{B.62a}$$

$$\begin{aligned}
 K_{B_\alpha}(\omega_1, \omega_2) = & \frac{1}{120^2 \cdot 21} [193280 - 71460 \cos(\omega_1) \cos(\omega_2) \\
 & - 11520 \cos(2\omega_1) \cos(2\omega_2) - 4 \cdot \cos(3\omega_1) \cos(3\omega_2) \\
 & + 59040 (\cos(\omega_1) + \cos(\omega_2)) - 48384 (\cos(2\omega_1) + \cos(2\omega_2)) \\
 & - 2336 (\cos(3\omega_1) + \cos(3\omega_2)) - 60768 (\cos(2\omega_1) \cos(\omega_2) + \cos(\omega_1) \cos(2\omega_2)) \\
 & - 2412 (\cos(3\omega_1) \cos(\omega_2) + \cos(\omega_1) \cos(3\omega_2)) \\
 & - 288 (\cos(3\omega_1) \cos(2\omega_2) + \cos(2\omega_1) \cos(3\omega_2))],
 \end{aligned} \tag{B.62b}$$

$$\begin{aligned}
 K_{B_\beta}(\omega_1, \omega_2) = & \frac{1}{6^2 \cdot 4200} [520960 - 409860 \cos(\omega_1) \cos(\omega_2) \\
 & + 48384 \cos(2\omega_1) \cos(2\omega_2) + 124 \cdot \cos(3\omega_1) \cos(3\omega_2) \\
 & - 77280 (\cos(\omega_1) + \cos(\omega_2)) - 61440 (\cos(2\omega_1) + \cos(2\omega_2)) \\
 & + 20960 (\cos(3\omega_1) + \cos(3\omega_2)) + 8640 (\cos(2\omega_1) \cos(\omega_2) + \cos(\omega_1) \cos(2\omega_2)) \\
 & + 24900 (\cos(3\omega_1) \cos(\omega_2) + \cos(\omega_1) \cos(3\omega_2)) \\
 & + 4416 (\cos(3\omega_1) \cos(2\omega_2) + \cos(2\omega_1) \cos(3\omega_2))],
 \end{aligned} \tag{B.62c}$$

$$K_B(\omega_1, \omega_2) = \alpha K_{B_\alpha}(\omega_1, \omega_2) + \beta K_{B_\beta}(\omega_1, \omega_2), \tag{B.62d}$$

donde $F_B(\omega_1, \omega_2)$, $K_{B_\alpha}(\omega_1, \omega_2)$, $K_{B_\beta}(\omega_1, \omega_2)$ y $K_B(\omega_1, \omega_2)$ son las transformadas de Fourier de las secuencias bidimensionales definidas en (B.55-B.58). Para diferencias finitas, las expresiones frecuenciales son,

$$F_{FD}(\omega_1, \omega_2) = 1, \tag{B.63a}$$

$$K_{FD_\alpha}(\omega_1, \omega_2) = 4 - 2 (\cos(\omega_1) + \cos(\omega_2)), \tag{B.63b}$$

$$\begin{aligned}
 K_{FD_\beta}(\omega_1, \omega_2) = & 20 - 16 (\cos(\omega_1) + \cos(\omega_2)) \\
 & + 2 (\cos(2\omega_1) + \cos(2\omega_2)) + 8 \cos(\omega_1) \cos(\omega_2),
 \end{aligned} \tag{B.63c}$$

$$K_{FD}(\omega_1, \omega_2) = \alpha K_{FD_\alpha}(\omega_1, \omega_2) + \beta K_{FD_\beta}(\omega_1, \omega_2), \tag{B.63d}$$

donde $F_{FD}(\omega_1, \omega_2)$, $K_{FD_\alpha}(\omega_1, \omega_2)$, $K_{FD_\beta}(\omega_1, \omega_2)$ y $K_{FD}(\omega_1, \omega_2)$ son las transformadas de las secuencias bidimensionales (B.59). De nuevo, definiendo σ como en (B.61e), el núcleo frecuencial de rigidez bidimensional se puede calcular con,

$$K_{FD}(\omega_1, \omega_2) = [2(2 - \cos(\omega_1) - \cos(\omega_2))]^\sigma, \tag{B.63e}$$

permitiendo interpretar nuevamente este núcleo de rigidez como una derivada fraccionaria σ acorde con el cálculo variacional [Larrey-Ruiz et al., 2008].

Representación de los filtros del sistema

C.1. Respuestas en frecuencia de los filtros del sistema $H(\bar{\omega})$ y $H'(\bar{\omega})$

C.1.1. Modelos con esquema implícito

En esta sección se representa el módulo de la respuesta en frecuencia $|H(\bar{\omega})|$ de los modelos deformables definidos mediante un esquema implícito para una y dos dimensiones. Esto es para los valores $e = 1$ y $e = 2$.

En primer lugar, en la Figura C.1 está dibujado el módulo de la respuesta en frecuencia $|H(\omega)|$ para el caso de los modelos unidimensionales con diferentes valores de los parámetros α , β y η . Seguidamente en las Figuras C.2-C.10 se muestra el módulo de la respuesta en frecuencia para el caso bidimensional, esto es $|H(\omega_1, \omega_2)|$, también para diferentes valores de los parámetros α , β y η .

Figura C.1.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H(\omega)$ para diferentes valores de la masa global η , funciones de forma y parámetros α y β . Funciones de forma: Primera columna, B-splines; Segunda columna, diferencias finitas. Valores de los parámetros: Primera fila, $\alpha = 0$, $\beta = 1$; Segunda fila, $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$; Tercera fila, $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Figura C.2.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H(\omega_1, \omega_2)$ con $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\eta = 0,1$, utilizando como funciones de forma: (a) B-splines; (b) diferencias finitas.

Figura C.3.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H(\omega_1, \omega_2)$ con $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\eta = 1$, utilizando como funciones de forma: (a) B-splines; (b) diferencias finitas.

Figura C.4.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H(\omega_1, \omega_2)$ con $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\eta = 10$, utilizando como funciones de forma: (a) B-splines; (b) diferencias finitas.

Figura C.5.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H(\omega_1, \omega_2)$ con $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$ y $\eta = 0,1$, utilizando como funciones de forma: (a) B-splines; (b) diferencias finitas.

Figura C.6.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H(\omega_1, \omega_2)$ con $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$ y $\eta = 1$, utilizando como funciones de forma: (a) B-splines; (b) diferencias finitas.

Figura C.7.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H(\omega_1, \omega_2)$ con $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$ y $\eta = 10$, utilizando como funciones de forma: (a) B-splines; (b) diferencias finitas.

Figura C.8.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H(\omega_1, \omega_2)$ con $\alpha = 1$, $\beta = 0$ y $\eta = 0,1$, utilizando como funciones de forma: (a) B-splines; (b) diferencias finitas.

Figura C.9.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H(\omega_1, \omega_2)$ con $\alpha = 1$, $\beta = 0$ y $\eta = 1$, utilizando como funciones de forma: (a) B-splines; (b) diferencias finitas.

Figura C.10.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H(\omega_1, \omega_2)$ con $\alpha = 1$, $\beta = 0$ y $\eta = 10$, utilizando como funciones de forma: (a) B-splines; (b) diferencias finitas.

C.1.2. Modelos con esquema explícito

De forma similar al caso implícito, se representa a continuación el módulo de la respuesta en frecuencia $|H'(\bar{\omega})|$ de los modelos deformables definidos mediante un esquema explícito para una y dos dimensiones. En la Figura C.11 se muestra el módulo de la respuesta en frecuencia $|H'(\omega)|$ para el caso de los modelos unidimensionales con diferentes valores de los parámetros α , β y η .

Figura C.11.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H'(\omega)$ para diferentes valores de la masa global η , funciones de forma y parámetros α y β . Para todas las gráficas $\gamma = 1$. Funciones de forma: Primera columna, B-splines; Segunda columna, diferencias finitas. Valores de los parámetros: Primera fila, $\alpha = 0$, $\beta = 1$; Segunda fila, $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$; Tercera fila, $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Seguidamente en las Figuras C.12-C.14 se muestra el módulo de la respuesta en frecuencia para el caso bidimensional, esto es $|H(\omega_1, \omega_2)|$, también para diferentes valores de los parámetros α, β y η .

Figura C.12.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H'(\omega_1, \omega_2)$ con $\alpha = 0,5, \beta = 0,5$ y función de forma B-splines: (a) $\eta = 0,1$; (b) $\eta = 10$.

Figura C.13.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H'(\omega_1, \omega_2)$ con $\eta = 1$ y función de forma B-splines: (a) $\alpha = 0, \beta = 1$; (b) $\alpha = 1, \beta = 0$.

Figura C.14.: Módulo de la respuesta en frecuencia de $H'(\omega_1, \omega_2)$ con $\alpha = 0,5, \beta = 0,5$ y $\eta = 1$: (a) Función de forma B-splines; (b) Función de forma diferencias finitas.

C.2. Relación entre núcleo rigidez y función de forma $K(\bar{\omega})/F(\bar{\omega})$

Por último, en esta sección se representa el módulo de la relación $K(\omega_1, \omega_2)/F(\omega_1, \omega_2)$ utilizada para determinar las condiciones de estabilidad y convergencia para modelos bidimensionales definidos mediante B-splines y diferencias finitas.

Figura C.15.: Respuesta en frecuencia de $K(\omega_1, \omega_2)/F(\omega_1, \omega_2)$ para modelos bidimensionales con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, utilizando como funciones de forma: (a) B-splines; (b) diferencias finitas.

Figura C.16.: Respuesta en frecuencia de $K(\omega_1, \omega_2)/F(\omega_1, \omega_2)$ para modelos bidimensionales con $\alpha = 0,5$ y $\beta = 0,5$, utilizando como funciones de forma: (a) B-splines; (b) diferencias finitas.

Figura C.17.: Respuesta en frecuencia de $K(\omega_1, \omega_2)/F(\omega_1, \omega_2)$ para modelos bidimensionales con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, utilizando como funciones de forma: (a) B-splines; (b) diferencias finitas.

Publicaciones

- M. C. Bastida-Jumilla, R. M. Menchón-Lara, J. Morales-Sánchez y R. Berenguer-Vidal. Active contours tool for the common carotid artery layers segmentation in ultrasound images. En *Interplay Between Natural y Artificial Computation IWINAC: 5th Int. Conf.*, vol. 7931 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pág. 250 – 257. Springer Berlin / Heidelberg, 2013.
- R. Berenguer y R. Verdú. Sistema de visión por computador para tracking automático y caracterización de objetos en 3D. *XX Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, 2005.
- R. Berenguer, R. Verdú, J. Morales y L. Weruaga. Estimación de parámetros de músculos artificiales usando contornos activos y visión estereoscópica. *XVII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, 2002.
- R. Berenguer, R. Verdú, J. Morales, J. Larrey, J. Sancho y L. Weruaga. Vision system for automatic tracking and characterization of 3D objects. *IADAT Journal of Advanced Technology on Imaging and Graphics*, 1(2):44–46, 2005.
- R. Berenguer, R. Verdú, J. Morales y J. Larrey. Characterization of artificial muscles using image processing. En *Interplay between Natural and Artificial Computation*, vol. 4528 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pág. 142–151. Springer, jun. 2007.
- R. Berenguer, J. Morales, P. J. García, J. L. Sancho y R. Verdú. Formulación frecuencial de la ecuación de Euler-Lagrange para modelos deformables. *XXIII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, sept. 2008.
- R. Berenguer, J. Morales, J. Larrey, J. L. Sancho y R. Verdú. Implementación de modelos deformables d -dimensionales mediante diferencias finitas. *XXIV Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, sept. 2009.

- R. Berenguer-Vidal, R. Verdú-Monedero, J. Morales-Sanchez, J. Larrey-Ruiz y M. Bastida-Jumilla. Characterization of three-dimensional data with multidimensional deformable models based on B-splines in the Fourier domain. *Proc. of IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing*, pág. 709–712, may. 2011.
- R. Berenguer-Vidal, R. Verdú-Monedero y J. Morales-Sánchez. Design of B-spline multidimensional deformable models in the frequency domain. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(7-8): 1942–1949, 2012.
- R. Berenguer-Vidal, R. Verdú-Monedero, R. M. Menchón-Lara y Á. Legaz-Aparicio. Comparison of finite difference and B-spline deformable models in characterization of 3D data. En *Interplay Between Natural and Artificial Computation IWINAC: 5th Int. Conf.*, vol. 7931 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pág. 230 – 240. Springer Berlin / Heidelberg, 2013.
- S. González, R. Verdú, R. Berenguer y P. García. Segmentation of sequences of stereoscopic images for modelling artificial muscles. En *Interplay between Natural and Artificial Computation*, vol. 4528 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pág. 152–161. Springer Berlin / Heidelberg, jun. 2007a.
- S. González, R. Verdú, R. Berenguer y J. Morales. Segmentación de secuencias de imágenes estereó para el modelado de músculos artificiales. *XXII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, sept. 2007b.
- J. Morales, R. Verdú, R. Berenguer y L. Weruaga. Non-rigid motion estimation based on fuzzy models. *Proc. of IEEE Int. Conf. on Digital Signal Processing*, jul. 2002a.
- J. Morales, R. Verdú, L. Weruaga y R. Berenguer. Estimación de movimiento no rígido mediante modelos difusos. *XVII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, sept. 2002b.
- R. Verdú, J. Larrey, M. C. Bastida, J. Morales, J. Serrano y R. Berenguer. Caracterización del ciclo de vida de músculos artificiales mediante visión estereoscópica y snakes. *XX Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, 2005.
- R. Verdú y R. Berenguer. Caracterización del ciclo de vida de músculos artificiales mediante visión estereoscópica y snakes. *XX Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, 2005.
- R. Verdú, J. Morales, R. Berenguer y L. Weruaga. Active contours for heart motion-compensated reconstruction in computed tomography. *Proc. of IEEE Int. Conf. on Digital Signal Processing*, jul. 2002.
- R. Verdú, R. Berenguer, J. Morales, G. Vázquez, T. F. Otero y L. Weruaga. 3D mechanical characterization of artificial muscles with stereoscopic computer vision and active contours. *Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing*, sept. 2003a.

- R. Verdú, R. Berenguer, J. Morales, G. Vázquez, T. F. Otero y L. Weruaga. Snakes y visión stereoscópica en el modelado 3D de músculos artificiales. *XVIII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, sept. 2003b.
- R. Verdú, R. Berenguer, J. Morales, G. Vázquez, T. Otero y L. Weruaga. Mechanical characterization of the life cycle of artificial muscles through stereoscopic computer vision and active contours. *Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing*, 2005a.
- R. Verdú, J. Morales, R. Berenguer y L. Weruaga. Optimum design of dynamic parameters of active contours for improving their convergence in image segmentation. En *Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems: 7th Int. Conf.*, vol. 3708 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pág. 483 – 490. Springer Berlin / Heidelberg, 2005b.

Bibliografía

- G. J. Awcock y T. Awcock. *Applied Image Processing*. McGraw-Hill, 1995.
- I. N. Bankman, editor. *Handbook of Medical Image Processing and Analysis*. Elsevier, Academic Press, 2008.
- E. Bardinet, L. D. Cohen y N. Ayache. Tracking and motion analysis of the left ventricle with deformable superquadrics. *Medical Image Analysis*, 1(2):129–149, 1996.
- N. Barreira, M. G. Penedo, L. Cohen y M. Ortega. Topological active volumes: A topology-adaptive deformable model for volume segmentation. *Pattern Recognition*, 43(1):255–266, 2010.
- H. H. Barrett y W. Swindell. *Radiological Imaging: The Theory of Image Formation, Detection and Processing*. Academic Press, 1981.
- C. Basdogan, C.-H. Ho y M. A. Srinivasan. Virtual environments for medical training: graphical and haptic simulation of laparoscopic common bile duct exploration. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 6(3):269–285, 2001.
- K. J. Bathe y E. Wilson. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1976.
- R. Berenguer, R. Verdú, J. Morales y J. Larrey. Characterization of artificial muscles using image processing. En *Interplay between Natural and Artificial Computation*, vol. 4528 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pág. 142–151. Springer, jun. 2007.
- A. Blake y M. Isard. 3D position, attitude and shape input using video tracking of hands and lips. En *Proc. of the 21st annual Conf. on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '94*, 1994.
- A. Blake y M. Isard. *Active Contours*. Springer-Verlag, 1998.
- D. Boukerroui. Efficient numerical schemes for gradient vector flow. *Pattern Recognition*, 45, ene. 2012.

- J. Bredno, T. Lehmann y K. Spitzer. A general discrete contour model in two, three, and four dimensions for topology-adaptive multichannel segmentation. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 25(5):550 – 563, may. 2003.
- P. Brigger, J. Hoeg y M. Unser. B-Spline snakes: A flexible tool for parametric contour detection. *IEEE Trans. Image Processing*, 9(9):1484–1496, sept. 2000.
- D. Brzakovic, X. Luo y P. Brzakovic. An approach to automated detection of tumors in mammograms. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 9(3):233–241, 1990.
- J. T. Bushbert. *The Essential physics of medical imaging*. Lippincott Williams & Wilkins, 2002.
- C. A. Carlsson. Imaging modalities in X-ray computerized tomography and in selected volume tomography. *Phys. Med. Biol.*, 44:23–56, 1999.
- K. R. Castleman. *Digital Image Processing*. Prentice Hall, 1996.
- T. Chanthasopeephan, J. P. Desai y A. C. Lau. Modeling soft-tissue deformation prior to cutting for surgical simulation: finite element analysis and study of cutting parameters. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 54(3):349–359, 2007.
- S. Y. Chen y Q. Guan. Parametric shape representation by a deformable NURBS model for cardiac functional measurements. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 58(3):480–487, 2011.
- J. Cheng y S. W. Foo. Dynamic directional gradient vector flow for snakes. *IEEE Trans. Image Processing*, 15(6):1563–1571, jun. 2006.
- Z. H. Cho, J. P. Jones y M. Singh. *Foundations of medical imaging*. Wiley, 1993.
- K. S. Choi, H. Sun y P. A. Heng. Interactive deformation of soft tissues with haptic feedback for medical learning. *Information Technology in Biomedicine, IEEE Transactions on*, 7(4):358–363, 2003.
- L. Cohen, E. Bardinet y N. Ayache. Surface reconstruction using active contour models. *SPIE Conf. on Geometric Methods in Computer Vision*, 1993.
- L. D. Cohen y I. Cohen. Finite-element methods for active contour models and balloons for 2D and 3D images. *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence*, 15(11):1131–1147, nov. 1993.
- I. Craig. *Active contours*, by Andrew Blake and Michael Isard, Springer-Verlag London, 1998.
- Robotica*, 17(4), jul. 1999.
- D. Cremers, M. Rousson y R. Deriche. A review of statistical approaches to level set segmentation: Integrating color, texture, motion and shape. *Int. Journal of Computer Vision*, 72:195–215, 2007.
- P. J. Davis. *Circulant Matrices*. AMS Chelsea Publishing, NY, 1979.
- M. del Fresno, M. Vanere y A. Clausse. A combined region growing and deformable model method for extraction of closed surfaces in 3D CT and MRI scans. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 33(5):369 – 376, 2009.

- H. Delingette. Simplex meshes: a general representation for 3D shape reconstruction. En *Computer Vision and Pattern Recognition, 1994. Proc. IEEE Computer Society Conf. on*, pág. 856–859, jun. 1994.
- H. Delingette y J. Montagnat. Shape and topology constraints on parametric active contours. *Computer Vision and Image Understanding*, 83:140–171, 2000.
- M. Desbrun y M. P. Gascuel. Smoothed particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies. En *Computer Animation and Simulation 96, Proc. of EG Workshop on Animation and Simulation*, pág. 61–76. Springer-Verlag, 1996.
- A. P. Dhawan. A review on biomedical image processing and future trends. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 31(3 - 4):141 – 183, 1990.
- A. P. Dhawan. *Medical Image Analysis*. IEEE Press Series, Wiley, 2003.
- V. V. Dodonov y V. I. Man'ko. New relations for two-dimensional hermite polynomials. *Journal of Mathematical Physics*, 35(8):4277–4294, 1994.
- Y. Duan y H. Qin. A subdivision-based deformable model for surface reconstruction of unknown topology. *Graphical Models*, 66(4):181–202, 2004.
- B. Eberhardt, A. Weber y W. Straßer. A fast, flexible particle-system model for cloth draping. *IEEE Computer Graphics and Applications*, pág. 52–59, sept. 1996.
- A. S. El-Baz, R. Acharya, M. Mirmehdi y J. S. Suri, editores. *Multi Modality State-Of-The-Art Medical Image Segmentation and Registration Methodologies, vol. 1*. Springer, 2011.
- A. Falcao y F. Bergo. Interactive volume segmentation with differential image foresting transforms. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 23(9):1100 –1108, sept. 2004.
- P. J. S. G. Ferreira. Noniterative and faster iterative methods for interpolation and extrapolation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 44(11):3278–3282, nov. 1994.
- Y. C. Fung. *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer, 1993.
- A. Goshtasby y D. A. Turner. Segmentation of cardiac cine MR images for extraction of right and left ventricular chambers. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 14(1):56–64, 1995.
- M. Hadwiger, F. Laura, C. Rezk-Salama, T. Höllt, G. Geier y T. Pabel. Interactive volume exploration for feature detection and quantification in industrial CT data. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 14, nov. 2008.
- C. Heinzl, J. Kastner y E. Groller. Surface extraction from multi-material components for metrology using dual energy CT. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 13(6):1520 –1527, nov.-dec. 2007.

- J. Hong, N. Matsumoto, R. Ouchida, S. Komune y M. Hashizume. Medical navigation system for otologic surgery based on hybrid registration and virtual intraoperative computed tomography. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 56(2):426–432, 2009.
- R. A. Horn y C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- R. A. Horn y C. R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- J. Huang, D. Abendschein, V. G. Davila-Roman y A. A. Amini. Spatio-temporal tracking of myocardial deformations with a 4-D B-spline model from tagged MRI. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 18(10):957–972, 1999.
- R. Huang, V. Pavlovic y D. N. Metaxas. A graphical model framework for coupling MRFs and deformable models. En *Computer Vision and Pattern Recognition, 2004. CVPR 2004. Proceedings of the 2004 IEEE Computer Society Conference on*, vol. 2, pág. II–739. IEEE, 2004.
- R. Huang, V. Pavlovic y D. N. Metaxas. A tightly coupled region-shape framework for 3D medical image segmentation. En *Biomedical Imaging: Nano to Macro, 2006. 3rd IEEE International Symposium on*, pág. 426–429. IEEE, 2006.
- X. Huang y D. Metaxas. Metamorphs: Deformable shape and appearance models. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 30(8):1444–1459, ago. 2008.
- A. Jalba, M. Wilkinson y J. Roerdink. CPM: a deformable model for shape recovery and segmentation based on charged particles. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 26(10):1320–1335, oct. 2004.
- G. R. Joldes, A. Wittek y K. Miller. Suite of finite element algorithms for accurate computation of soft tissue deformation for surgical simulation. *Medical image analysis*, 13(6):912, 2009.
- M. Kass, A. Witkin y D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *Int. Journal of Computer Vision*, 1(4):321–331, 1988.
- R. Kikinis, M. Shenton, D. Iosifescu, R. McCarley, P. Saiviroonporn, H. Hokama, A. Robatino, D. Metcalf, C. Wible, C. Portas, R. Donnino y F. Jolesz. A digital brain atlas for surgical planning, model-driven segmentation, and teaching. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 2(3):232–241, 1996.
- J. O. Lachaud y B. Taton. Deformable model with a complexity independent from image resolution. *Computer Vision and Image Understanding*, 99:453–475, 2005.
- K. Lam y H. Yan. Fast greedy algorithm for active contours. *Electronic Letters*, 30:21–23, 1994.
- P. Lamata, S. Niederer, D. Nordsletten, D. C. Barber, I. Roy, D. R. Hose y N. Smith. An accurate, fast and robust method to generate patient-specific cubic hermite meshes. *Medical Image Analysis*, 15(6):801–813, 2011.

- P. Lancaster. *Theory of Matrices*. Academic Press, NY, 1969.
- J. Larrey-Ruiz, R. Verdú-Monedero y J. Morales-Sánchez. A Fourier domain framework for variational image registration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 32(1):57–72, 2008.
- B. Leroy, I. Herlin y L. Cohen. Multi-resolution algorithms for active contour models. En *ICAOS '96*, vol. 219 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pág. 58–65. Springer Berlin / Heidelberg, 1996.
- B. Li y S. Acton. Active contour external force using vector field convolution for image segmentation. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 167(8):2096–2106, ago. 2007.
- Z. Li, Q. Zhu y C. Gold. *Digital Terrain Modeling: Principles and Methodology*. CRC Press, 2010.
- J. Liang, T. McInerney y D. Terzopoulos. United snakes. *Medical Image Analysis*, 10(2):215–233, apr. 2006.
- W. C. Lin, S. Y. Chen y C. T. Chen. A new surface interpolation technique for reconstructing 3D objects from serial cross-sections. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 48(1):124–143, 1989.
- X. Lladó, A. del Bue, A. Oliver, J. Salvi y L. Agapito. Reconstruction of non-rigid 3D shapes from stereo-motion. *Pattern Recognition Letters*, 32, may. 2011.
- F. A. Lucas-Quesada, U. Sinha y S. Sinha. Segmentation strategies for breast tumors from dynamic MR images. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 6(5):753–763, 1996.
- R. Malladi, J. Sethian y B. Vemuri. Shape modeling with front propagation: A level set approach. *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence*, 17(2):158–175, 1995.
- W. Mao, J. Evans, L. Hassebrook y C. Knapp. A multistage, optimal active contour model. *IEEE Trans. Image Processing*, 5:1586–1591, nov. 1996.
- D. F. Maune. *Digital Elevation Model Technologies and Applications: The DEM Users Manual*. American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, 2007.
- T. McInerney y D. Terzopoulos. Topologically adaptable snakes. *Proc. Int. Conf. Computer Vision*, pág. 840–845, 1995a.
- T. McInerney y D. Terzopoulos. A dynamic finite element surface model for segmentation and tracking in multidimensional medical images with application to cardiac 4D image analysis. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 19(1):69–83, 1995b.
- T. McInerney y D. Terzopoulos. T-snakes: Topology adaptive snakes. En *Medical Image Analysis*, pág. 840–845, 1999a.
- T. McInerney y D. Terzopoulos. Topology adaptive deformable surfaces for medical image volume segmentation. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 18(10):840–850, 1999b.

- T. McInerney y D. Terzopoulos. T-snakes: Topology adaptive snakes. *Medical Image Analysis*, 4: 73–91, 2000.
- V. H. Milan Sonka y R. Boyle. *Image Processing, Analysis, and Machine Vision*. PWS Publishing, 2007.
- J. V. Miller, D. E. Breen, W. E. Lorensen, R. M. O’Bara y M. J. Wozny. Geometrically deformed models: a method for extracting closed geometric models from volume data. En *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, vol. 25, pág. 217–226. ACM, 1991.
- D. Molloy y P. F. Whelan. Active-meshes. *Pattern Recognition Letters*, 21, nov. 2000.
- C. Monserrat, U. Meier, M. Alcaniz, F. Chinesta y M. Juan. A new approach for the real-time simulation of tissue deformations in surgery simulation. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 64(2):77–85, 2001.
- J. Montagnat y H. Delingette. Volumetric medical images segmentation using shape constrained deformable models. En *CVRMed-MRCAS’97*, pág. 13–22. Springer, 1997.
- J. Montagnat y H. Delingette. 4D deformable models with temporal constraints: Application to 4D cardiac image segmentation. *Medical Image Analysis*, 9(1):87 – 100, 2005.
- J. Montagnat, H. Delingette y N. Ayache. A review of deformable surfaces: Topology, geometry and deformation. *Image and Vision Computing*, 19:1023–1040, 2001.
- K. Morooka, S. Sonoki, R. Kurazume y T. Hasegawa. A method for estimating patient specific parameters for simulation of tissue deformation. En *Interplay Between Natural and Artificial Computation IWINAC: 5th Int. Conf.*, vol. 7930 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pág. 113 – 120. Springer Berlin / Heidelberg, 2013.
- N. Nacereddine, L. Hamami, D. Ziou y M. Tridi. Probabilistic deformable models for weld defect contour estimation in radiography. *Machine Graphics and Vision*, 15(3/4):547, 2006.
- A. Nealen, M. Müller, R. Keiser, E. Boxerman y M. Carlson. Physically based deformable models in computer graphics. *Computer Graphics Forum*, 25(4), 2006.
- W. Neuenschwander, P. Fua, G. Székely y O. Kübler. Velcro surfaces: Fast initialization of deformable models. *Computer Vision, Graphics, and Image Understanding*, pág. 237–245, feb. 1997.
- R. C. Olsen. *Remote Sensing from Air And Space*. SPIE Press, 2007.
- B. Olstad y A. Torp. Encoding of a priori information in active contour models. *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence*, 18(9):863–872, sept. 1996.
- A. Oppenheim y R. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, 1999.
- K. Park, D. Metaxas y L. Axel. A finite element model for functional analysis of 4D cardiac-tagged MR images. En *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention-MICCAI 2003*, pág. 491–498. Springer, 2003.

- O. S. Pinykh. *Digital Imaging and Communications in Medicine (DICOM): A Practical Introduction and Survival Guide*. Springer, Berlin-Heidelberg, 2008.
- J. P. Pons y J. D. Boissonnat. Delaunay deformable models: Topology-adaptive meshes based on the restricted Delaunay triangulation. *Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE Computer Society Conf. on*, 0:1–8, 2007.
- M. Rajab, M. Woolfson y S. Morgan. Application of region-based segmentation and neural network edge detection to skin lesions. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 28(1):61–68, 2004.
- N. Ray y S. Acton. Motion gradient vector flow: An external force for tracking rolling leukocytes with shape and size constrained active contours. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 23(12):1466–1478, dec. 2004.
- N. Savage. Path found to combined MRI and CT scanner. *IEEE Spectrum*, pág. 13 – 14, apr. 2013.
- R. A. Schowengerdt. *Remote sensing: models and methods for image processing*. Academic Press, 2007.
- J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology: Theoretical Advances*, vol. II. Academic Press, London, 1988.
- N. Shareef, D. L. Wang y R. Yagel. Segmentation of medical images using LEGION. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 18(1):74–91, 1999.
- T. Shen, S. Zhang, J. Huang, X. Huang y D. N. Metaxas. Integrating shape and texture in 3D deformable models: From metamorphs to active volume models. En A. S. El-Baz, R. Acharya U, M. Mirmehdi y J. S. Suri, editores, *Multi Modality State-of-the-Art Medical Image Segmentation and Registration Methodologies*. Springer US, 2011.
- P. Soille. *Morphological Image Analysis*. Springer-Verlag, 1999.
- P. Suetens, E. Bellon, D. Vandermeulen, M. Smet, G. Marchal, J. Nuyts y L. Mortelmans. Image segmentation: methods and applications in diagnostic radiology and nuclear medicine. *European journal of radiology*, 17(1):14–21, 1993.
- G. Szekely, C. Brechbühler, R. Hutter, A. Rhomberg, N. Ironmonger y P. Schmid. Modelling of soft tissue deformation for laparoscopic surgery simulation. *Medical Image Analysis*, 4(1):57–66, 2000.
- C. Tai, editor. *Generalized Vector and Dyadic Analysis: Applied Mathematics in Field Theory*. IEEE Press, NY, 1997.
- H. Tehrani Niknejad, A. Takeuchi, S. Mita y D. McAllester. On-road multivehicle tracking using deformable object model and particle filter with improved likelihood estimation. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 13(2):748–758, 2012.

- D. Terzopoulos. Regularization of inverse visual problems involving discontinuities. *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence*, 8(4):413–424, 1986.
- D. Terzopoulos. On matching deformable models to images. En O. S. of America, editor, *Topical Meeting on Machine Vision*, vol. 12 de *Technical Digest Series*, pág. 160–167, Washington, DC, 1987.
- D. Terzopoulos. The computation of visible surface representations. *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence*, 10(4):417–438, jul. 1988.
- D. Terzopoulos. Deformable models: classic, topology-adaptive and generalized formulations. En S. Osher y N. Paragios, editores, *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics*, cap. 2, pág. 21–40. Springer-Verlag New York, Inc., 2003.
- D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr y K. Fleischer. Elastically deformable models. En *Proc. of the 14th annual Conf. on Computer graphics and interactive techniques*, SIGGRAPH '87, 1987.
- D. Terzopoulos, A. Witkin y M. Kass. Constraints on deformable models: recovering 3D shape and nonrigid motion. *Artificial Intelligence*, 36:91–123, 1988.
- G. Tsechpenakis y D. Metaxas. Cocrf deformable model: a geometric model driven by collaborative conditional random fields. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 18(10):2316–2329, 2009.
- G. Tsechpenakis y D. N. Metaxas. CRF-driven implicit deformable model. En *Computer Vision and Pattern Recognition, 2007. CVPR'07. IEEE Conference on*, pág. 1–8. IEEE, 2007.
- J. K. Udupa, L. Wei, S. Samarasekera, Y. Miki, M. Van Buchem y R. I. Grossman. Multiple sclerosis lesion quantification using fuzzy-connectedness principles. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 16(5):598–609, 1997.
- M. Unser. Splines: A perfect fit for signal and image processing. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 16(6):22–38, nov. 1999.
- M. Unser, A. Aldroubi y M. Eden. B-spline signal processing: Part I-theory; Part II-efficient design and applications. *IEEE Trans. Signal Processing*, 41(2):821–848, feb. 1993.
- H. C. van Assen, M. G. Danilouchkine, M. S. Dirksen, J. H. Reiber y B. P. Lelieveldt. A 3-D active shape model driven by fuzzy inference: application to cardiac CT and MR. *Information Technology in Biomedicine, IEEE Transactions on*, 12(5):595–605, 2008.
- R. S. Varga. *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Yersey, 1962.
- M. Vasilescu y D. Terzopoulos. Adaptive meshes and shells: Irregular triangulation, discontinuities, and hierarchical subdivision. En *Proc. of Computer Vision and Pattern Recognition Conf.*, pág. 829–832. IEEE Computer Society Press, 1992.
- R. Verdú-Monedero. *Formulación de los contornos activos en el dominio de la frecuencia y análisis de convergencia en segmentación de imagen*. Tesis doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación, Universidad Politécnica de Cartagena, 2005.

- R. Verdú-Monedero, J. Larrey-Ruiz y J. Morales-Sanchez. Frequency implementation of the Euler-Lagrange equations for variational image registration. *Signal Processing Letters, IEEE*, 15:321–324, 2008a.
- R. Verdú-Monedero, J. Morales-Sánchez y L. Weruaga. Convergence analysis of active contours. *Image and Vision Computing*, 26(8):1118 – 1128, 2008b.
- R. Verdú, J. Morales, R. Berenguer y L. Weruaga. Active contours for heart motion-compensated reconstruction in computed tomography. *Proc. of IEEE Int. Conf. on Digital Signal Processing*, jul. 2002.
- R. Verdú, R. Berenguer, J. Morales, G. Vázquez, T. F. Otero y L. Weruaga. 3D mechanical characterization of artificial muscles with stereoscopic computer vision and active contours. *Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing*, sept. 2003.
- R. Verdú, J. Morales, R. González y L. Weruaga. Convergence analysis of active contours in image segmentation. *Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing*, pág. 2749–2752, 2004.
- F. Volonté, F. Pugin, P. Bucher, M. Sugimoto, O. Ratib y P. Morel. Augmented reality and image overlay navigation with osirix in laparoscopic and robotic surgery: not only a matter of fashion. *Journal of hepato-biliary-pancreatic sciences*, 18(4):506–509, 2011.
- P. Wang, A. Becker, I. Jones, A. Glover, S. Benford, C. Greenhalgh y M. Vloeberghs. Virtual reality simulation of surgery with haptic feedback based on the boundary element method. *Computers & structures*, 85(7):331–339, 2007.
- L. Weruaga, J. Morales, L. Núñez y R. Verdú. Estimating volumetric motion in human thorax with parametric matching constraints. *IEEE Trans. Medical Imaging*, 22(6):766–772, jun. 2003.
- L. Weruaga, J. Morales y R. Verdú. Active training on the CMAC nonlinear adaptive system. *XII European Signal Processing Conf.*, pág. 589–592, sept. 2004a.
- L. Weruaga, R. Verdú y J. Morales. Frequency domain formulation of active parametric deformable models. *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence*, 26(12):1568–1578, 2004b.
- J. Z. Wu y W. Herzog. Simulating the swelling and deformation behaviour in soft tissues using a convective thermal analogy. *BioMedical Engineering OnLine*, 1(1):8, 2002.
- C. Xu y J. L. Prince. Generalized gradient vector flow external forces for active contours. *Signal Processing*, 71(2):131–139, 1998a.
- C. Xu y J. L. Prince. Snakes, shapes, and gradient vector flow. *IEEE Trans. Image Processing*, 7(3): 359–369, mar. 1998b.
- C. Xu y J. L. Prince. *Gradient Vector Flow Deformable Models*. Handbook of Medical Imaging. Isaac Bankman, Academic Press, sept. 2000.

- R. Yang, M. Mirmehdi y X. Xie. A charged active contour based on electrostatics. En *Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems*. Springer, 2006.
- S. Y. Yeo, X. Xie, I. Sazonov y P. Nithiarasu. Geometrically induced force interaction for three-dimensional deformable models. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 20(5):1373–1387, 2011.
- A. Yezzi, S. Kichenassamy, A. Kumar, P. Olver y A. Tannenbaum. A geometric snake model for segmentation of medical imagery. *IEEE Trans. Medical Imaging*, 16:199–209, 1997.
- D. M. Young. *Iterative Solution of Large Linear Systems*. Academic Press, Orlando, 1971.
- A. Yuille y P. Hallinan. Deformable templates. En A. Blake y A. Yuille, editores, *Active Vision*, págs. 20–32. MIT Press, 1992.
- Y. Zhang, E. C. Prakash y E. Sung. A new physical model with multilayer architecture for facial expression animation using dynamic adaptive mesh. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 10(3):339–352, 2004.
- Z. Zhang, T. Tan, K. Huang y Y. Wang. Three-dimensional deformable-model-based localization and recognition of road vehicles. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 21(1):1–13, 2012.
- Y. Zhong, B. Shirinzadeh, J. Smith y C. Gu. An electromechanical based deformable model for soft tissue simulation. *Artif. Intelligence Med.*, 47, nov. 2009.
- B. Zhu y L. Gu. A hybrid deformable model for real-time surgical simulation. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 36(5):356 – 365, 2012.
- O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor y J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 2005.