



# *CONSTRUCCION DE CONICAS EN EL DISEÑO NAVAL*

*Alumno : Luis Andrés Alfonso Pizarro*

*Director : Sergio Amat*

*Fecha : Septiembre 2007*



## *El final.*

Sería un buen título para este proyecto final de carrera que acabo de terminar, ya que realmente es la conclusión a un ciclo de mi vida que será imposible olvidar o dejar de lado. Todo empezó en Madrid en el año más decisivo para cualquier estudiante universitario, ya que una vez aprobada la selectividad la decisión de que hacer estaba encima de la mesa y se tenía que tomar.

Decidí dejar casi toda mi vida en Madrid e irme a Cartagena a estudiar mi futuro. Una profesión que en esos momentos, al igual que ahora, no estaba en un momento de lo más espléndido pero que me llamaba mucho la atención.

Me costó centrarme ya que un chico de 18 años, fuera de su casa, sin casi control ninguno y en una residencia de estudiantes..., pero encontré personas que me animaron y no me dejaron abandonar en momento muy críticos. Hicimos una gran familia los primeros años gracias a Martín Abenza, Andrés Gómez, Pedro Rodrigo, Rafael Monaj, Emilio Tarraga y muchos más.

Después de esos años de residencia universitaria en el Alberto Colao, decidí marcharme con un grupo de amigos a vivir en una casa, ya que pensé que el momento de dar el salto y centrarme había llegado. Ese grupo lo formaron Xavier Reus, Jandro, David “el raro” y Carlos, el de Almería. Esa época me hizo centrarme mucho y ponerme un hábito de estudio muy elevado que me hizo avanzar bastante en la carrera ya que en ese año aprobé 14 asignaturas.

El siguiente cambio vino producido por quien es hoy mi mujer Marta Fernández, que la conocí y me dio alas para terminar la carrera y de ese modo salvar la diferencia que en ese momento existía, ya que ella trabajaba y yo estudiaba.

Volví a cambiar de grupo de convivencia y me fui con unos compañeros de carrera que me dieron el empujón final. Viví con ellos en la universidad 25 horas al día entre muchas risas, más cafés y horas de aularios. Me ayudó mucho que estudiáramos lo mismo ya que entre todos nos ayudamos en todas las asignaturas. El cerebro de todo era Nicolás Vicente Torres, la sensatez la ponía en dosis industriales Tania Borges, el punto de locura, diversión e irrealidad a la vida diaria la ponían Antonio Claros y Javier Torrecillas, alias “el Ned”. Luego gente también de la carrera que se unió fueron Gustavo, Ana, El Palmereño y muchas personas más. He recordado a muchas personas, seguro que menos de las que han pasado por mi vida desde aquel verano del 98, pero sé que sabrán perdonarme.

No me puedo olvidar también del periodo de universidad en la cual me he encontrado con todo tipo de profesores. No siempre los más listos y abrumadores de currículum han sido los que mas me han enseñado o transmitido. He de dar las gracias sin duda a la persona que me ha permitido y ayudado terminar esta larga maratón mi tutor de proyecto Sergio Amat.



Un capítulo o más bien un libro aparte debería crear para dar las gracias a mis padres y hermanos, aunque suene un poco típico, pero que importantes son en mi vida. Me han visto reír, también llorar, llevarme alegrías y decepciones pero sin ellos seguramente no estaría en el lugar que me encuentro actualmente, un buen lugar, seguro.

Por último y no por ello menos importante dar las gracias a la familia de mi mujer y a mi mujer, claro está. Ella ha sido la más fiel y persuasiva persona que me ha llevado a no dejar de lado *el final*.

San Juan, Verano del 2007



# INDICE

1. Carta de agradecimiento - <i>El Final</i> - .....	Pág. 1
2. Índice .....	Pág. 3
3. Introducción .....	Pág..5
4. Curvas Nurbs .....	Pág.. 9
4.1 Nudos .....	Pág.. 9
4.2 Puntos de Control .....	Pág.. 11
4.3 Ejemplo .....	Pág.. 14
4.4 Algoritmo .....	Pág.. 16
5. Superficies Nurbs .....	Pág.. 17
5.1 Ejemplo .....	Pág.. 19
5.2 Algoritmo .....	Pág.. 20
6. Círculos y Cónicas .....	Pág.. 21
6.1 Varias formas de representar una cónica .....	Pág.. 21
6.2 Puntos de Control Infinitos .....	Pág.. 27
6.3 Ejemplo .....	Pág.. 29
6.4 Construcción de Círculos .....	Pág.. 30
6.5 Ejemplo nº1 .....	Pág.. 31



6.6 Ejemplo nº2 .....	Pág.. 33
6.7 Ejemplo nº3 .....	Pág.. 34
6.8 Ejemplo nº4 .....	Pág.. 36
6.9 Ejemplo nº5 .....	Pág.. 37
6.10 Algoritmo .....	Pág.. 38
6.11 Construcción de Cónicas .....	Pág.. 41
6.12 Algoritmo nº 1 .....	Pág.. 43
6.13 Algoritmo nº2 .....	Pág.. 46
6.14 Clasificación dl tipo de cónicas y modo de conversión.	Pág.. 48
6.15 Otros círculos de mayor orden .....	Pág.. 53
6.16 Ejemplo nº1 .....	Pág.. 53
6.17 Ejemplo nº2 .....	Pág.. 54
6.18 Ejemplo nº3 .....	Pág.. 55
7. Bibliografía .....	Pág.. 57



# P.F.C

## 3.- INTRODUCCIÓN

La definición del casco de un buque es de una importancia enorme por los diferentes aspectos que une en si su diseño, elaboración y construcción. En su fase de elaboración engloba numerosos aspectos muy importantes para la vida del buque en función de su explotación, aguas sobre las que faenará, diferentes tipos de cargas que deberá transportar, distancia de las travesías a desarrollar, etc. Todo ello confluye en dos partes verdaderamente importante a la hora del diseño final la parte Hidrodinámica ( ciencia la cual estudia la dinámica de los fluidos no compresibles, en nuestro caso el agua ) y la Aerodinámica ( o componente de la resistencia que sufre un cuerpo al moverse a través del aire en la dirección de la velocidad relativa entre le aire y el cuerpo)

En resumen, desde el punto de vista naval se puede resumir como que la hidrodinámica es la parte en contacto con el agua ( obra viva del casco del buque ) y la aerodinámica es la parte del casco que no se encuentra en contacto con el agua ( obra muerta del casco del buque ). ( Véase la fotografía del buque oceanógrafo Hespérides ).



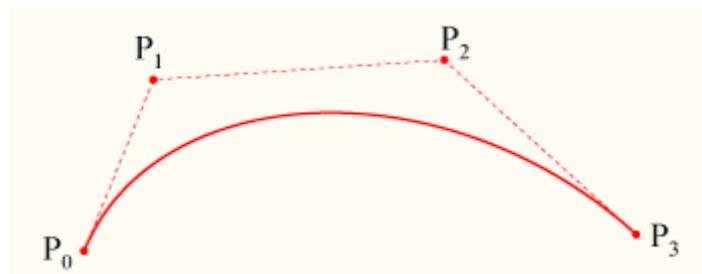
(Fotografía 1.1; Obra viva y Obra muerta )



El estudio del diseño tiene una evolución que viene generada por la necesidad de ir mejorando e ir definiendo con mayor exactitud los bocetos de creación. Por este motivo antes de utilizar las curvas NURBS se utilizaban las curvas Bezier. Son curvas más sencillas. Las curvas de Bezier fueron publicadas, por primera vez en 1962 por el ingeniero de origen francés Pierre Bezier, que las usó posteriormente en el diseño de las diferentes partes de los cuerpos de un automóvil, en sus años de trabajo en la Renault. Las curvas fueron desarrolladas por Paúl de Casteljaou usando el algoritmo que lleva su nombre. Se trata de un método numéricamente estable para evaluar las curvas de Bezier.

La idea de definir geoméricamente las formas no es demasiado compleja: un punto del plano puede definirse por coordenadas. Por ejemplo, un punto A tiene unas coordenadas  $(x_1, y_1)$  y a un punto B le corresponde  $(x_2, y_2)$ . Para trazar una recta entre ambos basta con conocer su posición.

Si en lugar de unir dos puntos con una recta se unen con una curva, surgen los elementos esenciales de una curva Bezier: los puntos se denominan nudos o puntos de anclaje.



( Dibujo 1.2; Curva por cuatro puntos )

Las propiedades más elementales de las curvas Bezier son :

1. Interpolación ( curva pasa por ) de puntos extremos: entre interpolación y aproximación.
2. Forma paramétrica.
3. Suavidad, según empalme de varios segmentos.
4. No oscilaciones.
5. No local: funciones de mezcla son no nulas en todo el rango del parámetro.
6. Fácil de calcular ( forma matricial ).
7. In variancia afín: Transformada de una curva definida por unos puntos de control, es curva definida por puntos de control transformados.
8. Si los puntos de control están en una recta, la curva Bezier es una línea recta.

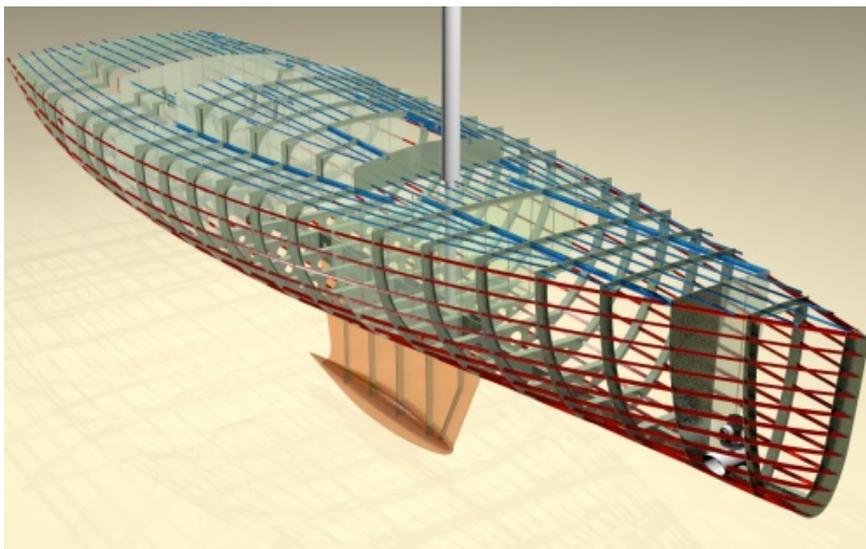
Los avances a la hora de utilizar el uso de las superficies NURBS y de los avances en los programas de diseño naval que se utilizan, han llevado a realizar una recreación tridimensional del buque, es decir que introduciendo un determinado numero de coordenadas y creando unas superficies básicas, no tenemos el porqué tirar de visión



espacial para imaginarnos como quedaría el diseño final de buque, sino que se puede ver el resultado final, frente al tradicional uso de las dos dimensiones.

Actualmente se lleva a cabo el modelizado del casco de un buque mediante dos técnicas, con el modelo de alambre, el cual queda definido desde un punto de vista estructural ya que se quedan vistas las vagras, cuadernas y demás elementos estructurales, y el modelo mediante una o varias superficies tridimensionales. Si nosotros cortamos el casco por planos paralelos al eje longitudinal del barco obtenemos las cuadernas. Estas curvas pertenecen al casco del buque y modelizamos las líneas del buque en cuanto se consiguen superficies que apoyen en esas cuadernas. ( En el dibujo siguiente aparecen en color gris, perpendiculares al sentido de avance normal de un barco ).

Lo mismo ocurre si en vez de cortar el buque con un plano en sentido longitudinal lo hacemos con planos paralelos al plano base del buque, obtendríamos unas curvas denominadas líneas de agua.( en el dibujo siguiente aparece en color rojo paralelo al plano del suelo ).



( Dibujo 1.3; Líneas de agua y cuadernas del casco de un velero )

De este modo se recreaba el casco de un buque utilizando las cuadernas (el número en función del grado de definición que quisiéramos), líneas de agua ( el número en función del grado de definición que quisiéramos ) y el perfil ( el corte del buque por la sección media ). Pero las formas del buque han de ser lisas, es decir no presentar bollos o barrigas que modificasen el comportamiento tanto hidrodinámico como aerodinámico del buque, perjudicando al avance del buque, al aumentar la resistencia, con todos los problemas que ello conllevaría.

En un modelo de buque definido por cuadernas y líneas de agua si nos encontramos con este problema deberíamos añadir mas numero de cuadernas o líneas de agua en la zona menos lisa ó “abollada” para que se alisara su curvatura y fuera mas



suave, mientras que si la forma del casco viene definida por una superficie se puede retocar de manera matemática ( Gauss ).

El único inconveniente de usar las superficies para diseñar el casco es que son mas difíciles de controlar, ya que en un modelo de alambre sabes que pasará por los puntos de las cuadernas, mientras que al apoyar una superficie en esas cuadernas, la sección de la superficie por el plano que contiene a la cuaderna, no dará exactamente la cuaderna ( siempre se usan tolerancias ).

Además las secciones cónicas y los círculos juegan un papel fundamental en las aplicaciones de dibujo por ordenador mediante CAD. Indudablemente una de los mejores argumentos de las NURBS es su capacidad de precisión en la representación de secciones cónicas y círculos, así como curvas de formas libres y superficies. Se ha de asumir un conocimiento de las cónicas y círculos. El propósito de parte de este proyecto conlleva su estudio enmarcado en el trabajo en su representación mediante curvas NURBS.



#### 4.- CURVAS NURBS

¿Qué significa NURBS? Son las siglas en ingles de **Non Uniform Rational B-Splines**.

Es una herramienta para la representación y diseño de la geometría y se generan gracias a ellas las curvas y superficies que mejor modelizan el casco de un buque.

Algunas de las razones para utilizar las curvas NURBS en el diseño naval son :

1. Ofrece una representación matemáticas para siluetas.
2. Proporciona la flexibilidad para diseñar a lo largo de la silueta.
3. Puede evaluar bastante rápido los algoritmos.
4. Son invariantes afines muy buenas para transformaciones.
5. Son grandifunciones de las B-Spline y las curvas Bezier.

Las curvas NURBS vienen definidas de la siguiente forma :

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u)w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u)w_i} \quad \left\{ \begin{array}{l} w_i = \text{pesos} \\ P_i = \text{Puntosdecontrol} \\ N_{i,k} = \text{BSpline} \end{array} \right. \quad a \leq u \leq b$$

En donde el  $P_i$  son los puntos de control ( formando un polígono de control ), el  $w_i$  son los pesos y el  $N_{i,k}$  son los pth-ángulos B-Spline, funciones básicas.

#### 4.1 NUDOS

La relación para conseguir el número de nudos ( número de puntos de control  $m=n+k+1$  ). La secuencia de los nudos en el vector nudo  $v$  es :  $t_i \leq t_{i+1}$ .

Hecha esta secuencia para la representación en el intervalo  $[t_i, t_{i+1})$  para el cálculo del segmento de la silueta.

Para las superficies NURBS, los parámetros relativos en un intervalo no cuentan los mismos para toda la silueta del segmento. El espaciado de los nudos no es uniforme, no es periódico en el vector nudo de la forma.

$$U = \{a, \dots, u, t_{k+1}, \dots, t_{m-k-1}, b, \dots, b\}$$



$(a,b) \rightarrow$  Con multiplicidad de  $(k+1)$

Mezclando las funciones tienen las siguientes propiedades:

1.  $N_{i,k}(u) \geq 0$  para todo  $i,k,u$ .

Resultado de casco convexo  $\rightarrow$  Puntos de control se construye para la definición de una silueta definida por NURBS.

2.  $N_{i,k}(u) = 0$ , si  $u$  no está  $[t_i, t_{i+k+1}]$

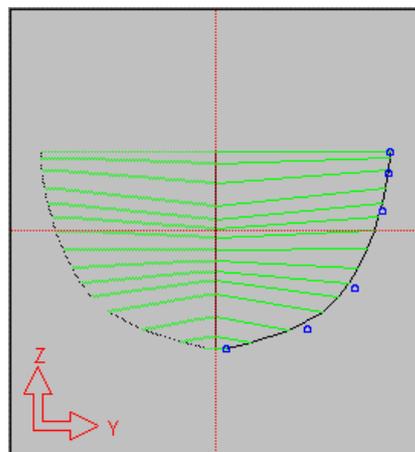
Muestra, que  $k+1$  secuencia de los puntos de control definido por el segmento de una silueta y un punto de control está complicado  $k+1$ .

3. Si  $u$  en  $[t_i, t_{i+1})$ , no encuentra el mezclado de funciones  $N_{i-k,k}(u), \dots, N_{i,k}(u)$

4.  $\sum_{j=i-k}^i \{N_j, k(u)\} = \sum_{i=0}^n \{N_{i,k}(u)\} = 1$

5. En el caso de multiplicar nudos 0/0.

En el dibujo de abajo, están definidos los vértices del polígono de control de una B-Spline mediante cuadrados azules, el cual simula la cuaderna maestra de un buque, y las líneas a puntos que los unen forman el polígono de control. La relación existente entre la posición de los vértices y la forma de la curva simulando una cuaderna maestra la dan las funciones base. Moviendo los vértices del polígono, o puntos de control, se pueden cambiar la forma de la curva.



( Dibujo 2.1; Cuaderna maestra del casco )

Una curva B-Spline lleva asociado además de un polígono de control, una serie de nudos, cuya posición marca la posición de los vértices del polígono de control. Estos nudos suelen colocarse equiespaciados en  $u$  a lo largo de la curva, es decir  $0 < u < 1$ .



Curiosamente tiene un carácter matemático y físico los nudos, ya que matemáticamente nos muestra el principio y el final de los tramos que forman las curvas, y físicamente se ve la relación entre estos puntos y los puntos en los que se apoyaban unos pesos cuando se dibujaban curvas con un junquillo de metal. Cambiando la posición de apoyo de los pesos, cambia la forma de la curva.

Se debe distinguir principalmente entre orden y grado de una B-Spline, ya que grado es el mayor exponente de los polinomios que componen las funciones base, mientras que el orden es el grado mas uno. Apoyándonos en el dibujo de la cuaderna maestra de arriba ( dibujo número 4), tenemos la función base de la siguiente forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Grado = 3

Orden = 4

Algo que hay que recalcar, ya que es de verdadera importancia es que si una curva B-Spline pasa por los extremos del polígono de control y que en estos puntos extremos  $u=0$  y  $u=1$  las tangentes coinciden con la dirección de los lados del polígono de control en estos puntos. Esto se debe a la presencia de múltiples nudos en los extremos  $u=0$  y  $u=1$  de un B-Spline.

## 4.2 PUNTOS DE CONTROL

Anteriormente he definido lo que significaban las siglas NURBS, pero en las siglas me faltaba definir lo que significa **R**ational y **N**on **U**niform. Pues cada punto de control lleva un valor asociado un valor numérico que se llama peso. Por defecto se trabaja con pesos igual a la unidad, pero matemáticamente puede cambiarse la forma de una curva variando los pesos de los puntos de control. El **N**on **U**niform significa que estos pesos pueden variar de un punto de control a otro.

En el caso de los buques esto es muy útil pues hay zonas circulares ( pantoque- que es la parte curvada del forro o carena, que une la vertical de los costados con la casi zona horizontal del fondo del buque; dibujo 5 ) , que puede ser fácilmente modelizado con esta propiedad. En general un círculo puede ser generado mediante una curva NURBS, dando los pesos no uniformes adecuados.





Las  $R_{i,k}(u)$  son las funciones racionales básicas, las funciones racionales a trozos en  $u$  pertenecientes a  $(0,1)$ .

Las  $R_{i,k}(u)$  tienen las siguientes propiedades derivadas de la ecuación resultante y las correspondientes propiedades de la  $N_{i,k}(u)$ :

1. No puede ser negativo :  $R_{i,k}(u) \geq 0$ , para todo  $i,p$  y  $u \in [0,1]$ .
2. Divide en partes a la unidad :  $\sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) = 1$  para todo  $u \in [0,1]$ .
3.  $R_{0,p}(0) = R_{n,p}(1) = 1$
4. Para  $p > 0$ , todo  $R_{i,p}(u)$  obtendría exactamente un máximo en el intervalo  $u \in [0,1]$
5. El soporte local :  $R_{i,p}(u) = 0$  para  $u \notin (u_i, u_{i+p+1})$ . Además, en cualquier intervalo dado el nudo, a la mayoría de  $p+1$  del  $R_{i,p}(u)$  es poco cero.
6. Todas las derivadas de  $R_{i,p}(u)$  existen en el interior de un nudo de intervalo, donde es una función racional con denominador no cero. Un nudo  $R_{i,p}(u)$  es  $p$ - $k$  veces continuamente diferenciable, donde  $K$  es la multiplicidad del nudo.
7. Si  $w_i = 1$ , para todo  $i$ , entonces  $R_{i,p}(u)$  es igual a  $N_{i,p}(u)$  para todo  $i$ , los  $N_{i,p}(u)$  son casos especiales de el  $R_{i,p}(u)$ . De hecho, para cualquier  $a$  diferente a cero, si  $w_i$  es igual a “ $a$ ” para todo  $i$ , entonces  $R_{i,p}(u)$  es igual a  $N_{i,p}(u)$  para todo  $i$ .
8.  $C(0) = P_0$  y  $C(1) = P_n$
9. Affine invariable : una transformación afín se aplica a las curvas por aproximación a los puntos de control. Las curvas NURBS son poco variables bajo el punto de vista de proyecciones, un hecho el cual es muy importante desde el punto de vista de los gráficos de los ordenadores.
10. Fuertemente abombada la propiedad de la cáscara: Si  $u \in [u_i, u_{i+1})$ . Luego  $C(u)$  miente dentro de las cáscara convexa de los puestos de control  $P_{i-p}, \dots, P_i$ , donde  $C(u)$  para  $u \in [1/4, 1/2)$ .
11.  $C(u)$  es infinitamente diferenciable en el interior de los nudos SPAN y es  $p-k$  veces diferenciable en un nudo de multiplicidad  $K$ .



12. La variación disminuye la propiedad: Ningún plano tiene mas intersecciones con la curva que con el polígono de control ( reemplace el plano de palabra, con línea para curvas de dos dimensiones).
13. Una curva NURBS con un nudo no interior es una curva racional Bezier, desde el  $N_{i,p}(u)$  disminuye para los  $B_{i,p}(u)$ . Esto significa que las curvas NURBS contienen B-Spline poco racional y curvas racionales Bezier como las causas especiales.
14. Aproximación local: Si el punto de control  $P_i$  es movido, o el peso  $w_i$  es cambiado, ello afecta solo a aquella porción de el intervalo de la curva u perteneciente a  $(u_1, u_{i+p+1})$ .

Las curvas B-Spline serán curvas paramétricas  $x=g(u)$ ,  $y=g(u)$ ; En el caso de un buque, el uso de coordenadas paramétricas es imprescindible pues existen cuadernas del buque que tienen mas de una ordenada para la misma abscisa como pasa en las áreas cercanas a un bulbo. Una misma curva B-Spline estará compuesta por varios tramos de curvas de las mismas características, que serán continuas en curvatura en sus puntos de unión. El grado de estas curvas estará relacionado también con las funciones base.

### 4.3 EJEMPLO

Computamos el punto en la curva racional de B-Spline en  $u=1$ . Ahora u está en el intervalo del nudo.

$$U = \left\{ \underbrace{0,0,0}_{p+1}, 1, 2, \underbrace{3,3,3}_{p+1} \right\} \text{ (Nudos)}$$

$$\{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\} = \{1, 4, 1, 1, 1\} \text{ (Pesos)}$$

$$\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\} = \{(0,0), (1,1), (3,2), (4,1), (5,-1)\} \text{ (Puntos de control)}$$

### RESOLUCION

Al querer conocer la proyección de la curva se aplica la formula.

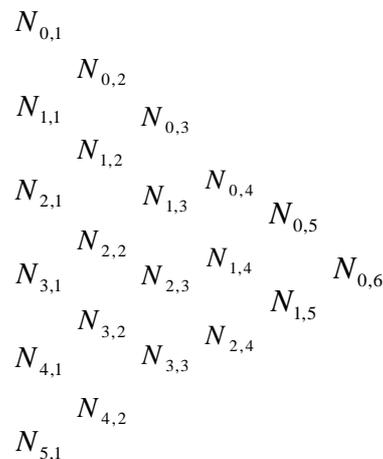
$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,k}(u) P_i$$



De esta fórmula conozco  $P_i$ , que son los puntos de control, también  $R_{i,k}(u)$ , que viene definido por la formula que aparece a continuación.

$$R_{i,k}(u) = \frac{N_{i,k}(u)w_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u)w_i}$$

De esta formula conozco los pesos y los nudos se deben calcular de la forma siguiente.



En el enunciado pone que “u” se encuentra en  $[u_3, u_4)$ , por tanto en donde será diferente a cero en la pirámide de arriba será en  $N_{3,0}, N_{2,1}, N_{3,1}, N_{1,2}, N_{2,2}, N_{3,2}$ .

Calculo los diferentes  $N_{i,p}$  mediante la formula :

$$N_{i,k} = \frac{u - t_i}{t_{i+k} - t_i} \cdot N_{i,k+1}(u) + \frac{t_{i+k+1} - u}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \cdot N_{i+1,k-1}$$

Partimos de que  $N_{3,0} = 1$ , por el enunciado  $[u_3, u_4)$ . El resto es sustituir los valores de “i” y “k”, colocar el valor.

$$N_{2,1} = \frac{0-0}{0-0} \cdot 0 + \frac{1-0}{1-0} \cdot 1 = 1$$

Así se van obteniendo sucesivamente.

$$N_{3,1} = 0; N_{1,2} = 1/2; N_{2,2} = 1/2; N_{3,2} = 0$$

Mediante las coordenadas homogéneas  $P_i = (x_i, y_i, z_i) \Rightarrow P_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$



$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i^w$$

Al depender de  $N_{i,p}(u)$  y de  $P_i^w$ , si uno de los dos es cero, el valor final será cero. Al ser de grado 2 elegimos los puntos que son cero en el grado 2, es decir, (1,1) y (3,2).

$$P_1 \equiv (1,1) \rightarrow P_1^w = (w_1 = 4) = (4x1, 4x1, 4) = (4,4,4)$$

$$P_2 \equiv (3,2) \rightarrow P_2^w = (w_2 = 1) = (3x1, 2x1, 1) = (3,2,1)$$

$$C^w(1) = \frac{1}{2} P_1^w + \frac{1}{2} P_2^w = \frac{1}{2} (4,4,4) + \frac{1}{2} (3,2,1) = \left(\frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}\right)$$

La proyección se obtiene finalmente dividiendo el valor de  $w = (5/2)$ , entre “x” e “y”.

$$C(1) = (7/5, 6/5)$$

#### 4.4 ALGORITMO

CurvePoint (n,p,U,  $P_w$ , u,C)

{/\* Compute point on rational B-Spline curve\*/

/\* Input : n,p,U,  $P_w$ , u \*/

/\* Output : C \*/

span = FindSpan(n,p,u,U);

BasisFuns (span,u,p,U,N);

$C_w = 0,0$ ;

For (j=0;<p;j++)

$C_w = C_w + N[j] * P_w$  [span-p+j];

$C = C_w / w$ ; /\*Divide by weight\*/



## 5.-SUPERFICIES NURBS

Las superficies que nos dan un mejor moldeado del casco de un buque son las denominadas superficies NURBS, son unas siglas que vienen de **Non Uniform Rational B-Splines**. La base de estas superficies son unas curvas planas denominadas B-Splines y es necesario que se entiendan las curvas para saber el funcionamiento de las superficies NURBS.

Una curva B-Spline es una curva definida a partir de un polígono de vértices denominado polígono de control, a la que se le da un esquema de interpolación que relaciona los vértices del polígono con la curva. Existen muchas curvas que tienen asociado el mismo polígono de control, pero lo que hace diferentes ó únicas a las B-Spline es que la relación entre la curva y el polígono de control es una familia de polinomios o funciones base B-Spline. Las curvas B-Spline son curvas paramétricas  $x=g(u)$ ,  $y=g(u)$ .

En el caso de los buques, el uso de coordenadas paramétricas es imprescindible ya que existen cuadernas del buque que tienen mas de una ordenada para la misma abscisa, lo que ocurre normalmente en las áreas cercanas a la aleta (definición de aleta: Partes posteriores de los costados que convergen y cierran el casco por atrás formando la popa) y a la amura ( definición de amura: Partes delanteras de los costados que, convergen hacia la roda, formando la proa) del casco.



(Dibujo 3.1; Parte del casco definida de aleta, costado y anura )

Una misma curva B-Spline estará compuesta por varios tramos de curvas de las mismas características, que serán continuas en curvatura en sus puntos de unión. El grado de estas curvas estará relacionado también con las funciones base.



El parámetro “u” crece monótonamente de un extremo a otro de la curva, se adimensional entre 0 y 1, y no es indicativo de la distancia a lo largo de la curva, aunque puede establecerse una relación matemática ente la distancia y “u”. El problema que existe al utilizar las coordenadas paramétricas es que si queremos saber que valor “y” corresponde a un valor “x”, hay que obtener previamente el valor “u”, y esto puede ser una complicación.

La definición matemática de las superficies NURBS viene definido de la siguiente manera:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}} \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

Desglosado de la siguiente manera:  $P_{i,j}$  forma una red bidireccional de control,  $w_{i,j}$  son los pesos,  $N_{i,p}(u)$  y  $N_{i,q}(v)$  son las funciones de la base B-Spline definidas en los vectores del nudo.

$$U = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}$$

$$V = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\}$$

Donde  $r=n+p+1$  y  $s=m+q+1$

Introduciendo las partes de las funciones básicas racionales, la ecuación de la superficie puede escribirse de esta manera:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v)P_{i,j}$$

Las propiedades de las superficies NURBS se pueden resumir en las siguientes cuestiones:

1. No negativo :  $R_{i,j}(u, v) \geq 0$ , para todo  $i, j, u$  y  $v$
2. La partición de la unidad :  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) = 1$ , para todo  $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$ .



3. Soporte local:  $R_{i,j}(u,v) = 0$  si  $(u,v)$  está fuera del rectángulo dado por  $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$ .
4. Extrema: si  $p > 0$  y  $q > 0$  entonces  $R_{i,j}(u,v)$  obtiene un máximo.
5.  $R_{0,0}(0,0) = R_{n,0}(1,0) = R_{0,m}(0,1) = R_{n,m}(1,1) = 1$ .
6. La diferenciabilidad interior para los rectángulos forjados por la  $u$  y las líneas del nudo y todas las derivadas parciales de  $R_{i,j}(u,v)$  exista. En un nudo de la  $u$  ( el nudo  $v$ ) está  $p-k$  ( $q-k$ ) por diferenciabilidad en la dirección  $u$  ( $v$ ), donde la  $k$  es la multiplicidad del nudo.
7. Si para todo  $w_{i,j} = a$  para  $0 \leq i \leq n$ , para  $0 \leq j \leq m$ , y  $a \neq 0$ , entonces  $R_{i,j}(u,v) = N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$  para todo  $i,j$ .
8. El punto de esquina de interpolación :  
 $S(0,0) = P_{0,0}, S(1,0) = P_{n,0}, S(0,1) = P_{0,m}, S(1,1) = P_{n,m}$
9. Invariable afín. Una transformación afín se aplica a superficies mediante los puntos de control.
10. Propiedad convexa del casco.
11. Modificación local: Si  $P_{i,j}$  se mueve o  $w_{i,j}$  es cambiado, ello afecta la forma de la superficie solamente en el rectángulo  $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$ .
12. No racional B-Spline, Bezier y superficies racionales Bezier son casos especiales de las superficies NURBS.

### 5.1 EJEMPLO

$$S^w(u,v) = \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^4 N_{i,2}(u)N_{j,2}(v)$$

$$U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$$

$$V = \{0,0,0,1,2,3,3,3\}$$

### RESOLUCION

Evaluando la superficie en  $(u,v)=(5/2,1)$ . Entonces  $u \in [u_4, u_5)$  y  $v \in [v_3, v_4)$

$$N_{2,2}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{8}; N_{3,2}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{6}{8}; N_{4,2}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

Y obteniendo:

$$N_{1,2}(1) = \frac{1}{2}; N_{2,2}(1) = \frac{1}{2}; N_{3,2}(1) = 0$$

Ahora se asume que:



$$[P_{i,j}^w] = \begin{bmatrix} (0,2,4,1) & (0,6,4,2) & (0,2,0,1) \\ (4,6,8,2) & (12,24,12,6) & (4,6,0,2) \\ (4,2,4,1) & (8,6,4,2) & (4,2,0,1) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i = 2,3,4 \\ j = 1,2,3 \end{array}$$

Entonces obtenemos:

$$S^w\left(\frac{5}{2}, 1\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} (0,2,4,1) & (0,6,4,2) & (0,2,0,1) \\ (4,6,8,2) & (12,24,12,6) & (4,6,0,2) \\ (4,2,4,1) & (8,6,4,2) & (4,2,0,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{54}{8}, \frac{98}{8}, \frac{68}{8}, \frac{27}{8}\right)$$

$$S^w\left(\frac{5}{2}, 1\right) = \left(2, \frac{98}{27}, \frac{68}{27}\right)$$

## 5.2 ALGORITMO

SurfacePoint(n,p,U,m,q,V, P<sub>w</sub>, u,v,S)

{/\*Compute point on rational B-Spline surface\*/

/\*Input: n,p,U,m,q,V, P<sub>w</sub>, u,v\*/

/\*Output: S\*/

uspan = FindSpan (n,p,u,U);

BasisFuns(uspan,u,p,U, N<sub>u</sub>);

vspan = FindSpan(m,q,v,V);

BasisFuns(vspan,v,q,V, N<sub>v</sub>);

For (l=0;l<=q;l++)

{

temp[1]=0.0;

for(k=0;k<=p;k++)

temp[1]=temp[1]+ N<sub>u</sub> [k]\* P<sub>w</sub> [uspan-p+k][vspan-q+1];

}

S<sub>w</sub> = 0.0;

For (l=0;l<=q;l++)

S<sub>w</sub> = S<sub>w</sub> + N<sub>v</sub> [l]\*temp[1];

S = S<sub>w</sub> / w;

}

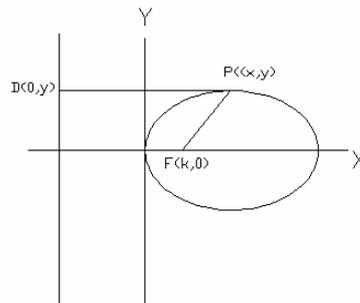


## 6.- CIRCULOS Y CONICAS

### 6.1 VARIAS FORMAS DE REPRESENTAR UNA CONICA.

Hay varios caminos para representar las cónicas. Se puede empezar dando una definición geométrica, y entonces lo usamos derivando la ecuación implícita de las cónicas en el plano XY. Una cónica es el lugar geométrico de un punto moviéndose tal que su distancia desde un punto fijo ( foco ) es proporcional a su distancia a una línea fija ( directriz ) como se ve en el dibujo 3.1.

$$Conic = \left\{ P \left| \frac{PF}{PD} = e \right. \right\}$$



( Dibujo 3.1; Definición cónica mediante el foco y la directriz)

Donde “e” es una constante de proporcionalidad llamada “excéntrica”. La “excentricidad” determina el tipo de cónica.

$$e = \begin{cases} = 1 \rightarrow \text{Parabola} \\ < 1 \rightarrow \text{Elipse} \\ > 1 \rightarrow \text{Hiperbola} \end{cases}$$

Si la directriz escoge el eje  $x=0$  y el foco es  $F=(k,0)$ , entonces:

$$e = \frac{\sqrt{(x-k)^2 + y^2}}{|x|}$$

Donde  $|x|=PD$  y  $D=(0,y)$ . Reordenando las ecuaciones obtenemos:

$$(1-e^2)x^2 - 2kx + y^2 + k^2 = 0$$



Una cónica que está en el plano XY está representada por una ecuación de segundo grado.

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2fx + 2gy + c = 0$$

$$\alpha = ab - h^2$$

$$D = \begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & g \\ f & g & c \end{vmatrix}$$

Entonces usando  $\alpha$  y  $D$ , tenemos una completa clasificación de las cónicas.

$$\alpha = 0 \rightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow \text{Parabola}$$

$$\alpha = 0 \rightarrow D = 0 \rightarrow b \neq 0 \rightarrow g^2 - bc > 0 \Leftrightarrow 2 \text{ rectas reales paralelas}$$

$$\alpha = 0 \rightarrow D = 0 \rightarrow b \neq 0 \rightarrow g^2 - bc = 0 \Leftrightarrow 2 \text{ rectas coincidentes paralelas}$$

$$\alpha = 0 \rightarrow D = 0 \rightarrow b \neq 0 \rightarrow g^2 - bc < 0 \Leftrightarrow 2 \text{ rectas imaginarias paralelas}$$

$$\alpha = 0 \rightarrow D = 0 \rightarrow b = h = 0 \rightarrow f^2 - ac > 0 \Leftrightarrow 2 \text{ rectas reales paralelas}$$

$$\alpha = 0 \rightarrow D = 0 \rightarrow b = h = 0 \rightarrow f^2 - ac = 0 \Leftrightarrow 2 \text{ rectas coincidentes paralelas}$$

$$\alpha = 0 \rightarrow D = 0 \rightarrow b = h = 0 \rightarrow f^2 - ac < 0 \Leftrightarrow 2 \text{ rectas imaginarias paralelas}$$

$$\alpha > 0 \rightarrow D = 0 \Leftrightarrow \text{Punto elipse}$$

$$\alpha > 0 \rightarrow D \neq 0 \rightarrow -bD > 0 \Leftrightarrow \text{Elipse Real}$$

$$\alpha > 0 \rightarrow D \neq 0 \rightarrow -bD < 0 \Leftrightarrow \text{Elipse Imaginaria}$$

$$\alpha < 0 \rightarrow D = 0 \Leftrightarrow 2 \text{ Rectas intersección}$$

$$\alpha > 0 \rightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow \text{Hipérbola}$$

La forma de una transformación simple, se puede rehacer de una forma estándar. Para  $e \neq 1$ , se puede utilizar la transformación esta:

$$x' = x - \frac{k}{1-e^2} \quad y' = y$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$a = \frac{ke}{1-e^2} \quad b^2 = a^2(1-e^2)$$

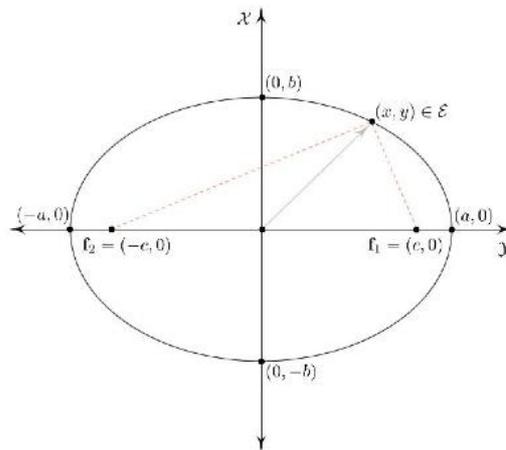


Hay dos casos:

1. Elipse:  $e < 1$  implica que  $a, b > 0$ , entonces:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b > 0$$

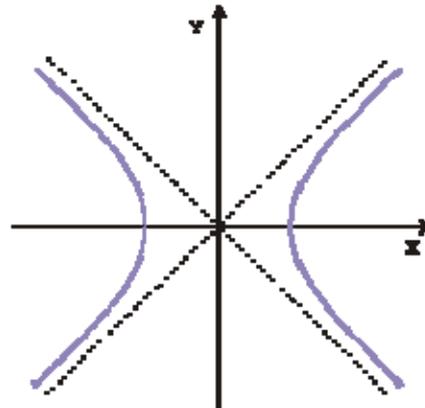
En esta posición el origen es el centro de la elipse. El eje X es el eje mayor mientras que el eje Y es el eje menor. Los puntos  $(-a, 0), (a, 0), (0, -b), (0, b)$  son los vértices. Las distancias  $a$  y  $b$  son las mayores y menores respectivamente. Si  $a=b$ , se representa un círculo.



( Dibujo 3.2; Elipse )

2. Hipérbola :  $e > 1$ ,  $a < 0$  y  $b^2 < 0$  (  $b$  es imaginario ).  $b = |b|$ .

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a, b > 0$$



**Hipérbola**

(Dibujo 3.3; Hipérbola )

En esta posición el origen es el centro de la hipérbola. El eje X es el eje transversal, y el eje Y es el llamado eje imaginario.

Similarmente,  $e=1$  y las transformaciones

$$x' = x - \frac{1}{2}k \quad y' = y$$

$$y^2 = 4ax \quad a = \frac{1}{2}k > 0$$

con foco  $F=(a,0)$  y la directriz  $x+a=0$ . La parábola no tiene centro. En posición normal su eje x, el origen es el vértice y “a” es su distancia focal.

Dos representaciones paramétricas de las cónicas son importantes en las aplicaciones CAD/CAM: racionales y máximos inscritos en áreas. La ecuación racional:

$$x(u) = a \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$y(u) = b \frac{2u}{1+u^2} \quad -\infty < u < \infty$$

$$\frac{a^2 \left( \frac{1-u^2}{1+u^2} \right)^2}{a^2} + \frac{b^2 \left( \frac{2u}{1+u^2} \right)^2}{b^2} = \frac{1-2u^2+u^4+4u^2}{1+2u^2+u^4} = 1$$



Hay que fijarse que  $(x(0),y(0))=(a,0)$ ,  $(x(1),y(1))=(0,b)$  y el vértice  $(-a,0)$  es aproximación en el límite como  $u \rightarrow -\infty$  ó  $u \rightarrow \infty$ . Las ecuaciones

$$x(u) = a \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$y(u) = b \frac{2u}{1+u^2} \quad -\infty < u < \infty$$

representan una hipérbola en posición estándar. El intervalo  $u \in (-1,1)$  corresponde a la rama derecha; la rama izquierda es trazada por  $u \in (-\infty,-1)$  y  $u \in (1,\infty)$ .  $C(-1)$  y  $C(1)$  representan los puntos en el infinito. Finalmente los parámetros de la parábola en posición estándar.

$$x(u) = au^2$$

$$y(u) = 2au$$

$$-\infty < u < \infty$$

Entonces  $C(u)=(x(u),y(u),0)$  es una cónica en posición estándar, insertada en el espacio Euclideo de tres dimensiones. Aplicando una matriz de  $3 \times 3$  y un vector de translación, de este modo es fácil ver que una cónica en tres dimensiones tiene la siguiente forma.

$$x(u) = \frac{a_0 + a_1u + a_2u^2}{w_0 + w_1u + w_2u^2} = \frac{\sum_{i=0}^2 a_i u^i}{\sum_{i=0}^2 w_i u^i}$$

$$y(u) = \frac{b_0 + b_1u + b_2u^2}{w_0 + w_1u + w_2u^2} = \frac{\sum_{i=0}^2 b_i u^i}{\sum_{i=0}^2 w_i u^i}$$

$$z(u) = \frac{c_0 + c_1u + c_2u^2}{w_0 + w_1u + w_2u^2} = \frac{\sum_{i=0}^2 c_i u^i}{\sum_{i=0}^2 w_i u^i} \quad -\infty < u < \infty$$



$$x_i = \frac{a_i}{w_i}$$

$$y_i = \frac{b_i}{w_i}$$

$$z_i = \frac{c_i}{w_i}$$

$$a_i = (x_i, y_i, z_i)$$

$$C(u) = \frac{w_0 a_0 + w_1 a_1 u + w_2 a_2 u^2}{w_0 + w_1 u + w_2 u^2} = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i a_i u^i}{\sum_{i=0}^2 w_i u^i}$$

$$a_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$$

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^2 a_i^w u^i$$

Las formas racionales pueden representar mejor las parametrizaciones de una cónica, en el sentido de que los valores de parámetros uniformemente espaciados pueden trazar puntos muy desinformes espaciados en la curva.

Ahora suponiendo  $C(u) = (x(u), y(u))$  es una representación paramétrica de una cónica en posición estándar. Para cada tipo de cónicas nosotros ahora tenemos funciones  $x(u), y(u)$  la cual produce una buena parametrización en el sentido que si para integrar arbitrariamente  $n$  y parámetros “a” y “b” nosotros obtenemos  $n$  parámetros igualmente espaciados.

$$a = u_1, \dots, u_n = b \quad u_{i+1} - u_i = \text{constante} \quad i = 1, \dots, n-1$$

entonces la secuencia de puntos  $C(u_1), \dots, C(u_n)$  forma el polígono  $(n-1)$ -cara  $C(u)$ , el cual corta teniendo el máximo inscrito en el área. La elipse viene dado por:



$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

$$x(u) = a \cdot \cosh u$$

$$y(u) = b \cdot \sinh u$$

$$-\infty < u < \infty$$

Una parábola paramétrica viene dada por la siguiente ecuación:

$$x(u) = au^2$$

$$y(u) = 2au \quad -\infty < u < \infty$$

Teniendo  $\{O, X, Y\}$ , como las coordenadas locales en el sistema cónica en tres dimensiones donde O es un punto, X y Y son unidades ortogonales vectoriales. Las cónicas vienen definida como:

- Elipse: donde O es el centro, X es el eje mayor y Y es el eje menor, entonces nos queda una ecuación de la siguiente forma:

$$C(u) = O + a \cos u X + b \sin u Y$$

- Hipérbola: donde O es le centro, X es el eje transversal y Y es el eje imaginario, la ecuación de la izquierda de la hipérbola es de la siguiente forma:

$$C(u) = O - a \cos u X - b \sin u Y$$

- Parábola: donde O es el vértice y X es el eje, Y es la dirección tangente de la parábola en su vértice. Entonces la ecuación de la parábola viene de la siguiente forma:

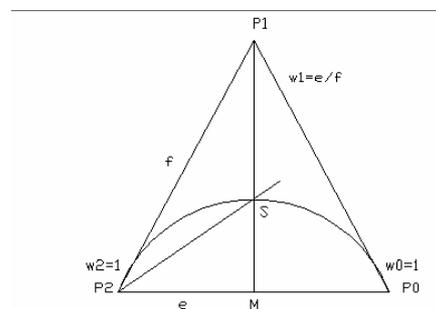
$$C(u) = O - au^2 X - 2au Y$$



## 6.2 PUNTOS DE CONTROL INFINITOS

En este punto se trata el tema de los infinitos puntos de control, un concepto el cual se usa para la construcción circular y elíptica de arcos de barrido de 180°.

La noción de un punto en el infinito es común en geometría proyectiva. El punto  $P^w = (x, z, y, 0)$  en espacio de cuatro dimensiones (x,y y z, no cero todos) se conoce como un punto en el infinito. Esto esta en el espacio de tres dimensiones mediante un vector dirección desde el origen atravesando el punto tres dimensiones.  $P_j^w = (x_j, y_j, z_j, 0)$  es un punto de control infinito de una curva  $C(u)$ . Entonces:



(Dibujo 3.4; Representación cuadrática racional Bezier de un arco menor de 180 grados)

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i^w$$

Pudiéndose escribir también de esta forma:

$$\begin{aligned} C(u) &= \frac{\left( \sum_{j \neq i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i \right) + N_{j,p}(u) \vec{P}_j}{\sum_{j \neq i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} = \\ &= \frac{\sum_{j \neq i} N_{i,p}(u) w_i P_i}{w(u)} + \frac{N_{j,p}(u) \vec{P}_j}{w(u)} = \\ &= C(u) + f(u) \vec{P}_j \end{aligned}$$

De ahí, dados fijos  $u_0$ ,  $C(u_0)$  es  $\vec{C}(u_0)$ , los cuales se extienden en la parte convexa de los puntos de control  $P_0, \dots, P_{j-1}, P_{j+1}, \dots, P_n$ , sumando a su escala de



factores no negativos del vector  $P_j$ . Al incrementar la magnitud de  $P_j$ , la curva tira hacia su dirección. Los puntos en los que  $C(u)$  toque el polígono de control en los segmentos  $P_1P_3$  y  $P_3P_4$ .  $C(u)$  es una curva cúbica con dos nudos internos claros ( multiplicidad 1 ). Los puntos en los que  $C(u)$  toca el polígono de control corresponden a  $C(u)$  evaluados en esos valores de nudos internos,

En este puntos se puede comprobar que en el sentido de proyección geométrica, no somos rigurosamente correctos diciendo que  $P^w = (x, y, z, 0)$  es un punto en el infinito de la proyección geométrica, los puntos  $(x, y, z, w)$  y  $(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w)$ ,  $\alpha \neq 0$ , son los mismos, es un punto en espacio proyectivo es lo que los matemáticos llaman una clase de equivalencia. Esto significa que  $P_j = (x_j, y_j, z_j, 0)$  y  $P_j = (x_j, y_j, z_j, 0)$  son dos representaciones del mismo punto en un espacio proyectivo.

Sin embargo al sustituir  $P_j = (x_j, y_j, z_j, 0)$  y  $P_j^* = (x_j, y_j, z_j, 0)$  resulta claramente dos curvas diferentes. Estrictamente hablando, nuestro punto de control infinito es justamente representativo de un punto proyectivo, cuyas últimas coordenadas resultan ser cero.

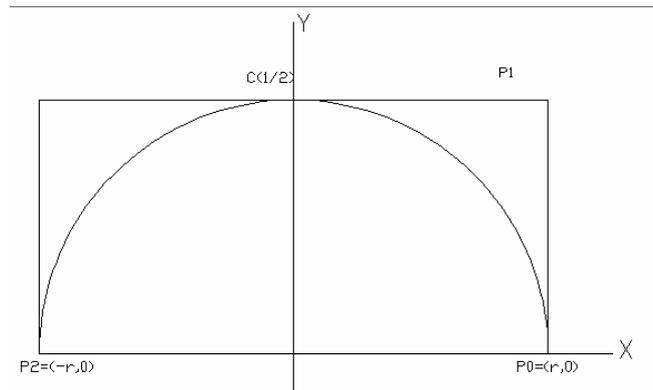
### 6.3 EJEMPLO

Representamos el semicírculo de radio  $r$ , centrado en el origen, con un punto de control infinito.  $P_0^w = (r, 0, 1); P_1^w = (0, r, 0); P_2^w = (-r, 0, 1)$ .

#### RESOLUCIÓN

$$C(u) = \frac{(1-u)^2 w_0 P_0 + u^2 w_2 P_2}{(1-u)^2 w_0 + u^2 w_2} + \frac{2u(1-u)}{(1-u)^2 w_0 + u^2 w_2} \vec{P}_1 =$$

$$= \frac{(1-u)^2 P_0 + u^2 P_2}{1-2u+2u^2} + \frac{2u(1-u)}{1-2u+2u^2} \vec{P}_1$$



(Dibujo 3.5; Definición de un semicírculo mediante puntos de control infinitos)

$$x(u) = \frac{r(1-2u)}{1-2u+2u^2} \quad y(u) = \frac{2ru(1-u)}{1-2u+2u^2}$$

Se puede verificar que  $(x(u))^2 + (y(u))^2 = r^2$  para todo  $u$ .

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = (0, r)$$

es el punto en el arco mas lejano desde el acorde  $P_0P_2$ , y la derivada en este punto,  $C'(1/2)$ , es paralelo a  $P_0P_2$ , cuando  $P_1^w$  es un punto de control infinito.

Hay que diferenciar entre punto de control infinito y pesos cero.  $w_1 = 0$  produce una delgada línea desde  $P_0$  a  $P_2$ .

$$C(u) = R_{0,2}(u)P_0, R_{2,2}(u)P_2 = \frac{(1-u)^2 P_0 + u^2 P_2}{(1-u)^2 + u^2}$$

esto es,  $R_{1,2}(u) \equiv 0$  y  $C(u)$  es una delgada línea desde  $P_0$  a  $P_2$ ; Si se piensa en nuestras curvas NURBS en términos de puntos de control homogéneos:

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_i^w$$

entonces podemos representar un punto de control infinito mediante  $P_j^w = (x_j, y_j, z_j, 0)$ , y pongo  $w_j$  a cero quedando  $P_j^w = (0,0,0,0)$ . Quizás uno debe tener cuidado distribuyendo muchos puntos individualmente, generalmente no causa problemas en B-Spline.



## 6.4 CONSTRUCCION DE CIRCULOS

La construcción de arcos circulares NURBS en general es más complicado que en principio parece, y hay varios caminos para hacerlo.

El mayor grado de representación que vamos a hacer son provechosos, por ejemplo, cuando un arco es mayor que o igual a  $180^\circ$  es deseado, sin nudos internos y sin usar los pesos negativos o puntos de control infinitos.

Sabemos como construir un arco de menos de  $180^\circ$ , y claramente podemos construir arcos de barrido, simplemente despiezando todo en arcos mas pequeños usando múltiples nudos. Cuando decidimos como hacerlo, hay cuatro consideraciones a tener en cuenta: Continuidad, parametrización, casco convexo y número de puntos de control requeridos. Para simplificar todos los ejemplos están en el plano XY, centrados en el origen y tienen de radio 1.

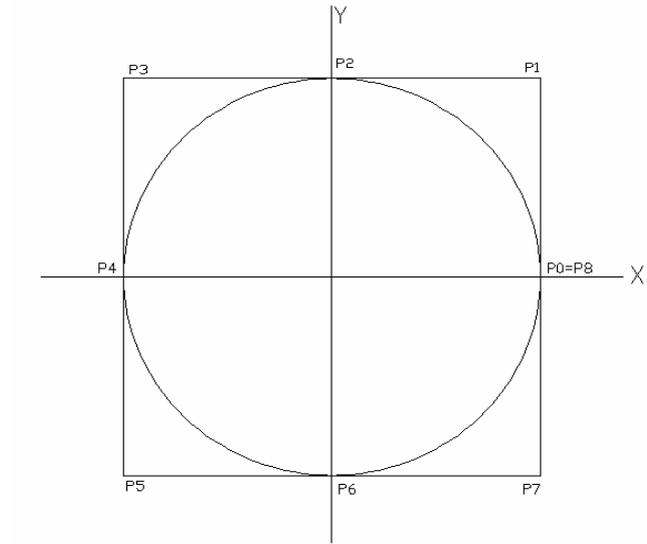
## 6.5 EJEMPLO N° 1

Un círculo completo usando un cuadrado y nueve puntos de control.

### RESOLUCIÓN

Empezamos por un arco de  $90^\circ$  en el primer cuadrante, el cual obtenemos por que sabemos como hemos dicho anteriormente que el radio era 1, entonces podemos conocer tres puntos  $\{P_i\} = \{(1,0), (1,1), (0,1)\}$  y los pesos también  $\{w_i\} = \left\{1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$ .

Entonces usando este arco 4 veces repetidas usando nudos dobles se puede obtener el círculo completo. Los nudos, pesos y puntos de control son:



(Dibujo 3.5; Polígono de control y parametrización)

$$U = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1 \right\}$$

$$\{w_i\} = \left\{ 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right\}$$

$$\{P_i\} = \{(1,0), (1,1), (0,1), (-1,1), (-1,0), (-1,-1), (0,-1), (1,-1), (1,0)\}$$

Indicar la parametrización, los puntos son marcados en el círculo; Ellos están equiespaciados igualmente. Se encuentra circunscrito en un cuadrado. Ahora consideramos continuo en  $u=1/4$  ( $u=1/2$  y  $u=3/4$  son análogos), se puede escribir de esta manera:

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,2}(u)P_i^w \quad \text{ó} \quad C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,2}(u)P_i$$

Claramente, las funciones básicas  $N_{2,2}(u)$  y  $R_{2,2}(u)$  son únicamente continuo en  $C^0$  y  $u=1/4$ .  $C^w(u)$  es también solamente continuo en  $C^0$ , el cual es, el cuarto arco parabólico en espacio homogéneo son enlazados todos alrededor del cono, y donde cada par encuentra THERE IS A CUSP. Analíticamente, esto puede ser realizando la primera derivada de  $C^w(u)$  en  $u=1/4$  desde la izquierda y derecha.



$$w\left(\frac{1}{4}\right)_{izquierda} = \frac{2}{\frac{1}{4}-0}(w_2 - w_1) = 8\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$w\left(\frac{1}{4}\right)_{derecha} = \frac{2}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}(w_3 - w_2) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

Claramente, las dos derivadas no son iguales. Asombrosamente  $C(u)$  es  $C^1$  continuo.

$$C\left(\frac{1}{4}\right)_{izquierda} = \frac{2}{\frac{1}{4}-0} \frac{\sqrt{2}/2}{1}(P_2 - P_1) = (-4\sqrt{2}, 0)$$

$$C\left(\frac{1}{4}\right)_{derecha} = \frac{2}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{2}/2}{1}(P_3 - P_2) = (-4\sqrt{2}, 0)$$

Con considerar los primeros tres criterios, esto es bastante bueno para representar un círculo completo.

## 6.6 EJEMPLO N°2

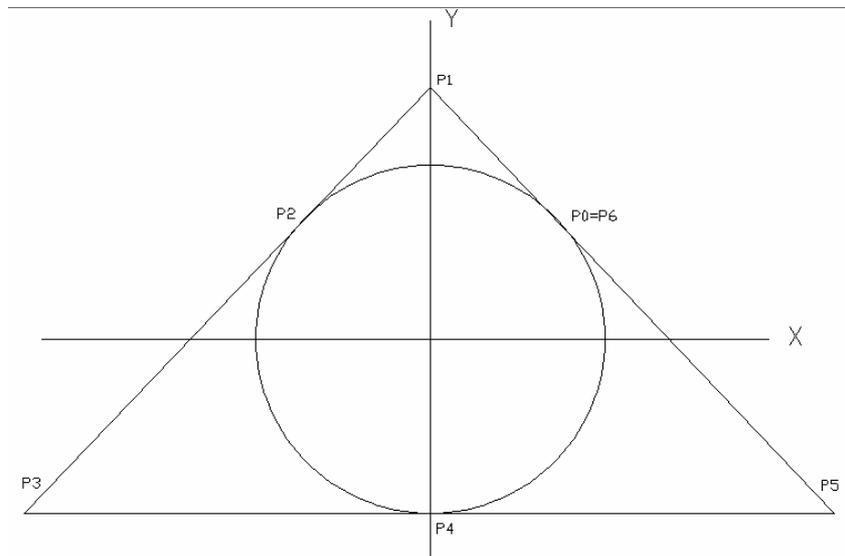
Un círculo completo usando siete puntos de control e inscrito en un triángulo

### RESOLUCIÓN

Desde un punto de vista geométrico es sencillo ver que con un arco de 120 grados, se requiere un triángulo de control el cual  $P_1P_0P_2$ , es igual que utilizar arco de 60°.

$$w_1 = \cos 60^\circ = 1/2$$

Componiendo el círculo con tres arcos podemos obtener el círculo completo ( $360^\circ/3=120^\circ$ ).



( Dibujo 3.6; Un círculo NURBS inscrito en un triángulo con 7 puntos. Polígono de control y parametrización )

$$U = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1 \right\}$$

$$\{w_i\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

$$\{P_i\} = \left\{ \left( a, \frac{1}{2} \right), (0, 2), \left( -a, \frac{1}{2} \right), (-2a, -1), (0, -1), (2a, -1), \left( a, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Donde  $a = \cos 30^\circ$ . Los puntos en el círculo están marcados para mostrar la parametrización. El casco convexo es también más flojo. Podemos verificar que  $C(u)$  es  $C^1$  continuo en  $u = \frac{1}{3}$  y  $u = \frac{2}{3}$ .

### 6.7 EJEMPLO N°3

En un arco de  $240^\circ$ : Poniendo  $w_1$  negativo en el arco complementario, usando:



$$U = \{0,0,0,1,1,1\}$$

$$\{w_i\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$$

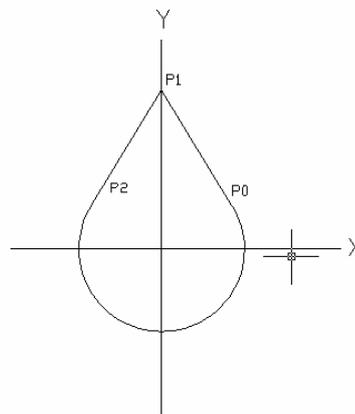
$$\{P_i\} = \left\{\left(a, \frac{1}{2}\right), (0,2), \left(-a, \frac{1}{2}\right)\right\}$$

### RESOLUCIÓN

Los pesos negativos son generalmente indeseables, porque perdemos la propiedad del casco convexo, y dividiéndolo por cero puede ocurrir cuando computamos los puntos en la curva. Es importante anotar que para el círculo y la elipse,  $w(u) > 0$  para todo  $u \in [0,1]$ . Esto sigue desde  $w_0 = w_2 = 1, |w_1| < 1$  y  $w(u) = (1-u)^2 + 2u(1-u)w_1 + u^2$ .

De este modo no hay problemas de levantarse cuando usamos el Algoritmo A4.1 para evaluar los puntos en el arco. Entonces insertamos un nudo  $u = \frac{1}{2}$ .

$$\alpha_1 = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2} \quad \alpha_2 = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$



( Dibujo 3.7; Arco de 240° usando pesos negativos. Polígono de control y parametrización )

El nuevo punto de control,  $Q_i^w$ , son:

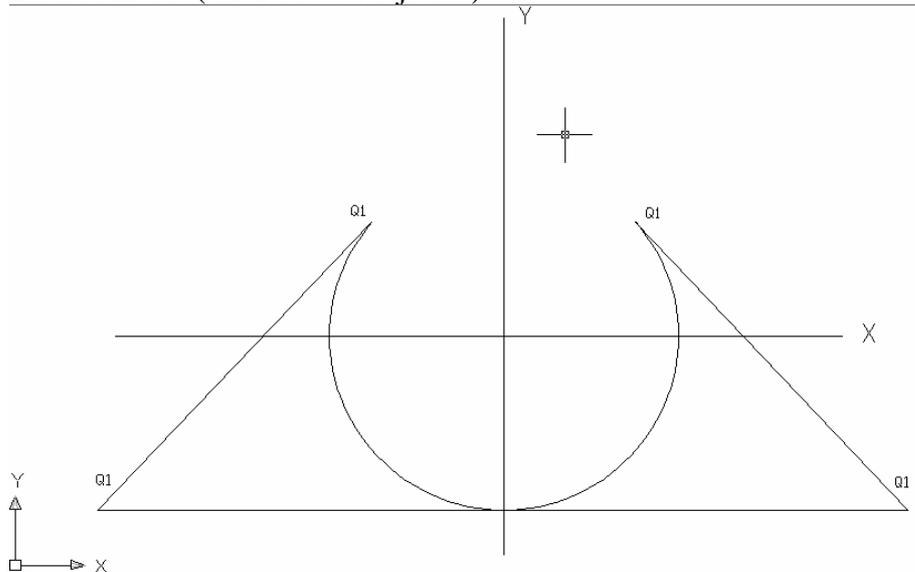
$$Q_0^w = P_0^w \quad Q_3^w = P_2^w$$



$$Q_1^w = \frac{1}{2}P_1^w + \frac{1}{2}P_0^w = \left(\frac{a}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$Q_2^w = \frac{1}{2}P_2^w + \frac{1}{2}P_1^w = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

De este modo ( viendo el dibujo 3.8)



( Dibujo 3.8; Arco . Polígono de control y parametrización )

$$U = \left\{0,0,0, \frac{1}{2}, 1,1,1\right\}$$

$$\{w_i\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right\}$$

$$\{Q_i\} = \left\{\left(a, \frac{1}{2}\right), (2a, -1), (-2a, -1), \left(-a, \frac{1}{2}\right)\right\}$$

es una representación del arco de 240° sin puntos negativos. La parametrización no es particularmente buena.  $C^w(u)$  y  $C(u)$  son  $C^2$  continuos en  $u \in [0,1]$ .

#### 6.8 EJEMPLO N°4

Un semicírculo usando cuatro puntos de control. Considerando el semicírculo del ejemplo n°1 y el dibujo 3.5 con  $r=1$ . Insertando el nudo  $u=1/2$  una vez.



RESOLUCIÓN

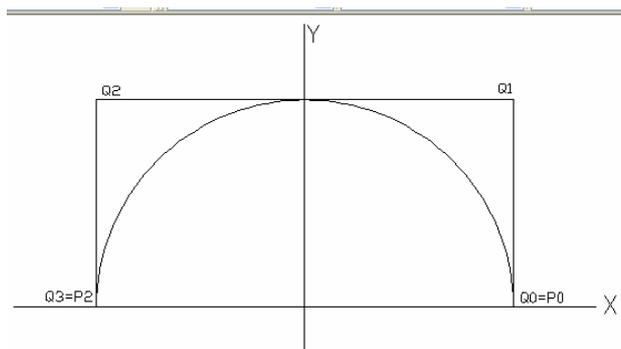
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$Q_0^w = P_0^w \quad Q_2^w = P_2^w$$

$$Q_1^w = \frac{1}{2}P_1^w + \frac{1}{2}P_0^w = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$Q_2^w = \frac{1}{2}P_2^w + \frac{1}{2}P_1^w = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

De este modo( viendo el dibujo 3.9)



( Dibujo 3.9; Semicírculo. Polígono de control y parametrización )

$$U = \left\{0,0,0, \frac{1}{2},1,1,1\right\}$$

$$\{w_i\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

$$\{Q_i\} = \{(1,0), (1,1), (-1,1), (-1,0)\}$$

**6.9 EJEMPLO N°5**

Un círculo entero usando siete puntos en un cuadrado de polígono de control.



## RESOLUCIÓN

Dos semicírculos pueden ser despiezados enteros formando 7 puntos del cuadrado-círculo.

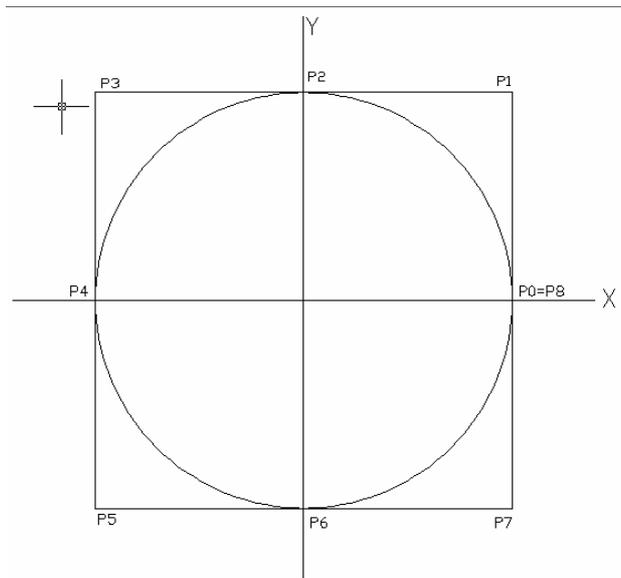
$$U = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1 \right\}$$
$$\{w_i\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

$C(u)$  es  $C^1$  continuo en  $u = 1/2$  y  $C^2$  continuo en todos los lugares.

El algoritmo A7.1 construye un arco circular NURBS en tres dimensiones, de ángulo arbitrario desde  $0^\circ$  hasta  $360^\circ$ . Las piezas juntas forman arcos de ángulos de grados  $d\theta$ ,  $\min(\theta, 45^\circ) < d\theta \leq 90^\circ$ , usando nudos dobles, y pesos. El resultado del arco de ángulo  $\theta$  es  $C^1$  continuo, tiene a casco convexo ajustado, y tiene una buena parametrización.

Los diseñadores ofrecen muchas interfaces diferentes para especificar arcos circulares, pero no cuestionan cual es la interface, los datos siguientes se pueden generar fácilmente:

- $O$  : Centro del círculo ( origen del sistema de coordenadas locales ).
- $X$  : Vector de unidad de longitud situado en la definición del plano del círculo.
- $Y$  : Vector de unidad de longitud en el plano de definición del círculo, y ortogonal a  $X$ .
- $r$  : Radio.
- $\theta_s, \theta_e$  : Ángulo de inicio y final, medido con respecto a  $X$ .



( Dibujo 3.10; Polígono de control y parametrización )

El arco es representado entonces de esta manera:

$$C(u) = O + r \cos u X + r \sin u Y \quad \theta_s \leq u \leq \theta_e$$

El arco resultante es orientado opuesto a las agujas de reloj en el sistema de coordenadas locales definido por O, X y Y. Asumimos una rutina Intersec3DLines (P0,T0,P2,T2,alf0,alf2,P1), las cuales computan la intersección (P1) de dos líneas en tres dimensiones dando un punto/ tangente a par [P0,T0] y [P2,T2]. El algoritmo computa los nudos y los puntos de control de los pesos para dar el arco mediante NURBS.

## 6.10 ALGORITMO

```

MakeNurbsCircle(0,X,Y,r,ths,the,n,U,Pw)
{
    /* Create arbitrary NURBS circular arc */
    /* Input: 0,X,Y,r,ths,the */
    /* Output: n,U,Pw */
    if (the<ths) the=360.0+the;
    theta=the-ths
    if ( theta <= 90.0) narcs=1; /*get number of arcs */
    else
        if ( theta <= 180.0) narcs=2;
        else
            if ( theta <= 270.0) narcs=3;
            else
                narcs=4;
    dtheta= theta/narcs;

```

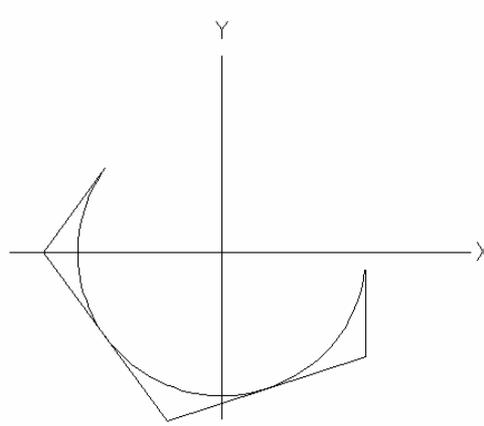
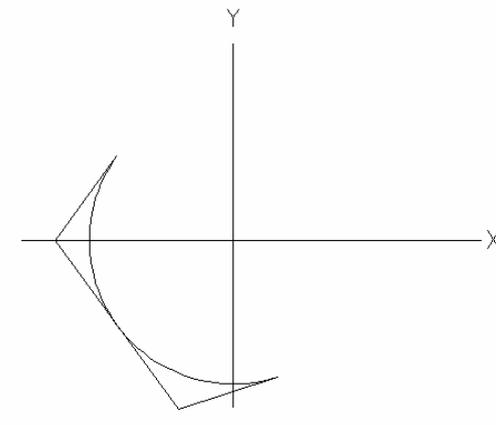
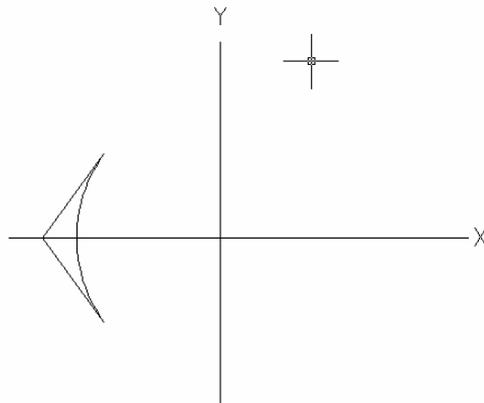


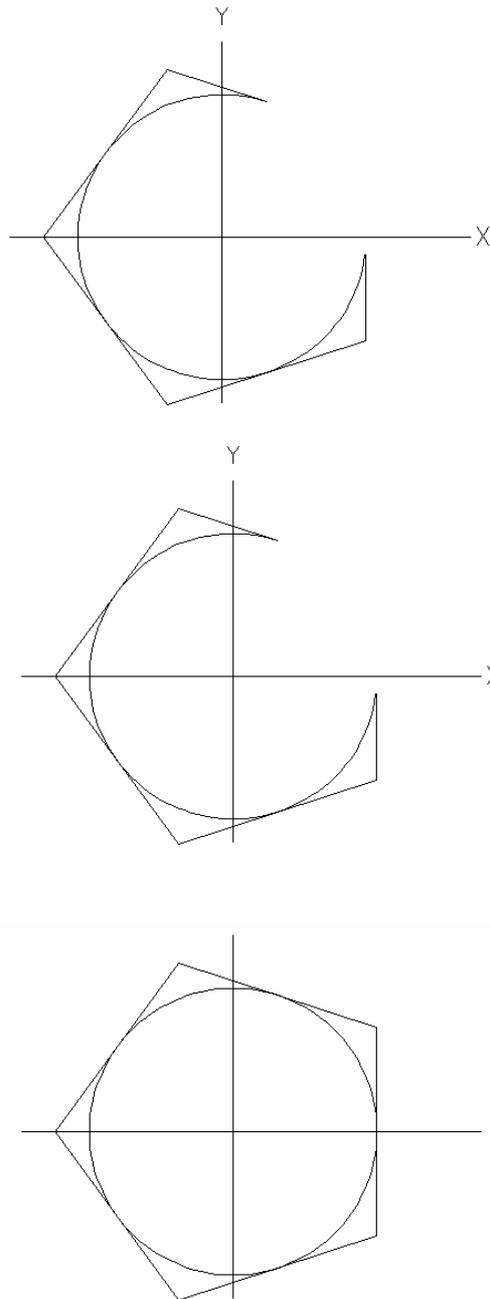
```

n=2*narcs; /*n+1 control points*/
w1=cos(dtheta/2.0); /*dtheta/2 is base angle*/
P0=0+r*cos(ths)*X+r*sin(ths)*Y;
T0=-sin(ths)*X+cos(ths)*Y; /*Initialize start values */
Pw[0]=P0;
Index=0; angle=ths;
For (i=1; i<=narcs; i++) /*create narcs segments */
    {
    angle=angle+dtheta;
    P2=0+rcos(angle)*X+rsin(angle)*Y;
    Pw[index+2]=P2;
    T2=-sin(angle)*X+cos(angle)*Y;
    Intersect3Dlines(P0,T0,P2,T2,dummy,dummy,P1);
    Pw[index+1]=w1*P1;
    Index=index+2;
    If ( i<narcs) {P0=P2; T0=T2}
    }
j=2*narcs+1; /*load the knot vector*/
for (i=0; i<3; i++)
    { U[i]=0.0; U[i+j]=1.0;}
switch (narcs)
    {
    case 1: break;
    case 2: U[3]=U[4]=0.5;
            break;
    case 3: U[3]=U[4]=1.0/0.3;
            U[5]=U[6]=2.0/3.0;
            break;
    case 4: U[3]=U[4]=0.25;
            U[5]=U[6]=0.50;
            U[7]=U[8]=0.75;
            Break;
    }
}

```

Elaboración mediante arcos parciales de una circunferencia completa. Cada arco tiene un ángulo inicial y final, un o continuo de otro para su elaboración. Dibujos 3.11





## 6.11 CONSTRUCCION DE CÓNICAS

En este punto se construirán cónicas mediante algoritmos, solamente para representaciones cuadráticas. Arcos Parabólicos y Arcos Hiperbólicos pueden ser siempre representados con una curva racional Bezier ( no nudos internos ) y pesos positivos. Como en el caso de los círculos, tenemos piezas de segmentos todas con nudos para obtener un arco elíptico usando solamente pesos positivos.



Consideramos primero un arbitrario arco cónico en el espacio de tres dimensiones. Hay muchos caminos para llegar a arcos cónicos, pero utilizaremos los dos más comunes:

- La definición de los parámetros geométricos radio, eje, distancia a foco, etc. Todos con especificaciones de puntos inicial y final.
- Especificar los puntos iniciales y finales,  $P_0$  y  $P_2$ , todos con la dirección tangente a dos puntos,  $T_0$  y  $T_2$ , mas un punto adicional en el arco P.

Si los datos están disponibles en la forma dada en el punto 1, es fácil derivar  $P_0, T_0, P_2, T_2$  y P ; así asumimos a través de esta sección que los datos se dan como se indica en los siguientes puntos matemáticos.

$$L(u) = \frac{(1-u)^2 P_0 + u^2 P_2}{(1-u)^2 + u^2}$$

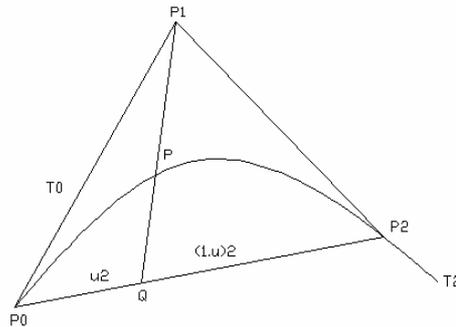
$$u = \frac{a}{1+a} \quad a = \sqrt{\frac{|P_0 Q|}{|Q P_2|}}$$

$$w_1 = \frac{(1-u)^2 (P - P_0) \cdot (P_1 - P) + u^2 (P - P_2) \cdot (P_1 - P)}{2u(1-u)|P_1 - P|^2}$$

$$C(u) = \frac{(1-u)^2 P_0 + u^2 P_2}{(1-u)^2 + u^2} + \frac{2u(1-u)}{(1-u)^2 + u^2} \vec{P}_1 = \bar{C}(u) + f(u) \vec{P}_1$$

$$P = Q + f(u_0) \vec{P}_1$$

$$\vec{P}_1 = \frac{1}{f(u_0)} (P - Q) \quad f(u_0) = \frac{2u_0(1-u_0)}{(1-u_0)^2 + u_0^2}$$



( Dibujo 3.12; Un segmento cónico general definido por puntos finales, y tangentes, y un punto adicional )

## 6.12 ALGORITMO

```

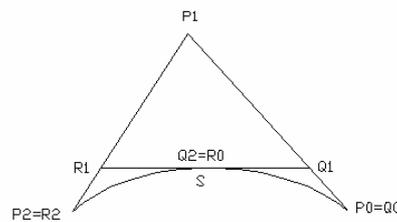
MakeOneArc(P0,T0,P2,T2,P,P1,w1)
{
    /* Create one Bezier conic arc */
    /* Input: P0,T0,P2,T2,P */
    /* Output: P1,w1 */
    V02=P2-P0;
    I=Intersect3Dlines(P0,T0,P2,T2,dummy,dummy,P1);
    If (i==0)
    {
        /*finite control point */
        V1P=P-P1;
        Intersect3Dlines(P1,V1P,P0,V02,alf0,alf2,dummy);
        A=sqrt(alf2/(1.0-alf2));
        U=a/(1.0+a);
        Num=(1.0-u)*(1.0-u)*Dot(P-P0,P1-P)+u*u*Dot(P-P2,P1-P);
        Den=2.0*u(1.0-u)*Dot(P1-P,P1-P);
        W1=num/den;
        Return;
    }
    else
    {
        /*infinite control point,180 degree arc*/
        w1=0.0
        Intersect3Dlines(P,T0,P0,V02,alf0,alf2,dummy);
        A=sqrt(alf2/1.0-alf2));
        U=a/(1.0+a)
        B=2.0*u*(1.0-u);
        B=-alf0*(1.0-b)/b;
        P1=b*T0;
        Return:
    }
}

```

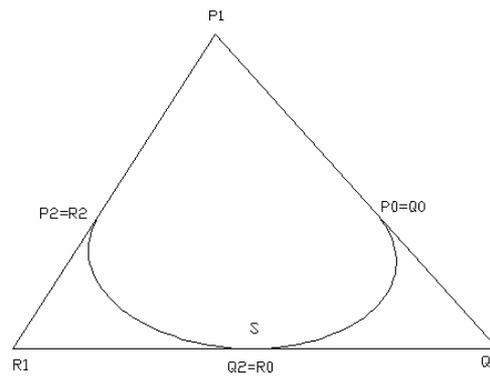


1. Dividimos  $u=1/2$ . Usando el algoritmo de Cateljau obtenemos:

$$Q_1^w = \frac{1}{2}P_0^w + \frac{1}{2}P_1^w \quad R_1^w = \frac{1}{2}P_1^w + \frac{1}{2}P_2^w$$



(Dibujo 3.13; División de una curva cónica con arco menores de  $180^\circ$ )



( 3.14; División de una curva cónica con arco mayor de  $180^\circ$  )

Y rellamado que  $w_0 = w_2$ , con ello seguimos que:

$$Q_1 = \frac{P_0 + w_1 P_1}{1 + w_1} \quad R_1 = \frac{w_1 P_1 + P_2}{1 + w_1}$$

$$w_q = w_r = \frac{1}{2}(1 + w_1)$$

donde  $w_q$  y  $w_r$  son los pesos en  $Q_1$  y  $R_1$ , respectivamente. Una segunda aplicación del algoritmo de Casteljaú:



$$R_0 = Q_2 = S = \frac{1}{2}(Q_1 + R_1)$$

$$w_s = \frac{1}{2}(1 + w_1)$$

2. Reparametrización de aquello que los pesos finales son 1 para ambos de los dos nuevos segmentos. Después dividiendo, los pesos para el primer segmento son :

$$w_0 = 1 \qquad w_q = \frac{1}{2}(1 + w_1) \qquad w_s = \frac{1}{2}(1 + w_1)$$

$$w_0 = 1 \qquad w_{q1} \qquad w_{q2} = 1$$

donde  $w_{q1}$  esta determinado. Usando el factor de forma cónica:

$$\frac{w_0 w_s}{w_q^2} = \frac{w_0 w_{q2}}{w_{q1}^2}$$

lo cual implica que

$$w_{q1} = \sqrt{\frac{1 + w_1}{2}}$$

$$w_{r1} = \sqrt{\frac{1 + w_1}{2}}$$

En los dibujos 3.14 se ven las divisiones de la elipse con pesos positivos y negativos. El procedimiento también trabaja para infinitos puntos de control; el resultado da las siguientes fórmulas:

$$Q_1 = P_0 + \vec{P}_1 \qquad R_1 = P_2 + \vec{P}_1$$

$$R_0 = Q_2 = S = \frac{1}{2}(Q_1 + R_1)$$

$$w_{q1} = w_{r1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La ecuación resultado final que acabamos de obtener no debe ser sorprendente, como la semielipse, es obtenido mediante una aplicación de una transformación afín a un semicírculo. Bastantes transformaciones no cambian los pesos.

Usando el Algoritmo A7.2 y el Arco dividido (), sabemos presentar un algoritmo el cual construye un arbitrario arco cónico en el espacio de las tres dimensiones. El resultado de



la curva NURBS consiste en que cada uno, dos o cuatro segmentos se conectan con  $C^1$  continuidad. El resultado son los nudos (U), el numero de puntos de control menos 1 (n), y los puntos de control en forma homogénea (Pw). Asumimos una utilidad, ángulo (P,Q,R) el cual vuelve al ángulo PQR.

## 6. 13 ALGORITMO

```

MakeOpenConic(P0,T0,P2,T2,P,n,U,Pw)
{
    /* Construct open conic arc in 3D */
    /* Input : P0,T0,P2,T2,P */
    /* Output : n,U,Pw */
    MakeOneArc(P0,T0,P2,T2,P,P1,w1);
    If (w1<=-1.0) /* parabola or hyperbola */
        Return(error) /*outside convex hull */
    If (w1>=-1.0) /* classify type & number of segments */
        Nsegs=1; /*hyperbola or parabola, one segment */
    Else
        { /*ellipse,determine number of segments */
            if (w1>0.0 && Angle(P0,P1,P2)>60.0 nsegs=1;
            else
                if (w1<0.0 && Angle(P0,P1,P2)>90.0 nsegs=4;
                else nsegs=2;
        }
    n=2*nsegs;
    j=2*nsegs+1;
    for (i=0; i<3; i++) /*load end knots*/
        {U[i]=0.0; U[i+j]=1.0;}
    Pw[0]=P0; Pw[n]=P2 /*load end ctrl pts*/
    If (nsegs==1)
        {
            Pw[1]=w1*P1;
            Return;
        }
    SplitArc(P0,P1,w1,P2,Q1,S,R1,wqr);
    If(nsegs==2)
        {
            Pw[2]=S;
            Pw[1]=wqr*Q1; Pw[3]=wqr*R1;
            U[3]=U[4]=0.5;
            Return;
        }
    /*nsegs==4*/
    Pw[4]=S;
    W1=wqr;
    SplitArc(P0,Q1,w1,S,HQ1,HS,HR1,wqr);
    Pw[2]=HS;

```



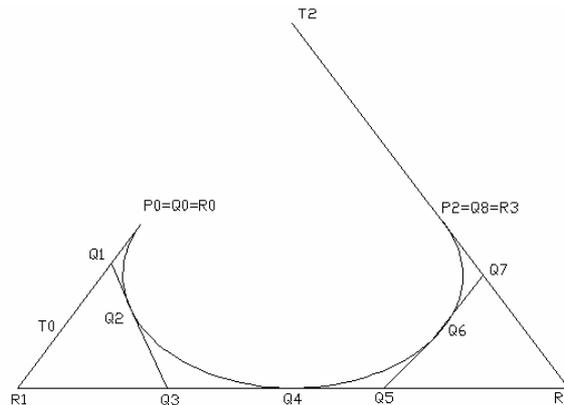
```

Pw[1]=wqr*HQ1;   Pw[3]=wqr*HR1;
SplitArc(S,R1,w1,P2,HQ1,HS,HR1,wqr);
Pw[6]=HS;
Pw[5]=wqr*HQ1;   Pw[7]=wqr*HR1;
For(i=0; i<2; i++) /*load the remaining knots*/
    {
        U[i+3]=0.25; U[i+5]=0.5;   U[i+7]=0.75;
    }
Return;
}

```

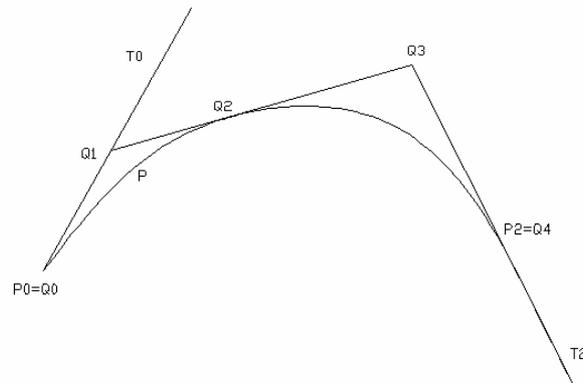
Este algoritmo anterior ( Algoritmo A7.3 ), produce elipses las cuales tienen una buena parametrización. Para aplicaciones donde la parametrización no se considere importante, un simple algoritmo el cual produce  $C^2$  continuidad en curvas con igualdad buena en casco convexo.

Para compararlo, se muestran un arco de elipse construido de las dos diferentes maneras:



( Dibujo 3.15; Comparación entre representación obtenida por división de curva y inserción de nudos )

- Algoritmo A7.3, los puntos vienen marcados con cuadradillos.
- Haciendo un arco, con inserciones de subsecuencias de  $u=1/2$  una vez, los puntos vienen marcados con mas.



( Dibujo 3.16; Representación segmento cónico NURBS mediante arco menor 180° )

Si el eje mayor y el eje menor y el radio son conocidos, un polígono de control rectangular es lo apropiado. Los pesos y los nudos son los mismos. Si la entrada de datos es  $P_0, T_0, P_2, T_2, P$  todos con el conocimiento de que la cónica es una elipse completa, entonces una construcción apropiada es:

1. Llamado Hacer Un Arco mediante una representación Bezier de un segmento de la elipse, con pesos positivos  $w_1$  .
2. Utilizando el centro de la elipse C.
3. Utilizando el eje mayor y el eje menor, (unidades ) vector (U,V), a lo largo con el mayor y menor radio ( $r_1, r_2$ ).
4. Utilizando los puntos de control.

$$Q_0 = C + r_1U \quad (= Q_8)$$

$$Q_1 = Q_0 + r_2V$$

$$Q_2 = C + r_2V$$

$$Q_3 = Q_2 - r_1U$$

$$Q_4 = C - r_1U$$

$$Q_5 = Q_4 - r_2V$$

$$Q_6 = C - r_2V$$

$$Q_7 = Q_6 + r_1U$$

#### 6.14 CLASIFICACION DEL TIPO DE CONICAS Y MODO DE CONVERSIÓN.

En los puntos anteriores ya he explicado las cinco formas de representar cónicas :

1. Con una ecuación implícita.



2. Inscribiéndola en una área de esa forma máxima.
3. Utilizando cuadráticas básicas.
4. Utilizando cuadráticas Bezier racionales.
5. Utilizando NURBS.

En este punto discutimos la clasificación de los tipos de cónicas y la forma de conversión, que es, dada una curva y una de esas formas, determinar el tipo de cónica que es – elipse, parábola, o hipérbola – y convertirla en otra forma. Cuando nos referimos a una forma implícita asumimos que la cónica esta en espacio del plano XY; otra forma de cónica es cuando estamos en tres dimensiones.

Considerando las primeras dos formas. Si una cónica está en una posición estándar y puede ser descrita por una ecuación de estas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b > 0$$

$$y^2 = 4ax \quad a = \frac{1}{2}k > 0$$

estas tipos son obvias. Si no se encuentran en posición estándar, entonces este tipo se determina mediante las variables de  $\alpha$  y D, y ellas pueden ser transformadas fácilmente a una de posición estándar. Para las máximas inscritas en un área, las cónicas tipos son inherentes en la definición. Nota que el máximo área es bastante similar a una de posición estándar implícita, en que su definición de ecuación es dada en términos de cónicas, también llamada características geométricas, ejemplo, ejes, vértices, centro, radio, etc. Por lo tanto, la conversión entre dos de esas formas es trivial.

La conversión entre la racional cuadrática básica y las formas Bezier vienen dadas por sus racionales partes mostradas que son :

$$\begin{aligned} [a_i^w] &= R_2 M_2 [P_i^w] \\ [P_i^w] &= M_2^{-1} R_2^{-1} [a_i^w] \end{aligned}$$

donde  $M_2$  y  $R_2$  son la cuadrática ( 3x3 ) Bezier y la reparametrización de matrices respectivamente. El tipo de una Bezier cónica es fácilmente desde el factor de la forma cónica. Para simplificar, asumimos que nuestro segmento básico está definido en  $0 \leq u \leq 1$  , con  $R_2$  la identidad de la matriz.

$$[w_i^p] = M_2^{-1} [w_i^a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} [w_i^a]$$



$$w_0^P = w_0^a$$

$$w_1^P = w_0^a + \frac{1}{2} w_1^a$$

$$w_2^P = w_0^a + w_1^a + w_2^a$$

Una curva cuadrática NURBS con nudos internos no representa una única cónica. La clasificación de una curva cuadrática NURBS el proceso tiene tres pasos:

1. Computa el factor de forma cónica de cada segmento no degenerado;
2. Si todos los factores de forma indican un tipo común ( todo  $c_i < 1, = 1$  or  $> 1$  ), descomponer la curva en segmentos Bezier;
3. computa las características geométricas de cada segmento y entonces compáralo.

Para la clasificación y transformación de las cinco formas se pueden poner en dos grupos:

- Implícito y máximo inscrito en áreas.
- Cuadráticas racionales básicas, Bezier y formas NURBS.

La representación cónica es realmente fácil de obtener con un grupo si es seguro que se pueda hacer, el cual es:

- Características geométricas (Grupo 1)
- Puntos iniciales y finales, todos con su dirección tangente y un punto adicional,  $P_0, T_0, P_2, T_2, P$  (Grupo 2)

Entonces  $C(u)$  es una cónica Bezier racional dada finalmente así:

$$\alpha(u)\beta(u) = \frac{1}{4}k(1 - \alpha(u) - \beta(u))^2$$

$$k = \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \quad \alpha(u) = R_{0,2}(u) \quad \beta(u) = R_{2,2}(u)$$

En orden de obtención, nosotros necesitamos expresar  $\alpha$  y  $\beta$  en términos de coordenadas cartesianas x e y. Viendo en la ecuación 7.20, dice que  $\alpha(u)$  y  $\beta(u)$  Son las coordenadas baricentro de el punto  $C(u)$  en el triangulo  $\{P_0, P_1, P_2\}$ . Viendo uno arbitrario  $u_0$ , tenemos  $\alpha = \alpha(u_0)$ ,  $\beta = \beta(u_0)$ , y  $P = C(u_0) = (x, y)$ . Entonces :

$$\alpha = \frac{\text{area}(P, P_1, P_2)}{\text{area}(P_0, P_1, P_2)} \quad \beta = \frac{\text{area}(P, P_0, P_1)}{\text{area}(P_0, P_1, P_2)}$$



$$\alpha = \frac{(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)}{(y_0 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_0 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

$$\beta = \frac{(y - y_1)(x_0 - x_1) - (x - x_1)(y_0 - y_1)}{(y_2 - y_1)(x_0 - x_1) - (x_2 - x_1)(y_0 - y_1)}$$

$$h_0 = x_0 - x_1$$

$$h_1 = x_2 - x_1$$

$$h_2 = y_0 - y_1$$

$$h_3 = y_2 - y_1$$

$$g_1 = h_2 h_1 - h_0 h_3$$

$$\alpha = \frac{h_1(y - y_1) - h_3(x - x_1)}{g_1} \quad \beta = \frac{h_0(y - y_1) - h_2(x - x_1)}{-g_1}$$

Finalmente, teniendo  $s_1 = h_0 - h_1$ , y  $s_2 = h_3 - h_2$ , y al sustituir en la ecuación de arriba, produce los seis coeficientes.

$$a = s_2^2 + \frac{4}{k} h_2 h_3$$

$$b = s_1^2 + \frac{4}{k} h_0 h_1$$

$$h = s_1 s_2 - \frac{2}{k} (h_0 h_3 + h_1 h_2)$$

$$f = -h y_1 - a x_1 + g_1 s_2$$

$$g = -h x_1 - b y_1 + g_1 s_1$$

$$c = b y_1^2 + 2 h x_1 y_1 + a x_1^2 - 2 g_1 (y_1 s_1 + x_1 s_2) + g_1^2$$

Volvemos ahora a la computación de las características geométricas desde la forma racional Bezier. Presentamos las formulas aquí sin prueba: quizás no hay dificultad, las derivadas son complicadas.

Tenemos una cuadrática racional Bezier, definida por la ecuación 7.21, con todo  $w_i > 0$ . Asumimos que la cónica no esta degenerado. Definiendo los símbolos

$$\begin{aligned} S &= P_0 - P_1 & T &= P_2 - P_1 \\ k &= \frac{w_0 w_2}{w_1^2} & e &= \frac{k}{2(k-1)} \\ \alpha &= |S|^2 & \beta &= S \cdot T & \gamma &= |T|^2 \end{aligned}$$



$$\delta = \alpha\gamma - \beta^2 = |S \times T|^2$$

$$\zeta = \alpha + \gamma + 2\beta = |S + T|^2$$

$$\eta = \alpha + \gamma - 2\beta = |S - T|^2$$

Para la parábola están las formulas:

$$\text{Ejes : } \frac{1}{\sqrt{\zeta}}(S + T)$$

$$\text{Focos : } P_1 + \frac{\gamma S + \alpha T}{\zeta}$$

$$\text{Vértice : } P_1 + \left(\frac{\gamma + \beta}{\zeta}\right)^2 S + \left(\frac{\alpha + \beta}{\zeta}\right)^2 T$$

El centro de una elipse o hipérbola viene dado por la siguiente ecuación:

$$\text{Centro : } P_1 + e(S + T)$$

Entonces  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  es la solución a la ecuación cuadrática

$$2\delta\lambda^2 - (k\eta + 4\beta)\lambda + 2(k - 1) = 0$$

La raíz de esta ecuación es real. Para una elipse  $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$  y  $e > 0$ . Para una hipérbola,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  y  $e < 0$ . El radio mayor y el menor son :

$$\text{Elipse : } r_1 = \sqrt{\frac{e}{\lambda_1}} \quad r_2 = \sqrt{\frac{e}{\lambda_2}}$$

$$\text{Hipérbola : } r_1 = \sqrt{\frac{e}{\lambda_1}} \quad r_2 = \sqrt{\frac{-e}{\lambda_2}}$$

$$\text{Si } \left| \frac{k}{2} - \gamma\lambda_1 \right| > \left| \frac{k}{2} - \alpha\lambda_1 \right|$$

$$\bar{x} = \frac{k}{2} - \gamma\lambda_1 \quad \bar{y} = \beta\lambda_1 - \frac{k}{2} + 1$$

$$\rho = \alpha\bar{x}^{-2} + 2\beta\bar{x}\bar{y} + \gamma\bar{y}^{-2}$$

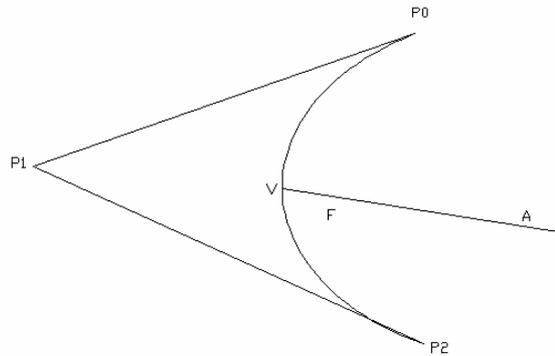


$$x_0 = \frac{\bar{x}}{\rho} \quad y_0 = \frac{\bar{y}}{\rho}$$

Entonces los puntos  $Q_1$  y  $Q_2$

$$Q_1 = P_1 + (e + r_1 x_0)S + (e + r_1 y_0)T$$

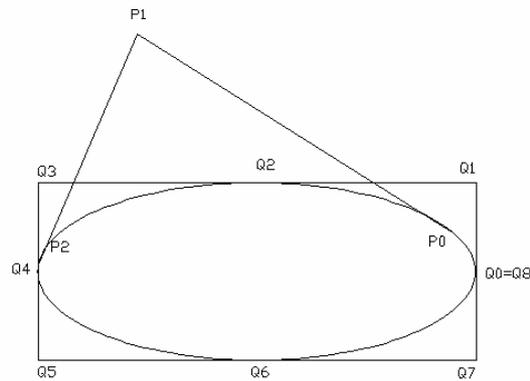
$$Q_2 = P_1 + (e + r_1 x_0)S + (e + r_1 y_0)T$$



(Dibujo 3.17; Representación de Bezier con una parábola con vértice (V), foco (F) y ejes (A))

## 6.15 OTROS CIRCULOS DE MAYOR ORDEN

En algunas aplicaciones usamos para representar círculos completos o arco de circunferencia de grado superior a  $180^\circ$  con una Bezier racional segmentos ( no nudo interno ), no infinitos puntos de control y no pesos negativos. En los otros apartados hemos eliminado los infinitos puntos de control y los pesos negativos usando nudos inserción. Unos ejemplos son estos:



( Dibujo 3.18; NURBS representación de una elipse completa dada en forma Bezier )

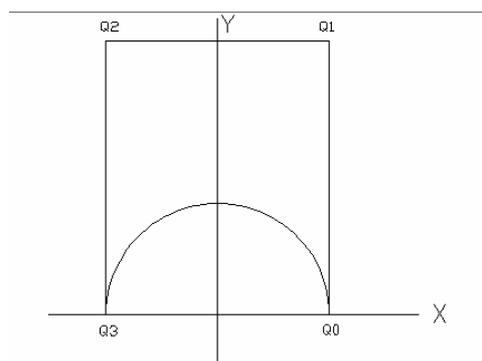
### 6.16 EJEMPLO N°1

El semicírculo del ejemplo 4.1 puede producir ser elevado de grado.

$$Q_0^w = P_0^w \quad Q_3^w = P_2^w$$

$$Q_1^w = \frac{1}{3}P_0^w + \frac{2}{3}P_1^w = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$Q_2^w = \frac{2}{3}P_1^w + \frac{1}{3}P_2^w = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$



( Dibujo 3.19; Representación cúbica racional cuadrática del semicírculo )

$$U = \{0,0,0,0,1,1,1,1\}$$

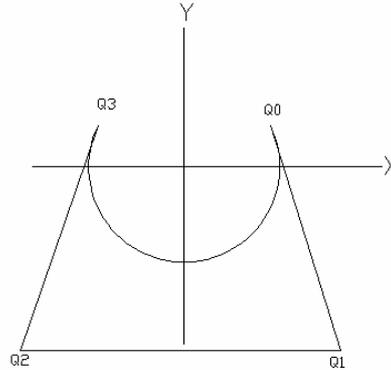
$$\{w_i\} = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right\}$$

$$\{Q_i\} = \{(1,0), (1,2), (-1,2), (-1,0)\}$$



### 6. 17 EJEMPLO N°2

El arco de 240° dado en el ejemplo 7.4 puede producir ser elevado de grado.



( Dibujo 3.20; Representación racional cúbica Bezier de un arco de 240° )

$$U = \{0,0,0,0,1,1,1,1\}$$

$$\{w_i\} = \left\{1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1\right\}$$

$$\{Q_i\} = \left\{ \left(a, \frac{1}{2}\right), (2a, -3), (-2a, -3), \left(-a, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$\text{con } a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### 6.18 EJEMPLO N°3

Nosotros escribimos el semicírculo de radio 1, en el plano complejo como

$$z = e^{i2u} = f(u) = g(u) + h(u)i \quad 0 \leq u \leq 1$$

Haciendo uso de la ecuación anterior, se obtiene el círculo completo.

$$e^{i2u} = (g^2 - h^2) + (2gh)i \quad 0 \leq u \leq 1$$

Sabiendo que

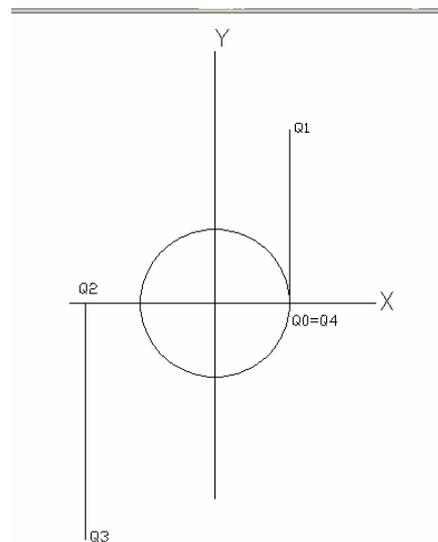
$$g(u) = \frac{1-2u}{1-2u+2u^2} \quad h(u) = \frac{2u(1-u)}{1-2u+2u^2}$$

Sustituyendo y volviendo al plano real XY, se obtiene

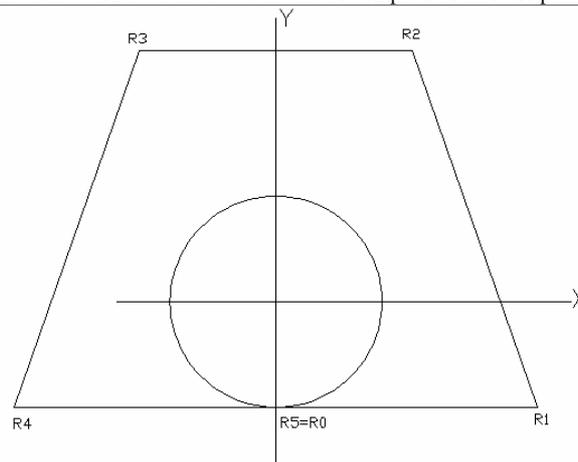


$$x(u) = \frac{1 - 4u + 8u^3 - 4u^4}{1 - 4u + 8u^2 - 8u^3 + 4u^4}$$

$$y(u) = \frac{4u(1 - 3u + 2u^2)}{1 - 4u + 8u^2 - 8u^3 + 4u^4}$$



( Dibujo 3.21; Representación racional cuadrática de un círculo completo usando dos puntos infinitos de control )



( Dibujo 3.22; Representación racional de un círculo completo usando solamente puntos de control infinito )

Convirtiendo en Bezier

$$\{Q_i^w\} = \{(3,0,3), (0,3,0), (-3,0,1), (0,-3,0), (3,0,3)\}$$



## 7 **BIBLIOGRAFÍA**

- Apuntes de clase de 3º I.T. Naval “ Estructuras Navales “  
Asignatura de Matemáticas Asistidas por Ordenador  
Año 2001  
Profesor : Sergio Amat Plata y Sonia Busquier Sáez
- Apuntes de clase de 2ª I.T. Naval “ Estructuras Navales “  
Asignatura Dibujo Naval  
Año 2000  
Profesor : Mariano Hernández Albadalejo
- Apuntes de clase de 4º I.T. Naval “ Estructuras Navales “  
Asignatura Métodos Numéricos  
Apuntes de 2006  
Profesor : Sergio Amat Plata
- Apuntes de clase de 5º I.T. Naval “ Estructuras Navales “  
Asignatura Métodos Numéricos Avanzados Aplicados a la Ingeniería Naval  
Apuntes de 2006  
Profesor : Sergio Amat Plata
- [WWW.ARQUITECTUBA.COM](http://WWW.ARQUITECTUBA.COM)  
Manual de Rhinoceros Nivel 2 en Español
- Documentación facilitada por Ana Esperanza Raposo Abreu  
Nurbs, introducción, procedimiento, modificación de curvas Nurbs.  
Universidad Politécnica de Madrid
- Curvas y Superficies para modelado geométrico  
José Cortés Parejo ; Juan Manuel Cordero Valle  
Editorial Rama
- Bezier and B-Spline Techniques  
Springer Verlag  
Editorial Hardcore
- The Implementation of closed B-Spline curves for application to Mechanims  
Mc Garva, J.R. ; Mullineux ,G.
- Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design  
Werner Rheinboldt ; Daniel Siewiorek  
Academic Press



- Las flores de Bezier. Elasticidad e inestabilidad en el grafismo digital interactivo  
Artículo de Jordi Alberich  
Diciembre 2004.
- XVI Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica  
Modelado Geométrico del casco de un buque  
Universidad Politécnica de Madrid  
ETSI Navales, Departamento de Enseñanzas Básicas  
Profesor : Francisco Pérez Arribas
- Rogers, David F. y J. Alan Adams, Matemáticas elementales para gráficos  
computerizados, segunda edición.  
McGraw Hill 1990.
- Faring, Gerald, Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design.  
Una guía práctica, Academic Press, 1988.
- Pagina Web de Antonio Gutiérrez  
Escuela Técnica Superior de Informática de la Universidad Autónoma de  
Madrid, 1998-2000.  
Apuntes Gráficos. Curvas de Bezier.
- Pagina Web enciclopedia mediawiki.  
<http://mediawiki.blender.org/index.php/Manual.es/PartII/Curves>
- A Practical Guide to Splines  
C. de Boor; 1978.  
New York, Springer-Verlag.
- Introducción a los Gráficos Computacionales  
James D. Foley et al; 1994  
Addision-Wesley.
- On Nurbs: A Survey  
Les Piegl; 1991  
IEEE Computer Graphics and Applications.
- State of the Art in Computer Graphics- Visualization and Modeling  
David F. Rogers,Rae A. Earnshaw (editors); 1991  
New York, Springer-Verlag.
- Advanced Animation and Rendering Techniques  
Alan Watt, Mark Watt; 1992  
New York, AMC press, Addision-Wesley.
- Página Web de <http://soko.com.ar/matem/matematica/Conicas.htm>  
Información de la autora Silvia Sokolovsky  
Teoría de las cónicas



- Página Web de [http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Cónicas/marco\\_conicas.htm](http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Cónicas/marco_conicas.htm)  
Introducción : Secciones Cónicas  
Autores M. Teresa Pérez y Oscar Arratia
- [WWW.EDUMAT.NET](http://WWW.EDUMAT.NET)  
Presentación de la circunferencia, la elipse, la hipérbola y parábola.
- Página Web de <http://math2.org/math/algebra/es-conics.htm>  
Tablas Matemáticas de David: Secciones Cónicas
-