

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA**  
Grupo de Simulación por Redes



**SOBRE LA ADIMENSIONALIZACIÓN DISCRIMINADA  
DE ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES  
DIFERENCIALES ORDINARIAS, NO LINEALES, Y  
SOLUCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE EL MÉTODO DE  
REDES: APLICACIÓN A PROBLEMAS MECÁNICOS**

**TESIS DOCTORAL**

**Manuel Conesa Valverde**  
Cartagena 2016

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA**  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA  
*Grupo de Simulación por Redes*



**SOBRE LA ADIMENSIONALIZACIÓN DISCRIMINADA  
DE ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES  
DIFERENCIALES ORDINARIAS, NO LINEALES, Y  
SOLUCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE EL MÉTODO DE  
REDES: APLICACIÓN A PROBLEMAS MECÁNICOS**

**Manuel Conesa Valverde**

**Directores**

**Dr. Francisco Alhama López y Dr. Juan Francisco Sánchez Pérez**

2015

*Quiero dar el mayor de los agradecimientos a mis directores de tesis Francisco Alhama  
y Juan Francisco Sánchez, por su ayuda y total disposición siempre.  
En especial al primero, por ser una fuente de conocimiento.  
Sin ambos este trabajo no hubiera sido posible.*



*A Alicia, por tu paciencia y comprensión, preferiste sacrificar tu tiempo para que yo  
pudiera llevar a cabo esta tesis.*

*A mis padres.*

<i>Indice analítico</i>	<b>I</b>
<b>Summary</b>	<b>1</b>
Adimensionalization and non-linearity	3
New software development: CODENET_15	5
<b>Capítulo 1</b>	<b>7</b>
<b>Introducción y objetivos</b>	<b>7</b>
1.1. Antecedentes	8
1.2. Objetivos	11
1.3. La organización de esta memoria	12
<b>Capítulo 2</b>	<b>15</b>
<b>La adimensionalización. Fundamentos teóricos</b>	<b>15</b>
2.1. El proceso de la adimensionalización	16
2.1.1. Los grupos adimensionales en los problemas de física y de ingeniería y el análisis dimensional	16
2.1.2. Adimensionalización clásica y adimensionalización discriminada. Antecedentes	19
2.1.3. Adimensionalización, discriminación y normalización. Los grupos adimensionales discriminados y normalizados	21
2.1.4. Ejemplos ilustrativos	25
Carga y descarga de un condensador	25
Descarga de condensador a través de bobina	27
Problemas mecánicos	30
2.1.5. Adimensionalización y no-linealidad	30
Ejemplo 1	31
Ejemplo 2	32
Ejemplo 3	33
Ejemplo 4	33
Ejemplo 5	34
Ejemplo 6	35
2.1.6. Los pasos de una correcta adimensionalización	36
i) Elección de las referencias adecuadas	36
ii) Definición de las variables adimensionales y formación de las ecuaciones de gobierno adimensionales	36
iii) Obtención de los grupos adimensionales	36
iv) Existencia de $m$ $\pi_u$ -grupos, cada uno conteniendo una incógnita diferente, y $n$ $\pi_w$ -grupos sin incógnitas	37
2.2. El método de simulación por redes (MESIR)	37
2.2.1. Monopuertas básicas	40

Monopuertas pasivas	40
Monopuerta resistiva	41
Monopuerta capacitiva	41
Monopuerta inercial o inductiva	42
Monopuertas activas	42
Fuentes constantes	43
Fuentes dependientes del tiempo	43
Fuentes controladas	43
2.2.2. El MESIR como método numérico	45
2.3. Creación de CODENET_15	50
2.3.1. NgSpice	50
2.3.2. Matlab	52
<b>Capítulo 3</b>	<b>55</b>
<b>El programa CODENET_15</b>	<b>55</b>
3.1. Introducción	56
3.2. Interface de introducción de datos	57
3.2.1. Pantalla inicial	57
3.2.2. Pantalla de generación de una ecuación diferencial ordinaria	59
3.2.3. Pantalla de generación de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y acopladas	63
3.3. Creación del modelo	67
3.4. Simulación y resultados	68
3.5. Ejemplos de aplicación	70
<b>Capítulo 4</b>	<b>73</b>
<b>Adimensionalización de ecuaciones diferenciales ordinarias</b>	<b>73</b>
4.1. El problema del paracaidista	74
4.1.1. Deducción de los grupos adimensionales	74
4.1.2. Verificación de los resultados	80
4.2. Bolita engarzada en un alambre parabólico	84
4.2.1. Deducción de los grupos adimensionales	84
4.2.2. Verificación de los resultados	85
4.3. Masa pendiente de un muelle vertical bajo la acción de la gravedad	90
4.3.1. Deducción de los grupos adimensionales	90
4.3.2. Verificación de los resultados	91
Caso i) $q=1$ (comportamiento lineal del muelle)	91
Caso ii) $q=0.5$	92

Caso iii) $q=2$	94
Caso iv) $q=3$ y $5$	95
4.4. Péndulo sobre plataforma acelerada	97
4.4.1. Deducción de los grupos adimensionales	97
4.4.2. Verificación de los resultados	100
4.5. Oscilador de Duffing	104
4.5.1. Deducción de los grupos adimensionales	104
i) Caso de amortiguamiento nulo	105
ii) Caso de amortiguamiento no nulo	113
Caso en que la fuerza elástica $k_1x$ es despreciable frente a los restantes términos de la ecuación	114
Caso en que la fuerza elástica $k_2x^3$ es despreciable frente a los restantes términos de la ecuación	114
4.6. Contribuciones y conclusiones	128

**Capítulo 5**

**131**

**Adimensionalización de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas**

**131**

5.1. Péndulo sobre soporte deslizante	132
5.1.1. Deducción de los grupos adimensionales	132
Comparación con el análisis dimensional	134
5.1.2. Verificación de los resultados	135
5.2. Fuerza proporcional a su masa e inversamente proporcional a la distancia al origen, que repele una partícula con velocidad inicial	139
5.2.1. Deducción de los grupos adimensionales	139
5.2.2. Verificación de los resultados	143
5.3. Péndulo elástico: bolita sujeta a un muelle	149
5.3.1. Deducción de los grupos adimensionales	149
5.3.2. Verificación de los resultados	153
5.4. Dos masas unidas por muelles a una pared	160
5.4.1. Deducción de los grupos adimensionales	160
5.4.2. Verificación de los resultados	165
5.5. Pequeñas oscilaciones en el péndulo doble	175
5.5.1. Deducción de los grupos adimensionales	175
5.5.2. Verificación de los resultados	178
5.6. Interacción entre especies. Un modelo biológico	181
5.6.1. Sistemas de dos especies	182
Ecuaciones de gobierno	182

Discusión previa	182
Magnitudes características y variables adimensionales	183
Adimensionalización y resultados	184
Verificación de los resultados	185
5.6.2. Sistemas de tres especies	188
Ecuaciones de gobierno	188
Discusión previa	188
Magnitudes características y variables adimensionales	189
Adimensionalización y resultados	190
Verificación de los resultados	191
5.6.3. Sistema de dos especies. Problema de Lotka-Volterra generalizado	194
Ecuaciones de gobierno	194
Discusión previa	195
Magnitudes características, adimensionalización y resultados	196
Verificación de los resultados	200
5.7. Contribuciones y conclusiones	206
<b>Chapter 6</b>	<b>209</b>
<b>Contributions and conclusions</b>	<b>209</b>
First (concerning software CODENET_15)	210
Second (concerning the use of the nondimensionalization)	210
Third (regarding to the process of nondimensionalization)	210
Fourth (concerning the references)	211
Fifth (concerning the solutions)	212
A single governing equation	212
Several governing (coupled) equations	212
Sixth (regarding to the characteristic time reference)	212
Seventh (concerning non-linearity)	213
Eighth (regarding to dimensional analysis)	213
<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>215</b>

## SUMMARY



A large variety of mechanical engineering problems with two or more freedom degrees are formulated by coupled, ordinary differential equations and system of them with time as the independent variable. Translational components of machines are formed by springs and dampers, mobile masses jointed by a spring, sets of masses and pulleys and automotive suspension elements, as well as rotational components, such as aircraft engine and propeller, and shaft and gear systems, are typical examples of this kind of problems. These problems also emerge in other fields of engineering such as electrochemical processes and convection heat transfer. The behaviour of ecosystems with several interaction predator-prey species governed by population dynamic models of Lotka-Volterra type are also problems formulated by coupled ordinary differential equations in which we are interested to be modelled. Most of these problems are non-linear or even chaotic, since they contain addends with time harmonic dependencies or with potential functions of the dependent variables, and have, usually, to be solved by numerical analysis.

However, there is a procedure which contributes information about the solutions of this kind of problems within a good approximation. The nondimensionalization of the governing equations of a physical problem is a known method, currently used in engineering for extracting the dimensionless groups that influence the solution of a large variety of complex problems, since any equation or system of equations that contain mathematical formulation of laws determining a physical phenomenon can be represented as a relation between dimensionless quantities. This is applied to all kind of mathematical models, partial derivative or ordinary differential equations. In most of books of heat transfer and fluid dynamics, this procedure is explained as one of the applications of dimensional analysis by which the researcher can reach qualitative information with little mathematical effort. In the scientific literature, the procedure is also applied in complex phenomena ruled by coupled partial differential equations. However, both textbooks and scientific literature, usually give short shrift the technique of nondimensionalization when deals with the study of coupled or not, ordinary differential equations.

To nondimensionalize an equation or boundary condition, we must firstly select characteristic or reference quantities, which may appear or not explicitly in the statement of the problem or be implicit in the evolution of the physical phenomenon involved, that best describe it in order to define the dimensionless dependent and independent variables. The choice of these references, a critical step in the nondimensionalization method, requires a thorough study up to a deep understanding of the physical meaning of the terms involved both in governing equation and boundary conditions. As regards the dependent variables, this

choice must not be arbitrary, but they must have an inherent physical meaning related to their respective dimensional variable or equation. As for independent variables, against the current use, the references may be different for each one of the coupled equations. This is a kind of discrimination, a concept very productive in the search of dimensionless groups. Generally, the references are not explicit in the statement of the problem—particularly, those related to the independent variables—and are just the unknowns looked for in the nondimensionalization process.

Another point of interest in this process, not always possible, refers to an interesting requirement that can be demanded to the references. This is that the range of values of the dimensionless variables they define must expand the interval  $[0-1]$ . This, in turn, forces the changes in the variables and their derivatives to be, in first approximation, of an order of magnitude unity—unless the nonlinearities of the problem were very sharp. As we will see, this requirement provides an order of magnitude unity to the dimensionless groups.

Once the dimensionless variables are defined, they are introduced in the governing equations allowing the dimensionless groups be derived following a simple mathematical protocol. The terms of the dimensionless governing equations are formed by two factors: one is a grouping of parameters, constants and physical characteristics of the problem and the other, a function of the dimensionless variables and their changes. Since the last factor is of an order of magnitude unity in all the terms of the equation, the rest of the factors are also of the same order of magnitude—not necessarily unity—, and the ratios between them, just the dimensionless groups in which we are interested, of an order of magnitude unity.

## **Adimensionalization and non-linearity**

As it has been said, the normalization of an ordinary differential equation (ODE) or a coupled system of such equations (CODE) consists of defining their dependent and independent variables in their dimensionless form using certain references that force the values of these variables to be contained within the interval  $[0-1]$ , so that the minimum and maximum values of the new dimensionless variables must be 0 and 1, respectively. When it is not possible to fulfill this requirement, for example, in problems with an asymptotic solution, values nearer to the asymptotic limit may be established without substantially changing the results of the procedure. Normalization is a special case of nondimensionalization, a well-known technique extensively used in many engineering problems—even in systems ruled by coupled partial differential equations—as one of the tools that can lead to the dimensionless groups in terms of which the solution of the problem can be expressed.

However, while references chosen to make dimensionless the variables of a problem are generally arbitrary in the nondimensionalization process, which is why the solution differs from one process to another and does not provide the most precise results, in the normalization these references cannot be arbitrary. This is a kind of discrimination. On the one hand, as already mentioned, their values confine the range of the dimensionless numbers to [0-1] and, on the other hand, they are related to each other from a physical point of view, i.e., the minimum or maximum values of all dimensionless variables correspond to the same physical picture of the problem. Perhaps the search for these references is the step that requires the deepest thought the protocol of normalization, since there is frequently no direct information in the statement of the problem as to the best choice. In this case, the references are said to be “hidden” or not explicit.

It is tempting to ask why normalization, despite the fact that it looks for universal solutions, is not a technique currently applied in the literature. Perhaps the answer is that mathematicians are interested in the complete solution and not just in a part. In addition, ordinary differential equations and, to a lesser extent, systems of coupled differential equations can be solved by analytical, semi analytical or numerical procedures that provide reliable and complete solutions. The only advantage of normalization is that the effort needed to obtain valuable information for a given problem only requires simple mathematical manipulations and a physical understanding of the problem.

The factor of each addend of the dimensionless governing equations formed by the dimensionless variables and their changes or derivatives, when the problem is linear or pseudo linear, may be considered to have an order of magnitude unity and be deleted from the equations. This simplification changes the equations to a sum of coefficients formed by a set of parameters or physical characteristics—including boundary conditions—of the problem. Such coefficients, through the mere fact of being balanced as a sum in the equation, are also of the same order of magnitude. The set of independent and complete ratios of these coefficients, currently named dimensionless numbers, are the groups that rule the solution of the problem as a functional relation between them. Through the proper re-grouping of these numbers, the order of magnitude of the unknowns may be deduced. Dimensionless groups formed by normalization have two inherent properties: i) are of an order of magnitude unity and, ii) have a physical meaning in terms of balance of magnitudes that counteract in the problem.

We will explain the case of nonlinear problems with several examples within the chapter 2 of this report.

## **New software development: CODENET\_15**

In chapter number 3, a full description about the software development is done, which is called CODENET\_15, acronym of Coupled Ordinary Differential Equations by NETWORK method. It is described in detail every single interface use for this software, and finally it is given some examples.

It is developed as free software in order to give the larger cultural dissemination of it, and so it could be used with complete freedom to solve ordinary differential equations and system for them. It is based on resolution of equations using the network method, doing the procedure of forming it in a very simple way, just introducing a few data, after that, the software creates a file text, which will be read as a code SPICE, and later plotted by MATLAB. These two last are powerful and well done tools in so far solving by simulation and plotting is concerned.

Every example of mechanical problems that has been checked in this report was, firstly, nondimensionalized so that it is possible to reach a good approximation of the solution. Then, these solutions have been checked by a comparative study with those that are given by the simulation procedure with the software CODENET\_15, making the comparison for as many cases as we have thought necessary.



# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS**



## **1.1. Antecedentes**

Los primeros pasos para la realización de mi tesis doctoral se encaminaron hacia la búsqueda de los grupos adimensionales en fenómenos de transferencia de masa mediante análisis dimensional discriminado o la adimensionalización discriminada de las ecuaciones de gobierno, debiendo estudiar un conjunto de problemas estándar de convección natural, forzada y mixta, propios de este campo, en diferentes geometrías. Se trataba de transportar los problemas de transferencia de calor, ya resueltos por Alhama y Madrid [2012], al campo de la transferencia de masa. El paso de uno a otro fenómeno (transporte de calor a transporte de masa), en referencia a la búsqueda de estos grupos adimensionales puede parecer directo pero no es así, y ahí residía la principal aportación de esta antigua tesis: la inclusión en la base dimensional de la masa como magnitud contable, diferenciándola de la masa o la densidad como magnitud de inercia asociada a las fuerzas provenientes del cambio de densidad o concentración (lo que implicaba la existencia de aceleraciones). Dos magnitudes discriminadas, de la misma ecuación de dimensiones, en la base dimensional.

El abandono de esta línea inicial se debió principalmente a dos causas. Por un lado, para mis directores (Nicolás Madrid y Francisco Alhama) la caracterización adimensional de modelos matemáticos en problemas complejos se conseguía de manera mucho más formal mediante la adimensionalización discriminada si se conocían las ecuaciones de gobierno. Y si éstas no fueran dadas, los esfuerzos en justificar tanto la base adimensional adecuada como la relación de la lista relevante de variables requerían tal experiencia en la comprensión de los fenómenos físicos involucrados, que parecía más fácil deducir las ecuaciones de gobierno mediante estos razonamientos y proceder al procedimiento seguro de la adimensionalización. En su texto, Madrid y Alhama [2012], demuestran esta afirmación con numerosos ejemplos en los campos de dinámica de fluidos y transferencia de calor. Por otro lado, la publicación de artículos relacionados con la obtención de grupos adimensionales discriminados en transferencia de masa no es fácil; las revistas propias de ingeniería no aceptan nuevos números que corrijan los ya bien establecidos en la literatura, tengan o no ventajas frente a ellos, y para las revistas de contenido físico estas aportaciones se consideran poco relevantes. Ambos inconvenientes, sumados a otros temas personales, produjeron en mí un cierto desánimo y abandoné esta línea de investigación después de haber dedicado un buen número de horas. Fruto de ese esfuerzo se envió una comunicación a un congreso internacional (Conesa y col., [2011a]), que más tarde fue publicado en una revista internacional (Conesa y col., [2011b]), y actualmente existe un artículo en revisión sobre nuevos grupos adimensionales en transferencia de masa en problemas de convección natural sobre una placa

vertical, Conesa y col.: Classical and discriminated dimensionless numbers in free mass convection: a comparison.

Durante este tiempo fue madurando, por parte de mi director Francisco Alhama, la idea de extender los procedimientos de adimensionalización a problemas regidos por ecuaciones diferenciales ordinarias o sistemas acoplados de estas ecuaciones, un campo sobre el que poco o nada se había publicado en revistas científicas. A priori, parecía más fácil que la aplicación a procesos mucho más complejos regidos por sistemas de ecuaciones en derivadas parciales y acopladas. ¿A qué tipo de problemas de ingeniería sería esto aplicable?, ¿qué interés tendrían los grupos emergentes de estos problemas?, ¿qué dificultades surgirían en la aplicación habida cuenta de la existencia de una única variable independiente?, ¿sería posible abordar problemas de interés de un marcado carácter no lineal?...

Esta fue la nueva propuesta de tesis doctoral que, lejos del controvertido análisis dimensional, parecía estar sentada sobre la base firme y experimentada de la adimensionalización discriminada de ecuaciones. La realización de la tesis llevaría aparejado la elaboración de un software de uso libre, tarea en la que el grupo de simulación por redes de la UPCT tiene una amplia experiencia, que permitiera resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, y sistemas de estas ecuaciones, incluyendo fuertes no linealidades. Este software fiable basado en el método de simulación por redes, al que hemos llamado CODENET\_15[2015], se ha utilizado en esta memoria para verificar los resultados obtenidos por la adimensionalización en los diferentes problemas estudiados.

La información que proporciona la adimensionalización no es, con mucho, la solución analítica del problema. Pero, en general, es una información de interés para el investigador, que se obtiene sin esfuerzo computacional ni complicados pasos matemáticos. Sin embargo, la obtención de una solución precisa requiere un buen sentido físico y una comprensión hasta cierto punto profunda de los fenómenos implicados en el problema. Los matemáticos puros miran las ecuaciones pensando en la complejidad del proceso analítico que le permitirá llegar a la solución global y exacta del problema. Los físicos del área aplicada trascienden de este análisis para pensar en el fenómeno (físico) asociado al modelo matemático, en el significado de cada término de balance de las ecuaciones y su influencia en la solución, en la naturaleza de las condiciones de contorno..., y si se puede obtener una parte de la solución o alguna información del problema con poco esfuerzo matemático, buscan el camino.

La experiencia adquirida con la elaboración de esta memoria ha sido para mí muy satisfactoria. En lo referente a la adimensionalización de ecuaciones ordinarias puede decirse

que el trabajo ha sido relativamente fácil aunque las dificultades en su aplicación son casi específicas de cada problema, y siempre exigiendo una buena comprensión del mismo para elegir las referencias que definan las variables adimensionales. Fruto de esa comprensión, el uso de magnitudes ocultas como referencias para definir las variables adimensionales es un paso fundamental en el proceso de adimensionalización, el cual, una vez resuelto, nos proporciona el orden de magnitud de dichas referencias a través de las relaciones entre los grupos adimensionales obtenidos. Por otro lado, la separación del problema en subproblemas, merced a la existencia de soluciones cualitativamente diferentes según la influencia de cada término de la ecuación diferencial, permite elegir referencias distintas (generalmente ocultas) y obtener órdenes de magnitud diferentes para una misma variable según la influencia relativa de uno u otro término. Todo ello puede considerarse fruto del concepto de discriminación.

La adimensionalización de sistemas de ecuaciones acopladas es, naturalmente, más compleja. En general, cada ecuación está asociada a un fenómeno físico digamos principal, pero contiene términos acoplados de los fenómenos principales de las otras ecuaciones. La adimensionalización en este caso produce nuevos grupos en cada ecuación que modulan el valor de la incógnita asociada a dicha ecuación. Obviamente cuando el número de ecuaciones o de términos es grande, la solución se hace poco manejable.

Pero una vez obtenidos los monomios, expresadas las relaciones entre ellos y derivados los órdenes de magnitud de las incógnitas buscadas, se hace preciso verificar que todos estos resultados son correctos. Para ello se han elegido una serie de casos, con valores diferentes de los parámetros del problema en cada caso, pero manteniendo el valor de determinados grupos adimensionales en casos seleccionados. La solución numérica mediante el software CODENET\_15 permite verificar que todos los resultados derivados de la adimensionalización han sido siempre precisos y fiables.

En cuanto a las perspectivas, en modo alguno creemos que el tema de esta memoria está cerrado. Sabemos por experiencia que la investigación siempre puede ir un paso más allá. Durante decenas de años, el proceso de adimensionalización se ha aplicado (en general a modelos definidos por ecuaciones acopladas, en derivadas parciales) en una forma que podríamos llamar clásica, y toda la comunidad científica ha comulgado y comulga con la existencia de números adimensionales (muchos derivados de la experimentación y otros introducidos sin justificación formal) de órdenes de magnitud muy superiores a la unidad. ¿Pueden tener acaso significado físico, en términos de balance, estos números? Naturalmente

no, pero hay textos en los que se les reconoce este significado. Se trata de números “mal aprendidos” que ahora es difícil renovar.

No obstante los procesos formulados por ecuaciones diferenciales ordinarias no suelen ser objeto de controversia en la literatura científica, de hecho puede decirse que ni siquiera existen grupos adimensionales relacionados con este tipo de procesos. Adviértase que los problemas abordados en esta memoria, se refieren a procesos físicos regidos por leyes naturales; en este sentido hemos huido del estudio de ecuaciones matemáticas no lineales (que definen, por ejemplo, multitud de osciladores típicos) objeto de enorme interés en el campo del caos. Es un tema al que dedicaremos esfuerzos en el futuro. Podemos decir sin temor a equivocarnos que el campo está abierto, sobre todo en problemas acoplados, y esperamos poder difundir nuestras humildes aportaciones a toda la comunidad científica mediante artículos derivados de este trabajo.

## **1.2. Objetivos**

Los separamos en función de su aplicación.

I) Para las ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales o no, los objetivos son:

a) Establecer el protocolo formal del proceso de adimensionalización hasta la obtención de los grupos adimensionales finales y el orden de magnitud de la incógnita del problema,

b) Verificar los resultados de la adimensionalización mediante la solución analítica o numérica del problema. Esta verificación incluirá:

i) La invariabilidad de la solución ante modificaciones de los parámetros del problema que no impliquen alteraciones en el valor de los grupos,

ii) La determinación del orden de magnitud de los grupos adimensionales y una inspección sobre su significado físico,

iii) Ídem de la función indeterminada que relaciona el grupo que contiene la incógnita con el resto de grupos, y

iv) Ídem de la propia incógnita.

II) Para las ecuaciones diferenciales acopladas, lineales o no, los objetivos son:

a) Establecer el protocolo formal del proceso de adimensionalización, diferenciando las referencias de cada una de las ecuaciones, hasta la obtención de los grupos adimensionales finales de cada ecuación y de todo el problema, su orden de magnitud y el orden de magnitud de las diferentes incógnitas del problema,

b) Verificar los resultados de la adimensionalización incluyendo:

- i) La invariabilidad de la solución ante valores constantes de los grupos independientes,
- ii) La determinación del orden de magnitud de los grupos adimensionales,
- iii) Ídem de las funciones indeterminadas que relaciona los grupos con incógnitas con el resto de grupos, y
- iv) Ídem de las propias incógnitas.

III) Elaboración de un software, basado en el método de simulación por redes, para la simulación numérica de:

- a) Ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, de cualquier orden y grado,
- b) Sistemas acoplados de estas ecuaciones hasta un número de 8 ecuaciones, y asumiendo cualquier tipo de no linealidad.

Entre las características de este software se incluyen las siguientes:

- a) De uso libre, es decir, utilizando códigos libres,
- b) Con un entorno de comunicación tipo ventanas, intuitivo y amigable para el usuario,
- c) Con un potente entorno gráfico de salida tipo MATLAB.

### **1.3. La organización de esta memoria**

Definidos los objetivos de esta memoria en el apartado anterior, el Capítulo 2 expone las bases del proceso de adimensionalización y las similitudes y diferencias con el análisis dimensional. Se introduce el concepto de discriminación y sus ventajas frente a los resultados clásicos. La existencia de no linealidades, que se ilustra mediante algunos ejemplos, no supone inconvenientes añadidos ni para la obtención de los grupos adimensionales ni para la deducción del orden de magnitud de las incógnitas. En los dos últimos epígrafes de ese capítulo se presentan los fundamentos teóricos del método de simulación por redes y una descripción de los principales códigos usados para la elaboración del programa CODENET\_15.

En el Capítulo 3 se describe el funcionamiento del programa CODENET\_15. La elaboración de los archivos de texto de los modelos sigue reglas muy intuitivas; está organizado en los mismos bloques, con independencia del problema y permite acceder fácilmente a las soluciones merced a una numeración estándar de componentes y nudos del modelo. Se explican las diferentes ventanas de acceso al usuario con todo detalle (entrada de datos, opciones de simulación, acceso a la representación de las soluciones...) y se presentan aplicaciones a ejemplos ilustrativos.

Los Capítulos 4 y 5 constituyen las aplicaciones de la adimensionalización a ecuaciones diferenciales y a sistemas de estas ecuaciones, respectivamente. Más específicamente, en el Capítulo 4 se abordan varios problemas relacionados con claros modelos físicos que son descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias. Cada uno es estudiado de manera generalizada, incluyendo diferentes posibilidades en lo que se refiere a la linealidad del problema, para comprobar hasta qué grado de no linealidad nuestro estudio de adimensionalización es preciso. Esa comprobación se hace de manera extensa con la aplicación desarrollada CODENET\_15.

En el Capítulo 5, todos los ejemplos versan sobre modelos físicos regidos por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con un proceso de cálculo similar al descrito en el Capítulo 4, eso sí con la dificultad añadida de tratarse de problemas que derivan más referencias y grupos adimensionales que antes. En ese capítulo se aborda un ejemplo curioso de un sistema de ecuaciones para un modelo predador-presa (modelo Lotka-Volterra) en el que se aprecia el grado de precisión de la adimensionalización cuando se trata con problemas con muchas referencias importantes que pueden tener, incluso, fuertes no linealidades.

Por último, en el Capítulo 6 se recogen las contribuciones y conclusiones de esta memoria.



## **CAPÍTULO 2**

# **LA ADIMENSIONALIZACIÓN. FUNDAMENTOS TEÓRICOS**



La organización de este capítulo es la siguiente. En la primera parte, epígrafe 2.1, se describe todo lo relacionado con el concepto de adimensionalización de ecuaciones diferenciales: antecedentes, adimensionalización y normalización, descripción del protocolo de aplicación del proceso de adimensionalización, relación con el análisis dimensional, propiedades de los grupos adimensionales, expresión de las incógnitas, no-linealidad y orden de magnitud de los grupos, y otros puntos de menor importancia.

Una síntesis de los aspectos más interesantes del método de simulación por redes, herramienta en la que se basa la técnica numérica de solución de ecuaciones, se describe en el epígrafe 2.2.

Por último, en el epígrafe 2.3, se hace una referencia a los programas de acceso libre de los que se ha hecho uso en esta memoria, tanto en la programación (para elaborar el archivo de texto del modelo en red) como en el cálculo numérico (solución del modelo), para desarrollar el programa CODENET\_15 con el que se han simulado los problemas propuestos.

## **2.1. El proceso de la adimensionalización**

### **2.1.1. Los grupos adimensionales en los problemas de física y de ingeniería y el análisis dimensional**

La búsqueda de grupos adimensionales de cualquier problema de ciencias o ingeniería constituye un objetivo esencial para el investigador ya que simplifica enormemente su trabajo al reducir el número de parámetros independientes de los que depende su solución a los llamados grupos o números (también monomios) adimensionales. Estos monomios están constituidos por agrupaciones de una parte del conjunto total de parámetros, magnitudes físicas y variables que intervienen en el problema. Esta reducción está basada formalmente en el hecho de que la solución de cualquier sistema de ecuaciones de gobierno que se constituye en el modelo matemático de un determinado fenómeno sujeto a leyes físicas, puede ser descrita mediante una relación entre monomios adimensionales, Bridgman [1922], Langhaar [1951] y Palacios [1951].

El primer libro que hace referencia a este postulado fue escrito hace ya un siglo (Buckingham [1914]). Este autor estableció que *“every physical law may be written in terms of some monomials of zero dimensional exponents called the  $\pi$  numbers”* (todas las leyes físicas pueden ser escritas en términos de monomios de exponente dimensional cero llamados números  $\pi$ ). La alusión al número  $\pi$  llevó a Bridgman a dar el nombre de teorema de  $\pi$  al

enunciado anterior. Para ser justos debemos mencionar que, anteriormente, Fourier [1822,1888] ya había hecho referencia a que una ecuación física siempre relaciona un monomio de dimensión nula con una función cuyos argumentos son también grupos de dimensión nula. En términos parecidos, el teorema también fue utilizado con anterioridad a Buckingham por otros autores como Vaschy [1892] y Jeans [1905], aunque fue el mencionado libro de este autor el que tuvo la fortuna (como afirma Palacios [1951]) de atraer la atención de científicos contemporáneos que sometieron el teorema a una reevaluación continua durante años.

En la primera parte del teorema de  $\pi$  se establece que toda ecuación física, que subsiste ante cualquier cambio arbitrario de unidades, puede escribirse en la forma  $F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots) = 0$ , donde  $\pi_i$  ( $i=1,2, \dots$ ), son los grupos adimensionales, independientes unos de otros, que pueden definirse en el problema. En la segunda parte del teorema (objeto de una reevaluación continua por parte de otros autores) se establece que el número de tales monomios,  $i$ , es la diferencia entre el número total de magnitudes presentes,  $n$ , y el número de magnitudes fundamentales de la base dimensional,  $q$ ; esto es,  $i=n-q$ . Sin profundizar en este tema remitimos al texto ya aludido de Palacios a los interesados en la generalización de la segunda parte del teorema.

En cuanto a la primera parte, objeto de atención por parte de matemáticos estudiosos de las funciones homogéneas, como Levi-Civita y Amaldi [1938] y Ehrenfest-Afanassjewa [1916], su complejidad no animó a que los físicos de la época prestaran atención al tema. Una exposición simple y clara de la teoría de funciones homogéneas generalizadas puede encontrarse San Juan [1945], quien la completó con varios teoremas demostrando que los sistemas dimensionales usados en todas las áreas de la Física forman grupos abelianos con una base dimensional finita. El resultado es una elegante exposición de los sistemas de unidades y sus transformaciones, en las que la teoría mantiene su validez no sólo ante una misma base dimensional sino ante bases cambiantes.

En sus comentarios sobre este tema, merece la pena citar a Palacios [1965]: *“Considering its age and recognised utility, which is demonstrated not only in theoretical physics, but also in technical problems such as..., one would hope that dimensional analysis would be already established on a firm basis and that there would be a universal agreement on how it should be used. Far from this being so, physicists are divided on the most essential point: the very concept of dimension”*. (Considerando su antigüedad y reconocida utilidad, demostrada no sólo teóricamente sino en multitud de problemas técnicos tales como..., se

podría pensar que el análisis dimensional tendría que estar bien establecido, sobre una base firme, y que debería existir un acuerdo universal en cómo aplicarlo.

Lejos de esto, los físicos departen, contraponen ideas y por fin se dividen en el punto crucial de esta teoría: el concepto de dimensión. Por ejemplo, Tolman [1914] atribuye un cierto sentido esotérico a las ecuaciones de dimensión de las magnitudes (fórmulas dimensionales) afirmando que “la verdadera esencia de una magnitud desde el punto de vista físico viene representada por su fórmula dimensional”; una afirmación incorrecta a todas luces ya que, por ejemplo, ¿cómo se explica, que el momento de una fuerza, el trabajo o la cantidad de calor tengan la misma ecuación dimensional?, o ¿cómo el ángulo o la relación de aspecto (cociente entre ancho y alto) pueden ser magnitudes de la misma naturaleza (en este caso de dimensión nula) bajo esta afirmación?

Estos argumentos apoyan el rechazo de la teoría del análisis dimensional por parte de algunos científicos de reconocido prestigio como Bejan [1984] quien, hablando de transferencia de calor por convección, argumenta irónicamente la siguiente afirmación: “*the objective of dimensional analysis is to determine the dimension of boundary layer thickness, namely, length*” (el objetivo del análisis dimensional es determinar la dimensión del espesor de la capa límite térmica, esto es, la longitud).

En efecto, las controvertidas discusiones sobre el concepto de dimensión y sus formas de expresarlo mediante fórmulas dimensionales han consumido un ingente esfuerzo que ha mermado la profundización en otros temas tales como una teoría discriminada (general) o al menos la una teoría discriminada vectorial (una discriminación aplicada a magnitudes de este carácter) del análisis dimensional, paulatinamente iniciada y rechazada por un sin número de sucesivos investigadores (Willians [1892], Huntley [1952], Runge [1952], Mills [1995], Palacios [1964], Herranz y Arenas [1989], Martinenko y Khramtsov [2005] y Madrid y Alhama [2005, 2006 y 2008]). Una discusión amplia sobre el tema de la discriminación en el análisis dimensional se muestra en el texto Alhama y Madrid [2012]. Estos autores apoyan y demuestran con numerosos ejemplos que análisis dimensional y adimensionalización son técnicas equivalentes que aplicadas bajo unos protocolos comunes conducen a los mismos grupos adimensionales en cada problema. Pero éste es un tema que va más allá de los objetivos de esta memoria.

En síntesis, podemos afirmar que los resultados del análisis dimensional clásico en relación con la búsqueda de los grupos adimensionales que determinan de manera independiente y completa la solución de un problema, son en general poco precisos en

relación con los resultados que proporciona la adimensionalización de las ecuaciones de gobierno cuando este protocolo sigue las reglas formales que describimos más adelante. Y esto tanto, en modelos formulados mediante ecuaciones en derivadas parciales, como en otros formulados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias o sistemas de estas ecuaciones. Las numerosas aplicaciones propuestas en esta memoria así lo demuestran.

### **2.1.2. Adimensionalización clásica y adimensionalización discriminada. Antecedentes**

La adimensionalización clásica, como el análisis dimensional, es también una técnica antigua. Merece la pena, y lo justificaremos más tarde, transcribir literalmente lo que dice uno de sus pioneros (Ruark [1935]):

*“... It is significant that in this book (he refers to Bridgman [1931]) much space is devoted to common misconceptions. The truth is, dimensional analysis has its limitations and difficulties as well as its advantages. This paper outlines a simple and workable method, which yields information similar to that obtainable by dimensional reasoning. It consists in transforming the equations of the problem, differential or otherwise, so that all the variables are dimensionless. Simple inspection then shows how these dimensionless variables are related. We shall name the method “inspectional analysis”, for this term describes it well. The essential idea of the method is briefly stated in Bridgman’s book, and Campbell [1925] has urged its adoption on several occasions. Our present purpose is the practical one of explaining the method fully, and applying it to a simple problem in which it yields more information than dimensional analysis. Previous writers have not indicated how one can made effective use of the physical information contained in initial conditions and boundary conditions. In some cases, the method presents no advantage over dimensional analysis, but in others, it gives a clear physical insight”.* (Es importante advertir que una parte importante del libro de Bridgman [1922] se dedica a errores comunes. La verdad es que el análisis dimensional tiene sus dificultades y limitaciones, así como sus ventajas. Este artículo desarrolla un método simple y práctico que conduce a información similar a la obtenida por razonamientos dimensionales. Consiste en transformar las ecuaciones del problema, diferenciales o de otro tipo, de forma que todas las variables se conviertan en adimensionales. Una simple inspección entonces muestra cómo se relacionan estas variables adimensionales. Llamaremos a este método “análisis inspeccional”, ya que este término lo describe bien. La idea fundamental del método que se describe brevemente en el libro de Bridgman, y Campbell [1925] ha urgido su adopción en varias ocasiones. Nuestro propósito práctico es explicar el método en detalle, y aplicarlo a

un sencillo problema en el que conduce a una información mayor que la proporcionada por el análisis dimensional. Autores anteriores no han indicado cómo se puede hacer un uso efectivo de la información contenida en las condiciones iniciales y de contorno del problema. En algunos casos el método no presenta ventajas frente al análisis dimensional mientras que en otros revela una mayor penetración en el contenido físico del problema.)

Más tarde continúa:

*“When we write down the differential equations and boundary or initial conditions of our problem, or of some problem of the same type characterized by simpler geometrical and kinematic conditions, then the variables can always be replaced by dimensionless ones. When this has been done, a formal solution of the equations may then be obtained by writing each dependent dimensionless variable as a power series (or some other series capable of representing an arbitrary function) in which the arguments are the independent dimensionless variables. To understand the connection of these variables we do not have to carry through the series solution; we only need to perceive that the dimensionless variables and combinations of dimensional constants which occur in the final integrated form of the equations are exactly those occurring in the original differential equations and the boundary or initial conditions”.*

(Cuando escribimos las ecuaciones diferenciales y condiciones iniciales y de contorno de nuestro problema, o de algún problema del mismo tipo caracterizado por condiciones geométricas y cinemáticas más simples, las variables dimensionales pueden ser reemplazadas por nuevas variables adimensionales. Cuando se hace esto, puede obtenerse una solución formal de las ecuaciones escribiendo cada variable dependiente adimensional como una serie de potencias, o cualquier otra serie capaz de representar una función arbitraria, cuyos argumentos son las variables adimensionales independientes. Para comprender la conexión entre estas variables no tenemos que ejecutar la solución en series, sólo necesitamos advertir que las variables adimensionales y las posibles combinaciones de constantes dimensionales que puedan relacionarse en la forma final integrada de las ecuaciones, son exactamente aquellas que se dan en las ecuaciones diferenciales originales y las condiciones iniciales y de contorno).

Para finalizar, Ruark propone un ejemplo y elige la ecuación de ondas aplicada a una cuerda fija por sus extremos. Al ser una ecuación en derivadas parciales no entra dentro del contexto de esta memoria pero el resultado obtenido por la adimensionalización es que la función arbitraria de la solución de la perturbación instantánea depende de un monomio menos que la función arbitraria procedente del análisis dimensional. Dicho monomio es la

relación entre la amplitud máxima inicial y la longitud de la cuerda, precisamente un monomio no permitido en la adimensionalización discriminada pues en esta diferenciamos cada dirección espacial, cosa que proponemos como variante mejorada de la adimensionalización clásica en esta memoria.

Sin lugar a dudas se trata de las primeras tentativas de explicación del concepto de adimensionalización y su clara relación con el análisis dimensional, lo que justifica su inclusión en esta memoria.

Para algunos autores, de hecho, adimensionalización y análisis dimensional conducen a los mismos resultados (Potter y Wigert [1997]) mientras que para otros (Sonin [1997]) la primera de estas técnicas revela un mayor grado de similitud que la aplicación “ciega” (de menor información) del análisis dimensional y en ese sentido se trata de una técnica más potente.

Como ocurre con el análisis dimensional, la adimensionalización suele aplicarse a problemas complejos gobernados por ecuaciones en derivadas parciales (Bejan [1984], Alhama y col. [2012 y 2014] y Capobianchi y Aziz [2012]) y raramente se encuentran aplicaciones a problemas gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias o sistemas de estas ecuaciones. Como veremos más tarde, la existencia de varias referencias para hacer adimensionales las variables del problema, es una de las razones por las que no se aplica a este tipo de ecuaciones: La elección de referencias distintas, ¿conducen a soluciones diferentes?, ¿cuál es la mejor elección?, ¿qué criterios permiten distinguir la mejor referencia? Por otro lado, dado que, en general, es relativamente fácil obtener soluciones analíticas, semianalíticas o numéricas de estos problemas, el interés por la adimensionalización es reducido.

### **2.1.3. Adimensionalización, discriminación y normalización. Los grupos adimensionales discriminados y normalizados**

El primer paso para realizar la adimensionalización es elegir las magnitudes de referencia que permiten definir las variables adimensionales (una o más variables dependientes, según se trate de problemas acoplados o desacoplados, y una sola variable independiente). Las referencias, obviamente, son magnitudes con la misma dimensión que las correspondientes variables que convierten en adimensionales. En la adimensionalización clásica, éste es el único requisito que se impone, y dado que en general pueden existir diferentes opciones para elegir estas referencias, según se elija una u otra, los grupos adimensionales resultantes se expresan de diferente modo y poco se puede afirmar sobre su

significado físico ni sobre su potencial valor u orden de magnitud. Esto es coherente y se corresponde con los resultados de la adimensionalización clásica, en donde está aceptado que, aún asignándoles un significado físico (sin una justificación formal y, en general, confusamente), estos grupos no pueden proporcionar una medida numérica directa, ni tampoco un orden de magnitud (Gibbings, [2011]); afirmación contradictoria a todas luces, ya que si un grupo adimensional puede interpretarse en términos de balance de magnitudes, éstas deben ser del mismo orden o valor numérico. En caso contrario un término del balance sería despreciable frente al otro y cabría eliminar el sumando asociado en la ecuación diferencial, simplificando así el modelo matemático.

La existencia pues de distintas opciones para elegir las referencias nos lleva a preguntarnos, ¿cuál es la elección más adecuada?, ¿cómo cambian los grupos tanto cualitativa como cuantitativamente (en valor numérico) ante las diferentes opciones de elección? La discriminación (Madrid y Alhama [2005,2006] y Alhama y Madrid [2007 y 2012]), aplicada en su sentido más general del concepto, puede ayudarnos a elegir la mejor referencia, la que conduzca a la solución más precisa de grupos adimensionales. En primer lugar, parece conveniente elegir referencias de modo que el rango de variación del valor numérico de las variables adimensionales (dependientes e independientes) que definen sea el mismo o muy similar. Si este rango cubre el intervalo numérico [0-1] hablaremos de variables adimensionales normalizadas.

La normalización permite asumir que una vez establecida la ecuación o ecuaciones adimensionales, por sustitución de las variables dimensionales por sus correspondientes adimensionales, los factores de sus sumandos (términos de las ecuaciones) formados por las variables adimensionales y sus cambios (o derivadas) son de orden de magnitud unidad en primera aproximación; más adelante, hablaremos de la influencia que pudiera existir en el problema de fuertes no-linealidades en relación con esta afirmación. Simplificadas las ecuaciones por eliminación de estos factores, lo que queda es una suma de términos o coeficientes formados por parámetros físicos y geométricos del problema, suma en la que todos los términos deben ser del mismo orden en tanto que se balancean entre sí en la nueva ecuación. Los cocientes entre estos coeficientes son los grupos adimensionales (discriminados) del problema, grupos con dos propiedades importantes: tienen un orden de magnitud unidad y pueden interpretarse físicamente como cociente de magnitudes que se balancean en la ecuación o ecuaciones de gobierno del problema.

En problemas de solución asintótica temporal o espacial no es posible asociar las variables dependiente e independiente, pues la independiente vale, teóricamente, infinito. En este caso se adopta una fracción (sensible) de la variable dependiente (80, 90 ó 95%, por ejemplo) y el tiempo o espacio para que ésta realice o recorra el cambio porcentual establecido de su valor. El rango de valores de las variables adimensionales no es entonces [0-1] sino un intervalo algo menor, lo que no cambia demasiado la hipótesis de asumir que las variables y sus cambios son de un orden de magnitud cercano a la unidad en las ecuaciones adimensionales.

Las referencias pueden estar explícitamente recogidas en el enunciado del problema o ser magnitudes ocultas, en cuyo caso se convierten en incógnitas cuyo orden de magnitud puede deducirse tras el proceso de adimensionalización. Las referencias ocultas son magnitudes con un significado claro aunque no aparezcan de forma explícita en el enunciado del problema; consecuentemente, su elección ha de realizarse mediante razonamientos físicos, requiriendo para ello una profunda comprensión de los fenómenos involucrados en el problema. Además, las referencias están relacionadas unas con otras. Por ejemplo, si para la variable tiempo se adopta un intervalo temporal dado (duración de un proceso transitorio, o periodo de un determinado movimiento oscilatorio), la referencia para la variable dependiente debe ser el cambio de su valor a lo largo de ese tiempo, es decir la diferencia de dos valores, uno de los cuales puede estar definido mediante su correspondiente condición inicial o de contorno y el otro ser una incógnita.

En problemas regidos por una sola ecuación es posible seleccionar dos valores de referencia para una misma variable independiente como ocurre por ejemplo cuando se combinan procesos oscilatorios con amortiguamiento. En estos problemas es esencial escudriñar profundamente el fenómeno involucrado para obtener la máxima información del proceso de adimensionalización. En ecuaciones acopladas esta situación es más frecuente, pues no es necesario el amortiguamiento para la existencia de dos o más periodos de oscilación diferentes definidos por sus correspondientes referencias temporales. Naturalmente, en estos procesos acoplados, la variable dependiente ha de ser adimensionalizada con distinta referencia para cada ecuación, a pesar de tener la misma ecuación de dimensiones.

En resumen en cuanto a las referencias (algunas de las cuales serán las incógnitas del proceso de adimensionalización), nuestra experiencia nos permite afirmar que su elección es quizás el paso más crítico en el proceso de adimensionalización, máxime en problemas de

cierta complejidad. Una mala elección conduce a resultados poco precisos y nada útiles, una buena elección conduce a resultados bastante precisos que constituyen una ayuda esencial al investigador, simplificando enormemente su tarea.

En cuanto a grupos adimensionales resultantes cabe distinguir entre aquellos formados por características físicas, geométricas u otros parámetros asociados a las condiciones iniciales o de contorno, son grupos que no contienen incógnitas y que llamaremos grupos independientes, y aquellos que contienen una o más incógnitas a los que llamaremos grupos dependientes. El conjunto completo de grupos adimensionales independientes puede establecerse de muchas formas ya que operaciones sencillas (multiplicaciones y/o divisiones) entre estos grupos definen otros nuevos que pueden sustituir a cualquiera de los grupos que ha operado. Para estos grupos independientes se busca siempre la forma más sencilla: la que contiene el menor número de parámetros o la que tiene un significado físico más inmediato. Por otro lado, los grupos dependientes pueden también combinarse hasta organizarlos en un conjunto en el que cada uno de los grupos contiene una sola incógnita. Una vez hecha esta presentación de grupos, cada uno de los grupos dependientes puede expresarse como una función arbitraria cuyos argumentos son los grupos independientes.

Dado que los grupos adimensionales son los cocientes de los coeficientes de la ecuación de gobierno en forma adimensional, una vez simplificados los factores que contienen las variables adimensionales y sus cambios, el número de grupos emergentes (y en particular de grupos independientes) de un problema aumenta con el número de términos de la ecuación o ecuaciones de gobierno, mientras que el número de grupos dependientes coincide generalmente con el número de ecuaciones. Cuando existe mayor número de grupos dependientes que de ecuaciones de gobierno harán falta nuevas relaciones entre las incógnitas para formar un sistema compatible, relaciones que han de buscarse en leyes no recogidas en las ecuaciones de gobierno o por inspección de los fenómenos involucrados en el problema. Con todo, la casuística de cada problema da lugar a soluciones muy variadas.

Si existe un solo grupo dependiente y ninguno independiente, su orden de magnitud unidad es la solución del problema; si existen dos grupos dependientes y ninguno independiente, la asignación de un orden de magnitud unidad a ambos es la solución del problema; ídem con tres o más. Si existe un solo grupo dependiente y uno o más independientes, la solución para el primero es una función arbitraria cuyos argumentos son los grupos independientes; si existen dos grupos dependiente y uno o más independientes, la

solución para los primeros es una función arbitraria cuyos argumentos son los grupos independientes...

Merced a que los grupos adimensionales, tanto dependientes como independientes, son del orden de magnitud unidad, cuando se ha realizado la adimensionalización en forma normalizada, es obvio que la función arbitraria también ha de ser del orden de magnitud unidad. Este es un aspecto sobre el que hacemos hincapié en las aplicaciones. Así, la modulación del orden de magnitud de un monomio dependiente por la función arbitraria de los grupos independientes es relativa, y el valor del proceso de adimensionalización normalizada se revela importante, pues un orden de magnitud unidad para los grupos dependientes es ya una información valiosa con independencia de la existencia o no de grupos independientes en el problema.

Finalmente, el orden de magnitud de las incógnitas se obtiene de la solución de los monomios dependientes.

### 2.1.4. Ejemplos ilustrativos

Baste para ilustrar lo anterior algunos sencillos ejemplos de electricidad.

#### Carga y descarga de un condensador

El primero, la descarga de un condensador a través de una resistencia, Figura 2.1a.

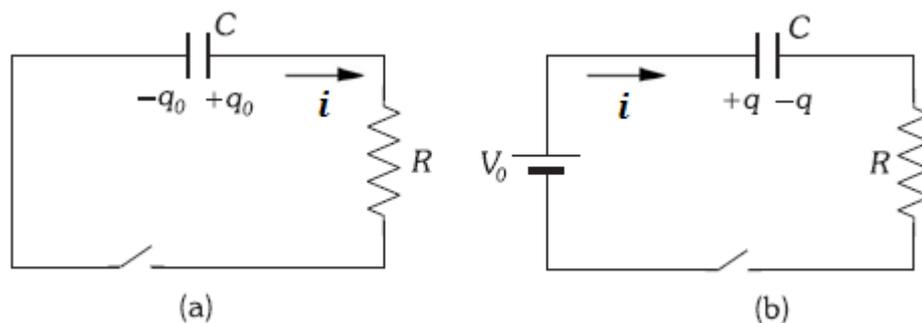


Figura 2.1 a) Descarga de un condensador a través de una resistencia.

#### b) Circuito de carga de un condensador

La ecuación de gobierno es

$$Ri(t) = q(t)/C \tag{2.1}$$

con R la resistencia del circuito, C la capacidad,  $q(t)$  la carga instantánea del condensador e  $i(t)$  la intensidad del circuito. Mediante la definición de corriente eléctrica,  $i(t) = -dq(t)/dt$ , dicha

ecuación, en términos de una sola variable dependiente adopta cualquiera de las formas siguientes

$$R(dq/dt) = -q/C \quad (2.2)$$

$$R(di/dt) = -i/C \quad (2.3)$$

Para la primera adoptamos las referencias  $q_0$ , carga inicial del condensador, y  $\tau_0$ , tiempo de duración de la descarga (llamada constante de tiempo del conjunto). Para la segunda adoptaremos el mismo tiempo  $\tau_0$ , y una intensidad característica que al estar asociada a dicho tiempo será la diferencia de valores entre la intensidad inicial y la final. Al ser nula la última, la referencia es la intensidad en  $t=0$ , que llamaremos  $i_0$ . Con todo, las variables adimensionales quedan definidas en la forma

$$q' = q/q_0, \quad i' = i/i_0 \quad \text{y} \quad t' = t/\tau_0$$

y su rango de valores está confinado y a su vez cubre la totalidad del intervalo [0-1]. La forma adimensional de las anteriores ecuaciones es

$$\{(Rq_0/\tau_0)\}(dq'/dt') = \{-(q_0/C)\}(q') \quad (2.4)$$

$$\{(Ri_0/\tau_0)\}(di'/dt') = \{-(i_0/C)\}(i') \quad (2.5)$$

Merced a que las variables adimensionales y sus cambios toman el valor de la unidad en primera aproximación al medirse a lo largo de la descarga (esto es, durante el tiempo  $\tau_0$ ), los factores  $dq'/dt'$ ,  $q'$ ,  $di'/dt'$  e  $i'$  pueden simplificarse en esas ecuaciones. Los términos restantes son pues del mismo orden de magnitud en cada ecuación (no necesariamente la unidad) y sus cocientes del orden de magnitud unidad:

$$\pi_1 = \{(Rq_0/\tau_0)\}/\{(q_0/C)\} = RC/\tau_0 \sim 1 \quad (2.6)$$

$$\pi_2 = \{(Ri_0/\tau_0)\}/\{(i_0/C)\} = RC/\tau_0 \sim 1 \quad (2.7)$$

Ambas ecuaciones conducen a un mismo número adimensional del que puede obtenerse el orden de magnitud de la incógnita,  $\tau_0 \sim RC$ . Una sola prueba es necesaria para traducir esta ecuación en una igualdad.

El segundo ejemplo es la carga controlada de un condensador inicialmente descargado, Figura 2.1b. La ecuación de gobierno es ahora

$$V_0 = R\{dq(t)/dt\} + q(t)/C \quad (2.8)$$

Las referencias idóneas, a su vez incógnitas del problema, son:  $q_0$ , carga final del condensador, y  $\tau_0$ , tiempo de duración de la carga (también una constante de tiempo del circuito). Estas referencias están relacionadas en tanto que  $q_0$  se da al cabo de  $\tau_0$  s. Sustituyendo las variables adimensionales

$$q' = q/q_0, \quad \gamma \quad t' = t/\tau_0$$

en la ecuación (2.8), se obtiene la forma adimensional de ésta

$$V_0 = \{(Rq_0/\tau_0)\}(dq'/dt') = \{(q_0/C)\}(q') \quad (2.9)$$

Tras simplificar las variables adimensionales y sus cambios, los tres coeficientes (del mismo orden de magnitud) derivados de esta ecuación,

$$V_0, \quad Rq_0/\tau_0, \quad q_0/C$$

dan lugar a dos grupos adimensionales

$$\pi_1 = V_0C/q_0 \sim 1 \quad \pi_2 = RC/\tau_0 \sim 1 \quad (2.10)$$

Dado que cada uno contiene una única incógnita es inmediato deducir el orden de magnitud de ambas

$$q_0 \sim V_0C \quad \gamma \quad \tau_0 \sim RC$$

### Descarga de condensador a través de bobina

Un tercer ejemplo lo constituye la descarga de un condensador a través de una bobina y una resistencia (cuyo valor puede ser cualquiera), Figura 2.2. La adimensionalización de este ejemplo requiere una clara visión física de los fenómenos involucrados en el problema.

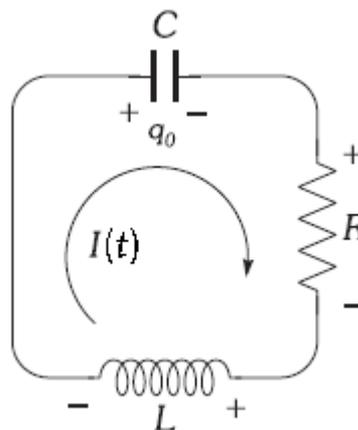


Figura 2.2 Descarga de un condensador sobre una bobina y una resistencia

La ecuación de gobierno es

$$q(t)/C = R\{dq(t)/dt\} + L\{d^2q(t)/dt^2\} \quad (2.11)$$

Abordaremos el estudio considerando, i) que el término asociado a la tensión eléctrica en la resistencia,  $R\{dq(t)/dt\}$ , es de valor despreciable frente al de la tensión en la bobina,  $L\{d^2q(t)/dt^2\}$ , ii) que es de valor mucho mayor, o iii) que es de valor similar o del mismo orden de magnitud. En el primer caso (i), adoptaremos las siguientes referencias relacionadas entre sí:  $q_0$ , carga inicial del condensador, y  $\tau_{o,LC}$ , tiempo que transcurre hasta que el condensador se descarga (no importa de momento lo que ocurre tras el instante  $\tau_{o,LC}$ ). Nuestro interés se ciñe al estudio del fenómeno eléctrico en el intervalo temporal  $[0, \tau_{o,LC}]$ . Las variables adimensionales son, pues,  $q' = q/q_0$  y  $t' = t/\tau_{o,LC}$ , y la ecuación de gobierno, en forma adimensional, se reduce a

$$(q_0/C)(q') = \{(Lq_0/\tau_{o,LC}^2)\}(d^2q'/dt'^2) \quad (2.12)$$

Los coeficientes  $q_0/C_0$  y  $Lq_0/\tau_{o,LC}^2$  proporcionan un único grupo adimensional de orden de magnitud unidad,

$$\pi_1 = \tau_{o,LC}^2/(LC) \sim 1 \quad (2.13)$$

del que se puede deducir el orden de magnitud de la incógnita

$$\tau_{o,LC} \sim (LC)^{1/2}$$

De nuevo, una sola prueba bastaría para transformar esta ecuación en una igualdad. Transcurrido este tiempo, a partir de la teoría eléctrica, sabemos que la inducción en la bobina impide que la intensidad eléctrica (cuyo valor es máximo en  $t=\tau_{o,LC}$  y está limitado por la pequeña resistencia  $R$ ) desaparezca de golpe, haciéndolo paulatinamente y cargando el condensador con polaridad inversa a la inicial a un nuevo valor máximo (menor que el inicial por la pérdida energética del circuito en la resistencia) al cabo de  $2\tau_{o,LC}$ . La ecuación adimensional de este proceso es parecida a la (2.12) y por tanto el tiempo transcurrido desde que se descarga el condensador hasta su nueva carga máxima (con polaridad inversa) es también  $\tau_{o,LC}$ . El proceso se repite de forma que la carga y descarga se suceden cíclicamente con un periodo  $4\tau_{o,LC}$ , pero con una tensión en el condensador que disminuye lenta pero progresivamente al inicio de cada ciclo merced al consumo energético de la resistencia, hasta que toda la energía inicial se disipa al cabo de un tiempo mucho mayor que  $\tau_{o,LC}$  y que depende de  $R$  y  $C$  como veremos más tarde.

En el segundo caso (ii), las referencias (también relacionadas entre sí) son:  $q_0$ , carga inicial del condensador, y  $\tau_{o,RC}$ , tiempo que transcurre hasta que el condensador se descarga completamente (transcurrido este tiempo desaparece la corriente del circuito). Este caso ya se ha visto en el primer ejemplo llegando a la solución de un único monomio dado por la ecuación (2.6)

$$\pi_1 = RC/\tau_{o,RC} \sim 1$$

Los tiempos de  $\tau_{o,LC}$  y  $\tau_{o,RC}$  son independientes en coherencia con su relación con dos fenómenos eléctricos diferentes. Por fin, tercer caso (iii), asumiremos que los tres términos de la ecuación de gobierno (2.11) tienen una influencia similar en el proceso (son del mismo orden de magnitud). Ahora sabemos que aun siendo una sola la ecuación de gobierno, existen dos tiempos característicos en el problema, información ésta que debe ser introducida en el proceso de adimensionalización para obtener los resultados más precisos.

Adviértase que sólo una reflexión sobre los fenómenos físicos involucrados en el proceso permite establecer la hipótesis de dos tiempos característicos; lo normal hubiera sido considerar un único tiempo ( $\tau_0$ ), sin pensar ni en su significado ni en su necesaria relación con la otra referencia  $q_0$ . Los resultados, aunque no incorrectos, hubieran sido tan poco precisos como útiles. La adimensionalización de (2.11) bajo el supuesto de este tercer caso conduce a dos monomios

$$\pi_1 = \tau_{o,LC}^2/(LC) \sim 1 \quad \gamma \quad \pi_2 = RC/\tau_{o,RC} \sim 1$$

El primero informa del periodo de oscilación ( $4\tau_{o,LC}$ ) y el segundo de la duración del proceso transitorio hasta la disipación total de la energía inicial.

La siguiente relación entre parámetros del circuito, deducida de lo anterior, clasifica los casos anteriores:

$$R \gg (LC)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \text{Amortiguamiento lento (muchos ciclos)}$$

$$R \approx (LC)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \text{Amortiguamiento crítico (aproximadamente un ciclo)}$$

$$R \ll (LC)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \text{Amortiguamiento rápido (menos de un ciclo)}$$

A lo largo de estos ejemplos, todos ellos de carácter asintótico, es imposible asociar unívocamente las referencias para las variables carga y tiempo pues para la descarga total se precisa teóricamente un tiempo infinito. Así, las referencias han de particularizarse para una

fracción, cercana a la unidad, de  $q_0$  (por ejemplo del 90%);  $\tau_0$  sería entonces el tiempo transcurrido para que la carga o descarga alcanzara ese valor.

### Problemas mecánicos

Para terminar, haremos notar que ecuaciones del tipo anterior, que podemos escribir en la forma generalizada siguiente,

$$d^2y/dt^2 + a_1(dy/dt) + a_2y + a_3 = 0 \quad (2.14)$$

responden a un sinfín de problemas de tipo mecánico. Ejemplos: i) masa suspendida de un resorte sometida a un amortiguamiento viscoso proporcional a la velocidad, Figura 2.3a, y sus variantes, ii) masa en el extremo de una barra que oscila con amortiguamiento sobre el otro extremo fijo, Figura 2.3b, y iii) disposición similar con la masa y el muelle en distinta posición, Figura 2.3c.

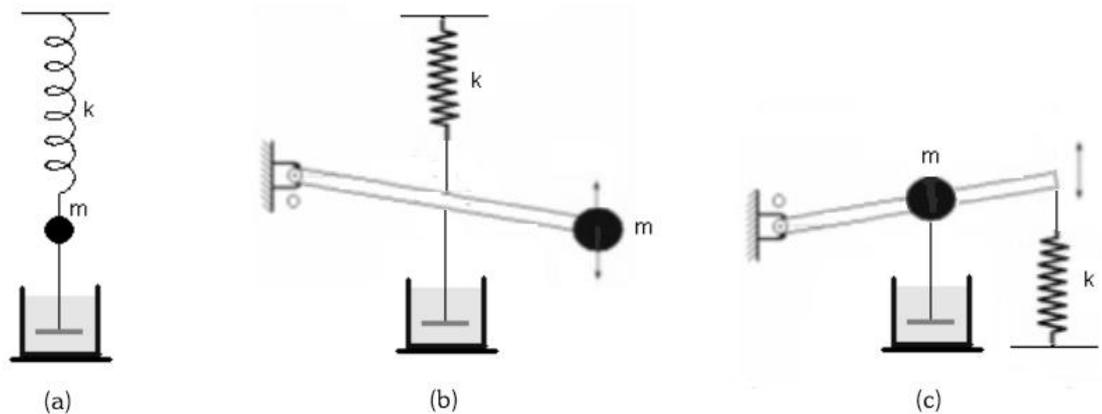


Figura 2.3 Configuraciones de sistemas mecánicos gobernados por ecuaciones del tipo (2.14)

### 2.1.5. Adimensionalización y no-linealidad

El grado de no-linealidad de un problema se manifiesta (debe estar recogido) en los grupos derivados del proceso de adimensionalización (normalización) ya que la hipótesis de asumir orden de magnitud unidad para los factores que contienen las variables adimensionales y sus cambios, en la ecuación o ecuaciones de gobierno adimensionales, es tanto menos precisa cuanto mayor es el grado de no-linealidad. Esta desviación incide en el valor de los coeficientes de la ecuación (que se balancean junto con estos factores en la misma) y, por ende, en el orden de magnitud de sus cocientes, los grupos adimensionales buscados.

Ilustraremos esta influencia con ejemplos seleccionados (alguno de ellos lineal en el sentido estricto) en los que se estudia la dependencia de la incógnita con el grado de no-linealidad.

### Ejemplo 1

Problema regido por la ecuación de gobierno y condiciones de contorno siguientes:

$$\frac{dy}{dx} = x^q, \quad x \in [0, a] \quad (2.15)$$

donde  $q$  es un número real que determina el intervalo de definición de la incógnita. De este enunciado, es inmediato adoptar como valor de referencia para la variable  $x$  el parámetro  $a$  (diferencia entre los valores  $x$  del intervalo de definición de la ecuación).

En cuanto a la variable  $y$ , adoptaremos como referencia un valor desconocido  $b$  (una magnitud oculta), diferencia entre los valores extremos de  $y$ , correspondientes a los valores extremos de la variable independiente,  $0$  y  $a$ . Así,  $b$  se convierte en una incógnita del proceso de adimensionalización. Las variables adimensionales son, pues,

$$x' = x/a, \quad y' = y/b$$

y la ecuación de gobierno en términos de estas variables

$$\frac{b}{a} \frac{dy'}{dx'} = a^q x'^q$$

Como  $x'$  e  $y'$  se extienden al intervalo  $[0-1]$ , asumiremos inicialmente que los factores entre paréntesis son del orden de magnitud unidad cuando las variables adimensionales y sus cambios se extienden a todo su intervalo de definición (una asunción lejos de ser cierta para valores de  $q$  altos). El grupo adimensional resultante,  $\pi = b/a^{q+1}$ , bajo el supuesto anterior, permite determinar el orden de magnitud de  $b$ ,

$$b \sim (a^{q+1})$$

La solución exacta es

$$b = (a^{q+1})/(q+1)$$

La Tabla 2.1 compara los resultados de la adimensionalización con los valores analíticos para diferentes valores de  $q$  y  $a$ . Advierta que  $a^{q+1}$  y  $a^{q+1}/(q+1)$  incrementan sus diferencias al crecer  $q$ . El orden de magnitud de las soluciones analítica y de adimensionalización empieza a diferir para valores relativamente grandes de  $q$  ( $q \geq 10$ ), que implican un elevado grado de no-linealidad.

q		0.1	0.5	1	5	10
a <sup>q+1</sup> Normalización	a=0.1	0.07943	0.0316	0.01	1E-5	1E-11
	a=0.5	0.4665	0.3535	0.25	1.56E-2	4.883E-4
	a=1	1	1	1	1	1
a <sup>q+1</sup> /(q+1) Solución exacta	a=0.1	0.0722	0.02108	0.005	0.166E-5	0.09E-11
	a=0.5	0.4241	0.2357	0.125	0.260E-2	0.443E-4
	a=1	0.9091	0.8333	0.666	0.166	0.091

**Tabla 2.1 Comparación entre los resultados de la adimensionalización y los resultados analíticos para la incógnita b**

**Ejemplo 2**

Se define por la ecuación de gobierno y condiciones de contorno

$$\frac{dy}{dx} = e^x, \quad x \in [0, x_a], \quad x \in [y_{(x=0)}=y_o, y_{(x=x_a)}=y_a] \tag{2.16}$$

Usando las referencias x<sub>a</sub> e y<sub>a</sub>-y<sub>o</sub>, las variables adimensionales se definen en la forma

$$x' = x/x_a, \quad y' = (y - y_o)/(y_a - y_o)$$

Introduciendo estas variables en la ecuación d(y-y<sub>o</sub>)/dx=e<sup>x</sup>, equivalente a la ecuación (2.16), y teniendo en cuenta que d(y'-y<sub>o</sub>)=dy', la forma adimensional de esta ecuación es

$$\frac{y_a - y_o}{x_a} \frac{dy'}{dx'} = e^{x_a x'}$$

Asumiendo de nuevo que las variables adimensionales y sus cambios son del orden de magnitud unidad, la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{y_a - y_o}{x_a} \sim e^{x_a}, \quad \text{o} \quad \Delta y = y_a - y_o \sim x_a e^{x_a}$$

La Tabla 2.2 compara la solución analítica de Δy con los valores de adimensionalización para diferentes valores de x<sub>a</sub>. Los órdenes de magnitud coinciden hasta valores de x<sub>a</sub> relativamente altos.

x <sub>a</sub>	1	2	3	5	10
Δy (adimensionalización) ~ x <sub>a</sub> (e <sup>x<sub>a</sub></sup> )	e	2e <sup>2</sup>	3e <sup>3</sup>	5e <sup>5</sup>	10e <sup>10</sup>
Δy (solución analítica) = e <sup>x<sub>a</sub></sup> - 1	e-1	e <sup>2</sup> -1	e <sup>3</sup> -1	e <sup>5</sup> -1	e <sup>10</sup> -1

**Tabla 2.2 Comparación entre los valores exactos y los procedentes de la adimensionalización de Δy, para diferentes valores de x<sub>a</sub>**

### Ejemplo 3

La ecuación de gobierno es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1-x} \tag{2.17}$$

Con  $y_{(x=0)}=0$ , por simplicidad. Como se trata de una curva asintótica, estudiaremos la adimensionalización para el rango de valores  $x \in [0, x_0]$ , con  $x_0 < 1$ . Usando las referencias  $x_0$  e  $y_0 = y(x_0)$  para  $x$  e  $y$ , respectivamente, e introduciendo las variables adimensionales

$$x' = x/x_0, \quad y' = y/y_0$$

en la ecuación (2.17), la ecuación normalizada resultante es

$$\frac{y_0}{x_0} \frac{dy'}{dx'} = -\frac{1}{1-x_0x'}$$

Una vez más, bajo la hipótesis de que las variables adimensionales y sus cambios sean del orden de magnitud unidad, la anterior ecuación se simplifica proporcionando el orden de magnitud de la incógnita  $y_0$

$$y_0 \sim -\frac{x_0}{1-x_0}$$

La Tabla 2.3 compara los valores de  $y_0$  provenientes de la adimensionalización con los resultados analíticos; ambos se ajustan en orden de magnitud para el 90% del intervalo completo de valores de  $x$ , [0-1].

$x_0$	0.5	0.75	0.9	0.95	0.99
$y_0$ (adimensionalización) $\sim -x_0/(1-x_0)$	-1	-3	-9	-19	-99
$y_0$ (teórica) = $L \cdot 1 - x_0$	-0,693	-1.386	-2.30	-2.99	-4.60

Tabla 2.3 Comparación de resultados de  $y_0$  para diferentes valores de  $x_0$

### Ejemplo 4

La ecuación no-lineal y condiciones de contorno son

$$dy/dx = e^{-y}, \text{ con } x_{(y=0)} = 1 \tag{2.18}$$

Comparar la solución analítica y la dada por la adimensionalización para diferentes valores del intervalo de variación de la variable y definido por la constante  $a$ , [0,a].

La solución teórica es  $x=e^y$ . Las referencias  $x_0=x_{(y=a)}-x_{(y=0)}=x_{(y=a)}-1$  e  $y_0=a$  (donde  $x_0$  es la incógnita) definen las variables adimensionales  $y'=y/y_0$ ,  $x'=x/x_0$ . Sustituyendo éstas en (2.18) se obtiene

$$(y_0/x_0)(dy'/dx') = (e^{-y_0})^{y'}$$

ecuación que proporciona el orden de magnitud de  $x_0$

$$x_0 \sim y_0 e^{y_0}$$

La Tabla 2.4 compara los resultados de la adimensionalización con los analíticos para diferentes valores del intervalo de variación de la variable  $y$ . Al aumentar éste los órdenes de magnitud se alejan.

$a=y_0$	$x_0$ (teórico)	$x_{(y=a)}=x_0-1$	$x_0$ (adimensionalización)
1	e	e-1	e
3	$e^3$	$e^3-1$	$3e^3$
5	$e^5$	$e^5-1$	$5e^5$
10	$e^{10}$	$e^{10}-1$	$10e^{10}$

**Tabla 2.4 Comparación de resultados de  $x_0$  para diferentes valores de  $y_0$**

**Ejemplo 5**

La ecuación no-lineal y condiciones de contorno son

$$dy/dx = y^{-q}, \text{ con } x_{(y=0)} = 0 \tag{2.19}$$

Comparar la solución analítica y la dada por la adimensionalización para el intervalo  $x \in [0-a]$  y diferentes valores del parámetro  $q$ .

La solución teórica es  $x=(q+1)^{-1}y^{q+1}$ . Se adoptan las referencias asociadas con los intervalos de variación de las variables,  $x_0=a$  e  $y_0=y_{(x=a)}$ . Sustituyendo las variables adimensionales  $y'=y/y_0$  y  $x'=x/x_0$  en (2.19), se obtienen la ecuación adimensional

$$(y_0/x_0)(dy'/dx') = y_0^{-q}(y')^q$$

que, simplificada, proporciona el orden de magnitud de la incógnita

$$y_0 \sim a^{1/(1+q)}$$

La Tabla 2.5 muestra los resultados. Para esta función potencial los órdenes de magnitud de las soluciones teórica y adimensional son idénticos incluso para valores elevados de  $q$  y  $a$ .

a	q=0.5		q=1		q=2		q=5	
	Y <sub>o,teó</sub>	Y <sub>o,adim</sub>	Y <sub>o,teó</sub>	Y <sub>o,adim</sub>	Y <sub>o,teó</sub>	Y <sub>o,adim</sub>	Y <sub>o,teó</sub>	Y <sub>o,adim</sub>
1	1.5 <sup>1/1.5</sup>	1 <sup>1/1.5</sup>	2 <sup>1/2</sup>	1 <sup>1/2</sup>	3 <sup>1/3</sup>	1 <sup>1/3</sup>	6 <sup>1/6</sup>	1 <sup>1/6</sup>
2	3 <sup>1/1.5</sup>	2 <sup>1/1.5</sup>	4 <sup>1/2</sup>	2 <sup>1/2</sup>	6 <sup>1/3</sup>	2 <sup>1/3</sup>	12 <sup>1/6</sup>	2 <sup>1/6</sup>
5	7.5 <sup>1/1.5</sup>	5 <sup>1/1.5</sup>	10 <sup>1/2</sup>	5 <sup>1/2</sup>	15 <sup>1/3</sup>	5 <sup>1/3</sup>	30 <sup>1/6</sup>	5 <sup>1/6</sup>
10	15 <sup>1/1.5</sup>	10 <sup>1/1.5</sup>	20 <sup>1/2</sup>	10 <sup>1/2</sup>	30 <sup>1/3</sup>	10 <sup>1/3</sup>	60 <sup>1/6</sup>	10 <sup>1/6</sup>

Tabla 2.5 Comparación de resultados de y<sub>o</sub> para diferentes valores de a y q

**Ejemplo 6**

La ecuación no-lineal y condiciones de contorno son

$$dy/dx = e^{-qy}, \text{ con } x_{(y=0)} = 1/q \tag{2.20}$$

Comparar la solución analítica y la dada por la adimensionalización para el intervalo y∈[0-1] y diferentes valores del parámetro q.

La solución teórica es x=(1/q)e<sup>qy</sup>. Las referencias x<sub>o</sub>=x<sub>(y=1)</sub>-x<sub>(y=0)</sub>=x<sub>(y=1)</sub>-(1/q) e y<sub>o</sub>=1 definen las variables adimensionales y'=y/y<sub>o</sub> y x'=x/x<sub>o</sub>. Sustituyéndolas en (2.20) se obtiene la ecuación

$$(y_o/x_o)(dy'/dx') = (e^{-qy_o y'})^{y'}$$

que, simplificada, proporciona el orden de magnitud de la incógnita:

$$x_o \sim y_o e^{qy_o}$$

La Tabla 2.6 muestra los resultados. Las soluciones teórica y de la adimensionalización son del mismo orden de magnitud para valores relativamente elevados del parámetro q, directamente relacionado con la no-linealidad.

q	x <sub>o</sub> (teórico)	x <sub>(y=1)</sub> =x <sub>o</sub> -1	x <sub>o</sub> (adimensionalización)
1	e	e-1	e
3	(1/3)e <sup>3</sup>	(1/3)e <sup>3</sup> -1	e <sup>3</sup>
5	e <sup>5</sup>	(1/5)e <sup>5</sup> -1	e <sup>5</sup>
10	e <sup>10</sup>	(1/10)e <sup>10</sup> -1	e <sup>10</sup>

Tabla 2.6 Comparación de resultados de x<sub>o</sub> para diferentes valores de q

La conclusión es que a menos que las no-linealidades del problema sean acusadas, el orden de magnitud de las incógnitas procedentes de la adimensionalización (normalización) es fiable.

### **2.1.6. Los pasos de una correcta adimensionalización**

Podemos resumirlos en:

#### **i) Elección de las referencias adecuadas**

Éstas pueden aparecer en todo o en parte, explícitamente, en el enunciado del problema o ser magnitudes ocultas con un claro significado físico. En este último caso, son incógnitas cuyo orden de magnitud se determina tras la adimensionalización. Las referencias están relacionadas entre sí en tanto que se refieren a valores de las variables asociados a un mismo intervalo físico (temporal o espacial, de la variable independiente). Ello implica que el rango de variación de las variables adimensionales que definen las referencias está confinado en el intervalo de valores [0-1].

En problemas con solución asintótica, para la variable dependiente se toman referencias cercanas al límite (pero no el propio límite), permitiendo definir una referencia finita y bien discriminada para la variable independiente. Ello no modifica severamente que el rango de valores de las variables adimensionales sea [0-1]. Un requisito necesario para cumplir la hipótesis del siguiente paso.

#### **ii) Definición de las variables adimensionales y formación de las ecuaciones de gobierno adimensionales**

Las primeras son los cocientes entre las variables dimensionales y sus respectivas referencias. La introducción de estas variables en las ecuaciones de gobierno dimensionales convierte las últimas en ecuaciones adimensionales. Cada término o sumando de estas últimas está formado por el producto de dos factores, uno constituido por las variables adimensionales y sus cambios (derivadas) y otro constituido por un agrupamiento de parámetros físicos del problema, condiciones de contorno y/o referencias. El primer factor puede asumirse de orden de magnitud unidad en primera aproximación, hipótesis bajo la cual los otros factores (a los que llamamos coeficientes) deben ser del mismo orden de magnitud.

#### **iii) Obtención de los grupos adimensionales**

Éstos son los cocientes entre los coeficientes mencionados en ii). El número de grupos adimensionales de cada ecuación es, como mucho, el número de coeficientes de la ecuación menos uno. Algunos de los números pueden aparecer en más de una ecuación en sistemas de ecuaciones acopladas. Los grupos, finalmente pueden re-organizarse entre ellos (mediante

operaciones matemáticas sencillas, multiplicaciones y divisiones) para expresarse de la manera más conveniente. Por ejemplo, haciendo que cada incógnita aparezca en un solo grupo.

**iv) Existencia de  $m$   $\pi_u$ -grupos, cada uno conteniendo una incógnita diferente, y  $n$   $\pi_w$ -grupos sin incógnitas**

La solución para cada incógnita se expresa de forma explícita, mediante relaciones entre cada grupo con incógnita y los grupos que no contienen incógnitas. Es decir, en la forma

$$\pi_{u,i} (1 \leq i \leq m) = \Psi_i (\pi_{w,1}, \pi_{w,2}, \dots, \pi_{w,n}) \quad (2.21)$$

donde  $\Psi_i$ , es una función arbitraria de los  $n$   $\pi_w$ -grupos. Si todos los grupos son de orden de magnitud unidad, es evidente que la función arbitraria también lo es.

## 2.2. El método de simulación por redes (MESIR)

En el texto de González-Fernández y col. [2001] puede encontrarse una descripción detallada de los fundamentos del método y las primeras aplicaciones en distintos campos de la ciencia e ingeniería: procesos electroquímicos, transporte a través de membranas, transmisión de calor, etc. Con posterioridad a esta fecha, el Método de Simulación por Redes (MESIR), en inglés Network Simulation Method (NSM), se ha aplicado a nuevos problemas desarrollando modelos no recogidos en un texto específico nuevo, por lo que el interesado debe remitirse a las publicaciones científicas específicas o a las tesis doctorales leídas en el grupo de investigación "Simulación por Redes" de la UPCT, o en los grupos de investigación que trabajan con este método en las Universidades de Granada y Jaén, Alarcón y col. [2001], Zueco y col. [2003], Castro y col. [2005], Soto y col. [2007], del Cerro y col. [2009] y Luna y col. [2010]. En este sentido debemos mencionar las aplicaciones en los campos de flujo de fluidos con transporte (de masa o de calor), problema inverso en transmisión de calor, flujos magneto-hidrodinámicos, vibraciones mecánicas, tribología, fricción, transporte en membranas, desarrollo de programas específicos de cálculo numérico, etc.

El método de redes ya había sido aplicado con éxito en varios campos de la ingeniería, tales como transferencia de calor (Alhama y col. [1997], González-Fernández y col. [1998a y 1998b], Alarcón y col. [2002], del Cerro y col. [2008] y Luna Abad y col. [2010], reacciones electroquímicas (Horno y col. [1993] y Moya [2011]), transporte a través de membranas (Horno y col. 1990), problemas inversos (Zueco y col. [2005 y 2006], Zueco y Alhama [2007] y Alhama y Zueco [2007]), transporte iónico (Horno, [1995]), magneto-hidrodinámica (Anwar y col. [2009]), problemas acoplados de flujo y transporte (Soto y col. [2007a y 2007b] y Alhama y

col. [2011a, 2011b y 2012] y otros (Alcaraz y col. [2005], Moreno y col. [2007], Benavent-Climent y col. [2010], y Marín y col. [2012]); todos estos trabajos describen procesos de transporte no lineales. Además, recientemente, ha sido aplicado a mecánica de sólidos deformables (Morales y col. [2012a y 2012b]).

Por otro lado, se han registrado diferentes programas que hacen uso del MESIR como herramienta de cálculo numérico: PRODASIM [2005] (Alhama y Gómez Lopera [2006]) para el diseño de aletas simples, PROCCA-O9 [2005] (Alhama y Del Cerro, [2010]) para diseño y optimización de problemas térmicos y FATSIM-A [2010] (Alhama y col. [2010a]) y FAHET [2010] (Alhama y col. [2010b]) para simulación de problemas de flujo de fluidos con transporte de soluto o calor, respectivamente.

No obstante, consideramos obligado presentar una síntesis de los fundamentos del método, particularmente los pasos para el diseño de modelos, y del programa de cálculo numérico con el que se realizan las simulaciones, PSpice [1994]. En su concepción, el MESIR es una técnica para el estudio y simulación de muchos procesos físicos que pueden definirse mediante un modelo matemático o conjunto completo de ecuaciones de un problema o proceso físico. Partiendo de este modelo, el procedimiento consiste en dos etapas bien diferenciadas: en primer lugar, elaborar un modelo en red o circuito eléctrico equivalente al proceso, y en segundo lugar, simular dicho modelo mediante un programa adecuado de resolución de circuitos eléctricos.

La equivalencia formal entre el modelo en red y el proceso físico reside en que ambos se rigen por las mismas ecuaciones diferenciales en diferencias finitas en el espacio, referidas tanto al volumen elemental o celda como a las condiciones de contorno. El tiempo permanece como variable continua en el diseño del modelo.

En problemas regidos por ecuaciones en derivadas parciales, la técnica para elaborar el modelo en red consiste en reticular el espacio en elementos de volumen o celdas elementales. Al aplicar las ecuaciones diferenciales a estas celdas se obtienen un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas que constituyen el punto de partida para la obtención del modelo en red correspondiente a las mismas. Una vez establecida la correspondencia entre variables dependientes del problema y variables eléctricas (concentraciones y voltajes), los resultados de la simulación se pueden interpretar en términos del proceso que se modela. La asociación de celdas, de acuerdo con la geometría del problema, configura el modelo en red correspondiente a todo el medio finito, más preciso cuanto mayor sea el número de éstas. Las

condiciones de contorno e iniciales se incorporan al modelo de manera simple utilizando los componentes eléctricos adecuados.

En los procesos de transporte se establece una correspondencia entre variables flujo por un lado (densidad de corriente eléctrica con flujo de calor, flujo de masa...) y variables tipo potencial por otro (potencial eléctrico con temperatura, concentración...), pero es posible establecer otras analogías. Con carácter general, asociaremos una magnitud derivada de un gradiente a la variable “corriente eléctrica” y su potencial asociado, el escalar al que se aplica el operador, a la variable eléctrica “diferencia de potencial (d.d.p.)”, implementando en el modelo tantos circuitos diferentes como ecuaciones contenga el modelo matemático.

En problemas regidos por ecuaciones diferenciales ordinarias con el tiempo como variable independiente, como los que nos ocupan en esta memoria, no se precisa la reticulación espacial y los pasos temporales los impone directamente el software usado para proporcionar soluciones fiables.

El planteamiento formal que sirve de base para el desarrollo de los problemas es la “teoría de redes” de Peusner [1987], en la que se apoya su “termodinámica de redes”; dicha teoría, a su vez, se sustenta en la teoría de circuitos a partir de una generalización de sus variables conjugadas, corriente eléctrica y d.d.p. Los modelos en red son para Peusner una representación exacta de las características matemáticas de los procesos que describen. Así, las variables flujos y concentraciones, características de los problemas, deben satisfacer las leyes de Kirchhoff y sus relaciones determinarán los elementos de circuito correspondientes. Ahora bien, en cada proceso concreto y una vez elegidas las variables conjugadas, la información de qué elementos de circuito intervienen en el modelo en red y cómo se conectan entre sí, se obtiene del modelo matemático y no de consideraciones de tipo físico acerca del papel que juegan estas variables.

En síntesis, en la teoría de redes, la viabilidad de un modelo en red supone:

- i) La existencia de una red independiente del tiempo,
- ii) La existencia de una magnitud conservativa llamada flujo, asociada a cada rama, que conecta los nudos y obedece las leyes de Kirchhoff para corrientes (LCK),
- iii) La existencia de una magnitud que satisface criterios de unicidad,  $c$ , asociada a cada nudo, y que obedece la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK),

iv) Las relaciones entre flujo y concentración asociados, que pueden incluir variaciones temporales de estas variables, definen los elementos concretos del circuito equivalente. La relación causa-efecto entre las variaciones temporales de las variables conjugadas puede ser arbitraria con tal que sea consistente con las dos últimas condiciones mencionadas en el párrafo anterior.

### **2.2.1. Monopuertas básicas**

La red lleva asociada un conjunto de flujos que obedecen a una ley de balance local y un conjunto de fuerzas que satisfacen la condición de unicidad. Tales requisitos dan cuenta de la topología del proceso y su red asociada. Las propiedades topológicas dependen únicamente de la asignación de conexiones entre los diferentes puntos o de las posibles combinaciones de trayectorias que unen un nudo dado con otros nudos. Son independientes de los valores de las variables y, desde un punto de vista topológico, dos grafos son iguales o isomorfos si las asignaciones de vértices y ramas son las mismas. Las leyes o teoremas de Kirchhoff establecen relaciones entre flujos y concentraciones por separado, pero no expresan ningún tipo de relación entre flujos y concentraciones entre sí.

Las relaciones entre el par conjugado flujo-concentración se conocen como ecuaciones constitutivas o fenomenológicas y definen los elementos de circuito que expresan características específicas de cada proceso. Estas relaciones se pueden establecer entre las variables de un par flujo-concentración, en cuyo caso se habla de monopuerta. Una primera clasificación de estas está relacionada con lo que en electricidad se conoce como elementos pasivos y activos. Los primeros no generan potencia; bien la disipan, bien tienen la capacidad de almacenarla y/o entregarla a la red. Las fuentes de tensión y corriente son elementos activos, por lo que generan potencia de acuerdo a una ley determinada.

#### **Monopuertas pasivas**

Se consideran primero las monopuertas pasivas. Éstas tienen nombres específicos en función de la relación expresa existente entre las variables LCK y LVK. Existen tres tipos:

Monopuerta resistiva,

Monopuerta capacitiva,

Monopuerta inercial o inductiva



La representación simbólica de la monopuerta capacitiva lineal se muestra en la Figura 2.5: un condensador eléctrico de valor  $C$  faradios.



**Figura 2.5 Representación simbólica de una monopuerta capacitiva lineal**

### Monopuerta inercial o inductiva

La monopuerta inercial o inductiva es el elemento de circuito asociado a una relación entre la variable fuerza y la derivada temporal de la variable flujo, de una misma rama, mediante una función no dependiente del tiempo, que designaremos como inductancia,  $L$ . Así,  $X(t) = L dJ(t)/dt$ , que equivale a la relación, no dependiente del tiempo, entre las variables flujo y fuerza,  $p = F_L(J)$ .

Al igual que en el condensador, se produce un almacenamiento de energía sin pérdidas y su estado tiene memoria. Considerando su analogía física, representa un proceso en donde tiene lugar algún efecto de inercia, como la masa en los sistemas mecánicos. La relación constitutiva anterior puede expresarse en términos de la inductancia,  $\gamma = dp/dJ = dF_L(J)/dJ$ , que es constante cuando la dependencia  $p = F_L(J)$  es lineal,  $L = p/J$ . La representación simbólica de la monopuerta inductiva lineal se muestra en la Figura 2.6: una inductancia eléctrica o bobina de valor  $L$  henrios.



**Figura 2.6 Representación simbólica de una monopuerta inductiva lineal**

Los procesos de almacenamiento y disipación de energía, bajo la hipótesis de continuidad del medio, se originan en todos los puntos del sistema. Los elementos  $R$ ,  $C$  y  $L$  se identifican, sin embargo, con regiones pequeñas pero finitas del medio, y sus conexiones con las otras puertas se realizan con enlaces ideales de energía, es decir, con conductores de resistencia nula.

### **Monopuertas activas**

Se consideran ahora las monopuertas activas. En éstas se produce una aportación o extracción de energía al sistema. Cabe distinguir:

Fuentes constantes,

Fuentes dependientes del tiempo,

Fuentes controladas

### Fuentes constantes

Las fuentes constantes son monpuertas definidas de acuerdo con las expresiones  $F_j(J) = 0$  y  $F_x(X) = 0$ , según se trate de fuentes de flujo o de fuerza, respectivamente. Tienen asignado un sentido, o signo, que indica la dirección en que fluye la energía. La representación simbólica es la de la Figura 2.7a y eléctricamente, se corresponden a pilas o generadores de corriente constante.

### Fuentes dependientes del tiempo

La relación constitutiva entre las variables, en las fuentes dependientes del tiempo, tiene la misma forma que las fuentes constantes. Además,  $X = X(t)$  y  $J = J(t)$  según se trate de fuentes de fuerza o de flujo. La Figura 2.7b muestra ejemplos de representación simbólica.

### Fuentes controladas

Las fuentes controladas, Figura 2.7c, son monpuertas especiales asociadas a relaciones constitutivas entre variables, conjugadas o no, expresadas mediante cualquier función que no contiene explícitamente el tiempo. Se trata de elementos con entradas múltiples y una única salida. Ésta corresponde a un flujo o una fuerza que depende funcionalmente de otros flujos o fuerzas de distintas ramas y nudos del mismo o diferente circuito. Estas fuentes permiten especificar acoplamientos energéticos de distinto tipo. Existen cuatro tipos de fuentes controladas por una sola variable:

fuentes de tensión controladas por tensión,  $X = F_x(X_c)$ ,

fuentes de tensión controladas por corriente,  $X = F_j(J_c)$ ,

fuentes de corriente controladas por corriente,  $J = F_j(J_c)$ ,

fuentes de corriente controladas por tensión,  $J = F_x(X_c)$ ,

siendo  $F$  una función arbitraria de la variable de control.

La acción de control puede ser ejercida por más de una variable y las funciones de control pueden ser complejas, Figura 2.7d. Aunque la monpuerta puede especificarse arbitrariamente, su implementación como elemento de circuito puede no ser posible en tanto que no esté contenida en las librerías del software elegido. La teoría de circuitos permite,

mediante circuitos auxiliares, resolver prácticamente todos los casos de diseño de red eléctrica que se necesiten para cualquier tipo complejo de fuente controlada.

En términos de componentes eléctricos el software contiene un extenso catálogo de componentes y es capaz de distinguir entre elementos lineales y no lineales. Entre los elementos lineales, dispone de:

Resistencias,

Condensadores,

Inductancias o bobinas,

Fuentes constantes de tensión y corriente,

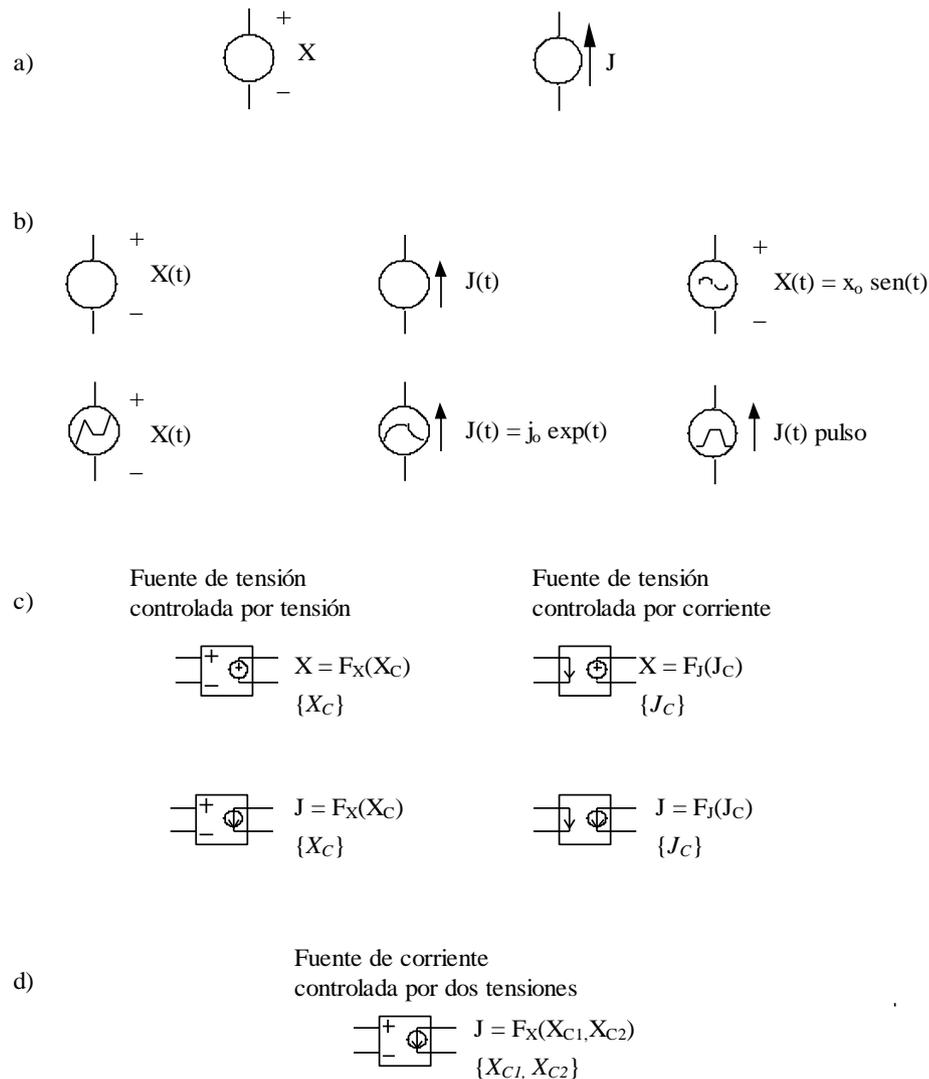
Fuentes constantes de tensión y corriente dependientes del tiempo,

Fuentes controladas por tensión y corriente,

y entre los elementos no lineales contenidos en el programa cabe citar los siguientes:

Fuentes no lineales controladas por tensión y corriente,

Interruptores accionados por tensión o corriente



**Figura 2.7 Representación simbólica de monopuertas activas. a) Fuentes constantes, b) fuentes dependientes del tiempo, c) fuentes controladas por una variable, d) ejemplo de fuente controlada por varias variables**

### 2.2.2. El MESIR como método numérico

El punto de partida de MESIR es siempre el modelo matemático de un cierto proceso, conjunto de ecuaciones que lo definen. La discretización de la variable espacial, única manipulación directa que se hace de las ecuaciones y que no es necesaria en los problemas de esta memoria, es la base para establecer el modelo en red o red eléctrica equivalente.

El modelo en red es el formato que se da al modelo matemático para que pueda ser utilizado como entrada en PSpice, (Nagel [1975 y 1977], Vladimirescu [1994] y Kielkowsky [1994]).

En definitiva, puesto que la simulación del modelo en red mediante ordenador implica la resolución numérica de sus ecuaciones, el método de simulación por redes es, de hecho, un

método numérico. A continuación exponemos las diferencias más notables con las estrategias de otros métodos numéricos.

Cuando en una ecuación en derivadas parciales se hace una doble reticulación, espacial y temporal, se remplazan las derivadas parciales por aproximaciones algebraicas. Esto conduce a un conjunto de ecuaciones algebraicas que aproximan las ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Para su solución numérica se utiliza un software matemático adecuado. Este procedimiento es la base de los conocidos métodos numéricos de diferencias finitas y volúmenes finitos, Knabner y Angermann [2003].

Como se ha comentado, la elaboración del modelo en red pasa por la reticulación espacial, pero no temporal. Se parte, pues, de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuya reticulación espacial lo convierte en uno de ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo, que corresponden con las de una celda elemental del circuito. Posteriormente, el propio software realiza la reticulación temporal (única operación que se realiza en nuestros problema de una sola variable independiente).

Así, tras la definición de la variable flujo,  $j(q,t) = \partial\phi(q,t)/\partial q$ , las EDP toman la forma,  $F_i[\phi, \partial\phi/\partial t, \partial^2\phi/\partial t^2, j, \partial j/\partial q, \partial j/\partial t, q, t] = 0$ . Éstas, con la discretización espacial, se convierten en  $F_i[\phi, d\phi/dt, d^2\phi/dt^2, j, dj/dt, t] = 0$ , que son las ecuaciones del circuito, manteniéndose la conexión entre  $j(q,t)$  y  $\phi(q,t)$ .

Si  $j(q,t) = \partial\phi(q,t)/\partial q_i$  no es una condición del proceso modelizado, sino una relación física entre variables definidas independientemente, la red puede considerarse como una descripción alternativa del sistema. Si, además,  $j$  corresponde a un flujo de transporte de una cierta magnitud, los elementos del circuito y ciertos parámetros del conjunto de la red, como la impedancia, pueden dotarse de un significado físico equivalente al que tienen en el transporte de la carga eléctrica. En estos casos es evidente que MESIR proporciona más información que la estricta respuesta numérica del sistema.

Una vez obtenido el modelo en red se procede a su análisis en PSpice [1994]. Las dificultades estarán, inicialmente, en el aprendizaje de un lenguaje de programación, que puede ser de texto o gráfico. Sin embargo, se trata de dificultades fáciles de salvar dado que son pocas las reglas de programación que se requieren, pues los modelos están constituidos por muy pocos dispositivos. PSpice ha sido utilizado por otros autores para resolver problemas de otras disciplinas. Baker y Shortt [1990] estudian el comportamiento de componentes integrados para diferentes rangos de temperatura, Bello [1991] lo aplica a la resolución de

problemas mecánicos, Herbert [1992] lo aplica a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y Hamill [1993] a problemas estadísticos y relacionados con el caos.

El circuito se presenta al ordenador, en el proceso de simulación, como un conjunto de ecuaciones matemáticas. Este proporciona, mediante procedimientos de análisis numérico, toda la información solicitada por el investigador para cada tipo de análisis. De esta forma se obtienen datos equivalentes a medidas típicas de laboratorio, con un margen de error despreciable. Más aún, pueden alterarse las condiciones iniciales, de contorno, y las características térmicas del medio mediante sencillos cambios en el programa, y el análisis puede aportar datos sobre el comportamiento del circuito más allá de los límites reproducibles en laboratorio con costes muy asumibles.

La simulación está estructurada en cinco subprogramas principales que interactúan a través de una estructura de datos almacenada en un área común del programa. Estos subprogramas son: entrada, organización, análisis, salida y utilidades, Figura 2.8.

El subprograma de entrada lee el archivo de entrada, construye una estructura de datos y chequea el circuito. El de organización, una vez que el programa de entrada se ha ejecutado con éxito, construye estructuras adicionales que serán requeridas en el programa de análisis, parte esencial de la simulación. El subprograma de salida genera y organiza, en la memoria central, los resultados solicitados por el usuario en forma tabular o gráfica. Las utilidades son aspectos secundarios no relacionados directamente con la simulación. Éstas permiten, por ejemplo, almacenar componentes, o partes de modelos, para ser compartidos por otras aplicaciones.

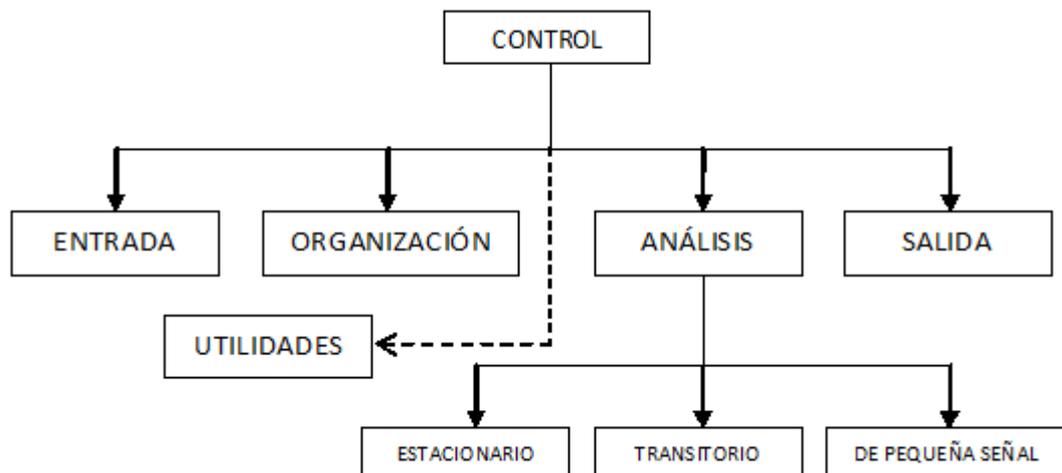


Figura 2.8 Diagrama bloques del programa de simulación de circuitos PSpice

El subprograma de análisis es la parte más importante del programa de simulación. Ejecuta los análisis indicados en el archivo de entrada. La información resultante se almacena en la memoria central o en discos para su posterior procesamiento en los archivos de salida. Mientras que la facilidad de uso del programa reside en los subprogramas de entrada y salida, la eficiencia de la simulación depende del programa de análisis, que contiene algoritmos más complejos y consume la mayor fracción de tiempo de computación.

En el proceso de simulación se obtiene la solución numérica de la representación matemática del modelo en red. Ésta contiene: las ecuaciones matemáticas de los diferentes tipos de monpuertas, las ecuaciones correspondientes a las restricciones impuestas por las leyes de Kirchhoff, que han de satisfacerse entre las ramas y nudos del circuito, y la información particular sobre la interconexión de los diferentes componentes eléctricos de cada modelo. Toda esta información compone un extenso sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales del tipo  $F(\phi, \mathbf{j}, d\phi/dt, d\mathbf{j}/dt, t) = 0$ , donde  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  y  $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_m)$  son vectores formados por las variables dependientes del circuito, corrientes y tensiones, y  $F$ , en general, es un operador no lineal.

El conjunto de tareas que componen el proceso de simulación puede ser agrupado en los siguientes tópicos o algoritmos de computación: formulación de las ecuaciones, solución de ecuaciones lineales, solución de ecuaciones no lineales e integración numérica.

PSpice es miembro de la familia de programas de simulación de circuitos SPICE2, Nagel [1975]. Mucho más potente y rápido que sus predecesores, fue desarrollado en la Universidad de California en los años setenta y utiliza algoritmos numéricos más refinados con formatos de entrada-salida idénticos. El uso extendido de PSpice ilustra su capacidad para el tratamiento de una extensa variedad de problemas en simulación de circuitos, obteniendo la respuesta en régimen estacionario, la respuesta en régimen transitorio, la transformada de Fourier, y análisis de pequeña señal en corriente alterna.

Los algoritmos utilizados en PSpice, que se documentan en la tesis de Nagel y que han sido perfeccionados en sucesivas ediciones, son el resultado de implementaciones, modificaciones y comparaciones cuidadosas de los métodos numéricos existentes en el contexto especial de la simulación de circuitos.

De entrada, la sintaxis no requiere disposiciones especialmente ordenadas de datos. Su estilo puede catalogarse más bien como libre, y dispone de una razonable fuente de datos, que se adjudican por omisión a los componentes cuando estos no se especifican en detalle. También realiza un buen número de chequeos para asegurar que el circuito ha sido

introducido correctamente y el resto de las sentencias de programa están bien escritas, advirtiendo al programador de posibles errores mediante mensajes previos a la ejecución. En definitiva, un usuario poco experimentado necesita especificar un número mínimo de parámetros y controles de simulación para extraer unos resultados de simulación aceptables.

Finalmente, el programase estructura como un listado que contiene todos los componentes eléctricos del circuito, con resistencias, condensadores, fuentes, interruptores, etc. Estos se introducen uno por uno, indicando el nombre, valor, nudos de conexión y otros parámetros característicos. También existe la posibilidad de organizar el programa mediante subcircuitos con un considerable ahorro de tiempo en el diseño del modelo.

La necesidad de realizar numerosas simulaciones de los modelos objeto de esta tesis nos obligó a elaborar rutinas en MATLAB para automatizar la generación de modelos en red e incluso a desarrollar un software específico (CODENET\_15) cuya aplicación requiere la instalación de los siguientes componentes:

MATLAB 2009, de MathWorks Inc.

PSpice Release 6.0., 1994, de Microsim Corporation

La instalación completa de MATLAB permite acceder directamente a los archivos de datos de simulación y manipularlos con toda su potencia gráfica y numérica.

Para acceder al entorno PSpice y editar el archivo de texto del modelo, con el explorador de archivos de Windows, se accede a la carpeta TEMPORAL "temp". Allí se encuentran los archivos de modelos, con extensión ".CIR" y los archivos de salida de datos, con extensión ".OUT". Cada problema genera dos archivos con los datos del modelo, uno con extensión ".CIR", con el nombre del modelo, y otro denominado "TEMPORAL.CIR". La simulación del modelo siempre se realiza sobre el "TEMPORAL.CIR" por lo que los resultados de la simulación siempre se graban en el archivo "temporal.out". De esta manera siempre quedan guardados los archivos de datos de los modelos originales. Todos los archivos ".CIR" se pueden manipular directamente en el entorno PSpice, lo que permite generar nuevos archivos "temporal.out" de versiones modificadas del modelo, en el entorno PSpice.

El uso del entorno gráfico PSpice requiere añadir al archivo de texto del modelo, de extensión ".CIR", una nueva línea ".PROBE" para guardar los datos de la simulación en un nuevo archivo de extensión ".DAT".

Por último, mencionar que PSpice contiene un potente entorno gráfico que permite representar tensiones eléctricas, corrientes y cualquier tipo de función u operación entre estas magnitudes durante el proceso de simulación.

## **2.3. Creación de CODENET\_15**

CODENET\_15 ha sido creado utilizando dos softwares distintos, NgSpice y Matlab. El primero de ellos, NgSpice, tiene la utilidad de motor de cálculo, es decir, resuelve las ecuaciones implementadas a través de la conversión a circuitos eléctricos realizada por nuestro software, generando un sencillo archivo de salida con los resultados obtenidos.

Por otro lado, Matlab se ha utilizado para crear la consola de introducción de datos de nuestro software, ya que permite programación orientada a objetos. Además, al ser un software específico de cálculo matemático, presenta una aplicación muy completa y potente de representación gráfica, que es integrada en los softwares programados con Matlab.

Por todo ello, CODENET\_15 es un software potente que permite transcribir cualquier ecuación implementada a circuito eléctrico para que pueda ser resuelta con la gran capacidad de cálculo de NgSpice, incluyendo además, la versatilidad y capacidad de representación gráfica de Matlab.

### **2.3.1. NgSpice**

Ngspice es un programa de simulación de circuitos de propósito general para análisis no lineal y lineal con licencia BSD (software libre). Los circuitos pueden contener resistencias, condensadores, inductores, inductores mutuos y fuentes de tensiones dependientes o independientes, los cinco dispositivos semiconductores más comunes, etc.

Siendo una actualización de Spice3f5, la última versión del simulador SPICE3 de código abierto creado por el Departamento de la Universidad de California en Berkeley (<http://bwrcs.eecs.berkeley.edu/Classes/IcBook/SPICE/>), incluye todas sus características y arregla sus errores. El software se mantiene gracias a una comunidad de usuarios que contribuyen al proyecto Ngspice proporcionando nuevas características, mejoras y correcciones de errores.

Se basa en tres paquetes de software libre: Spice3f5, Xspice y Cider1b1:

- SPICE3 es el origen de todos los simuladores de circuitos electrónicos y sus sucesores son ampliamente utilizados en la comunidad electrónica.

- Xspice es una extensión de SPICE3 que proporciona modelos adicionales de código en lenguaje C para apoyar el modelado del comportamiento analógico y cosimulación de componentes digitales a través de un algoritmo impulsado de suceso rápido.
- Cider añade un simulador de dispositivo numérico a NgSpice. Su acoplamiento al simulador proporciona una mayor precisión a la simulación, a expensas de un mayor tiempo de simulación.

De todos modos, es más que la simple suma de los paquetes mencionados, ya que está en continua evolución gracias a su amplio número de usuarios que proporcionan sus correcciones de errores y mejoras proporcionándole características adicionales y una mayor robustez.

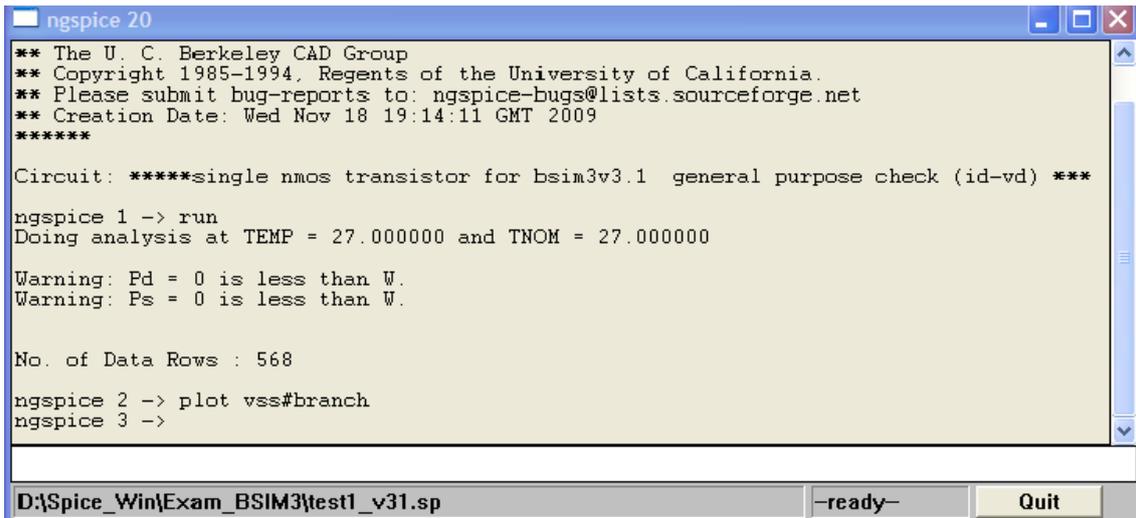
Ngspice está implementado con tres clases de análisis:

- El análisis no lineal CC
- El análisis no lineal transitorio
- Análisis lineal de CA

Los análisis de transitorios incluyen simulación de ruido transitorio. Por otro lado, el análisis de CA incluye una pequeña simulación de señal de ruido y función de análisis de polo-cero y transferencia.

Además, Ngspice dispone de diversos elementos de circuito, como resistencias, condensadores, inductores (individuales o de inversión), líneas de transmisión y un número creciente de dispositivos semiconductores como diodos, transistores bipolares, etc.

En su versión para Windows ofrece una sencilla interfaz gráfica de usuario. De hecho, esta interfaz no aporta mucho más que la admisión de datos en una pequeña consola, donde se introducen las líneas de comando y se proporciona la salida de texto del programa, Figura 2.9.



```

ngspice 20
** The U. C. Berkeley CAD Group
** Copyright 1985-1994, Regents of the University of California.
** Please submit bug-reports to: ngspice-bugs@lists.sourceforge.net
** Creation Date: Wed Nov 18 19:14:11 GMT 2009
*****

Circuit: *****single nmos transistor for bsim3v3.1  general purpose check (id-vd) *****

ngspice 1 -> run
Doing analysis at TEMP = 27.000000 and TNOM = 27.000000

Warning: Pd = 0 is less than W.
Warning: Ps = 0 is less than W.

No. of Data Rows : 568

ngspice 2 -> plot vss#branch
ngspice 3 ->

D:\Spice_Win\Exam_BSIM3\test1_v31.sp  -ready-  Quit

```

Figura 2.9 MS Windows GUI

Por otro lado, presenta una pequeña ventana gráfica que permite, además de realizar la representación de los resultados, la impresión del gráfico a través de cualquiera de las impresoras disponibles en el equipo o la creación de un archivo PostScript de la ventana gráfica actual, ya sea en blanco y negro o en color (Ngspice user's manual-web: [ngspice.sourceforge.net](http://ngspice.sourceforge.net)).

Así, tal y como se ha descrito anteriormente, este software, gracias a su gran capacidad de cálculo, permite resolver cualquier ecuación transformada en circuito eléctrico utilizando código Spice.

### 2.3.2. Matlab

MATLAB® es un lenguaje de alto nivel y un entorno interactivo para el cálculo numérico, visualización y programación. Es utilizado por millones de ingenieros y científicos en todo el mundo, ya que permite explorar y visualizar ideas, así como colaborar interdisciplinariamente en procesamiento de señales e imagen, comunicaciones, sistemas de control y finanzas computacionales.

Permite analizar datos, desarrollar algoritmos y crear modelos y aplicaciones. El lenguaje, las herramientas y las funciones matemáticas integradas facilitan la exploración de los múltiples enfoques y poder así llegar a una solución más rápida que con hojas de cálculo u otros lenguajes de programación.

En nuestro caso, la gran facilidad que presenta Matlab para importación o exportación de datos, gracias a sus funciones integradas, nos permiten la interacción con otras aplicaciones, como NgSpice.

Su capacidad de representación de gráficos, tanto en 2-D como en 3-D, y sus funciones de visualización de datos permiten la comprensión de la solución del problema obtenida de forma interactiva. Además, permite comparar conjuntos de datos, seguimiento de los cambios a través del tiempo o su distribución. Por otro lado, facilita la creación de parcelas mediante programación utilizando funciones de gráficos o de forma interactiva utilizando la pestaña Gráficos en la parte superior del escritorio de MATLAB.

Su capacidad para el diseño y edición de interfaces gráficas de usuario utilizando GUI, nos ha permitido desarrollar un entorno interactivo a CODENET\_15, incluyendo el uso de funciones de MATLAB. GUI nos ha facilitado el diseño del software proporcionándonos los componentes más comunes, como pulsadores, menús desplegados, cuadros de lista, barras de herramientas, botones, botones de radio, cuadros de lista y deslizadores, entre otros.

De esta forma se ha creado en CODENET\_15, una interfaz de usuario que es una visualización gráfica en una o más ventanas que contienen controles, denominados componentes, que permiten a un usuario realizar tareas interactivas. De esta manera, no tiene que crear un script o escribir comandos en la línea de comandos para realizar las tareas.

Las interfaces de usuario creadas con MATLAB pueden realizar cualquier tipo de cálculo, leer y escribir archivos de datos, comunicarse con otros interfaces de usuario, y mostrar datos como tablas o como parcelas (<http://es.mathworks.com/products/matlab/>).



## **CAPÍTULO 3**

### **EL PROGRAMA CODENET\_15**



Un CD con copia del archivo ejecutable del programa CODENET\_15 se adjunta a este texto.

### **3.1. Introducción**

Debido al objeto de este estudio, surge la necesidad de crear un software que facilite la creación de modelos que más tarde serán post-procesados con MATLAB, donde, con la creación de las rutinas necesarias, se realiza la representación gráfica de dichos modelos. En este ámbito el software PSpice, juega un importante papel, debido a la facilidad que presenta en la discretización espacial a través de celdas con las que son estudiados los modelos. Por un lado, en problemas no lineales o acoplados, si se aplica un reducido número de celdas, obteniéndose poca precisión, tiene un pequeño tiempo de computación y los resultados obtenidos pueden ser utilizados de forma cualitativa para localizar parámetros y otras características importantes del modelo en estudio. Y por otro lado, si, más tarde, se amplía el número de celdas, aún teniendo un tiempo de computación elevado, la precisión alcanzada da altos niveles de exactitud a los resultados obtenidos en la simulación y representación gráfica.

El nuevo software así creado facilita tanto la tarea de introducción de datos y creación de modelos asociados a los problemas de interés en esta memoria, como la de procesamiento de los archivos generados con los programas Ngspice y, sobretodo, Matlab, que es una herramienta potente en el post-procesado de datos y representación gráfica. El nombre CODENET\_15 es un acrónimo de “Coupled Ordinary Differential Equations by Network Method”.

La elaboración de los archivos de texto de los modelos sigue reglas muy intuitivas; está organizado en los mismos bloques, con independencia del problema y permite acceder fácilmente a las soluciones merced a una numeración estándar de componentes y nudos del modelo.

Más tarde en este capítulo se explican las diferentes ventanas de acceso al usuario (entrada de datos, opciones de simulación, acceso a la representación de las soluciones...) y se presentan aplicaciones a ejemplos ilustrativos.

El funcionamiento básico de CODENET\_15 se muestra en el diagrama de flujo de la Figura 3.1.

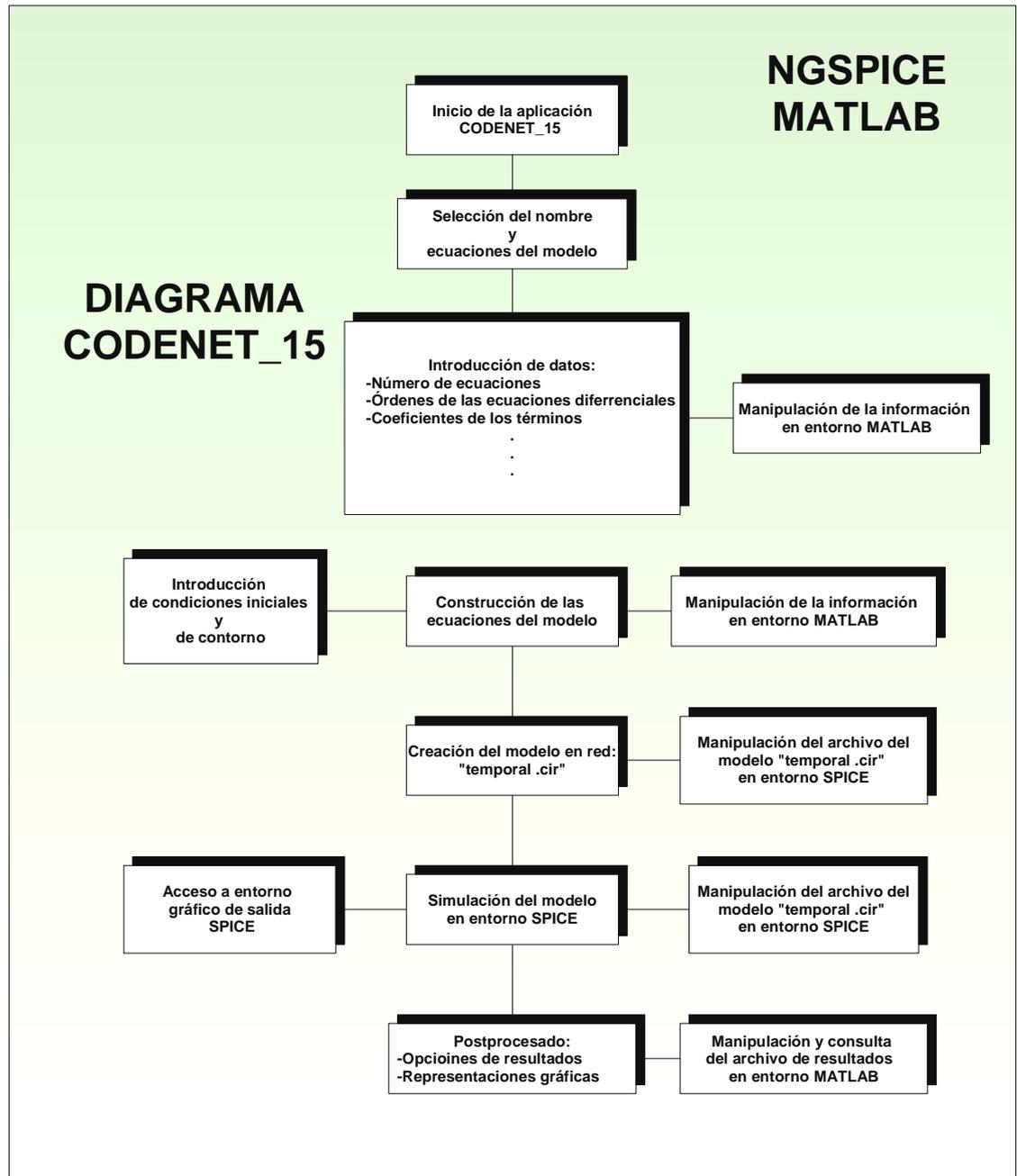


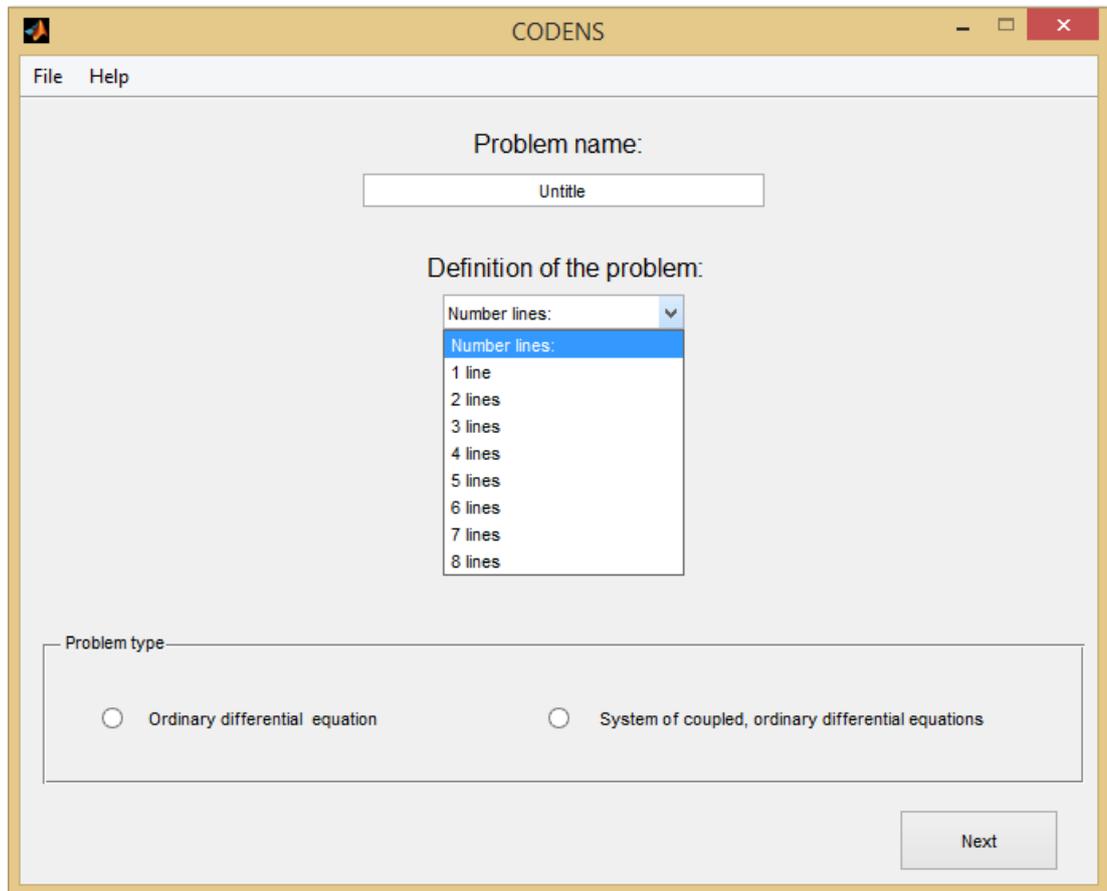
Figura 3. 1 Diagrama de flujo del funcionamiento del programa CODENET\_15.

### 3.2. Interface de introducción de datos

#### 3.2.1. Pantalla inicial

El programa CODENET\_15 está caracterizado por ser una aplicación de fácil manejo, teniendo nociones básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de estas. Así, una vez que abrimos el ejecutable, la primera pantalla, figura 3.2, nos permite introducir el nombre

que le vamos a asignar al modelo y si deseamos que esté compuesto por una sola ecuación o por un sistema de ecuaciones diferenciales.



**Figura 3.2 Pantalla de inicio del programa CODENET\_15**

En esta primera pantalla, podemos definir para el problema el número de líneas..., para más tarde poder pasar a la descripción de cada una de las ecuaciones en la siguiente pantalla mediante el botón "Next".

Además, en la pantalla inicial, tenemos una barra de herramientas, figura 3.3 donde al pulsar "File" se presenta un desplegable con las opciones clásicas siguientes:

- i) Generar el modelo de un nuevo problema, 'New',
- ii) Cerrar la aplicación, "Close"

También, tenemos un menú de ayuda, "Help".

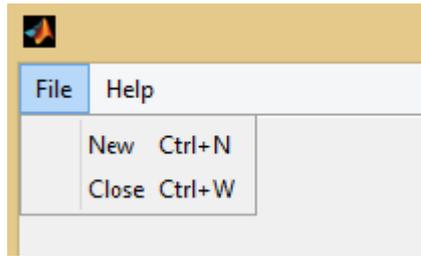


Figura 3.3 Barra de herramientas de la pantalla inicial

### 3.2.2. Pantalla de generación de una ecuación diferencial ordinaria

Si elegimos, para el modelo, la generación de una ecuación diferencial ordinaria, “ordinary differential equation”, la siguiente pantalla de introducción de datos es la mostrada en la figura 3.4. En ésta, podemos elegir que la ecuación sea hasta del cuarto orden de magnitud, teniendo así cubierta la práctica totalidad de los problemas mecánicos a los que nos podamos enfrentar.

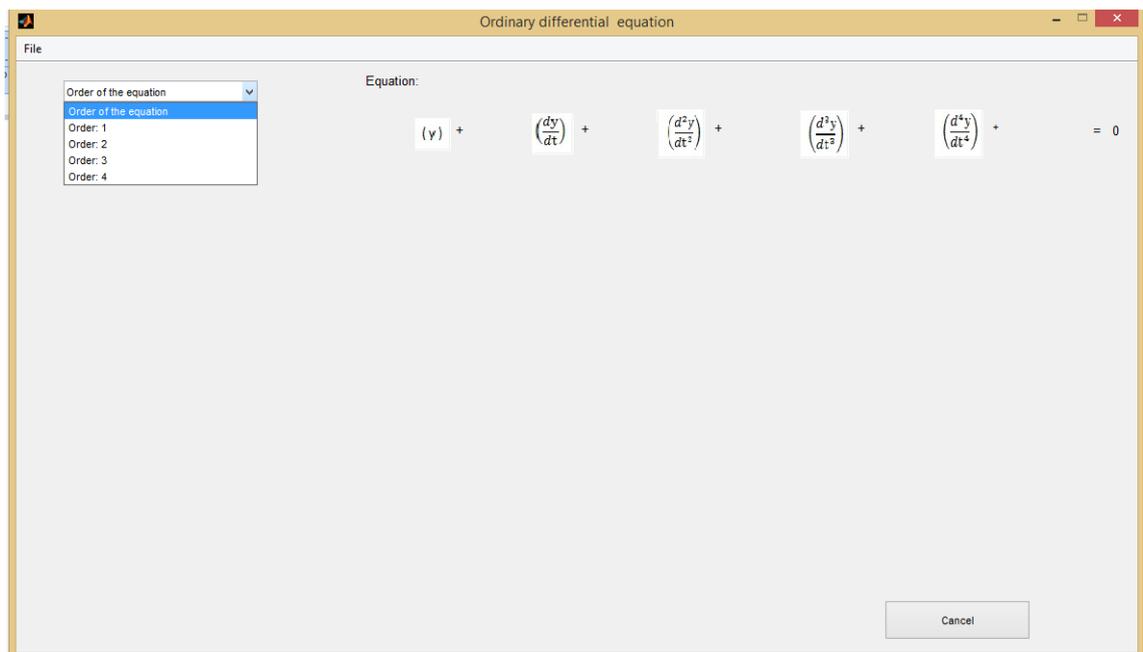
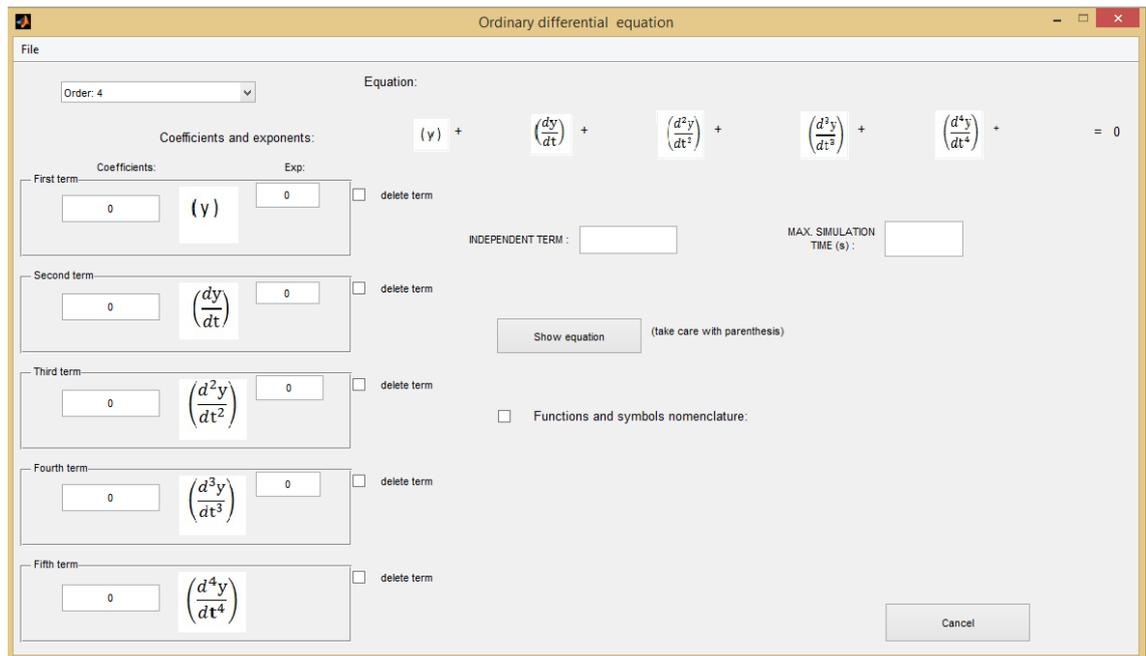


Figura 3.4 Pantalla para la generación de una ecuación diferencial ordinaria

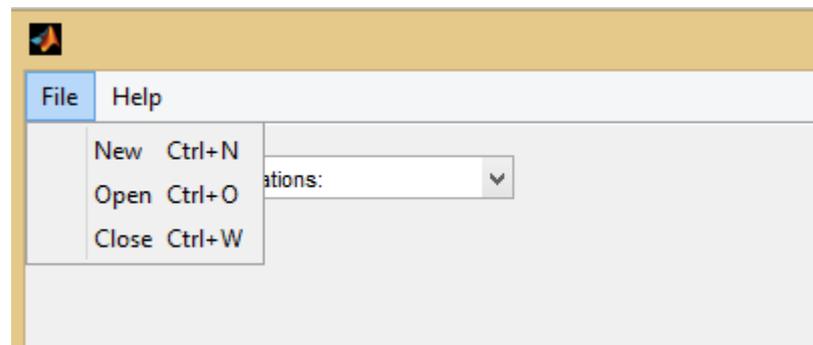
Más tarde, el programa nos pide la introducción de los valores de los coeficientes de cada término y el exponente al que estará elevado cada derivada, con excepción de uno, que será el de la derivada mayor, que puede ser simplificado, como puede verse en la figura 3.5. También se ha de introducir el término independiente y el tiempo máximo que queremos elegir para nuestra simulación. Se ha incluido una casilla que, para facilitar la introducción de datos, se puede marcar y se despliega la nomenclatura que se ha de utilizar para algunas funciones u operaciones matemáticas. En esta pantalla disponemos de una barra de

herramientas, figura 3.6, donde tenemos un menú desplegable en el botón “File” con las siguientes opciones:

- i) Generar el modelo de un nuevo problema, “New”,
- ii) Cargar un modelo ya guardado, “Open”,
- iii) Grabar el modelo que se está generando, “Save” (está opción aparecerá una vez hayamos rellenado datos),
- iv) Cerrar el modelo actual y pasar a la pantalla inicial, “Close”.



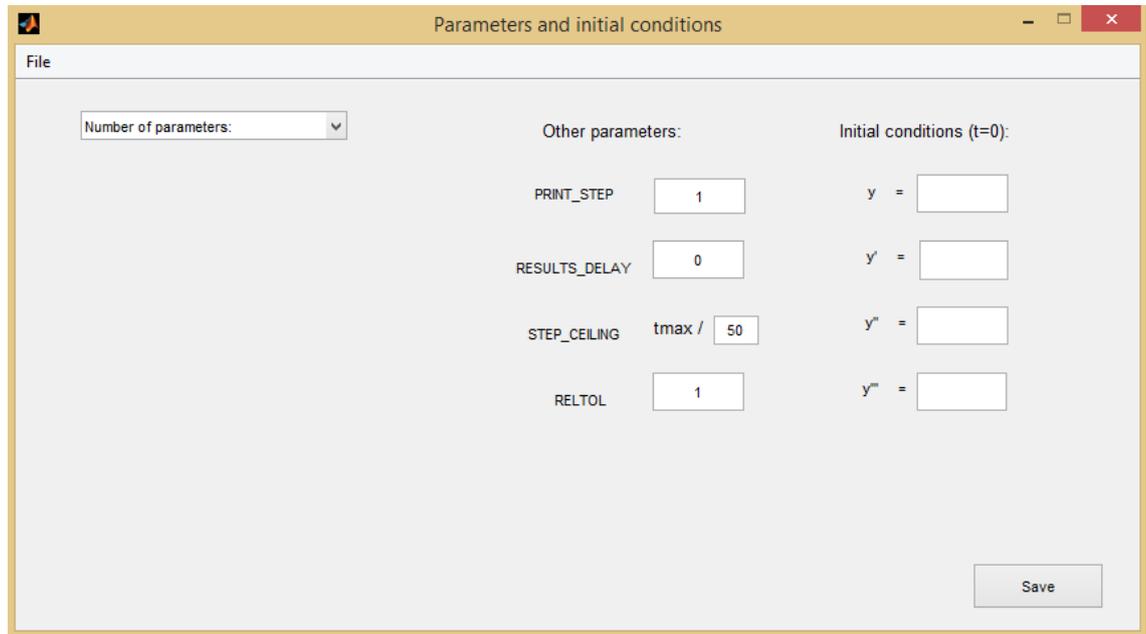
**Figura 3.5** Introducción de datos para una ecuación diferencial ordinaria



**Figura 3.6** Barra de herramientas de la pantalla de generación de ecuaciones

Una vez que hayamos rellenado toda esta información debemos pulsar el botón “SHOW EQUATION” y, entonces, aparece en la pantalla la ecuación generada de nuestro

modelo. En ese momento, se muestra otro botón que debemos pulsar para la agregar las condiciones iniciales y los parámetros que puedan tener nuestras ecuaciones, figura 3.7.



**Figura 3.7 Introducción de condiciones iniciales y de contorno**

Aquí tenemos otra barra de herramientas con un desplegable en el botón “File” con las opciones:

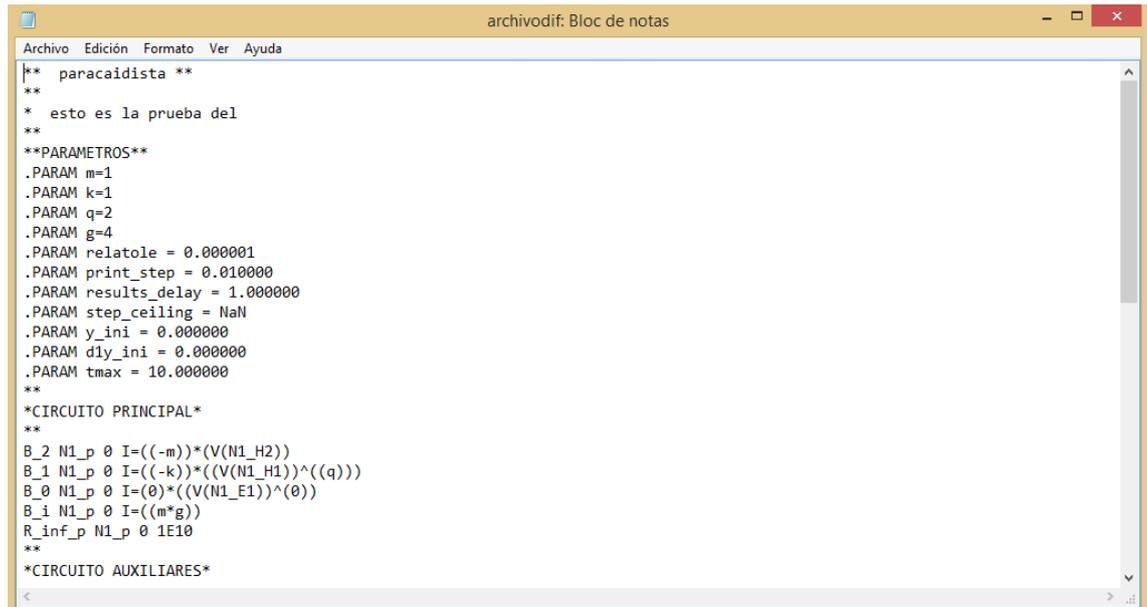
- i) Borrar los datos introducidos, “Clear”,
- ii) Cerrar esta ventana, “Close”.

En esta pantalla de introducción de datos se podrá dar valor de hasta diez parámetros que puedan existir en la ecuación, también de las condiciones iniciales para la incógnita y sus derivadas y el valor de otros parámetros especiales como:

- i) “PRINT STEP”,
- ii) “RESULTS DELAY”,
- iii) “STEP CEILING”
- iv) “RELTOL”, (relativetolerance), referida a parámetros internos del programa PSPICE, establece un compromiso entre la precisión de los resultados y el tiempo de computación.

Una vez introducidos estos datos se procede a grabarlos pulsando “SAVE”, para que el programa CODENET\_15 los compute dentro del modelo que se está generando,

desapareciendo, entonces, esta pantalla y volviendo a la de generación de la ecuación del modelo, figura 3.5. Allí, ya sólo quedará pulsar al botón “CREATE TEXT FILE”, para que el programa genere un archivo de texto “.txt”, figura 3.8, que será el “.CIR” y éste podrá ser post-procesado por las herramientas gráficas de MATLAB o PSPICE, apareciendo en pantalla mediante el editor de texto “bloc de notas” de cualquier computador con Windows, con la típica barra de herramientas de este editor de texto, figura 3.9, y que nos facilitará el tratamiento, edición y guardado de este archivo donde se precise.

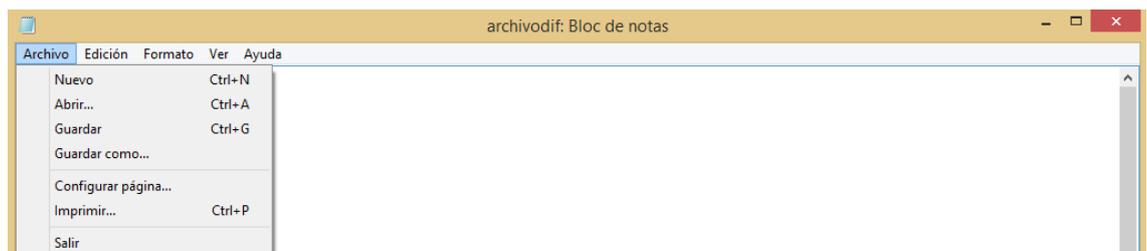


```

Archivo Edición Formato Ver Ayuda
** paracaidista **
**
* esto es la prueba del
**
**PARAMETROS**
.PARAM m=1
.PARAM k=1
.PARAM q=2
.PARAM g=4
.PARAM relatole = 0.000001
.PARAM print_step = 0.010000
.PARAM results_delay = 1.000000
.PARAM step_ceiling = NaN
.PARAM y_ini = 0.000000
.PARAM dly_ini = 0.000000
.PARAM tmax = 10.000000
**
*CIRCUITO PRINCIPAL*
**
B_2 N1_p 0 I=((-m))*(V(N1_H2))
B_1 N1_p 0 I=((-k))*((V(N1_H1))^(q))
B_0 N1_p 0 I=(0)*((V(N1_E1))^(0))
B_i N1_p 0 I=((m*g))
R_inf_p N1_p 0 1E10
**
*CIRCUITO AUXILIARES*

```

**Figura 3.8 Archivo “.CIR” de un modelo de prueba: Skydiver equation**



**Figura 3.9 Barra de herramientas del editor de texto bloc de notas**

Tras guardar el archivo de texto del modelo volveremos a la pantalla de generación de la ecuación, donde hay otro botón con la leyenda “SIMULATION”, para la simulación gráfica del modelo hasta ahora construido. Al pulsar este se abrirá otra ventana, figura 3.10, con las opciones que pueden interesar para la representación gráfica, que nos permite representar la variable dependiente frente a la independiente, cualquiera de sus derivadas o incluso todas las gráficas a la vez.

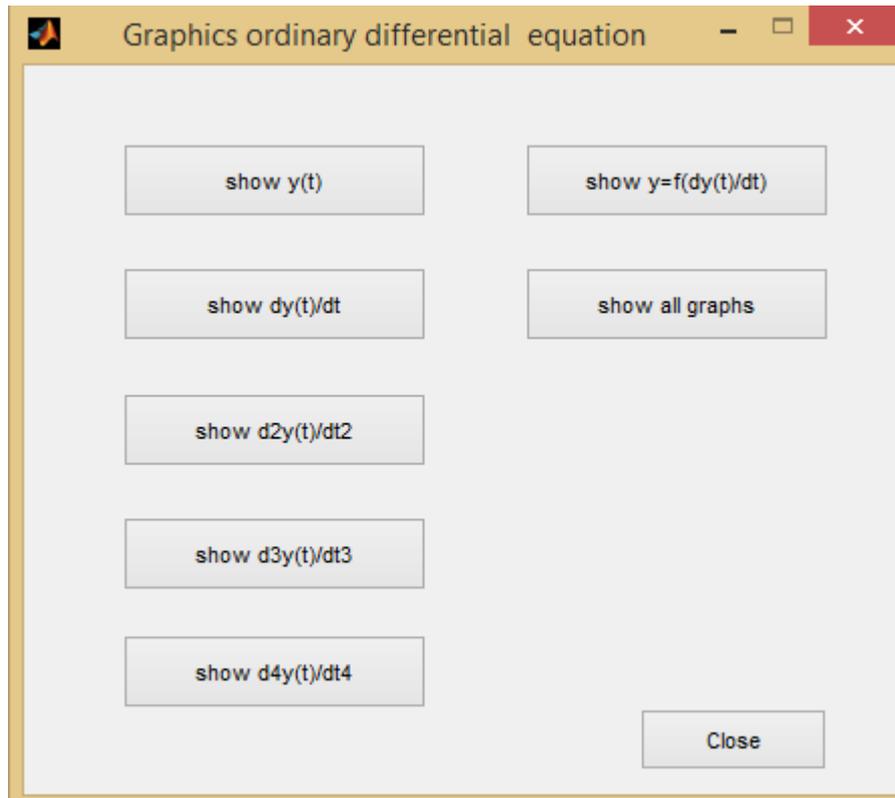
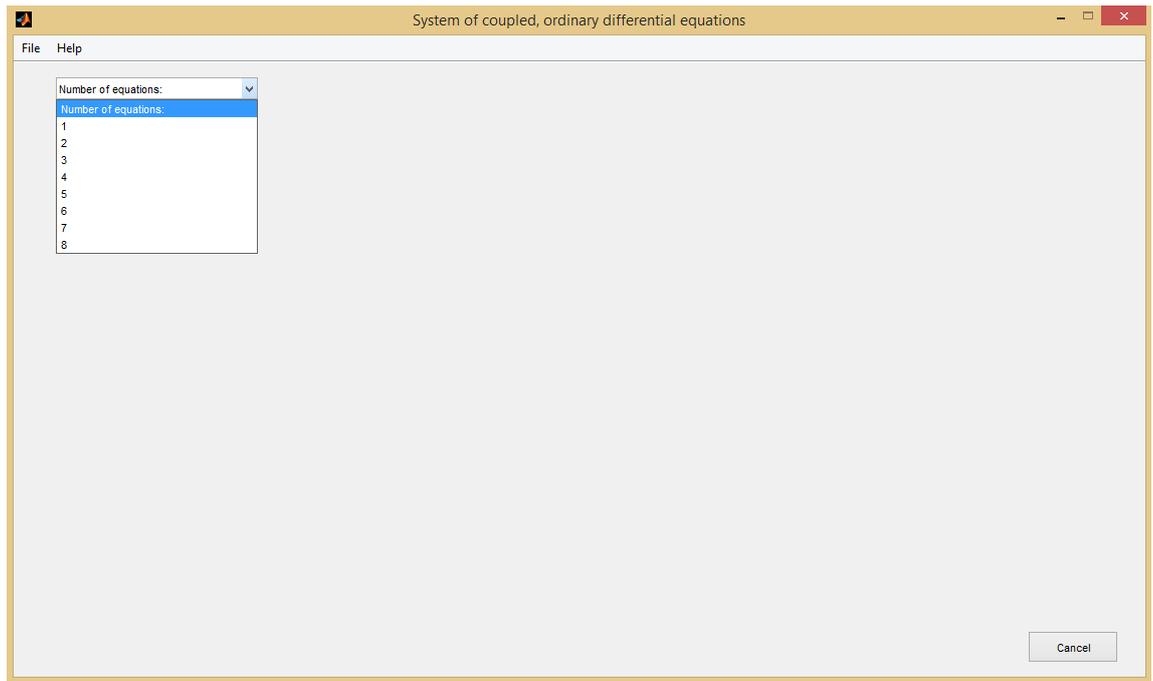


Figura 3.10 Ventana de opciones para la simulación

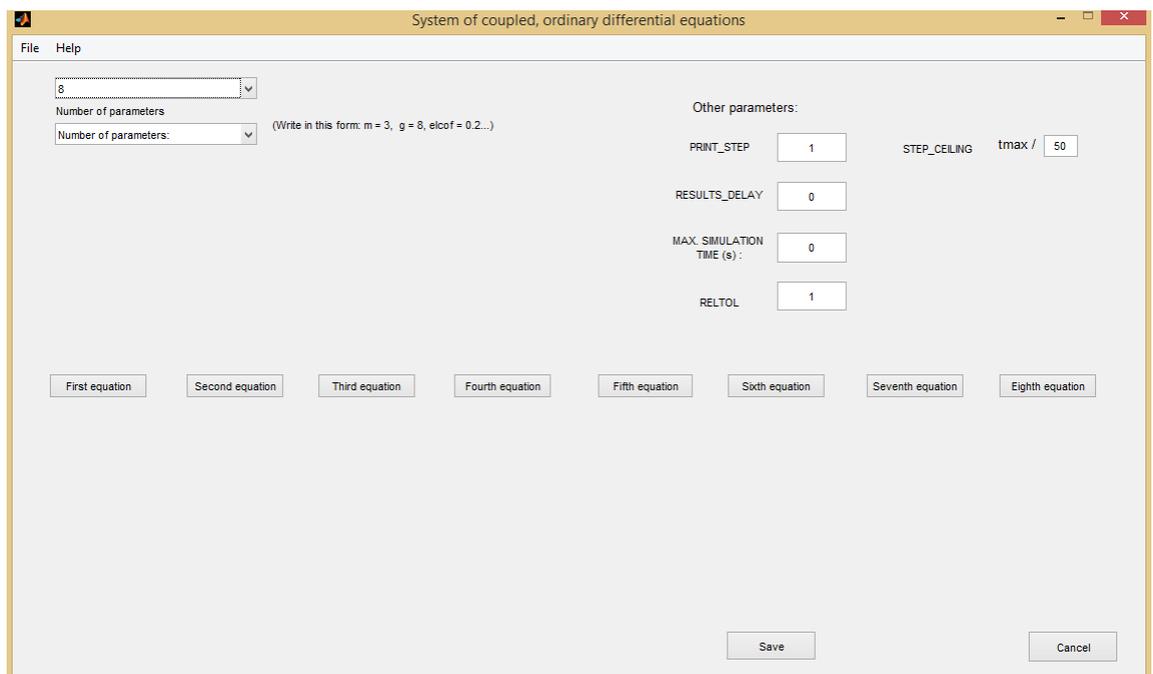
### 3.2.3. Pantalla de generación de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y acopladas

Si esta vez elegimos en la pantalla inicial del programa CODENET\_15 para el modelo que queremos estudiar, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y acopladas, “system of coupled, ordinary differential equations”, la pantalla que muestra el programa se muestra en la figura 3.11, donde tenemos un desplegable que nos ofrece opciones acerca del número de ecuaciones que contiene el modelo. También, como sucedía al tratar en el punto anterior de una sola ecuación diferencial, tenemos una barra de herramientas con las opciones “File” y “Help”, como se muestra en la figura 3.6. El número de ecuaciones que se pueden elegir para el modelo es ocho, quedando así cubierta la práctica totalidad de los problemas mecánicos que podamos someter a estudio.

En la siguiente figura se muestra la opción del mayor número de ecuaciones permitidas por la aplicación para un sistema de ecuaciones diferenciales, figura 3.12, y a través de esta pantalla, se puede ir eligiendo una a una la ecuación que se quiere construir, haciendo click en cada una, para posteriormente pasar a otra pantalla de captura de datos muy similar a la que ya se ha visto en la generación de una ecuación diferencial del apartado anterior.



**Figura 3.11** Pantalla para la generación de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y acopladas



**Figura 3.12** Número máximo de ecuaciones permitidas para un sistema en CODENET\_15

Se hace notar que, cuando se trate de un sistema de ecuaciones diferenciales, los parámetros especiales que aparecen en la figura 3.13, aparecen en la pantalla original del sistema, y no en la de introducción de datos de cada una de las ecuaciones, como, también, ocurría cuando se trataba de una sola ecuación.

Other parameters:

PRINT\_STEP       STEP\_CEILING tmax /

RESULTS\_DELAY

MAX. SIMULATION TIME (s) :

RELTOL

**Figura 3.13 Detalle de los parámetros especiales en un sistema de ecuaciones**

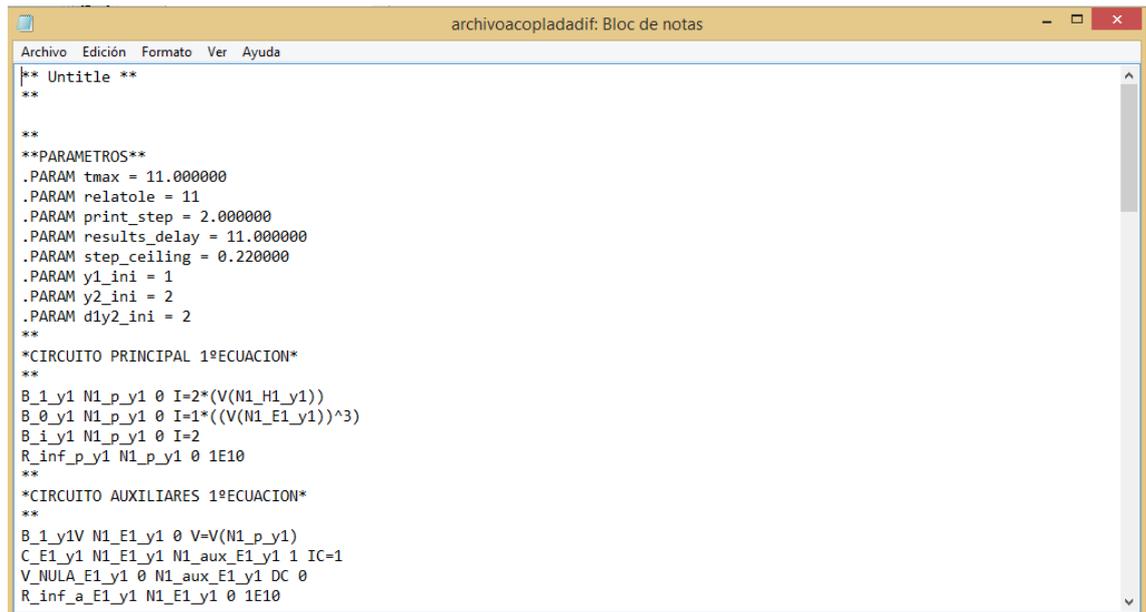
Una vez que vayamos introduciendo los datos de cada una de las ecuaciones del sistema, las iremos grabando pulsando “SAVE” e iremos volviendo, cada vez, a la pantalla de la figura 3.12 correspondiente a la del sistema de ecuaciones, para proceder con la siguiente ecuación hasta completar todas las que conformen nuestro modelo. Aparecerá al lado de cada ecuación generada una casilla, como se muestra en la figura 3.14, que podrá ser marcada y desmarcada para incluir las condiciones iniciales de todas las ecuaciones.

First equation       Second equation       Third equation

y1 =

**Figura 3.14 Detalle de las condiciones iniciales**

Una vez la información referente a todas las ecuaciones del modelo y sus condiciones de contorno esté rellena, junto con los parámetros que puedan contener, se pulsará sobre el botón “SAVE” de la pantalla original del sistema y se generará un archivo de texto, “.txt”, similar al de la figura 3.15, que podrá ser guardado con facilidad, pues es abierto con el editor de textos, bloc de notas, como ocurría en el apartado anterior cuando se habló la generación de un modelo con una sola ecuación.



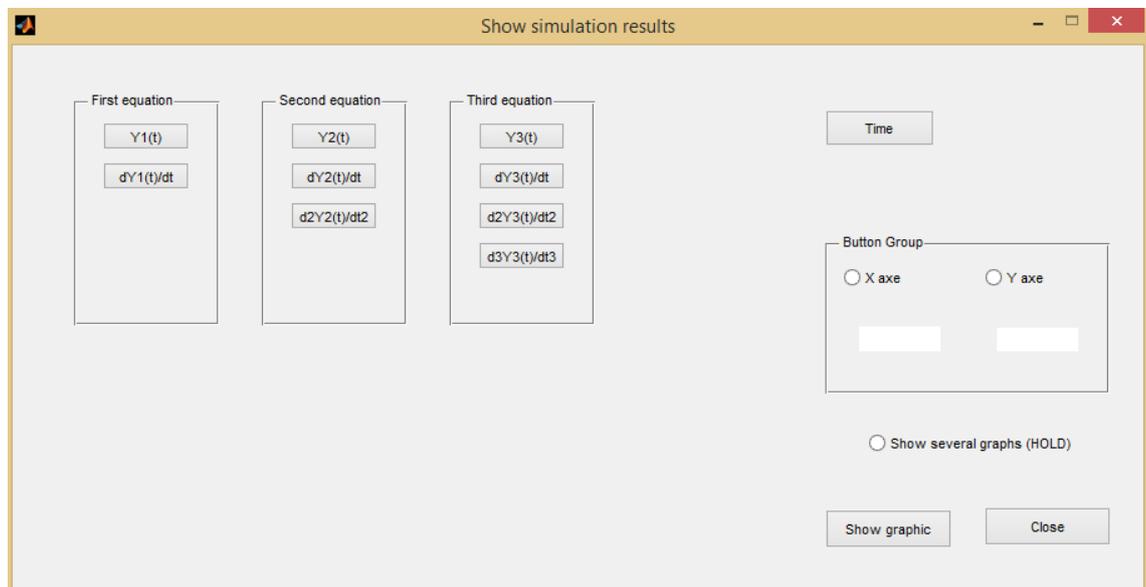
```

archivoacopladadif: Bloc de notas
Archivo Edición Formato Ver Ayuda
** Untitle **
**
**
**PARAMETROS**
.PARAM tmax = 11.000000
.PARAM relatole = 11
.PARAM print_step = 2.000000
.PARAM results_delay = 11.000000
.PARAM step_ceiling = 0.220000
.PARAM y1_ini = 1
.PARAM y2_ini = 2
.PARAM d1y2_ini = 2
**
*CIRCUITO PRINCIPAL 1ª ECUACION*
**
B_1_y1 N1_p_y1 0 I=2*(V(N1_H1_y1))
B_0_y1 N1_p_y1 0 I=1*((V(N1_E1_y1))^3)
B_i_y1 N1_p_y1 0 I=2
R_inf_p_y1 N1_p_y1 0 1E10
**
*CIRCUITO AUXILIARES 1ª ECUACION*
**
B_1_y1V N1_E1_y1 0 V=V(N1_p_y1)
C_E1_y1 N1_E1_y1 N1_aux_E1_y1 1 IC=1
V_NULA_E1_y1 0 N1_aux_E1_y1 DC 0
R_inf_a_E1_y1 N1_E1_y1 0 1E10

```

**Figura 3.15** Ejemplo de archivo de texto, “.txt”, generado para un sistema de ecuaciones

Después de cerrar o guardar dicho archivo de texto se puede visualizar en la pantalla la aparición de un nuevo botón en el margen inferior derecho con la leyenda “SIMULATION”. Una vez pulsado emerge la ventana de opciones para la representación gráfica del modelo, como muestra el ejemplo de la figura 3.16.



**Figura 3.16** Opciones de simulación

En ésta se puede elegir qué variable o cualquiera de sus derivadas queremos representar y en qué eje, figura 3.17, pudiéndose colocar en cualquier eje a la variable independiente, el tiempo. Incluso hay una opción que permite hacer varias representaciones a

la vez seleccionando “SHOW SEVERAL GRAPHS (HOLD)”. Por último pulsando sobre “SHOW GRAPHIC” se mostrarán las gráficas que interesen del modelo creado.

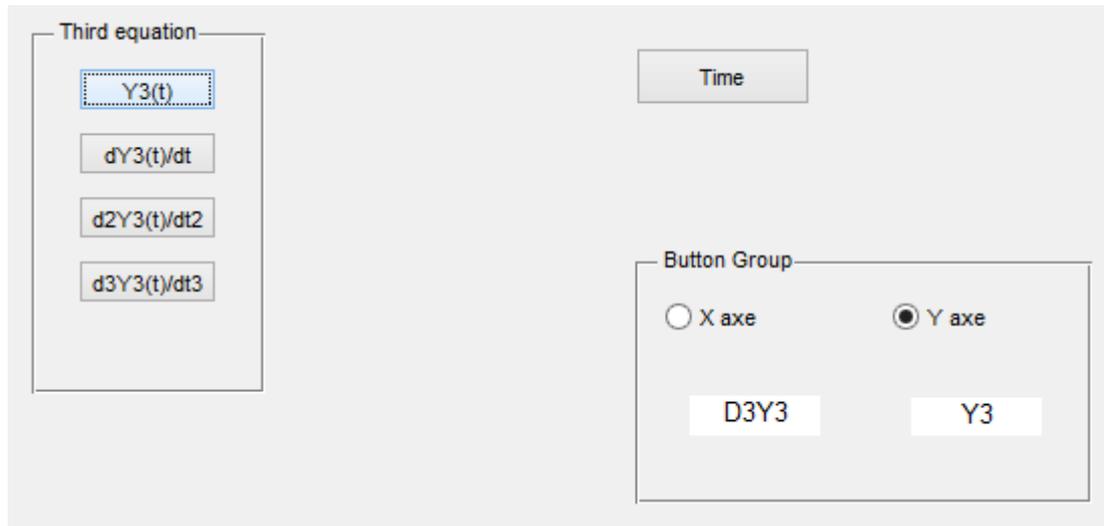


Figura 3.17 Detalle de la selección de ejes para las variables

### 3.3. Creación del modelo

Una vez implementada la ecuación en el software, el botón “Create a text file”, figura 3.18, permite crear un archivo “.CIR” que se ejecutará en la consola de NgSpice.

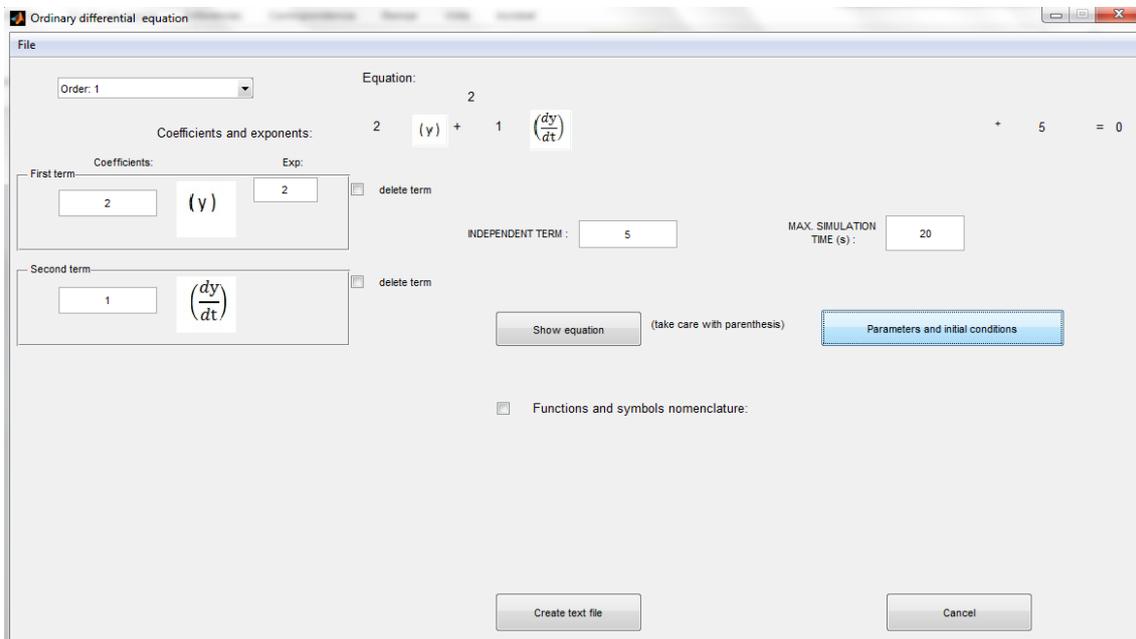
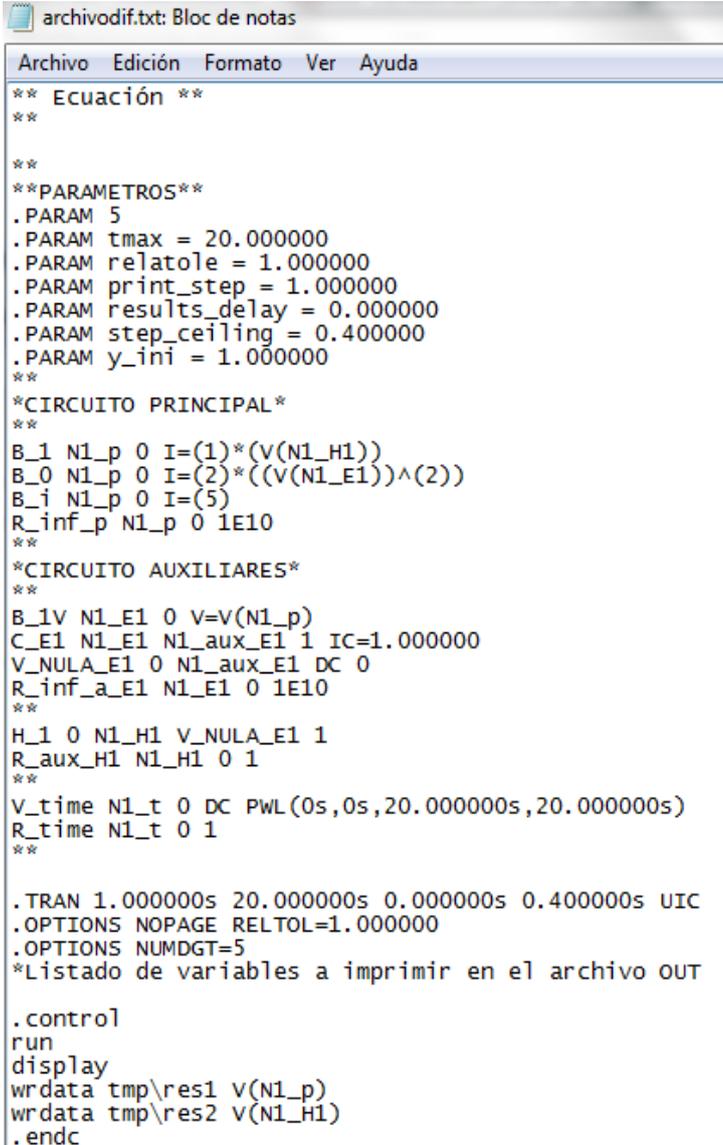


Figura 3.18 Ecuación implementada en CODENET\_15

Como se ha indicado en el apartado 3.2, el archivo que se genera está programado en código Spice. Para la presentación del archivo, el software utiliza los recursos propios de Windows, mostrando el circuito que representa la ecuación implementada con el bloc de

notas, evitando que el usuario tenga que instalar otros softwares para su visionado, Figura 3.19.



```

archivodif.txt: Bloc de notas
Archivo Edición Formato Ver Ayuda
** Ecuación **
**
**
**PARAMETROS**
.PARAM 5
.PARAM tmax = 20.000000
.PARAM relatole = 1.000000
.PARAM print_step = 1.000000
.PARAM results_delay = 0.000000
.PARAM step_ceiling = 0.400000
.PARAM y_ini = 1.000000
**
*CIRCUITO PRINCIPAL*
**
B_1 N1_p 0 I=(1)*(V(N1_H1))
B_0 N1_p 0 I=(2)*((V(N1_E1))^2)
B_i N1_p 0 I=(5)
R_inf_p N1_p 0 1E10
**
*CIRCUITO AUXILIARES*
**
B_1V N1_E1 0 v=V(N1_p)
C_E1 N1_E1 N1_aux_E1 1 IC=1.000000
V_NULA_E1 0 N1_aux_E1 DC 0
R_inf_a_E1 N1_E1 0 1E10
**
H_1 0 N1_H1 V_NULA_E1 1
R_aux_H1 N1_H1 0 1
**
V_time N1_t 0 DC PWL(0s,0s,20.000000s,20.000000s)
R_time N1_t 0 1
**
.TRAN 1.000000s 20.000000s 0.000000s 0.400000s UIC
.OPTIONS NOPAGE RELTOL=1.000000
.OPTIONS NUMDGT=5
*Listado de variables a imprimir en el archivo OUT

.control
run
display
wrdata tmp\res1 V(N1_p)
wrdata tmp\res2 V(N1_H1)
.endc

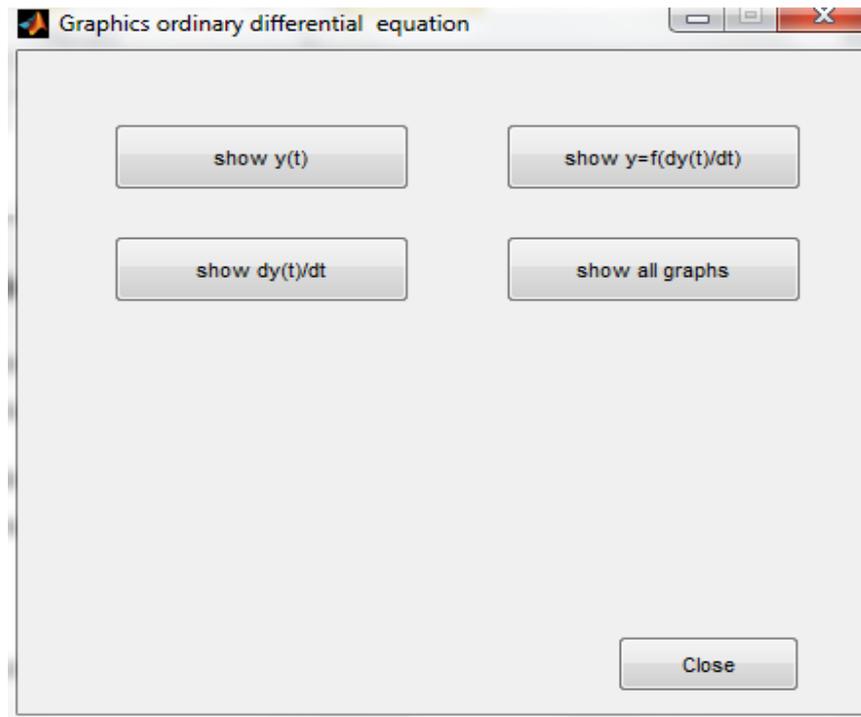
```

Figura 3.19 Ecuación implementada en formato de circuito

### 3.4. Simulación y resultados

Una vez se ha creado el circuito, el software presenta el botón “Simulation” que permite la simulación de la ecuación implementada en CODENTE\_15.

Tras su ejecución, el software presenta una nueva ventana que da acceso a la representación de las variables de la ecuación, Figura 3.20.



**Figura 3.20** Ventana de representación de resultados

Para el ejemplo implementado, cada uno de los botones permite la representación de temporal de la variable seleccionada, Figura 3.21.

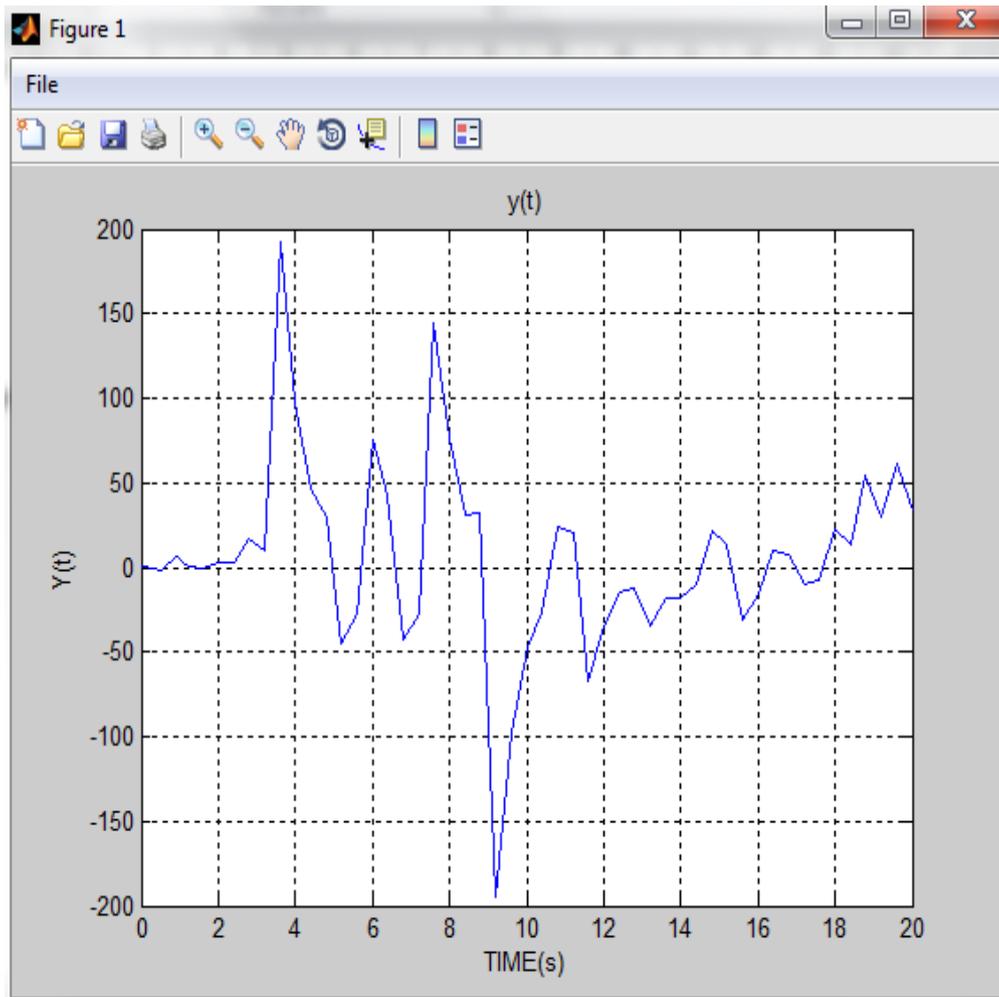


Figura 3.21 Representación gráfica de una variable

### 3.5. Ejemplos de aplicación

Los modelos mostrados en los capítulos 4 y 5 han sido implementados y resueltos con CODENET\_15, pudiéndose ahí apreciar su capacidad de resolución y de representación gráfica.

Entre los ejemplos mostrados en esos capítulos se encuentran algunos muy ilustrativos como son el problema del paracaidista, una bolita que se desliza por un alambre parabólico, una masa pendiente de un muelle vertical y un péndulo sobre plataforma acelerada que muestran, con un grado progresivo de dificultad, problemas regidos por una ecuación diferencial ordinaria, intentando tener la máxima diversidad en lo que se refiere a términos de distinta naturaleza dentro de dichas ecuaciones. En éstas, existen términos que hacen que las ecuaciones sean no lineales, cosa que también se estudia en el problema del oscilador de Duffing que, además tiene un comportamiento caótico, todo con el fin de comprobar hasta qué punto es fiable el software CODENET\_15.

Otros ejemplos estudiados, ya de mayor dificultad, son un péndulo sobre soporte deslizante, un péndulo elástico, dos masas unidas por muelles y alguno teórico, como el movimiento de una masa bajo la acción de una fuerza proporcional a su masa e inversamente proporcional a la distancia. Estos, ofrecen un estudio sobre sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias donde se comprueba la respuesta del software a procesos acoplados. Además, también se aborda en el problema del péndulo doble, el comportamiento caótico, con el inconveniente añadido de tratarse de sistemas de ecuaciones. Por último, se implementan en el software 3 casos, con diferentes grados de dificultad, del problema de Lotka-Volterra.



## **CAPÍTULO 4**

# **ADIMENSIONALIZACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS**

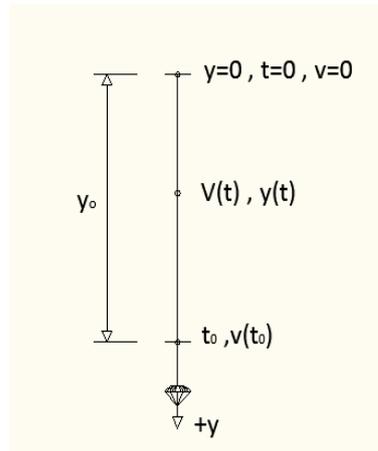


Aunque existe una enorme variedad de problemas en ingeniería a los que podemos aplicar la técnica de adimensionalización, hemos optado por elegir problemas mecánicos por varias razones. Nos es un campo muy familiar, al fin y al cabo, estamos en una escuela de ingeniería y la mecánica es una disciplina común a todos los grados; los modelos matemáticos de estos problemas resultan del balance de fuerzas, cada término de la ecuación diferencial tiene un significado físico claro y la propia ecuación puede considerarse homogénea, condición esencial para poder representar la solución mediante una relación entre grupos adimensionales (Capítulo 2). Pero el argumento que mejor justifica la aplicación a problemas mecánicos es la existencia de no sólo una, sino varias posibles referencias en cada problema. Por ejemplo, es frecuente la existencia de varias longitudes características en un mismo problema, sin contar las posibles magnitudes ocultas; la elección de la magnitud precisa de entre ellas es un ejercicio de racionalidad necesario para una correcta adimensionalización, por lo que en cada problema se discute en detalle la justificación de dicha elección. Por otro lado, las soluciones provenientes de la adimensionalización en referencia a los órdenes de magnitud de los monomios, las funciones indeterminadas que aparecen al aplicar el Teorema de  $\pi$  (si existen) y las incógnitas, se verifican mediante simulaciones numéricas con el software CODENET\_15. Finalmente, se recogen al final del capítulo sus principales contribuciones y conclusiones.

## **4.1. El problema del paracaidista**

### **4.1.1. Deducción de los grupos adimensionales**

Este problema estudia el movimiento de un objeto abandonado en el aire, partiendo del reposo, desde una cierta altura. Las fuerzas que actúan sobre él son su propio peso y la fricción con el aire, que asumiremos dependiente de la velocidad instantánea del objeto a través de una función potencial. El esquema físico se muestra en la Figura 4.1, con el origen en la posición inicial del objeto y la coordenada de posición ( $y$ ) creciente hacia abajo.



**Figura 4.1 Esquema físico del problema del paracaidista**

La ecuación de gobierno (ecuación del momento) en función de la posición y el tiempo tiene la forma

$$m_0 g - a_0 \frac{dy}{dt}^q = m_0 \frac{d^2y}{dt^2} \tag{4.1}$$

o, en términos de la velocidad instantánea y el tiempo,

$$m_0 g - a_0 v^q = m_0 \frac{dv}{dt} \tag{4.2}$$

Donde  $a_0$  y  $q$  son parámetros constantes. La fuerza de fricción se incrementa con el tiempo reduciendo la aceleración del objeto asintóticamente hasta cero cuando se igualan las fuerzas de fricción y peso; a partir de ese momento el objeto cae con velocidad constante. En base a este planteamiento podemos seleccionar las siguientes referencias:

$v_0$  velocidad asintótica del objeto, dada por la condición  $m_0 g = a_0 v^q$ , de aquí  $v_0 = (m_0 g / a_0)^{1/q}$ ,

$t_0$  tiempo requerido por el objeto para alcanzar la velocidad estacionaria  $v_0$ , o una fracción significativa de esta velocidad debido a la aproximación asintótica,

$y_0$  longitud recorrida por el objeto en el tiempo  $t_0$ .

Estas magnitudes ocultas (pues nada se dice explícitamente respecto a ellas en el enunciado del problema) permiten definir las variables adimensionales velocidad, tiempo y espacio,

$$v' = v/v_0, t' = t/t_0 \text{ e } y' = y/y_0, \text{ respectivamente.}$$

La elección de estas referencias asegura que el rango de valores de  $v'$  se extiende y cubre el intervalo numérico [0-1] mientras que el de las variables  $t'$  e  $y'$  no cubre la totalidad

de este intervalo pues depende de la fracción de  $v_o$  usada para la referencia  $t_o$  (de la cual también depende  $y_o$ ). Una fracción alta (del orden del 90%) asegura que estas variables ( $t'$  e  $y'$ ) recorren casi todo el intervalo numérico. Con estas variables y usando la expresión  $v_o = (m_o g/a_o)^{1/q}$ , la ecuación de gobierno (4.2) pasa a tener la forma adimensional

$$m_o g - a_o \frac{m_o g}{a_o} v'^q = \frac{m_o}{t_o} \frac{m_o g}{a_o} \frac{dv'}{dt'} \tag{4.3}$$

Aproximando a la unidad los factores de los tres términos de esta ecuación que contienen las variables adimensionales  $t'$  e  $y'$ , y sus cambios, los coeficientes a que dan lugar estos términos (los dos primeros términos proporcionan el mismo coeficiente), del mismo orden de magnitud, son

$$\Psi_1 = m_o g, \quad \Psi_2 = \frac{m_o}{t_o} \frac{m_o g}{a_o} \tag{4.4}$$

Estos, proporcionan un único grupo adimensional

$$\pi_1 = \frac{1}{t_o g} \frac{m_o g}{a_o} = \frac{1}{t_o} \frac{m_o g^{1-q}}{a_o} \tag{4.5}$$

que informa del orden de magnitud del tiempo característico

$$t_o \sim \frac{m_o g^{1-q}}{a_o} \tag{4.6}$$

La longitud característica,  $y_o$ , puede obtenerse sustituyendo el resultado anterior en la ecuación de gobierno adimensional deducida de (4.1) o, alternativamente, de la expresión  $y_o = v_o t_o$ . En ambos casos se obtiene

$$y_o \sim \frac{m_o g}{a_o} \frac{m_o g^{1-q}}{a_o} = \frac{1}{g} \frac{m_o^2}{a_o^2} \tag{4.7}$$

La Tabla 4.1 muestra el orden de magnitud de  $t_o$  e  $y_o$  para dos valores típicos del parámetro  $q$ .

q	$v_o$	$t_o$	$y_o$
1	$= (m_o g/a_o)$	$\sim m_o/a_o$	$\sim g m_o^2/a_o^2$
2	$= (m_o g/a_o)^{1/2}$	$\sim [m_o/(a_o g)]^{1/2}$	$y_o \sim m_o/a_o$

**Tabla 4.1** Orden de magnitud de  $t_o$  e  $y_o$  para  $q = 1$  y  $2$

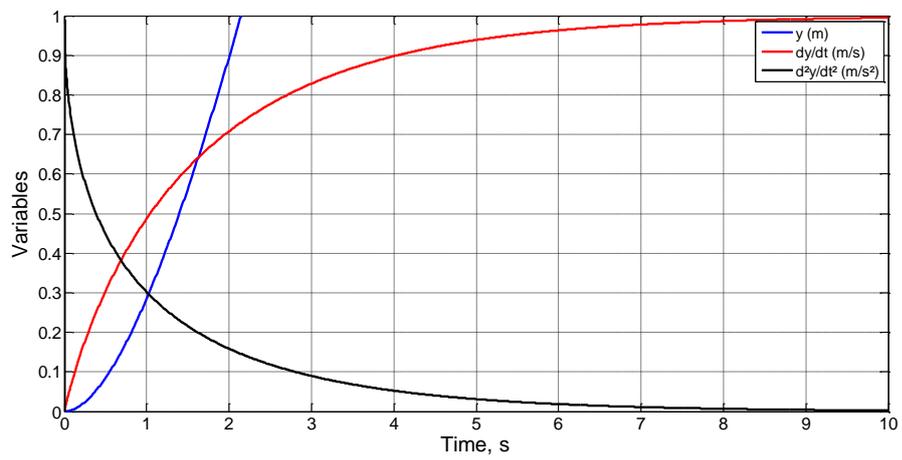
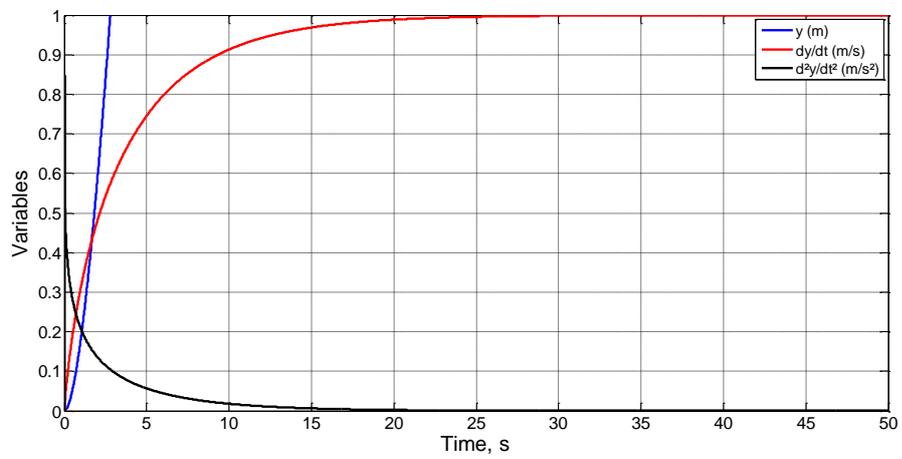
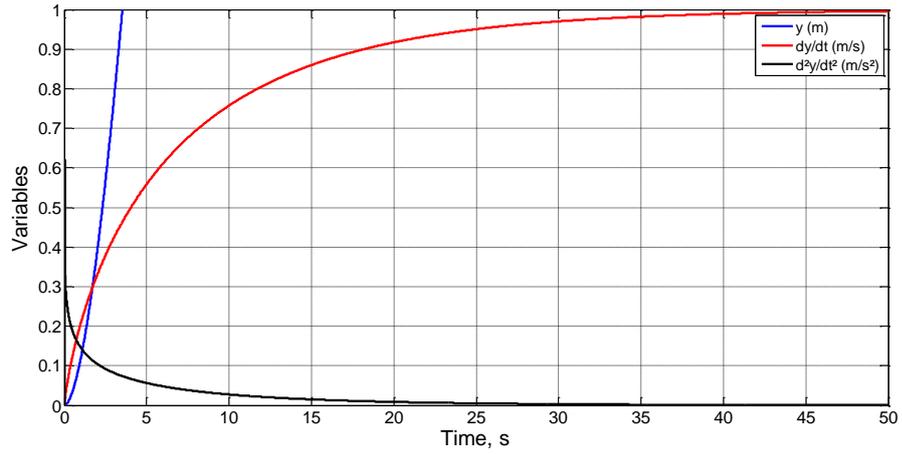
De acuerdo con lo indicado en el Capítulo 2, la existencia de un solo grupo adimensional para cada una de las incógnitas  $t_0$  e  $y_0$ , permite deducir la solución exacta para éstas mediante un único experimento o simulación numérica.

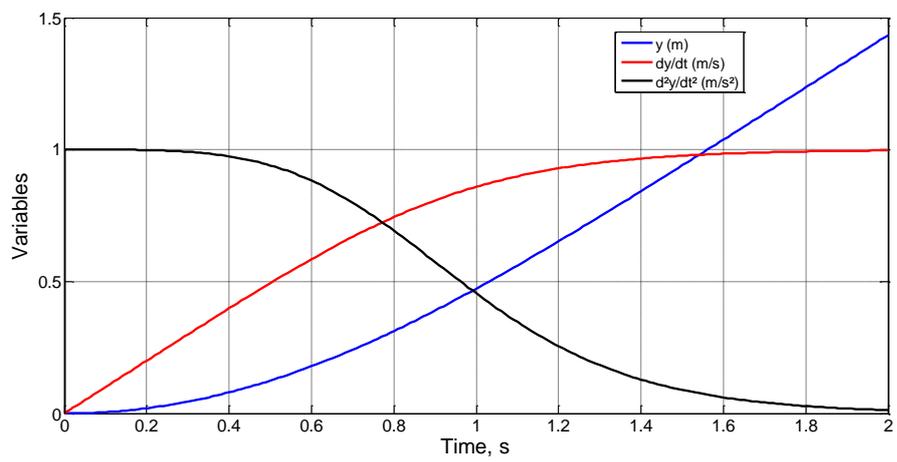
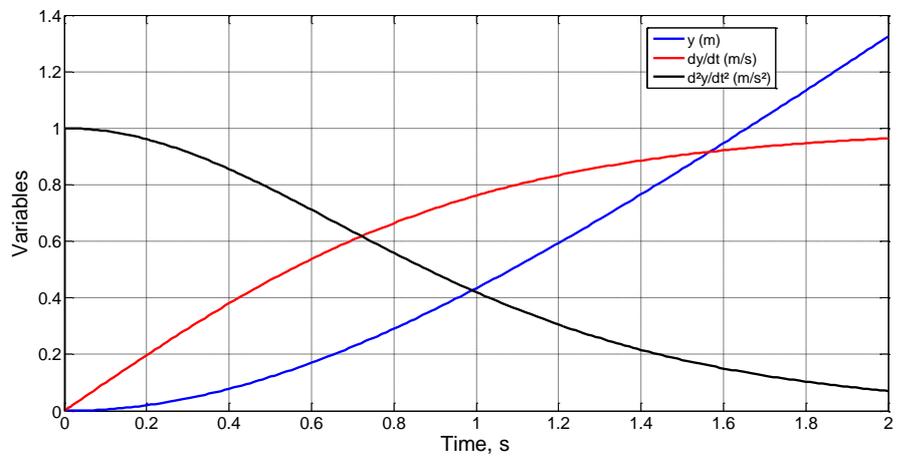
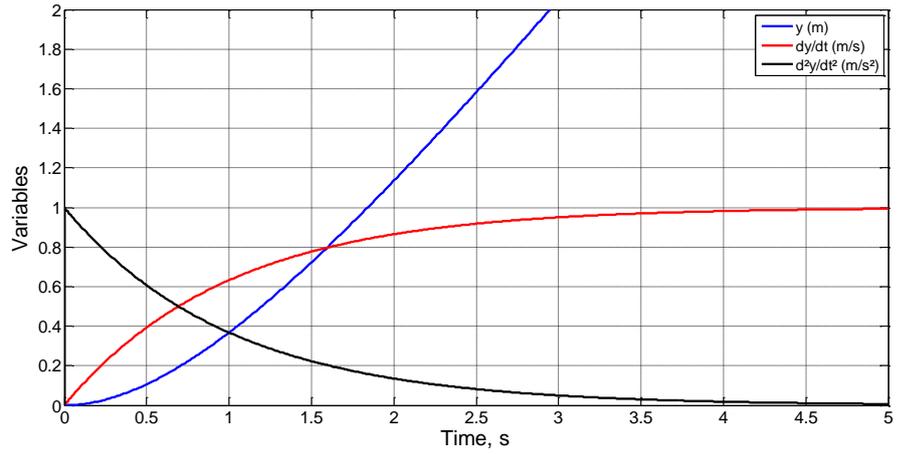
Adoptaremos  $t_0$  como el tiempo requerido para que el objeto alcance la velocidad  $0.9v_0$ . La solución numérica proporciona los resultados de la Tabla 4.2. En todos los casos el factor de proporcionalidad que convierte las ecuaciones (4.6) y (4.7) en igualdades es relativamente cercano a la unidad (o de orden de magnitud unidad), excepto para los valores  $q=0.1$  y  $0.2$  (que suponen ya una no linealidad sensible en el problema) para los cuales, al principio del movimiento,  $v^q \approx 1$  y la aceleración disminuye acusadamente.

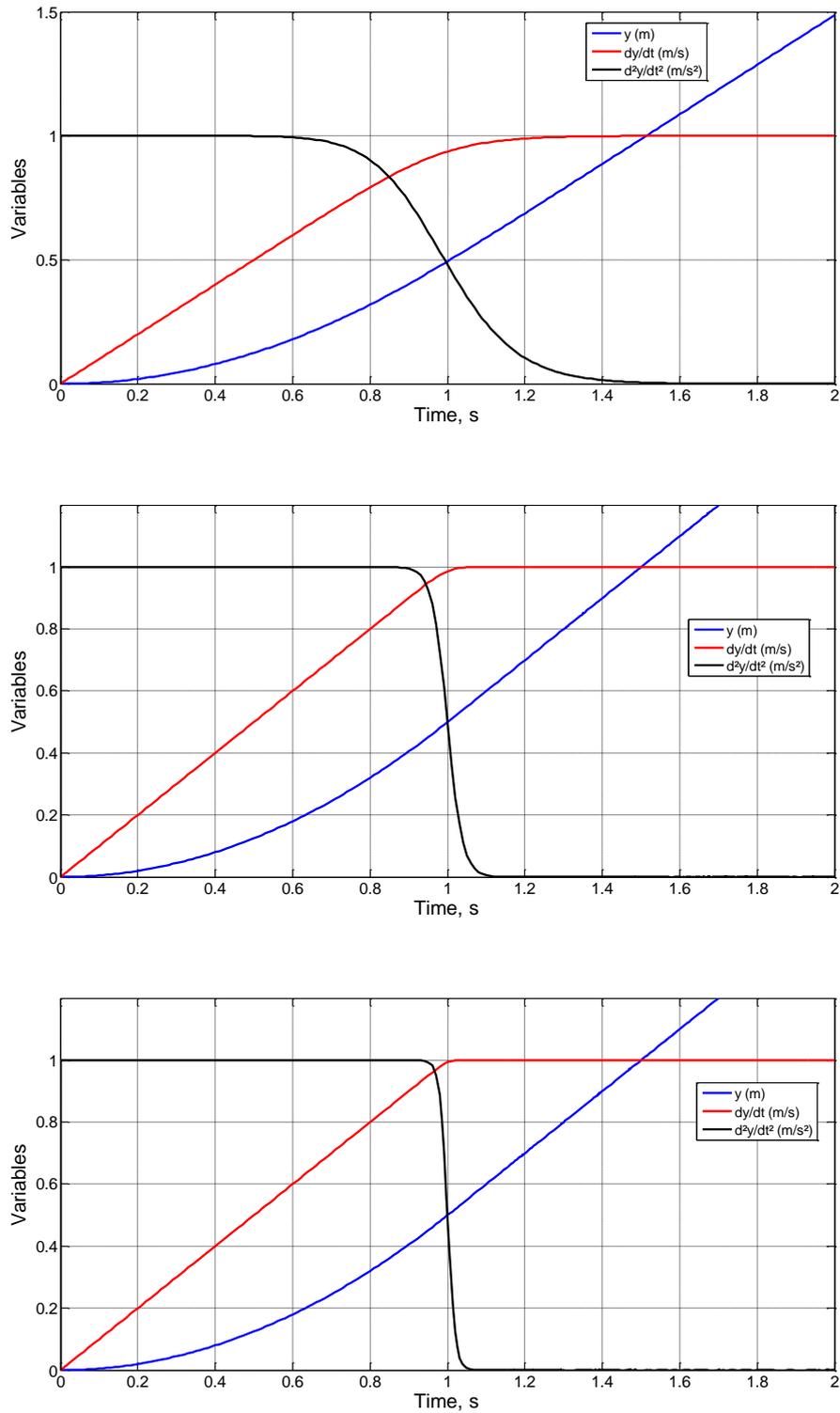
q	$v_0$	$t_0$	$y_0$
0.1	$(m_0g/a_0)^{10}$	$12.80(m_0/a_0)^{10}g^9$	$11.98(g^{19})(m_0/a_0)^{20}$
0.2	$(m_0g/a_0)^5$	$9.342(m_0/a_0)^5g^4$	$6.103(g^9)(m_0/a_0)^{10}$
0.5	$(m_0g/a_0)^2$	$4.041(m_0/a_0)^2g^1$	$1.403(g^3)(m_0/a_0)^4$
1	$(m_0g/a_0)$	$2.303(m_0/a_0)$	$1.403(gm_0^2/a_0^2)$
2	$(m_0g/a_0)^{1/2}$	$1.472(m_0/a_0)^{1/2}g$	$0.8305(m_0/a_0)$
4	$(m_0g/a_0)^{1/4}$	$1.103(m_0/a_0)^{1/4}g^{-3/4}$	$0.5636(g^{-1/2})(m_0/a_0)^{1/2}$
10	$(m_0g/a_0)^{0.1}$	$0.9361(m_0/a_0)^{0.1}g^{-0.9}$	$0.4351(g^{-4/5})(m_0/a_0)^{1/5}$
50	$(m_0g/a_0)^{0.02}$	$0.9002(m_0/a_0)^{0.02}g^{-0.98}$	$0.4050(g^{-0.96})(m_0/a_0)^{1/25}$
100	$(m_0g/a_0)^{0.01}$	$0.9000(m_0/a_0)^{0.01}g^{-0.99}$	$0.4050(g^{-0.98})(m_0/a_0)^{1/50}$

**Tabla 4.2 Valores de  $t_0$  e  $y_0$  de la simulación**

La Figura 4.2 muestra las soluciones numéricas de  $y(t)$ ,  $dy/dt$  y  $d^2y/dt^2$ , obtenidas por el software CODENET\_15, para  $m_0 = g = a_0 = 1$ , y  $q=0,1$  a  $100$ , (Tabla 4.2). Las soluciones para  $t_0$  (correspondientes a una velocidad del objeto de  $0.9v_0$ ) e  $y_0$  (los coeficiente numéricos de las columnas respectivas de la Tabla 4.2) coinciden con los valores proporcionados por las simulaciones.







**Figura 4.2** Resultados numéricos de  $y(t)$ ,  $dy/dt$  y  $d^2y/dt^2$  para  $m_0 = g = a_0 = 1$ ,  $y_{(t=0)} = y'_{(t=0)} = 0.1$  (superior), 0.2, 0.5, 1, 2, 4, 10, 50 y 100 (inferior)

#### 4.1.2. Verificación de los resultados

Para verificar la validez de las ecuaciones (4.6) y (4.7), simularemos los 8 casos de la Tabla 4.3. Los valores de los parámetros de estos casos, todos ellos con  $q=4$  (valor para el cual

$v_o=[m_o g/a_o]^{1/4}$ ,  $t_o=1.103[m_o/(g^3 a_o)]^{1/4}$  e  $y_o=0.5636[m_o/(g a_o)]^{1/2}$ , de acuerdo con la Tabla 4.2), fueron elegidos de tal forma que las incógnitas  $t_o$  y/o  $y_o$  retienen el mismo valor en los casos seleccionados.

La primera prueba se refiere a los casos 1 a 3. Los valores de los parámetros de estos casos proporcionan la misma solución para las incógnitas  $t_o$  e  $y_o$ , ecuaciones (4.6) y (4.7), respectivamente. La Figura 4.3, que muestra la simulación de estos tres casos, confirma las soluciones teóricas de la adimensionalización. En la segunda prueba, casos 1, 4 y 6, los valores de los parámetros se cambiaron convenientemente a fin de mantener  $t_o$  en el valor de 1.103; las simulaciones confirman los resultados esperados, proporcionando valores diferentes para  $v_o$  e  $y_o$ , ambos coherentes con las soluciones teóricas (4.6) y (4.7), Figura 4.4.

Los casos 1, 5 y 7, tercera prueba, cambian sus parámetros de forma que retienen la misma solución teórica de  $y_o$  pero cambiando los valores de  $v_o$  y  $t_o$ . En efecto, las simulaciones, Figura 4.5, muestran de nuevo que los resultados numéricos coinciden con los derivados de la adimensionalización. Finalmente, el caso 8 es una prueba independiente cuyo resultado, Figura 4.6, también reproduce las soluciones teóricas (4.6) y (4.7).

Caso	1	2	3	4	5	6	7	8
$m_o$	1	2	4	1	1	8	2	1
$a_o$	1	2	4	1/8	½	1	1	1
$g$	1	1	1	2	2	2	2	16
$v_o$	1	1	1	0.5	1.414	2	1.414	2
$t_o$	1.103	1.103	1.103	1.103	0.7799	1.103	0.7799	0.138
$y_o$	0.5636	0.5636	0.5636	1.1272	0.5636	1.1272	0.5636	0.1409

**Tabla 4.3** Valores de los parámetros de los casos 1 a 8 y soluciones teóricas de  $v_o$ ,  $t_o$  (4.6) e  $y_o$  (4.7)

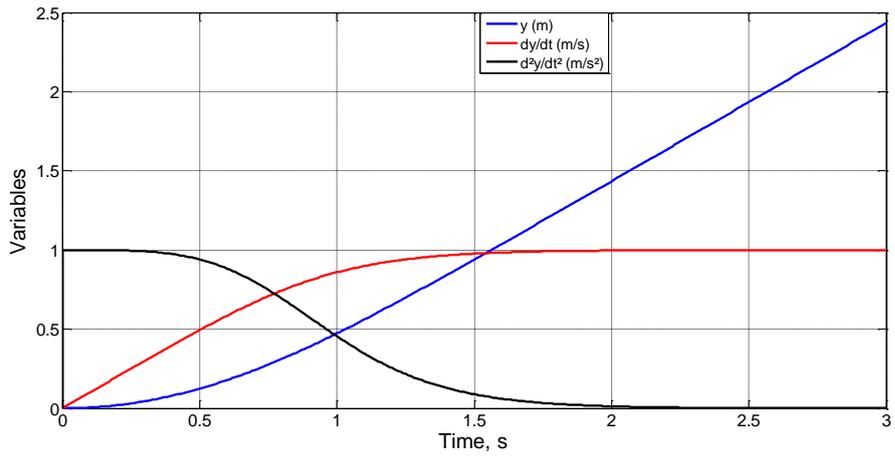


Figura 4.3 Simulaciones de los casos 1. 2 y 3

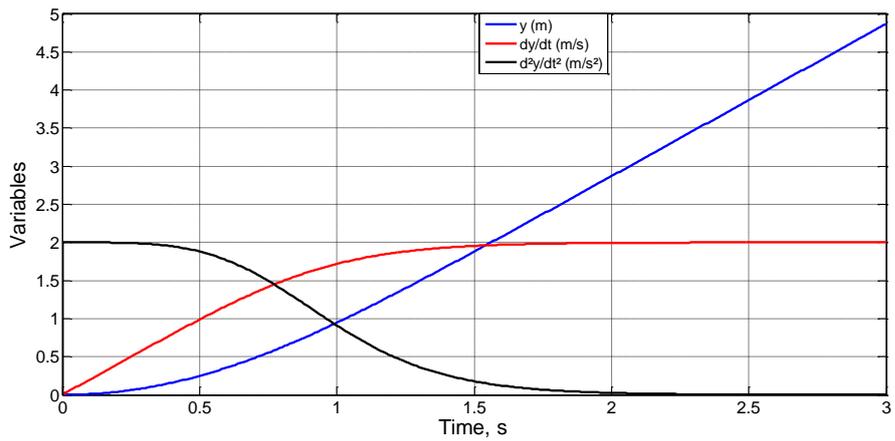
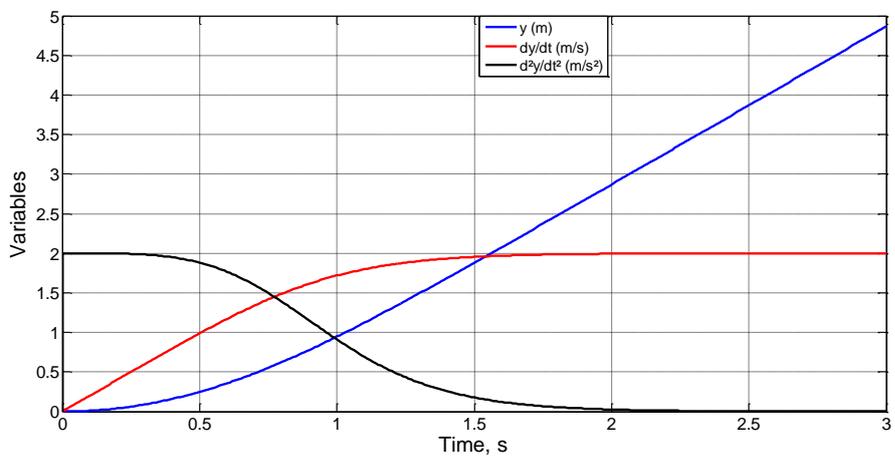


Figura 4.4 Simulaciones de los casos 4 (arriba) y 6 (abajo)

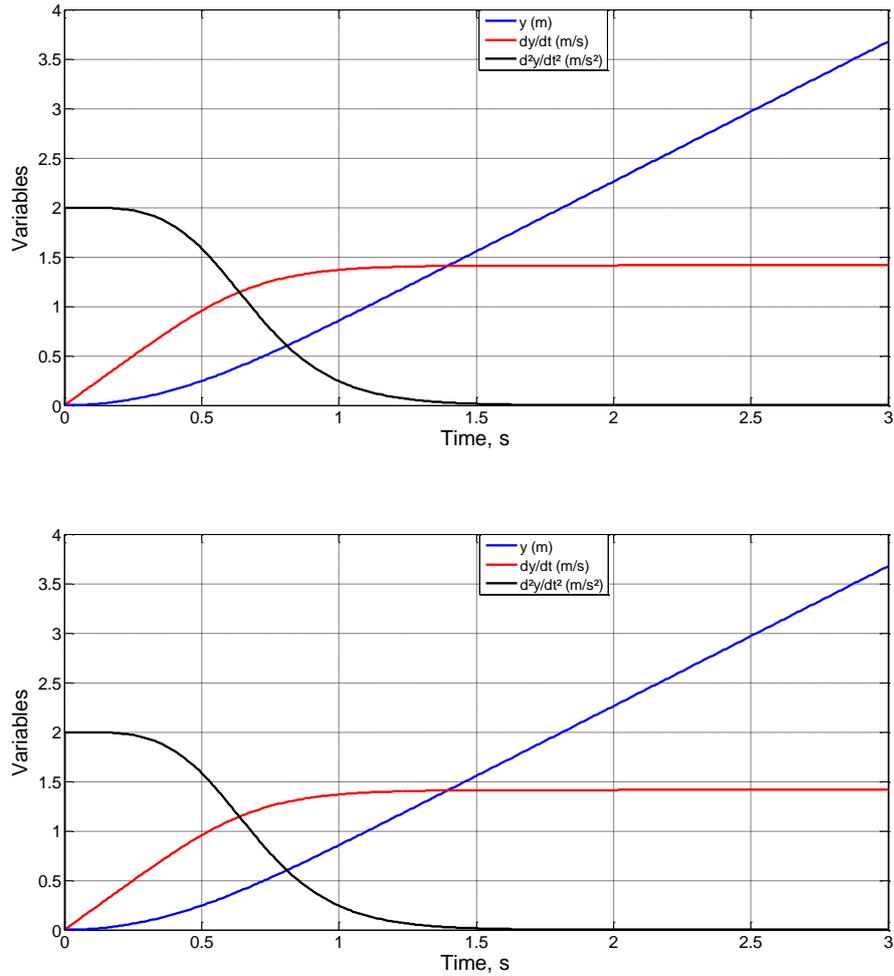


Figura 4.5 Simulaciones de los casos 5 (arriba) y 7 (abajo)

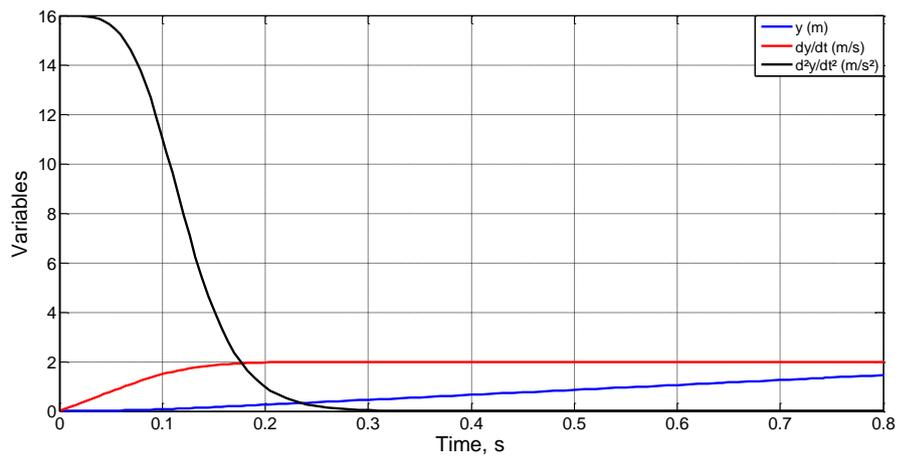


Figura 4.6. Simulación del caso 8

En relación con la ecuación (1) donde no aparece la velocidad, su adimensionalización usando las referencias  $t_0$  e  $y_0$ , proporciona los siguientes tres coeficientes y dos grupos adimensionales:

$$\Psi_1 = m_0 g, \quad \Psi_2 = a_0 (y_0/t_0)^q, \quad \Psi_3 = m_0 (y_0/t_0^2) \quad (4.8)$$

$$\pi_1 = \frac{g t_0^2}{y_0}, \quad \pi_2 = \frac{k}{m_0} \frac{y_0^{q-1}}{t_0^{q-2}} \quad (4.9)$$

Estos grupos, reorganizados convenientemente de forma que cada incógnita aparezca en sólo uno los grupos, pueden escribirse en la forma

$$\pi_{1'} = \frac{g^{q-1} a_0 t_0^q}{m_0}, \quad \pi_{2'} = \frac{k}{m_0} \frac{y_0^{q/2}}{g^{(2-q)/2}} \quad (4.10)$$

El orden de magnitud de  $t_0$  e  $y_0$  proveniente de estas expresiones coincide con los resultados anteriores (4.6) y (4.7).

## 4.2. Bolita engarzada en un alambre parabólico

### 4.2.1. Deducción de los grupos adimensionales

Una pequeña bola de masa  $m_0$  desliza engarzada, sin fricción y partiendo del reposo, sobre un alambre parabólico de ecuación  $y = bx^2$ , desde un punto de coordenadas  $(x_0, y_0)$ , Figura 4.7. La bolita alcanzará el punto más bajo del alambre en un tiempo  $t_0$  con velocidad  $v_0$ , y oscilará armónicamente alrededor de esta posición con un periodo  $T_0 = 4t_0$  (tiempo independiente de la masa de la bolita) ya que todas las fuerzas (inercia y peso) que intervienen en la ecuación de balance son proporcionales a la masa.

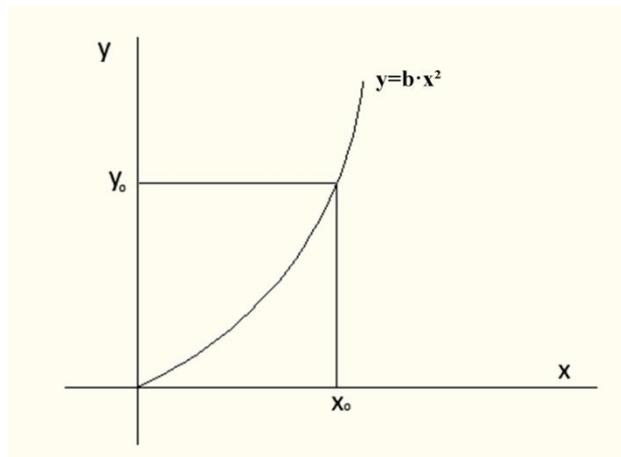


Figura 4.7 Esquema físico del problema

La dinámica de este problema se rige por la ecuación de momento

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4bx^2 + 4xb^2 \frac{dx}{dt} + 2gbx = 0 \quad (4.11)$$

Las magnitudes de referencia adoptadas son:

- $x_0$  posición (x) inicial de la bolita,
- $t_0$  tiempo en alcanzar la posición más baja de la trayectoria,
- $v_0$  velocidad máxima de la bolita (en el origen de coordenadas)

La velocidad  $v_0$  puede deducirse del balance energético entre los puntos inicial y origen de coordenadas

$$v_0 = 2gy_0^{1/2} = 2gbx_0^2^{1/2} \quad (4.12)$$

Sustituídas las variables adimensionales  $x' = x/d_0$  y  $t' = t/t_0$  en la ecuación (4.11) llegamos a

$$\frac{x_0}{t_0^2} \frac{d^2x'}{dt'^2} + 4b^2x_0^2 \frac{x_0}{t_0^2} \frac{d^2x'}{dt'^2} x'^2 + 4b^2x_0 \frac{x_0^2}{t_0^2} \frac{dx'}{dt'} + 2gbx_0x' = 0 \quad (4.13)$$

Tras aproximar las variables independientes y sus cambios al valor unidad, esta ecuación contiene tres coeficientes independientes

$$C_1 = \frac{x_0}{t_0^2}, \quad C_2 = 4b^2x_0^2 \frac{x_0}{t_0^2}, \quad C_3 = 2gbx_0 \quad (4.14)$$

de los que emergen dos grupos adimensionales que pueden expresarse, por ejemplo, en la forma

$$\pi_1 = 4b^2x_0^2, \quad \pi_2 = t_0^2(2gb) \quad (4.15)$$

De ellos se deduce el orden de magnitud de  $t_0$

$$t_0 = \frac{1}{2gb} \Psi 4b^2x_0^2 \quad (4.16)$$

Con  $\Psi$  una función desconocida.

### 4.2.2. Verificación de los resultados

En primer lugar, se valida la expresión (4.16) simulando los casos mostrados en la Tabla 4.4. Para todos ellos la bolita parte del reposo, i.e.,  $dx/dt_{t=0}=0$ .

Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9(caso 1)	10
b	1	2	4	1	1	1	1	1	1	1
g	1	0.5	0.25	4	16	25	1	1	1	1
$x_0$	1	0.5	0.25	1	1	1	4	2	1	0.25
$T_0$ (simulación)	7.426	7.426	7.426	3.730	1.843	1.474	23.07	12.49	7.427	4.714

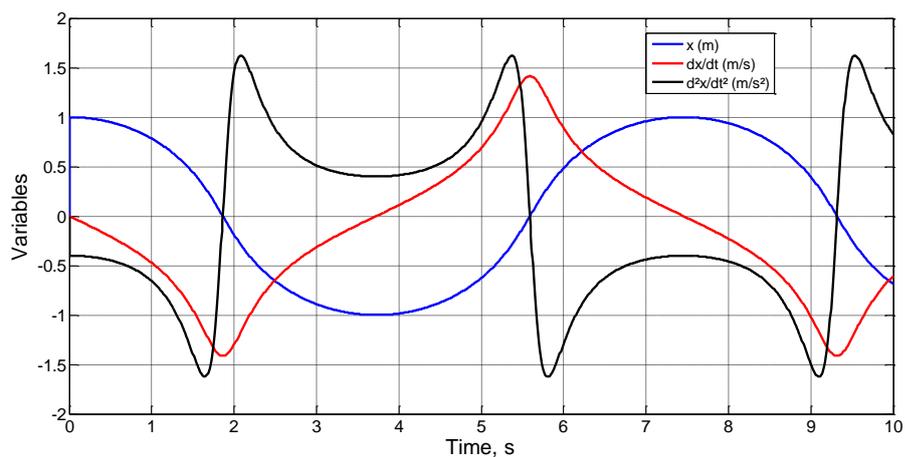
**Tabla 4.4 Valores de los parámetros de los casos 1 a 10**

La primera prueba se refiere a los casos 1 a 3. Los valores de  $\sqrt{2gb}$  y  $4b^2x_0^2$  son los mismos para cada uno de los casos, resultando el mismo valor de  $t_0$ . Las soluciones numéricas de  $x(t)$ , utilizando en cada caso la posición inicial como variable de escala, y sus derivadas  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$ , se muestran en la Figura 4.8. De estos resultados, el tiempo característico es  $t_0 = 1.857$  s, el periodo de oscilación  $T=4t_0 = 7.426$  y la frecuencia  $f_0 = 1/T_0 = 0.1346$  Hz. El espectro de la transformada rápida de Fourier, en adelante FFT, para los tres casos, que revela la no linealidad del problema, sólo contiene armónicos impares merced a la simetría de  $x(t)$  respecto al eje  $y$ , Figura 4.9. La frecuencia del tercer armónico es 0.4038 Hz.

De acuerdo con la solución (4.16), la función  $\Psi$  para los tres casos tiene un orden de magnitud unidad,

$$\Psi \sqrt{4b^2x_0^2} = 4 = t_0 \sqrt{2gb} = 1.857 \quad \bar{z} = 2.627.$$

Los diagramas de fase  $x(t) = f \frac{dx(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx(t)}{dt} = f \frac{d^2x(t)}{dt^2}$  y  $x(t) = f \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ , Figura 4.10, representan una mejor ilustración de la no-linealidad del problema.



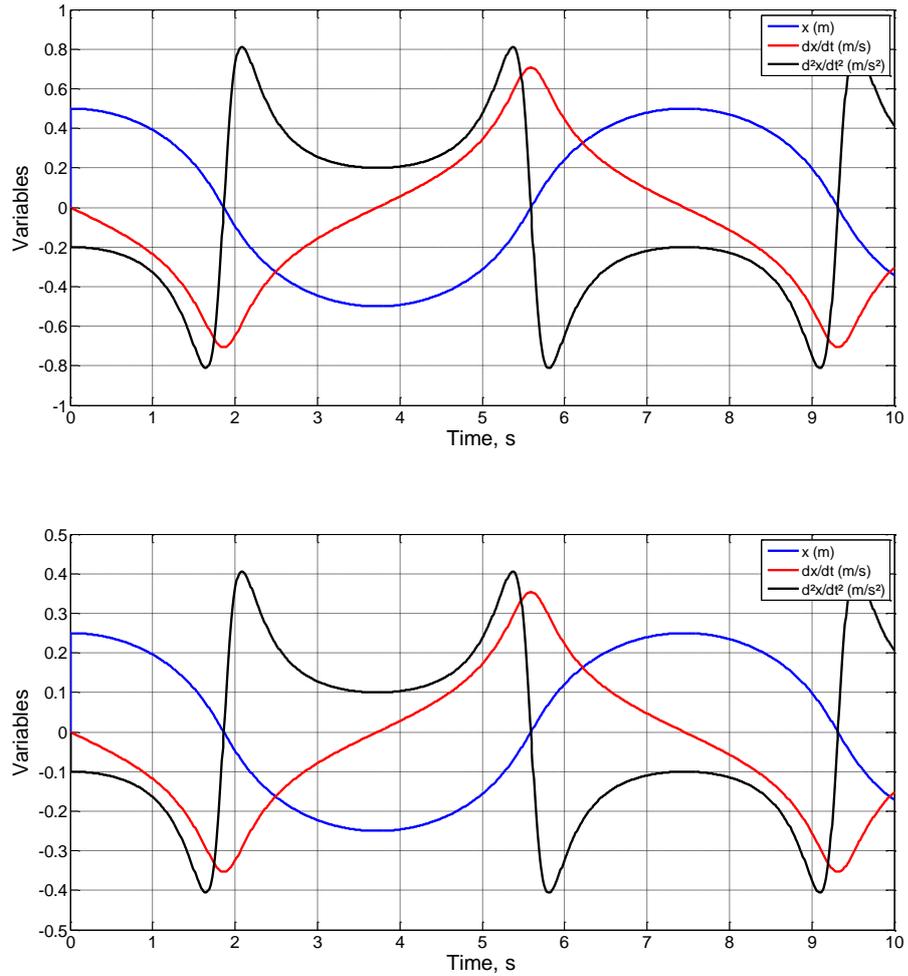


Figura 4.8 Soluciones  $x(t)$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  de los casos 1 a 3 (de arriba hacia abajo)

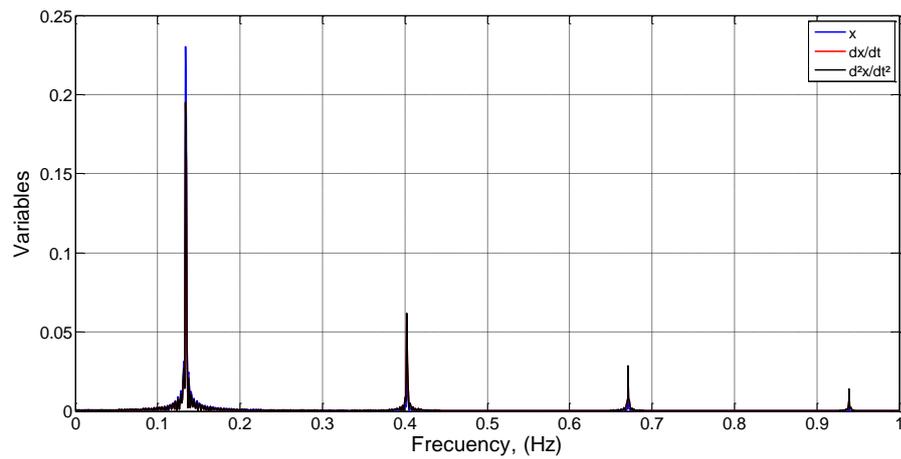
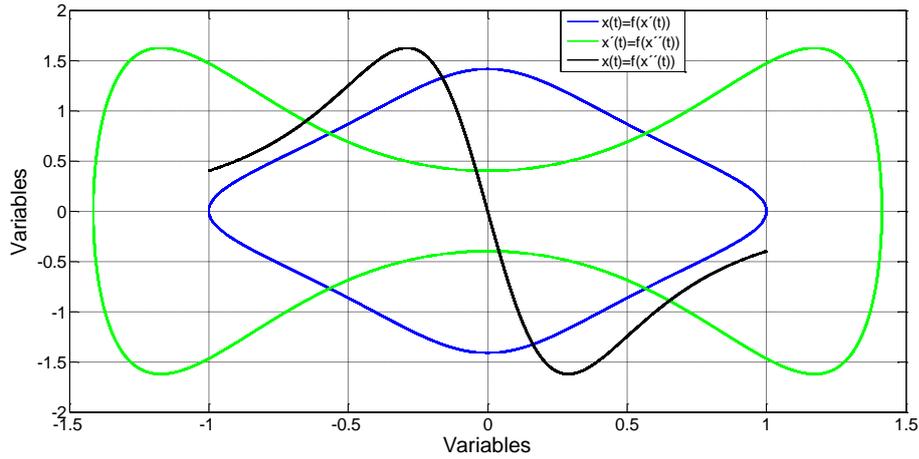


Figura 4.9 FFT de la solución  $x(t)$  para los casos 1 a 3

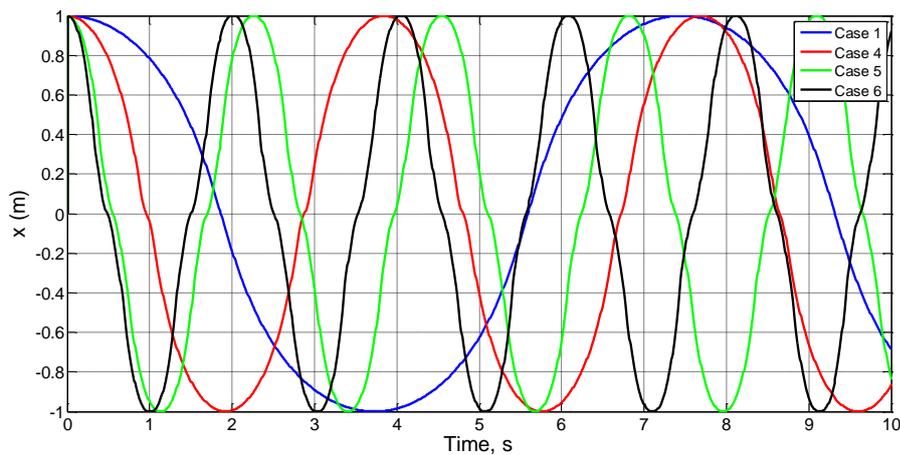


**Figura 4.10 Diagramas de fase del caso 1.**  $x(t) = f \frac{dx(t)}{dt}$  ,  $\frac{dx(t)}{dt} = f \frac{d^2x(t)}{dt^2}$  y  $x(t) = f \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

Como segunda prueba, investigaremos la influencia de la aceleración de la gravedad simulando los casos 1, 4, 5 y 6. La Figura 4.11 muestra la solución numérica de la posición  $x(t)$ , proporcionada por CODENET\_15. Como se esperaba, los tiempos característicos o periodos de oscilación disminuyen con  $g^{-1/2}$ :

$$T_{o(g=1)} = 7.426, \quad T_{o(g=4)} = 3.713, \quad T_{o(g=16)} = 1.856, \quad T_{o(g=25)} = 0.928$$

Estos resultados son coherentes con la solución teórica (4.16) ya que el argumento de  $\Psi$  tiene el mismo valor numérico y por tanto, la función, también el mismo valor para los cuatro casos,  $\Psi_4 = 2.627$



**Figura 4.11 Solución numérica de  $x(t)$ . Casos 1, 4, 5 y 6 (en orden decreciente de periodos)**

Para ver la influencia de la posición inicial de la bolita, tercera prueba, simulamos los casos 7, 8, 9 (idéntico al 1) y 10. La Figura 4.12 muestra los resultados de la simulación. Los tiempos característicos obtenidos son

$$t_0 = 5.822 \text{ s } (x_0=4), \quad t_0=3.111 \text{ s } (x_0=2), \quad t_0=1.857 \text{ s } (x_0=1), \quad t_0 = 1.178 \text{ s } (x_0=0.25)$$

De estos datos, los valores de  $\Psi$  para los argumentos de cada caso son

Caso 7:  $\Psi(64) = 5.8216 \times 1.414 = 8.233$

Caso 8:  $\Psi(16) = 3.1113 \times 1.414 = 4.400$

Caso 9:  $\Psi(4) = 1.857 \times 1.414 = 2.627$

Caso 10:  $\Psi(0.25) = 1.1784 \times 1.414 = 1.666$

Adviértase que los valores de  $\Psi$  son del orden de magnitud unidad incluso para valores elevados de su argumento, un resultado de acuerdo con lo esperado (Capítulo 2). En concreto, el caso 7 tiene un valor particularmente alto porque el punto inicial está muy lejos del origen, aumentando así la no linealidad de la trayectoria. La dependencia general entre los grupos,  $\pi_2 = \Psi(\pi_1)$ , puede aproximarse suficientemente si se obtienen simulaciones para un buen número de valores de su argumento. Para los cuatro valores anteriores, esta dependencia se muestra en la Figura 4.12. Trabajando ahora con esta información, puede procederse a presentar de forma universal los resultados deducidos con la adimensionalización. Así, a partir de un conjunto cualquiera de valores de  $b, g$  y  $x_0$ , se obtiene el valor del monomio  $\pi_1$  ( $\pi_1 = 4b^2x_0^2$ ), el de  $\pi_2$  a partir de la dependencia anterior y, finalmente, el orden de magnitud del tiempo característico con la expresión (4.16),  $t_0 = (\pi_2/2gb)^{1/2}$ .

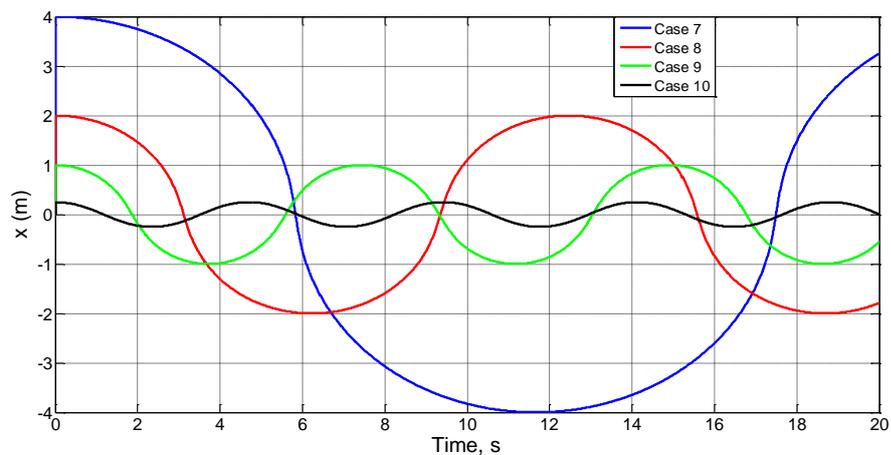


Figura 4.12 Solución numérica de  $x(t)$ . Casos 7, 8, 9 y 10

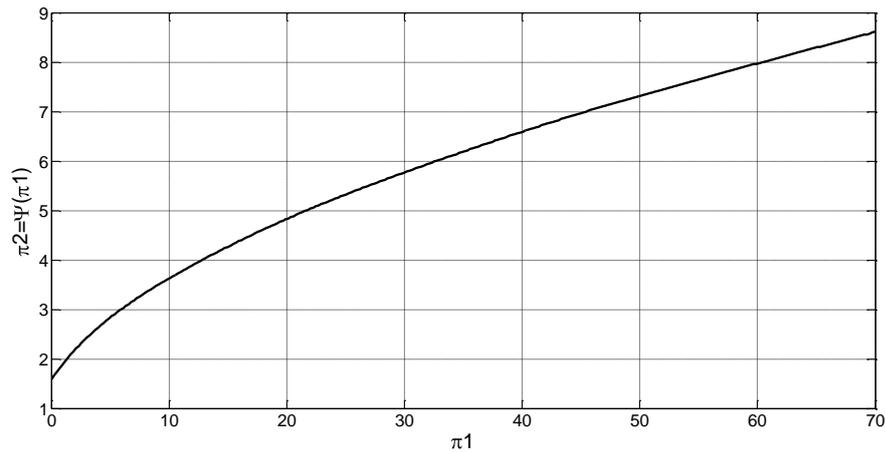


Figura 4.13 Dependencia  $\pi_2 = \Psi(\pi_1)$  para los argumentos de los casos 7, 8, 9 y 10

### 4.3. Masa pendiente de un muelle vertical bajo la acción de la gravedad

#### 4.3.1. Deducción de los grupos adimensionales

El esquema físico del problema se muestra en la Figura 4.13. Un objeto de masa  $m_0$  se sujeta del extremo de un muelle de masa despreciable, en posición vertical y fijado al techo por su otro extremo. Se asume un comportamiento no lineal del muelle. Para simplificar, asumiremos, también, que la oscilación del sistema se produce abandonando la masa desde una posición en la que el muelle no almacena energía, posición del punto inferior del muelle sin estirar.

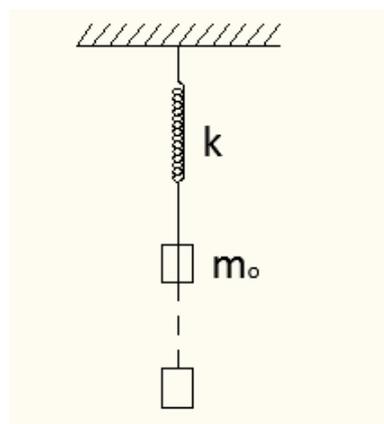


Figura 4.13 Esquema físico del problema

Asumiendo un comportamiento no lineal del muelle, con una fuerza elástica dada por

$$f_m = k(y)^q$$

donde  $y$  es el desplazamiento del extremo inferior del muelle,  $k$  una constante elástica y  $q$  un número positivo (cercano a la unidad), la ecuación de gobierno o balance de fuerzas se escribe en la forma

$$m_0 g - k y^q = m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (4.17)$$

Usando las referencias  $y_{o,e}$  (posición de equilibrio del sistema muelle-masa en reposo dada por la condición  $m_0 g = k(y_{o,e})^q$ , o  $y_{o,e} = \sqrt[q]{m_0 g/k}$ ) y  $t_0$  (tiempo requerido por la masa para alcanzar la posición  $y_{o,e}$  desde el instante inicial), las variables adimensionales se definen en la forma  $y' = y/y_{o,e}$  y  $t' = t/t_0$ . Sustituyendo éstas y la expresión de  $y_{o,e}$  en la ecuación (4.17), obtenemos la forma adimensional de esta última:

$$m_0 g - m_0 g (y')^q = \left[ \frac{m_0^q \overline{m_0 g/k}}{t_0^2} \right] \left( \frac{d^2 y'}{dt'^2} \right) \quad (4.18)$$

Asumiendo que las variables adimensionales y sus cambios son de orden de magnitud unidad, los coeficientes de la ecuación anterior, del mismo orden de magnitud tras las consabidas aproximaciones, son

$$C_1 = m_0 g, \quad C_2 = \frac{m_0^q \overline{m_0 g/k}}{t_0^2}$$

Y dan lugar a un solo monomio adimensional de orden de magnitud unidad

$$\pi_1 = \frac{m_0 g/k}{g t_0^2} = \frac{m_0 g^{1-q}/k}{t_0^2} \sim 1 \quad (4.19)$$

La incógnita  $t_0$  puede expresarse, pues, en la forma

$$t_0 \sim \sqrt[2q]{\frac{m_0 g^{1-q}}{k}} \quad (4.20)$$

### 4.3.2. Verificación de los resultados

Estudiaremos cuatro casos.

#### Caso i) $q=1$ (comportamiento lineal del muelle)

La expresión de  $t_0$ , (4.20), se reduce a

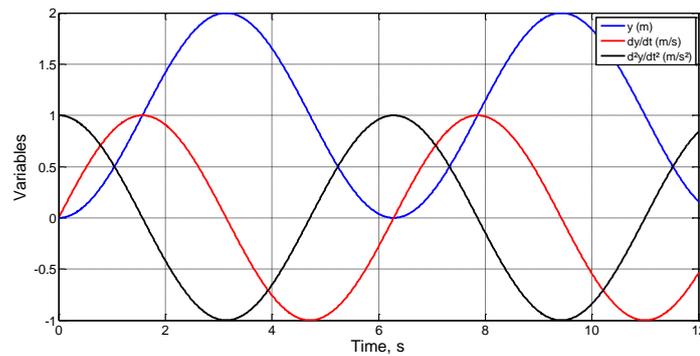
$$t_0 \sim \frac{m_0}{k}^{1/2} \quad (4.21)$$

El período de oscilación es

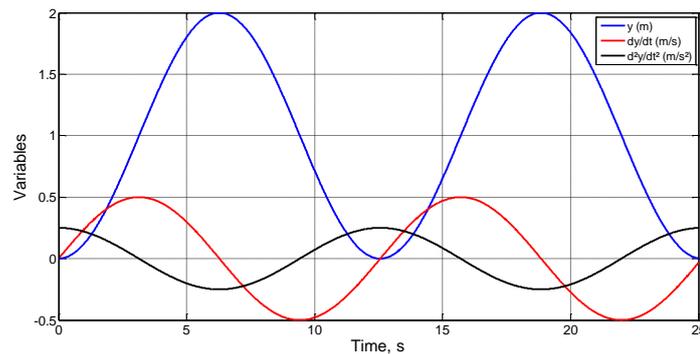
$$T_0 \approx 4t_0 \sim 4(m_0/k)^{1/2}$$

Un valor muy cercano a la solución exacta,  $T_0 = 2\pi(m_0/k)^{1/2}$ . La ecuación (4.21) puede escribirse en forma de igualdad con una sola simulación numérica o prueba experimental. Por ejemplo, para los parámetros  $m_0=k=g=1, e_{y(t=0)} = (dy/dt)_{t=0} = 0$ , la solución numérica (Figura 4.14 a) aporta el valor  $T_0=2\pi$ (coincidente con la teórica), con lo que

$$T_0 = (1.5708) \times 4(m_0/k)^{1/2}.$$



a)



b)

**Figura 4.14 Solución numérica para  $q=1$   $e_{y(t=0)}=(dy/dt)_{t=0}=0$**

**a):  $m_0=k=g=1$ , b):  $m_0=4, g=0.25$  y  $k=1$**

Para los valores  $m_0=4, g=0.25, k=1$ , la posición de equilibrio es la misma,  $y_{o,e}=m_0g/k$ , mientras que el periodo de oscilación se duplica, Figura 4.14 b).

**Caso ii)  $q=0.5$**

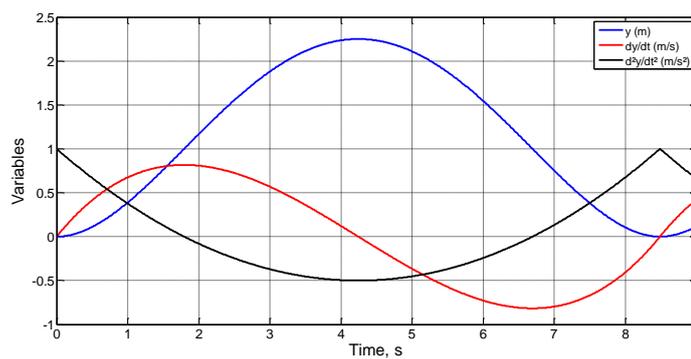
La incógnita  $t_0$  viene ahora dada por

$$t_0 \sim \frac{m_0}{k} \bar{g} \tag{4.22}$$

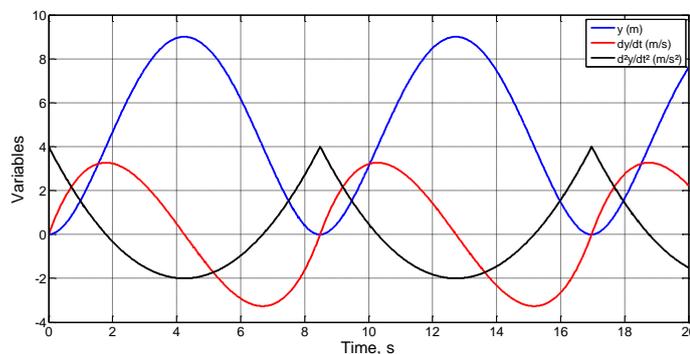
La Figura 4.15a, muestra la solución numérica de la posición, velocidad y aceleración de la masa ( $y$ ,  $dy/dt$  y  $d^2y/dt^2$ ) para los valores  $m_0=k=g=1$ , e  $y_{(t=0)} = (dy/dt)_{(t=0)} = 0$ . Los resultados son  $y_{o,e} = 1$  y  $t_0 = 1.7934$  y la expresión general de la incógnita es  $t_0 = (1.7934)(m_0/k)g^{1/2}$ .

Merced a la no linealidad del problema, los desplazamientos de la masa por encima (1 m) y por debajo (1.25 m) de la posición de equilibrio no son iguales. Esta pérdida de simetría hace que  $T_0 \neq 4t_0$ . De la simulación numérica  $T_0 = 8.487$ , un valor del mismo orden de magnitud que  $4t_0$ , como se esperaba.

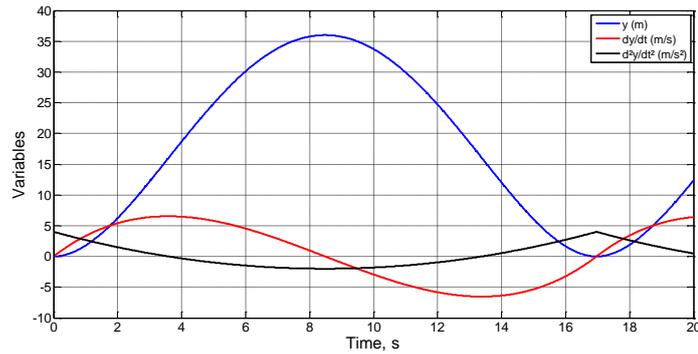
Por otro lado, la Figura 4.15b muestra la solución para los valores  $m_0=1$ ,  $k=2$ ,  $g=4$ ,  $y_{(t=0)} = (dy/dt)_{(t=0)} = 0$  y  $m_0=0.5$ ,  $k=1$ ,  $g=4$ , e  $y_{(t=0)} = (dy/dt)_{(t=0)} = 0$ . Los parámetros se han elegido de forma que el grupo  $(m_0/k)g^{1/2}$  retiene el mismo valor numérico, induciendo así el mismo valor de  $t_0$  (1.7934) pero con diferente posición de equilibrio. Finalmente, la Figura 4.15c muestra la solución para los parámetros  $m_0=1$ ,  $k=1$ ,  $g=4$  e  $y_{(t=0)} = (dy/dt)_{(t=0)} = 0$ ; para estos valores  $t_0 = 2 \times 1.7934$  s.



a)



b)



c)

Figura 4.15  $y(t)$ ,  $dy/dt$  y  $d^2y/dt^2$ ,  $q=0.5$ . a)  $m_o=k=g=1$ , b)  $m_o = 1$ ,  $k=2$ ,  $g=4$  y  $m_o = 0.5$ ,  $k=1$ ,  $g=4$ , c)  $m_o = k= 1$ ,  $g=4$

### Caso iii) $q=2$

Para este valor

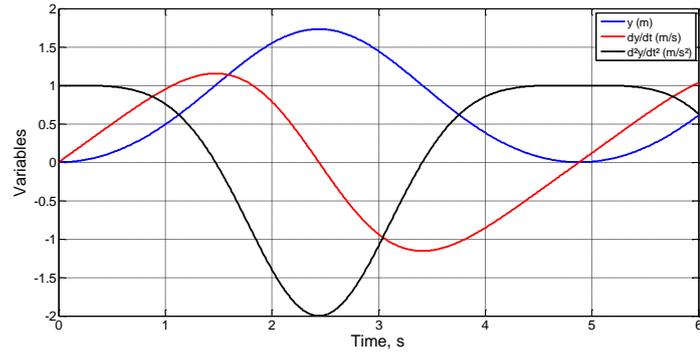
$$t_o \sim^4 \frac{\overline{m_o}}{\text{kg}} \quad (4.23)$$

e  $y_{o,e} = (m_o g/k)^{1/2}$ . La Figura 4.16a, muestra la solución numérica para los parámetros  $m_o=k=g=1$  e  $y_{(t=0)} = (dy/dt)_{(t=0)} = 0$ . La posición de equilibrio es  $y_{o,e} = 1$  mientras que  $t_o = 1.4699$  s. Con esta única prueba se obtiene la solución precisa

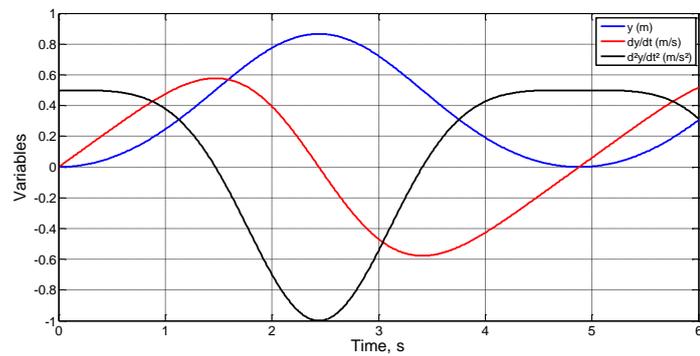
$$t_o = (1.4699) \ ^4 \frac{\overline{m_o}}{\text{kg}} \quad (4.24)$$

Los desplazamientos por encima y por debajo del equilibrio son 1 m y 0.731 m, respectivamente, mientras que  $T_o = 4.884$ , un valor del mismo orden de magnitud que  $4t_o$ .

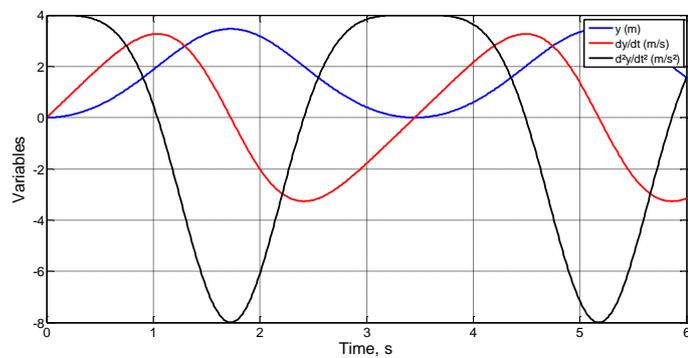
La Figura 4.16b es la solución de dos conjuntos de parámetros para los cuales el grupo  $(m_o/k)g^{1/2}$  retiene el mismo valor numérico:  $m_o=1$ ,  $k=2$ ,  $g=0.5$ , y  $m_o=0.5$ ,  $k=1$ ,  $g=2$ ;  $y_{(t=0)} = (dy/dt)_{(t=0)} = 0$  para ambos. La solución de estos casos es  $t_o = 1.4699$  mientras que la posición de equilibrio es diferente. La Figura 4.16c muestra la simulación para el conjunto de valores  $m_o=1$ ,  $k=1$ ,  $g= 4$  e  $y_{(t=0)} = (dy/dt)_{(t=0)} = 0$ . La solución es  $t_o = 2 \times 1.7934$  s.



a)



b)



c)

Figura 4.16  $y(t)$ ,  $dy/dt$  y  $d^2y/dt^2$ ,  $q=2$  e  $y_{(t=0)} = (dy/dt)_{(t=0)} = 0$ . a):  $m_0=k=g=1$ , b):  $m_0=1$ ,  $k=2$ ,  $g=0.5$ , y  $m_0=0.5$ ,  $k=1$ ,  $g=2$ , c):  $m_0=1$ ,  $k=1$ ,  $g=4$

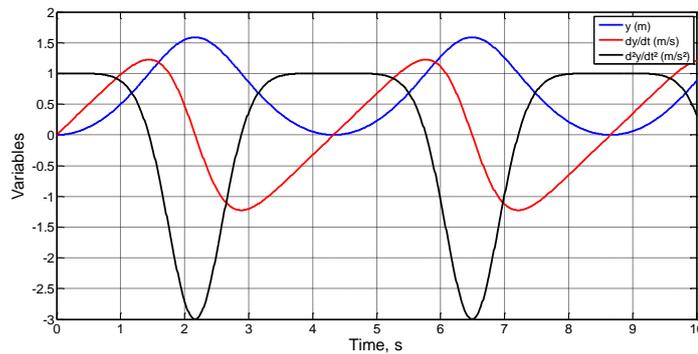
**Caso iv)  $q=3$  y  $5$**

Para estos casos de mayor no-linealidad resulta

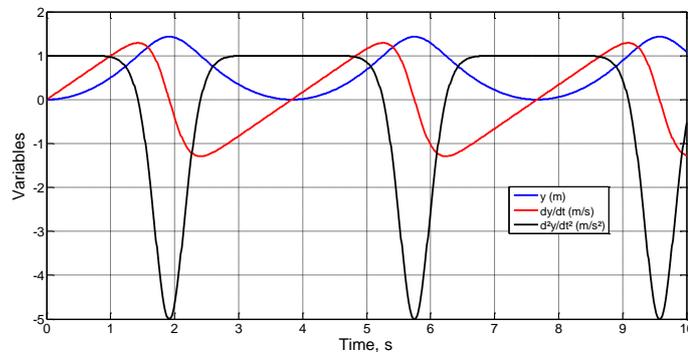
$$t_0 = (1.4427)^6 \sqrt{\frac{m_0}{kg^2}}, \text{ para } q=3 \tag{4.25}$$

$$t_0 = (1.4459)^8 \frac{m_0}{kg^4}, \text{ para } q=5 \tag{4.26}$$

La Figura 4.17 muestra la solución numérica de dos casos,  $m_0=k=g=1$  e  $y_{(t=0)} = (dy/dt)_{(t=0)} = 0$ , para  $q=3$ , y  $m_0=k=g=1$  e  $y_{(t=0)} = (dy/dt)_{(t=0)} = 0$ , para  $q=5$ . Para ambos,  $y_{o,e} = 1$ . Las soluciones numéricas arrojan los tiempos característicos  $t_0 = 1.4427$  ( $q=3$ ) y  $1.4259$  ( $q=5$ ) mientras que los desplazamientos máximos son de 1m por encima de la posición de equilibrio (para  $q=3$  y 5) y 0.5870 m ( $q=3$ ) y 0.4307 m ( $q=5$ ) por debajo de ésta. Por otro lado, los periodos valen 4.332 s, para  $q=3$ , y 3.920, para  $q=5$ , ambos del mismo orden de magnitud que  $4t_0$ .



a)



b)

**Figura 4.17  $y(t)$ ,  $dy/dt$  y  $d^2y/dt^2$ ,  $y_{(t=0)} = (dy/dt)_{(t=0)} = 0$ . a)  $m_0=k=g=1$  ( $q=3$ ), b)  $m_0=k=g=1$  ( $q=5$ )**

Los espectros de Fourier (FFT) para los valores  $m_0=k=g=1$ , con  $q=1, 0.5$  y  $2$ , se muestran en la Figura 4.18. Las frecuencias principales involucradas son del mismo orden de magnitud. Para los casos no lineales los espectros contienen armónicos de órdenes 2, 3... con amplitudes decrecientes. Para  $q=3$  y  $5$ , estas representaciones se muestran en la Figura 4.19. Los armónicos incrementan su amplitud al aumentar el grado de no linealidad o valor de  $q$ .

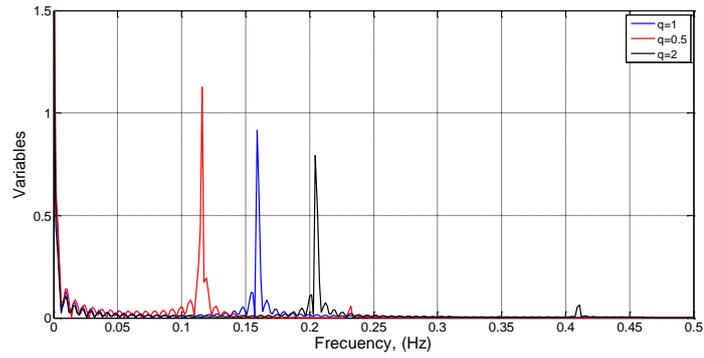
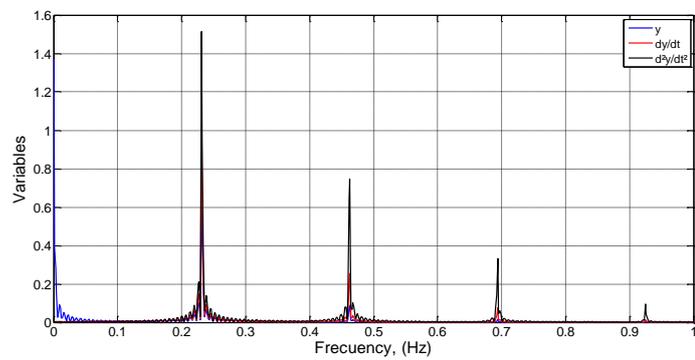
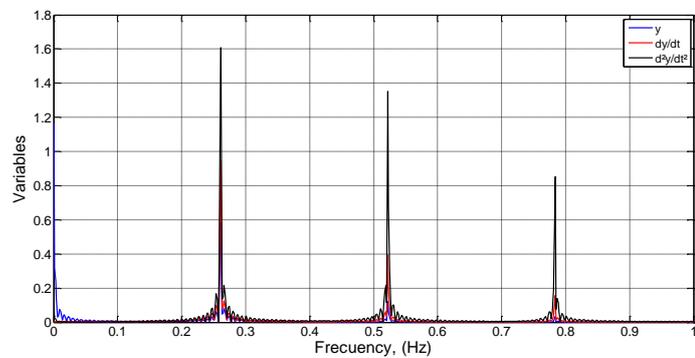


Figura 4.18 FFT, espectro de frecuencias,  $m_0=k=g=1$ . i) Caso lineal,  $q=1$  (curva central), ii) Casos no lineales,  $q=0.5$  (curva izquierda) y  $q=2$  (curva derecha)



a)



b)

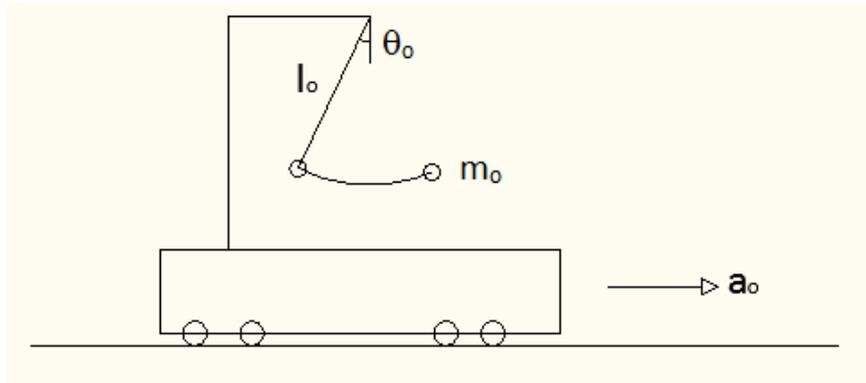
Figura 4.19 FFT frecuencias,  $m_0=k=g=1$ .  $q=3$  (a) y  $q=5$  (b)

## 4.4. Péndulo sobre plataforma acelerada

### 4.4.1. Deducción de los grupos adimensionales

Una plataforma con aceleración  $a_0$  transporta un péndulo físico de longitud  $l_0$  y masa  $m_0$ , como se muestra en la Figura 4.20. El abandono del péndulo desde un ángulo  $\theta_0$  respecto

de la vertical, con velocidad nula, da lugar a oscilaciones con periodo  $T_0$ . El objetivo del problema es estudiar dicho periodo mediante el proceso de adimensionalización.

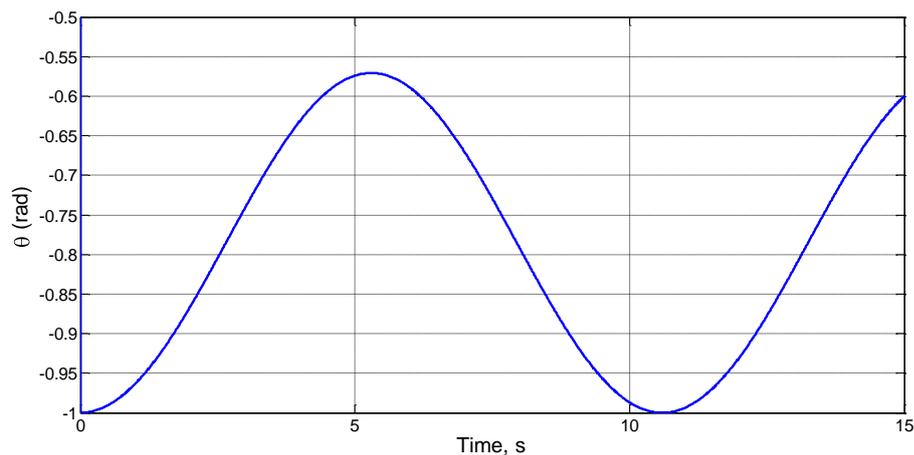


**Figura 4.20 Esquema físico del problema**

El sistema péndulo-plataforma tiene una posición de equilibrio estático definida por el ángulo  $\theta_e$ , alrededor del cual tienen lugar las oscilaciones. El valor de este ángulo es

$$\operatorname{tg} \theta_e = \frac{a_0}{g} \quad (4.27)$$

Para  $l_0 = 4$  y  $a_0 = g = 1$ , por ejemplo, se obtiene  $\theta_e = \pi/4 = (0.785)$  rad. La Figura 4.21 muestra la solución numérica de  $\theta(t)$  para las condiciones iniciales  $\theta_0 = -1$  rad y  $d\theta/dt|_{(t=0)} = 0$ . Advierta que  $\theta_0$  está muy cerca del valor medio de los desplazamientos angulares máximo y mínimo respecto de  $\theta_e$ , y que estos son negativos en todo instante.



**Figura 4.21  $\theta(t)$  para  $l_0 = 4$ ,  $a_0 = g = 1$ ,  $\theta_0 = -1$  y  $d\theta/dt(t=0) = 0$**

Sin pérdida de generalidad, simplificaremos nuestro estudio admitiendo la siguiente hipótesis: los valores de  $\theta_e$  y  $\theta_0$  son pequeños, pero  $\theta_0$  es grande en comparación con  $\theta_e$ . Esto

es,  $\theta_0 - \theta_e \approx \theta_0$ . Bajo esta hipótesis, que implica  $\cos(\theta_0) \approx 1$  y  $\text{sen}(\theta_0) \approx \theta_0$ , la ecuación de gobierno puede aproximarse a

$$l_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + a_0 + g\theta = 0 \quad (4.28)$$

Eligiendo las referencias  $\theta_0$  y  $t_0$  (tiempo requerido para que la bolita del péndulo alcance el punto más bajo de la trayectoria desde el instante inicial), las variables adimensionales se escriben en la forma  $\theta' = \theta/\theta_0$  y  $t' = t/t_0$ . Sustituyéndolas en la ecuación de gobierno anterior obtenemos su forma adimensional

$$l_0 \frac{\theta_0}{t_0^2} \frac{d^2\theta'}{dt'^2} + a_0 + g\theta_0\theta' = 0 \quad (4.29)$$

Esta ecuación contiene tres coeficientes

$$C_1 = l_0 \frac{\theta_0}{t_0^2}, \quad C_2 = a_0, \quad C_3 = g\theta_0, \quad (4.30)$$

y dos grupos adimensionales (por ejemplo, dividiendo los dos primeros por el último)

$$\pi_1 = \frac{l_0}{gt_0^2}, \quad \pi_2 = \frac{a_0}{g\theta_0} \quad (4.31)$$

De aquí, el orden de magnitud de  $t_0$  viene dado por la expresión

$$t_0 = \sqrt{\frac{l_0}{g}} \Psi \frac{a_0}{g\theta_0} \quad (4.32)$$

Este problema puede ilustrar las ventajas de la adimensionalización frente al análisis dimensional, como se puede observar en lo que sigue. La aplicación de este último comienza con la lista de variables relevantes:

$l_0, g, a_0, \theta_0$  y  $T_0$  (la incógnita)

$m_0$  puede eliminarse de esta lista pues es un factor de proporcionalidad común a las fuerzas que se balancean en el problema, inercia y peso. La elección de  $t_0$  en lugar de  $T_0$  es más apropiada ya que se trata de una incógnita relacionada directamente con  $\theta_0$ . Sin embargo, ésta es una elección que nunca se adopta por los defensores del análisis dimensional, que habitualmente no relacionan entre sí las variables de la lista relevante. Dado que el ángulo tiene dimensión nula (muy recientemente algunos autores le asignan una dimensión no nula), la aplicación del teorema de pi proporciona tres grupos adimensionales para este conjunto de variables

$$\pi_1 = \frac{l_0}{gT_0^2}, \quad \pi_2 = \frac{a_0}{g\theta_0}, \quad \pi_3 = \theta_0 \quad (4.33)$$

y a una solución menos precisa para la incógnita

$$t_o = \sqrt{\frac{l_o}{g}} \Psi \left( \frac{a_o}{g}, \theta_o \right) \quad (4.34)$$

Continuando con la adimensionalización, la solución para problemas con mayores valores de  $\theta_o$  puede obtenerse del desarrollo en serie de las funciones seno y coseno:

$$\text{sen } k\theta = k\theta - \frac{k\theta^3}{3!} + \frac{k\theta^5}{5!} - \dots$$

$$\text{cos } k\theta = 1 - \frac{k\theta^2}{2!} + \frac{k\theta^4}{4!} - \dots$$

Reteniendo los dos primeros términos de la serie (el uso de más términos conduce a resultados similares), la ecuación de gobierno tiene la forma

$$l_o \frac{d^2\theta}{dt^2} + a_o \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} \right) + g \left( a\theta - \frac{\theta^3}{3!} \right) = 0 \quad (4.35)$$

y su correspondiente forma adimensional

$$l_o \frac{\theta_o}{t_o^2} \frac{d^2\theta'}{dt'^2} + a_o \left( 1 - \frac{\theta_o^2}{2!} \theta'^2 \right) + g \left( \theta_o \theta' - \frac{\theta_o^3}{3!} \theta'^3 \right) = 0 \quad (4.36)$$

Los coeficientes de esta última ecuación, asumiendo las consabidas aproximaciones, son

$$C_1 = l_o \frac{\theta_o}{t_o^2}, \quad C_2 = a_o, \quad C_3 = g\theta_o, \quad C_4 = a_o \frac{\theta_o^2}{2!}, \quad C_5 = g \frac{\theta_o^3}{3!} \quad (4.37)$$

y los grupos adimensionales independientes derivados de ellos (por ejemplo, dividiendo por el último y re-organizándolos convenientemente)

$$\pi_{1,f} = \frac{l_o}{gt_o^2}, \quad \pi_{2,f} = \frac{a_o}{g}, \quad \pi_{3,f} = \theta_o \quad (4.38)$$

La solución es la misma que proporciona el análisis dimensional sustituyendo  $t_o$  por el periodo  $T_o$ .

$$t_o = \sqrt{\frac{l_o}{g}} \Psi \left( \frac{a_o}{g}, \theta_o \right) \quad (4.39)$$

#### 4.4.2. Verificación de los resultados

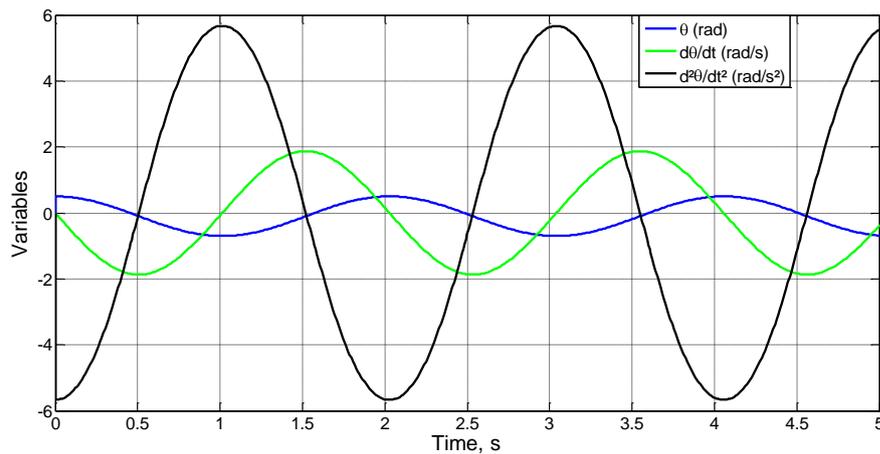
Para comprobar la fiabilidad de las soluciones derivadas de la adimensionalización simularemos numéricamente los casos recogidos en la Tabla 4.5. Para simplificar asumiremos que  $d\theta/dt_{(t=0)}=0$ .

Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$l_0$	1	2	4	1	1	1	1	2	4	1	3	1	3
$a_0$	1	2	4	1	0.5	0.25	1	1	1	1	6	1	6
$g$	10	20	40	10	10	10	10	20	40	10	30	10	30
$\theta_0$	0.5	0.5	0.5	0.1	0.05	0.025	1	0.05	0.025	0.75	1.5	0.05	0.1

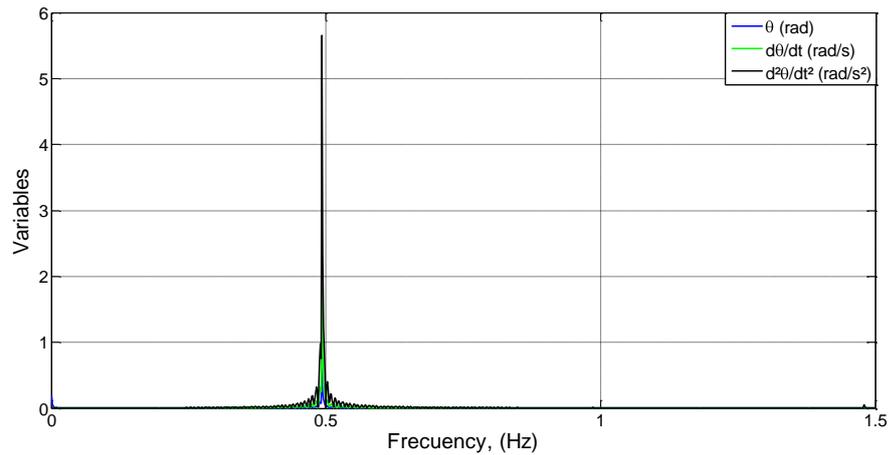
**Tabla 4.5 Valores de los parámetros del problema**

Comprobaremos, en primer lugar, los casos 1 a 3 relacionados con cambios proporcionales en los parámetros  $l_0$ ,  $g$ ,  $a_0$  y  $\theta_0$  (con valor alto para este ángulo). Los resultados numéricos de  $\theta(t)$ ,  $d\theta/dt$  y las frecuencias espectrales derivados de la simulación con CODENET\_15, se muestran en la Figura 4.22.

Para los tres casos,  $t_0 = 0.5069$ ,  $T_0 = 2.0275$  y  $f_0 = 0.4932$ . Como  $(l_0/g)^{1/2} = 0.3162$ , el valor de la función desconocida es  $\Psi(0.1, 0.5) = 0.5069/0.3162 = 1.6030$ , de orden de magnitud unidad como esperábamos.



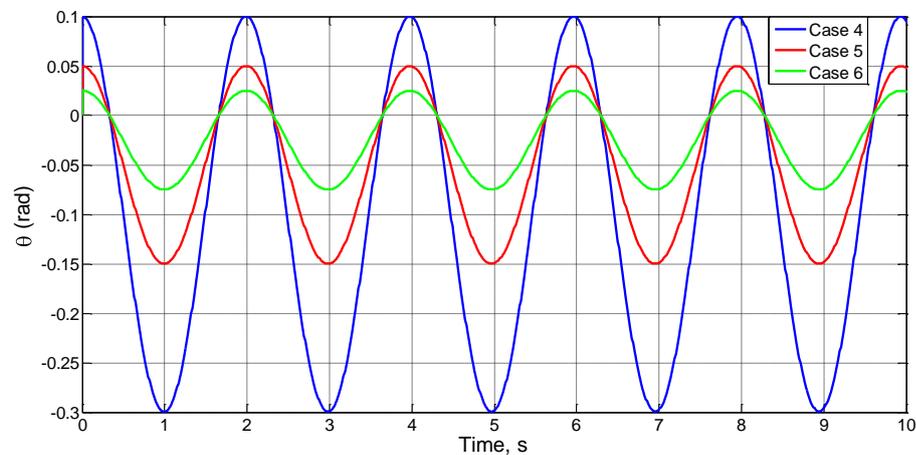
a)



b)

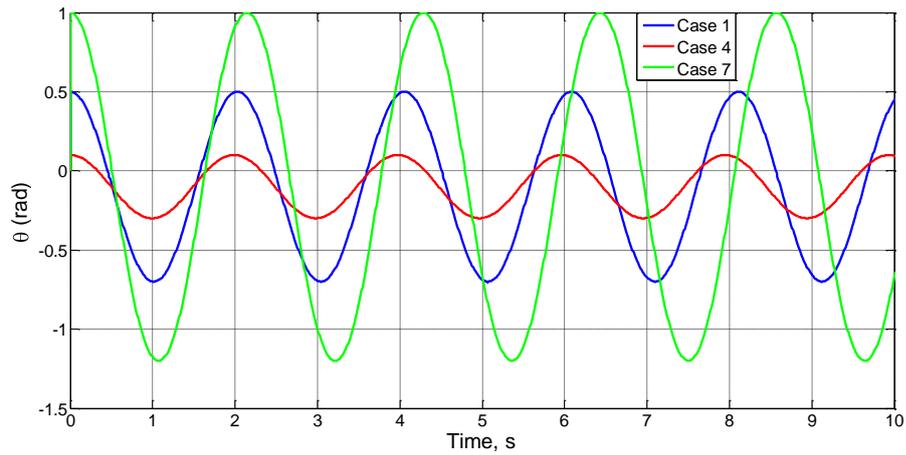
**Figura 4.22 Casos 1 a 3. a)  $\theta(t)$  y  $d\theta/dt$ , b) FFT frecuencias**

La segunda prueba, casos 4 a 6, estudia los cambios proporcionales en los parámetros  $\theta_0$  y  $a_0$  para pequeños ángulos  $\theta_0$ . La solución, Figura 4.23, muestra los mismos valores de  $t_0$  en los tres casos,  $t_0 = 0.5069$ ,  $T_0 = 2.0275$  y  $f_0 = 0.4932$ . De  $(l_0/g)^{1/2} = 0.3162$ , se deduce el valor de la función para este argumento,  $\Psi(1) = 0.5069/0.3162 = 1.6030$ , de nuevo del orden de magnitud unidad.

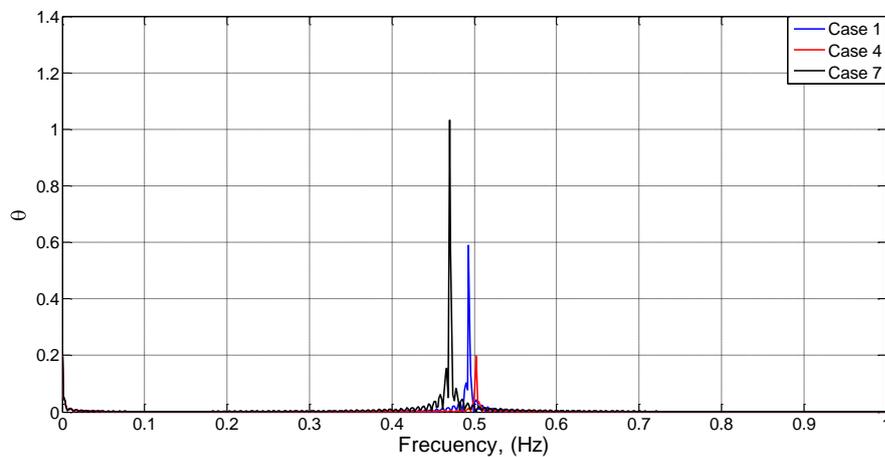


**Figura 4.23  $\theta(t)$  para los casos 4 a 6**

La influencia de  $\theta$  se estudia mediante los casos 1, 4 y 7. Las soluciones se muestran en la Figura 4.24. La frecuencia alta corresponde al menor valor de  $\theta_0$ :  $f_0 = 0.500$  (para  $\theta_0=0.1$ ),  $0.490$  (para  $\theta_0=0.5$ ) y  $0.470$  (para  $\theta_0=1$ ). Nuevos valores de la función desconocida para los argumentos de estos casos podrían ser fácilmente obtenidos.



a)



b)

**Figura 4.24 Casos 1, 4 y 7. a)  $\theta(t)$ , b) FFT frecuencias**

En la tercera prueba  $l_0$  y  $g$  cambian proporcionalmente mientras que  $g$  y  $\theta_0$  lo hacen inversamente, casos 4, 8 y 9. La solución de los casos 8 y 9 coincide con la del caso 4 ya conocida.

Finamente, se cambian todos los parámetros de forma que los grupos  $l_0/g$  y  $[a_0/(g\theta_0)]^{1/2}$  retengan el mismo valor numérico. Para pequeños ángulos, casos 10 y 11, la solución viene dada por las ecuaciones (4.34) y (4.39), para ángulos pequeños (Figura 4.25) y ángulos grandes (Figura 4.26), respectivamente. Todo ello demuestra que los resultados derivados del proceso de adimensionalización son correctos.

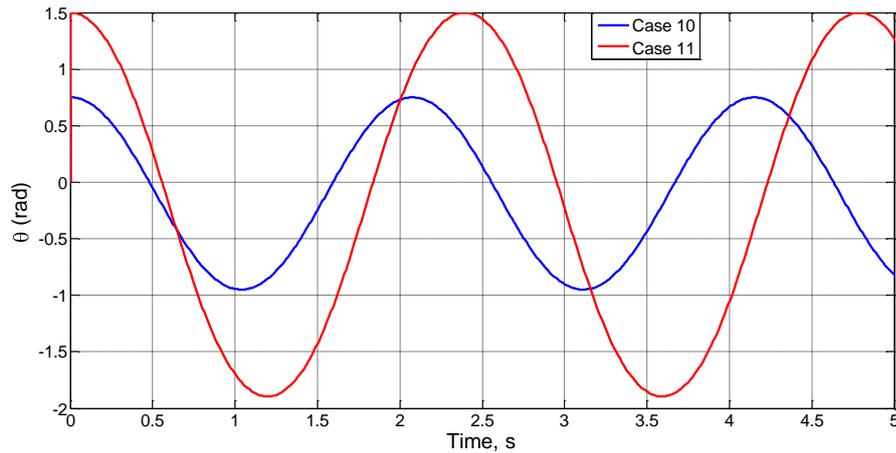


Figura 4.25  $\theta(t)$ . a) caso 10, b) caso 11

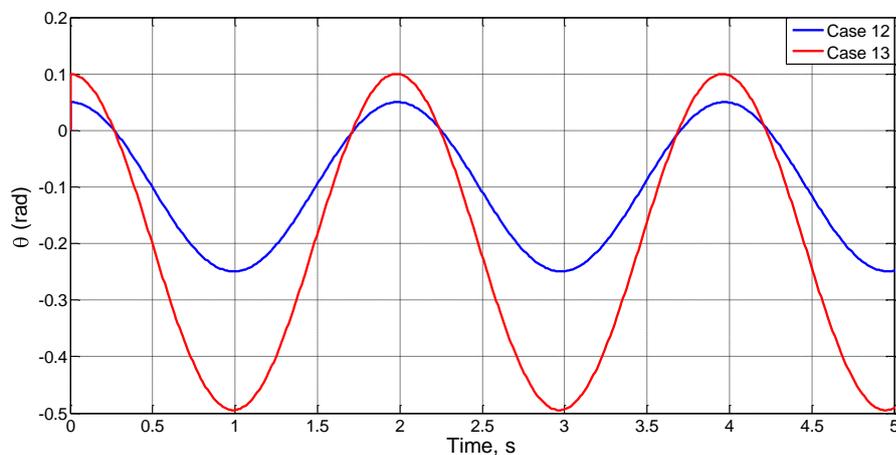


Figura 4.26  $\theta(t)$  para los casos 12 y 13

## 4.5. Oscilador de Duffing

### 4.5.1. Deducción de los grupos adimensionales

La ecuación que define este oscilador es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + k_1x + k_2x^3 = 0 \quad (4.40)$$

El segundo sumando de la ecuación es un término típico de amortiguamiento mientras que el primero junto con el tercero forman un oscilador puro asociado a la fuerza elástica  $k_1x$ , de frecuencia  $(m/k_1)^{1/2}$ . El término no lineal  $+k_2x^3$  puede asociarse también a una fuerza del mismo sentido que fuerza elástica anterior y que, al igual que ésta, cambia de sentido al cambiar el signo de  $x$ .

Haciendo caso omiso de la componente viscosa (término segundo de la ecuación), podría deducirse que el término  $k_2x^3$  modula (desplaza) el periodo o frecuencia del oscilador puro y establece asimismo la amplitud del recorrido; amplitud que en ausencia de este sumando puede ser cualquiera ya que la ecuación dimensional de los términos primero y tercero (oscilador puro) no contiene ningún parámetro espacial.

**i) Caso de amortiguamiento nulo**

Haciendo  $\beta=0$ , y definiendo las variables adimensionales

$$x' = \frac{x}{x_0}, \quad t' = \frac{t}{t_0}$$

donde las referencias  $x_0$  (dato) y  $t_0$  (incógnita) son, respectivamente, el desplazamiento máximo y el tiempo transcurrido desde el instante inicial (definido por  $x=x_0, dx/dt=0$ ) hasta la posición de equilibrio  $x=0$ , la ecuación (4.40) en forma adimensional

$$\frac{m x_0}{t_0^2} \frac{d^2x'}{dt'^2} + k_1 x_0 x' + k_2 x_0^3 x'^3 = 0$$

proporciona los coeficientes

$$\frac{m x_0}{t_0^2}, \quad k_1 x_0, \quad k_2 x_0^3$$

y los grupos adimensionales

$$\pi_1 = \frac{m}{k_1 t_0^2}, \quad \pi_2 = \frac{k_2}{k_1} x_0^2$$

con la solución

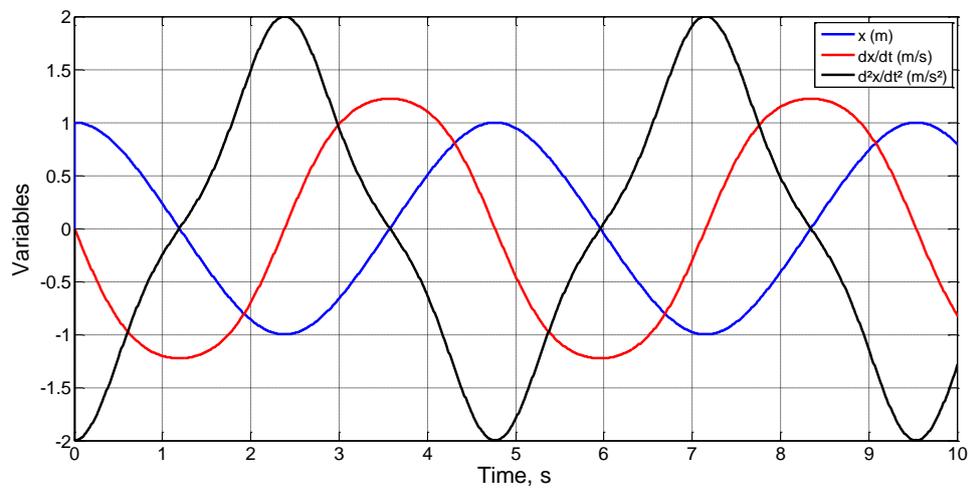
$$t_0 = \frac{m}{k_1}^{1/2} \Psi \frac{k_2}{k_1} x_0^2 \tag{4.41}$$

Es fácil verificar este resultado con el estudio de los casos recogidos en la siguiente tabla.

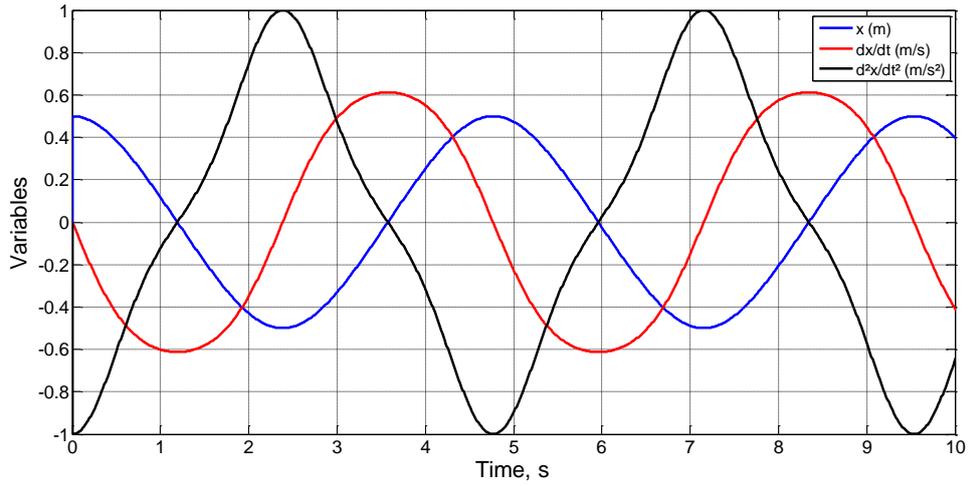
Caso	m	$k_1$	$k_2$	$x_0$	$4t_0$
1	1	1	1	1	4.77
2	1	1	4	1/2	4.77
3	1	1	9	1/3	4.77
4	2	2	2	1	4.77
5	4	4	1	2	4.77
6	4	1	1	1	9.55
7	1	4	4	1	2.385
8	1	4	1	2	2.385
9	1	1	1	2	3.18
10	1	1	1	3	2.29
11	1	1	1	4	1.78

**Tabla 4.6 Casos con amortiguamiento nulo (unidades en S.I.)**

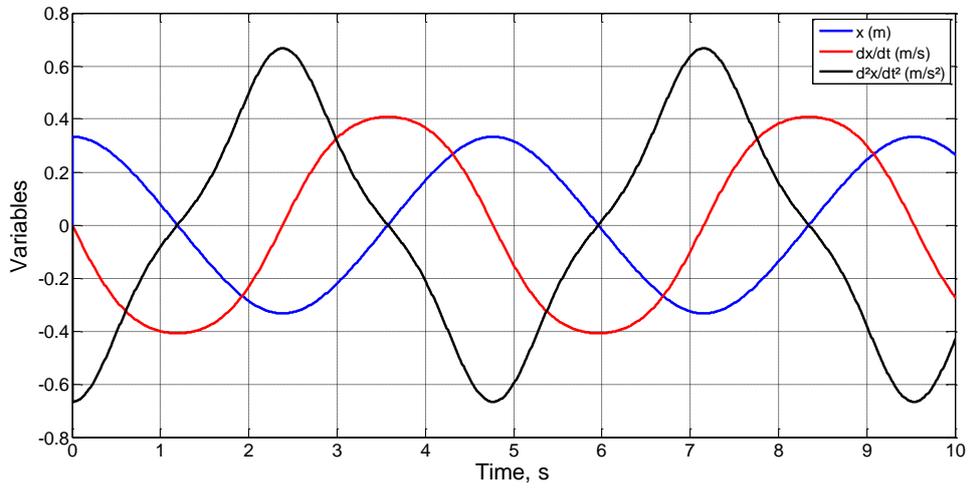
En los cinco primeros casos los parámetros del problema se ajustan para mantener constante los grupos  $m/k_1$  y el argumento de la función  $\Psi$ ; así la solución para  $t_0$  es idéntica. La Figura 4.27 muestra las soluciones  $x(t)$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  para los cinco casos.



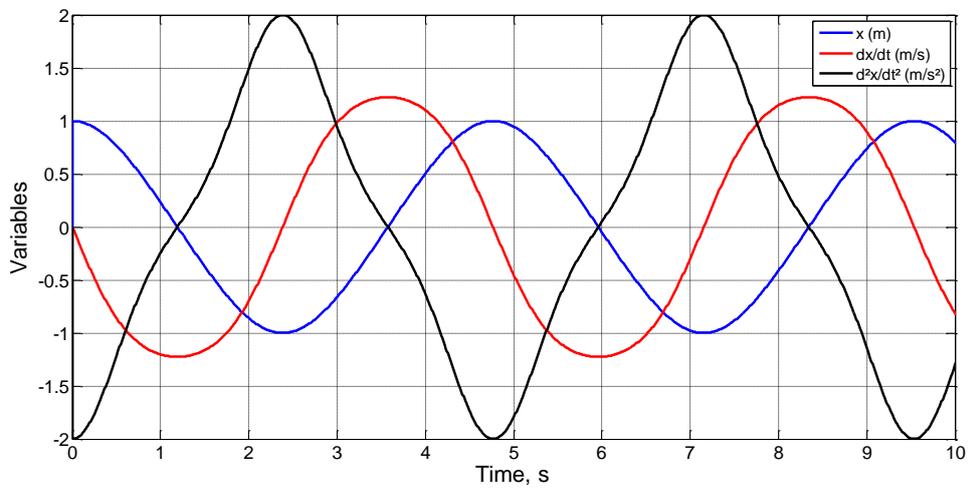
**Caso 1**



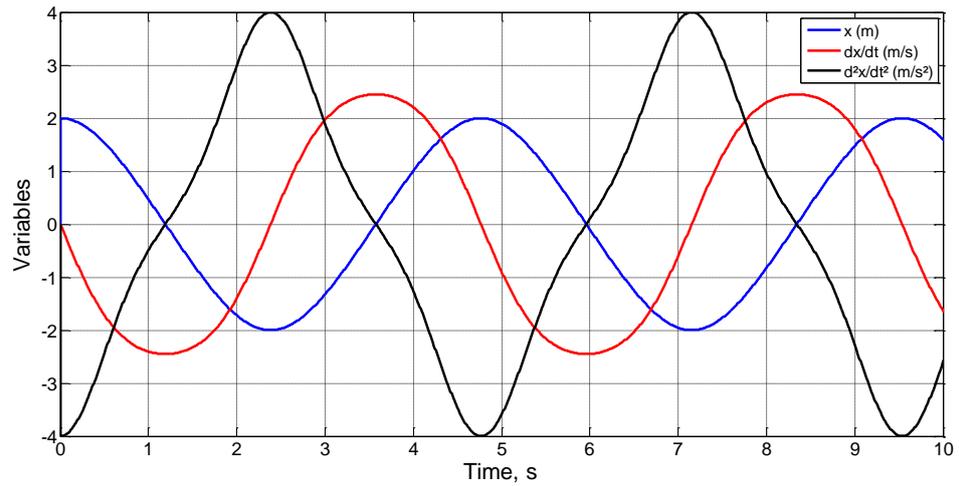
**Caso 2**



**Caso 3**



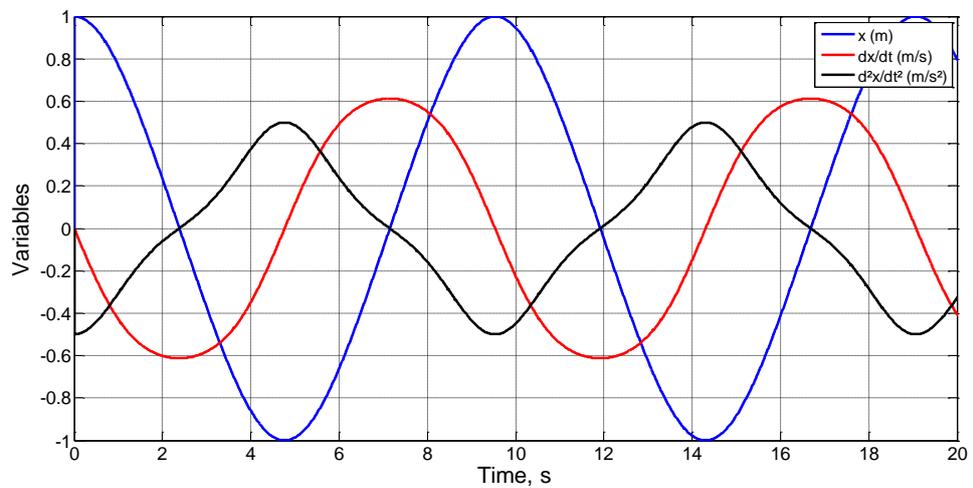
**Caso 4**



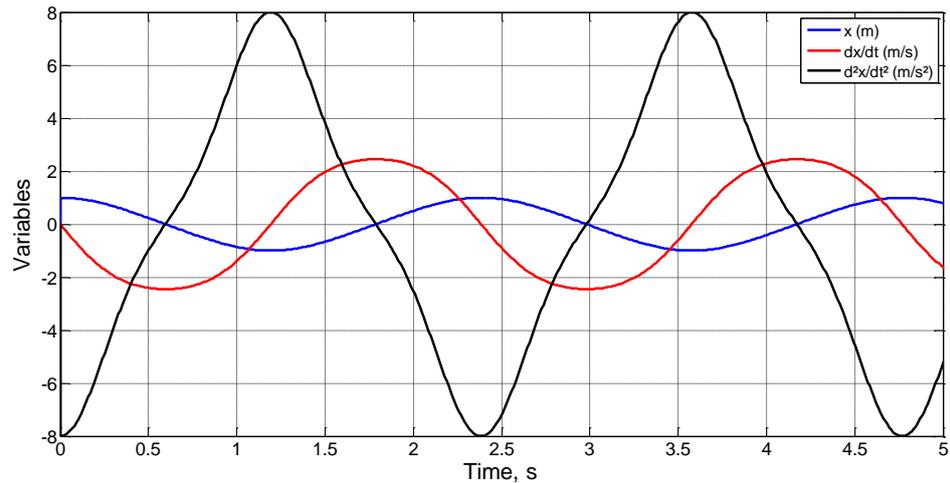
**Caso 5**

**Figura 4.27 Soluciones  $x(t)$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  de los casos 1 a 5 (Tabla 4.6)**

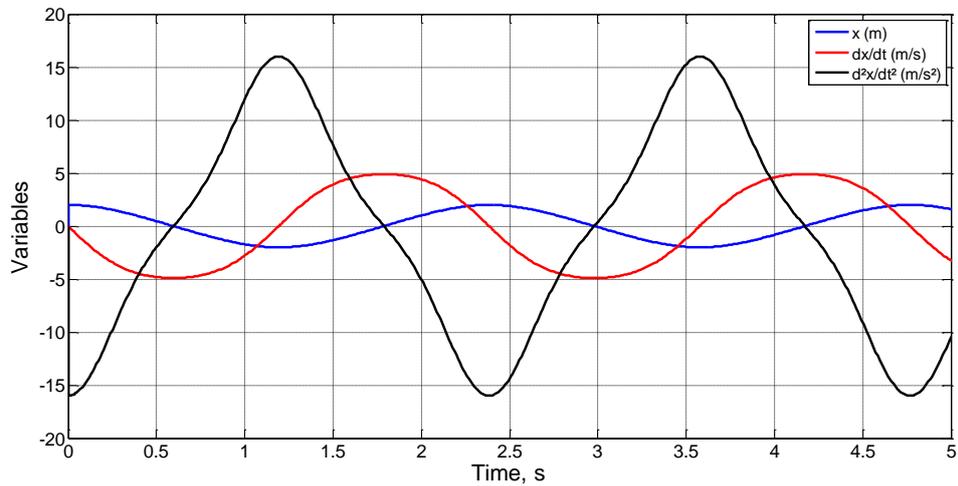
En los casos 1, 6, 7 y 8 se mantiene constante el argumento de  $\Psi$  pero se modifica el valor  $(m/k_1)^{1/2}$  con lo que  $t_0$  cambia proporcionalmente a este valor. La Figura 4.28 muestra las soluciones  $x(t)$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  para estos tres casos.



**Caso 6**



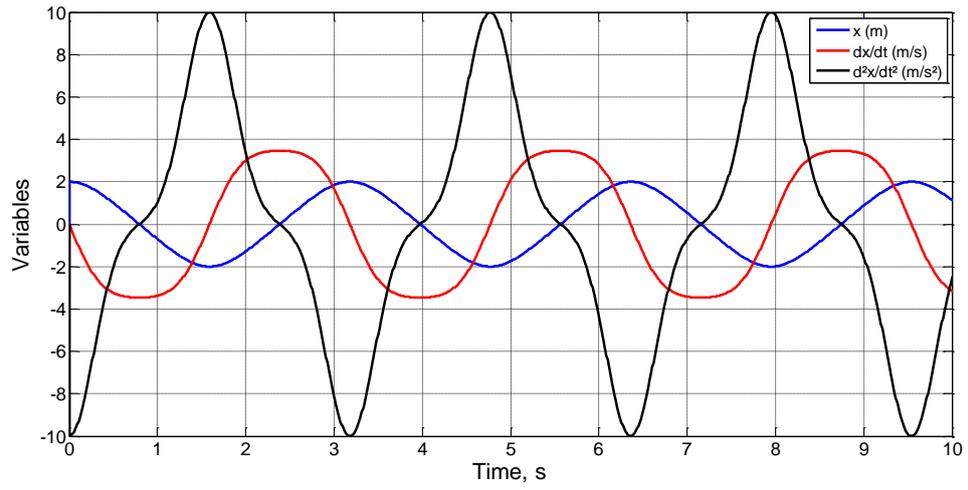
**Caso 7**



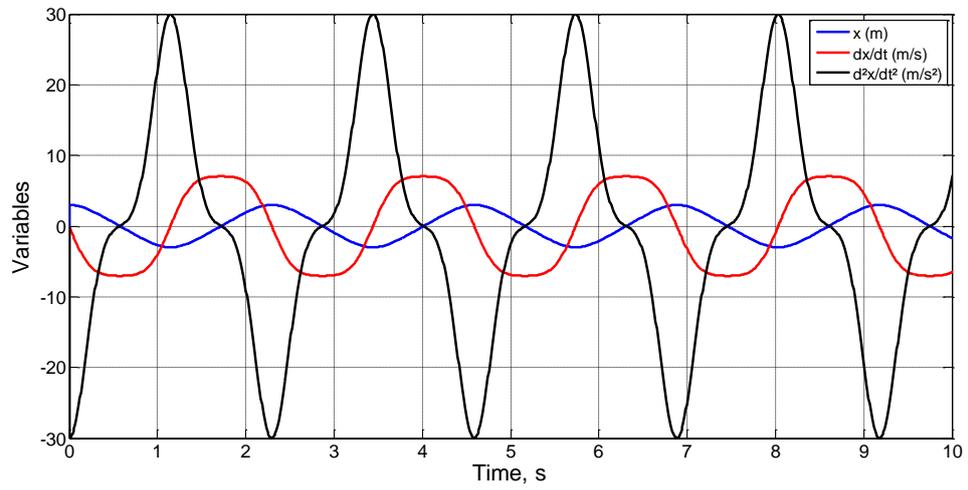
**Caso 8**

**Figura 4.28 Soluciones  $x(t)$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  de los casos 6 a 8 (Tabla 4.6)**

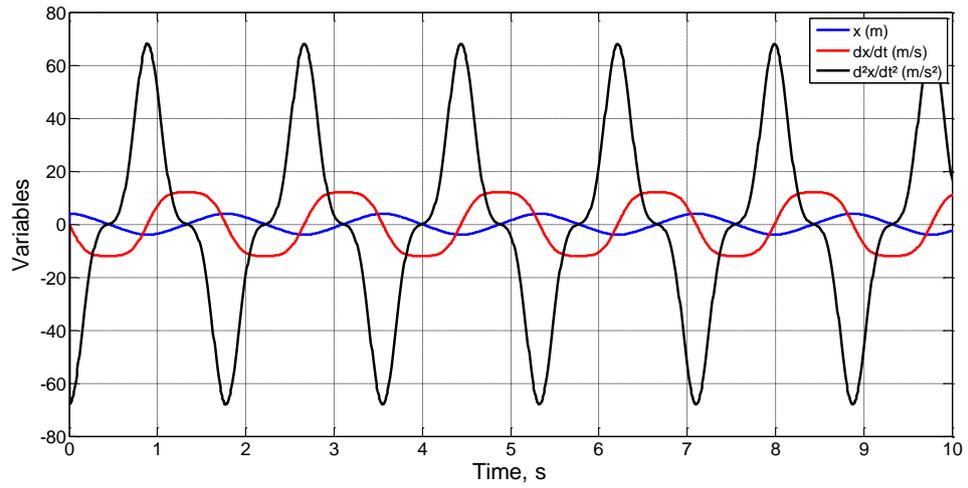
Finalmente, la comparación de los casos 1, 10 y 11 permite determinar la influencia de la función  $\Psi$  para diferentes valores de su argumento (el cociente  $m/k_1$  no cambia). Puede apreciarse que a pesar de los cambios sensibles en el valor del argumento, la influencia en el orden de magnitud de la solución es despreciable. La Figura 4.29 muestra las soluciones  $x(t)$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  para estos tres casos. La desviación de frecuencias al cambiar el argumento de la función puede apreciarse mejor en los espectros (FFT) representados en la Figura 4.30 para los casos 1, 9, 10 y 11.



**Caso 9**

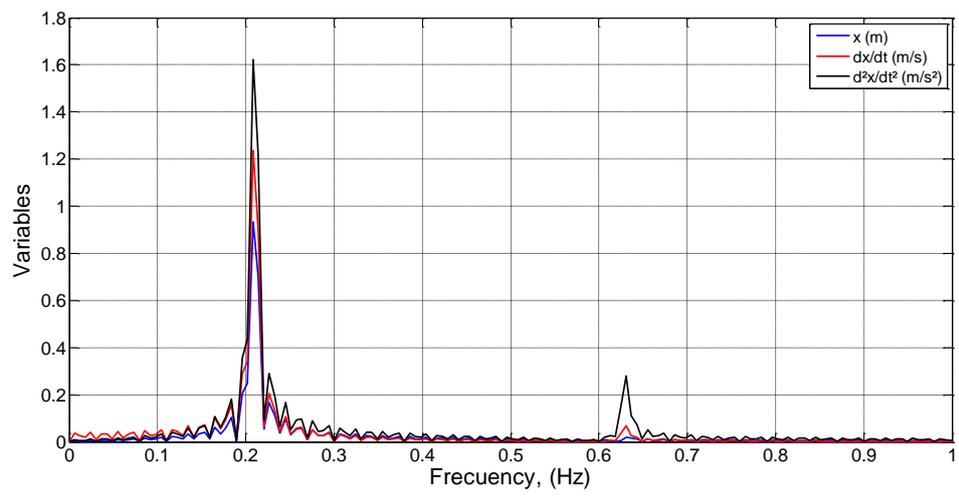


**Caso 10**

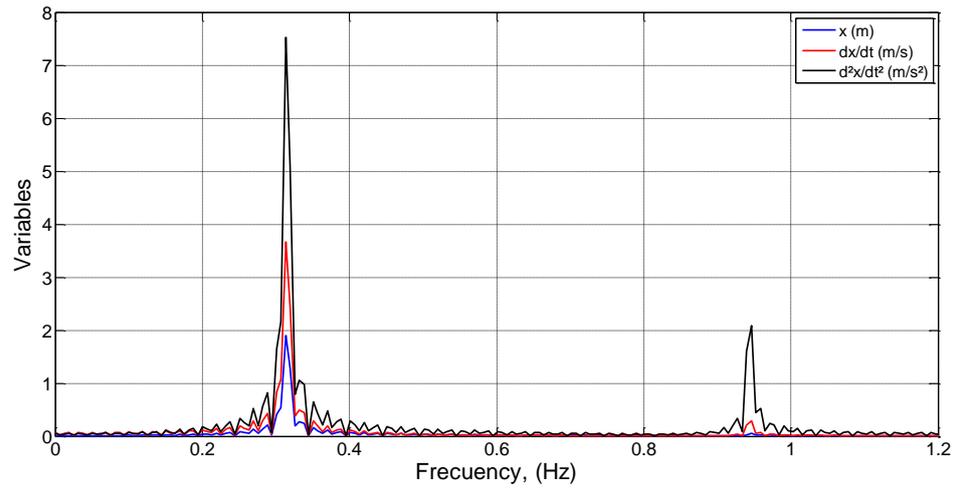
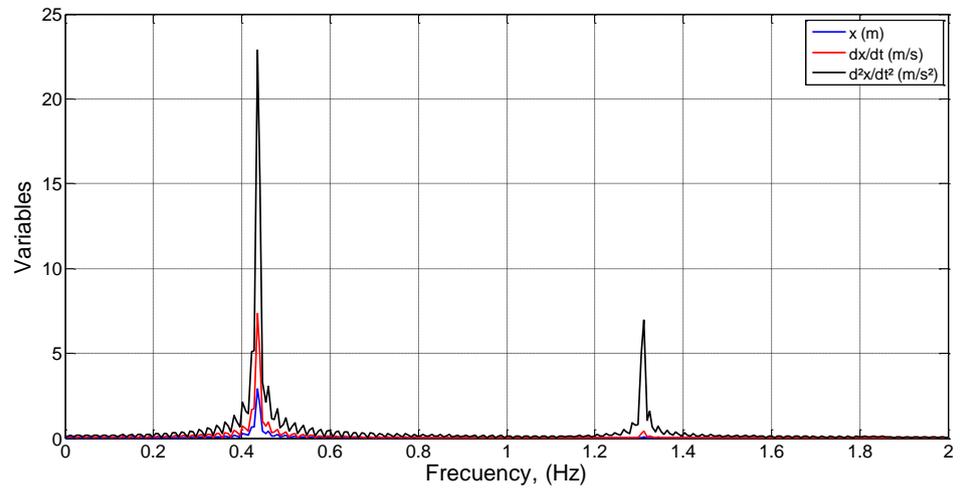


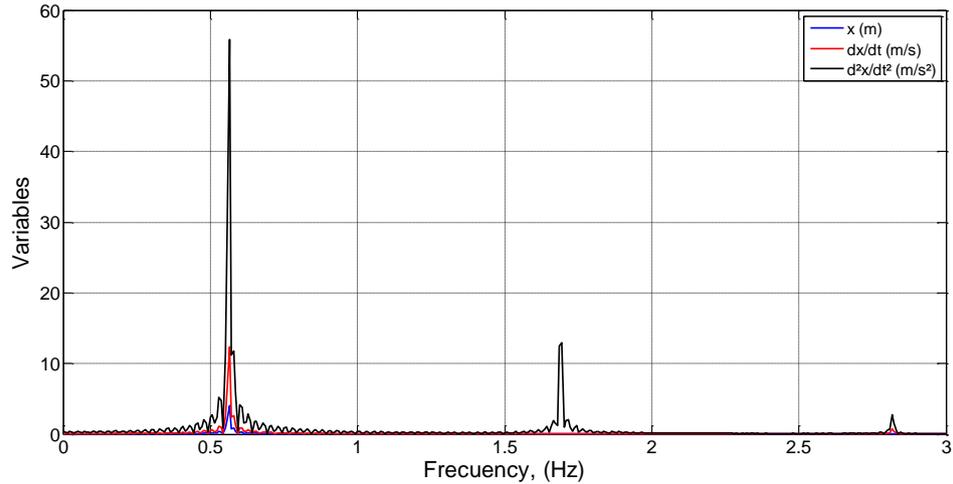
Caso 11

Figura 4.29 Soluciones  $x(t)$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  de los casos 9 a 11 (Tabla 4.6)



Caso 1

**Caso 9****Caso 10**



**Caso 11**

**Figura 4.30** Espectro de Fourier (FFT) de  $x(t)$  para los casos 1, 9, 10 y 11 (Tabla 4.6)

**ii) Caso de amortiguamiento no nulo**

Con  $\beta \neq 0$  estamos interesados en estudiar el tiempo aproximado de amortiguamiento al que llamaremos  $\tau_0$ , independiente en principio de  $t_0$ . Asumimos que en el caso más general todos los términos de la ecuación diferencial influirán en el valor de  $\tau_0$ . Las variables adimensionales quedan definidas en la forma

$$x' = \frac{x}{x_0}, \quad t' = \frac{t}{\tau_0}$$

La ecuación adimensional derivada de (4.40), cuya forma es

$$\frac{m x_0}{\tau_0^2} \frac{d^2 x'}{dt'^2} + \frac{\beta x_0}{\tau_0} \frac{dx'}{dt'} + k_1 x_0 x' + k_2 x_0^3 x'^3 = 0$$

proporciona los coeficientes

$$\frac{m x_0}{\tau_0^2}, \quad \frac{\beta x_0}{\tau_0}, \quad k_1 x_0, \quad k_2 x_0^3$$

y los grupos adimensionales

$$\pi_1 = \frac{m}{\beta \tau_0}, \quad \pi_2 = \frac{k_1 \tau_0}{\beta}, \quad \pi_3 = \frac{k_2 x_0^2 \tau_0}{\beta}$$

que pueden ser escritos (para una expresión más explícita de  $\tau_0$ ) en la forma

$$\pi_1 = \frac{m}{\beta \tau_0}, \quad \pi_2 = \frac{m k_1}{\beta^2}, \quad \pi_3 = \frac{k_2 x_0^2}{k_1}$$

con la solución

$$\tau_0 = \frac{m}{\beta} \Psi \left( \frac{m k_1}{\beta^2}, \frac{k_2 x_0^2}{k_1} \right) \quad (4.42)$$

De este caso más general (en el que todos los términos de la ecuación tienen el mismo peso relativo) pueden deducirse dos simplificaciones.

Caso en que la fuerza elástica  $k_1 x$  es despreciable frente a los restantes términos de la ecuación

Se elimina el término  $k_1 x$  y las soluciones obtenidas son:

$$t_0 \sim \frac{1}{x_0} \frac{m}{k_2}^{1/2} \quad \tau_0 = \frac{m}{\beta} \Psi \left( \frac{m k_2 x_0^2}{\beta^2} \right) \quad (4.43)$$

Caso en que la fuerza elástica  $k_2 x^3$  es despreciable frente a los restantes términos de la ecuación

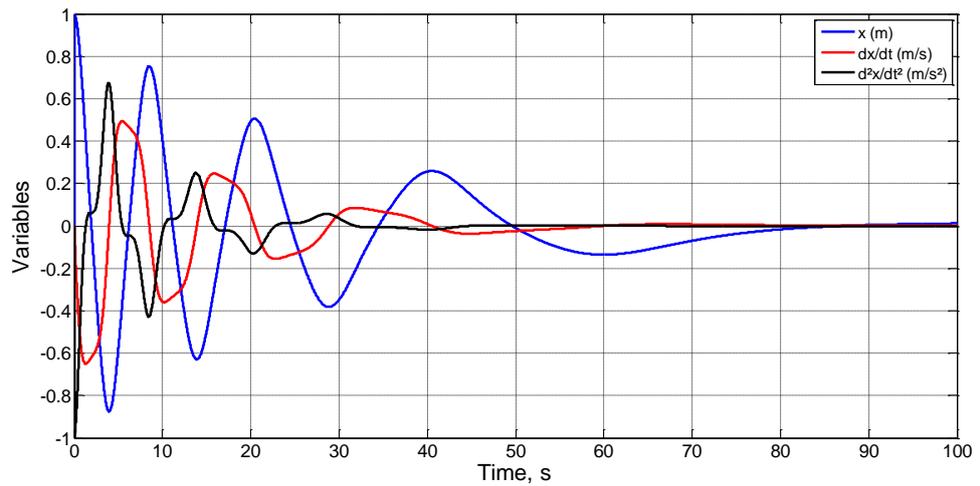
Se elimina el término  $k_2 x^3$  y las soluciones obtenidas son:

$$t_0 \sim \frac{m}{k_1}^{1/2} \quad \tau_0 = \frac{m}{\beta} \Psi \left( \frac{m k_1}{\beta^2} \right) \quad (4.44)$$

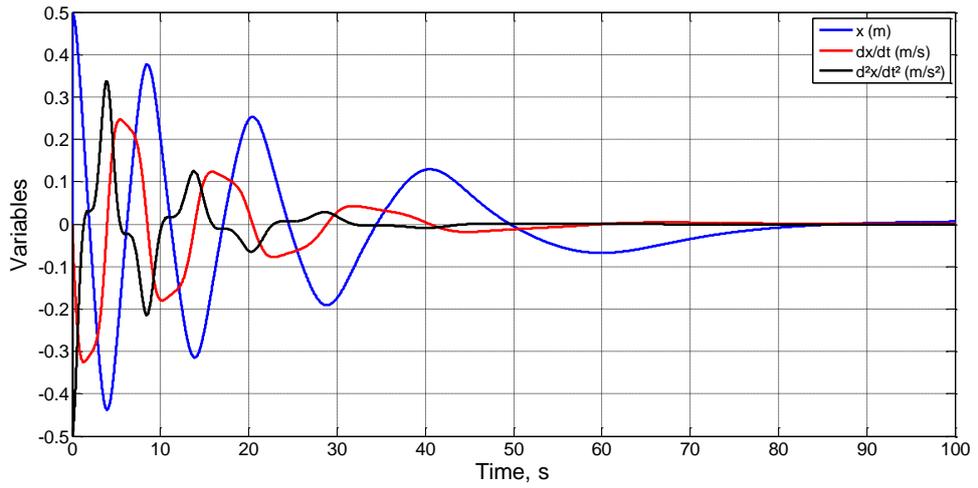
Para la verificación de estos resultados simularemos los casos presentados en las Tablas 4.7 a 4.9. La primera, Tabla 4.7, contiene casos correspondientes a la simplificación del término  $k_1 x$ , resultados (4.43). Por un lado, los casos 1 a 5 mantienen el mismo valor de los grupos  $\frac{1}{x_0} \frac{m}{k_2}^{1/2}$  y  $\frac{m}{\beta} \Psi \left( \frac{m k_2 x_0^2}{\beta^2} \right)$  por lo que los resultados son idénticos para ambos tiempos, Figura 4.31. Por otro lado, en los casos 6 a 8 se estudia la influencia de  $\beta$  manteniendo  $t_0$  constante, Figura 4.32. La influencia de la función  $\Psi$  hace que los valores de  $\tau_0$  y  $\beta$  no tengan una proporción (exactamente) inversa.

Caso	m	$k_2$	$x_0$	$\beta$	$t_0$	$\tau_0$
1	1	1	1	0.1	8.55	90
2	1	4	0.5	0.1	8.55	90
3	1	0.25	2	0.1	8.55	90
4	2	2	1	0.2	8.55	90
5	0.5	0.5	1	0.05	8.55	90
6	4	1	2	0.4	8.55	90
7	1	1	1	0.2	10.24	40
8	1	1	1	0.3	13.26	30
9	1	1	1	0.4	15.30	20

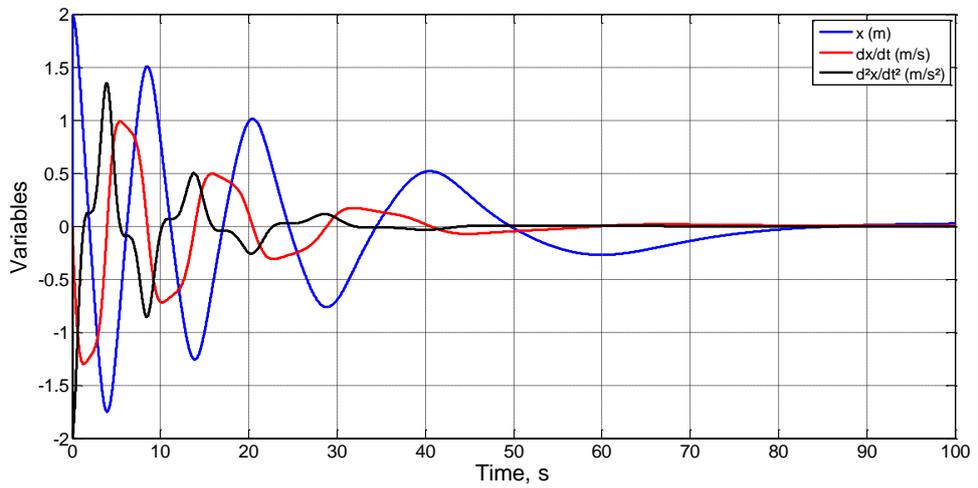
Tabla 4.7 Casos amortiguamiento no nulo y  $k_1 = 0$



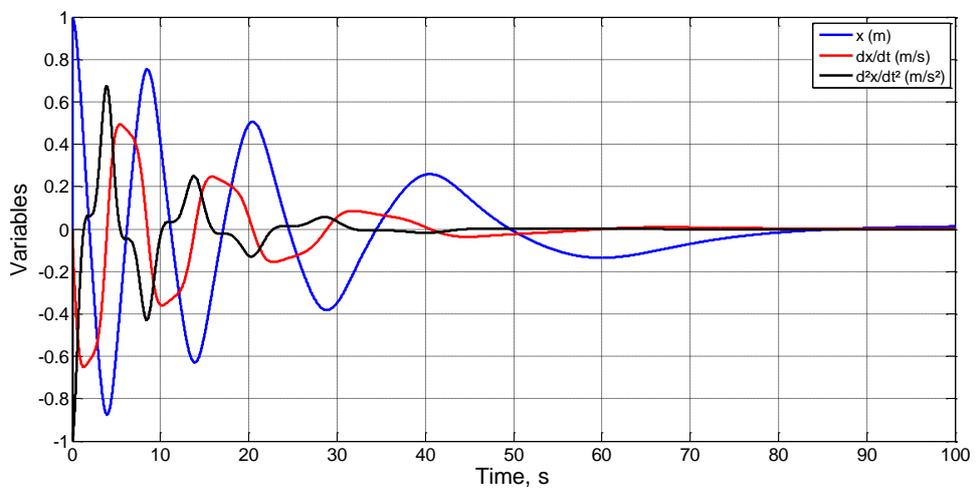
Caso 1



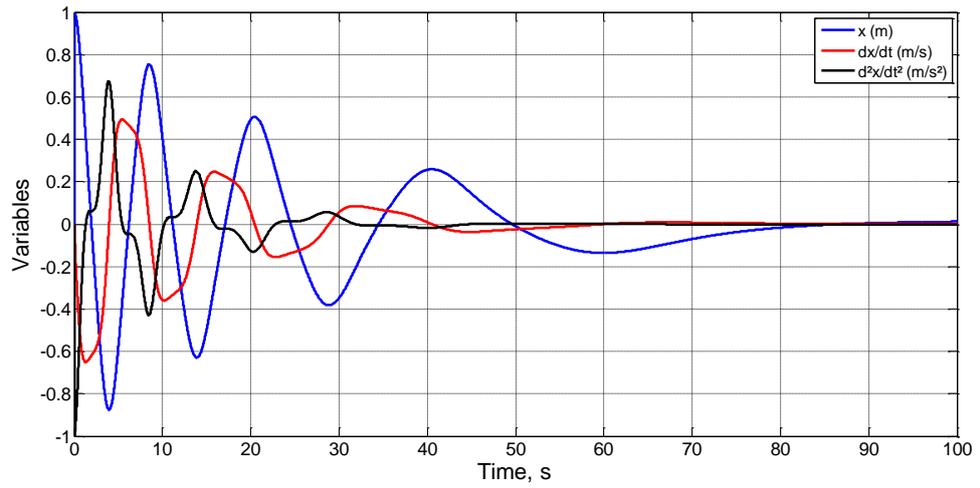
**Caso 2**



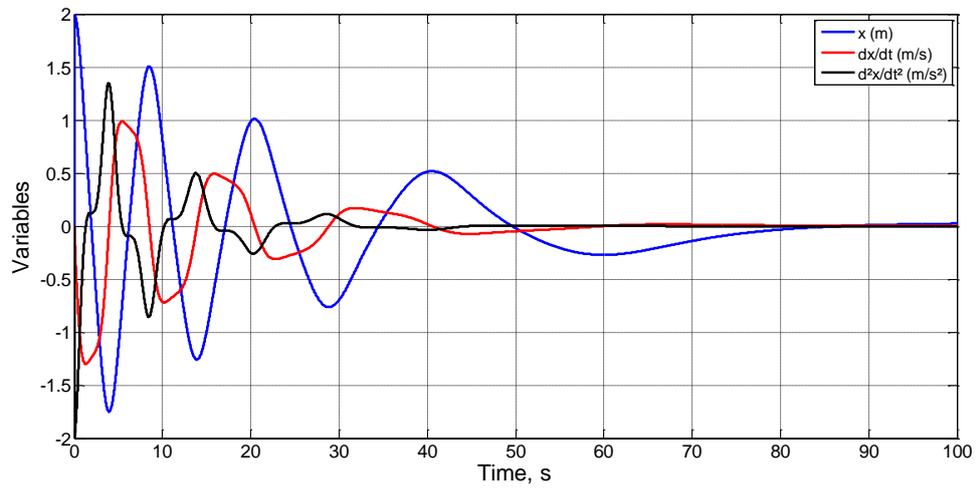
**Caso 3**



**Caso 4**

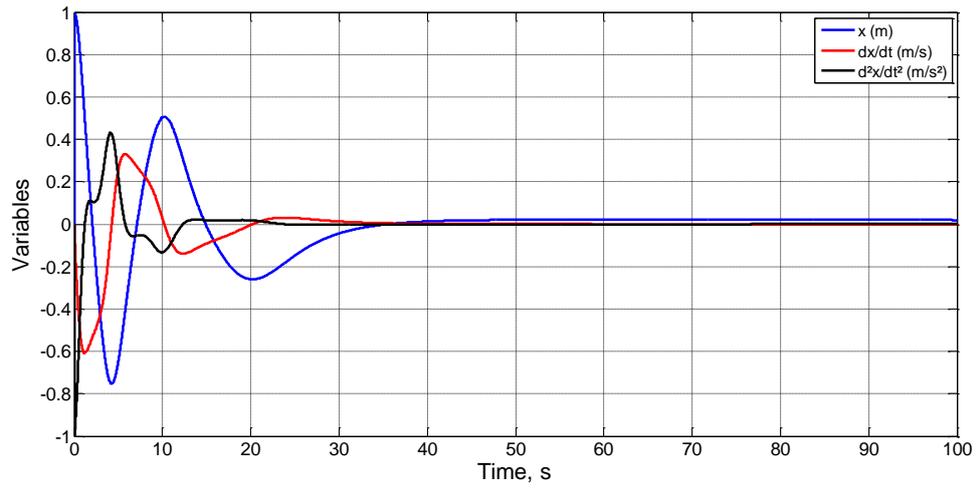
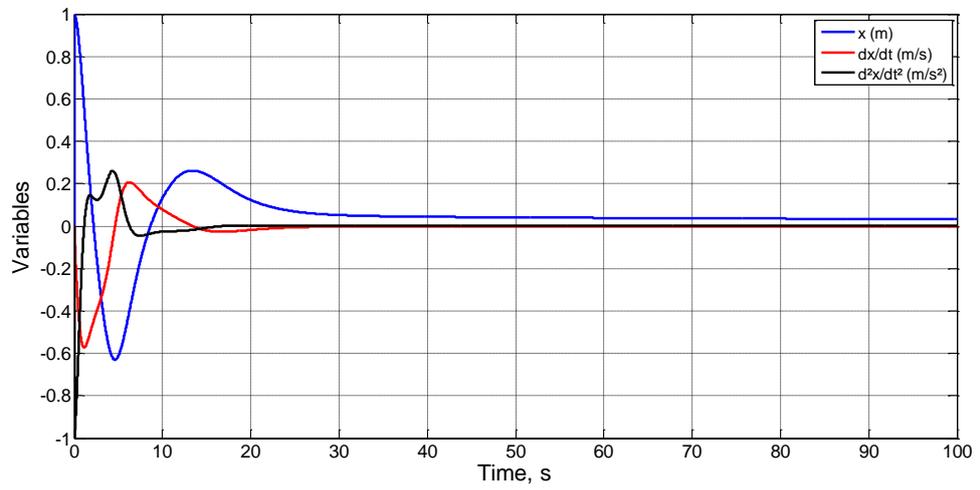


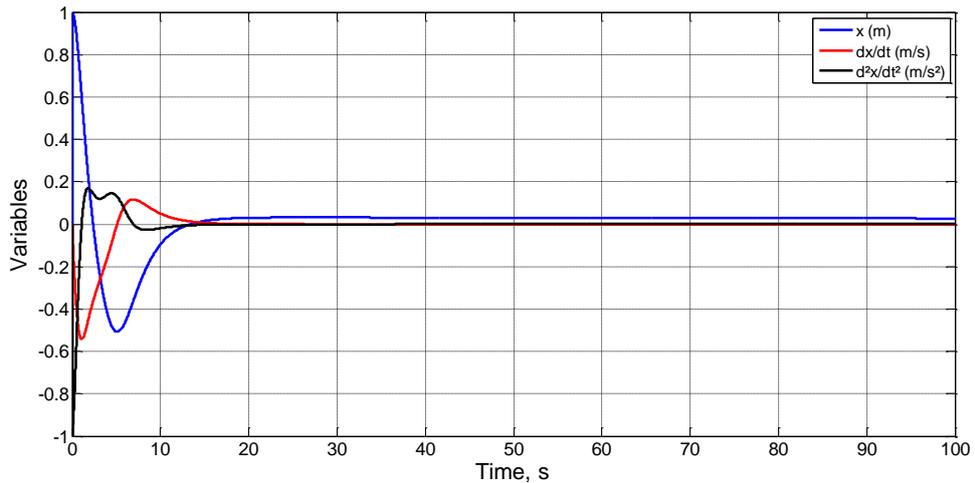
Caso 5



Caso 6

Figura 4.31 Soluciones  $x(t)$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  de los casos 1 a 6 (Tabla 4.7)

**Caso 7****Caso 8**



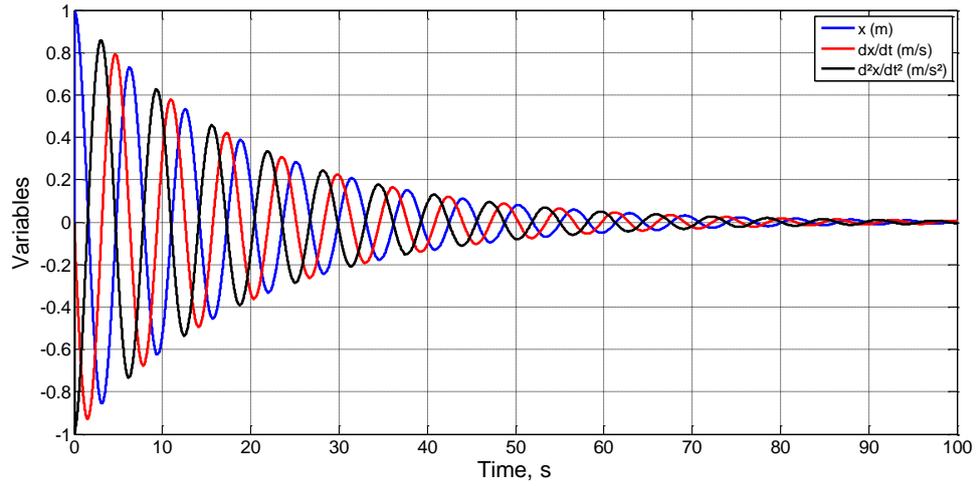
**Caso 9**

**Figura 4.32 Soluciones  $x(t)$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  de los casos 7 a 9 (Tabla 4.7)**

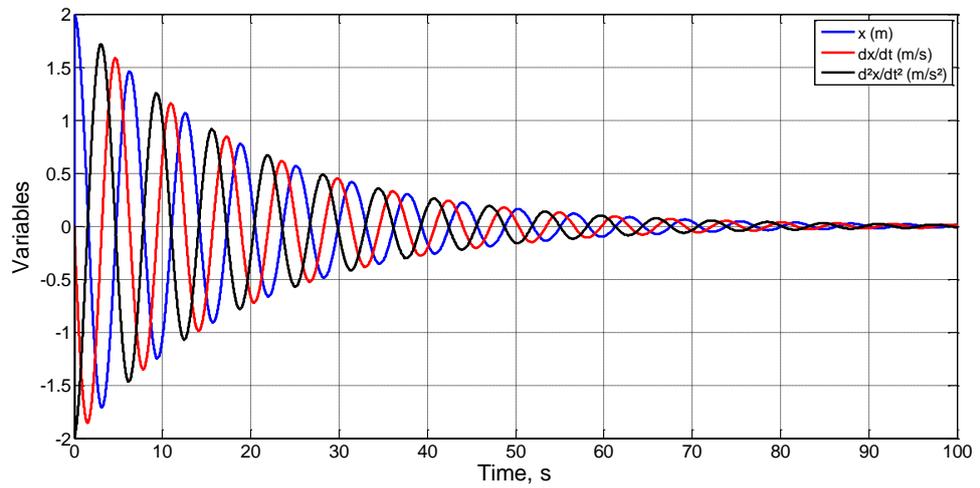
La siguiente, Tabla 4.8, contiene casos correspondientes a la simplificación del término  $k_2x^3$ , resultados (4.44). Los casos 1 a 4 mantienen el mismo valor de los grupos  $\frac{m}{k_1}^{1/2}$  y  $\frac{m}{\beta} \Psi \frac{mk_1}{\beta^2}$  por lo que los resultados son idénticos para ambos tiempos, Figura 4.33, mientras que en los casos 5 a 7 se estudia la influencia de  $\beta$  manteniendo  $t_0$  constante, Figura 4.34. Como en la simplificación anterior, la influencia de la función  $\Psi$  hace que los valores de  $\tau_0$  y  $\beta$  no tengan una proporción (exactamente) inversa.

Caso	m	$k_1$	$x_0$	$\beta$	$t_0$	$\tau_0$
1	1	1	1	0.1	6.29	99
2	2	2	2	0.2	6.29	99
3	4	4	4	0.4	6.29	99
4	0.5	0.5	0.5	0.05	6.29	99
5	1	1	1	0.2	6.31	55
6	1	1	1	0.3	6.35	38
7	1	1	1	0.4	6.42	29

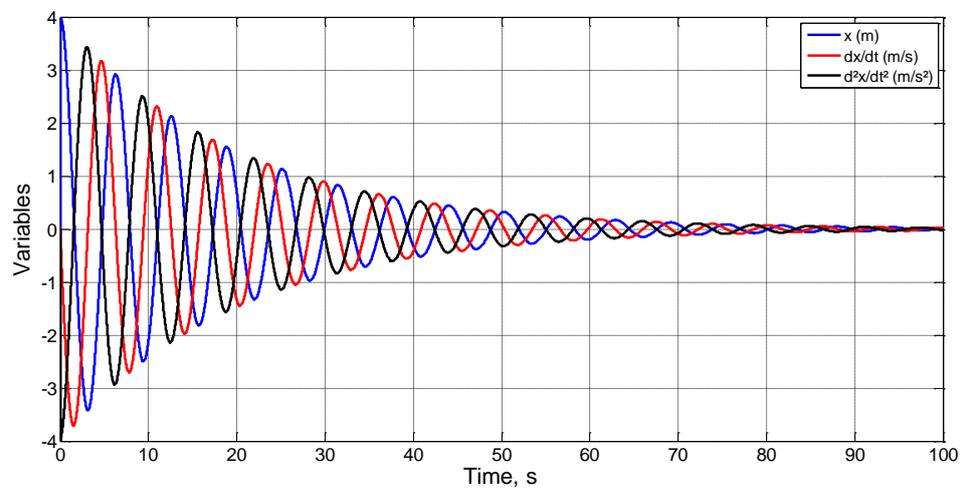
**Tabla 4.8 Casos amortiguamiento no nulo y  $k_2 = 0$**



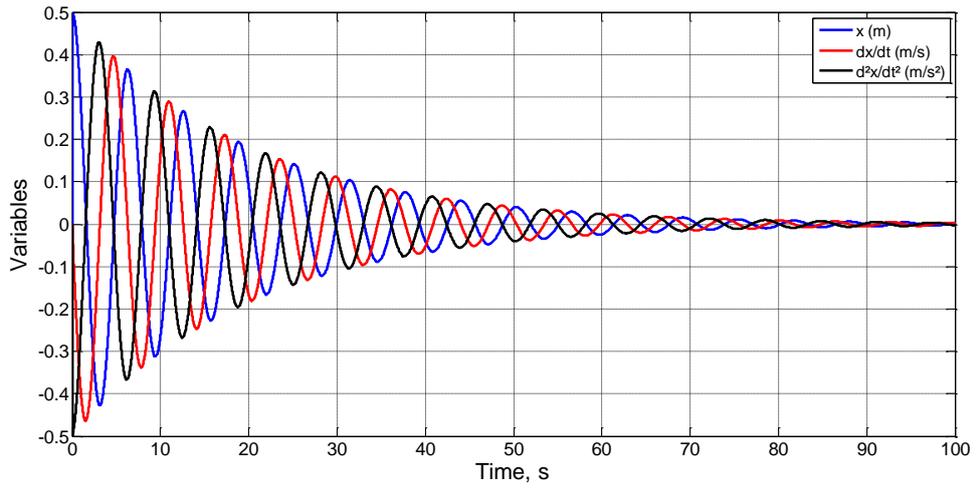
**Caso 1**



**Caso 2**

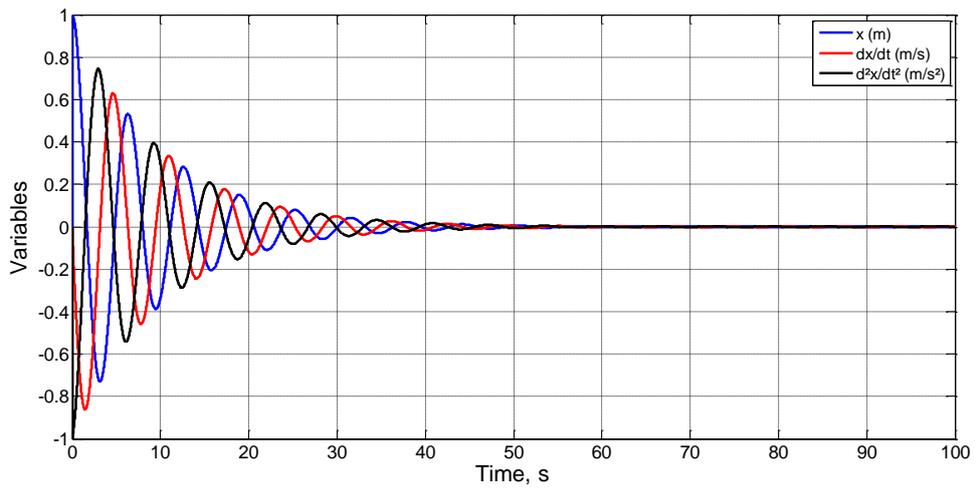


**Caso 3**

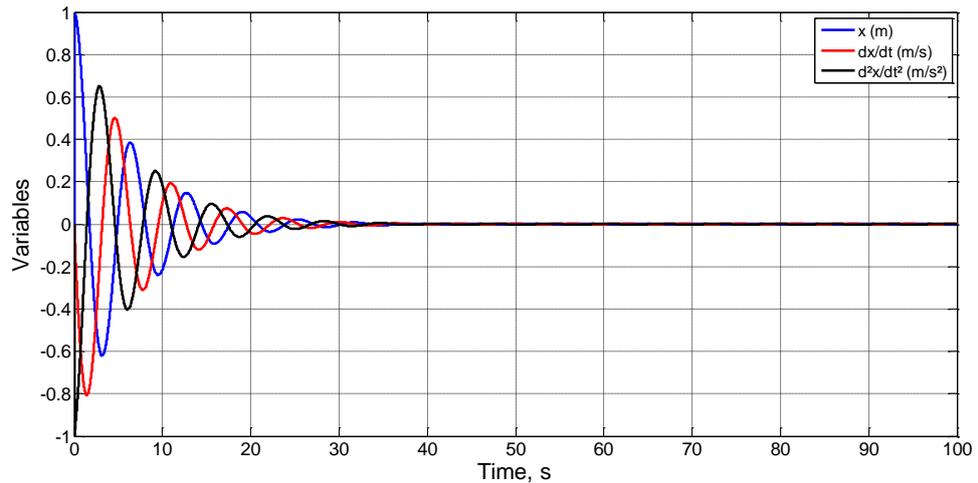


Caso 4

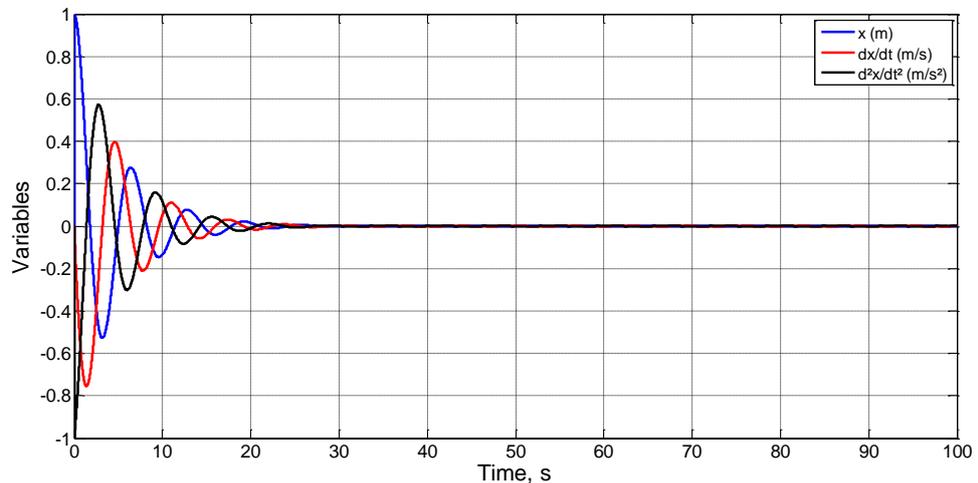
Figura 4.33 Soluciones  $x(t)$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  de los casos 1 a 4 (Tabla 4.8)



Caso 5



Caso 6



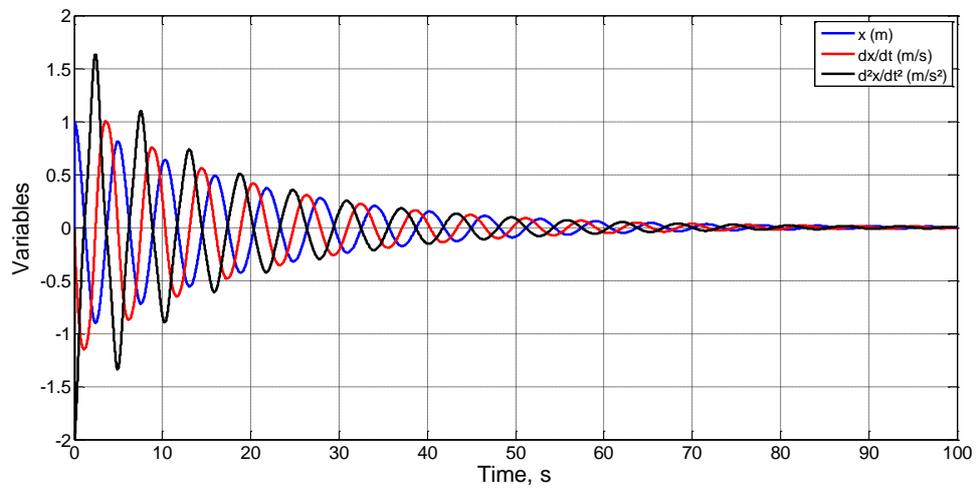
Caso 7

**Figura 4.34 Soluciones  $x(t)$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  de los casos 5 a 7 (Tabla 4.8)**

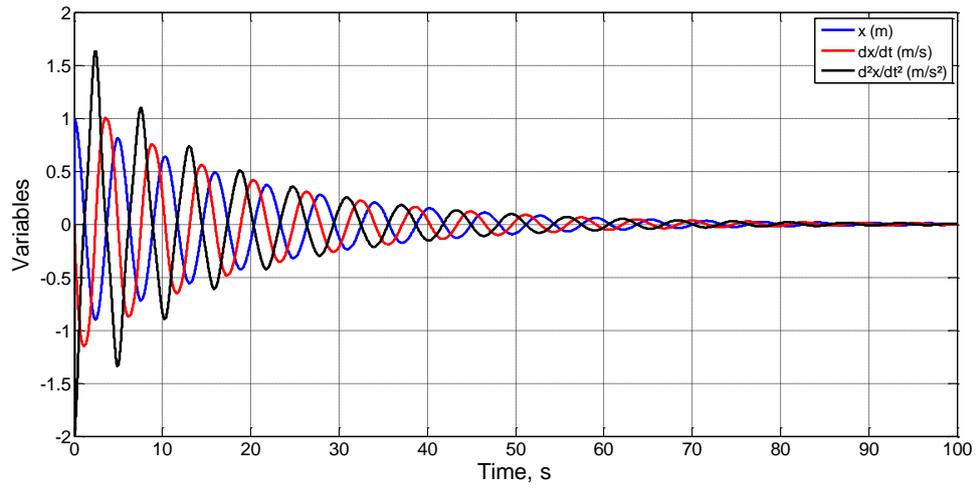
Para la verificación del caso general  $k_1$  y  $k_2$  no nulos, cuyas soluciones son las expresiones (4.41) y (4.42), abordaremos los casos recogidos en la Tabla 4.9. En los primeros, 1 a 4, se mantiene el mismo valor para las incógnitas  $t_0$  y  $\tau_0$  al ser constantes los argumentos de las funciones  $\Psi$  y los grupos  $(m/k_1)^{1/2}$  y  $m/\beta$ . Lo mismo ocurre en los casos 5 y 6 en los que al cambiar  $x_0$  sólo hay un cambio de escala en la representación de  $x(t)$  y sus derivadas, pero no en los tiempos  $t_0$  y  $\tau_0$ . La Figura 4.35 muestra las soluciones de estos 6 casos. En los casos restantes se mantienen los argumentos de las funciones  $\Psi$  de ambas soluciones, (4.41) y (4.42), pero cambian los grupos  $(m/k_1)^{1/2}$  y  $m/\beta$  por lo que las soluciones también cambian. Los resultados de estos casos, Figura 4.36, son coherentes con las soluciones anteriores.

Caso	m	$\beta$	$k_1$	$k_2$	$x_0$	$t_0$	$\tau_0$
1	1	0.1	1	1	1	4.97	98
2	2	0.2	2	2	1	4.97	98
3	4	0.4	4	4	1	4.97	98
4	0.5	0.05	0.5	0.5	1	4.97	98
5	1	0.1	1	4	0.5	4.97	98
6	1	0.1	1	0.25	2	4.97	98
7	0.5	0.1	2	2	1	2.48	47
8	0.25	0.1	4	4	1	1.24	24
9	2	0.1	0.5	0.5	1	9.94	196
10	0.25	0.1	1	1	2	1.74	25
11	1	0.2	4	4	1	2.48	47
12	1	0.2	1	1	2	3.48	50
13	4	0.2	1	1	1	9.93	196

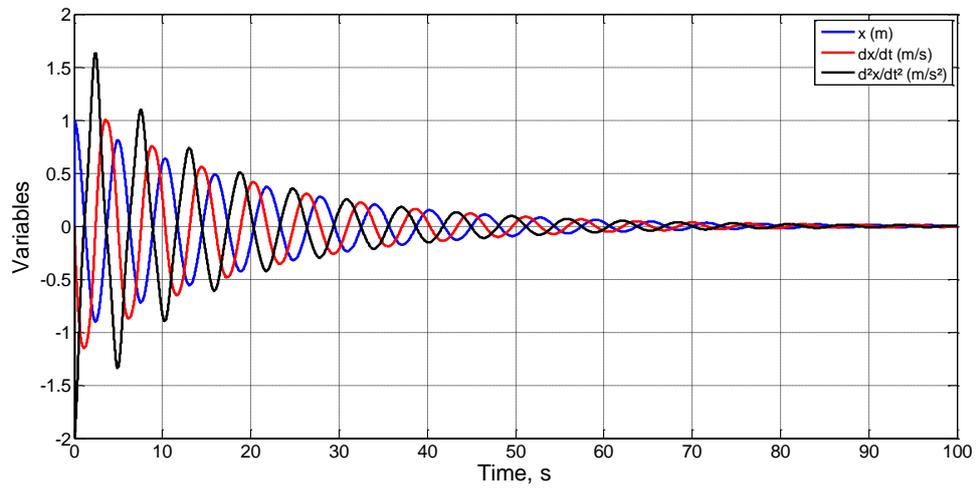
Tabla 4.9 Casos amortiguamiento con  $k_1$  y  $k_2$  no nulos



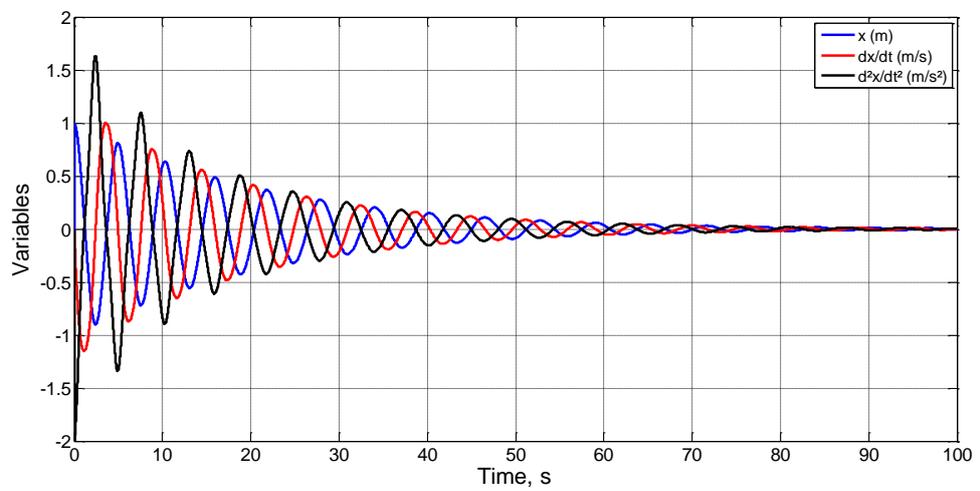
Caso 1



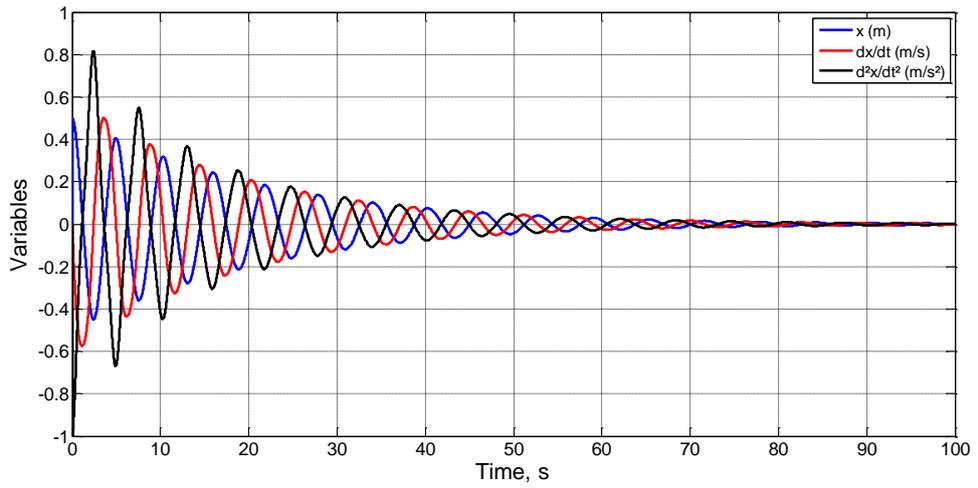
**Caso 2**



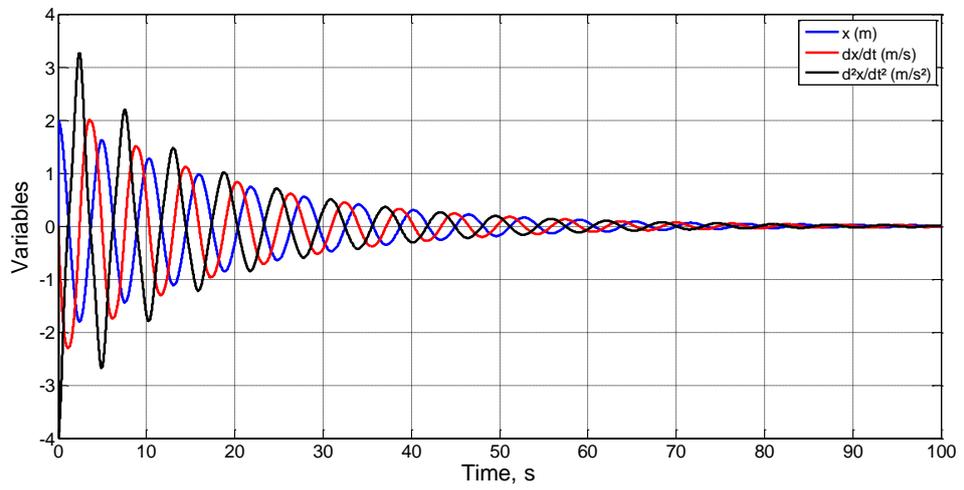
**Caso 3**



**Caso 4**

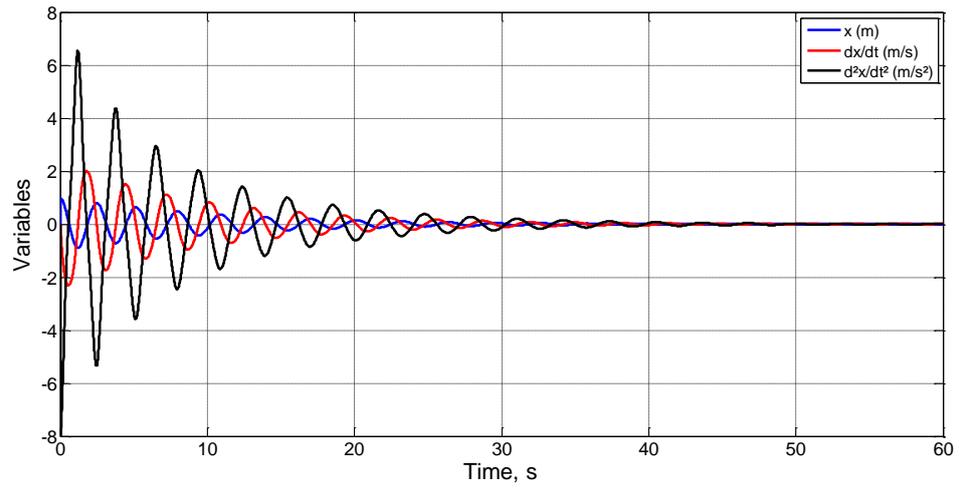


**Caso 5**

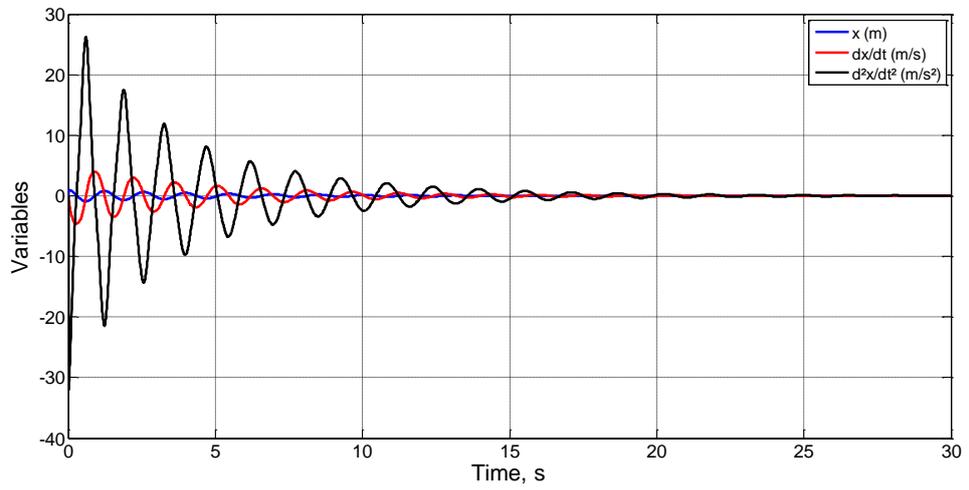


**Caso 6**

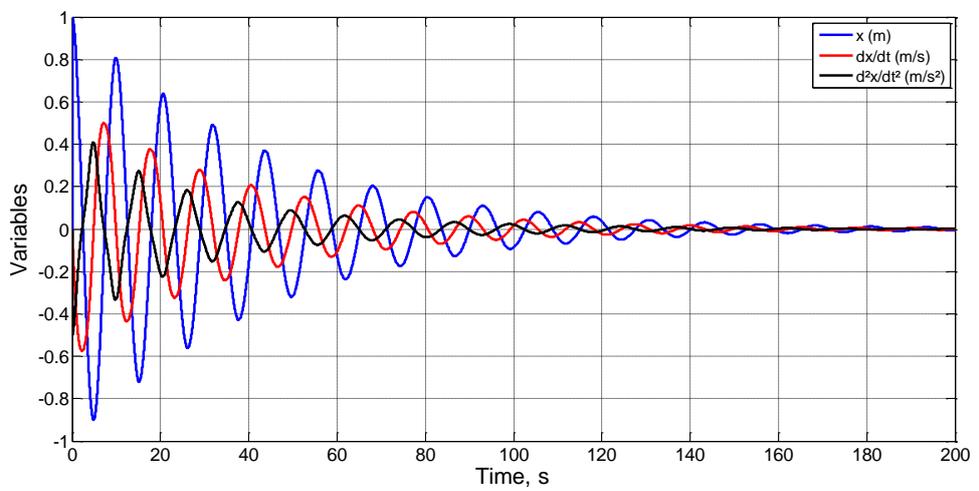
**Figura 4.35** Soluciones  $x(t)$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  de los casos 1 a 6 (Tabla 4.9)



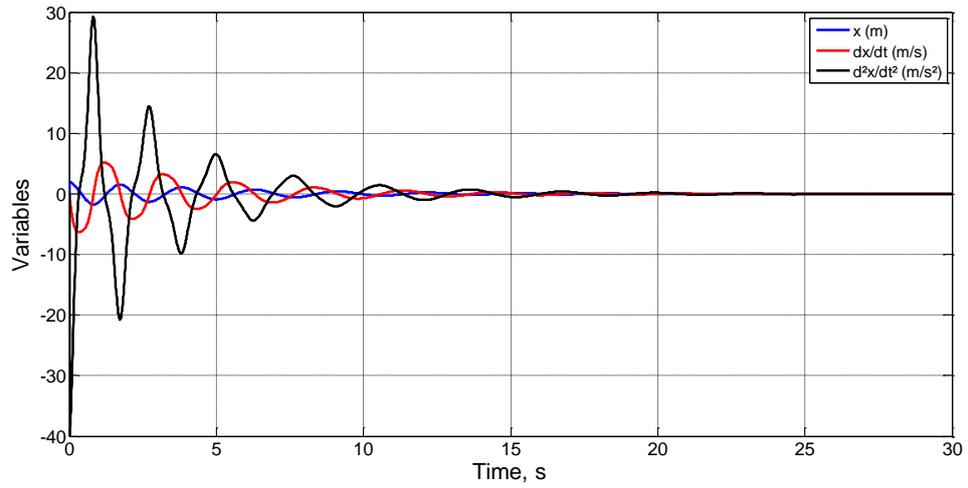
**Caso 7**



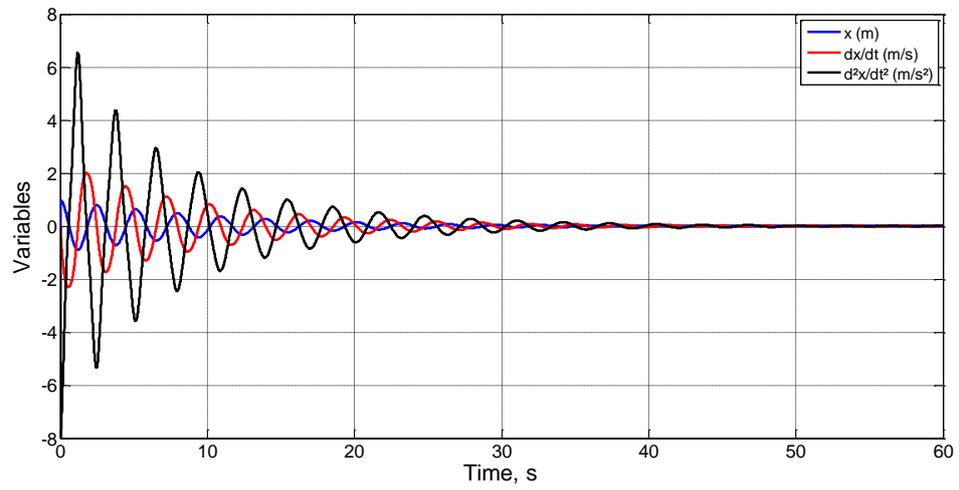
**Caso 8**



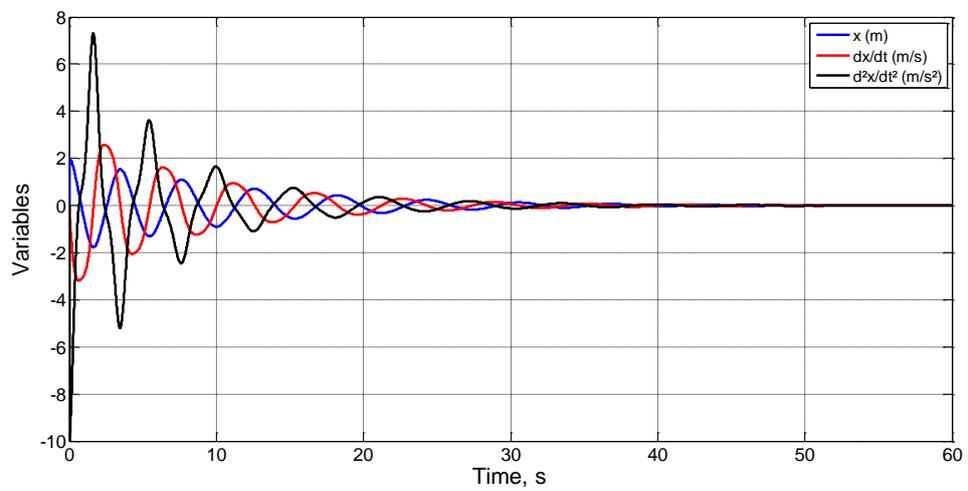
**Caso 9**



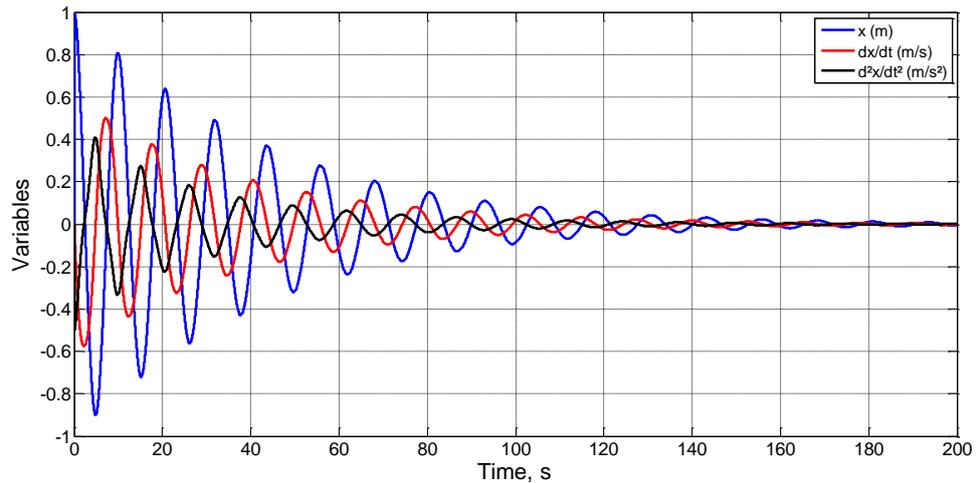
**Caso 10**



**Caso 11**



**Caso 12**



### Caso 13

Figura 4.36 Soluciones  $x(t)$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  de los casos 7 a 13 (Tabla 4.9)

## 4.6. Contribuciones y conclusiones

i) La adimensionalización de ecuaciones diferenciales ordinarias proporciona como máximo un número de grupos adimensionales igual al número de términos de la ecuación menos uno y permite obtener el orden de magnitud de una sola incógnita, generalmente una magnitud oculta con claro significado en el proceso físico que representa la ecuación.

ii) Cuando el número de grupos es uno, la asignación a éste de un orden de magnitud unidad permite obtener el orden de magnitud de la incógnita. Si el número de grupos es mayor que uno, el orden de magnitud de la incógnita (contenida en uno de los grupos) queda modulado por una función indeterminada de los grupos que no contienen la incógnita. Sin embargo, todos los grupos resultantes de la adimensionalización son de orden de magnitud unidad como también lo es la función indeterminada que modula el orden de magnitud de la incógnita.

iii) Cuando las soluciones tienen una tendencia asintótica, no existe un tiempo característico preciso (asociado al valor asintótico de la variable dependiente) que pueda adoptarse como referencia para definir el tiempo adimensional. La solución consiste en adoptar como referencia una fracción cercana a la unidad del valor asintótico de la variable dependiente y el tiempo asociado a esta fracción. Aunque con ello las variables adimensionales no estén confinadas en el intervalo  $[0,1]$ , las soluciones obtenidas son completamente aceptables.

iv) La no linealidad no supone dificultades añadidas al proceso de adimensionalización, aparte de las inherentes en los sencillos pasos matemáticos que conducen a la obtención de los grupos adimensionales. La fiabilidad de las soluciones disminuye, sin embargo, para fuertes no linealidades, lo que puede explicarse por el cambio de influencia del término no lineal en el balance de la ecuación.

v) En problemas con soluciones armónicas la no linealidad se traduce en la aparición de armónicos de la frecuencia fundamental cuya influencia se acentúa con dicha no linealidad.

vi) En general, la adimensionalización conduce a resultados más precisos que el análisis dimensional al eliminar los monomios directos que éste introduce (del tipo de los llamados “factores de forma” o cociente entre longitudes que podrían usarse como referencias). La elección adecuada de la variable dependiente y su referencia elimina la formación de monomios de este tipo.



## **CAPÍTULO 5**

# **ADIMENSIONALIZACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS ACOPLADAS**



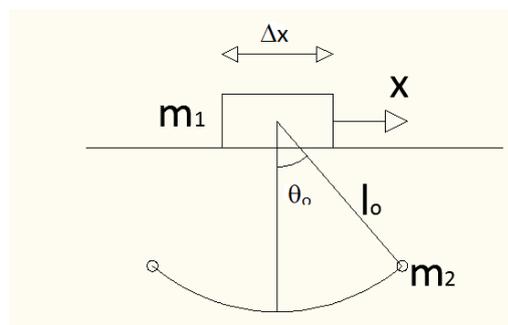
De nuevo hemos elegido problemas mecánicos, para las aplicaciones de la adimensionalización a sistemas acoplados de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), por las razones expuestas en el capítulo anterior, a excepción de la última aplicación referida a un problema de interacción entre poblaciones de especies en la naturaleza. En ambos casos, los modelos matemáticos satisfacen el criterio de homogeneidad impuesto por la adimensionalización ya que cada ecuación representa un balance de magnitudes físicas que interaccionan en el problema. Además de las posibilidades para la elección de la referencia idónea para la variable dependiente, de entre las (probablemente) muchas magnitudes características explícitas u ocultas, también existe (muy probablemente) diferentes opciones para elegir magnitudes de referencia para la variable independiente. Todo ello aboca a un mayor ejercicio de racionalidad (una perfecta comprensión del proceso o procesos físicos involucrados en el problema) para conseguir que la adimensionalización conduzca a los resultados más precisos.

Como en el capítulo anterior, se verifican los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas con el software CODENET\_15: Al final del capítulo se recogen las contribuciones y conclusiones.

## 5.1. Péndulo sobre soporte deslizante

### 5.1.1. Deducción de los grupos adimensionales

De un bloque de masa  $m_1$  que desliza libremente sobre una superficie horizontal cuelga un péndulo físico de masa  $m_2$  y longitud  $l_0$ , Figura 5.1. Desplazando la bolita de la posición de equilibrio un ángulo  $\theta_0$  se producen oscilaciones acopladas en el sistema bloque-péndulo dentro de unos ciertos límites físicos.



**Figura 5.1 Esquema físico del problema**

Para simplificar las ecuaciones de gobierno asumimos dos hipótesis: primera que el ángulo  $\theta_0$  es pequeño y la segunda que la velocidad inicial de la bolita es nula. Bajo estas

condiciones el modelo matemático está formado por el siguiente conjunto de ecuaciones acopladas, deducido del balance de fuerzas a cada masa del problema,

$$m_1 + m_2 \frac{d^2x}{dt^2} + m_2 l_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \quad (5.1)$$

$$m_2 l_0 \frac{d^2x}{dt^2} + m_2 l_0^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + m_2 g l_0 \theta = 0 \quad (5.2)$$

con  $g$  la aceleración de la gravedad. Eligiendo como referencias las magnitudes  $\theta_0$ ,  $x_0$  (la mitad del desplazamiento del soporte en su movimiento oscilatorio, una magnitud oculta) y  $t_0$  (la mitad del tiempo requerido por la bolita para ir de un extremo al otro de su trayectoria, mitad del periodo de oscilación), las variables adimensionales se definen en la forma

$$\theta' = \theta/\theta_0, \quad x' = x/x_0, \quad t' = t/t_0$$

Con esta elección es obvio que los valores de las variables adimensionales quedan confiados en el intervalo  $[0,1]$ . Sustituyendo éstas en las ecuaciones (5.1) y (5.2) obtenemos las ecuaciones adimensionales de gobierno

$$\frac{m_1+m_2}{t_0^2} \frac{x_0}{dt'^2} - \frac{m_2 l_0 \theta_0}{t_0^2} \frac{d^2\theta'}{dt'^2} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{m_2 l_0 x_0}{t_0^2} \frac{d^2x'}{dt'^2} - \frac{m_2 l_0^2 \theta_0}{t_0^2} \frac{d^2\theta'}{dt'^2} + m_2 g l_0 \theta_0 \theta' = 0 \quad (5.4)$$

De la primera (5.3), tras aproximar los factores que contienen las variables adimensionales y sus cambios a la unidad, se obtienen los coeficientes

$$C_1 = \frac{m_1+m_2}{t_0^2} \frac{x_0}{dt'^2}, \quad C_2 = \frac{m_2 l_0 \theta_0}{t_0^2} \frac{d^2\theta'}{dt'^2}$$

de los que se deriva un único grupo adimensional,

$$\pi_{1,1} = \frac{m_1+m_2}{m_2 l_0 \theta_0} \frac{x_0}{dt'^2} \quad (5.5)$$

que proporciona el orden de magnitud de la incógnita  $x_0$

$$x_0 = l_0 \theta_0 \Psi\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right) \quad (5.6)$$

Siguiendo el mismo protocolo, de la segunda ecuación (5.4) se obtienen tres coeficientes

$$C_3 = \frac{m_2 l_0 x_0}{t_0^2}, \quad C_4 = \frac{m_2 l_0^2 \theta_0}{t_0^2}, \quad C_5 = m_2 g l_0 \theta_0$$

que dan lugar a dos monomios adimensionales

$$\pi_{2,1} = \frac{x_0}{l_0 \theta_0} \quad \pi_{2,2} = \frac{gt_0^2}{l_0} \quad (5.7)$$

El orden de magnitud de  $t_0$  derivado de estos monomios viene dado por la siguiente expresión

$$t_0 = \frac{\bar{l}_0}{g} \Psi \pi_{2,1} = \frac{\bar{l}_0}{g} \Psi \frac{x_0}{l_0 \theta_0} \quad (5.8)$$

Con  $\Psi$  una función desconocida. Usando el resultado (5.6), la expresión anterior puede escribirse en la forma

$$t_0 = \frac{\bar{l}_0}{g} \Psi \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (5.9)$$

El significado físico de los grupos adimensionales aquí obtenidos es:

$\pi_{1,1}$  Es un monomio construido por el balance de los términos de las fuerzas que actúan sobre la masa que desliza,

$\pi_{2,1}$  Es lo que análisis dimensional se llama factor de forma y está asociado a una condición inicial ( $l_0 \theta_0$ ), referida a la magnitud oculta  $x_0$ ,

$\pi_{2,2}$  Este grupo está asociado al balance energía cinética-energía potencial en el trayecto recorrido por la masa del péndulo.

### Comparación con el análisis dimensional

Veamos los resultados que proporcionaría el análisis dimensional a este problema. De la lista de variables relevantes ( $m_1, m_2, l_0, g, \theta_0$ ) e incógnitas del problema ( $x_0, t_0$ ), el teorema de pi proporciona cuatro grupos adimensionales (ya que el ángulo  $\theta_0$  es una magnitud habitualmente asumida como adimensional). Estos son

$$\pi_1 = \frac{m_1}{m_2}, \quad \pi_2 = \theta_0, \quad \pi_3 = \frac{x_0}{l_0}, \quad \pi_4 = \frac{gt_0^2}{l_0}$$

con lo que las soluciones para las incógnitas  $x_0$  y  $t_0$  vienen dadas por las expresiones

$$x_0 = l_0 \Psi_x \frac{m_1}{m_2}, \theta_0 \quad (5.10a)$$

$$t_0 = \frac{\bar{l}_0}{g} \Psi_t \frac{m_1}{m_2}, \theta_0 \quad (5.10b)$$

donde  $\Psi_x$  y  $\Psi_t$  son funciones arbitrarias de sus respectivos argumentos. Así, el análisis dimensional clásico proporciona soluciones sensiblemente menos precisas que las

proporcionadas por la adimensionalización de ecuaciones. Sobre la variable  $x_0$  (de la que la adimensionalización proporciona directamente su orden de magnitud) el análisis dimensional hace depender su solución de una función indeterminada de dos monomios. Sobre la variable  $t_0$ , su solución pasa de depender de funciones de un argumento (para la adimensionalización) a funciones de dos argumentos (para el análisis dimensional). Esto significa que las soluciones universales proporcionadas por el análisis dimensional exigen la construcción de ábacos de dos parámetros para cada incógnita. Además, nada se puede decir del orden de magnitud de estas funciones en el análisis dimensional mientras que con el proceso de adimensionalización dichas funciones son de orden de magnitud unidad con independencia del valor del argumento.

La comparación de resultados procedentes de la adimensionalización y del análisis dimensional (digamos clásico), a menos que se trate de problemas muy sencillos, siempre va a demostrar que el primer proceso supera en ventajas al segundo. El hecho de asumir que el ángulo es una magnitud sin dimensiones está en el origen de esta conclusión pues la adimensionalización no desacopla el ángulo de las restantes magnitudes mientras que el análisis dimensional lo hace ya como principio, lo que a su vez elimina toda opción de asignar órdenes de magnitud a las soluciones.

Algunos autores recientes [Szirtes, 2007], conscientes de las limitaciones del análisis dimensional (fundamento de la teoría de modelos), buscan superar esta dificultad sin atacar la base del problema que reside en la discriminación que, en última estancia, conduce al abandono del análisis dimensional en su concepción actual. Los resultados de un análisis dimensional discriminado a este problema, en cuya teoría el ángulo tiene dimensiones propias, trasciende de los objetivos de esta memoria pero deberían coincidir con los de la adimensionalización [Alhama y Madrid, 2012].

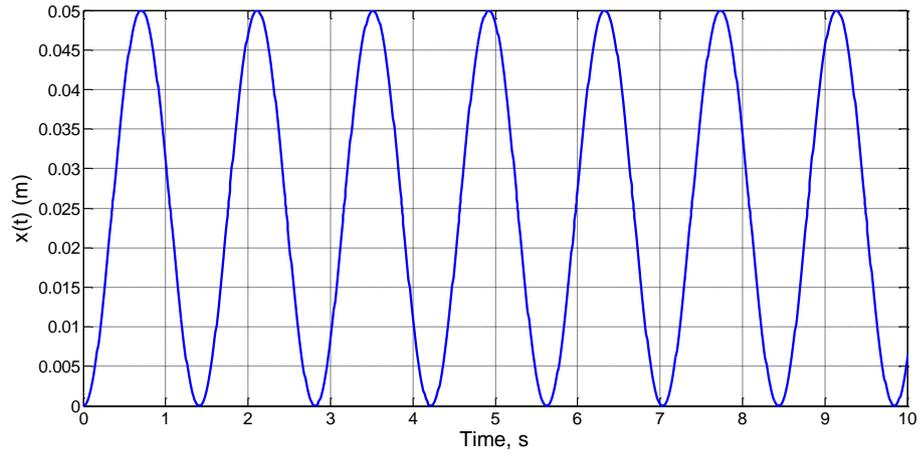
### 5.1.2. Verificación de los resultados

Para comprobar la veracidad de las expresiones de  $x_0$  (5.6) y  $t_0$  (5.9), simularemos numéricamente los casos de la Tabla 5.1. Los primeros, 1 a 3, cuya solución numérica se muestra en la Figura 5.2, retienen el mismo valor numérico para los grupos  $l_0/g$  y  $l_0\theta_0$ , con lo que las incógnitas  $x_0$  y  $t_0$  deben tener, por separado, el mismo valor. La solución  $x_0=0.025$  es coherente con la ecuación (5.6), la cual se transforma en una igualdad, sin tener que añadir ningún factor de proporcionalidad.

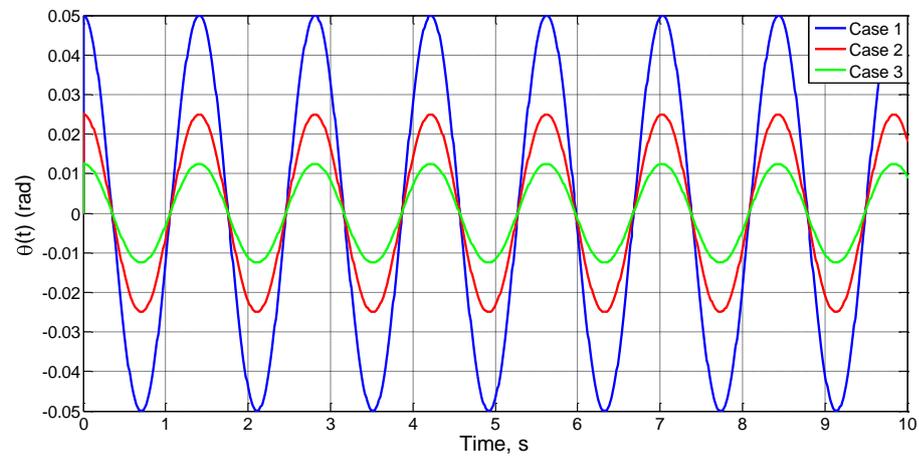
$$x_0 = \frac{m_2 l_0 \theta_0}{m_1 + m_2}$$

Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$l_0$	1	2	4	1	2	1	1	1	1
$\theta_0$	0.05	0.025	0.0125	0.1	0.1	0.05	0.05	0.05	0.05
$g$	10	20	40	1	2	10	10	10	10
$m_1$	1	1	1	1	1	1	2	1	2
$m_2$	1	1	1	1	3	2	4	3	1

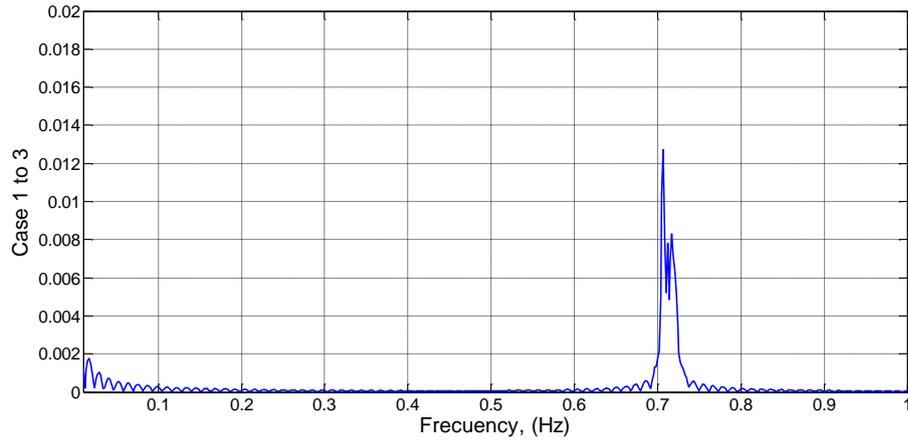
Tabla 5.1 Valores de los parámetros. Casos 1 a 9



a)



b)



c)

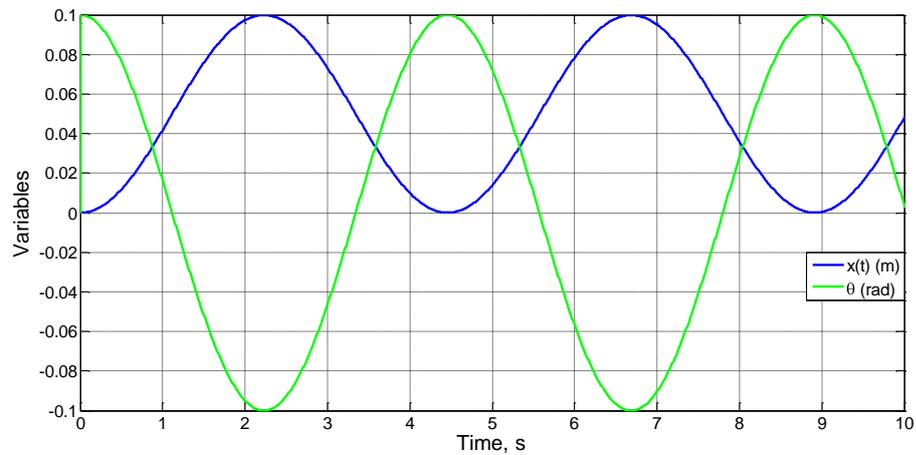
**Figura 5.2  $x(t)$ ,  $\theta(t)$  y FFT frecuencias. Casos 1 a 3**

También,  $t_0 = 0.704$  s. ( $f_0 = 0.7101$  Hz) con lo que, a partir de (5.9),  $\Psi(0.5) = 2.2279$ , un valor de orden de magnitud unidad en coherencia con lo esperado del proceso de adimensionalización.

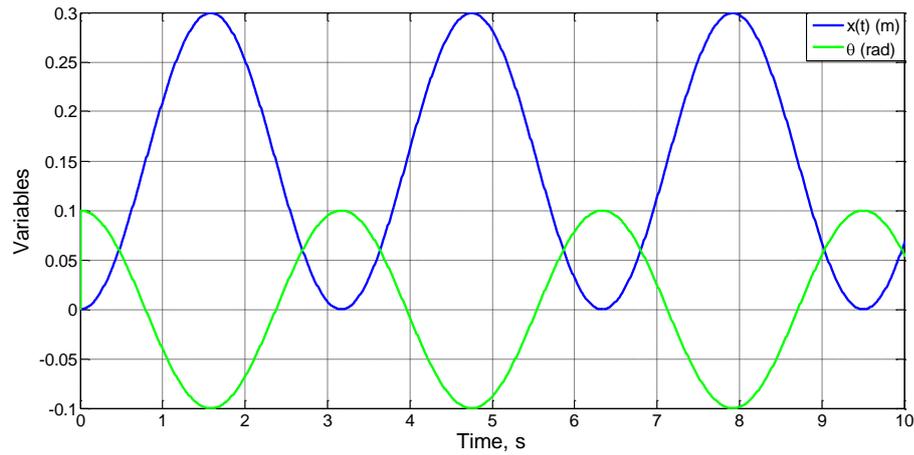
Las simulaciones de los casos 4 y 5 se muestran en la Figura 5.3; éstas proporcionan unas soluciones para  $x_0$  con valores 0.05 m (caso 4) y 0.15 m (caso 5). También dan valores diferentes para  $t_0$ , lo que es coherente con las expresiones (5.6) y (5.9):

Para el caso 4:  $x_0 = 0.05$  m,  $t_0 = 1.11$  s, y para el caso 5:  $x_0 = 0.15$  m,  $t_0 = 0.79$  s

De estos valores,  $\Psi(0.5) = 1.1107$  y  $\Psi(0.75) = 0.79$ , ambos de orden de magnitud unidad. Adviértase que  $\Psi(1)$  tiene el mismo valor en estos tres primeros casos.



a)



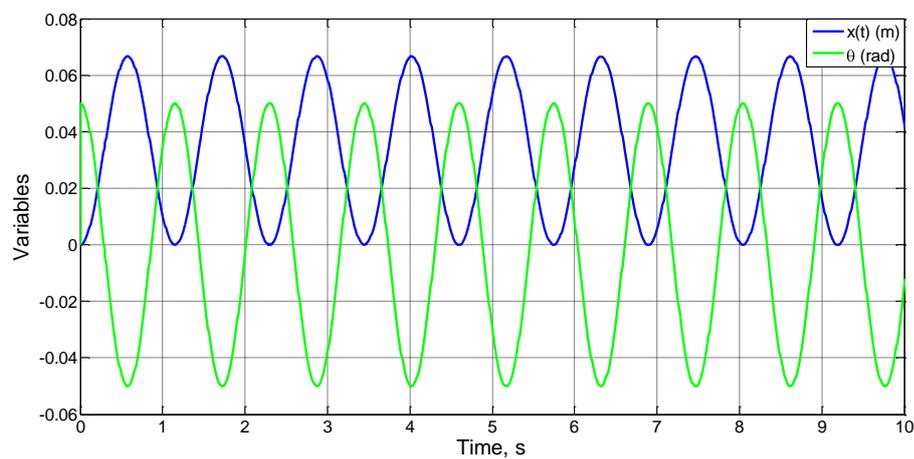
b)

**Figura 5.3  $x(t)$  y  $\theta(t)$  para los casos 4 (arriba) y 5 (abajo)**

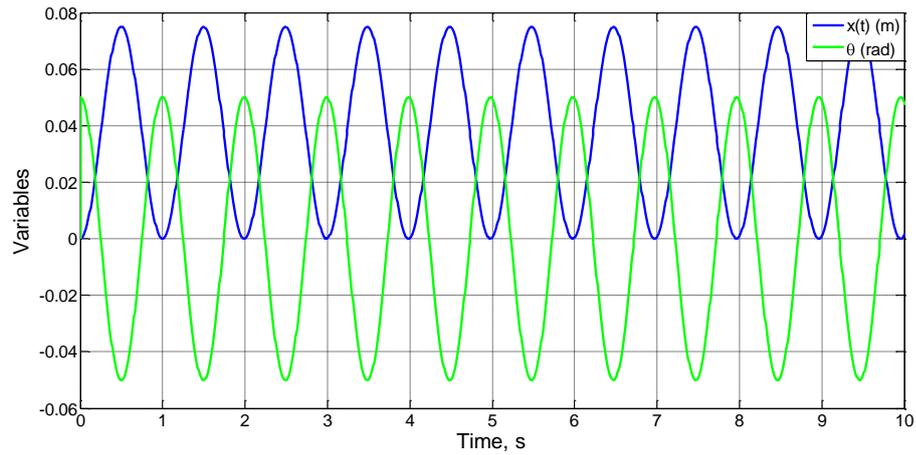
Los casos 6 a 9 retienen los mismos valores de los grupos  $g/l_0$  y  $l_0\theta_0$ , pero cambia el valor del grupo  $m_2/(m_1+m_2)$ . Las simulaciones numéricas se presentan en la Figura 5.4. Los casos 6 y 7 tienen la misma solución pero no así los casos 8 y 9, lo que está de acuerdo con las soluciones de la adimensionalización, ecuaciones (5.6) y (5.9). De estas simulaciones,

$$\Psi(0.75) = 0.79 \text{ (un valor ya obtenido), } \Psi(0.333) = 1.28 \text{ y } \Psi(0.666) = 0.91,$$

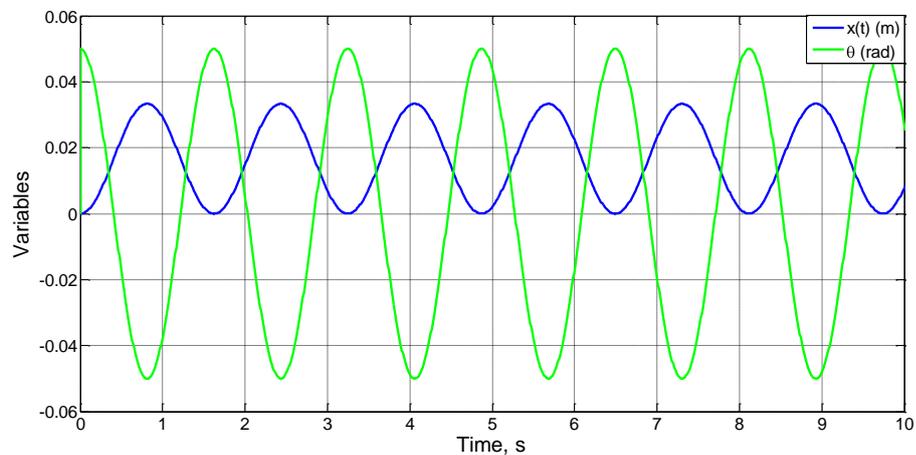
todos ellos del orden de magnitud unidad en coherencia con lo esperado.



a)



b)



c)

Figura 5.4  $x(t)$  y  $\theta(t)$ . a) casos 6 y 7, b) caso 8, c) caso 9

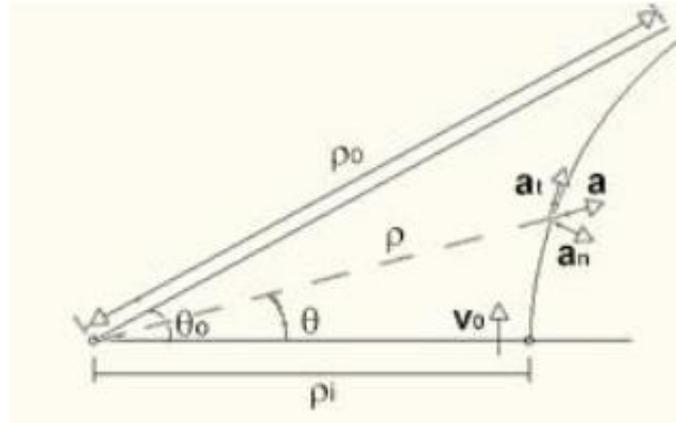
## 5.2. Fuerza proporcional a su masa e inversamente proporcional a la distancia al origen, que repele una partícula con velocidad inicial

### 5.2.1. Dedución de los grupos adimensionales

La Figura 5.5 muestra el esquema físico del problema cuyas condiciones iniciales son:  $\rho = \rho_i$ ,  $\theta = 0$ , y  $v = v_i$ , con  $v_i$  perpendicular a  $\rho_i$ . La coordenada angular de la partícula permite definir la velocidad angular  $\omega = d\theta/dt$ , cuyo valor inicial es  $\omega_i = v_i/\rho_i$ . La única fuerza que actúa sobre la partícula viene dada por la expresión

$$f_r = k \frac{m_0}{\rho^3}$$

con  $k$  un factor de proporcionalidad y  $m_0$  la masa de la partícula.



**Figura 5.5 Esquema físico del problema**

Bajo estas condiciones la partícula se aleja del origen con una aceleración decreciente dirigida en sentido contrario a  $\rho$ . La trayectoria, cuya curvatura disminuye monótonamente, tiende a una línea (asíntota) definida por el ángulo  $\theta_0$ . Las ecuaciones de gobierno, claramente no lineales, son las derivadas del balance de fuerzas (ecuación del momento) en las direcciones espaciales:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \frac{d\theta}{dt}^2 = \frac{k}{\rho^3} \quad (5.11)$$

$$2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \quad (5.12)$$

La evolución asintótica de la partícula no permite establecer unas referencias precisas para las variables del problema:  $\rho, \theta$  y  $t$ . De acuerdo con el enunciado, el claro significado de las magnitudes  $\omega_i, v_i$  y  $\rho_i$  (asociadas a las condiciones iniciales) podrían inducirnos a tomarlas como referencias para sus respectivas variables (a falta de referencias para  $\theta_0$  y  $t$ ). Sin embargo, como estamos interesados en un tiempo para el que los cambios de las variables  $\theta$  y  $d\theta/dt$  (e incluso  $d^2\rho/dt^2$ ) sean despreciables, definiremos una referencia  $t_0$  que satisfaga esta condición. Por ejemplo, podemos elegir  $t_0$  como un tiempo (contado desde el instante inicial) para el cual la velocidad angular cae hasta un valor del 5 ó 10% de su valor inicial; esto, a su vez, forzaría a una elección de valores de las referencias restantes,  $\theta_0$  y  $\rho_0$  (y también  $\omega$  y  $v$  si fuera necesario) en coherencia con  $t_0$ . Por ejemplo

$\theta_{0,r}$ : ángulo de posición de la partícula en el instante  $t_0$ , un valor sin duda cercano a  $\theta_0$

$\rho_0$ : la coordenada radial de la partícula en el instante  $t_0$  o para el mismo ángulo  $\theta_0$ .

Pero aún tendremos que recurrir a una nueva hipótesis merced a la existencia de dos ecuaciones de gobierno y tres incógnitas ( $\theta_o$ ,  $\rho_o$  y  $t_o$ ), ya que debemos reducir estas últimas a dos. Para ello haremos uso de la condición inicial,  $\rho_{(t=0)} = \rho_i$ , asumiendo que los valores de  $\rho_o$  y  $\rho_i$  no son muy diferentes. Sustituiremos sencillamente la referencia  $\rho_o$  por  $\rho_i$ , esperando que las soluciones pierdan algo de precisión.

Incidimos de nuevo en el recurso de adoptar un tiempo característico (de duración aproximada a la del fenómeno transitorio) en problemas con evolución asintótica hacia un estado estacionario (no necesariamente el de reposo). En relación con la elección de magnitudes de referencia, todos los recursos derivados de una (profunda) comprensión física del problema son útiles y necesarios para el proceso de adimensionalización, siempre que todas las referencias estén relacionadas entre sí (se refieran a un mismo periodo temporal para el que se alcance una fracción sensible de los valores límite de las otras variables del problema).

Siguiendo con el protocolo de adimensionalización, definiremos las variables adimensionales en la forma

$$\rho' = \rho/\rho_i, \quad \theta' = \theta/\theta_o, \quad t' = t/t_o$$

Si se requiere, también puede definirse una velocidad angular adimensional como  $\omega' = \omega/\omega_i$ , donde  $\omega_i$ , además de ser la velocidad inicial, es el cambio de  $\omega$  a lo largo del movimiento.

Usando esas variables, la forma adimensional de la ecuación (5.11) es

$$\frac{\rho_i}{t_o^2} \frac{d^2 \rho'}{dt'^2} - \rho_i \omega_i^2 \rho' \frac{d\theta'}{dt'}^2 = \frac{k}{\rho_i^3} \frac{1}{\rho'^3} \tag{5.13}$$

Asumiendo que los factores  $\frac{d^2 \rho'}{dt'^2}$ ,  $\rho' \frac{d\theta'}{dt'}^2$  y  $\frac{1}{\rho'^3}$  son de orden de magnitud unidad, los coeficientes de esta ecuación,

$$C_1 = \frac{\rho_i}{t_o^2}, \quad C_2 = \rho_i \omega_i^2, \quad C_3 = \frac{k}{\rho_i^3}$$

dan lugar a dos grupos adimensionales

$$\pi_1 = \frac{1}{\omega_i^2 t_o^2}, \quad \pi_2 = \frac{k}{\rho_i^4 \omega_i^2} \tag{5.14}$$

de los que se obtiene el orden de magnitud de la incógnita  $t_o$ .

$$t_o = \frac{1}{\omega_i} \xi_1 \frac{k}{\rho_i^4 \omega_i^2} \quad (5.15)$$

con  $\xi_1$  una función arbitraria del argumento  $\pi_2$ . En cuanto a la adimensionalización de la ecuación (5.12), cuya forma adimensional es

$$2 \frac{\rho_i \omega_i}{t_o} \frac{d\rho'}{dt'} \frac{d\theta'}{dt'} + \frac{\rho_i \theta_o}{t_o^2} \rho' \frac{d^2\theta'}{dt'^2} = 0 \quad (5.16)$$

asumiendo orden de magnitud unidad para los factores,  $\frac{d\rho'}{dt'}$ ,  $\frac{d\theta'}{dt'}$  y  $\rho' \frac{d^2\theta'}{dt'^2}$ , obtenemos dos coeficientes

$$C_4 = 2 \frac{\rho_i \omega_i}{t_o}, \quad C_5 = \frac{\rho_i \theta_o}{t_o^2}$$

y un nuevo grupo adimensional

$$\pi_3 = \frac{t_o \omega_i}{\theta_o} \quad (5.17)$$

que proporciona el orden de magnitud de la otra incógnita

$$\theta_o \sim t_o \omega_i \quad (5.18)$$

o, haciendo uso de (5.14),

$$\theta_o = \xi_2 \frac{k}{\rho_i^4 \omega_i^2} \quad (5.19)$$

Ahora, es posible determinar también el orden de magnitud de la tercera incógnita  $\rho_o$ .

De la ecuación

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{k}{\rho^3} \quad (5.20)$$

derivada de (5.11) bajo la hipótesis  $\frac{d\theta}{dt} \approx 0$ , su forma adimensionales

$$\frac{\rho_o}{t_o^2} \frac{d^2\rho'}{dt'^2} = \frac{k}{\rho_o^3} \frac{1}{\rho'^3} \quad (5.21)$$

Los coeficientes de esta ecuación,  $\frac{\rho_o}{t_o^2}$  y  $\frac{k}{\rho_o^3}$  proporcionan el nuevo grupo

$$\pi_4 = \frac{k t_o^2}{\rho_o^4} \quad (5.22)$$

de donde, el orden de magnitud de  $\rho_o$  es

$$\rho_o \sim k t_o^2 \quad (5.23)$$

### 5.2.2. Verificación de los resultados

Para comprobar la fiabilidad de las soluciones anteriores se resuelven numéricamente una serie de casos. Los valores de sus parámetros se muestran en la Tabla 5.2.

Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	1	16	81	4	9	1	1	1	1
$\rho_i$	1	2	3	1	1	1	1	1	1
$\omega_i$	1	1	1	2	3	2	4	10	12

Tabla 5.2 Parámetros de los diferentes casos.  $\theta_{(t=0)} = (d\rho/dt)_{(t=0)} = 0$

La Figura 5.6 muestra las soluciones de  $\theta$ ,  $d\theta/dt$  y  $d^2\theta/dt^2$  para los casos 1 a 3 mientras que las de  $\rho$ ,  $d\rho/dt$  y  $(d^2\rho/dt^2)$  se muestran en la Figura 5.7. Las soluciones para  $t_0$  y las variables  $\theta$  y sus derivadas son coherentes con las soluciones (5.15) y (5.18). Si asumimos  $t_0$  como el tiempo requerido para que la velocidad angular caiga al valor  $0.1\omega_i$ , obtenemos para los tres casos que

$$t_0 = 2.120, \quad \theta_{(t=2.120)} = 0.8833$$

Esta solución permite que la ecuación (5.18) se pueda escribir como una igualdad, con un factor de proporcionalidad del orden de la unidad como esperábamos,

$$\theta_0 = 0.41666 (\omega_i t_0) \tag{5.24}$$

El valor de la constante de proporcionalidad da un orden de magnitud unidad al grupo  $\pi_1$ .

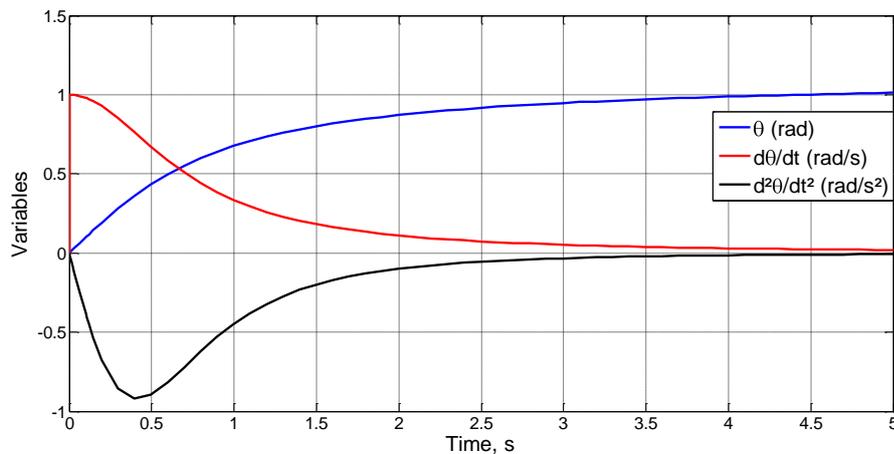
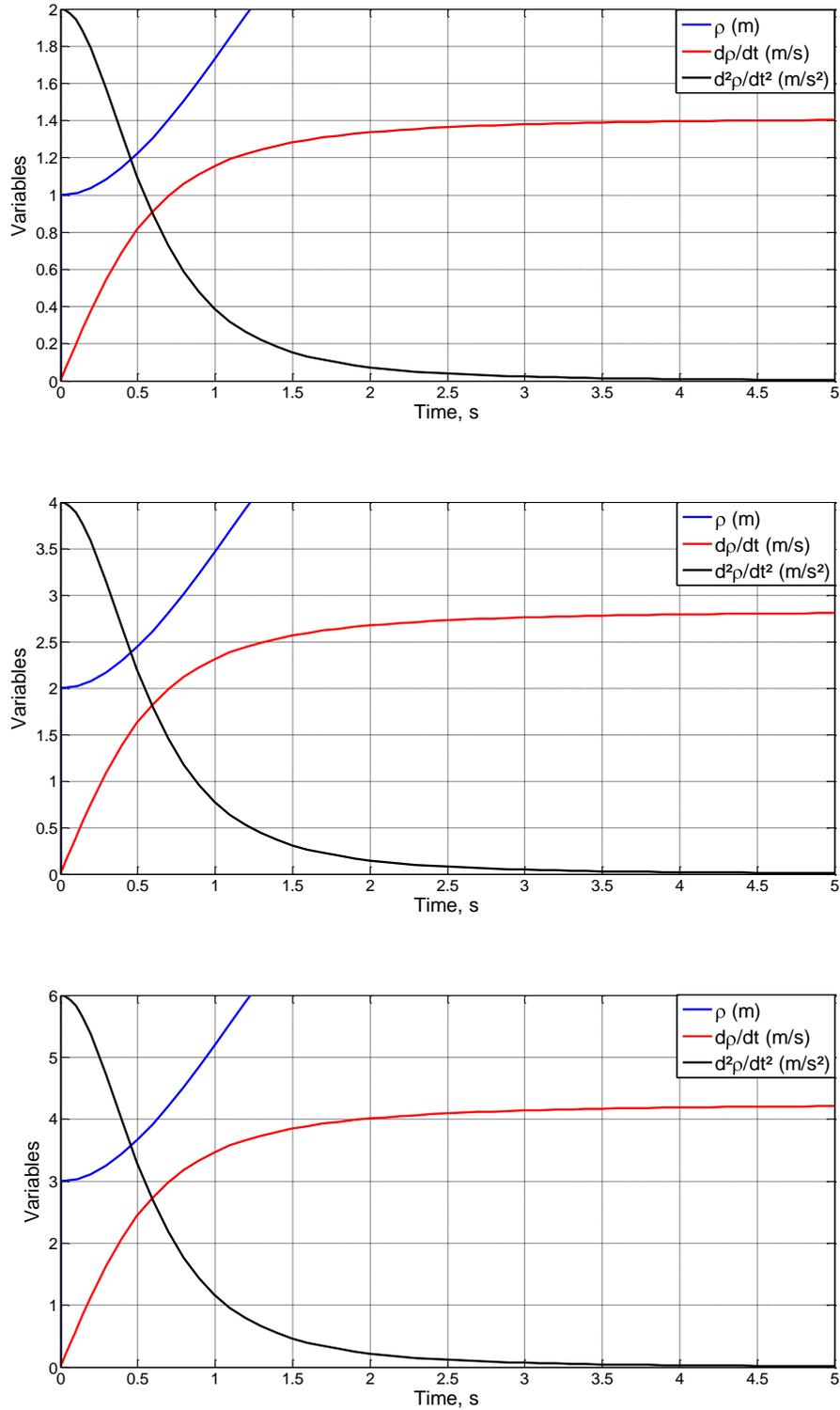


Figura 5.6  $\theta$ ,  $d\theta/dt$  y  $d^2\theta/dt^2$  para los casos 1 a 3



**Figura 5.7  $\rho$ ,  $d\rho/dt$  y  $d^2\rho/dt^2$  para los casos 1 a 3 (de arriba hacia abajo)**

En relación con  $\rho_0$ , las simulaciones muestran un mismo patrón excepto en la escala, lo que es coherente con la expresión (5.23)

$$\rho_{(t=t_0=2.120), \text{ Caso 1}} = 3.1611$$

$$\rho(t=t_0=2.120), \text{ Caso 2} = 6.3222$$

$$\rho(t=t_0=2.120), \text{ Caso 3} = 9.4832$$

Como

$$k t_0^2 \text{ caso 1}^{1/4} = 1.4560, \quad k t_0^2 \text{ caso 2}^{1/4} = 2.9120 \quad \text{y} \quad k t_0^2 \text{ caso 3}^{1/4} = 4.3681$$

la ecuación (5.23) puede escribirse como una igualdad donde la constante de proporcionalidad es también de orden de magnitud unidad

$$\rho_{o, \text{ casos 1 a 3}} = 2.1711 k t_0^2 \text{ caso }^{1/4} \quad (5.25)$$

Sustituyendo la ecuación (5.15) en la anterior, podemos escribir  $\rho_o$  como una función de los parámetros  $k$ ,  $\rho_i$  y  $\omega_i$ , aunque mediante una expresión que contiene una función desconocida de argumento  $\frac{k}{\rho_i^4 \omega_i^2}$ . Finalmente, de la ecuación (5.15) se obtiene (para los tres casos)

$$\xi_1 \frac{k}{\rho_i^4 \omega_i^2} = \xi_1(1) = 2.120$$

Para el caso 4, el argumento de  $\xi_1$  retiene el mismo valor con lo que, de acuerdo con la ecuación (5.15),

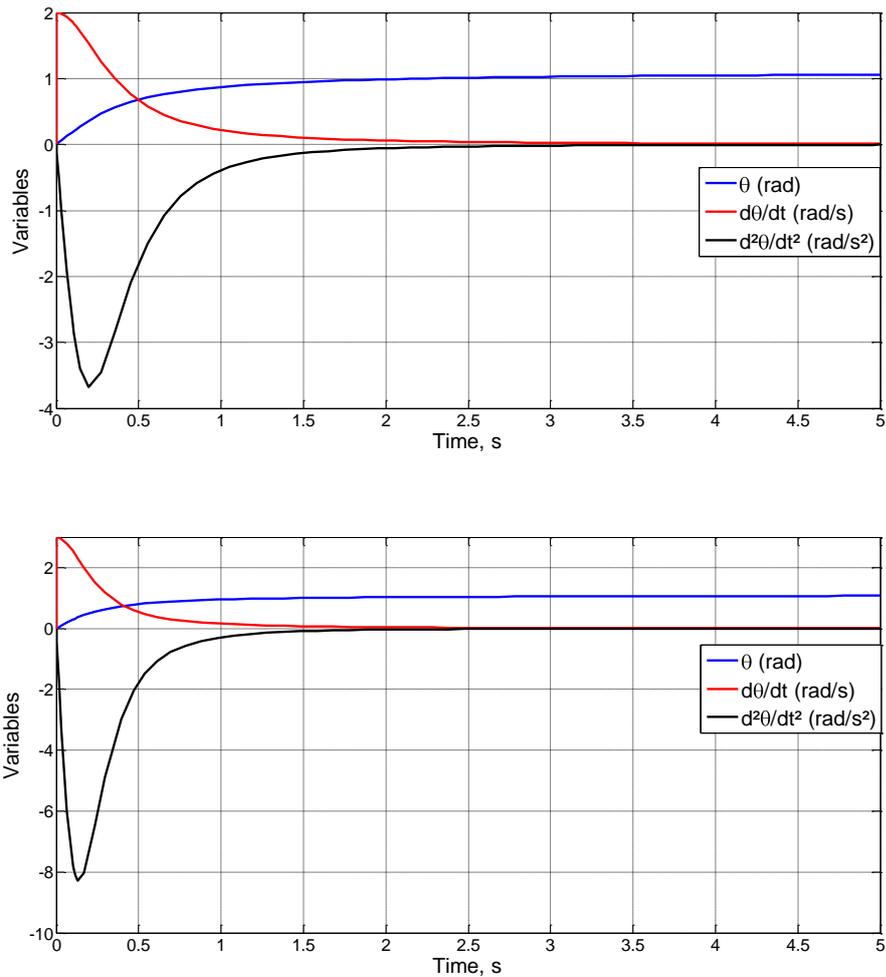
$$t_0 = (1/2)\xi_1(1) = 1.060,$$

un resultado confirmado por la solución numérica, Figura 5.8. Además, de (5.24),

$$\theta_{o, \text{ caso 4}} = 0.8833$$

confirmado también numéricamente. Adviértase, finalmente, que de las ecuaciones (5.24) y (5.19), pueden obtenerse valores de la función  $\xi_2$ . Por ejemplo, para el caso 4,

$$\xi_2 \frac{k}{\rho_i^4 \omega_i^2} = \xi_2(1) = 0.8833.$$



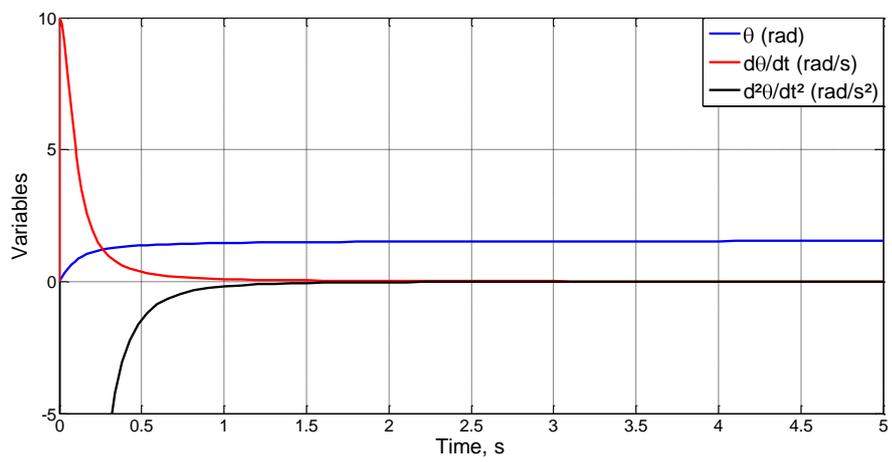
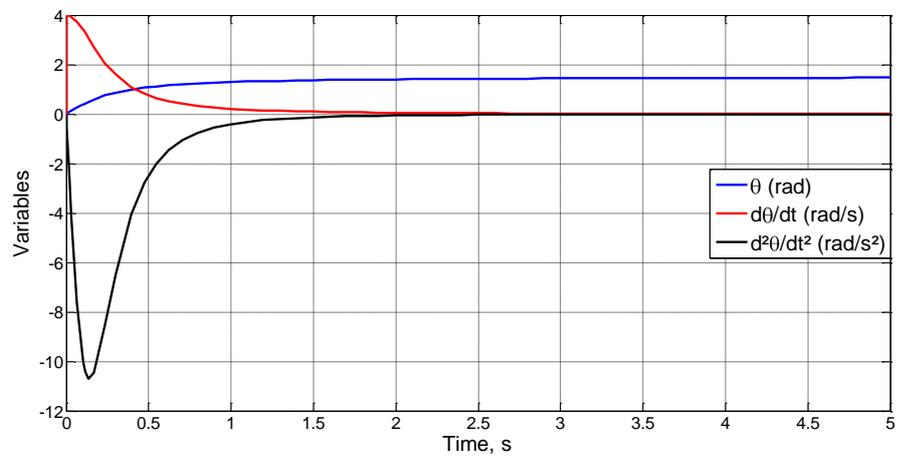
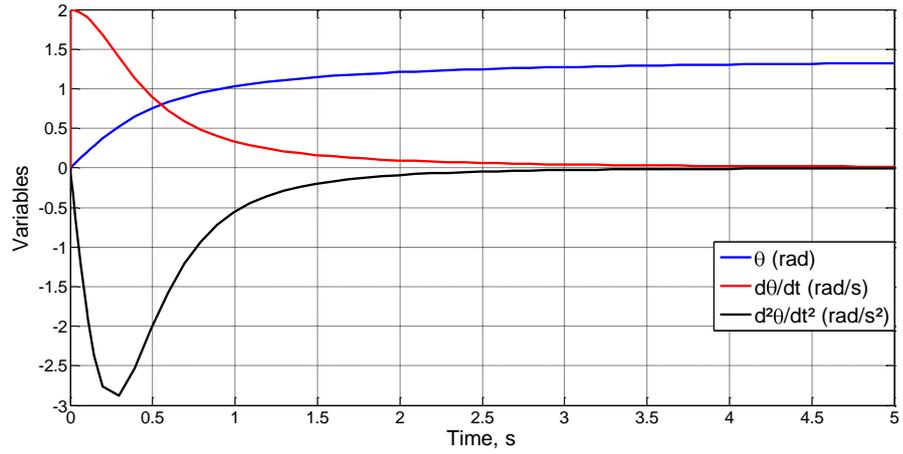
**Figura 5.8  $\theta$ ,  $d\theta/dt$  y  $d^2\theta/dt^2$ . Casos 4 (arriba) y 5 (abajo)**

Para el caso 5, dado que el argumento de  $\xi_1$  es el mismo que el del caso 4, el valor teórico de  $t_0$  es

$$t_0 = (1/3)\xi_1(1) = (1/3)2.120 = 0.7067$$

un resultado confirmado por la simulación (Figura 5.8). Como se esperaba, las soluciones numéricas de  $\theta_0$  (0.8833) y  $\rho_0$  son las mismas que los derivadas de las ecuaciones (5.19) o (5.24) y la ecuación (5.25), respectivamente.

Finalmente, los casos 6 a 9, en los cuales  $\omega_i$  es el único parámetro que cambia, verifican los resultados provenientes de la adimensionalización y permiten determinar algunos valores de las funciones  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , así como sus tendencias para valores decrecientes de su argumento común. La Figura 5.9 muestra las simulaciones de estos casos. Algunos de los resultados de los casos 6 a 9, para  $\omega(t_0) = 0.1\omega_i$ , se muestran en la Tabla 5.3.



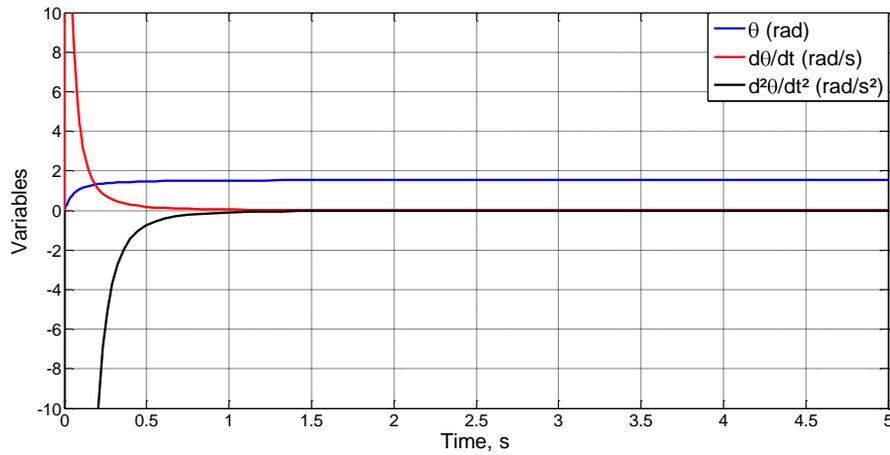


Figura 5.9  $\theta$ ,  $(d\theta/dt)$  y  $(d^2\theta/dt^2)$ . Casos 6 a 9 (de arriba hacia abajo)

Caso	$t_0$	$k/(\rho_i^2 \omega_i^4)$	$\xi_1$ de la eq. (7)	$\theta_0$ (simulación)	$\theta_0$ (teórico)	$\xi_2$ de la eq. (12)	$\omega_i t_0 / \theta_0$
6	1.341	0.25	2.681	1.117	1.117	1.117	2.40
7	0.727	0.0625	2.909	1.212	1.212	1.212	2.40
8	0.298	0.01	2.984	1.243	1.243	1.243	2.40
9	0.143	0.0025	2.995	1.248	1.248	1.248	2.40

Tabla 5.3 Soluciones de los casos 6 a 9

Finalmente en este ejemplo, hablaremos del significado físico que tienen los monomios o grupos adimensionales obtenidos como resultado del proceso de adimensionalización:

- $\pi_1 = \frac{1}{\omega_i^2 t_0^2}$  Es un balance entre los términos de la fuerza de inercia asociada a la componente radial,
- $\pi_2 = \frac{k}{\rho_i^4 \omega_i^2}$  Compara la fuerza de repulsión con uno de los términos de la fuerza de inercia asociada a la componente radial,
- $\pi_3 = \frac{t_0 \omega_i}{\theta_0}$  Es un balance entre los términos de la fuerza de inercia asociada a la componente angular.
- $\pi_4 = \frac{k t_0^2}{\rho_i^4}$  Compara la fuerza de repulsión con la fuerza de inercia asociada a la componente radial con  $\omega \approx 0$ .

### 5.3. Péndulo elástico: bolita sujeta a un muelle

#### 5.3.1. Deducción de los grupos adimensionales

La Figura 5.10 muestra el esquema físico del problema. Una pequeña masa ( $m_o$ ) se sujeta al extremo de un muelle cuyo otro extremo se fija al techo. Muelle y bolita se desplazan libremente en el plano del papel, manteniéndose alineados, al ser sacados de su posición de equilibrio. El sistema tiene dos grados de libertad que pueden definirse por las variables  $\rho$ , desplazamiento de la bolita en la dirección de la alineación respecto de una posición de referencia, y  $\theta$ , ángulo de desviación de la línea de alineación respecto de la vertical.

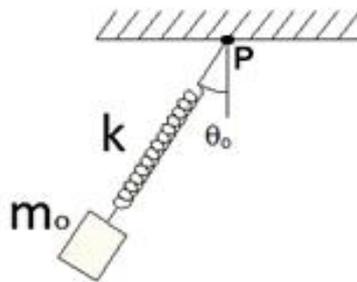


Figura 5.10 Esquema físico del problema

La elección precisa de una longitud de referencia para adimensionalizar la variable  $\rho$  requiere un minucioso estudio del fenómeno físico ya que existen muchas longitudes explícitas e implícitas para esta referencia. Llamaremos  $f_m$  y  $m_o g$  a las fuerzas del muelle y gravitatoria, respectivamente, que actúan sobre la masa, y  $l_o$  a la longitud del muelle (sin estirar);  $g$  es la aceleración de la gravedad. Con el conjunto muelle-masa en equilibrio estático, la elongación del muelle ( $d_o$ ) se obtiene de la ecuación

$$m_o g = k d_o \quad (5.26)$$

con  $k$  la constante del muelle. Sin pérdida de generalidad, simplificaremos el problema asumiendo condiciones iniciales simples definidas en la forma  $\theta_{(t=0)} = \theta_o$  y  $d\theta/dt_{(t=0)} = d\rho/dt_{(t=0)} = 0$ . La longitud total del muelle ( $r_o$ ), en equilibrio, tiene el valor

$$r_o = l_o + d_o = l_o + (m_o g)/k \quad (5.27)$$

Bajo estas condiciones, la longitud del muelle tendrá siempre valores superiores a  $r_o$ , y la fuerza elástica (asumiendo un comportamiento elástico lineal),  $f_m = k(\rho - l_o)$ , tiene la dirección de la línea masa-muelle. Con todo, la masa  $m_o$  está sujeta a dos oscilaciones simultáneas

acopladas. Una debida al comportamiento del sistema como un péndulo en torno a la línea vertical definida por  $\theta = 0$ , y otra en la dirección de la alineación del muelle, asociada al movimiento armónico. Finalmente, con objeto de simplificar aún más el escenario mediante las aproximaciones  $\sin(\theta) \approx \theta$  y  $\cos(\theta) \approx 1$ , ceñimos el estudio a ángulos pequeños.

Como variables dependientes adoptaremos las siguientes  $\xi = \rho - r_o$  y  $\theta$ . En términos de éstas, las ecuaciones de gobierno son:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - (\xi + l_o + d_o) \frac{d\theta}{dt}^2 - g + \frac{k}{m_o} \xi + d_o = 0 \quad (5.28)$$

$$(\xi + l_o + d_o) \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\xi}{dt} \frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0 \quad (5.29)$$

Las magnitudes que pueden elegirse como referencias para definir las variables adimensionales  $\xi$  (longitud),  $\theta$  (ángulo) y  $t$  (tiempo) son:

- $r_o$  longitud del muelle en el instante  $t=0$ ,
- $d_o$  máximo desplazamiento del muelle cuando la bolita está en equilibrio con él (una longitud independiente de la longitud del muelle en reposo, es decir, sin estirar),
- $a_o$  desplazamiento máximo del muelle,
- $l_o$  longitud del muelle en equilibrio, sin la masa colgada (se trata de una magnitud significativa en el problema, ya que determina la longitud del muelle en el instante inicial),
- $\theta_o$  desplazamiento angular inicial,
- $t_o^\xi$  tiempo característico asociado a las oscilaciones en la dirección del muelle (o de la alineación muelle-masa). Por ejemplo, tiempo requerido por la masa  $m_o$  para alcanzar el valor máximo de  $d\rho/dt$  desde el instante inicial,
- $t_o^\theta$  tiempo característico asociado a las oscilaciones angulares. Por ejemplo, tiempo requerido por la masa para que el sistema alcance su posición vertical desde el instante inicial.

La elección de dos tiempos característicos (una especie de discriminación nueva, no encontrada en la literatura científica) es permisible ya que, a pesar de que se trata de un problema acoplado, son dos los fenómenos físicos involucrados en el problema que inducen oscilaciones de forma independiente, el del muelle y el del péndulo físico. La influencia de estos tiempos de referencia en la oscilación del sistema se revelará en la solución mediante funciones desconocidas de los grupos adimensionales resultantes que determinarán el

acoplamiento. En cuanto a la longitud de referencia deberemos elegir uno de entre los cuatro posibles parámetros ( $r_o$ ,  $d_o$ ,  $a_o$  y  $l_o$ ) no independientes, merced a las ecuaciones (5.26) y (5.27). La mejor elección para normalizar la variable  $\xi$ , confinando sus valores en el intervalo  $[0,1]$ , es  $a_o$ . Esto justifica la elección de  $\xi$  como variable dependiente en lugar de  $\rho$ . Las variables adimensionales quedan pues definidas en la forma:

$$\xi' = (\xi/a_o) = (\rho-r_o)/a_o$$

$$\theta' = \theta/\theta_o$$

$$t_p' = t/t_o^\xi$$

$$t_\theta' = t/t_o^\theta$$

Introduciéndolas en las ecuaciones de gobierno (5.28) y (5.29), éstas adquieren su forma adimensional

$$\frac{a_o}{t_o^\xi} \frac{d^2 \xi'}{dt'^2} - a_o \xi' - \frac{\theta_o^2}{t_o^\theta} \frac{d\theta'}{dt'} - l_o + d_o - \frac{\theta_o^2}{t_o^\theta} \frac{d\theta'}{dt'} - g + \frac{k}{m_o} a_o \xi' + d_o = 0 \quad (5.30)$$

$$a_o \xi' - \frac{\theta_o}{t_o^\theta} \frac{d^2 \theta'}{dt'^2} + l_o + d_o - \frac{\theta_o}{t_o^\theta} \frac{d^2 \theta'}{dt'^2} + 2 \frac{a_o}{t_o^\xi} \frac{\theta_o}{t_o^\theta} \frac{d\xi'}{dt'} \frac{d\theta'}{dt'} + g \theta_o \theta' = 0 \quad (5.31)$$

Los coeficientes derivados de la ecuación (5.30) son siete

$$C_1 = \frac{a_o}{t_o^\xi}, C_2 = \frac{a_o \theta_o^2}{t_o^\theta}, C_3 = \frac{l_o \theta_o^2}{t_o^\theta}, C_4 = \frac{d_o \theta_o^2}{t_o^\theta}, C_5 = g, C_6 = \frac{k a_o}{m_o}, C_7 = \frac{k d_o}{m_o}$$

y dan lugar a seis grupos adimensionales. Dividiendo, por ejemplo, entre el coeficiente  $C_5$ , los grupos formados son

$$\pi_{1,1} = \frac{a_o}{g t_o^\xi}, \pi_{2,1} = \frac{a_o \theta_o^2}{g t_o^\theta}, \pi_{3,1} = \frac{l_o \theta_o^2}{g t_o^\theta}, \pi_{4,1} = \frac{d_o \theta_o^2}{g t_o^\theta}, \pi_{5,1} = \frac{k a_o}{m_o g}, \pi_{6,1} = \frac{k d_o}{m_o g} \quad (5.32)$$

El grupo  $\pi_{6,1}$  es la condición de equilibrio, ecuación (5.26). Su valor es la unidad y por ser constante no tiene influencia en la solución del problema. Además, los cocientes  $\pi_3/\pi_2$  y  $\pi_4/\pi_2$  permiten reescribir los grupos  $\pi_3$  y  $\pi_4$  en la forma  $l_o/a_o$  y  $d_o/a_o$ , así como redefinir  $\pi_{5,1}$  en la misma forma que  $\pi_{6,1}$ . Con todo lo anterior, los seis grupos anteriores se simplifican a cuatro que pueden ser redefinidos en la forma

$$\pi_{1,1} = \frac{a_o}{g t_o^\xi}, \pi_{2,1} = \frac{a_o \theta_o^2}{g t_o^\theta}, \pi_{3,1} = \frac{l_o}{a_o}, \pi_{4,1} = \frac{d_o}{a_o} \quad (5.33)$$

De la segunda ecuación, (5.31), emergen cinco coeficientes

$$C_1 = \frac{a_0 \theta_0}{t_0^\xi}, C_2 = \frac{l_0 \theta_0}{t_0^\theta}, C_3 = \frac{d_0 \theta_0}{t_0^\theta}, C_4 = 2 \frac{a_0}{t_0^\xi} \frac{\theta_0}{t_0^\theta}, C_5 = g \theta_0$$

y cuatro grupos adimensionales. Dividiendo por ejemplo entre  $C_5$ , estos grupos son

$$\pi_{1,2} = \frac{a_0}{g t_0^\xi}, \pi_{2,2} = \frac{l_0}{g t_0^\theta}, \pi_{3,2} = \frac{d_0}{g t_0^\theta}, \pi_{4,2} = \frac{2a_0}{g t_0^\xi t_0^\theta} \quad (5.34)$$

Los cocientes  $\pi_{2,2}/\pi_{1,2}$  y  $\pi_{3,2}/\pi_{1,2}$  son grupos ya deducidos de la ecuación (5.30) mientras que  $\pi_{2,1}/\pi_{1,2}$  simplifica el primer grupo al nuevo  $\pi_{1,2} = \theta_0$ . Usando este resultado, es también evidente que  $\pi_{4,2}$  puede escribirse como una función matemática simple de los grupos  $\pi_{1,1}$ ,  $\pi_{2,1}$  y  $\pi_{1,2}$ . En resumen, los cinco grupos finalmente independientes que controlan la solución del problema, escritos en la forma más sencilla, son:

$$\pi_1 = \frac{m_0}{k t_0^\xi}; \pi_2 = \frac{l_0}{g t_0^\theta}; \pi_3 = \frac{d_0}{a_0}; \pi_4 = \frac{l_0}{d_0}; \pi_5 = \theta_0 \quad (5.35)$$

Otras expresiones pueden ser elegidas para estos grupos, sin embargo, ésta tiene la ventaja de que las incógnitas del problema,  $a_0$ ,  $t_0^\xi$  y  $t_0^\theta$ , aparecen separadamente en los tres primeros grupos,  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  y  $\pi_3$ , respectivamente. El significado físico de estos grupos es inmediato:

- $\pi_1$  relaciona el tiempo característico  $t_0^\xi$  con el movimiento armónico (periodicidad) del sistema alineado muelle-masa cuyo periodo de oscilación tiene un orden de magnitud de  $(m_0/k)^{1/2}$ ,
- $\pi_2$  relaciona el tiempo característico  $t_0^\theta$  con el movimiento armónico del péndulo formado por el sistema muelle-bolita, cuyo periodo de oscilación tiene un orden de magnitud de  $(l_0/g)^{1/2}$ ,
- $\pi_3, \pi_4$  estos monomios son simplemente lo que en análisis dimensional se denomina factores de forma. El hecho de que sean grupos discriminados (numerador y denominador en cada grupo tienen la misma dirección espacial) asegura su independencia y su influencia separada en la solución del problema. Estos son grupos cuyo orden de magnitud no es la unidad,
- $\pi_5$  monomio relacionado con la condición inicial (obviamente tampoco de orden de magnitud unidad).

La solución del problema (como se menciona en el capítulo 2) para cada grupo que contiene una incógnita, o para las propias incógnitas se expresa en la forma

$$\pi_1 = \Psi \pi_3, \pi_5, \quad \circ \quad t_0^\xi = \frac{\overline{m_0}}{k} \Psi_\xi \theta_0, \frac{l_0}{d_0} \quad (5.36)$$

$$\pi_2 = \Psi \pi_3, \pi_5, \quad \circ \quad t_0^\theta = \frac{l_0}{g} \Psi_\theta \theta_0, \frac{l_0}{d_0} \quad (5.37)$$

$$\pi_4 = \Psi \pi_3, \pi_5, \quad \circ \quad a_0 = d_0 \Psi_a \theta_0, \frac{l_0}{d_0} \quad (5.38)$$

### 5.3.2. Verificación de los resultados

Los grupos adimensionales que no contienen incógnitas ( $\pi_3$  y  $\pi_5$ ) toman parte en la solución como argumentos de funciones indeterminadas cuyo valor puede obtenerse mediante simulaciones numéricas. Entre las posibles pruebas para demostrar que los grupos obtenidos son los únicos independientes que gobiernan la solución del problema, seleccionamos el conjunto de casos cuyos parámetros se muestran en la Tabla 5.4. La velocidad inicial es nula en todos ellos, esto es,  $d\theta/dt_{(t=0)} = d\rho/dt_{(t=0)} = 0$ .

Caso	$m_0$	k	$l_0$	g	$\theta_0$	$d_0 = m_0 g / k$	$r_0 = l_0 + d_0$
1	1	10	2	2	0.01	0.2	2.2
2	2	20	2	2	0.01	0.2	2.2
3	0.25	2.5	2	2	0.01	0.2	2.2
4	1	10	4	4	0.01	0.4	4.4
5	1	10	1	1	0.01	0.1	1.1
6	1	10	1	1	0.01	0.3	1.3
7	1	10	2	1	0.01	0.1	2.1
8	1	10	2	1	0.1	0.1	2.1
9	1	10	2	1	0.5	0.1	2.1

Tabla 5.4 Valores de los parámetros

En primer lugar comprobaremos que para el mismo valor del cociente  $m_0/k$ , casos 1 a 3, la solución no cambia. En efecto, las simulaciones de estos casos, Figura 5.11 para las variables  $\xi$ ,  $\theta$ , y Figura 5.12 para las derivadas  $d\xi/dt$ ,  $d^2\xi/dt^2$ ,  $d\theta/dt$  y  $d^2\theta/dt^2$ , así lo demuestran. La Figura 5.13 muestra los espectros FFT de las variables  $\xi$  y  $\theta$  en estos casos.

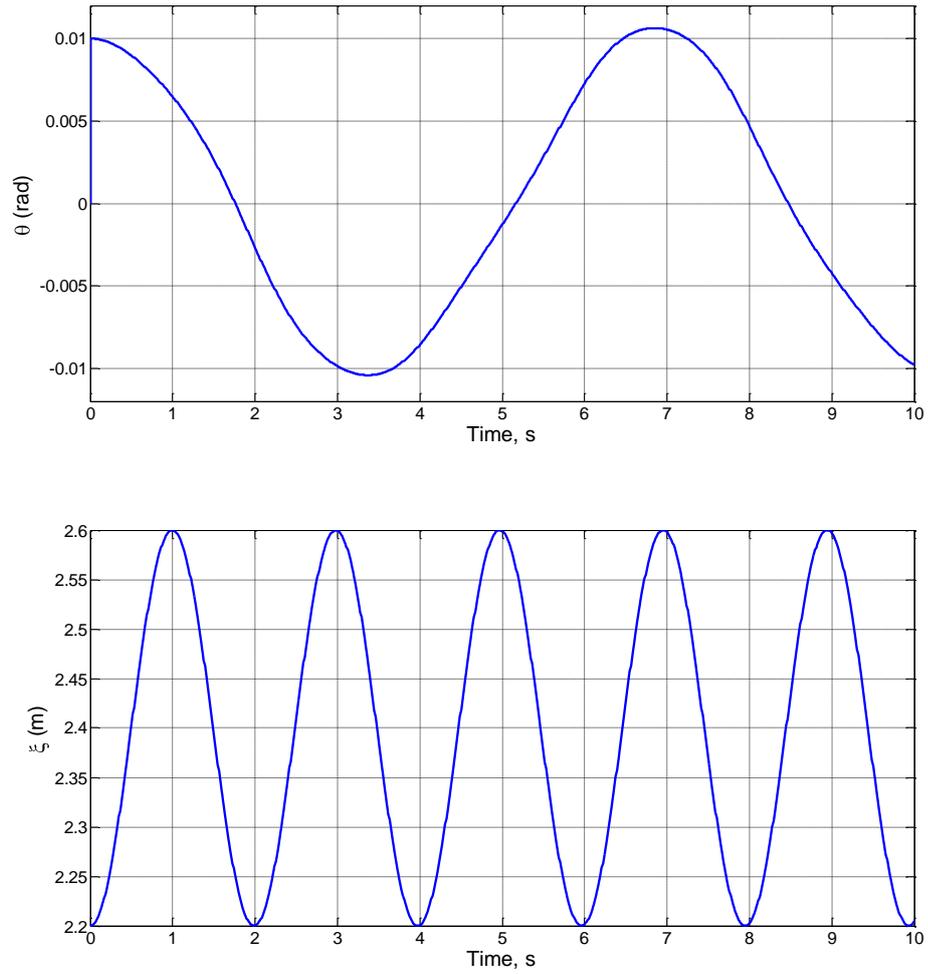
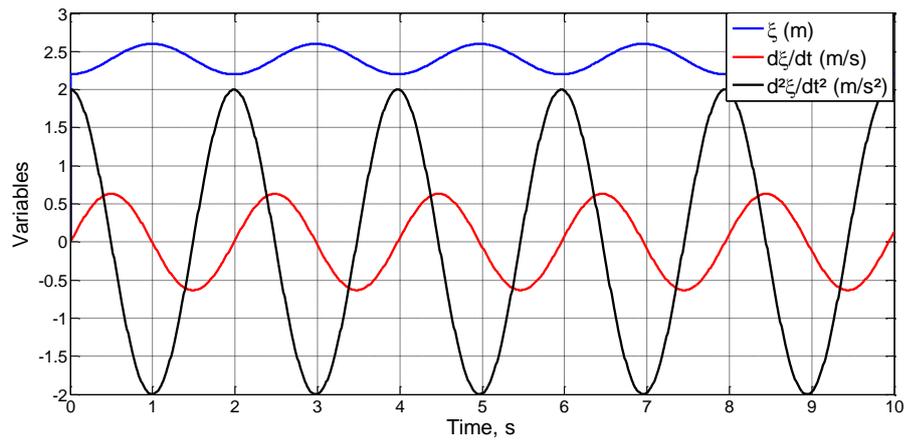


Figura 5.11 Soluciones numéricas de los casos 1 a 3.  $\xi = \rho - r_o$  (arriba) y  $\theta$  (abajo)



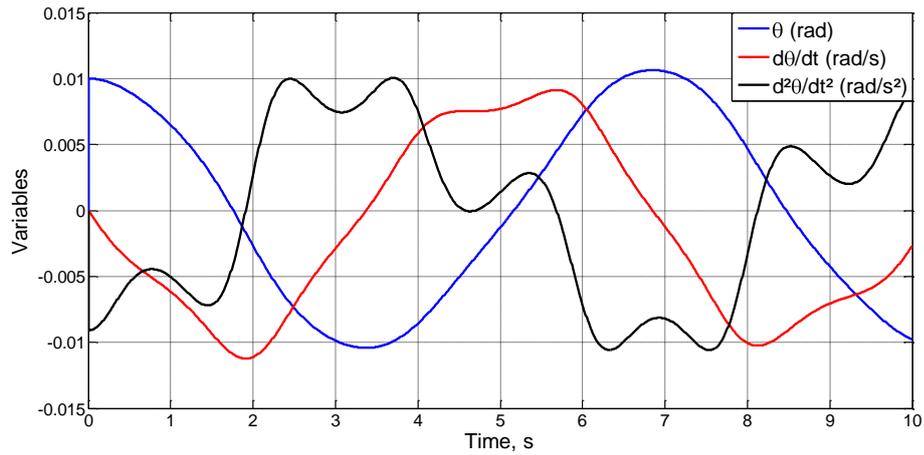


Figura 5.12 Casos 1 a 3.  $\xi$ ,  $d\xi/dt=d\rho/dt$  y  $d^2\xi/dt^2=d^2\rho/dt^2$  (arriba),  $\theta$ ,  $d\theta/dt$  y  $d^2\theta/dt^2$  (abajo)

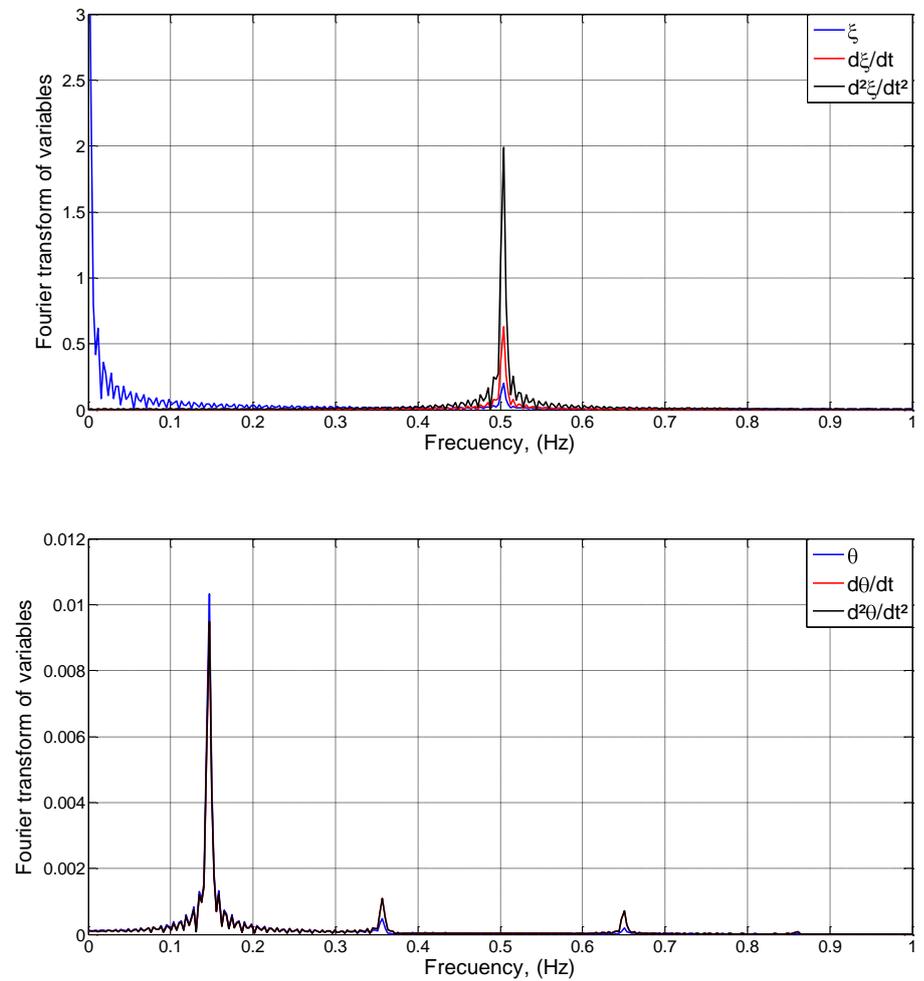


Figura 5.13 Caso 3. Frecuencias FFT de  $\xi$ ,  $d\xi/dt$  y  $d^2\xi/dt^2$  (arriba);  $\theta$ ,  $d\theta/dt$  y  $d^2\theta/dt^2$  (abajo)

Advierta que las soluciones son armónicas pero su espectro contiene más de una frecuencia merced al acoplamiento entre los fenómenos físicos involucrados en el problema. De acuerdo con la ecuación (5.38) y de la simulación,

$$a_o = 0.2, \quad \Psi_a \theta_o, \frac{l_o}{d_o} = 1$$

Adviértase también que el máximo desplazamiento angular es el mismo que su valor inicial. En cuanto a los periodos de oscilación, las soluciones numéricas proporcionan el resultado

$$4t_o^\xi = 2, \quad 4t_o^\theta = 6.85 \text{ (frecuencia fundamental 0.146 Hz)}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (5.36) y (5.37), se obtiene

$$\Psi_\xi(0.01, 10) = 1.5813, \quad \Psi_\theta(0.01, 10) = 1.7125$$

Adviértase que todas las funciones, como se esperaba, son de orden de magnitud unidad, permitiendo escribir para las referencias el orden de magnitud

$$t_o^\xi \sim \frac{\overline{m_o}}{k} \text{ y } t_o^\theta \sim \frac{\overline{l_o}}{g}$$

En segundo lugar, para los mismos valores de los cocientes  $l_o/g$  y  $l_o/d_o$ , casos 1, 4 y 5, las soluciones son coherentes con las ecuaciones (5.36) y (5.38). Por un lado,  $\theta$ ,  $d\theta/dt$  y  $d^2\theta/dt^2$  (Figura 5.14) proporcionan los mismos resultados (mismo espectro FFT); por otro,  $\xi$ ,  $d\xi/dt$  y  $d^2\xi/dt^2$  tienen el mismo patrón (Figura 5.15) aunque con amplitudes diferentes en coherencia con los valores de  $l_o$  y  $d_o$  en cada caso. Además,  $a_o$  es también coherente con la ecuación (5.38) en la cual la función  $\Psi_a$  tiene el mismo valor en los tres casos. De la simulación,  $a_o = 0.4$  para el caso 1, 0.8 para el caso 4 y 0.2 para el caso 5.

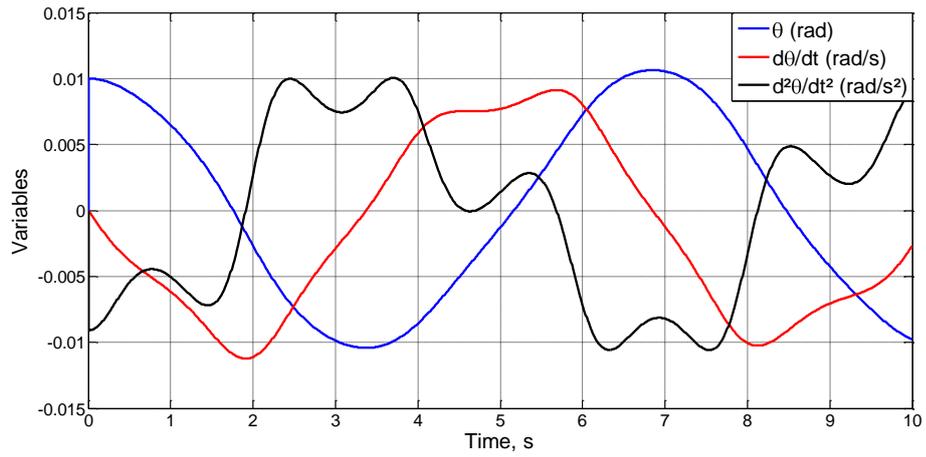
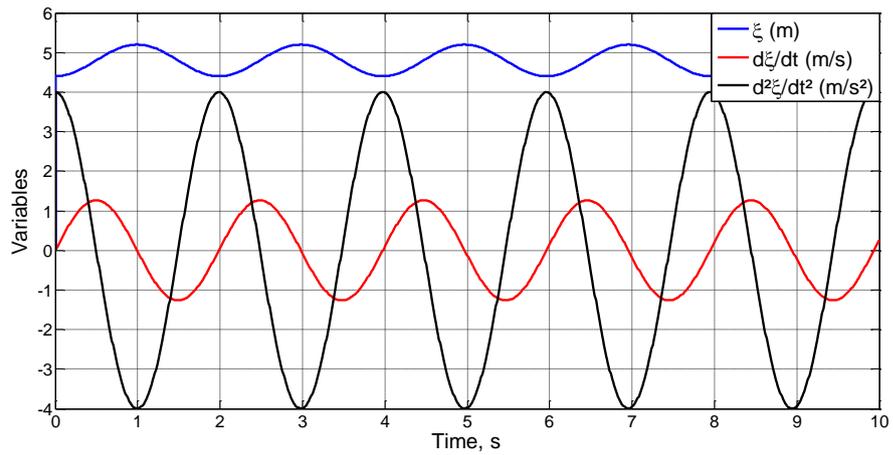
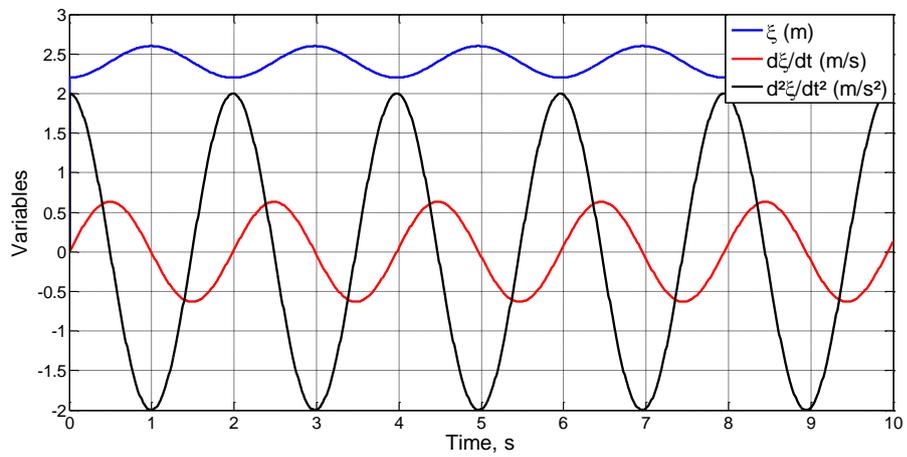
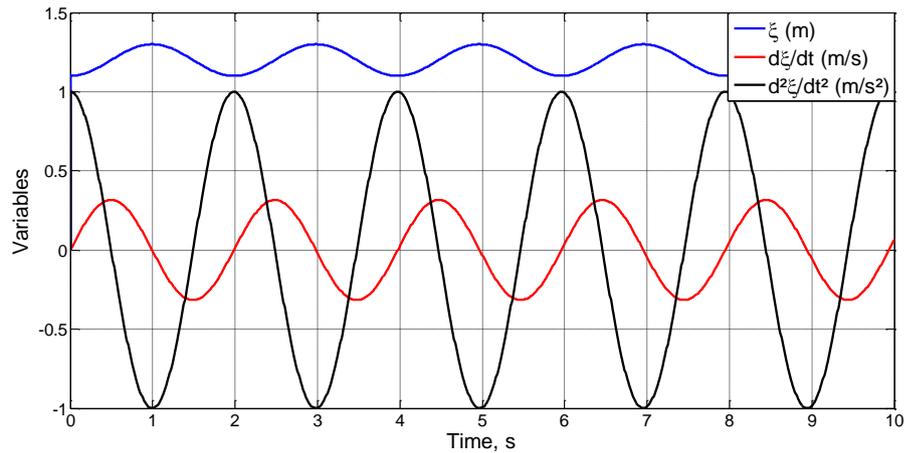


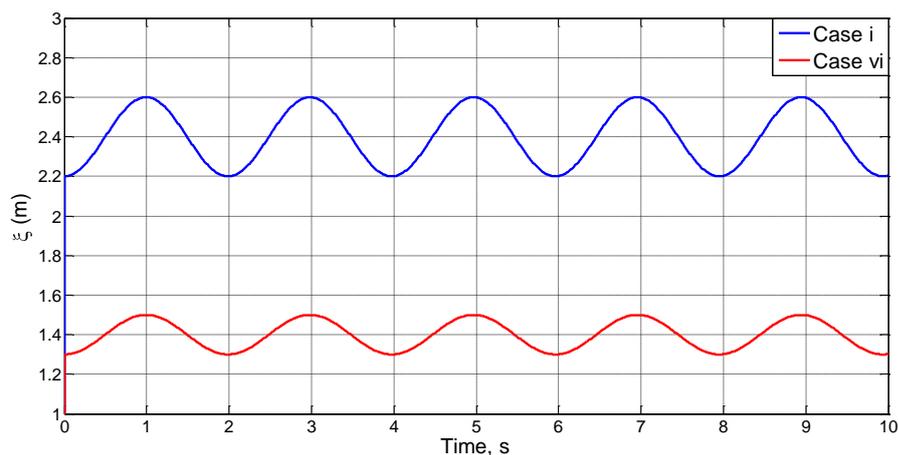
Figura 5.14  $\theta$ ,  $(d\theta/dt)$  y  $(d^2\theta/dt^2)$ . Casos 1, 4 y 5





**Figura 5.15**  $\xi$ ,  $d\xi/dt$  y  $d^2\xi/dt^2$ . Casos 1, 4 y 5 (de arriba hacia abajo)

En tercer lugar, para los mismos valores de los cocientes  $l_o/g$  y  $m_o/k$ , casos 1 y 6, las soluciones son coherentes con las ecuaciones (5.36) y (5.37). La figura 5.16 muestra la simulación de  $\xi(t)$ , un variable que sólo cambia su amplitud máxima, 0.4 para el caso 1 y 0.2 para el caso 6 (ver que la función  $\Psi_a$  no tiene el mismo valor para los tres casos). El espectro FFT de estas curvas es muy similar pero no necesariamente el mismo, merced a la influencia del parámetro  $d_o$  en las funciones desconocidas  $\Psi_\theta$  y  $\Psi_\xi$ . La solución  $\theta(t)$  se muestra en la Figura (5.17), mientras que las derivadas de  $\theta$  y  $\xi$  lo hacen en la Figura (5.18). Es de resaltar en esta última figura que en la representación tanto de la primera y como de la segunda derivada de  $\theta$ , el caso (i) coincide exactamente con el (vi).



**Figura 5.16** Simulación  $\xi(t)$ . Casos 1 y 6

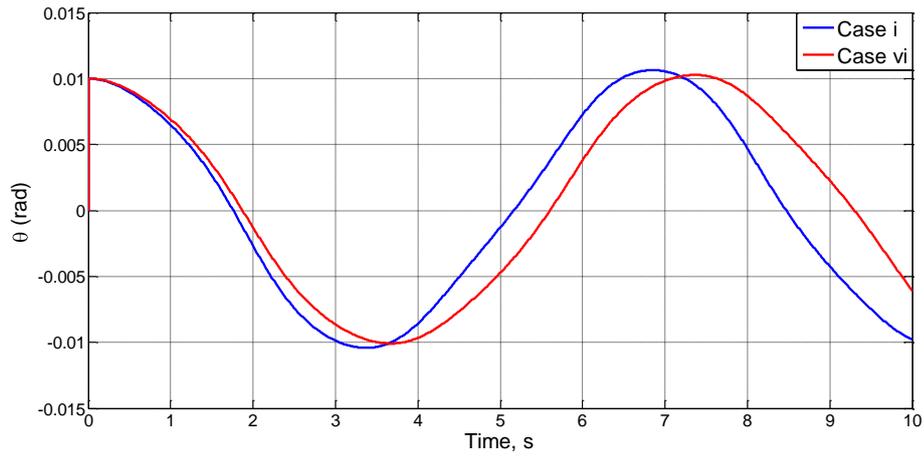


Figura 5.17 Simulación  $\theta(t)$ . Casos 1 y 6

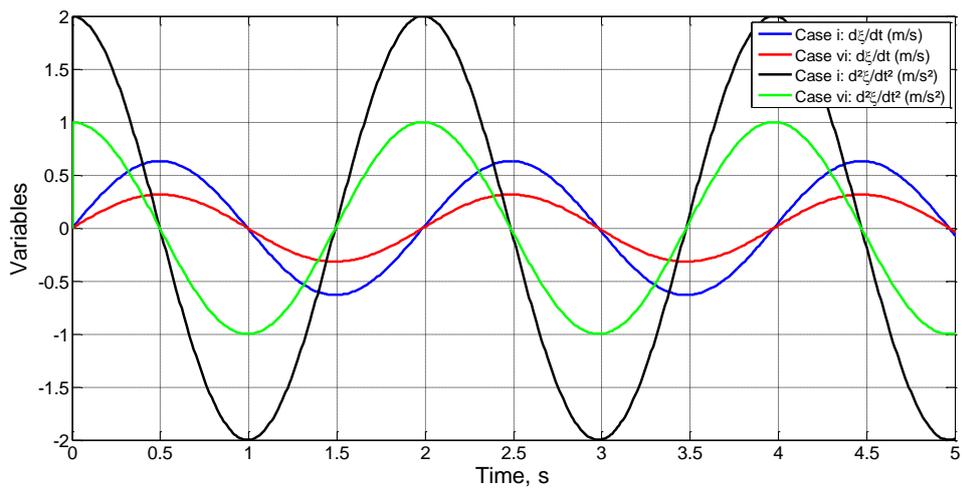
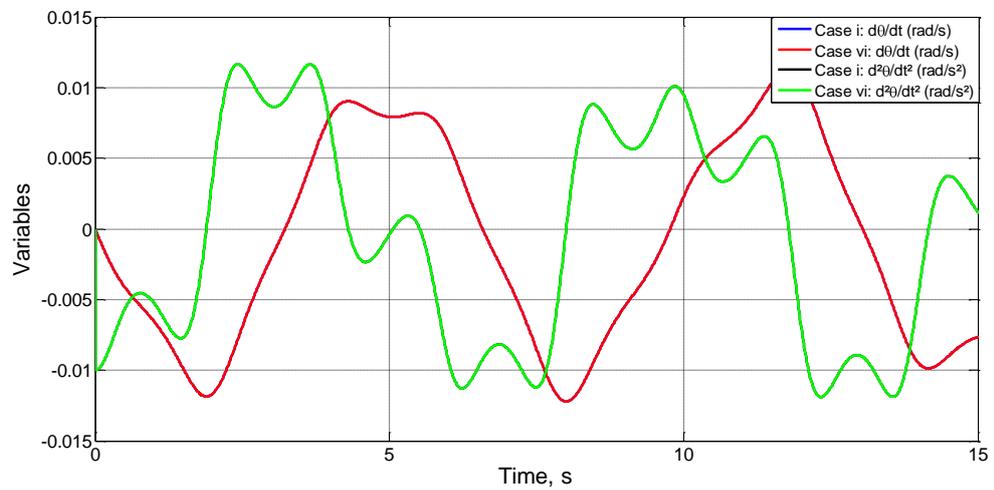


Figura 5.18 Simulación  $d\theta/dt$  y  $d^2\theta/dt^2$  (arriba) y  $d\xi/dt$  y  $d^2\xi/dt^2$  (abajo). Casos 1 y 6

Finalmente, un cambio de  $\theta_0$  influye en todos los resultados ya que el grupo  $\pi_5$  aparece en las tres ecuaciones (31-33), casos 7 a 9. En las Figuras (5.19) y (5.20), las cuales muestran las variables  $\xi(t)$  y  $\theta(t)$ , respectivamente, se aprecian cambios significativos en la amplitud y en la frecuencia de estos casos.

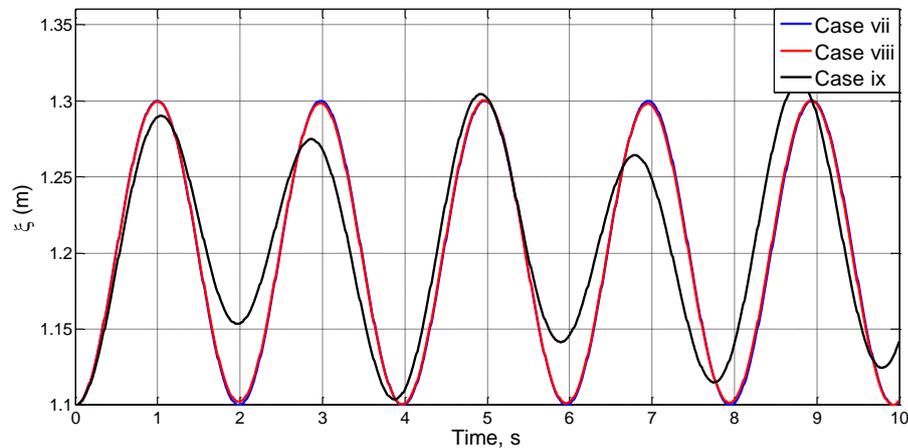


Figura 5.19  $\xi(t)$ . Casos 7 a 9

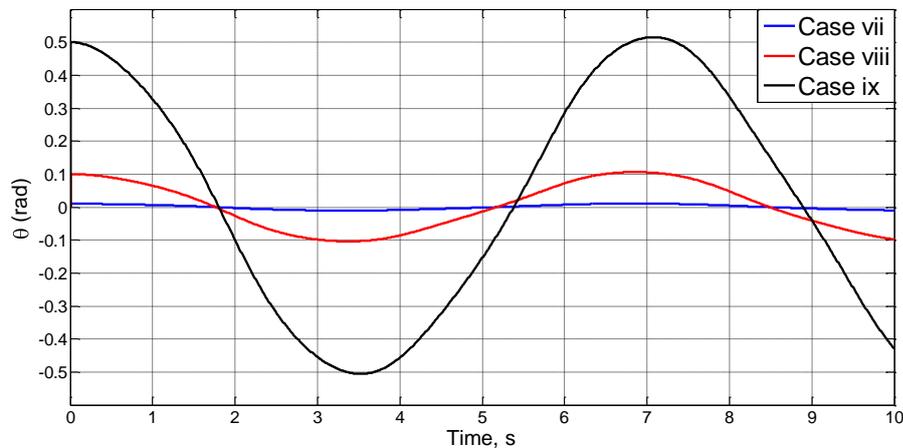


Figura 5.20  $\theta(t)$ . Casos 7 a 9

## 5.4. Dos masas unidas por muelles a una pared

### 5.4.1. Deducción de los grupos adimensionales

El esquema físico se muestra en la Figura 5.21. El movimiento se restringe a la línea normal a la pared (1-D), no existe fricción entre las masas y el plano horizontal y los muelles tienen masas despreciables. Las variables  $x_a$  (para la masa  $m_1$ ) y  $x_b$  (para la masa  $m_2$ ) definen las posiciones de equilibrio (muelles con elongación nula) mientras que  $x_1$  y  $x_2$ , medidos respecto al equilibrio anterior, definen los grados de libertad del sistema. Los muelles tienen

comportamiento lineal con fuerzas definidas en la forma  $f_m = k(l-l_0)$ , con  $k$  la constante elástica,  $l$  la elongación instantánea del muelle y  $l_0$  la longitud del muelle sin estirar.

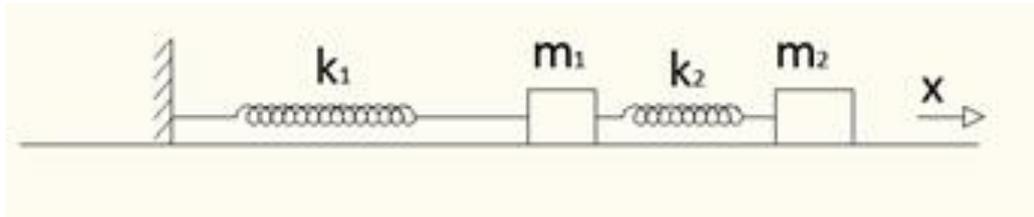


Figura 5.21 Esquema físico del conjunto dos masa y dos muelles

Las ecuaciones de gobierno son

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} - k_1 + k_2 x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad (5.39)$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \quad (5.40)$$

Para simplificar, asumiremos que la oscilación del sistema está provocada por el desplazamiento inicial de una de las masas respecto de su posición de equilibrio global, con velocidad inicial cero. Las referencias para hacer adimensionales las variables  $x_1$  y  $x_2$  son sus respectivos desplazamientos máximos,  $x_{1,0}$  y  $x_{2,0}$ , los cuales a su vez depende de las constantes elásticas. La Figura 5.22 muestra la solución numérica del sistema para los siguientes valores de los parámetros

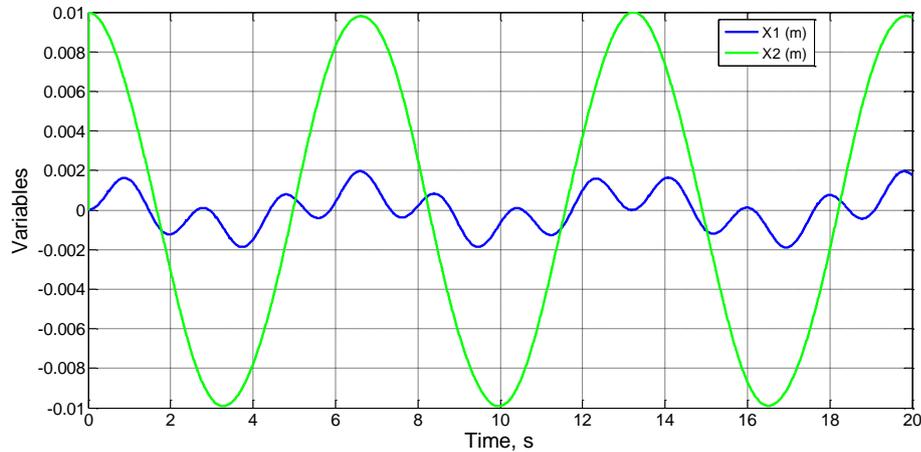
$$k_1=10, k_2=m_1=m_2=1, x_{1(t=0)}=dx_1/dt_{(t=0)}=dx_2/dt_{(t=0)}=0 \text{ y } x_{2(t=0)}=0.01$$

Advierta que los desplazamientos máximos son claramente diferentes; así, la elección de una misma referencia para adimensionalizar ambas variables no es adecuada. Además, los valores  $x_{1,0}$  y  $x_{2,0}$  dependen uno del otro, ya que la energía máxima almacenada en cada muelle es la misma (por tratarse de un sistema conservativo); estos desplazamientos máximos están relacionados por la ecuación

$$(1/2)k_1x_{1,0}^2 = (1/2)k_2x_{2,0}^2, \quad \text{o} \quad \frac{x_{1,0}}{x_{2,0}} = \frac{k_2}{k_1} \quad (5.41)$$

De acuerdo con esta relación, para el conjunto de parámetros anterior se obtiene  $x_{2,0} = 0.01$  y  $x_{1,0} = 0.0032$ . El último de estos valores está por encima del desplazamiento mostrado en la solución numérica,  $x_{1,0} \text{ (solución numérica)} = 0.002$ , debido a que en el instante en el que la energía almacenada en el muelle 1 es la máxima, las masas no están en reposo. Con todo, aunque la ecuación anterior es cierta, en la realidad, nunca se alcanza el potencial desplazamiento máximo  $x_{1,0}$ . Hay una relativa diferencia entre éste y el desplazamiento

máximo real del muelle 1. La elección de  $x_{1,0}$  como referencia puede ser, sin embargo, adecuada ya que la desviación entre el valor máximo y el valor real de  $x_1$  es relativamente pequeña y el intervalo de variación de la variable adimensional  $x_1'$  sigue confinada en el intervalo [0-1] aunque no alcance su máximo valor.



**Figura 5.22 Solución numérica de  $x_1$  y  $x_2$ .  $k_1=10$ ,  $k_2=m_1=m_2=1$ ,  $x_{1(t=0)}=dx_1/dt_{(t=0)}=dx_2/dt_{(t=0)}=0$  y  $x_{2(t=0)}=0.01$**

En relación con el tiempo, una referencia diferente puede ser asumida para cada ecuación a pesar del acoplamiento existente, esta elección puede catalogarse (como en la aplicación anterior) como un tipo de discriminación. En efecto, merced a este acoplamiento esperamos que ambas masas contengan los dos tiempos o frecuencias características del problema. Llamaremos  $t_{0,1}$  y  $t_{0,2}$  a los tiempos de referencia para las ecuaciones (5.39) y (5.40), respectivamente.

De la solución numérica anterior, Figura 5.22,

$$t_{0,1} = 6.59 \text{ s y } t_{0,2} = 1.89 \text{ s.}$$

Las variables adimensionales son pues

$$x'_1 = \frac{x_1}{x_{1,0}}, \quad x'_2 = \frac{x_2}{x_{2,0}}, \quad t'_1 = \frac{t}{t_{1,0}} \text{ y } t'_2 = \frac{t}{t_{2,0}}$$

Sustituidas en (5.39) y (5.40) se obtienen las ecuaciones de gobierno en forma adimensional

$$\frac{m_1 x_{1,0}}{t_{1,0}^2} \frac{d^2 x'_1}{dt'^2} - k_1 + k_2 x_{1,0} x'_1 - k_2 x_{2,0} x'_2 = 0 \tag{5.42}$$

$$\frac{m_2 x_{2,0}}{t_{2,0}^2} \frac{d^2 x'_2}{dt'^2} + k_2 x_{2,0} x'_2 - k_2 x_{1,0} x'_1 = 0 \tag{5.43}$$

Simplificando los factores asociados a las variables adimensionales y sus cambios, merced a su orden de magnitud unidad, de la primera ecuación emergen tres coeficientes

$$C_1 = \frac{m_1 x_{1,0}}{t_{1,0}^2}, \quad C_2 = k_1 + k_2 x_{1,0}, \quad C_3 = k_2 x_{2,0}$$

Dividiendo por el segundo de ellos, por ejemplo, se obtienen dos grupos adimensionales

$$\pi_{1,1} = \frac{m_1}{k_1 + k_2 t_{1,0}^2} \sim 1 \quad (5.44)$$

$$\pi_{2,1} = \frac{k_2 x_{2,0}}{k_1 + k_2 x_{1,0}} \sim 1 \quad (5.45)$$

con lo que el orden de magnitud de la incógnita  $t_{1,0}$  viene dado por

$$t_{1,0} = \sqrt{\frac{m_1}{k_1 + k_2}} \Psi_1 \frac{k_2 x_{2,0}}{k_1 + k_2 x_{1,0}} \quad (5.46)$$

De la misma forma, la ecuación segunda (5.43) da lugar a tres coeficientes

$$C_1 = \frac{m_2 x_{2,0}}{t_{2,0}^2} \quad C_2 = k_2 x_{2,0} \quad C_3 = k_2 x_{1,0}$$

y otros dos grupos adimensionales,

$$\pi_{1,1} = \frac{m_2}{k_2 t_{2,0}^2} \quad (5.47)$$

$$\pi_{2,1} = \frac{x_{1,0}}{x_{2,0}} \quad (5.48)$$

de los que se deduce el orden de magnitud de  $t_{2,0}$

$$t_{2,0} = \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} \Psi_{12} \frac{x_{1,0}}{x_{2,0}} \quad (5.49)$$

La ecuación (5.41) permite escribir  $t_{1,0}$  y  $t_{2,0}$  en términos de las constantes elásticas y de masas. Definiendo dos nuevos parámetros,  $c_0$  y  $k_0$ , en la forma

$$c_0 = \frac{x_{1,0}}{x_{2,0}} = \frac{k_2}{k_1}$$

$$k_0 = k_1 + k_2$$

las soluciones tienen la expresión

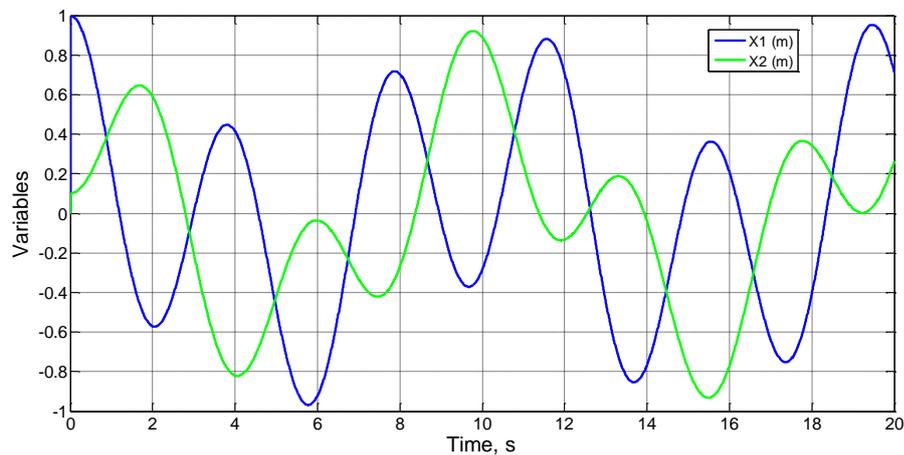
$$t_{1,0} = \sqrt{\frac{m_1}{k_0}} \Psi_1 \sqrt{\frac{k_2 k_1}{k_0^2}} \quad (5.50)$$

$$t_{2,0} = \frac{\overline{m_2}}{k_2} \Psi_2 \frac{\overline{k_2}}{k_1} \quad (5.51)$$

Cuando la condición inicial se define por el desplazamiento de ambas masas, la energía inicial del sistema es la suma de las energías potenciales de ambos muelles. Esta energía global puede ser potencialmente almacenada, en un instante dado, en cualquiera de los muelles; una hipótesis que permite determinar el máximo desplazamiento de los mismos y usar estas magnitudes como referencias. Por ejemplo, la Figura 5.23 da la solución numérica del problema para los valores

$$k_1=k_2=m_1=m_2=1, \quad dx_1/dt_{(t=0)}=dx_2/dt_{(t=0)}=0, \quad x_{1(t=0)}=1 \text{ y } x_{2(t=0)}=0.1$$

Las simulaciones muestran que el desplazamiento máximo es el mismo para ambos muelles.



**Figura 5.23 Solución numérica de los desplazamientos de  $m_1$  y  $m_2$  con los parámetros  $k_1 = k_2 = m_1 = m_2 = 1$ ,  $x_{1,0} = 1$ ,  $x_{2,0} = 0.1$ ,  $dx_1/dt = dx_2/dt = 0$**

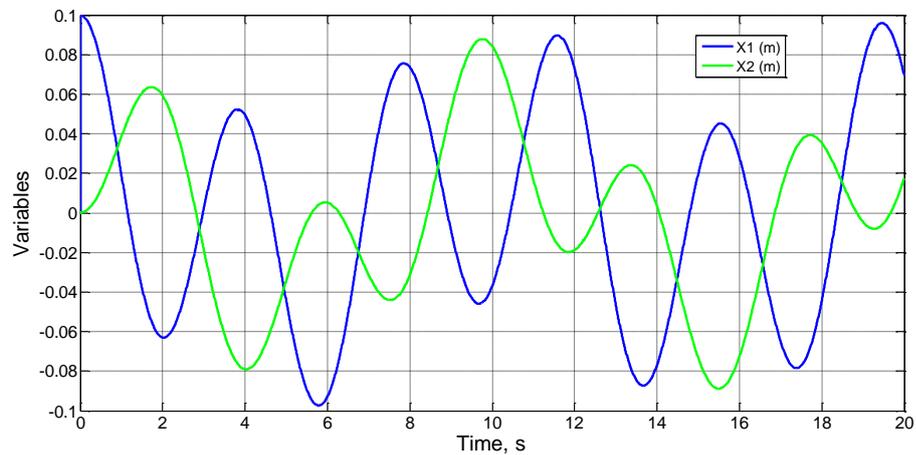
### 5.4.2. Verificación de los resultados

Seleccionamos los 11 casos de la Tabla 5.5.

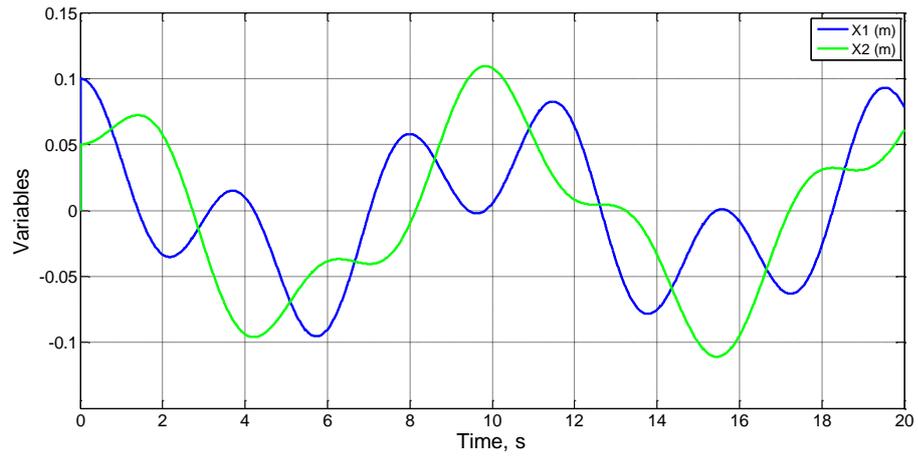
Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$k_1$	1	1	1	4	16	1	1	1	4	16	100
$k_2$	1	1	1	4	16	1	1	1	4	16	100
$m_1$	1	1	1	4	16	0.25	0.0625	0.001	1	1	1
$m_2$	1	1	1	4	16	0.25	0.0625	0.001	1	1	1
$x_{1(t=0)}$	0.1	0.1	0.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$x_{2(t=0)}$	0	0.05	0.05	0	0	0	0	0	0	0	0

**Tabla 5.5 Valores numéricos de los casos.  $dx_1/dt_{(t=0)} = dx_2/dt_{(t=0)} = 0$**

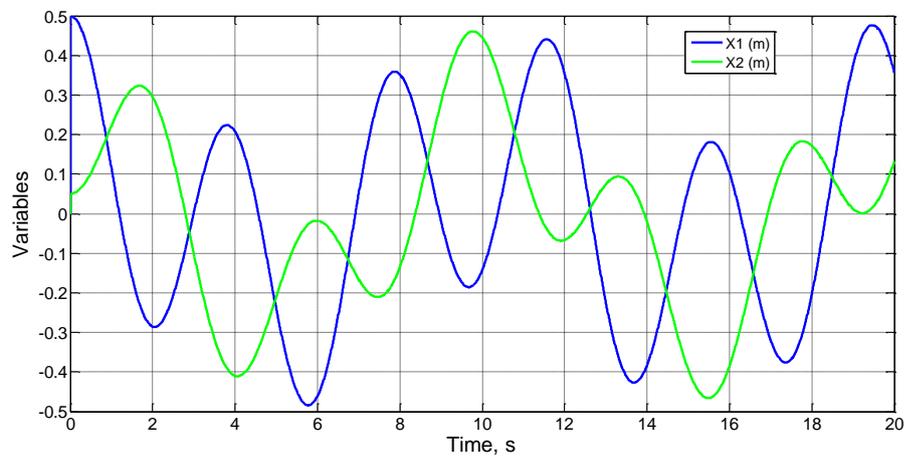
Para los primeros casos, 1 a 3 (primera prueba), se cambia el desplazamiento inicial manteniendo los valores de las constantes elásticas y las masas. Las soluciones numéricas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , así como el espectro de frecuencias FFT, se muestran en la Figuras 5.24 y 5.25, respectivamente. Las soluciones son idénticas como esperábamos.



a)

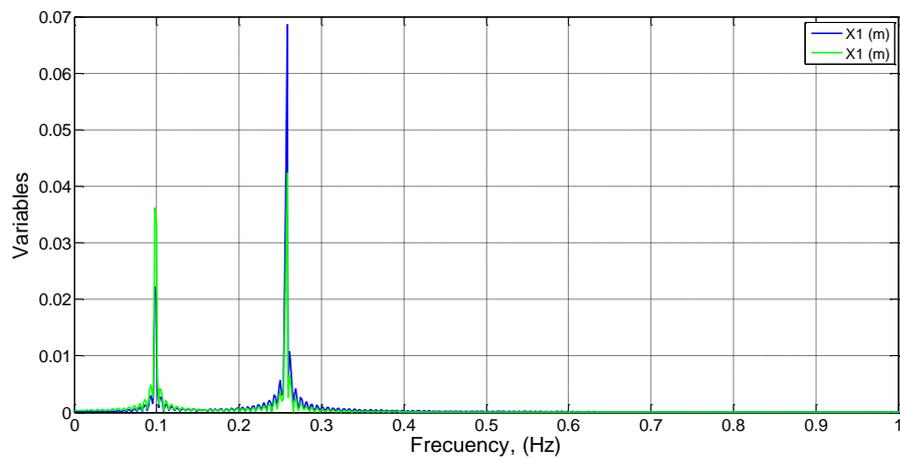


b)

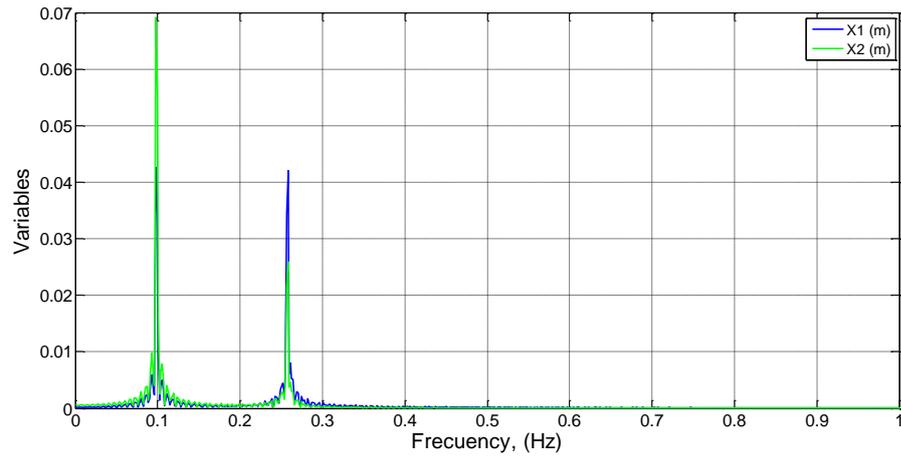


c)

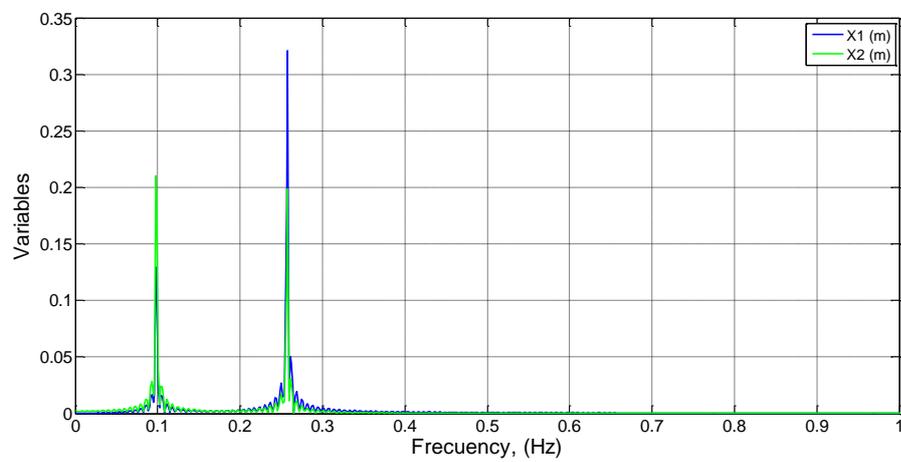
Figura 5.24 Solución numérica para  $x_1$ ,  $x_2$ . Casos 1 (a), 2 (b) y 3 (c)



a)



b)

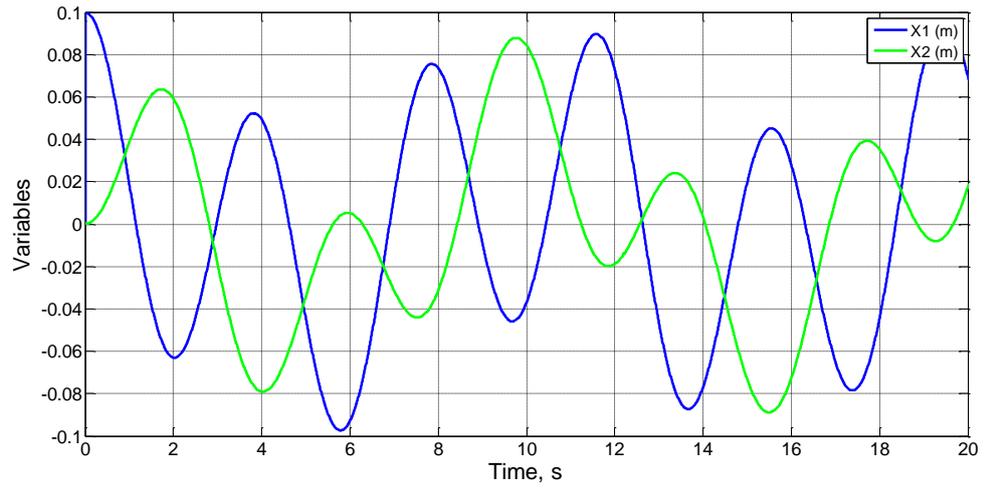


c)

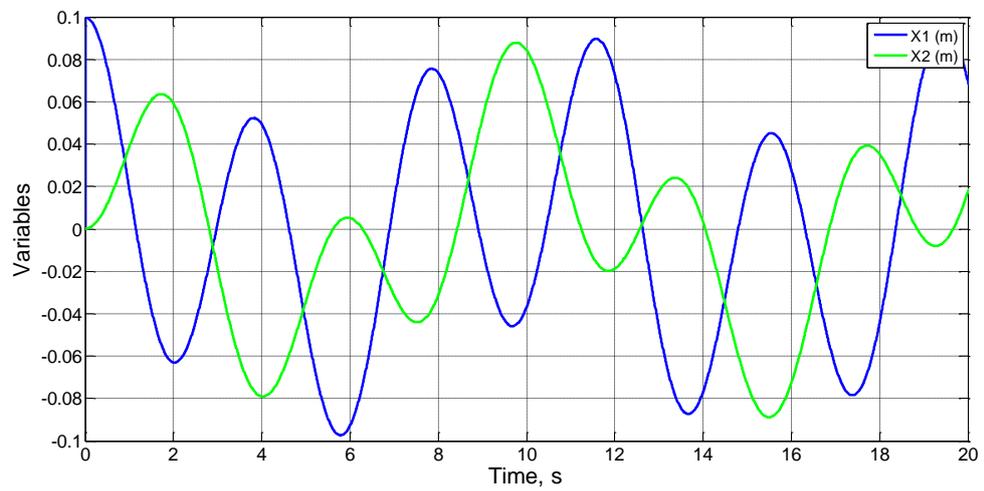
Figura 5.25 Espectro de frecuencias (FFT). Casos 1 (a), 2 (b) y 3 (c)

$$f_{o,1} = 0.25 \text{ Hz}, f_{o,2} = 0.1 \text{ Hz}$$

En la segunda prueba, casos 1, 4 y 5, los parámetros  $k$  y  $m$  son proporcionales y las posiciones iniciales tienen el mismo valor. De acuerdo con las expresiones (5.50) y (5.51), las posiciones instantáneas de las masas y los espectros de frecuencias son idénticos, Figuras (5.26) y (5.27).

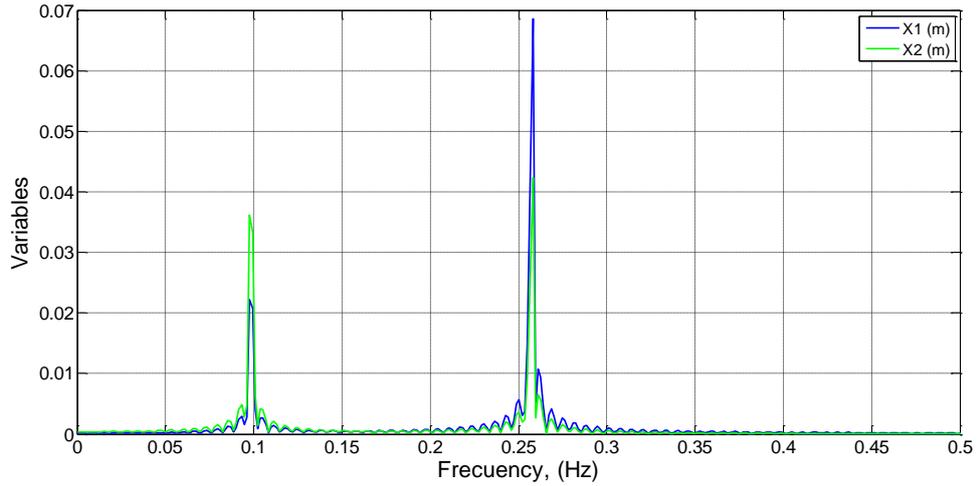


a)

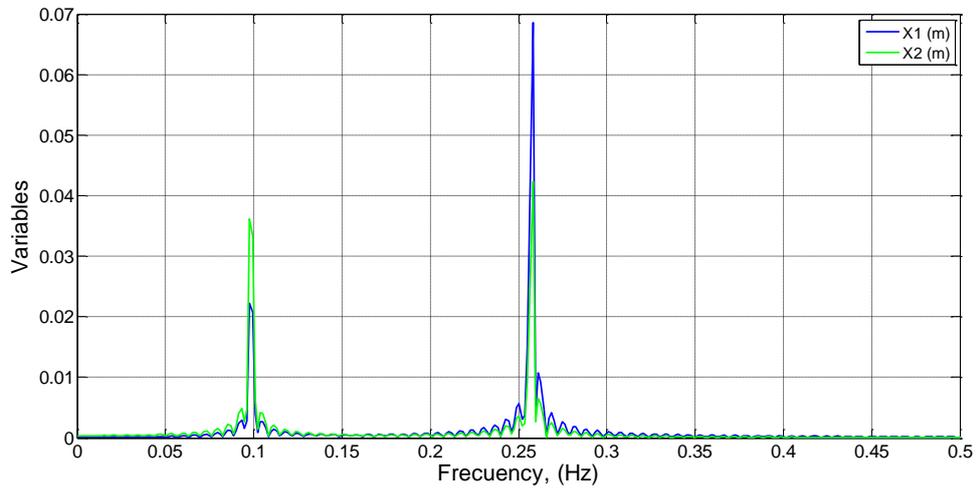


b)

**Figura 5.26 Solución numérica para  $x_1$ ,  $x_2$ . Casos 4 (a) y 5 (b)**



a)



b)

**Figura 5.27 Espectro de frecuencias (FFT). Casos 4 (a) y 5 (b)**

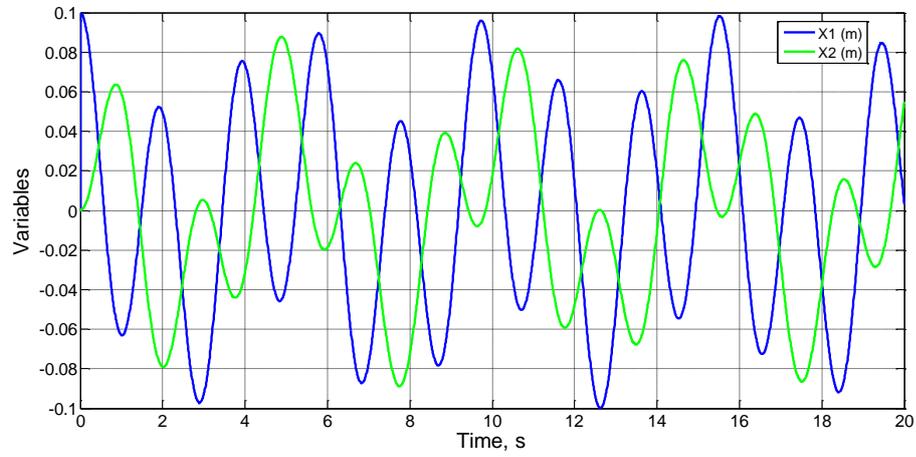
$$f_{o,1} = 0.25 \text{ Hz}, f_{o,2} = 0.1 \text{ Hz}$$

Comparando las soluciones numéricas y las expresiones deducidas de la adimensionalización, pueden obtenerse valores de las funciones  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  para argumentos concretos:

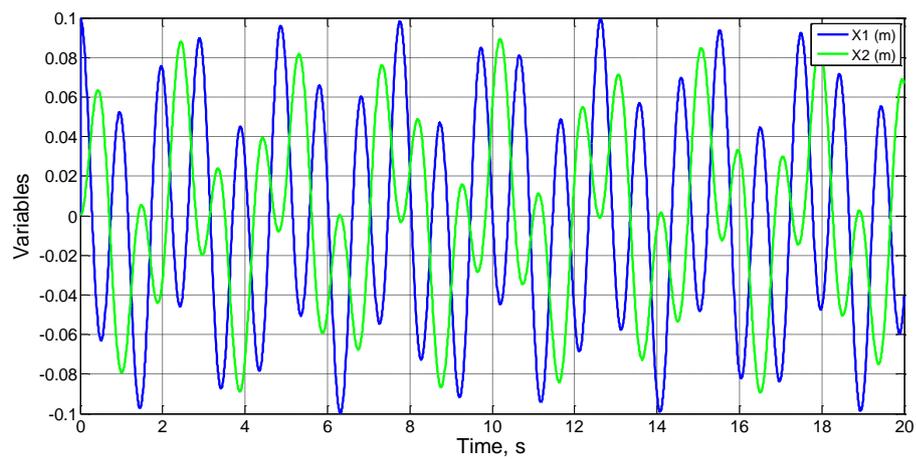
$$t_{1,0} \text{ (normalización)} = \Psi_1 \overline{0.25}, \quad t_{1,0} \text{ (numérico)} = \frac{1}{4 \times f_1 \text{ (FFT)}} = 1 \Rightarrow \Psi_1 \overline{0.25} = 1$$

$$t_{2,0} \text{ (normalización)} = \Psi_2 \overline{1}, \quad t_{2,0} \text{ (numérico)} = \frac{1}{4 \times f_2 \text{ (FFT)}} = 2.5 \Rightarrow \Psi_2 \overline{1} = 2.5$$

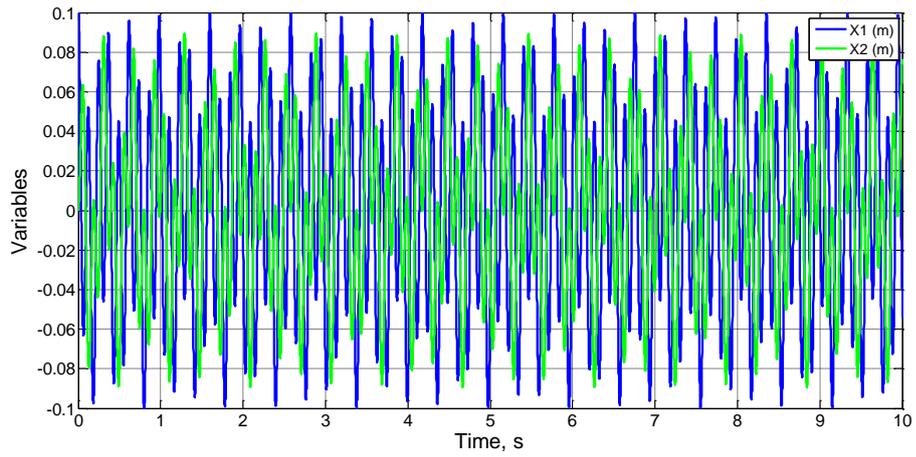
En la tercera prueba intervienen los casos 1, 6, 7 y 8 en los que sólo cambian los valores de las masas. Las soluciones numéricas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  se muestran en la Figura 5.28 mientras que las frecuencias espectrales lo hacen en la Figura 5.29.



a)

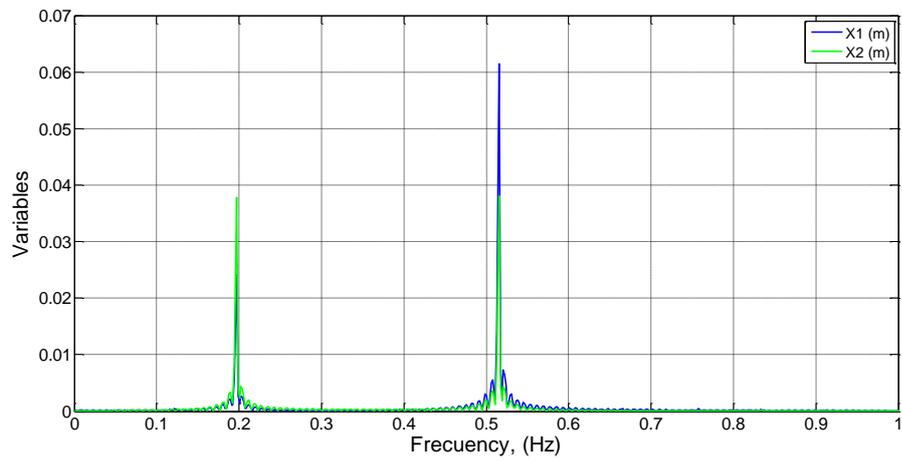


b)

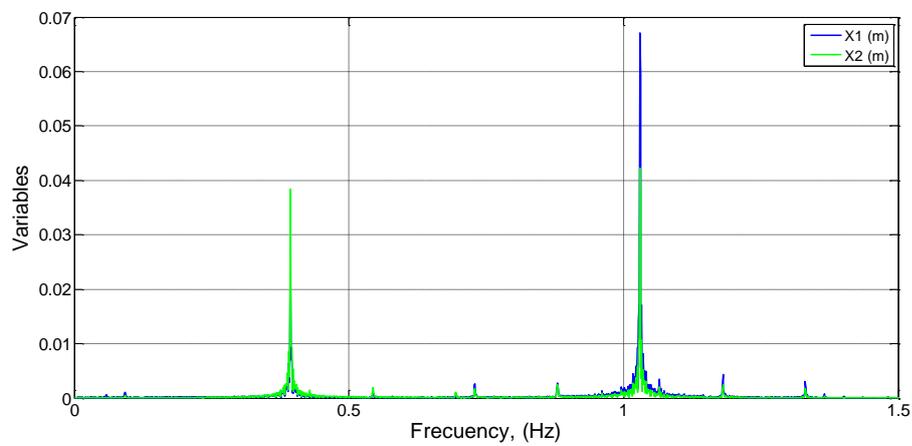


c)

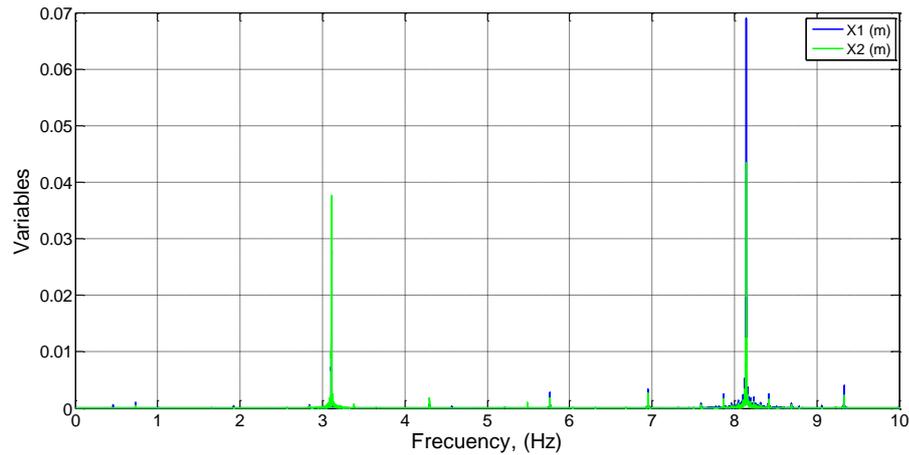
Figura 5.28  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ . Solución numérica de los casos 6 (a), 7 (b) y 8 (c)



a)



b)



c)

**Figura 5.29 Espectro de frecuencias (FFT). Caso 6 (a):  $f_{o,1} = 0.5$  Hz,  $f_{o,2} = 0.2$  Hz, Caso 7 (b):  $f_{o,1} = 1.05$  Hz,  $f_{o,2} = 0.4$  Hz, Caso 8 (c):  $f_{o,1} = 8.14$  Hz,  $f_{o,2} = 3.11$  Hz**

Las frecuencias obtenidas de la simulación tienen valores coherentes con las expresiones (5.50) y (5.51):

$$\text{Caso 6: } f_{1,o}(\text{numérico}) = 0.50, \quad f_{2,o}(\text{numérico}) = 0.20,$$

$$\text{Caso 7: } f_{1,o}(\text{numérico}) = 1.05, \quad f_{2,o}(\text{numérico}) = 0.40,$$

$$\text{Caso 8: } f_{1,o}(\text{numérico}) = 8.14, \quad f_{2,o}(\text{numérico}) = 3.11,$$

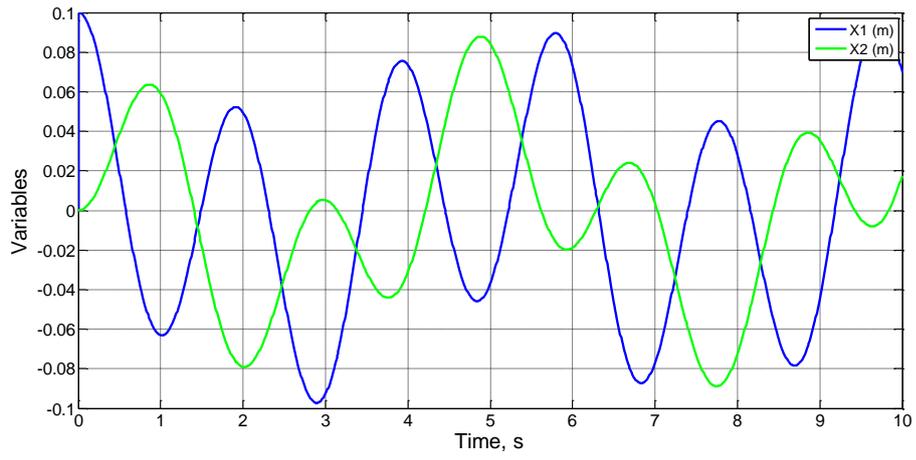
Las pequeñas diferencias se deben a que la expresión (5.41) no se cumple exactamente y, como mencionamos anteriormente, las aproximaciones al orden de magnitud unidad de las variables adimensionales y sus cambios es una hipótesis algo fuerte.

Por último, los casos 1, 9, 10 y 11 se relacionan con cambios en las constantes elásticas. Las posiciones de las masas y las frecuencias derivadas de la solución numérica se muestran en las Figuras 5.30 y 5.31. De nuevo existe coherencia entre estos resultados y las expresiones derivadas de la adimensionalización:

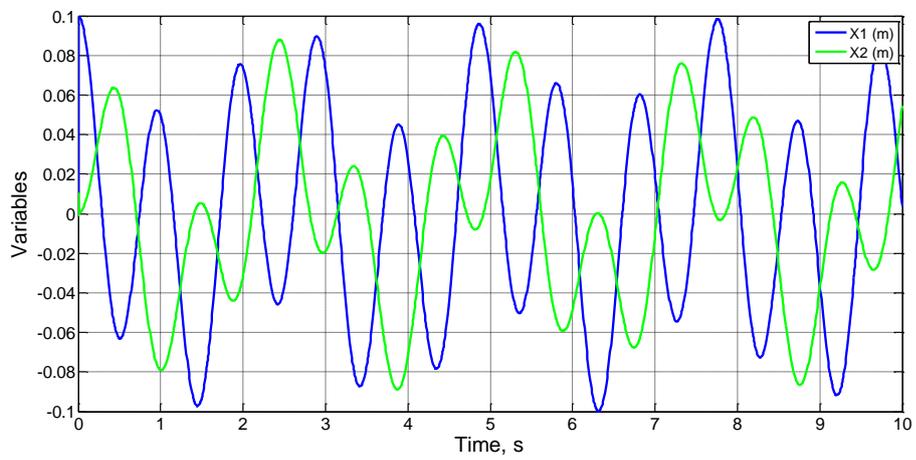
$$\text{Caso 9: } f_{1,o}(\text{numérico}) = 0.50, \quad f_{2,o}(\text{numérico}) = 0.20,$$

$$\text{Caso 10: } f_{1,o}(\text{numérico}) = 1.05, \quad f_{2,o}(\text{numérico}) = 0.40,$$

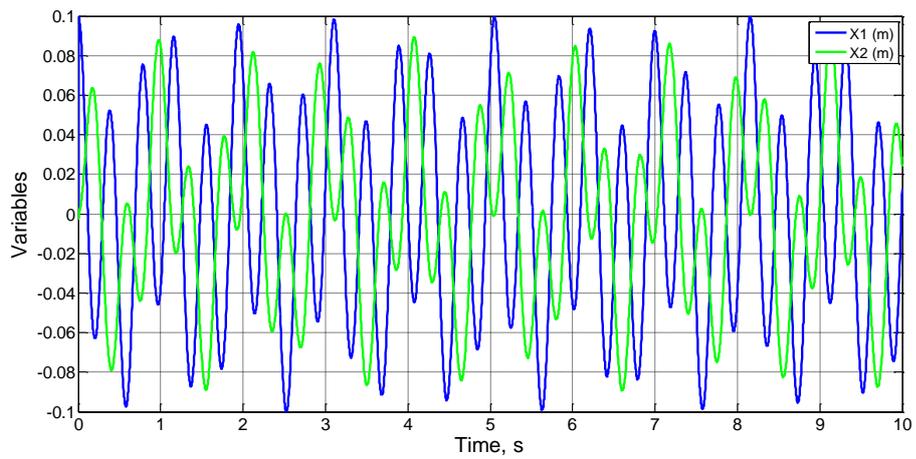
$$\text{Caso 11: } f_{1,o}(\text{numérico}) = 2.55, \quad f_{2,o}(\text{numérico}) = 1.00$$



a)

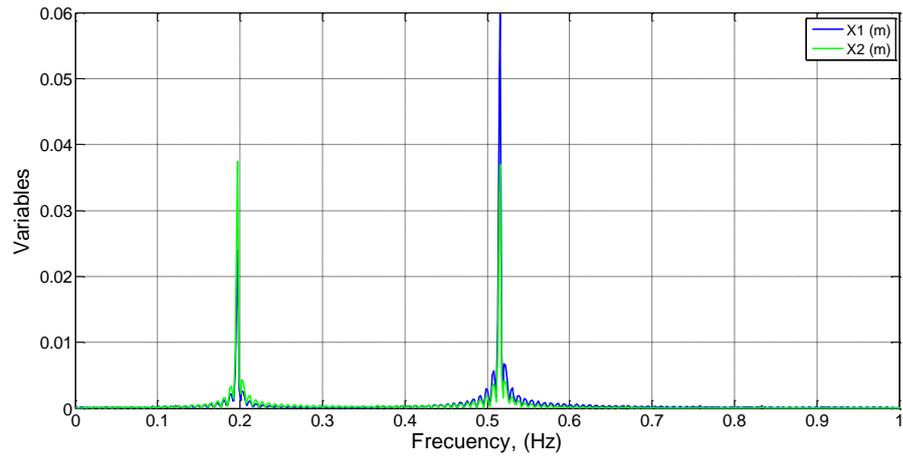


b)

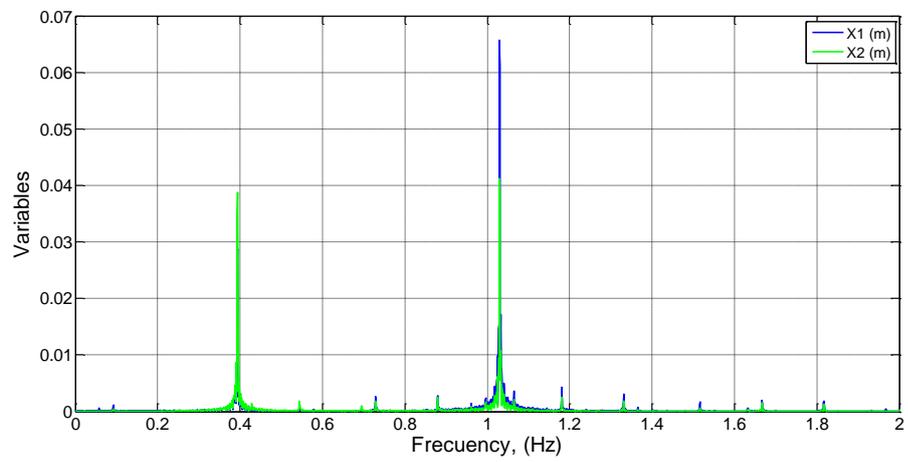


c)

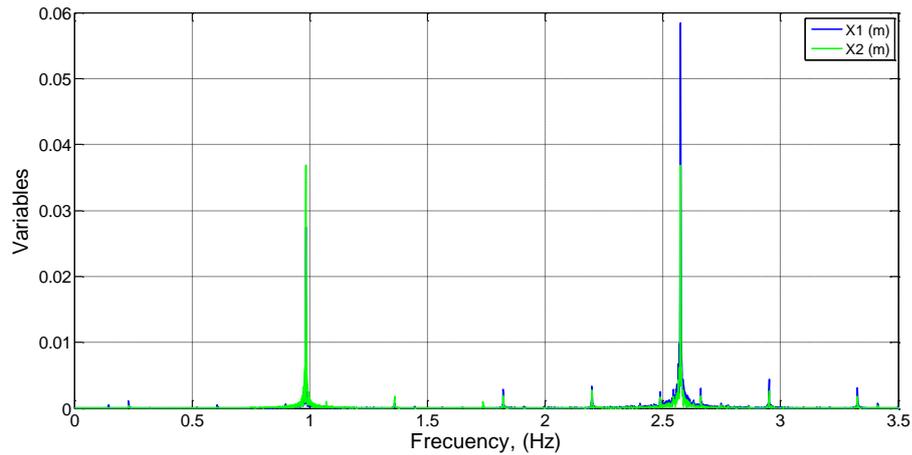
Figura 5.30  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ . Soluciones numéricas de los casos 9 (a), 10 (b) y 11 (c)



a)



b)



c)

Figura 5.31 Espectro de frecuencias. Caso 9 (a):  $f_{0,1} = 0.5$  Hz,  $f_{0,2} = 0.2$  Hz, caso 10 (b):  $f_{0,1} = 1.05$  Hz,  $f_{0,2} = 0.4$  Hz, caso 11 (c):  $f_{0,1} = 2.55$  Hz,  $f_{0,2} = 1$  Hz

## 5.5. Pequeñas oscilaciones en el péndulo doble

### 5.5.1. Deducción de los grupos adimensionales

Consiste en el esquema de la Figura 5.32. Dos pequeñas masas  $m_1$  y  $m_2$  están suspendidas de sendos soportes rígidos de longitudes  $l_1$  y  $l_2$ , respectivamente, estando el soporte superior suspendido, a su vez, del techo. Al desplazar una o las dos masas de sus posiciones de equilibrio estático los ángulos,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , el sistema oscila produciendo un movimiento de tipo caótico.

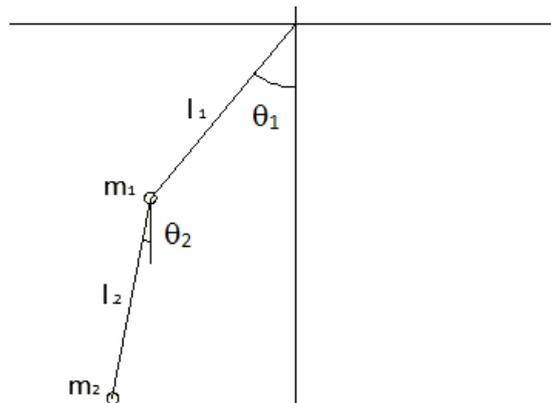


Figura 5.32 Esquema físico del péndulo doble y sistema de coordenadas

El estudio de este sistema es complejo ya que intervienen un gran número de parámetros:  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $g$  y los desplazamientos iniciales (asumimos que las velocidades iniciales de ambas masas son nulas). Para simplificar asumiremos las siguientes hipótesis:

i)  $m_1=m_2=m_0$ ; ii)  $l_1=l_2=l_0$  y iii) ángulos iniciales de desplazamiento suficientemente pequeños como para aceptar las aproximaciones siguientes:  $\sin(\theta_1)\approx\theta_1$ ,  $\sin(\theta_2)\approx\theta_2$  y  $\cos(\theta_1)\approx 1$ ,  $\cos(\theta_2)\approx 1$ ,  $d\theta/dt\approx 0$ .

**Ecuaciones de gobierno.** Para las hipótesis anteriores, las ecuaciones generales de gobierno que vienen dadas por

$$m_1 + m_2 l_1^2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + m_1 l_1 l_2 \cos \theta_2 - \theta_1 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} - m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 - \theta_1 \frac{d\theta_2}{dt}^2 + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (5.52)$$

$$m_2 l_2^2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 - \theta_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} - m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 - \theta_1 \frac{d\theta_1}{dt}^2 + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (5.53)$$

se simplifican a la forma

$$2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + 2 \frac{g}{l_0} \theta_1 = 0 \quad (5.54)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \frac{g}{l_0} \theta_2 = 0 \quad (5.55)$$

**Magnitudes características y variables adimensionales.** Las magnitudes características son:

$\theta_{1,0}$  ángulo inicial de la masa  $m_1$ .

$\theta_{2,0}$  ángulo inicial de la masa  $m_2$ .

$t_{1,0}$  tiempo característico asociado a la masa  $m_1$  (o a la longitud  $l_1$ ).

$t_{2,0}$  tiempo característico asociado a la masa  $m_2$  (o a una longitud combinada entre  $l_1$ - $l_2$ ).

La elección de  $\theta_1$  y  $\theta_2$  como magnitudes características impone una nueva hipótesis al problema. Cuando estos ángulos iniciales son claramente diferentes, una vez el sistema oscila, el péndulo de menor ángulo inicial puede tener desplazamientos angulares máximos, diferentes y claramente mayores que el mencionado ángulo (pequeño) inicial; no así ocurrirá con los desplazamientos angulares máximos del péndulo que parte con mayor ángulo inicial; para éste, dichos desplazamientos son similares al desplazamiento de partida. En consecuencia las magnitudes adimensionales  $\theta_1'$  y  $\theta_2'$  que se definirán a continuación pueden tener valores superiores a la unidad, lo cual asocia órdenes de magnitud diferentes de la unidad a los

cambios de estas magnitudes adimensionales. Así, se adopta la nueva hipótesis:  $\theta_1$  y  $\theta_2$  de valor similar o, al menos, del mismo orden de magnitud.

Las variables adimensionales se definen en la forma

$$\theta_1' = \theta_1/\theta_{1,0}$$

$$\theta_2' = \theta_2/\theta_{2,0}$$

$$t_1' = t_1/t_{1,0}$$

$$t_2' = t_2/t_{2,0}$$

**Adimensionalización y resultados.** La forma adimensional de las ecuaciones (5.54) y (5.55), discriminando t en los términos que contienen sus derivadas en  $t_1$  y  $t_2$ , de acuerdo con los ángulos  $\alpha$  que se refieren los citados términos, son

$$2 \frac{\theta_{1,0}}{t_{1,0}^2} \frac{d^2\theta_{1,0}'}{dt_{1,0}'^2} + \frac{\theta_{2,0}}{t_{2,0}^2} \frac{d^2\theta_{2,0}'}{dt_{2,0}'^2} + 2 \frac{g}{l_0} \theta_{1,0}\theta_{1,0}' = 0 \quad (5.56)$$

$$\frac{\theta_{2,0}}{t_{2,0}^2} \frac{d^2\theta_{2,0}'}{dt_{2,0}'^2} + \frac{\theta_{1,0}}{t_{1,0}^2} \frac{d^2\theta_{1,0}'}{dt_{1,0}'^2} + \frac{g}{l_0} \theta_{2,0}\theta_{2,0}' = 0 \quad (5.57)$$

Tras simplificar, eliminando las variables adimensionales y sus cambios, los coeficientes de estas ecuaciones son los siguientes:

$$\text{Ec. (5.56):} \quad C_1 = 2 \frac{1}{t_{1,0}^2}, \quad C_2 = \frac{1}{t_{2,0}^2} \frac{\theta_{2,0}}{\theta_{1,0}}, \quad C_3 = 2 \frac{g}{l_0} \quad (5.58)$$

$$\text{Ec. (5.57):} \quad C_4 = \frac{1}{t_{2,0}^2} \frac{\theta_{2,0}}{\theta_{1,0}}, \quad C_5 = \frac{1}{t_{1,0}^2}, \quad C_6 = \frac{g}{l_0} \frac{\theta_{2,0}}{\theta_{1,0}} \quad (5.59)$$

Los monomios que se derivan de estas ecuaciones, una vez reorganizados y simplificados, son

$$\pi_1 = \frac{1}{t_{2,0}^2}, \quad \pi_2 = \frac{1}{t_{1,0}^2}, \quad \pi_3 = \frac{g}{l_0}, \quad \pi_4 = \frac{\theta_{2,0}}{\theta_{1,0}} \quad (5.60)$$

Así, los órdenes de magnitud de los tiempos buscados son

$$t_{1,0} = \Psi_1 \frac{g}{l_0}, \frac{\theta_{2,0}}{\theta_{1,0}} \quad (5.61)$$

$$t_{2,0} = \Psi_2 \frac{g}{l_0}, \frac{\theta_{2,0}}{\theta_{1,0}} \quad (5.62)$$

### 5.5.2. Verificación de los resultados

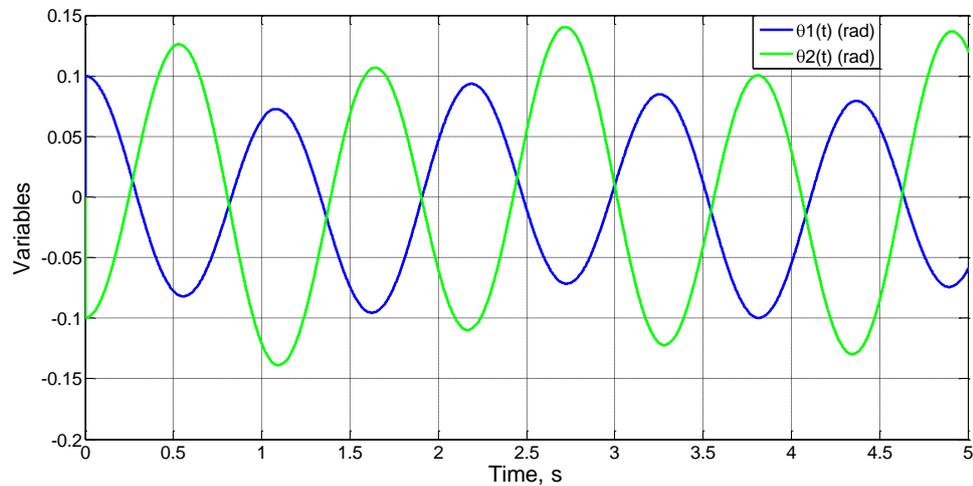
En primer lugar comprobaremos que los resultados son, efectivamente, independientes de las masas cuando éstas tienen el mismo valor. Estudiaremos los casos siguientes:

**Caso 1:**  $m_o = l_o = 1$ ,  $g = 10$ ,  $\theta_{1,(t=0)} = 0.1$ ,  $\theta_{2,(t=0)} = -0.1$ ,  $d\theta_1/dt_{(x=0)} = d\theta_2/dt_{(x=0)} = 0$

**Caso 2:** Ídem caso 1 con  $m_o = 2$

**Caso 3:** Ídem caso 1 con  $m_o = 4$

La Figura 5.33 muestra los resultados de  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$  de estos casos. Se trata de gráficas idénticas.



**Figura 5.33 Solución de  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$ . Casos 1 a 3**

En segundo lugar comprobaremos que los cambios proporcionales en  $l_o$  y  $g$  conducen a la misma solución. Para ello estudiaremos los casos siguientes:

**Caso 1:**  $m_o = l_o = 1$ ,  $g = 10$ ,  $\theta_{1,(t=0)} = 0.1$ ,  $\theta_{2,(t=0)} = -0.1$ ,  $d\theta_1/dt_{(x=0)} = d\theta_2/dt_{(x=0)} = 0$

**Caso 4:** Ídem caso 1 con  $l_o = 2$ ,  $g = 20$

**Caso 5:** Ídem caso 1 con  $l_o = 4$ ,  $g = 40$

La Figura 5.34 muestra la solución de estos tres casos, que es idéntica. Los diagramas espectrales de estas señales se muestran en la Figura 5.35; los valores numéricos de las frecuencias son  $f_1=0.385$  y  $f_2=0.930$  Hz, lo que evidencia que el orden de magnitud de las funciones de las expresiones (5.61) y (5.62) es la unidad. Los diagramas de fase  $\theta_1(t)=f(d\theta_1/dt)$  y  $\theta_2(t)=f(d\theta_2/dt)$  se muestran en las Figuras 5.36 y 5.37. El movimiento, aunque caótico, proyecta una cierta forma de orden. La pequeña diferencia de escala vertical de  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$  en

estos gráficos es debido a que el intervalo en el que se mueve  $\theta_2(t)$  es ligeramente mayor al intervalo en que se mueve la señal  $\theta_1$ .

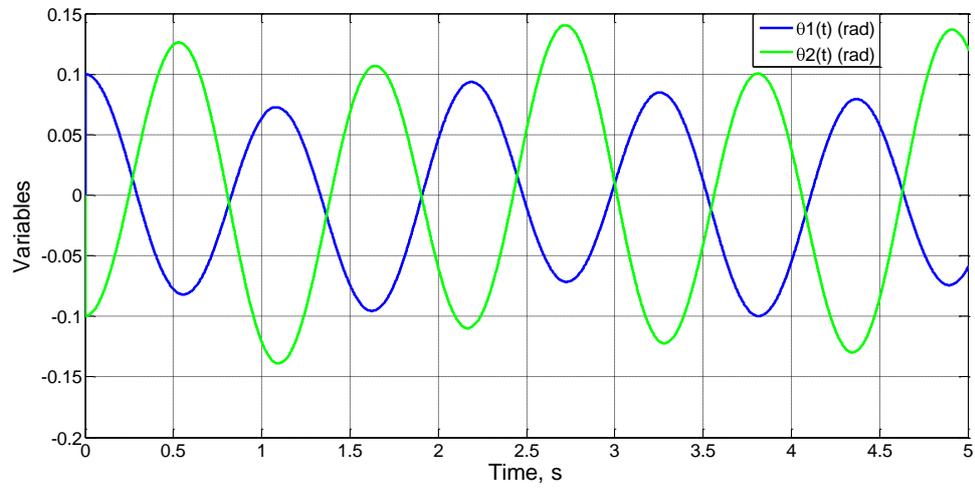


Figura 5.34 Solución de  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$ . Casos 1, 4 y 5

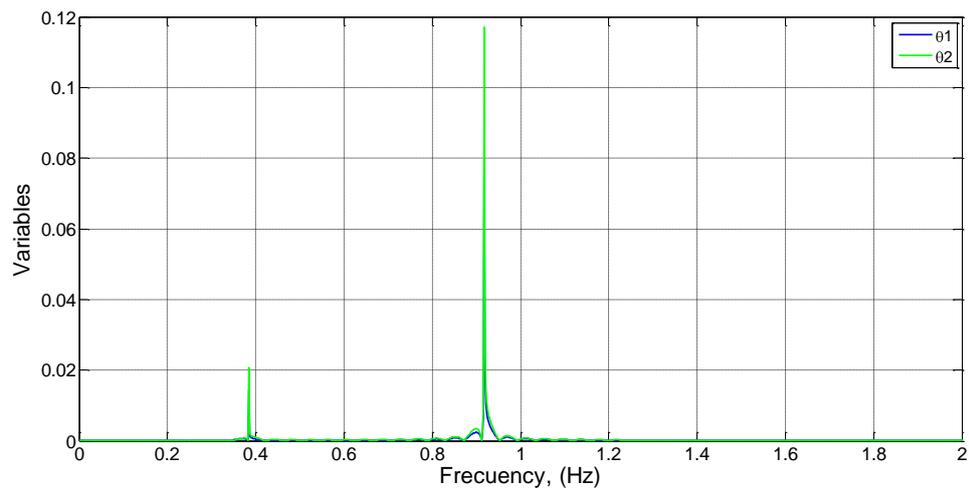


Figura 5.35 Frecuencias (FFT). Casos 1, 4 y 5

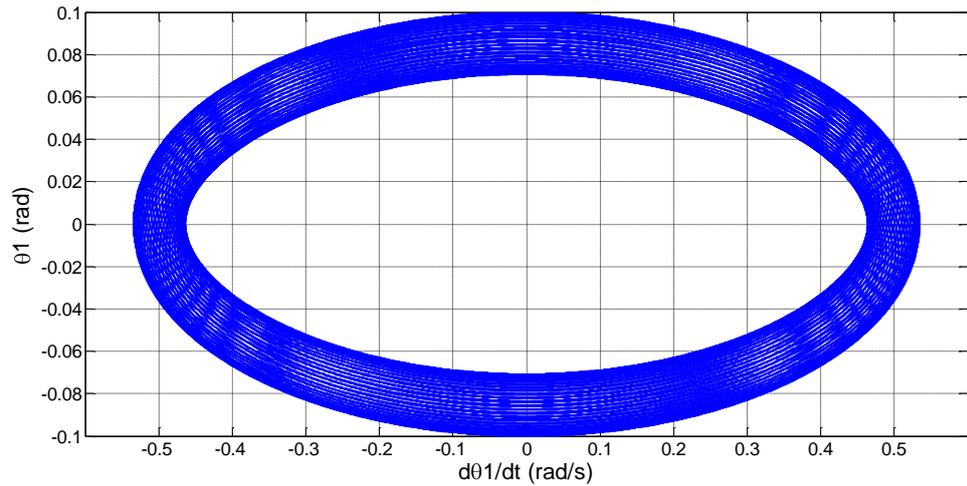


Figura 5.36 Diagrama de fases  $\theta_1(t)=f(d\theta_1/dt)$ . Casos 1, 4 y 5

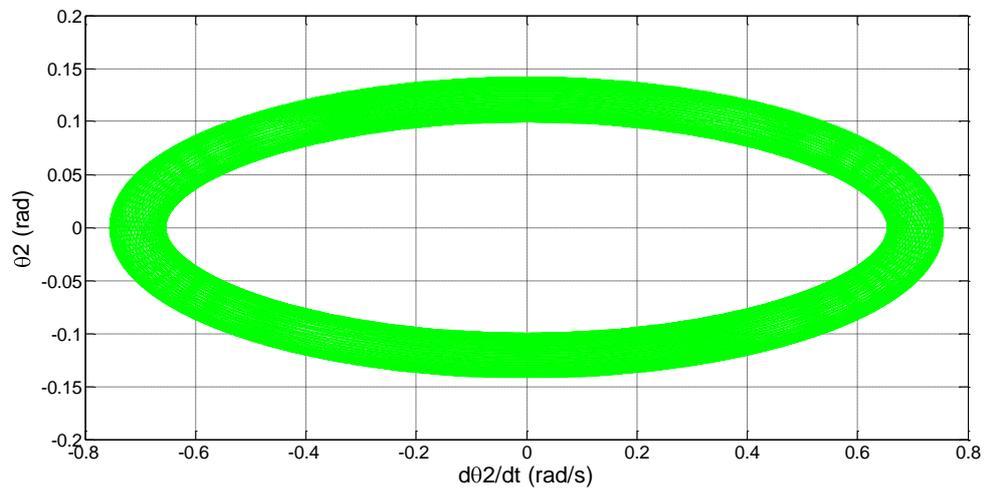


Figura 5.37 Diagrama de fases  $\theta_2(t)=f(d\theta_2/dt)$ . Casos 1, 4 y 5

Ahora comprobaremos que la solución es la misma cuando el cociente  $\theta_2(t)/\theta_1(t)$  tienen el mismo valor. Tomaremos los casos

**Caso 6:**  $m_o = l_o = g = 1$ ,  $\theta_{1,(t=0)} = 0.02$ ,  $\theta_{2,(t=0)} = -0.002$ ,  $d\theta_1/dt_{(x=0)} = d\theta_2/dt_{(x=0)} = 0$

**Caso 7:**  $m_o = l_o = g = 1$ ,  $\theta_{1,(t=0)} = 0.04$ ,  $\theta_{2,(t=0)} = -0.004$ ,  $d\theta_1/dt_{(x=0)} = d\theta_2/dt_{(x=0)} = 0$

La solución  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$  se muestra en las Figuras 5.38 y 5.39, casos 6 y 7, respectivamente. La solución es idéntica excepto la escala.

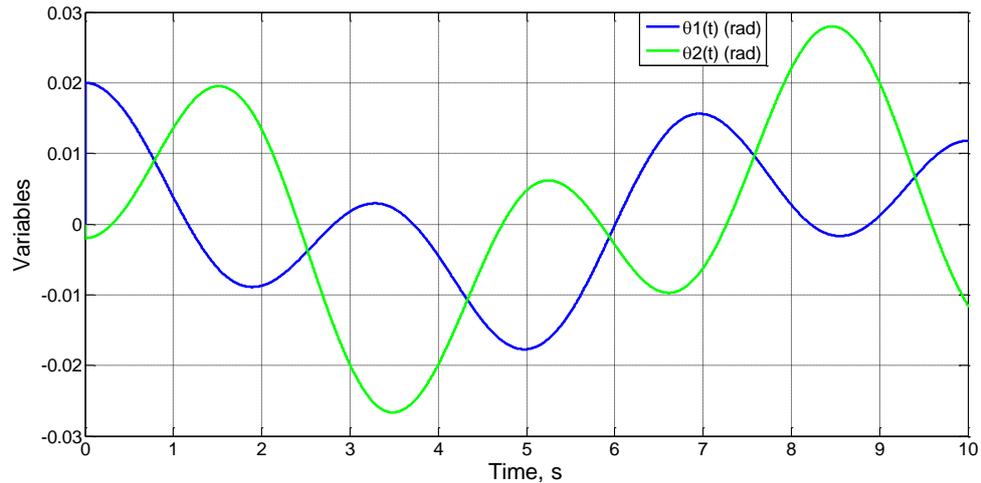


Figura 5.38 Solución de  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$ . Caso 6

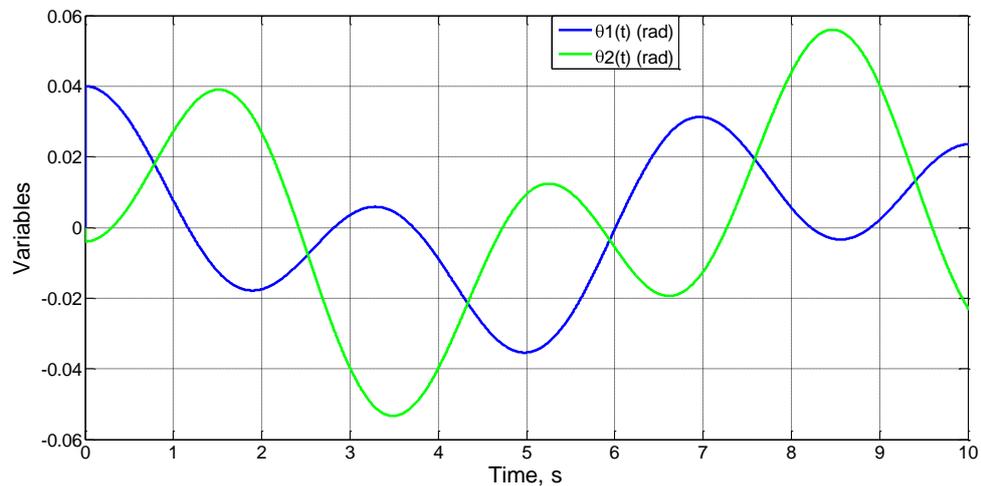


Figura 5.39 Solución de  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$ . Caso 7

## 5.6. Interacción entre especies. Un modelo biológico

Algunos problemas sencillos de interacción entre especies están regidos por ecuaciones acopladas, no lineales, formuladas en primeras derivadas (problema de Lotka-Volterra). Estudiamos uno de estos tipos de problemas que, aunque aparentemente sencillo, ya que contiene sólo dos parámetros, la aplicación correcta de la adimensionalización requiere un buen nivel de reflexión y comprensión del proceso físico para conseguir resultados interesantes. Las ecuaciones de gobierno reflejan que la especie más débil desaparecerá gradualmente mientras que la más fuerte estacionará su valor con la misma cadencia temporal. Tras estudiar el sistema formado por dos variables o especies, y con objeto de extender los resultados obtenidos, se estudia un sistema de este tipo en el que intervienen tres especies y, finalmente, uno de dos especies con ecuaciones más complejas.

### 5.6.1. Sistemas de dos especies

#### Ecuaciones de gobierno

Definen el cambio de cada variable dependiente en función del valor de las variables:

$$\frac{dx}{dt} = -a_0x(y+y_i) \quad (5.63)$$

$$\frac{dy}{dt} = b_0x(y+y_i) \quad (5.64)$$

donde los coeficientes  $a_0$  y  $b_0$ , así como los valores iniciales de las variables  $x$  e  $y$ ,  $x_i$  e  $y_i$ , respectivamente, adoptan valores positivos. Esta elección significa que la variable  $y$  (predador por el signo de la ecuación) crece a costa de la desaparición progresiva, hasta su extinción, de la variable  $x$  (presa).

#### Discusión previa

El término  $dx/dt$  es un número negativo al principio merced a los valores iniciales de  $x$  e  $y$ , lo que implica que  $x$  decrece inicialmente; de igual forma  $dy/dt$  es un número positivo al principio, lo que implica que  $y$  crece. Dividiendo las expresiones (5.63) y (5.64), tenemos

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = -\frac{a_0}{b_0} \quad (5.65)$$

es decir, las pendientes de las curvas  $x(t)$  e  $y(t)$  tienen el mismo valor absoluto; su cociente es un valor negativo independiente del tiempo  $t$ , por tanto, de los pares de valores  $(x,y)$  asociados a cada instante. Al principio, pues,  $x$  decrece e  $y$  crece, y dado que en  $x=0$  (para un tiempo suficientemente grande) las velocidades  $dx/dt$  y  $dy/dt$  tienden a cero, la única forma de la curva  $x(t)$  es una evolución asintótica sobre la recta  $y=0$ , por encima de ella. La igualdad (5.65) induce una evolución similar para  $y(t)$ , es decir una curva por debajo de la recta asintótica  $y = y_0$ . Con todo, el producto  $xy$  para tiempos grandes se acerca a cero como lo hacen  $dx/dt$  y  $dy/dt$ .

De lo anterior podemos deducir que  $x$  toma valores en el intervalo  $[x_i,0]$ , mientras que  $y$  lo hace en el intervalo  $[y_i,y_0-y_i]$ . Estos valores fuerzan a elegir como magnitudes características, para referenciar correctamente las magnitudes adimensionales  $x'$  e  $y'$ , respectivamente, las siguientes:

$$x_0 = x_i, \quad y_0 = y_i + \Delta y_0 \quad (5.66)$$



$$t' = t/t_0$$

### Adimensionalización y resultados

Introduciendo las variables anteriores en las ecuaciones (5.63) y (5.64) y usando (5.67), las ecuaciones de gobierno adimensionalizadas se escriben en la forma

$$\frac{x_0}{t_0} \frac{dx'}{dt'} = -a_0 x_0 y_i x' - a_0 x_0 \Delta y_0 \Delta y' \quad (5.68)$$

$$\frac{y_0}{t_0} \frac{dy'}{dt'} = b_0 x_0 y_i x' + b_0 x_0 \Delta y_0 \Delta y' \quad (5.69)$$

La primera conduce a los coeficientes

$$\Psi_1 = \frac{x_0}{t_0}, \quad \Psi_2 = a_0 x_0 y_i, \quad \Psi_3 = a_0 x_0 \Delta y_0 \quad (5.70)$$

que determinan los monomios

$$\pi_1 = t_0 a_0 y_i, \quad \pi_2 = \Delta y_0 / y_i \quad (5.71)$$

mientras que la segunda conduce a los coeficientes

$$\Psi_1 = \frac{\Delta y_0}{t_0}, \quad \Psi_2 = b_0 x_0 y_i, \quad \Psi_3 = b_0 x_0 \Delta y_0 \quad (5.72)$$

que determinan los monomios  $t_0 b_0 x_0 y_i / \Delta y_0$  y  $\Delta y_0 / y_i$  o, alternativamente, los monomios

$$\pi_3 = t_0 b_0 x_0, \quad \pi_4 = \Delta y_0 / y_i \quad (5.73)$$

De aquí, el orden de magnitud de  $t_0$  puede escribirse en las formas

$$t_0 = \frac{1}{a_0 y_i} \Phi_a \frac{\Delta y_0}{y_i} \quad (5.74a)$$

$$t_0 = \frac{1}{b_0 x_0} \Phi_b \frac{\Delta y_0}{y_i} \quad (5.74b)$$

También, el cociente  $\pi_1 / \pi_3$ ,  $b_0 x_0 / a_0 y_i$ , permite obtener

$$\frac{b_0 x_0}{a_0 y_i} = \Phi_c \frac{\Delta y_0}{y_i} \quad (5.75)$$

Como veremos al realizar las simulaciones, se deduce que  $\Phi_c \frac{\Delta y_0}{y_i} = \frac{\Delta y_0}{y_i}$ , con lo que la expresión (5.75) permite relacionar la magnitud oculta  $\Delta y_0$  con los parámetros conocidos del problema

$$\Delta y_o = \frac{b_o x_o}{a_o} \tag{5.76}$$

y reescribir los órdenes de magnitud de  $t_o$  en función, exclusivamente, de los parámetros y condiciones iniciales del problema,

$$t_o = \frac{1}{a_o y_i} \Phi_a \frac{b_o x_o}{a_o y_i} \tag{5.77a}$$

$$t_o = \frac{1}{b_o x_o} \Phi_b \frac{b_o x_o}{a_o y_i} \tag{5.77b}$$

La aplicación del análisis dimensional clásico a este problema es inmediata. La lista relevante de referencias está formada por las magnitudes  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $a_o$  y  $b_o$ , que conduce a los grupos adimensionales (teorema de  $\pi$ )  $\pi_1 = x_i/y_i$  y  $\pi_2 = a_o/b_o$ . La solución para la forma adimensional de las variables  $\Delta y_o/y_i$ ,  $t_o$ ,  $a_o$ ,  $x_i$  (o  $t_o$ ,  $b_o$ ,  $y_i$ ) es entonces:

$$\Delta y_o = y_i \Psi_1 \left( \frac{x_i}{y_i}, \frac{a_o}{b_o} \right) \quad \text{y} \quad t_o = \frac{1}{a_o x_i} \Psi_2 \left( \frac{x_i}{y_i}, \frac{a_o}{b_o} \right)$$

claramente menos precisas que las obtenidas con la adimensionalización.

### Verificación de los resultados

Se simulan los casos de la siguiente tabla.

Caso	1	2	3	4	5	6	7
$a_o$	1	2	1	1	2	2	1
$b_o$	1	4	2	3	1	3	3
$x_i$	1	3	1	1	2	2	4
$y_i$	1	1.5	2	3	1	3	2

**Tabla 5.6 Casos del sistema predador-presa de dos especies**

Tomaremos como primera prueba un caso definido por valores sencillos de los parámetros, **Caso 1:**  $a_o = b_o = x_{ini} (= x_o) = y_{ini} = 1$ . La Figura 5.41 muestra la simulación numérica de este problema. En ella se representan las soluciones  $x(t)$ , curva monótonamente descendiente (inferior),  $y(t)$ , curva monótonamente creciente (superior). Se confirman las evoluciones esperadas. Por otro lado, las pendientes de las curvas  $x(t)$  e  $y(t)$  definen ángulos del mismo valor absoluto en cada instante.

Adoptaremos como tiempo característico,  $t_o$ , el transcurrido para que la variable  $x$  descienda al 20% de su valor inicial (en ese tiempo la variable  $y$  habrá recorrido también un 80% de su intervalo de variación,  $\Delta y_o$ ). De los resultados numéricos, para  $x = 0.2$ , se obtiene

$$t_o = 1.099, \Delta y_o = 1$$

con lo que, usando las expresiones (5.75), (5.77a) y (5.77b)

$$\Phi_c \frac{\Delta y_o}{y_{ini}} = \Phi_c 1 = b_o x_o / a_o y_{ini} = 1$$

$$\Phi_a \frac{b_o x_o}{a_o y_{ini}} = \Phi_a 1 = t_o a_o y_{ini} = 1.099$$

$$\Phi_b \frac{b_o x_o}{a_o y_{ini}} = \Phi_b 1 = t_o b_o x_o = 1.099$$

obtenemos tres valores de las funciones desconocidas para un valor unidad del argumento,

$$\Phi_c 1 = 1, \Phi_a 1 = \Phi_b 1 = 1.099$$

El orden de magnitud de estos valores es la unidad, en coherencia con lo esperado.

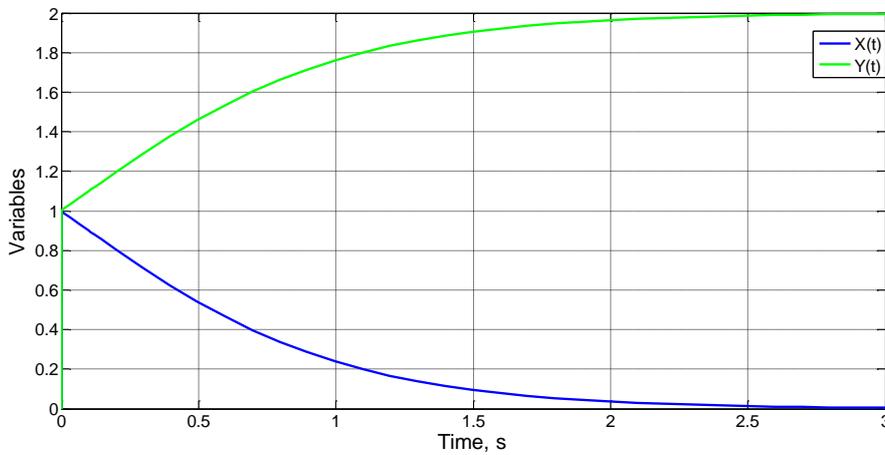


Figura 5.41  $x(t)$ ,  $y(t)$  para el caso 1

Baste otro caso para demostrar la expresión (5.76). **Caso 2:**  $a_o = 2$ ,  $b_o = 4$ ,  $x_{ini} (= x_o) = 3$ ,  $y_{ini} = 1.5$ . Los valores de  $x(t)$  e  $y(t)$  de la simulación se muestran en la Figura 5.42. De esta gráfica,  $\Delta y_o = 6$ , con lo que

$$\Phi_c \frac{\Delta y_o}{y_{ini}} = \Phi_c \frac{6}{1.5} = \Phi_c 4 = b_o x_o / a_o y_{ini} = 4$$

es decir  $\Phi_c 4 = 4$ . Con esto, nos aventuramos a escribir  $\Phi_c \frac{\Delta y_o}{y_{ini}} = \frac{\Delta y_o}{y_{ini}}$ , lo que conduce a la expresión (5.76) para la obtención directa de  $\Delta y_o$ .

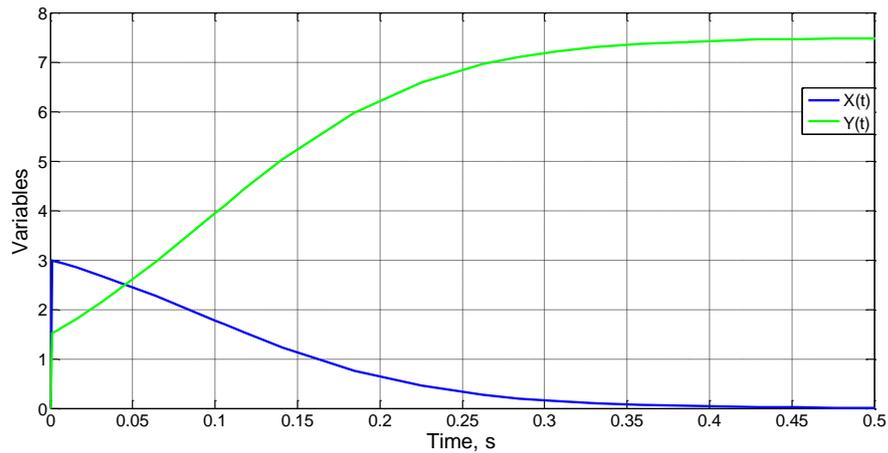


Figura 5.42  $x(t)$ ,  $y(t)$  para el caso 2

Por último describimos algunos casos en los que varían todos los parámetros que se presentan en las ecuaciones. Desde el caso 3 hasta el 6 se retiene el mismo valor para el grupo de parámetros  $b_0x_i/a_0y_i$ , de este modo las funciones  $\Psi_1$  (y  $\Psi_2$ ) no cambiarán, y debido a que  $b_0x_i/a_0y_i = 1$  para estos los casos,  $\Psi_1(1) = \Psi_2(1) = 1.099$ , de acuerdo con los resultados del caso 1. De esta forma, se obtiene  $t_0 = 1.099a_0y_i = 1.099b_0x_i$ , una expresión totalmente coherente con la simulación numérica, como indica la Figura 5.43. El último caso elegido en esta verificación, caso 7, se muestra en la Figura 5.44, donde  $b_0x_i/a_0y_i = 6$ , y  $t_0 = 0.24$  de la simulación. Se puede deducir el valor  $\Psi_2(6) = 0.96$ , un resultado del orden de magnitud esperado.

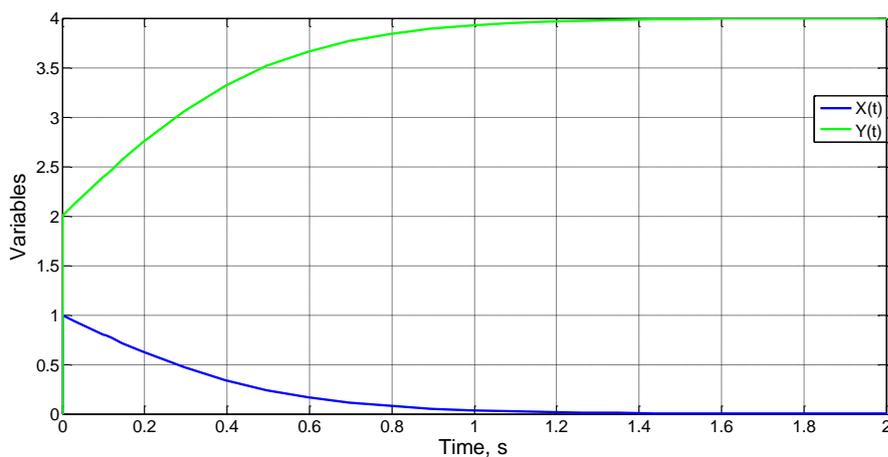
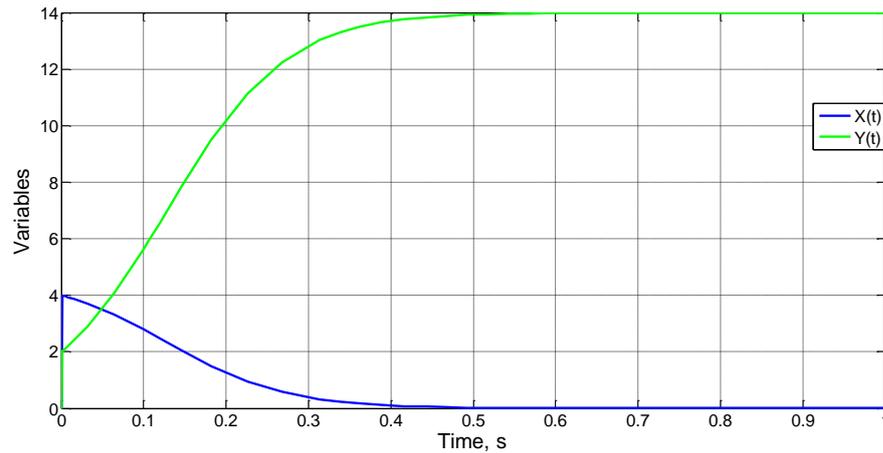


Figura 5.43  $x(t)$ ,  $y(t)$  para los casos del 3 al 6

Figura 5.44  $x(t)$ ,  $y(t)$  para el caso 7

## 5.6.2. Sistemas de tres especies

### Ecuaciones de gobierno

Adoptamos el sistema sencillo definido por las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = -a_0xyz \quad (5.78)$$

$$\frac{dy}{dt} = +b_0xyz \quad (5.79)$$

$$\frac{dz}{dt} = +c_0xyz \quad (5.80)$$

La variable  $x$  disminuye progresivamente, merced al signo negativo del término de la derecha mientras que las otras variables crecen progresivamente hacia los valores estacionarios finales  $y_0$  y  $z_0$ . El proceso transitorio está definido por un mismo tiempo característico para las tres especies.

### Discusión previa

Como en el caso de dos especies, una sencilla manipulación de las ecuaciones permite obtener información fundamental sobre la dinámica del problema. Por ejemplo, dividiendo las expresiones (5.78) entre (5.79), y (5.78) entre (5.80), tenemos

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = -\frac{a_0}{b_0} \quad (5.81)$$

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = -\frac{a_0}{c_0} \quad (5.82)$$

es decir, las pendientes de las curvas  $x(t)$  e  $y(t)$  por un lado, y  $x(t)$  y  $z(t)$  por otro, tienen el mismo valor absoluto; su cociente es un valor negativo independiente del tiempo. También, las representaciones  $x=x(y)$ ,  $x=x(z)$  y  $y=y(z)$  son líneas rectas.

Los valores de la especie que desaparece están comprendidos en el intervalo  $[x_0=x_{ini}, 0]$ , mientras que los de las especies  $y$ ,  $z$  lo hacen en los intervalos  $[y_{ini}, y_0 - y_{ini} = \Delta y_0]$  y  $[z_{ini}, z_0 - z_{ini} = \Delta z_0]$ , respectivamente. Estos valores permiten elegir las magnitudes características siguientes en el problema

$$x_0 = x_{ini}, \quad y_0 = y_{ini} + \Delta y_0, \quad z_0 = z_{ini} + \Delta z_0 \quad (5.83)$$

### Magnitudes características y variables adimensionales

De acuerdo con la discusión previa, pueden definirse las magnitudes características siguientes:

- $x_0$  define el valor del intervalo en que se mueve la variable  $x(t)$ ,  $x_0 = x_{ini}$ , o también el valor del intervalo en que se mueven los cambios de  $x$ ,
- $y_0$  ídem de la variable  $y(t)$ ,  $y_0 = y_{ini} + \Delta y_0$ ,
- $\Delta y_0$  define el valor del intervalo en que se mueven los cambios de  $y$ ,
- $z_0$  ídem de la variable  $z(t)$ ,  $z_0 = z_{ini} + \Delta z_0$ ,
- $\Delta z_0$  define el valor del intervalo en que se mueven los cambios de  $z$ ,
- $t_0$  tiempo transcurrido para que las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  alcancen su valor estacionario o, mejor, una fracción sensible de este valor.

Para establecer las variables adimensionales y hacer que el intervalo de variación de las mismas sea de la unidad, es preciso escribir las variables  $y$ ,  $z$  en la forma

$$y = y_{ini} + \Delta y \quad (5.84)$$

$$z = z_{ini} + \Delta z \quad (5.85)$$

y adimensionalizar  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . Con esto, las variables adimensionales son

$$x' = x/x_0$$

$$\Delta y' = \Delta y/\Delta y_0$$

$$\Delta z' = \Delta z/\Delta z_0$$

$$t' = t/t_0$$

### Adimensionalización y resultados

Introduciendo las variables anteriores en las ecuaciones (5.78) a (5.80) y usando (5.84) y (5.85), las ecuaciones de gobierno se escriben como

$$\frac{dx}{dt} = -a_0 x (y_{ini} + \Delta y) (z_{ini} + \Delta z) \quad (5.86)$$

$$\frac{d y_{ini} + \Delta y}{dt} = \frac{d \Delta y}{dt} = -b_0 x (y_{ini} + \Delta y) (z_{ini} + \Delta z) \quad (5.87)$$

$$\frac{d z_{ini} + \Delta z}{dt} = \frac{d \Delta z}{dt} = -c_0 x (y_{ini} + \Delta y) (z_{ini} + \Delta z) \quad (5.88)$$

o, en forma adimensional

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{t_0} \frac{dx'}{dt} &= -a_0 x_0 y_{ini} z_{ini} x' - a_0 x_0 \Delta z_0 y_{ini} \Delta z' x' - \\ &- a_0 x_0 z_{ini} \Delta y_0 \Delta y' x' - a_0 x_0 \Delta y_0 \Delta z_0 \Delta z' \Delta y' x' \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y_0}{t_0} \frac{d \Delta y'}{dt} &= -b_0 x_0 y_{ini} z_{ini} x' - b_0 x_0 \Delta z_0 y_{ini} \Delta z' x' - \\ &- b_0 x_0 z_{ini} \Delta y_0 \Delta y' x' - b_0 x_0 \Delta y_0 \Delta z_0 \Delta z' \Delta y' x' \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z_0}{t_0} \frac{d \Delta z'}{dt} &= -c_0 x_0 y_{ini} z_{ini} x' - c_0 x_0 \Delta z_0 y_{ini} \Delta z' x' - \\ &- c_0 x_0 z_{ini} \Delta y_0 \Delta y' x' - c_0 x_0 \Delta y_0 \Delta z_0 \Delta z' \Delta y' x' \end{aligned} \quad (5.91)$$

Cada una de estas ecuaciones contiene cinco coeficientes

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{t_0}, \quad a_0 x_0 y_{ini} z_{ini}, \quad a_0 x_0 y_{ini} \Delta z_0, \quad a_0 x_0 z_{ini} \Delta y_0, \quad a_0 x_0 \Delta y_0 \Delta z_0 \\ \frac{\Delta y_0}{t_0}, \quad b_0 x_0 y_{ini} z_{ini}, \quad b_0 x_0 y_{ini} \Delta z_0, \quad b_0 x_0 z_{ini} \Delta y_0, \quad b_0 x_0 \Delta y_0 \Delta z_0 \\ \frac{\Delta z_0}{t_0}, \quad c_0 x_0 y_{ini} z_{ini}, \quad c_0 x_0 y_{ini} \Delta z_0, \quad c_0 x_0 z_{ini} \Delta y_0, \quad c_0 x_0 \Delta y_0 \Delta z_0 \end{aligned}$$

que dan lugar a cuatro monomios adimensionales. Dividiendo, en cada caso, entre el segundo coeficiente, los monomios resultantes son

$$\begin{aligned} \pi_{1,x} &= \frac{1}{a_0 t_0 y_{ini} z_{ini}} & \pi_{2,x} &= \frac{\Delta z_0}{z_{ini}} & \pi_{3,x} &= \frac{\Delta y_0}{y_{ini}} & \pi_{4,x} &= \frac{\Delta y_0 \Delta z_0}{y_{ini} z_{ini}} \\ \pi_{1,y} &= \frac{\Delta y_0}{b_0 t_0 x_0 y_{ini} z_{ini}} & \pi_{2,y} &= \frac{\Delta z_0}{z_{ini}} & \pi_{3,y} &= \frac{\Delta y_0}{y_{ini}} & \pi_{4,y} &= \frac{\Delta y_0 \Delta z_0}{y_{ini} z_{ini}} \\ \pi_{1,z} &= \frac{\Delta z_0}{c_0 t_0 x_0 y_{ini} z_{ini}} & \pi_{2,z} &= \frac{\Delta z_0}{z_{ini}} & \pi_{3,z} &= \frac{\Delta y_0}{y_{ini}} & \pi_{4,z} &= \frac{\Delta y_0 \Delta z_0}{y_{ini} z_{ini}} \end{aligned}$$

Los monomios  $\pi_{4,x}$ ,  $\pi_{4,y}$  y  $\pi_{4,z}$  pueden eliminarse ya que son una combinación de otros dos, en cada ecuación. El mismo tiempo característico puede expresarse, a partir de cada una de las ecuaciones, en las formas

$$t_o = \frac{1}{a_o y_{ini} z_{ini}} \Psi_a \frac{\Delta z_o}{z_{ini}}, \frac{\Delta y_o}{y_{ini}} \quad (5.92)$$

$$t_o = \frac{\Delta y_o}{b_o x_o y_{ini} z_{ini}} \Psi_b \frac{\Delta z_o}{z_{ini}}, \frac{\Delta y_o}{y_{ini}} \quad (5.93)$$

$$t_o = \frac{\Delta z_o}{c_o x_o y_{ini} z_{ini}} \Psi_c \frac{\Delta z_o}{z_{ini}}, \frac{\Delta y_o}{y_{ini}} \quad (5.94)$$

Con  $\Psi_a$ ,  $\Psi_b$  y  $\Psi_c$  funciones desconocidas de los argumentos. La igualdad del tiempo característico en estas expresiones permite deducir que las funciones  $\Psi_a$ ,  $\Psi_b$  y  $\Psi_c$  son del mismo tipo e idénticas, así como determinar los valores desconocidos  $\Delta y_o$  y  $\Delta z_o$ :

$$\Delta y_o = \frac{b_o x_o}{a_o} \quad (5.95)$$

$$\Delta z_o = \frac{c_o x_o}{a_o} \quad (5.96)$$

Como síntesis, retenemos para  $t_o$  una expresión en función de datos del enunciado del problema

$$t_o = \frac{1}{a_o y_{ini} z_{ini}} \Psi \frac{c_o x_o}{a_o z_{ini}}, \frac{b_o x_o}{a_o y_{ini}} \quad (5.97)$$

### Verificación de los resultados

En primer lugar se estudian los casos 1 y 2 definidos por los parámetros siguientes.

**Caso 1:**  $a_o = 1$ ,  $b_o = 2$ ,  $c_o = 3$ ;  $x_o = 5$ ,  $y_{ini} = 2$  y  $z_{ini} = 3$

**Caso 2:**  $a_o = 0.25$ ,  $b_o = 1$ ,  $c_o = 1.5$ ;  $x_o = 5$ ,  $y_{ini} = 4$  y  $z_{ini} = 6$

En el caso 2 se duplican los valores  $y_{ini}$ ,  $z_{ini}$ ;  $a_o$  se divide por 4 y  $b_o$  y  $c_o$  se dividen por 2. Las Figuras 5.45 y 5.46 muestran los resultados de la simulación del caso 1, mientras que las Figuras 5.47 y 5.48 muestran los del caso 2. Las gráficas  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  contienen un punto de inflexión en el mismo instante  $y$ , finalmente, tienden asintóticamente a sus valores estacionarios. Los valores de  $\Delta y_o$  y  $\Delta z_o$  que resultan de la simulación numérica son,

Caso 1:  $\Delta y_o = 10$ ,  $\Delta z_o = 15$

Caso 2:  $\Delta y_o = 20$ ,  $\Delta z_o = 30$

valores que coinciden con los de las expresiones deducidas. Por otra parte, tomando como referencias la disminución de  $x$  hasta un 80% y 90% de su valor inicial, se obtiene el mismo tiempo característico para los dos casos

Casos 1 y 2:  $t_0 = 41.26 \text{ s}$  (90%)

Casos 1 y 2:  $t_0 = 37.12 \text{ s}$ , (80%)

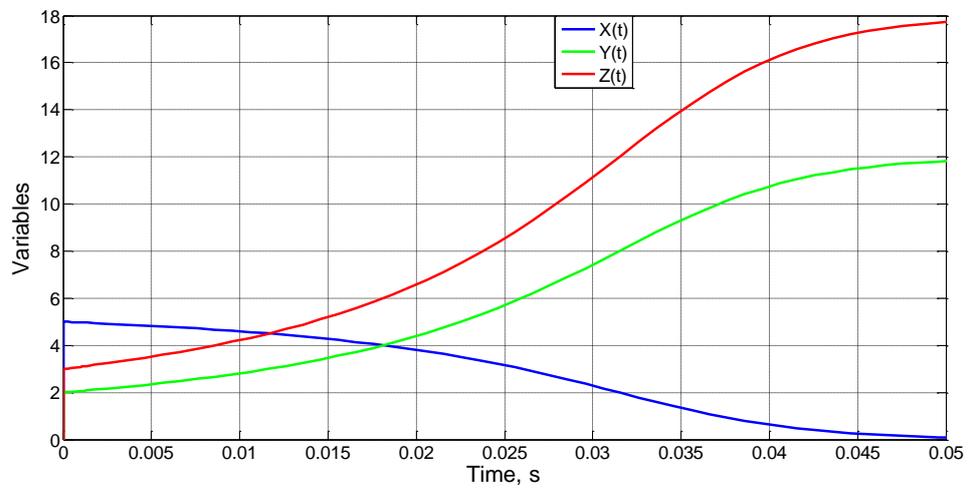


Figura 5.45  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  del caso 1

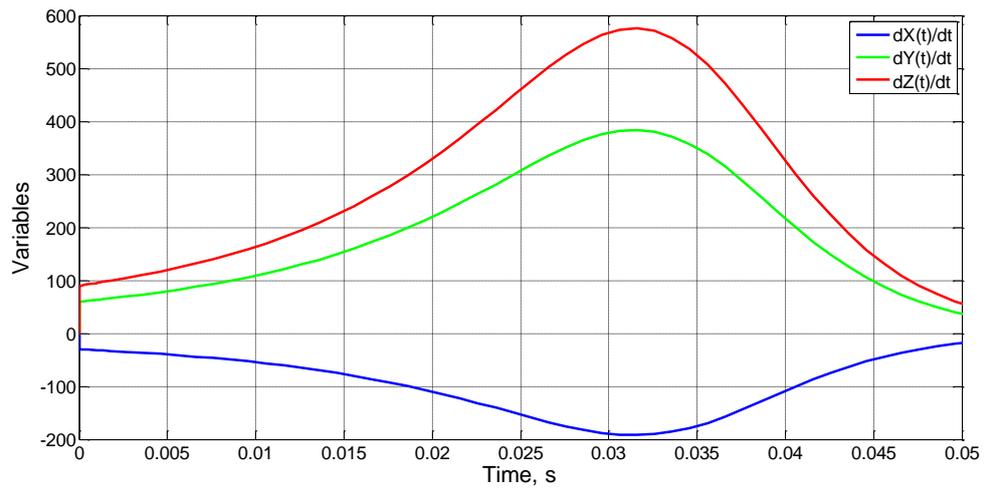


Figura 5.46  $dx/dt$ ,  $dy/dt$  y  $dz/dt$  del caso 1

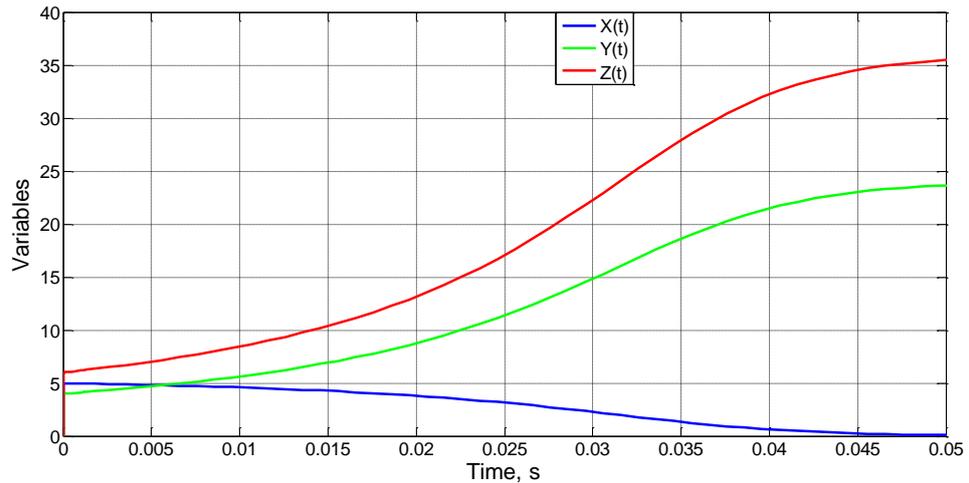


Figura 5.47  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  del caso 2

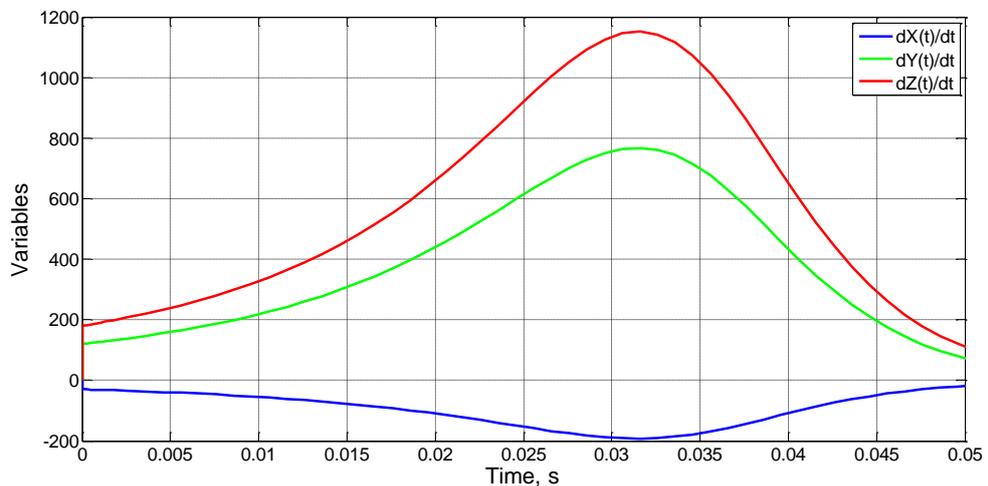


Figura 5.48  $dx/dt$ ,  $dy/dt$  y  $dz/dt$  del caso 2

Dado que  $\frac{1}{a_0 y_{ini} z_{ini}} = 1/6 = 0.166$ , el orden de magnitud de  $t_0$  se ajusta relativamente a este valor (la desviación puede estar asociada a la fuerte no linealidad del problema y al número de variables). La función  $\Psi \frac{c_0 x_0}{a_0 z_{ini}}, \frac{b_0 x_0}{a_0 y_{ini}} = \Psi 5,5 = 4.02$  (para la referencia del 90%) también puede considerarse del orden de magnitud unidad.

En una nueva prueba se comparan los casos 1 y 3, con valores de los parámetros y condiciones iniciales dobles:

**Caso 3:**  $a_0 = 2$ ,  $b_0 = 4$ ,  $c_0 = 6$ ;  $x_0 = 10$ ,  $y_{ini} = 4$  y  $z_{ini} = 6$

Las Figuras 5.49 y 5.50 muestran los resultados del caso 3. Los valores de  $\Delta y_0$  y  $\Delta z_0$  resultantes de la simulación son coherentes con las expresiones deducidas,

$$\Delta y_0 = 20, \quad \Delta z_0 = 30$$

Por otra parte, para una referencia del 90%, el valor del tiempo característico es  $t_0 = 0.00561$  s.

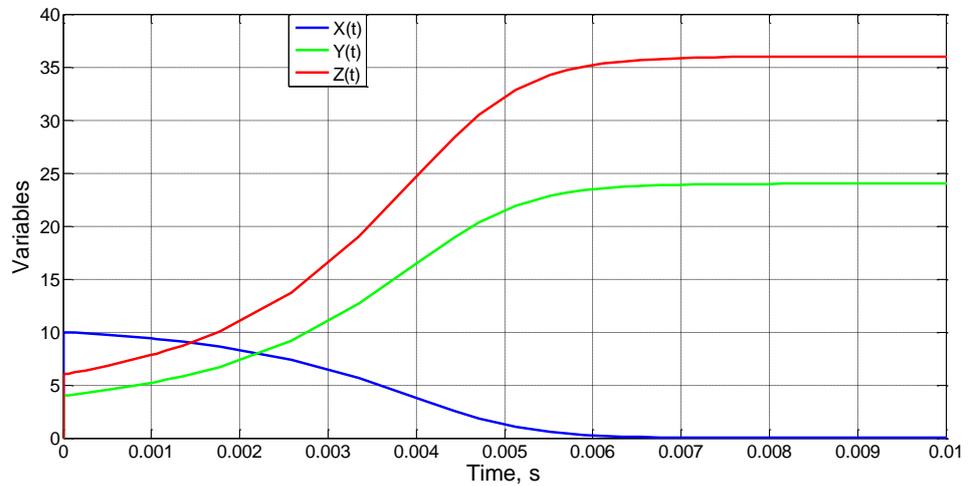


Figura 5.49  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  del caso 3

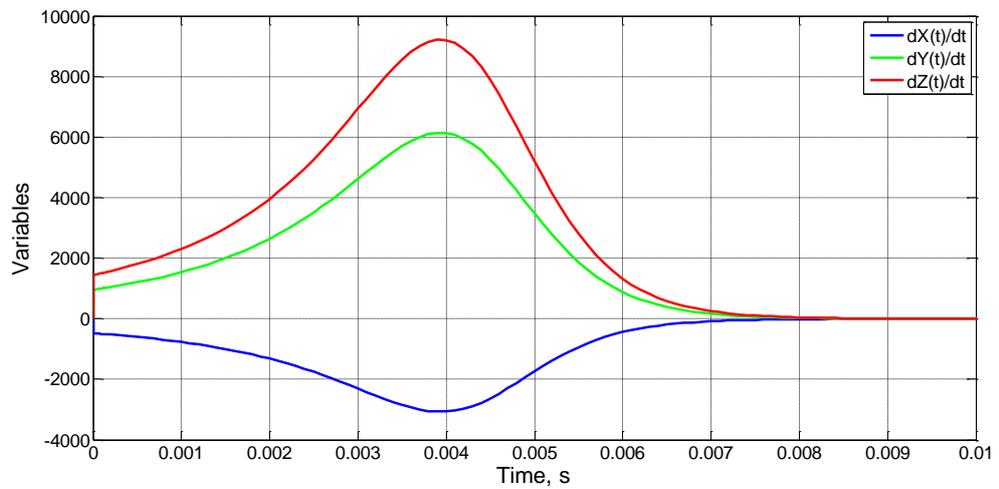


Figura 5.50  $dx/dt$ ,  $dy/dt$  y  $dz/dt$  del caso 3

### 5.6.3. Sistema de dos especies. Problema de Lotka-Volterra generalizado

#### Ecuaciones de gobierno

Las ecuaciones de gobierno son:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \tag{5.98}$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y \tag{5.99}$$

**Discusión previa**

Estas ecuaciones representan una interacción depredador-presa en la que la existencia de la especie predatora está condicionada a la existencia de otra especie que le sirve de presa. El estudio matemático de este tipo de modelo se llevó a cabo independientemente por A. Lotka y V. Volterra en la década de 1920. Representamos con las variables  $x$  e  $y$  el número de individuos de las especies presa y depredador, respectivamente. Los parámetros son constantes positivas y su significado es el siguiente:

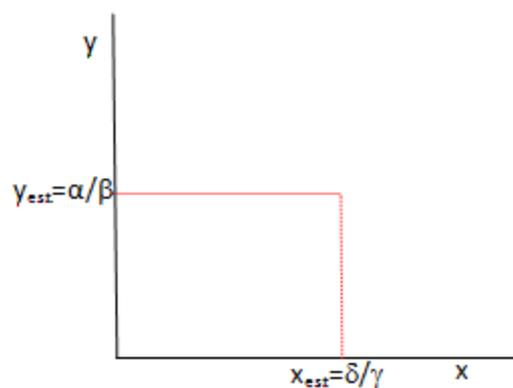
- $\alpha$  es la constante de crecimiento intrínseca para  $x$ ,
- $\delta$  es la tasa de decrecimiento intrínseca de  $y$ ,
- $\beta$  es una constante asociada a una interacción desfavorable a la presa y proporcional al producto  $xy$  de ambas poblaciones,
- $\gamma$  es la constante asociada a una interacción favorable al depredador, también proporcional al producto de poblaciones.

En equilibrio,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0 \tag{5.100}$$

el problema tiene una solución dada por (Figura 5.51)

$$x_{estable} = \frac{\delta}{\gamma} \qquad y_{estable} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{5.101}$$



**Figura 5.51 Posición de equilibrio del sistema en el diagrama de fases**

Esta figura muestra la situación de equilibrio del sistema en el espacio de fases. La evolución de la gráfica es bastante intuitiva cuando el sistema abandona el equilibrio, dado

que el eje  $x$  es la población presa y el eje  $y$  la del depredador. Más presas causan más depredadores, más depredadores causan menos presas, menos presas causan menos depredadores y menos depredadores causan más presas. Estos razonamientos sugieren un flujo del movimiento de giro en contra de las agujas del reloj, al representar las poblaciones en el espacio de fases. Este ciclo de interacción es un sistema dinámico no lineal porque presenta cambios a través del tiempo (se mueve) y porque la naturaleza del proceso difiere conforme pasa el tiempo.

Para soluciones estables, en el caso más general, puede suponerse que la interacción entre ambas especies, en función de los parámetros del problema ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$ ), consistirá en un ciclo de ascenso y descenso de la población de ambas que se repetirá periódicamente. Las representaciones temporales de estas poblaciones serán ondas armónicas continuas, con periodos de ascenso y descenso no necesariamente iguales.

### **Magnitudes características, adimensionalización y resultados**

Dado que son dos las ecuaciones del modelo, sólo podemos incluir dos incógnitas en el proceso de adimensionalización si queremos obtener alguna información del mismo. Así, no debemos partir, en principio, de unos valores iniciales cualesquiera ( $x_i$ ,  $y_i$ ) sino que estos deben estar sobre las rectas  $x=x_{estable}$  o  $y=y_{estable}$ , como veremos a continuación.

Las posibles alternativas para la elección de ( $x_i, y_i$ ) son las siguientes:

- i) Una  $x_i$  cualquiera por encima de  $x_{estable}$  ( $x_i > x_{estable}$ ) con una  $y_i = \delta/\gamma$ . El recorrido que se estudiará va desde el valor inicial ( $x_i, \delta/\gamma$ ) hasta el punto ( $x = \alpha/\beta, y_i$ ). En este proceso,  $x_i$  es un dato e  $y_f$  una incógnita; la otra incógnita es el tiempo empleado para este recorrido,
- ii) Una  $x_i$  cualquiera por debajo de  $x_{estable}$  ( $x_i < x_{estable}$ ) con una  $y_i = \delta/\gamma$ . El recorrido que se estudiará va desde el valor inicial ( $x_i, \delta/\gamma$ ) hasta el punto ( $x = \alpha/\beta, y_i$ ). De nuevo, en este proceso,  $x_i$  es un dato e  $y_f$  una incógnita; la otra incógnita es el tiempo de este recorrido,
- iii) Una  $y_i$  cualquiera por encima de  $y_{estable}$  ( $y_i > y_{estable}$ ) con una  $x_i = \alpha/\beta$ . El recorrido va desde el valor inicial ( $\alpha/\beta, y_i$ ) hasta el punto ( $x_f, y = \delta/\gamma$ ). En este proceso,  $y_i$  es un dato y  $x_f$  una incógnita; la otra incógnita es el tiempo.
- iv) Una  $y_i$  cualquiera por debajo de  $y_{estable}$  ( $y_i < y_{estable}$ ) con una  $x_i = \alpha/\beta$ . El recorrido va desde el valor inicial ( $\alpha/\beta, y_i$ ) hasta el punto ( $x_f, y = \delta/\gamma$ ). De nuevo,  $y_i$  es un dato y  $x_f$  y el tiempo son incógnitas.

La no simetría potencial de la evolución de las poblaciones proporcionará soluciones diferentes para cada uno de los casos anteriores. Con todo, el problema se plantea entre dos estados de la evolución contenidos en las rectas  $x=x_{\text{estable}}$  e  $y=y_{\text{estable}}$  (un estado en cada recta), uno de cuyos puntos, así como el tiempo transcurrido entre ambos se desconoce. El proceso de adimensionalización, como esperábamos, no proporciona información de la trayectoria (valores instantáneos de las poblaciones) entre ambos estados.

La elección de un punto de partida arbitrario, no contenido en alguna de las rectas  $x=x_{\text{estable}}$  o  $y=y_{\text{estable}}$  también es posible. En este caso, el punto inicial es  $(x_i, y_i)$  y el final, el primer punto de corte de la curva de evolución en el diagrama de fases con cualquiera de las rectas anteriores  $(x_f, y_f)$ . El par  $(x_i, y_i)$  y una de las coordenadas  $x_f$  o  $y_f$  (dependiendo del cuadrante en el que se sitúa el punto de partida y del sentido de giro de la evolución) son datos mientras que la otra coordenada y el tiempo son incógnitas. Sin embargo, esta no es la elección más interesante ya que la solución temporal no es ilustrativa al no tener relación directa con el período de la evolución armónica.

Para plantear la definición de las variables adimensionales y sus referencias ciñámonos a dos casos:

**Caso (i).** El punto de partida está en el valor máximo de la especie y (a una distancia  $y_0$  por encima del valor estable  $\alpha/\beta$ ). Los puntos de partida y llegada quedan pues definidos de la forma (Figura 5.52)

$$\text{Punto de partida: } x_i = \frac{\delta}{\gamma}, y_i = y_{\text{máx}} = y_0 + \frac{\alpha}{\beta} \quad (5.102a)$$

$$\text{Punto de llegada: } x_f = x_{\text{mín}} = \frac{\delta}{\gamma} - x_0, y_f = \frac{\alpha}{\beta} \quad (5.102b)$$

con  $t_0$  el tiempo transcurrido entre estos estados; las incógnitas del problema son, pues,  $t_0$  y  $x_0$ ;  $y_0$  es un dato.

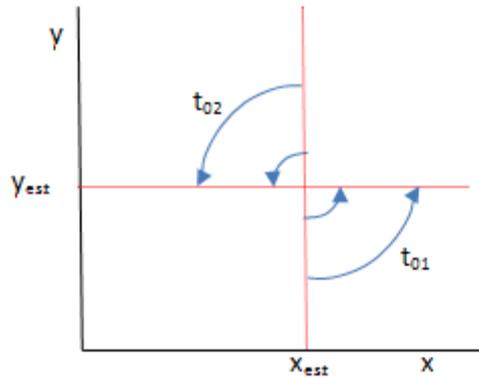


Figura 5.52 Posición de los puntos inicial y final y recorrido

Para fijar un rango de variación de las variables adimensionales que cubra el intervalo de valores [0,1], éstas se definen en la forma

$$x' = \frac{x-x_{\min}}{\frac{\delta}{\gamma}-x_{\min}} = \frac{x-x_{\min}}{x_0}, \quad y' = \frac{y-\frac{\alpha}{\beta}}{y_0} \quad (5.103)$$

con lo que

$$x = x' \frac{\delta}{\gamma} - x_{\min} + x_{\min} = x'x_0 + \frac{\delta}{\gamma} - x_0, \quad y = y'y_0 + \frac{\alpha}{\beta} \quad (5.104)$$

Sustituyendo estas últimas expresiones en las ecuaciones de gobierno y manipulando convenientemente, de la primera de ellas (5.98) se obtienen tres coeficientes, a saber

$$\frac{1}{t_0}, \quad \alpha, \quad \beta y_0$$

que dan lugar a dos monomios

$$\pi_1 = \frac{1}{\alpha t_0}, \quad \pi_2 = \frac{\beta y_0}{\alpha} \quad (5.105)$$

y a la solución para  $t_0$

$$t_0 = \frac{1}{\alpha} \Psi \frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta y_0}{\alpha} \quad (5.106)$$

De la segunda ecuación (5.99) se obtienen los coeficientes

$$\frac{1}{t_0}, \quad \gamma x_0, \quad \delta$$

que dan lugar a los monomios

$$\pi_1 = \frac{1}{\delta t_0}, \quad \pi_2 = \frac{\gamma x_0}{\delta} \quad (5.107a)$$

La eliminación de la incógnita  $t_0$  en esta solución obliga a introducir los monomios que la definen (5.105). Así, la solución de  $x_0$  se deriva de los monomios

$$\pi_a = \frac{\alpha}{\delta}, \quad \pi_b = \frac{\beta y_0}{\alpha}, \quad \pi_2 = \frac{\gamma x_0}{\delta} \quad (5.107b)$$

y su orden de magnitud es

$$x_0 = \frac{\delta}{\gamma} \Psi \frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta y_0}{\alpha} \quad (5.108)$$

**Caso (ii).** El punto de partida está en el valor máximo de la especie  $x$  (a una distancia  $x_0$  por encima del valor estable  $\delta/\gamma$ ). Los puntos de partida y llegada quedan pues definidos en la forma (Figura 5.53)

$$\text{Punto de partida:} \quad x_i = x_{\text{máx}} = x_0 + \frac{\delta}{\gamma}, \quad y_i = \frac{\alpha}{\beta} \quad (5.109)$$

$$\text{Punto de llegada:} \quad x_f = x_{\text{estable}} = \frac{\delta}{\gamma}, \quad y_f = y_{\text{máx}} = y_0 + \frac{\alpha}{\beta} \quad (5.110)$$

con  $t_0$  el tiempo transcurrido entre estos estados; las incógnitas del problema son  $t_0$  e  $y_0$  mientras que  $x_0$  es un dato.

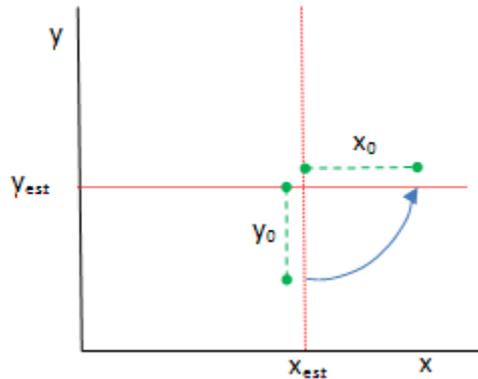


Figura 5.53 Posición de los puntos inicial y final y recorrido

Las variables adimensionales se definen ahora en la forma

$$x' = \frac{x - \frac{\delta}{\gamma}}{x_{\text{máx}} - \frac{\delta}{\gamma}} = \frac{x - \frac{\delta}{\gamma}}{x_0}, \quad y' = \frac{y - \frac{\alpha}{\beta}}{y_{\text{máx}} - \frac{\alpha}{\beta}} = \frac{y - \frac{\alpha}{\beta}}{y_0} \quad (5.111)$$

con lo que

$$x = x'x_0 + \frac{\delta}{\gamma}, \quad y = y'y_0 + \frac{\alpha}{\beta} \quad (5.112)$$

Sustituyendo las variables anteriores en las ecuaciones de gobierno se obtiene su forma adimensional. De la segunda (derivada de 5.99) se deducen los coeficientes

$$\frac{1}{t_0}, \quad \delta, \quad \gamma x_0$$

que dan lugar a dos monomios

$$\pi_1 = \frac{1}{\delta t_0}, \quad \pi_2 = \frac{\gamma y_0}{\delta} \quad (5.113)$$

y a la solución para  $t_0$

$$t_0 = \frac{1}{\delta} \Psi \frac{\gamma y_0}{\delta} \quad (5.114)$$

De la primera (derivada de 5.98) se obtienen los coeficientes

$$\frac{1}{t_0}, \quad \beta y_0, \quad \alpha$$

que dan lugar a los monomios

$$\pi_1 = \frac{1}{\alpha t_0}, \quad \pi_2 = \frac{\beta y_0}{\alpha} \quad (5.115a)$$

Usando el resultado (5.112) se puede eliminar  $t_0$  quedando los monomios

$$\pi_a = \frac{\alpha}{y_0 \beta}, \quad \pi_b = \frac{\alpha}{\delta}, \quad \pi_c = \frac{\gamma x_0}{\delta} \quad (5.115b)$$

lo que da el siguiente orden de magnitud para  $y_0$

$$y_0 = \frac{\alpha}{\beta} \Psi \frac{\alpha}{\delta}, \frac{\gamma x_0}{\delta} \quad (5.116)$$

Como se ha indicado anteriormente, otros casos (iii) y (iv) podrían plantearse con posiciones iniciales a la izquierda del punto de estabilidad sobre la recta  $x = x_{\text{estable}}$  y por debajo de dicho punto sobre la recta  $y = y_{\text{estable}}$ .

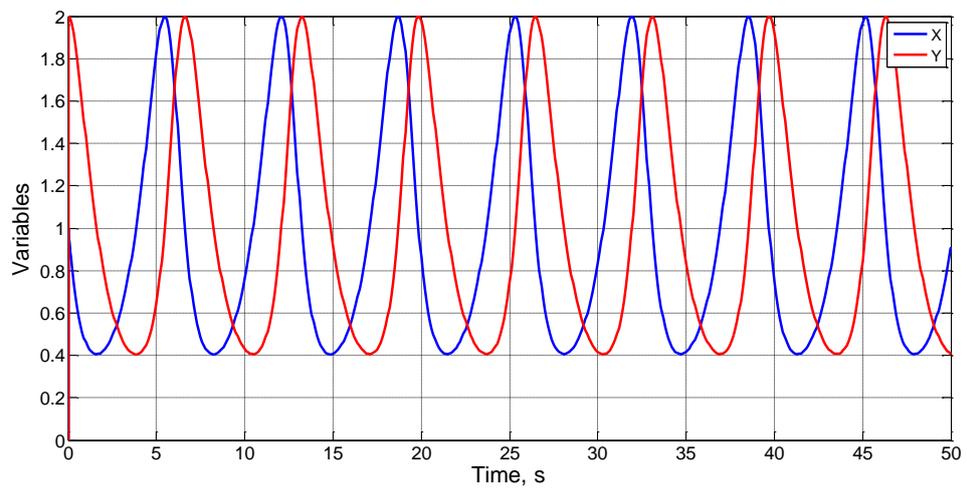
### Verificación de los resultados

Trabajaremos con el conjunto de pruebas correspondientes al caso (i), mostrado en la Tabla 5.7. En las cuatro primeras se mantiene el valor de los argumentos de las funciones  $\Psi$  y de los parámetros  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $\delta$ , por lo que los resultados de  $t_0$  y  $x_0$  son idénticos. La Figura 5.54 muestra la solución de estos casos. En las pruebas 5 y 6 los parámetros se modifican de forma que los argumentos de las funciones permanecen constantes pero no así los factores  $1/\alpha$  y  $\delta/\gamma$  que se modifican para reducir a la mitad el tiempo  $t_0$  y duplicar el resultado de  $x_0$ ; las soluciones confirman los resultados esperados, Figura 5.55. En los casos 7 y 8 se simulan resultados similares a los casos 5 y 6 pero que duplican  $t_0$  y reducen a la mitad la solución  $x_0$ , Figura 5.56. Finalmente, las pruebas 9 y 10 reproducen casos en los que el tiempo se reduce a

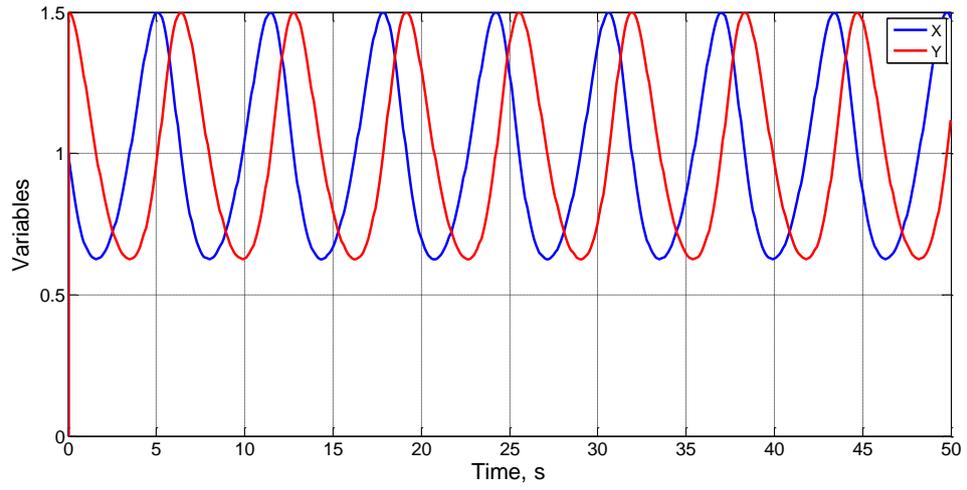
la mitad, en relación con los casos 7 y 8, modificando los parámetros de forma que  $x_0$  no cambie, Figura 5.57.

Caso	$x_{est} = \delta/\gamma$	$y_{est} = \alpha/\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\gamma$	$x_i$	$y_0$	$y_i$	$x_0$	$t_0$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	0.7	1.59
2	1	1	1	1	1	1	1	0.5	1.5	0.36	1.59
3	1	0.5	1	2	1	1	1	0.25	0.75	0.36	1.59
4	1	0.25	1	4	1	1	1	0.125	0.375	0.36	1.59
5	2	1	2	2	2	1	2	0.5	1.5	0.72	0.80
6	2	2	2	1	2	1	2	1	3	0.72	0.80
7	0.5	1	0.5	0.5	0.5	1	0.5	0.5	1.5	0.19	3.1
8	0.5	0.5	0.5	1	0.5	1	0.5	0.25	0.75	0.19	3.1
9	0.5	1	1	1	1	2	0.5	0.5	1.5	0.19	1.59
10	0.5	0.5	1	2	1	2	0.5	0.25	0.75	0.19	1.59

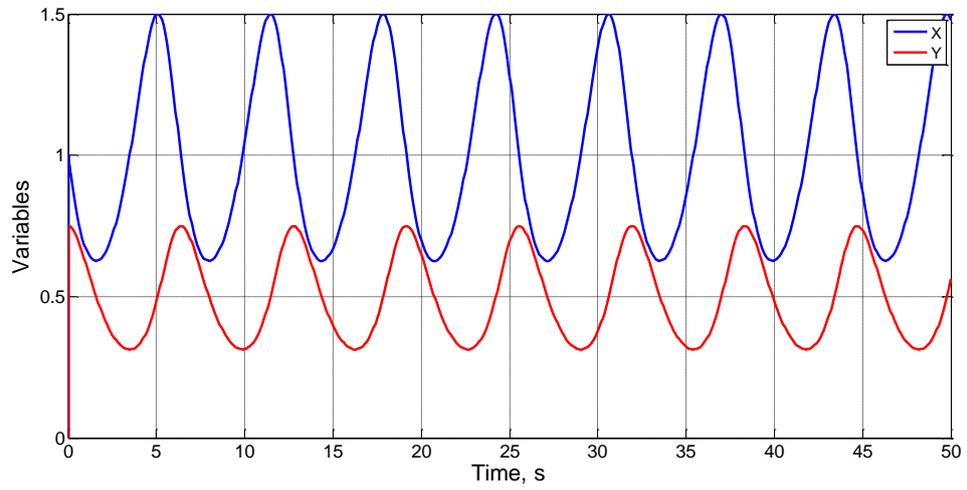
Tabla 5.7 Casos verificados del problema generalizado de Lotka-Volterra



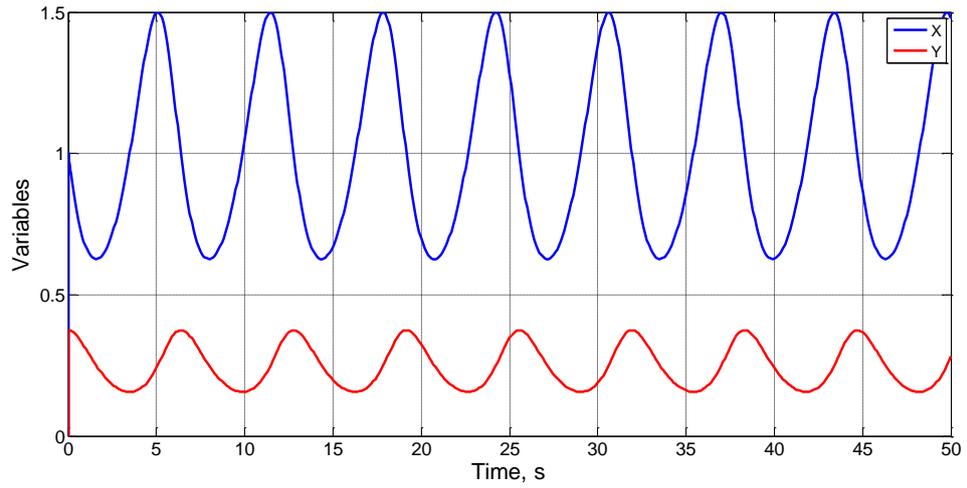
Caso 1



**Caso 2**

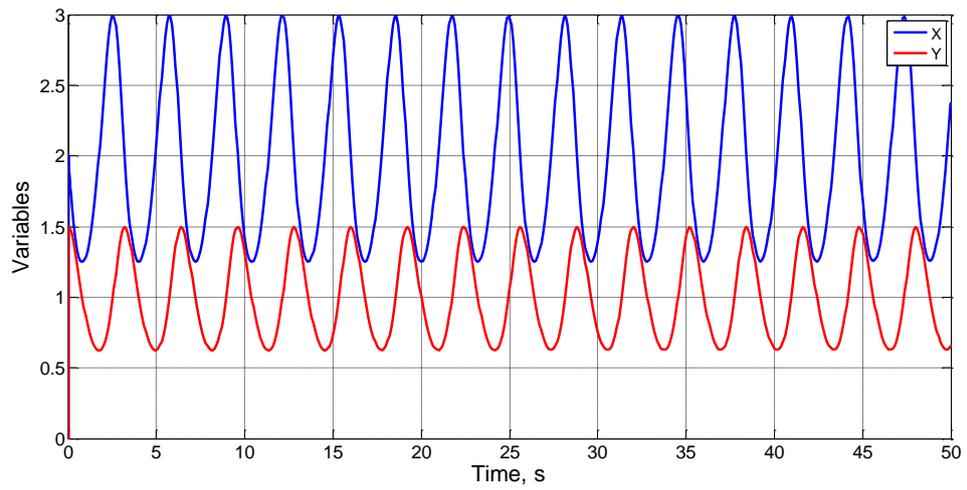


**Caso 3**

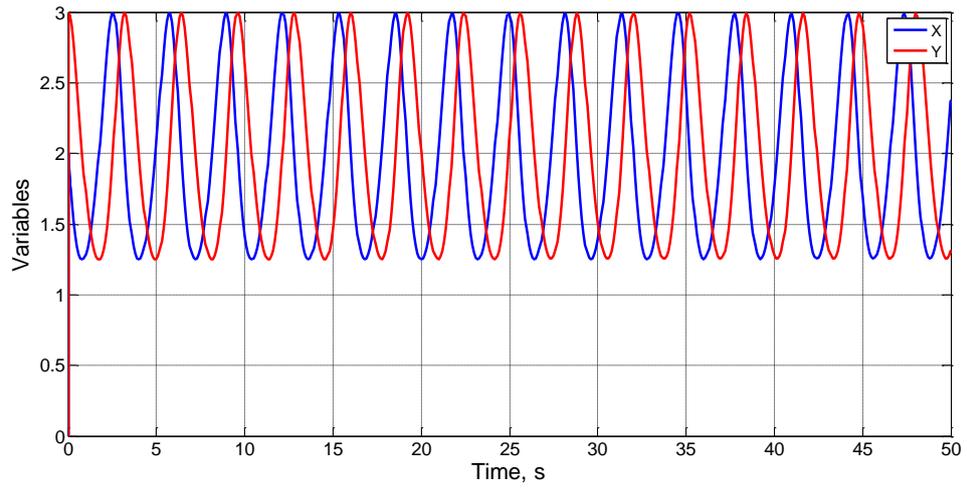


**Caso 4**

**Figura 5.54 Solución de las pruebas 1 a 4, Tabla 5.6**

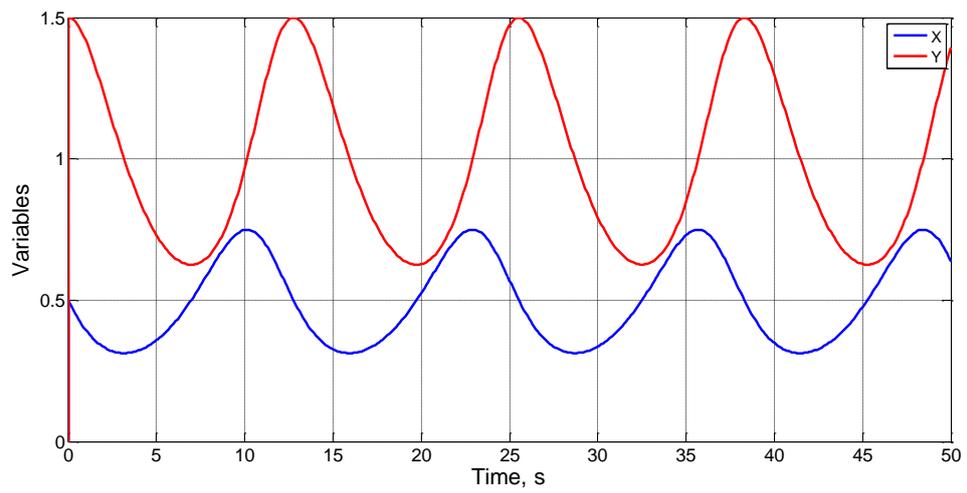


**Caso 5**

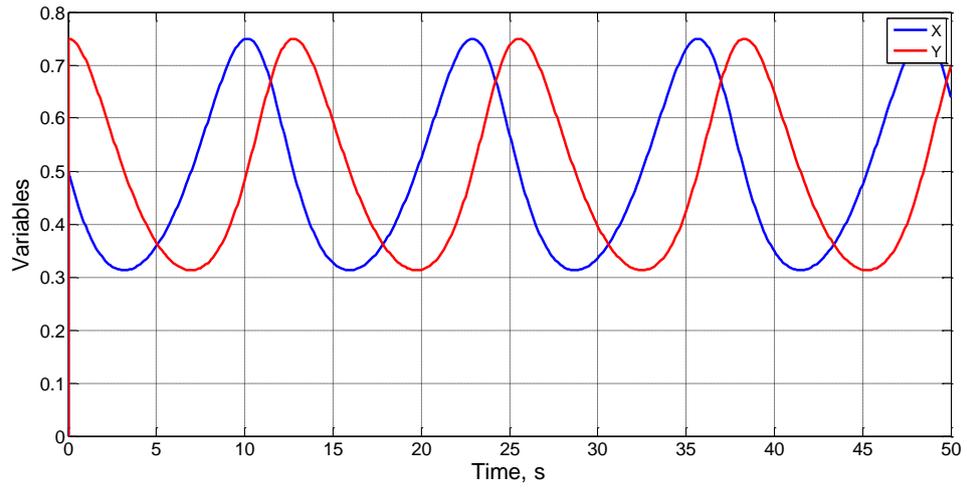


**Caso 6**

**Figura 5.55 Solución de las pruebas 5 y 6, Tabla 5.6**

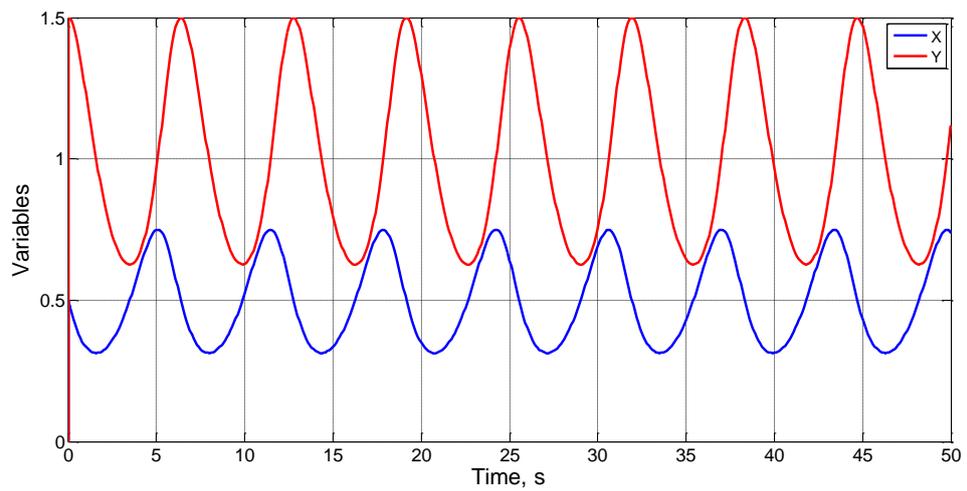


**Caso 7**

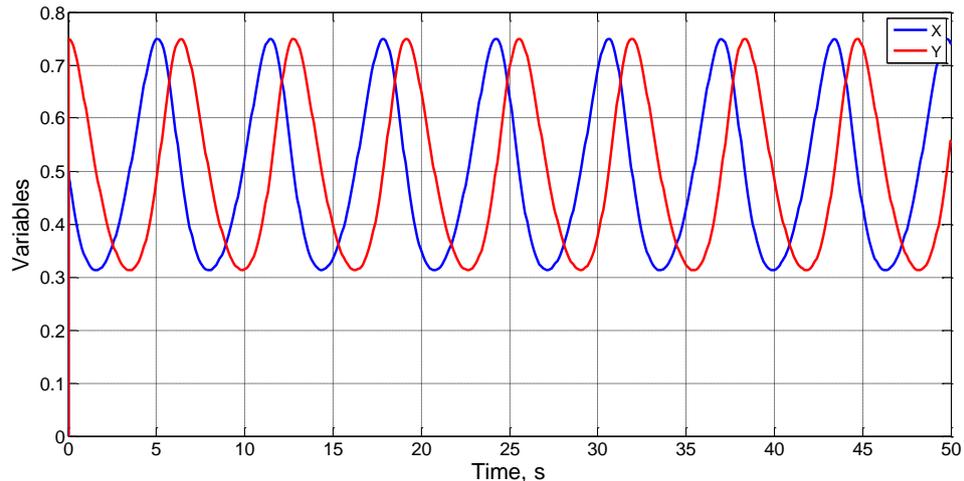


**Caso 8**

**Figura 5.56 Solución de las pruebas 7 y 8, Tabla 5.6**



**Caso 9**



### Caso 10

Figura 5.57 Solución de las pruebas 9 y 10, Tabla 5.6

## 5.7. Contribuciones y conclusiones

Una conclusión general se puede observar en relación con la multitud de referencias para la variable dependiente y las de la variable independiente (una por ecuación). En el problema 5.3 llega a haber 4 referencias para la longitud. En general las referencias para una misma variable (dependiente o independiente) no han de ser necesariamente las mismas en cada ecuación; en este caso se requieren nuevas ecuaciones (complementarias) que ligan estas referencias, no explícitas, que permiten obtener soluciones para cada una de las incógnitas introducidas en el proceso de adimensionalización.

Cuando el número de incógnitas (seleccionadas para satisfacer los requisitos impuestos a las variables adimensionales que definen en relación con su rango de valores) es mayor que el de ecuaciones procedentes de la adimensionalización, y no se encuentran ecuaciones complementarias que ligan las incógnitas, se han encontrado soluciones seleccionando nuevas referencias que, aunque no satisfagan estrictamente el requisito anterior, permiten obtener soluciones aproximadas.

Con respecto a la variable independiente (el tiempo), sólo una inspección física del problema permite discernir si existe una o más referencias temporales distintas (incluso para problemas con más de una ecuación de gobierno) y a qué ecuación hay que asignar dichas referencias. Esta es una discriminación de la que no se ha encontrado ninguna referencia o trabajo en la literatura científica.

En todos los casos, la elección de un tiempo característico está asociado a la aplicación de la ecuación a una parte del recorrido no necesariamente coincidente con el periodo del movimiento armónico, máxime si la solución del problema es una señal armónica que contiene más de una frecuencia en su espectro. Así, se han elegido en general tiempos característicos asociados a la cuarta parte del recorrido entre cuyos instantes inicial y final se puede establecer un balance caro sin introducir nuevas incógnitas. En este sentido el problema general de interacción de dos especies ha sido capaz de obtener órdenes de magnitud para los cuatro tiempos que separadamente determinan el periodo de la onda armónica.

El significado físico de los grupos adimensionales resultantes de la adimensionalización es claro y está relacionado obviamente con el significado de los términos de balance en las ecuaciones de gobierno. Estos grupos tienen orden de magnitud unidad.

Se ha comprobado (en alguna de las aplicaciones) que la aplicación del análisis dimensional clásico conduce (en estos problemas complejos) a soluciones menos precisas.



## **CHAPTER 6**

# **CONTRIBUTIONS AND CONCLUSIONS**



These final paragraphs are a synthesis of the above in this report, part of whose contributions and conclusions have already been mentioned in the previous two chapters. In the opinion of this author, the main contributions and conclusions are:

### **First (concerning software CODENET\_15)**

A computer code was created to solve nonlinear problems formulated by differential equations or systems of these equations of any order and degree, typical of engineering problems, based on the method of simulation networks. It has a user-friendly display of communication and a powerful graphical environment that allows visualizing solutions: transient, phase diagrams, spectra of signals...

In every model, the successive derivatives of the dependent variables are implemented recurrently, which leads to a relatively simple design requiring very few electrical components, and implying the use of few programming rules. Thanks to the so-called "controlled source", whose output signal is specified by software, the model is capable of taking on any type of nonlinearity and/or coupling. The powerful computing algorithms which are integrated in the circuits simulation code minimize the computing time and provide absolute reliability to the simulations.

### **Second (concerning the use of the nondimensionalization)**

Although reducing an equation or systems of differential equations to its nondimensional form, in order to find the dimensionless groups that govern its solution, it requires a little mathematical effort, the method is very rarely found in the scientific literature. However, this work demonstrates that the nondimensionalization is a useful technique for finding information of interest (basically, magnitudes characteristics that define the physical process) which is part of the solution of problems governed by ordinary differential equations or coupled systems of these equations.

### **Third (regarding to the process of nondimensionalization)**

The essential for an optimal nondimensionalization (what might be called normalized nondimensionalization) resides in a correct choice of the magnitudes of reference that convert the dependent variables and independent of the problem to their dimensionless form . These references can be explicitly contained in the statement of the problem or, on the contrary, be implicitly; It is what we call "hidden variables". In any case, it is necessary that they relate to each other. For example, if the time reference is the time interval between  $t=0$  y  $t=t_0$ , then the

reference for the dependent variable associated should be the difference between of the values of this one for those times, and not any other value, although having the same physical dimension.

If the selection of references is such that it confines the values of the variables in the interval [0-1], the resulting equation, dimensionless and normalized, will allow determination of the dimensionless groups of the problem; these groups will be of order of magnitude unit (as long as it does not exist severe nonlinearities in the process) and with clear physical meaning in terms of the balance of the variables that interact in the problem.

The functional dependence between these dimensionless groups leads to the solution of the problem and the expression of the unknowns in terms of the other parameters.

#### **Fourth (concerning the references)**

In general, there are many possible references (quantities of the same dimension) for the dependent variable. References for a variable (dependent or independent) should not necessarily be the same in each equation with coupled problems and may be necessary new equations of ligation (supplementing the governing equations) to obtain solutions for the unknowns in the nondimensionalization process.

If the number of unknowns that satisfy the requirements imposed on the dimensionless variables regarding to its range of values is larger than the governing equations, and there are not complementary equations that linked the unknowns, we have found solutions by selecting new references which, although they do not strictly meet the above criteria, allow approximate solutions to be obtained.

Regarding to the independent variable, only a physical inspection of the problem allows discerning whether there is one or more temporary references (either in problems which are governed by a single equation or in coupled problems) and to which equation we must assign these references. This is a discrimination that has not been found any reference or work in the scientific literature.

**Fifth (concerning the solutions)***A single governing equation*

The maximum number of dimensionless groups is equal to the number of terms of the equation less one, which allows obtaining the order of magnitude of a single unknown, usually the reference of the dependent or independent variable with a clear physical meaning.

When the resulting number of groups is one, the allocation to this one, of an order of magnitude unit, provides the direct dependence of the unknown with the rest of the system parameters. If the number of groups is more than one, the order of magnitude of the unknown (contained in one of the groups) is modulated by an undetermined function of groups that do not contain the unknown. All of these ones, resulting from the nondimensionalization, as well as the undetermined function, are of order of magnitude unity.

The solution of the problem can be universally represented by correlations between dimensionless groups deduced of numerical or experimental evidence: a single universal graph when there are two dimensionless groups or an abacus or set of abacus when there are more than two. In the case of a single group, with only a test can be obtained the value of the unknown.

*Several governing (coupled) equations*

The solution requires that it exists as many unknowns as equations (both, governing and binding) in the problem. The maximum number of dimensionless groups in each governing equation is equal to the number of terms of the equation minus one, so the overall number of dimensionless groups depends on the number of governing equations. These groups can be reorganized so that each unknown is separately included within certain groups, and thus the groups can be expressed by functions of groups that do not contain unknowns (solution the problem). When all groups are containing unknowns is obtained the most precise solution.

**Sixth (regarding to the characteristic time reference)**

Only a physical inspection of the problem allows discerning whether there are one or more different temporary references (even for problems with more than one governing equation) and to which equation we must assign these references. This is a kind of discrimination that has not been found any mention or work in the scientific literature.

When the solutions have an asymptotic trend, there is not a precise characteristic time (associated with the asymptotic value of the dependent variable) which can be taken as a

reference for defining the dimensionless time. The solution consist in taking as a reference a fraction closer to the unity of the asymptotic value of the dependent variable and the time associated with this fraction. Although these dimensionless variables are not confined in the interval [0-1], the obtained solutions are quite accurate.

In equations with harmonic solutions, the choice of a characteristic time is associated with the application of the equation to a part of the path, not necessarily coincident with the period of the harmonic movement, particularly when the solution of the problem is a harmonic signal that contains more than one frequency in its spectrum. This choice is justified due to the references for this part of the path or time intervals (usually a quarter of the period of the harmonic movement) are different from the references of the other parts. A clear example is the general interaction between two species, a complex problem in which has been it possible to obtain information about the four time intervals that constitute the period of harmonic wave.

### **Seventh (concerning non-linearity)**

Non-linearity does not imply difficulties added to the process of nondimensionalization, aside from those inherent in the simple mathematical steps that lead to the obtaining of the dimensionless groups. However, the reliability of the solutions decreases for strong nonlinearities, owing to the approaching to the unit of the changes (derivatives) of the dimensionless variables is a strong hypothesis in these problems. Thus, although the set of groups that involve the solution does not change, the orders of magnitude of theoretical solutions could deviate from their real values.

For problems with harmonic solutions, the non-linearity results in the emergence of harmonics of the fundamental frequency whose influence is accentuated with the degree of non-linearity.

### **Eighth (regarding to dimensional analysis)**

Applications of dimensional analysis to problems such as those studied in this report are not found in textbooks or in the scientific literature. With the exception of very simple problems in which are obtained dependencies based on the pi theorem, and it does not assign orders of magnitude to the unknowns.

Practically in all the cases studied, the nondimensionalization leads to more accurate results than dimensional analysis, since it eliminates the direct monomials introduced by this last one (of the type called "form factor" or ratio between many magnitudes, lengths or

masses, which could be used as references). The right choice of the dependent variable and its reference eliminates the formation of monomials of this type.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alarcón García, M., *Transporte de calor en sistemas con aletas. Coeficientes de rendimiento y red de transferencia*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cartagena (2001)
- Alarcón M., Alhama F. y González-Fernández C.F. Transient conduction in a fin-wall assembly with harmonic excitation, Network thermal admittance *Heat Transfer Engineering*, 23, pp. 31-43 (2002)
- Alcaraz D., Alhama F. y Moreno J.A. Influencia de la distribución de las fibras en la conductividad térmica de materiales compuestos con matrices de aleaciones de titanio y de magnesio, *Revista Española de Metalurgia*, Vol. Extr., pp. 293-303 (2005)
- Alhama F. y del Cerro Velázquez F. *Simulación y diseño de problemas de conducción térmica con PROCCA-09* (con CD del programa PROCCA-09), Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia (2010)
- Alhama F. y Gómez Lopera S. *Prácticas de transmisión de calor en aletas simples: Programa Prodasim* (con CD del programa Prodasim), Proofsoft Editions (2006).
- Alhama F. y Zueco J. Application of a lumped model to solids with linearly temperature-dependent thermal conductivity, *Applied Mathematical Modelling*, 31, pp. 302-310 (2007)
- Alhama I., Alhama F. y Soto A. Fatsim-A: An educational tool based on electrical analogy and the code PSpice to simulate fluid flow and solute transport processes, *Computer Application in Engineering Education*, 16, pp. 72-82 (2011a)
- Alhama I., Soto A. y Alhama F. Simulation of flow and solute coupled 2-D problems with velocity-dependent dispersion coefficient based on the network method, *Hydrological Process*, DOI: 10.1002/hyp.8475 (2011b)
- Alhama I., Soto Meca A. y Alhama F. *Simulador de flujo y transporte FATSIM-A. Aplicaciones docentes y de investigación* (con CD del programa FATSIM-A), Servicio de publicaciones de la UPCT (MORPI) (2010a).
- Alhama I., Soto Meca A. y Alhama F. *Simulador de flujo y transporte FAHET. Manejo y aplicaciones* (con CD del programa FAHET), Servicio de publicaciones de la UPCT (MORPI) (2010b)
- Alhama, F. and Madrid, C. N. *Análisis dimensional discriminado en mecánica de fluidos y transferencia de calor*, Reverté. Barcelona (2012)
- Alhama, F., López Sánchez, J.F. y González-Fernández, C.F. Heat conduction through multilayered wall with variable boundary conditions, *Energy*, 22, pp. 797-803 (1997)
- Anwar Bég O., Zueco J. y Takhar H.S. Unsteady magnetohydrodynamic Hartmann Couette flow and heat transfer in a Darcian channel with Hall current, ion slip, viscous and Joule heating effects: Network numerical solutions, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 14, 4, pp. 1082-1097 (2009)
- Baker W.E. y Shortt D.J. *Integrated electrical/thermal component modeling*. Naval Res. Lab., Washington (1990).

- Bejan, A., *Convection Heat Transfer*, Wiley-Interscience, New York (1984)
- Bello V.G. *Electrical models of mechanical units widen simulator's scope*, Electronics Design News, March (1991)
- Benavent-Climent A., Castro E. y Gallego A. Evaluation of low-cycle fatigue damage in rc exterior beam-column subassemblages by Acoustic Emission, *Constr. Build. Mater.*, 24, pp. 1830-1842 (2010)
- Bridgman, P.W. *Dimensional Analysis*. Yale University Press, New Haven, CT, (1922), (2ª ed., París, Gauthiers-Villars, 1931)
- Buckingham, E. On Physically Similar Systems: Illustration of the use of dimensional analysis. *Phys. Rev.*, Vol. IV (4), 345-376 (1914)
- Campbell, N.R. Dimensional analysis. *Phil. Mag*, 47, 481-494 (1925)
- Capobianchi, M. and Aziz, A. A scale analysis for natural convective flows over vertical surfaces, *Int. J. Therm. Sci.* 54, 82-88 (2012)
- Castro E. *Simulación de ondas elásticas en vigas mediante el método de redes y detección de daño mediante la transformada wavelet*. Tesis doctoral, UGR (2005)
- CODENET\_15. Coupled Ordinary Differential Equations by Network Method. Conesa, M., Sánchez, J. F. y Alhama, F. (Programa de cálculo en base de registro) [2015],
- Conesa, M., Alhama, F. y Madrid, C.N. *3rd International Conference on Chemical Engineering and Advanced Materials Naples (Italy), 14-28 November 2011*. Derivation of the Discriminated Dimensionless Numbers that Rule the Forced Mass Convection [2011a]
- Conesa, M., Alhama, F. y Madrid, C.N. Derivation of the Discriminated Dimensionless Numbers that Rule the Forced Mass Convection. *International Review of Chemical Engineering (I.RE.C.H.E.)*, November 2011, vol. 3, n. 6, p. 745-749 [2011b]
- Del Cerro Velázquez F. *Desarrollo de un programa de conducción de calor, usando analogía eléctrica, mediante el lenguaje C# y el módulo de cálculo PSpice. Aplicaciones lineales y no lineales en diferentes geometrías*. Tesis doctoral, UMU (2009)
- Del Cerro Velázquez F., Gómez-Lopera S. y Alhama F. A powerful and versatile educational software to simulate transient heat transfer processes in simple fins, *Comput. Appl. Eng. Educ.*, 16, pp. 72-82 (2008).
- Ehrenfest-Afanassjewa. *Math. Ann.*, 77, pag.259 (1916)
- FAHET: Alhama I., Soto Meca A., Alhama F., *Flow and Heat Transport simulator*, NAR: 08/2011/419, © 2004 2009 UPCT (2010)
- FATSIM-A: Alhama I., Soto Meca A., Alhama F., *Fluid Flow and Solute Transport simulator*, NAR: 08/2010/1110 (DL: MU-1093-2010), © 2004 2009 UPCT (2010)
- Fourier, J. B. J. *Théorie Analytique de la Chaleur*, Chez Firmin Didot, Paris, (1822). (2ª ed., París, Gauthiers-Villars, 1888).
- Gibbins, J.C. *Dimensional Analysis*. UK: Springer-Verlag London Limited, (2011)

- González-Fernández C.F. y Alhama F. *Heat Transfer and the Network Simulation Method*. J. Horno (ed.) Transworld Research Network, Trivandrum (2001)
- González-Fernández C.F., Alhama F. y López-Sánchez J.F. Application of the network method to heat conduction processes with polynomial and potential-exponentially varying thermal properties. *Numer Heat Transf A, Appl*, 33, pp.549 (1998a)
- González-Fernández C.F., Alhama F., Alarcón M. y López Sánchez J.F. Digital simulation of transient heat conduction with polynomial variable thermal conductivity and specific heat, *Computer Physics Communications*, 111, pp. 53-58 (1998b)
- González-Fernández, C.F. *Network Simulation Method. Research Signpost* Ed. Trivandrum-695023. Kerala (India) 2002
- González-Fernández, C.F., García Hernández, M. y Horno, J., Computer simulation of a square scheme with reversible and irreversible charge transfer by network method, *J. Electr. Chem.*, 395, 39-44 (1995)
- Hamill D.C. Learning about chaotic circuits with pspice, *IEEE Transactions on education*, 36, pp. 28-35 (1993)
- Hebert K. y Alkire R. Dissolved metal species mechanism for initiation of crevice corrosion of Aluminum: II. Mathematical model. *J. Electrochem. Soc.*, 130, pp. 1007 (1983)
- Herranz, A. y Arenas, A., *Análisis dimensional y sus aplicaciones. I Fundamentos de Análisis dimensional. II Aplicaciones a Mecánica de fluidos. III Aplicaciones a Transmisión del calor*. Diego Marín, (1989)
- Horno J., García Hernández M. T., y González-Fernández C. F. Digital simulation of electrochemical processes by network approach, *J. Electroanal. Chem.*, 352, pp. 83-97 (1993)
- Horno J., González-Fernández C. F. y Hayas A.. The network method for solutions of oscillating reaction-diffusion systems, *Comp. Phys. Comm.*, 118, pp. 310-319 (1995)
- Horno, J., González-Caballero, A., Hayas, A. and González-Fernández, C.F., The effect of previous convective flux on the nonstationary through membranes. *J. Membr. Sci.*, 48, 67- 77 (1990)
- Huntley, H.E. *Dimensional Analysis*. London: McDonald, (1952)
- Jeans, J.H. *Proc. Roy. Soc.*, 76, pp.545 (1905)
- Kielkowsky R.. *Inside Spice*, Mc Graw Hill, New York (1994)
- Knabner P. y Angermann L. *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*, Springer (2003)
- Langhaar, H.L. *Dimensional Analysis and Theory of Models*. New York: Wiley, (1951)
- Levi-Civita, T and Amaldi, H., *Compendio di meccanica razionale*. Seconda edizione riveduta. Nicola Zanichelli ed., Bologna (1938)
- Luna Abad J.P., Alhama, F. y Campo, A. Optimization of longitudinal rectangular fins through the concept of relative inverse admittance, *Heat Transfer Engineering*, 31, 5, pp. 395-401 (2010)

- Madrid García, C.N. and Alhama, F. Discrimination: A fundamental and necessary extension of classical dimensional analysis theory. *Int. Comms. Heat Mass Transfer* 33, 287-294(2006)
- Madrid, C.N. and Alhama, F. Discriminated Dimensional Analysis Versus Classical Dimensional Analysis and Applications to Heat Transfer and Fluid Dynamics, *Chin. J. Chem. Eng.*, vol. 15, no. 5, pp. 626-631, (2007)
- Madrid, C.N. and Alhama, F. Study of the laminar natural convection problem along an isothermal vertical plate based on discriminated dimensional analysis. *ChEC (Chemical Eng. Communications)*, 195 (12) 1524-1537 (2008)
- Madrid, C.N. y Alhama, F. Discriminated dimensional analysis of the energy equation: Application to laminar forced convection along a flat plate. *Int. J. Thermal Sci.* 44, 333-341 (2005)
- Madrid, C.N. y Alhama, F. Discrimination: A fundamental and necessary extension of classical dimensional analysis theory. *Int. Comms. Heat Mass Transfer* 33, 287-294 (2006)
- Marín F., Moreno Nicolás J. A. y Alhama F. Modelling of stick-slip behavior with different hypothesis on friction forces. *International Journal of Engineering Science*, DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.06.002 (2012)
- Martynenko, O.G. and Khramtsov, P.P. *Free-Convective heat transfer*. Berlin: Springer, (2005)
- Mills, A. T. *Basic heat and mass transfer*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, (1995)
- Morales Guerrero J. L., Moreno Nicolás J. A. y Alhama F. New additional conditions for the numerical uniqueness of the Boussinesq and Timpe solutions of elasticity problems. *Int. J. of Computer Mathematics*, 89, 13-14, pp. 1794-1807 (2012a)
- Morales Guerrero J. L., Moreno Nicolás J. A. y Alhama, F. Application of the network method to simulate elastostatic problems defined by potential functions. Applications to axisymmetrical hollow bodies. *Int. J. of Computer mathematics*, 89, 13-14, pp. 1781-1793 (2012b)
- Moreno J.A., Gómez de León Hyjes y Alhama F. Solution of temperature fields in hydrodynamics bearing by the numerical network model. *Tribol. Int.*, 40, pp. 139-145 (2007)
- Moya A.A. (2011) Influence of dc electric current on the electrochemical impedance of ion-exchange membrane systems. *Electrochim. Acta*, 56, pp. 3015-3022
- Nagel, L. W., *SPICE (Simulation program with integrated circuit emphasis)*. University of California, Electronics Res. Lab., ERL-M380, Berkeley, CA (1977 )
- Nagel, L. W., *SPICE2: A computer program to simulate semiconductor circuits*. University of California, Electronics Res. Lab., ERL-M520, Berkeley, CA (1975)
- Palacios, J. F. *Análisis dimensional.*: Espasa-Calpe, 1955, *Dimensional analysis*, MacMillan and Co., London (1964). Edición en castellano: Espasa-Calpe, S.A., Madrid (1955)
- Peusner L. *The principles of network thermodynamics: Theory and biophysical applications*, Entropy, Lincoln, Massachusetts (1987)

- Potter, M. C. and Wiggert, D. C. *Mechanics of fluids*, 2<sup>th</sup> ed. Prentice Hall. New Jersey (1997)
- PROCCA-09: Alhama F. y Del Cerro Velázquez F., *Programa de conducción de calor*, NAR: 08/2005/544, © 2004 2009 UPCT (2005)
- PRODASIM: Gómez Lopera S., Alhama F y del Cerro Velázquez F., *Programa de diseño de aletas simples*, NAR: 08/2005/544, © UPCT (2005)
- Pspice 6.0. Microsim Corporation, 20 Fairbanks, Irvine, California 92718 (1994)
- Ruark A. E., Inspectional Analysis: A method which supplements dimensional analysis. *Journal of the Michell Society*, (1935)
- Runge, C. *Enc. Math. Wiss.*, (5,1). London, (1952)
- San Juan, R. *Teoría de las magnitudes físicas y sus fundamentos algebraicos (Reo. Acad. ct. Madrid 39 (1945), 11-40, 137-184, 423-461 (1946)*
- Sonin, A.A. *The physics basis of dimensional analysis*. MIT Cambridge, MA 02139 (1997)
- Soto A., Alhama F. y González-Fernández C.F. Density-driven flow and solute transport problems. A 2-D numerical model based on the network simulation method, *Computer physics communications*, 177, pp. 720-728 (2007c)
- Soto Meca A., Alhama F., González-Fernández C.F. An efficient model for solving density driven groundwater flow problems based on the network simulation method, *J. Hidrology*, 339, pp. 39-53 (2007a)
- Szirtes, T. *Applied Dimensional Analysis and Modeling*. Butterworth-Heinemann. (2007)
- Vaschy, A.: Sur les lois de similitude en physique. *Annales Télégraphiques* 19, 25-28 (1892)
- Vladimirescu A. *The spice book*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1994)
- Williams, W. On the Relation of the Dimensions of Physical quantities to Directions in Space, *Phil. Mag.*, no. 34, (1892)
- Zueco J. y Alhama F. Inverse estimation of temperature dependent emissivity of solid metals. *J of Quantitative Spectroscopy and Radiat Transf.*, 101, pp.73. (2006a)
- Zueco J. y Alhama F. Simultaneous inverse determination of temperature-dependent thermo-physical properties in fluids using the network simulation method, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 50, pp. 3234-3243 (2007)
- Zueco J., Alhama F. y González-Fernández C.F. Inverse problem of estimating time-dependent heat transfer coefficient with the network simulation method. *Commun. Numer. Meth. Eng.*, 21, pp. 39-48 (2005)
- Zueco Jordán J. *Solución de problemas inversos en conducción de calor mediante el método de simulación por redes*. Tesis doctoral, UPCT (2003)