

Universidad Politécnica de Cartagena

PROYECTO FIN DE CARRERA



**ESQUEMAS DE ALTO ORDEN CON
VARIACIÓN TOTAL ACOTADA
USANDO EXTRAPOLACIÓN Y
APLICACIONES**

Alumno: Tania Borges Álamo
Centro: E.T.S.I. Naval y Oceánica
Titulación: I.T. Naval, esp. Estructuras Marinas

Director/es: Sergio Amat Plata
Sonia Busquier Sáez
Departamento: Matemática Aplicada y Estadística

ÍNDICE

| | |
|---|----|
| Introducción | 4 |
| Método de los trapecios con extrapolación de Richardson | 6 |
| Extrapolación polinómica recíproca | 11 |
| Algoritmo directo para la implementación de la EPR | 14 |
| Análisis del error en las extrapolaciones | 16 |
| Estimación del error en las extrapolaciones polinómica y polinómica recíproca | 18 |
| Leyes de conservación | 23 |
| Fenómeno convectivo, modelos e implicaciones numéricas | 24 |
| Discretizaciones espaciales | 29 |
| Método PPHM | 32 |
| Métodos WENO | 34 |

| | |
|--|----|
| Métodos de discretización temporal de alto orden y fuerte reserva de estabilidad | 37 |
| Métodos SSP | 38 |
| Métodos SSP Runge-Kutta | 39 |
| Métodos SSP Runge-Kutta con condiciones óptimas CFL | 40 |
| Métodos SSP Runge-Kutta no lineales | 43 |
| Métodos de segundo, tercer y cuarto orden no lineales | 44 |
| Experimentos numéricos | 46 |
| Bibliografía | 47 |
| Anexo I | 48 |

INTRODUCCIÓN

Los métodos ENO contruidos por Harten, Osher, Engquist y Chakravarty son una clase de métodos numéricos “shock capturing” de alto orden mediante interpolaciones polinómicas para sistemas de leyes de conservación hiperbólicas. Con estos métodos se han obtenido excelentes resultados para gran variedad de problemas. Por otra parte, Marquina introduce el PHM, un nuevo método local “shock capturing” de tercer orden usando hipérbolas. La mayor ventaja de este método con respecto a sus predecesores es su carácter local.

Posteriormente se introdujeron métodos tipo ENO locales como los WENO y método tipo PHM con reconstrucciones polinómicas como el PPHM.

Para completar el esquema se utilizan una familia especial de métodos Runge-Kutta introducidas por Shu y Osher que mantienen la propiedad TVD (Total Variation Decreasing). Estos esquemas también son conocidos con el nombre de SSP (Strong Stability Preserving). El problema de estos esquemas es el alto coste computacional para órdenes mayores que 3, ya que, en estos casos se deben evaluar dos operadores, el de la ecuación y el adjunto asociado.

Para abaratar el coste computacional, en el presente proyecto, se utilizarán técnicas de extrapolación para aumentar el orden de esquemas RK-TVD de órdenes menores que 4. Se combinarán con un método PPHM de orden 3 y un método WENO de orden 5. Se hará un estudio numérico del método. Se demostrará que el método introducido tiene variación total acotada, propiedad fundamental sin la cual no se puede asegurar L_1 -convergencia a una solución débil del problema. Se presentarán los resultados numéricos de diversas leyes de conservación, donde se testará la robustez del método introducido. Se estudiarán ecuaciones en 1 y 2 dimensiones, incluyendo las ecuaciones clásicas

de Euler. Se verá que el método es estable en presencia de discontinuidades y con poca viscosidad.

Estas ecuaciones presentan problemas numéricos complejos que requieren el uso de métodos robustos y eficientes como los usados en este trabajo.

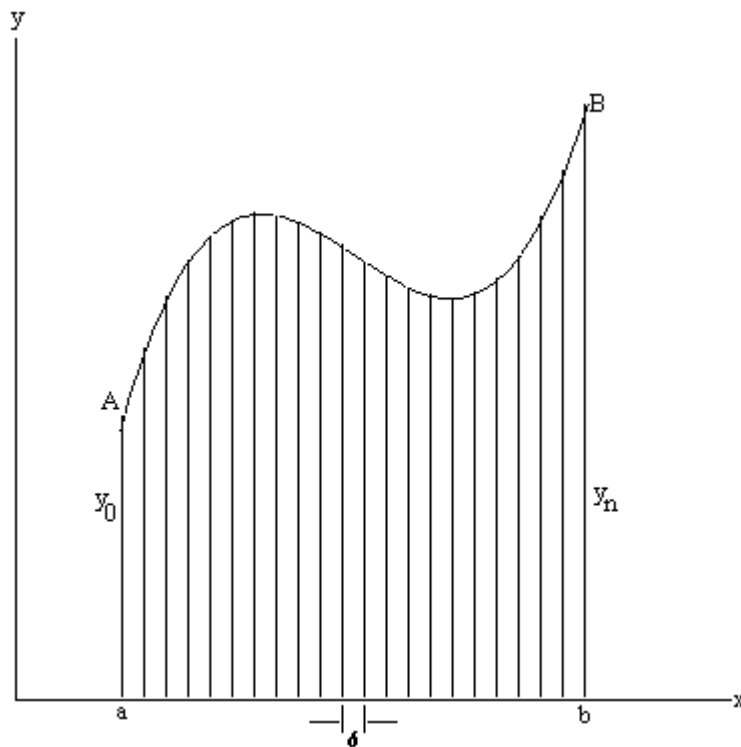
Finalmente, destacar la importancia de este tipo de ecuaciones en dinámica de fluidos y la relación de esta parte de la física-matemática con la Ingeniería Naval.

El proyecto está dividido en las siguientes partes:

1. En primer lugar se introducirá el concepto de extrapolación en un método sencillo como es el de los trapecios para la aproximación del área de una región en el plano. Se presentarán dos extrapolaciones la de Richardson (polinómica) y la extrapolación polinómica recíproca (hipérbola) que presenta mejores propiedades de estabilidad numérica.
2. Seguidamente haremos una breve introducción a las leyes de conservación donde pondremos de manifiesto las peculiaridades de este tipo de ecuaciones y la necesidad de usar métodos sofisticados como los propuestos en este trabajo.
3. Presentaremos las discretizaciones temporales (RK-TVD) y espaciales (PPHM y WENO) que junto con la extrapolación usaremos para aproximar las ecuaciones.
4. Terminaremos el trabajo con una colección de experimentos numéricos.

**MÉTODO DE LOS TRAPECIOS CON EXTRAPOLACIÓN DE
RICHARDSON**

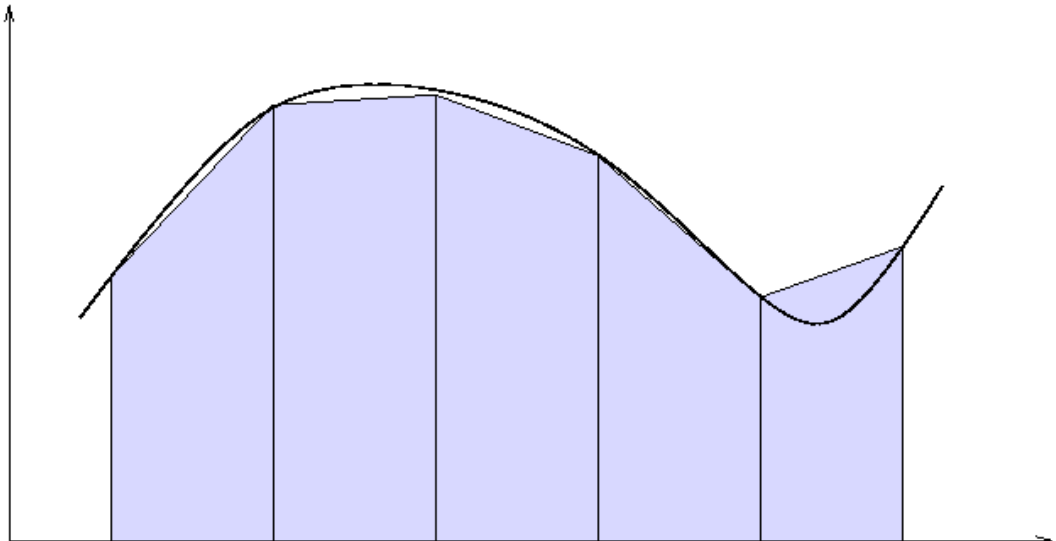
Cuando no se conoce la primitiva de la función integrando $f(x)$, o no se conoce la expresión analítica de $f(x)$, sino una tabla de sus valores (que puede, eventualmente, provenir de resultados experimentales), interpretaremos el problema de cálculo de la integral definida como el del cálculo del área comprendida entre el eje de las x , la curva representativa de la función $f(x)$, y las ordenadas extremas en a y b .



Supongamos conocidos los valores de $f(x)$ en puntos equidistantes a distancia h . Un valor aproximado del área bajo la curva se obtiene considerando la suma de las áreas de los trapecios inscritos en cada una de las superficies parciales. El método implica la interpolación lineal entre puntos consecutivos de la curva.

$$\text{Área} = \int_a^b f(x) dx$$

Si dividimos el intervalo $[a,b]$ en subintervalos, y cada subintervalo lo aproximamos a un trapecio, podemos obtener el área como suma total de las áreas de los trapecios. Aproximamos f en cada subintervalo por rectas:



Área = Suma de las áreas de los trapecios

$$\text{Área} = \sum h * \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i-1}))}{2} \right) = T(h)$$

$$T(h) = h * \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

El error en este método admite una expresión del tipo:

$$\text{Área} - T(h) = C_0 h^2 + C_1 h^4 + \dots$$

Las técnicas de extrapolación permiten aumentar el orden de la aproximación. El objetivo será obtener, a partir de varias aproximaciones, una nueva aproximación del error cuyo desarrollo tenga como primer término $C h^q$ con $q > p$, siendo p el orden del método original ($p=2$ para trapecios).

$$\text{Solución} - \text{Aproximación} = C h^p + O(h^{p+1})$$

A partir de un mismo intervalo podemos utilizar dos aproximaciones:

$$T(h) = h * \left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} \right)$$

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} * \left(\frac{f(a)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

$$\text{Área} - T(h) = C h^2 + O(h^q) \quad , q > 2$$

$$\text{Área} - T\left(\frac{h}{2}\right) = C \left(\frac{h}{2}\right)^2 + O(h^q) \quad , q > 2$$

A partir de estas dos aproximaciones y operando en las dos últimas ecuaciones obtenemos:

$$\text{Área} - \frac{4T(h/2) - T(h)}{3} = O(h^q)$$

Podemos observar que el término $\frac{4T(h/2) - T(h)}{3}$, es una nueva aproximación a la solución que depende de h y de $h/2$ y cuyo error es $O(h^q)$ con $q > 2$.

Este candidato a resolver nuestro problema es conocido como la “Extrapolación de Richardson” o “Extrapolación lineal”. En general:

$$\frac{2^p \text{Aprox}(h/2) - \text{Aprox}(h)}{2^p - 1}$$

La *extrapolación de Richardson* consiste en considerar un polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1 x^p$$

Donde el polinomio de grado p es el que interpola a $Aprox$ en h y $h/2$ y obtener la nueva aproximación como $P(0)$ (extrapolación).

Si partimos de más de dos aproximaciones:

$$Aprox(h)$$

$$Aprox(h/2)$$

$$Aprox(h/4)$$

y aplicamos varias veces la *extrapolación de Richardson*, veremos que el coeficiente del error de la aproximación final tiende a infinito, por lo que el número de extrapolaciones está limitada (normalmente entre 2 y 3).

Además de la extrapolación de Richardson existen otro tipo de extrapolaciones. En ejemplo con buenas propiedades de estabilidad, lo encontramos en la extrapolación polinómica recíproca. Esta extrapolación consiste en considerar como función extrapoladora una función del tipo $\frac{1}{ax^p + b}$.

EXTRAPOLACIÓN POLINÓMICA RECÍPROCA

Vamos a ver que, al igual que en la extrapolación polinómica, es equivalente considerar la función interpoladora $R(x) = \frac{1}{p(x)}$ y extrapolar en el cero, que hacer extrapolaciones de dos en dos con funciones del tipo $\frac{1}{dx^p + c}$.

Nótese en primer lugar que para la construcción de $R(x)$, se debe suponer que los datos sean distintos de cero, ya que estas funciones racionales, no interpolan en cero. Si los datos tienen diferente signo o son cero, entonces, para encontrar la función racional, primero haríamos una traslación (vertical) de los ejes para que esto ya no se diese, construiríamos entonces $R(x)$ y por último haríamos la traslación inversa (cabe destacar que en este caso el numerador sería un polinomio de grado mayor que cero).

Para implementar esto, se puede hacer un “if” que seleccione si pasa por el cero y si es así que sume a todas las imágenes uno más el máximo en módulo de ellas y así, todas serán positivas; una vez hecha la extrapolación se restaría lo sumado al resultado. Además, para que $R(x)$ esté definida en todo el intervalo, $p(x)$ deberá mantener su signo constante, ya que, en otro caso podría presentar problemas el valor de la extrapolación.

Nótese que esto no introduce, en la práctica, más restricciones que las que había en la extrapolación polinómica. Al extrapolar valores de un mismo signo, lo deseable es que la interpolación lo mantenga, pues lo contrario, aun siendo matemáticamente posible, no resultaría, en un gran número de casos, “natural”.

Veamos la equivalencia anteriormente citada.

Supongamos que tenemos:

$$T(h_1), T(h_2), \dots, T(h_k)$$

distintos de cero y de igual signo $h_1 \geq h_2 > \dots \geq h_k$.

Encontrar una función interpoladora de la forma $\frac{1}{p(x)}$ es equivalente a

encontrar un polinomio $p(x)$ que interpole a:

$$\frac{1}{T(h_1)}, \frac{1}{T(h_2)}, \dots, \frac{1}{T(h_k)}$$

sabemos que esto a su vez, es equivalente a ir extrapolando dos a dos con funciones del tipo $ax^p + b$ y por construcción, esto es equivalente, a considerar los inversos de los datos, es decir $\frac{1}{T(h_i)}$; y extrapolar dos a dos con

funciones del tipo $\frac{1}{ax^p + b}$.

Así, se concluye que extrapolar con funciones del tipo $\frac{1}{p(x)}$, es equivalente a

hacerlo dos a dos con funciones $\frac{1}{ax^p + b}$.

Además, nótese que también se deduce de lo expuesto, que hacer la extrapolación polinómica recíproca con los datos anteriores es equivalente, a tomar los datos inversos, hacer la extrapolación polinómica con ellos y quedarse con el inverso del resultado.

Como hemos visto, realizar extrapolación polinómica recíproca, equivale a ir extrapolando dos a dos con funciones del tipo $\frac{1}{ax^p + b}$. Una de las ventajas de esta propiedad, es el hecho de que para aproximar el punto medio de (x_0, x_1) se utilizará $\frac{1}{a\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)^p + b}$, que, como es sabido, son medias menores que la media aritmética entre dos puntos, que es la que aparece en el caso polinómico. En particular, para $p=1$ se tiene la media armónica, que es menor incluso que la geométrica. Que aparezcan estas medias, menores que la de la polinómica, presuponen unas mejoras en la estabilidad.

ALGORITMO DIRECTO PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE LA
EXTRAPOLACIÓN POLINÓMICA RECÍPROCA

Lo haremos suponiendo que los nodos están en progresión geométrica. En general es análogo cambiando constantes.

Supongamos pues:

$$F(h) = a_0 + a_1 h^{p^1} + a_2 h^{p^2} + \dots$$

$$F(2h) = a_0 + a_1 2^{p^1} h^{p^1} + a_2 2^{p^2} h^{p^2} + \dots$$

$$F(4h) = a_0 + a_1 4^{p^1} h^{p^1} + a_2 4^{p^2} h^{p^2} + \dots$$

Con las dos primeras construimos:

$$\frac{1}{b_1} = \frac{2^{p^1} - 1}{\frac{2^{p^1}}{F(h)} - \frac{1}{F(2h)}}$$

con las dos últimas:

$$\frac{1}{b_2} = \frac{2^{p^1} - 1}{\frac{2^{p^1}}{F(2h)} - \frac{1}{F(4h)}}$$

y se extrapolaría con:

$$\frac{1}{b} = \frac{2^{p^2} - 1}{2^{p^2} b_2 - b_1}$$

Aplicando inducción se obtiene el algoritmo siguiente:

para $l=1,2,3,\dots,n$

$$b_{(0,l)} = F(2^{l-1}h)$$

para $j=1$ hasta $r=n-1$ y para $l=1$ hasta k donde $k=r-j+1$

$$b_{(j,l)} = \frac{2^p - 1}{\frac{2^p}{b_{(j-1,l)}} - \frac{1}{b_{(j-1,l+1)}}}$$

donde p es la primera potencia del error en cada paso.

ANÁLISIS DEL ERROR EN LAS EXTRAPOLACIONES

Para el error, tenemos las fórmulas obtenidas en secciones precedentes. Vamos a obtener a continuación una nueva expresión del error.

Sean x_0, x_1, \dots, x_m los nodos donde se va a interpolar. Sea $f(x)$ la función a interpolar (o extrapolar). Sea $\frac{1}{p(x)}$ la función interpoladora.

Supongamos que queremos interpolar o extrapolar, según el caso, en un punto x distinto de los nodos.

Sabemos que $p(x)$ interpolará a $\frac{1}{f(x)}$ en los nodos, por lo tanto existirá

$\mathbf{x} \in \text{int}(x, x_0, x_1, \dots, x_m)$ tal que:

$$\frac{1}{f(x)} - p(x) = \frac{(f^{-1})^{(m+1)}(\mathbf{x})}{(m+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)$$

así:

$$\frac{f(x)}{p(x)} \left(\frac{1}{f(x)} - p(x) \right) = \frac{f(x) (f^{-1})^{(m+1)}(\mathbf{x})}{p(x) (m+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)$$

por tanto:

$$f(x) - \frac{1}{p(x)} = \frac{(f^{-1})^{(m+1)}(\mathbf{x})}{(m+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)$$

Ahora bien, de la primera ecuación, se deduce:

$$f(x) = \frac{1}{p(x) + A}$$

y finalmente:

$$f(x) - \frac{1}{p(x)} = \frac{-1}{p^2(x) + Ap(x)} A$$

donde

$$A = \frac{(f^{-1})^{(m+1)}(\mathbf{x})}{(m+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)$$

(Nótese que $\frac{1}{p(x)}$, es el valor con el que extrapolamos, y por lo tanto conocido).

ESTIMACIÓN DEL ERROR EN LAS EXTRAPOLACIONES
POLINÓMICA Y POLINÓMICA RECÍPROCA

Ahora haremos un estudio de cómo se comportan estas extrapolaciones. Se utilizarán en la resolución de E.D.O. y supondremos que $x_0=h$ y $x_1=2h$ (el estudio general sería análogo, pero más farragoso).

Primero construiremos las funciones racionales y polinómicas, y, después, las analizaremos.

Supongamos:

$$F_1 = F(h) = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \dots$$

$$F_2 = F(2h) = a_0 + a_1 2^{p_1} h^{p_1} + a_2 2^{p_2} h^{p_2} + \dots$$

1)

$$P(x) = a + bx^{p_1}$$

para que interpole:

$$a + bh^{p_1} = F_1$$

$$a + 2^{p_1} bh^{p_1} = F_2$$

así:

$$2^{p_1} a + 2^{p_1} bh^{p_1} = 2^{p_1} F_1$$

$$a + 2^{p_1} bh^{p_1} = F_2$$

restando:

$$(2^{p_1} - 1)a = 2^{p_1} F_1 - F_2$$

luego:

$$a = \frac{2^{p_1} F_1 - F_2}{2^{p_1} - 1}$$

$$b = \frac{F_2 - a}{2^{p_1} h^{p_1}} = \frac{F_2 - \left(\frac{2^{p_1} F_1 - F_2}{2^{p_1} - 1}\right)}{2^{p_1} h^{p_1}} = \frac{2^{p_1} F_2 - F_2 - 2^{p_1} F_1 + F_2}{2^{p_1} h^{p_1} (2^{p_1} - 1)} = \frac{F_2 - F_1}{h^{p_1} (2^{p_1} - 1)}$$

2)

$$R(x) = \frac{1}{dx^{p_1} + c}$$

para que interpole:

$$\frac{1}{dh^{p_1} + c} = F_1$$

$$\frac{1}{2^{p_1} dh^{p_1} + c} = F_2$$

y al igual que antes:

$$d = \frac{\frac{F_2 - 1}{F_1}}{F_2 h^{p_1} (1 - 2^{p_1})}$$

$$c = \frac{F_1 - 2^{p_1} F_2}{F_1 F_2 (1 - 2^{p_1})}$$

Por lo tanto dados (h, F_1) y $(2h, F_2)$ tenemos:

A continuación vamos a analizar las funciones obtenidas. Sabemos que una vez determinadas $\frac{1}{dx^{p_1} + c}$ y $ax^{p_1} + b$ tendremos que $\frac{1}{c}$ y b serán las aproximaciones a a_0 .

Veamos cuales son los primeros términos del error (ya sabemos que en cada extrapolación, eliminamos la primera potencia del error del método al que se le está aplicando).

Sabemos que:

$$\frac{1}{dh^{p_1} + c} = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \dots$$

(suponemos que $c \neq 0$ para que tenga sentido en el cero)

$$\frac{\frac{1}{c}}{\frac{d}{h^{p_1} + 1}} = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \dots$$

(suponemos que $p_1 \geq 1$ condición que cumplen los métodos usuales)

$$\frac{1}{c} - a_0 = \frac{d}{c} h^{p_1} a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \dots$$

Análogamente:

$$bh^{p_1} + a = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \dots$$

$$a - a_0 = (-b + a_1)h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \dots$$

Sólo tendremos en cuenta los primeros términos del error, el resto lo despreciaremos al tomar h cercanos a cero, así deberemos analizar:

$$\frac{d}{c}a_0h^{p_1} + a_1h^{p_1} + \frac{d}{c}a_1h^{2p_1} + a_2h^{p_2}$$

y

$$(-b + a_1)h^{p_1} + a_2h^{p_2}$$

En primer lugar:

$$\begin{aligned} \frac{d}{c}a_0h^{p_1}a_1h^{p_1} + \frac{d}{c}a_1h^{2p_1} + a_2h^{p_2} = \\ \left(\frac{F_2 - F_1}{\frac{F_1F_2h^{p_1}(1-2^{p_1})}{F_1 - 2^{p_1}F_2}}(a_0 + a_1h^{p_1}) \right) h^{p_1} + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2} = \\ \left(\frac{F_2 - F_1}{h^{p_1}(F_1 - 2^{p_1}F_2)}(a_0 + a_1h^{p_1}) \right) h^{p_1} + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2} \end{aligned}$$

simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{F_2(a_0 + a_1(1-2^{p_1})h^{p_1}) - F_1a_0}{F_1 - 2^{p_1}F_2} = \\ \frac{a_1^2(1-2^{p_1})h^{2p_1} + a_0a_2(2^{p_2}-1)h^{p_2}}{a_0(1-2^{p_1}) + a_1(1-2^{2p_1})h^{p_1}} + a_2h^{p_2} = \\ \frac{a_1^2(1-2^{2p_1})h^{2p_1} + (2^{p_2}-2^{p_1})a_0a_2h^{p_2}}{a_0(1-2^{p_1})} \end{aligned}$$

(notar que simplemente se trata de una aproximación, de ahí que salgan potencias distintas a p_2)

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
 (-b + a_1)h^{p_1} + a_2h^{p_2} &= \left(\frac{-F_2 + F_1}{h^{p_1}(2^{p_1} - 1)} + a_1 \right) h^{p_1} + a_2h^{p_2} = \\
 &\left(\frac{(1 - 2^{p_1})a_1h^{p_1} + (1 - 2^{p_2})h^{p_2}a_2 + \dots}{h^{p_1}(2^{p_1} - 1)} + a_1 \right) h^{p_1} + a_2h^{p_2} = \\
 &\left(\frac{1 - 2^{p_2}}{2^{p_1} - 1} a_2h^{\frac{p_2}{p_1}} \right) h^{p_1} + a_2h^{p_2} = \\
 &\left(1 + \frac{1 - 2^{p_2}}{2^{p_1} - 1} \right) a_2h^{p_2}
 \end{aligned}$$

En los métodos usuales, $2p_1 \geq p_2$, incluso en la mayoría de ellos, $2p_1 > p_2$, en cuyo caso, el primer término del error en la extrapolación polinómica recíproca aproximadamente es $\left(\frac{2^{p_2} - 2^{p_1}}{1 - 2^{p_1}} \right) a_2h^{p_2}$, coincidiendo con el de la extrapolación polinómica.

Ahora bien $\left| 1 + \frac{1 - 2^{p_2}}{1 - 2^{p_1}} \right| \geq 1$, puesto que $p_2 \geq p_1 + 1$, y así puede ser peligroso

realizar muchas extrapolaciones, ya que como se ve, el coeficiente de la primera potencia del error va creciendo en módulo en cada extrapolación.

LEYES DE CONSERVACIÓN

Una introducción general a las propiedades de los sistemas de leyes de conservación y sus métodos numéricos asociados puede encontrarse en el libro de LeVeque. Nuestro objetivo en esta sección es destacar los aspectos fundamentales para poder entender las secciones posteriores.

Un sistema físico continuo puede describirse por las leyes de conservación de masa, momento y energía. Es decir, para cada cantidad conservada, la proporción de cambio de la cantidad total en alguna región viene dada por su flujo (convectivo o difusivo) a través de la frontera, más cualquier fuente existente.

Como ya hemos dicho, una cantidad conservada, como la masa, puede ser transportada por flujos convectivos o difusivos. La distinción es que los flujos difusivos están conducidos por gradientes en densidad, mientras los flujos convectivos incluso persisten en ausencia de estos. Nos concentraremos en el caso de transporte convectivo, ignorando difusión (difusión de masa, viscosidad y conductividad térmica) y también términos fuente (como reacciones químicas, excitaciones atómicas, ionizaciones). Hacemos esta simplificación ya que el transporte convectivo requiere tratamiento numérico especializado. Los difusivos y los efectos reactivos pueden ser tratados por métodos numéricos “normales” independientes de aquellos para los términos convectivos. Las leyes de conservación con sólo flujos convectivos son conocidas como “hiperbólicas”. Una inmensa serie de fenómenos físicos se modelizan con ayuda de tales sistemas: combustión en motores, astrofísica, plasma,...

FENÓMENO CONVECTIVO, MODELOS E IMPLICACIONES NUMÉRICAS

Los fenómenos físicos más importantes exhibidos por las leyes de conservación hiperbólicas son “bulk convection”, “waves”, discontinuidades de contacto, shocks, y rarefracciones. Describiremos brevemente los rasgos físicos y modelo matemático para cada efecto.

Los dos primeros fenómenos son simplemente el movimiento de materia de un sitio a otro. La ecuación modelo más simple que describe estos fenómenos es la ecuación lineal convectiva, también es un modelo importante para entender transporte suave en las leyes de conservación.

Estos fenómenos se propagan en direcciones bien definidas en contraste con fenómenos como la difusión que se propaga en todas las direcciones.

Los métodos numéricos convenientes para los sistemas hiperbólicos son los upwind que contemplan las diversas direcciones, además de una relación definida entre el espacio y el paso de tiempo. La velocidad de la propagación discreta $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ debe ser igual que la velocidad de propagación física. La forma general de esta relación se llama restricción de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), y dice que la velocidad discreta debe ser por lo menos igual de grande que cualquier velocidad característica en el problema.

Una discontinuidad de contacto es un salto persistente, discontinuo en la densidad de masa que se mueve por la transmisión de volumen a través del sistema. Como la difusión de masa es despreciable, el salto persiste. Estos saltos normalmente aparecen en los puntos de contacto de materiales diferentes, por ejemplo, una discontinuidad de contacto puede separar el aceite del agua. Se mueven a velocidad característica y retienen cualquier

perturbación que reciben. Así cualquier alteración producida por el método numérico tiende a persistir y aumentar.

Shock: Un shock es un salto espacial en material (presión, temperatura) desarrollado espontáneamente (aunque no necesariamente) de distribuciones suaves y que persiste. Al contrario que la discontinuidad de contacto que debe ponerse en el sistema inicialmente. Los shocks se desarrollan a través de un mecanismo de la regeneración en que los impulsos fuertes se mueven más rápidamente que los débiles. Se pueden modelizar con la ecuación de Burgues:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

El movimiento de los shocks no es tan trivial como el de las discontinuidades de contacto y sus velocidades no son evidentes a partir de sus flujos. Es sabido que los métodos numéricos deben estar en forma conservativa para poder “capturar” los shocks.

La aparición espontánea de los shocks tiene dos implicaciones fundamentales para los métodos numéricos. Primero, incluso cuando el dato inicial sea suave los métodos tienen que estar adaptados a gradientes grandes y saltos. Segundo, hay un efecto beneficioso y es que los errores pequeños cerca del shock tienden a disminuirse y desaparecer en el transcurso del tiempo.

Rarefracción: Una rarefracción es un salto o gradiente demasiado grande que se disipa como una expansión suave. Puede modelizarse con la ecuación Burgues más una condición inicial del estilo de $\tanh\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Disminuye los errores numéricos y hace más fácil la representación de la solución por polinomios que serán la base de nuestros métodos.

Las consideraciones numéricas a tener en cuenta son:

La condición CFL es necesaria para que el modelo tenga una propagación de información correcta.

Los métodos numéricos deben adaptarse a las direcciones de propagación, así deben de ser “upwind”.

En regiones de suavidad es posible obtener alta resolución con interpolación.

Cualquier método para ecuaciones diferenciales puede ser aplicado para la integración temporal, sólo se ha de tener en cuenta la estabilidad.

La forma conservativa es crucial para la captura del shock.

La descomposición característica del sistema se hará de forma local.

Los sistemas de leyes de conservación son sistemas de ecuaciones en derivadas parciales (EDP's) tiempo-dependientes. En 1-D se pueden escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,t)) = 0$$

donde $u : R \times R \rightarrow R^m$ es un vector m -dimensional de las cantidades conservadas.

Asumiremos que el sistema es hiperbólico. Esto significa que la matriz Jacobiana $f'(u)$ tiene la siguiente propiedad: *Para todo valor de u los valores propios de $f'(u)$ son reales y la matriz es diagonalizable.*

Normalmente el flujo es una función no lineal de u , dando lugar a sistemas no lineales de EDP's. En general, no será posible la obtención de la solución, de ahí la necesidad del estudio de métodos numéricos.

Uno de los sistemas de leyes de conservación con mayor importancia es el de las ecuaciones de Euler de la dinámica de gases. En realidad, las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos son las de Navier-Stokes, pero estas ecuaciones incluyen los efectos de la viscosidad, y así los flujos no sólo dependen de las variables de estado sino también de los gradientes de éstas. En consecuencia estas ecuaciones dejan de ser hiperbólicas. Por otro lado, si las sustancias están lo suficientemente diluidas, como puede ser el caso de un gas, los efectos de la viscosidad pueden ser despreciados, apareciendo en este caso las ecuaciones de Euler. En una dimensión estas ecuaciones se escriben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ v(E + P) \end{pmatrix} = 0$$

donde ρ denota la densidad, v la velocidad, E la energía, y P la presión. La presión P vendrá dada por la ecuación de estado.

Consideremos ahora la ecuación escalar no lineal

$$u_t + f(u)_x = 0$$

donde $f(u)$ es una función no lineal de u .

Una forma natural de obtener una definición de solución que no use la diferenciabilidad es regresar a la forma integral de la ecuación. Sea $f \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ una función test. Si multiplicamos $u_t + f_x = 0$ por $f(x,t)$ e integramos respecto al tiempo y al espacio obtendremos:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f u_t + f f(u)_x dx dt = 0$$

Integrando por partes,

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f u_t + f f(u)_x dx dt = - \int_{-\infty}^\infty f(x,0) u(x,0) dx$$

Una función $u(x,t)$ es una solución débil de la ley de conservación si se satisface para toda función $f \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Existen situaciones en las que la solución débil no es única y son necesarias otras condiciones para escoger la solución físicamente relevante.

Se dice que $u(x,t)$ es la solución de entropía si existe una constante $E > 0$ tal que para todo $a > 0$, $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{u(x+a,t) - u(x,t)}{a} \leq \frac{E}{t}$$

Nota: Existen versiones más simples de esta condición para distintos casos particulares.

DISCRETIZACIONES ESPACIALES

Los sistemas de leyes de conservación son sistemas de ecuaciones en derivadas parciales del tipo:

$$u_t + \sum_{i=1}^d f_i(u)_{,xi} = 0$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

Comenzamos con las ecuaciones escalares en una dimensión:

$$u_t + f(u)_x = 0$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

En primer lugar, por sencillez, consideramos el método de Euler

$$u_t \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

A partir de una aproximación numérica podemos escribir:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \mathbf{I} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n)$$

donde $\mathbf{I} = \frac{\Delta t}{h}$ y el flujo numérico es una función de 2k variables (pares).

Para obtener las reconstrucciones partimos del siguiente hecho: si existe una función g *en principio* no conocida, que cumpla que:

$$f(u(x)) = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

se tiene que

$$f(u(x))_x = \frac{g(x+h/2) - g(x-h/2)}{h}$$

Los métodos que usaremos se basan en reconstrucciones a trozos de la función g .

El paso más importante de este método consiste en tener una reconstrucción de g , por los menos, de tercer orden.

Definimos una celda:

$$C_j = \{x: x_{j-1/2} \leq x \leq x_{j+1/2}\}$$

donde:

$$x_{j+1/2} = x_j + \frac{1}{2}h$$

Nuestros datos de interpolación serán:

a) Para cada j el principal valor de $g(x)$ en C_j viene dado por:

$$v_j = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

b) Para cada j , $d_{j+1/2}$ viene dado por:

$$d_{j+1/2} = \frac{v_{j+1} - v_j}{h}$$

Queremos encontrar $r_j(x)$ una reconstrucción de $g(x)$ en C_j de tal forma que cuando $g(x)$ sea suave en C_j , tendremos

$$g(x) - r_j(x) = O(h^3)$$

Para conseguir tercer orden de las reconstrucciones, impondremos las siguientes condiciones para cada j :

$$v_j = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} r_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$d_{j+1/2} = r'_j(x_{j+1/2})$$

$$d_{j-1/2} = r'_j(x_{j-1/2})$$

MÉTODO PPHM

Veamos un ejemplo de una reconstrucción polinómica a trozos de orden 3 consideraremos una celda genérica:

$$C_0 = \left\{ x : |x - x_0| \leq \frac{h}{2} \right\}$$

Basándonos en el siguiente polinomio:

$$P_0(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

donde el valor de los coeficientes viene dado por:

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d_2 - d_1}{x(\mathbf{q}_2) - x(\mathbf{q}_1)} \right)$$

$$a_1 = d_1 - x(\mathbf{q}_2) \frac{d_2 - d_1}{x(\mathbf{q}_2) - x(\mathbf{q}_1)}$$

$$a_0 = v_0 - \frac{h^2}{12} a_2$$

Tendremos que se verifican las condiciones de interpolación buscadas para C_0 .

Por otra parte, la derivada de $p_0(x)$ en el punto $x\left(\frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}\right)$ es:

$$p'_0\left(x\left(\frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}\right)\right) = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

En la presencia de discontinuidades en una de las interfases la reconstrucción anterior no produce aproximaciones satisfactorias. Para obtenerlas modificamos el algoritmo considerando como datos de interpolación la

derivada en la interfase con menor valor absoluto y la dada por la media armónica en el punto medio.

$$d_I = \frac{2d_{-1/2}d_{1/2}}{d_{-1/2} + d_{1/2}}$$

Cada media es menor que dos veces el mínimo de los datos y por tanto adaptada a la presencia de discontinuidades.

Por otra parte, en regiones de suavidad su diferencia con la media aritmética en $O(h^2)$, manteniendo el orden 3 deseado con la reconstrucción.

La implementación final la realizaremos con un esquema upwind. Utilizamos la *velocidad de Roe*:

$$a_{j+1/2} = \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{u_{j+1}^n - u_j^n}$$

para saber de que dirección tomar la información.

Trabajaremos con los intervalos de la derecha si la velocidad es positiva:

$$f_{j+1/2} = p(v_j, d_{j-1/2}, d_{j+1/2}, r)$$

Si la derivada es negativa trabajaremos con los intervalos de la izquierda:

$$f_{j+1/2} = p(v_{j+1}, d_{(j+1)-1/2}, d_{(j+1)+1/2}, l)$$

En el caso de que existan cambios de signo, utilizaremos ambos lados, es decir, derecha e izquierda haciendo una descomposición de flujo.

MÉTODOS WENO

Los esquemas WENO se basan en combinaciones ponderadas de las reconstrucciones de los posibles polinomios asociados a stencils de mismo tamaño asociados a cada una de las celdas:

$$\hat{f}_{j+1/2} = \sum_{k=0}^{r-1} \mathbf{w}_k q_k^r(f_{j+k-r+1}, \dots, f_{j+k})$$

donde $q_k^r(f_{j+k-r+1}, \dots, f_{j+k})$ son reconstrucciones polinómicas.

El peso \mathbf{w}_k del stencil S_k se define como:

$$\mathbf{w}_k = \frac{\mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_0 + \dots + \mathbf{a}_{r-1}}$$

donde

$$\mathbf{a}_k = \frac{C_k^r}{(\mathbf{e} + IS_k)^p}, \quad k=0, 1, \dots, r-1$$

Es fácil de ver que $\sum_{k=0}^{r-1} \mathbf{w}_k = 1$.

En este trabajo usaremos como medida de la suavidad

$$IS_k = \sum_{l=1}^{r-1} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} h^{2l-1} (q_k^{(l)})^2 dx$$

donde $q_k^{(l)}$ es una derivada l -ésima de $q_k(x)$. El término h^{2l-1} es para destituir los factores h -dependientes en las derivadas de los polinomios. Es más suave que la medida de la variación total basado en la norma L^1 .

Cuando $r=2$, la ecuación de IS_k queda

$$IS_k = \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{i=1}^{r-l} \frac{(f[j+k+i-r, l])^2}{r-l}.$$

Para $r=3$, se tiene:

$$IS_0 = \frac{13}{12}(f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j)^2 + \frac{1}{4}(f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j)^2$$

$$IS_1 = \frac{13}{12}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})^2 + \frac{1}{4}(f_{j-1} - f_{j+1})^2$$

$$IS_2 = \frac{13}{12}(f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})^2 + \frac{1}{4}(3f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2})^2$$

En regiones suaves, usando desarrollos de Taylor obtenemos que:

$$IS_0 = \frac{13}{12}(f''h^2)^2 + \frac{1}{4}(2f'h - \frac{2}{3}f'''h^3)^2 + O(h^6)$$

$$IS_1 = \frac{13}{12}(f''h^2)^2 + \frac{1}{4}(2f'h - \frac{2}{3}f'''h^3)^2 + O(h^6)$$

$$IS_2 = \frac{13}{12}(f''h^2)^2 + \frac{1}{4}(2f'h - \frac{2}{3}f'''h^3)^2 + O(h^6)$$

donde $f''' = f'''(u_j)$. Si $f' \neq 0$,

$$IS_k = (f'h)^2(1 + O(h^2)), \quad k = 0,1,2,$$

De este modo se ha obtenido un quinto orden exacto en la línea WENO.

Por otra parte, esta medida es también más exacta que los puntos críticos de $f(u(x))$. Donde $f' = 0$, se tiene que:

$$IS_k = \frac{13}{12}(f''h^2)^2(1 + O(h^2)), \quad k = 0,1,2,$$

MÉTODOS DE DISCRETIZACIÓN TEMPORAL DE ALTO ORDEN Y
FUERTE RESERVA DE ESTABILIDAD

Es una práctica común para resolver las ecuaciones diferenciales parciales dependientes del tiempo obtener un método de discretización temporal.

Existen diferentes métodos, entre ellos destacaremos los RK –TVD que son los adecuados para discretizar la variable temporal en las leyes de conservación:

MÉTODOS SSP

Son métodos para resolver sistemas del tipo:

$$\frac{d}{dt}u = L(u)$$

resultando un método de aproximación de las leyes de conservación hiperbólicas:

$$u_t = -f(u)_x$$

que cuando combinado con la discretización temporal de primer orden de Euler, se obtiene:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t L(u^n)$$

siendo:

$$\Delta t \leq \Delta t_{FE}$$

La variación total de la solución discreta de una dimensión es:

$$u^n := \sum_j u_j^n \mathbf{1}_{\{x_{j-1/2} \leq x \leq x_{j+1/2}\}}$$

El objetivo de los métodos SSP Runge-Kutta es mantener una fuerte estabilidad, bajo condiciones CFL del tipo:

$$\Delta t \leq c \Delta t_{FE}$$

donde c es un coeficiente que modifica la restricción CFL.

MÉTODOS SSP Runge-Kutta

Un método Runge-Kutta viene escrito de la siguiente forma:

$$u^{(0)} = u^n$$

$$u^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} (\mathbf{a}_{i,k} u^{(k)} + \Delta t \mathbf{b}_{i,k} L(u^{(k)})) \quad , \quad \mathbf{a}_{i,k} \geq 0 \quad , \quad i=1, \dots, m,$$

$$u^{n+1} = u^{(m)}$$

Si todos los $\mathbf{b}_{i,k}$ son positivos, $\mathbf{b}_{i,k} \geq 0$, se puede demostrar el siguiente teorema:

“Si el método de Euler es fuertemente estable bajo la restricción CFL, entonces el método Runge-Kutta con los $\mathbf{b}_{i,k} \geq 0$ es SSP, proporciona que se cumpla la siguiente restricción CFL:

$$\Delta t \leq c \Delta t_{FE}$$

$$c = \min_{i,k} \frac{\mathbf{a}_{i,k}}{\mathbf{b}_{i,k}}.$$

MÉTODOS SSP Runge-Kutta con condiciones óptimas CFL

Se ha considerado la familia de m-estados, de los métodos Runge-Kutta de mth-orden con coeficientes $\mathbf{a}_{i,k}$ y $\mathbf{b}_{i,k}$ positivos. La restricción máxima de CFL alcanzada para estos métodos es la dictada según las pautas de Euler:

$$\Delta t \leq \Delta t_{FE}$$

manteniendo el valor máximo del coeficiente CFL como $c=1$.

La serie de m-estados se han dado en las siguientes líneas:

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}^{(i-1)} + \Delta t \mathbf{L} \mathbf{u}^{(i-1)}, \quad i=1, \dots, m-1,$$

$$\mathbf{u}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-2} \mathbf{a}_{m,k} \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{a}_{m,m-1} (\mathbf{u}^{(m-1)} + \Delta t \mathbf{L} \mathbf{u}^{(m-1)})$$

donde

$$\mathbf{a}_{1,0} = 1$$

y

$$\mathbf{a}_{m,k} = \frac{1}{k} \mathbf{a}_{m-1,k-1}, \quad k=1, \dots, m-2,$$

$$\mathbf{a}_{m,m-1} = \frac{1}{m!}, \quad \mathbf{a}_{m,0} = 1 - \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{a}_{m,k}$$

es una línea del método Runge-Kutta de mth-orden, el cual es un SSP con el coeficiente CFL $c=1$,

$$\Delta t \leq \Delta t_{FE}$$

A partir los m -estados, el método lineal Runge-Kutta de m th-orden es único, se ha podido demostrar que los m -estados son únicos, el método lineal Runge-Kutta de m th-orden es un SSP bajo el coeficiente CFL $c=1$.

Si L es no lineal, las ecuaciones anteriores son todavía SSP bajo el coeficiente CFL $c=1$, pero esto no es un m th-orden exacto. Se observa que casi todos los últimos estados de estos métodos son simples secuencias de Euler.

Para tercer y cuarto orden los métodos Runge-Kutta, admiten las siguientes descomposiciones:

$$\sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} (\Delta t L)^k = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} (I + \Delta t L) + \frac{1}{6} (I + \Delta t L)^3$$

$$\sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} (\Delta t L)^k = \frac{3}{8} + \frac{1}{3} (I + \Delta t L) + \frac{1}{4} (I + \Delta t L)^2 + \frac{1}{24} (I + \Delta t L)^4$$

Se han añadido en la tabla los coeficientes $a_{m,j}$ hasta el valor de $m=8$:

| <i>Orden m</i> | $a_{m,0}$ | $a_{m,1}$ | $a_{m,2}$ | $a_{m,3}$ | $a_{m,4}$ | $a_{m,5}$ | $a_{m,6}$ | $a_{m,7}$ |
|----------------|---------------------|-------------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|-------------------|
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | | | | |
| 3 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | | | | | |
| 4 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{24}$ | | | | |
| 5 | $\frac{11}{30}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{120}$ | | | |
| 6 | $\frac{53}{144}$ | $\frac{11}{30}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{720}$ | | |
| 7 | $\frac{103}{280}$ | $\frac{53}{144}$ | $\frac{11}{60}$ | $\frac{3}{48}$ | $\frac{1}{72}$ | $\frac{1}{240}$ | $\frac{1}{5040}$ | |
| 8 | $\frac{2119}{5760}$ | $\frac{103}{280}$ | $\frac{53}{288}$ | $\frac{1}{180}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{360}$ | $\frac{1}{1440}$ | $\frac{1}{40320}$ |

MÉTODOS SSP Runge-Kutta no lineales

Se ha explicado en la introducción que los métodos SSP son con frecuencia utilizados para discretizaciones espaciales no lineales. De este modo, la mayor parte de las investigaciones de hoy en día se han realizado de las derivaciones de los métodos SSP para discretizaciones espaciales no lineales.

MÉTODOS DE SEGUNDO, TERCER Y CUARTO ORDEN NO LINEALES

Aquí se han revisado los métodos óptimos SSP Runge-Kutta de m-estados, con mth-orden para m=2,3,4.

Si se exige que $\mathbf{b}_{i,k} \geq 0$, entonces se puede escribir un método óptimo SSP Runge-Kutta de segundo orden como:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(n)} + \Delta t L(\mathbf{u}^{(n)})$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{(n)} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t L(\mathbf{u}^{(1)})$$

con un coeficiente CFL $c=1$.

Del mismo modo se ha podido escribir un método óptimo SSP Runge-Kutta de tercer orden:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(n)} + \Delta t L(\mathbf{u}^{(n)})$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{u}^{(n)} + \frac{1}{4}\mathbf{u}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(\mathbf{u}^{(1)})$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{3}\mathbf{u}^{(n)} + \frac{2}{3}\mathbf{u}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(\mathbf{u}^{(2)})$$

con un coeficiente CFL $c=1$.

Pero en el caso del cuarto orden, se ha demostrado que no se puede evitar que el coeficiente $b_{i,k}$ aparezca negativo.

El cuarto estado, cuarto orden de la línea de SSP Runge-Kutta con un coeficiente CFL que no es cero, debe tener por lo menos un $b_{i,k}$ negativo.

Del mismo modo se debe convenir en aceptar el hallazgo de una eficiente línea de cuarto orden que contenga a \tilde{L} , el cual maximiza el coste de la operación con $\frac{c}{4+i}$, donde c es el coeficiente CFL e i es el número de la derivada de \tilde{L} .

El mejor método que se ha encontrado es:

$$u^1 = u^n + \frac{1}{2} \Delta t L(u^n)$$

$$u^{(2)} = \frac{649}{1600} u^{(0)} - \frac{10890423}{25193600} \Delta t \tilde{L}(u^n) + \frac{951}{1600} u^{(1)} + \frac{5000}{7873} \Delta t L(u^{(1)})$$

$$u^{(3)} = \frac{53989}{2500000} u^n - \frac{102261}{5000000} \Delta t \tilde{L}(u^n) + \frac{4806213}{20000000} u^{(1)} - \frac{5121}{20000} \Delta t \tilde{L}(u^{(1)}) + \frac{23619}{32000} u^{(2)} + \frac{7873}{10000} \Delta t L(u^{(2)})$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{5} u^n + \frac{1}{10} \Delta t L(u^n) + \frac{6127}{30000} u^{(1)} + \frac{1}{6} \Delta t L(u^{(1)}) + \frac{7873}{30000} u^{(2)} + \frac{1}{3} u^{(3)} + \frac{1}{6} \Delta t L(u^{(3)})$$

Como vemos estamos en las condiciones idóneas para aplicar técnicas de extrapolación a esquemas de bajo orden para obtener órdenes altos sin necesidad de evaluar los operadores adjuntos. El coste computacional será menor.

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

En esta sección presentaremos experimentos numéricos al aplicar una extrapolación polinómica recíproca al RK-SSP de orden 2 para obtener orden tres y dos al de orden tres para obtener orden cinco. Para la parte espacial usaremos el PPHM y el WENO-5 respectivamente.

Se han considerado distintas leyes de conservación escalares en 1 y 2 dimensiones, incluyendo las ecuaciones de Euler. En todos los casos se obtuvieron convergencia a la solución entrópica con gran resolución y con poca viscosidad.

En el Anexo I presentamos varias de las gráficas obtenidas que son análogas a las que aparecen en la literatura con los métodos expuestos sin usar extrapolación y por lo tanto con mayor gasto computacional como ya comentamos en la sección precedente.

BIBLIOGRAFÍA

S. Amat, S. Busquier & V. Candela, *A polynomial approach to PHM method*, The International journal of COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS, **17** (3), 205-217, 2003.

S. Amat, S. Busquier & V.F. Candela, *Local Total Variation Bounded methods for hyperbolic conservation laws*, J. of Comp. Methods in Sciences and Engineering, **3** (3), 193-200, 2003.

S. Amat, S. Busquier & V. Candela, *Reciprocal Polynomial extrapolation*, J. of Comput. Math., **22** (1), 1-10, 2004.

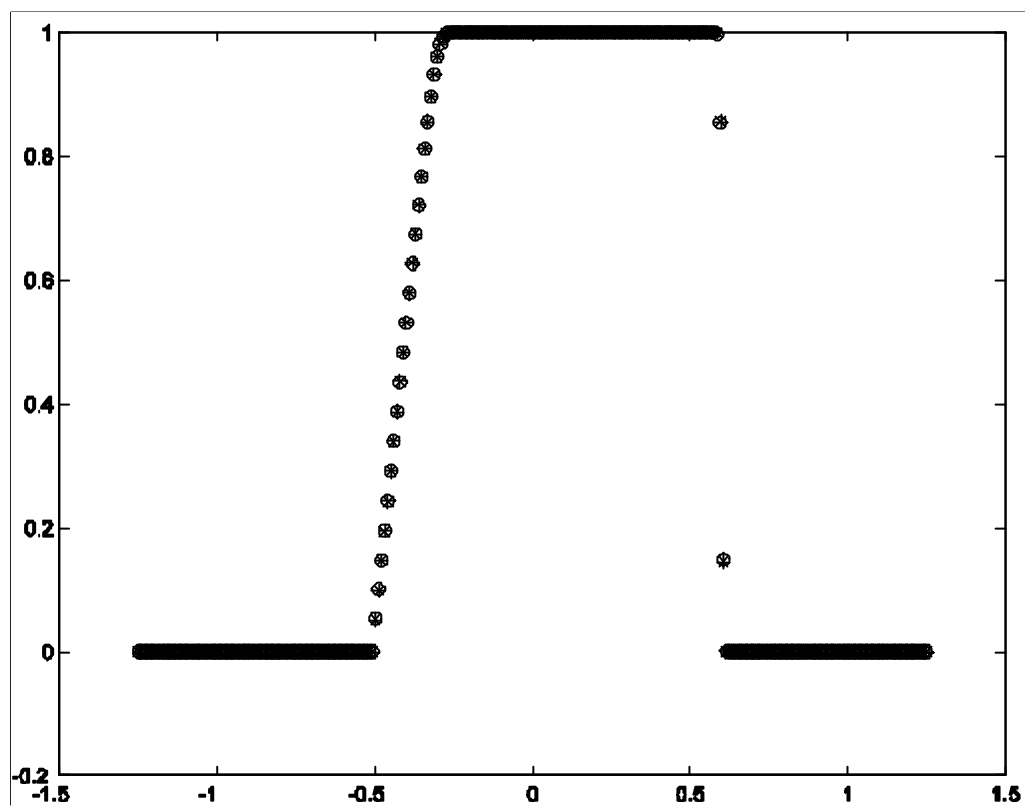
S. Gottlieb, C-W. Shu & E. Tadmor, *Strong stability-preserving high-order time discretization methods*. SIAM Rev., **43** (1), 89-112, 2001

A Marquina, *Local piecewise hyperbolic reconstruction of numerical fluxes for nonlinear scalar conservation laws*. SIAM J. Sci. Comput, **15** (4), 892-915, 1994.

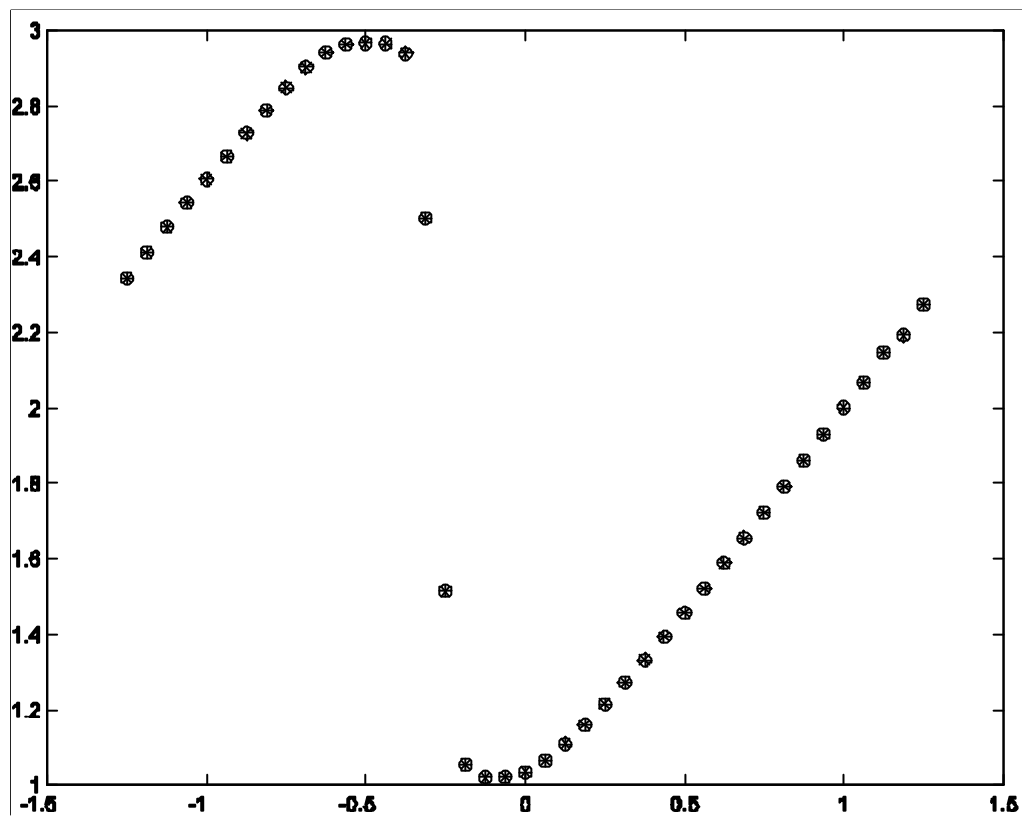
C-W. Shu & E. Oscher, *Efficient implementation of essentially nonoscillatory shock-capturing schemes. II*. J. Comput. Phys., **83** (1), 32-78, 1989.

C-W. Shu, *High order ENO and WENO schemes for computational fluid dynamics. High-order methods for computational physics*, Lect. Notes Comput. Sci. Eng, Springer, Berlin, **9**, 439-582, 1999.

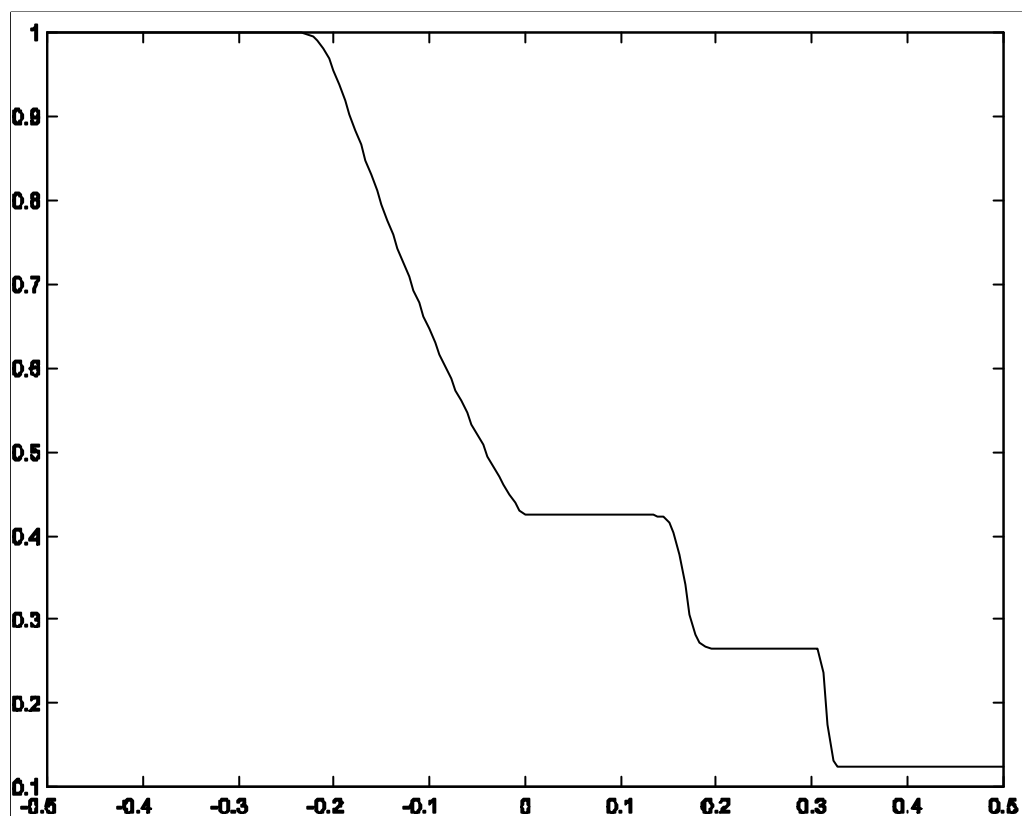
ANEXO I



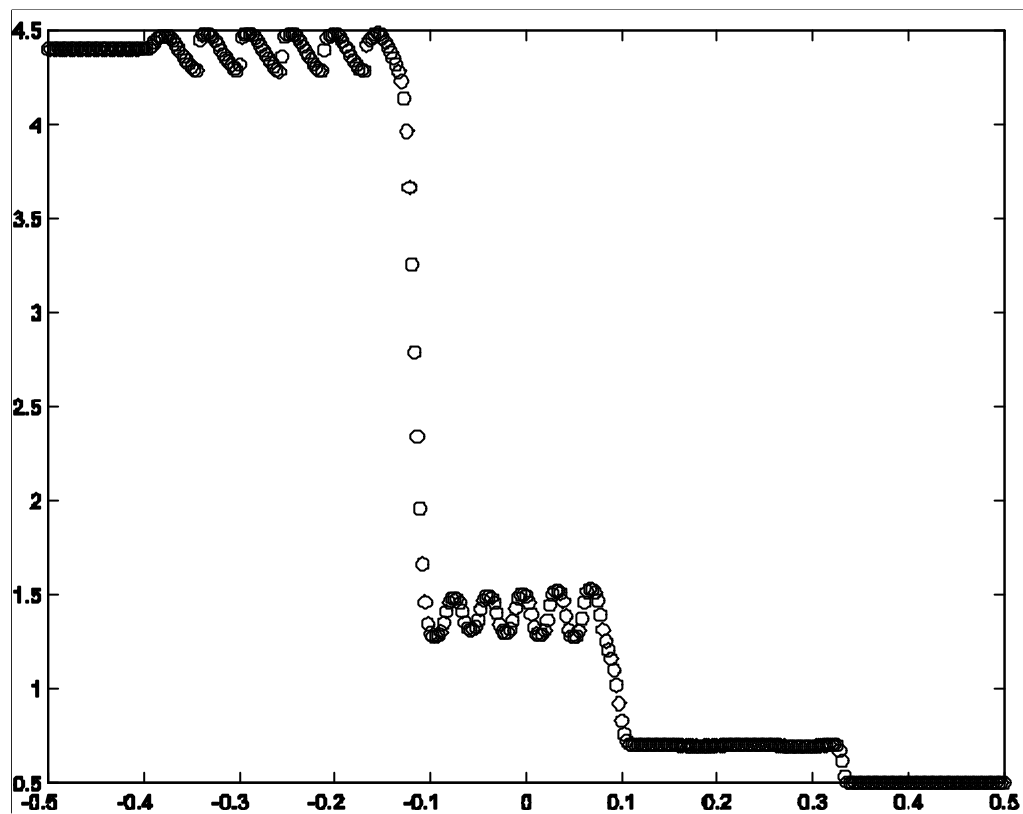
Ecuación de Burgues con dato inicial discontinuo. Discretización temporal utilizando un paso de extrapolación polinómica recíproca y el Runge-Kutta II TVD no lineal. Discretización espacial utilizando el PPHM.



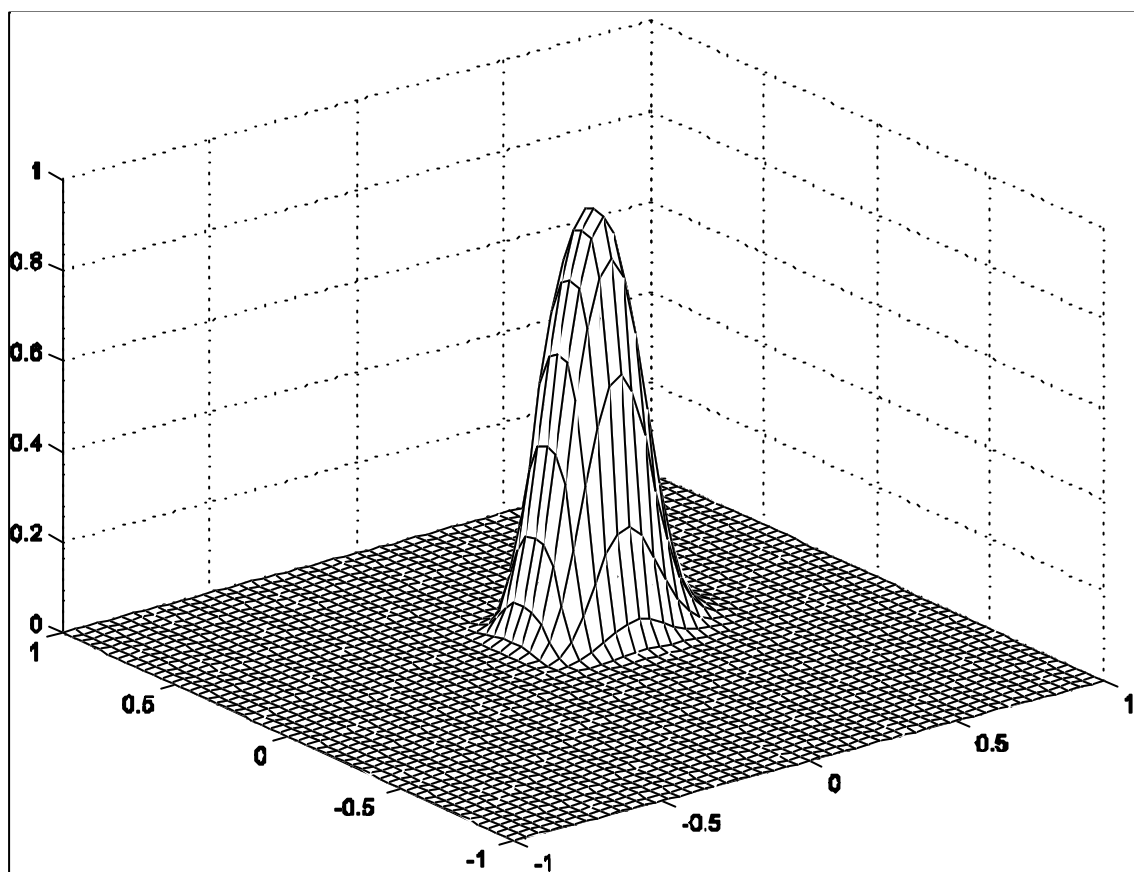
Ejemplo de flujo no convexo con dato inicial discontinuo. Discretización temporal utilizando un paso de extrapolación polinómica recíproca y el Runge-Kutta II TVD no lineal. Discretización espacial utilizando el PPHM.



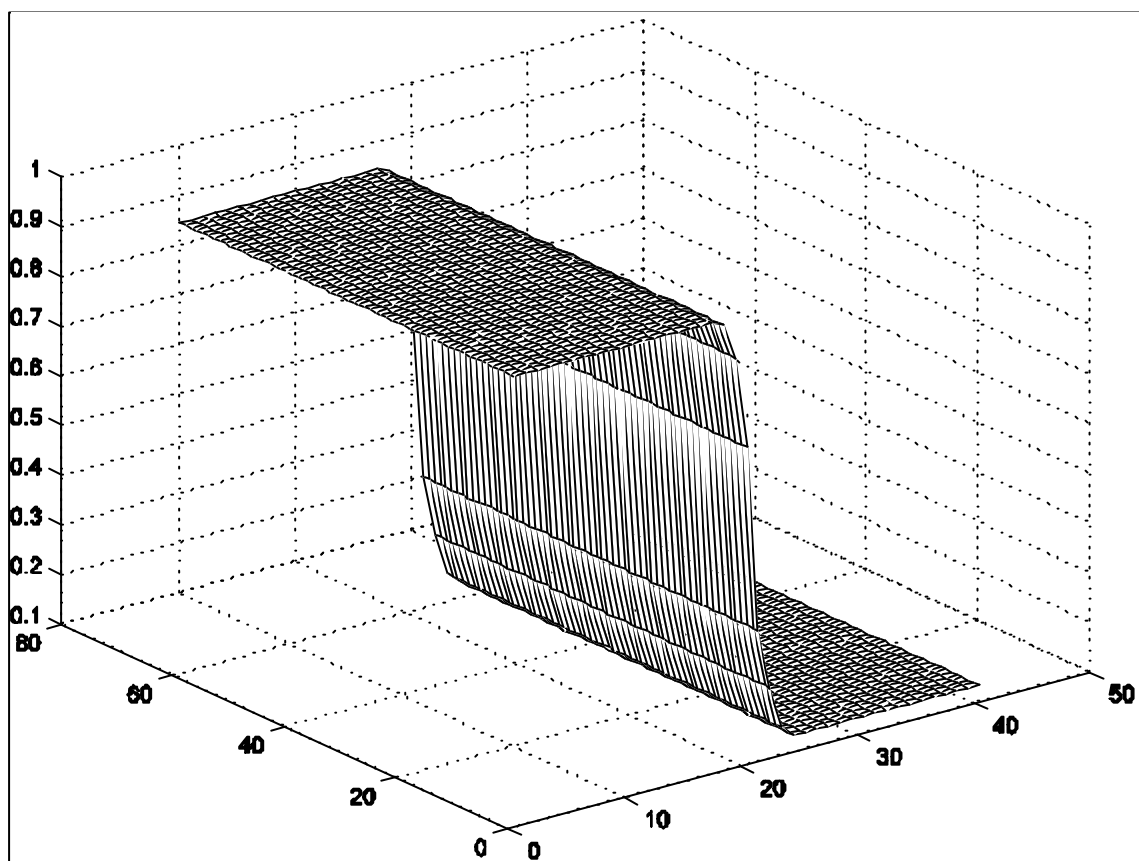
Ecuaciones de Euler en 1-D con dato inicial discontinuo. Densidad. Discretización temporal utilizando un paso de extrapolación polinómica recíproca y el Runge-Kutta II TVD no lineal. Discretización espacial utilizando el PPHM.



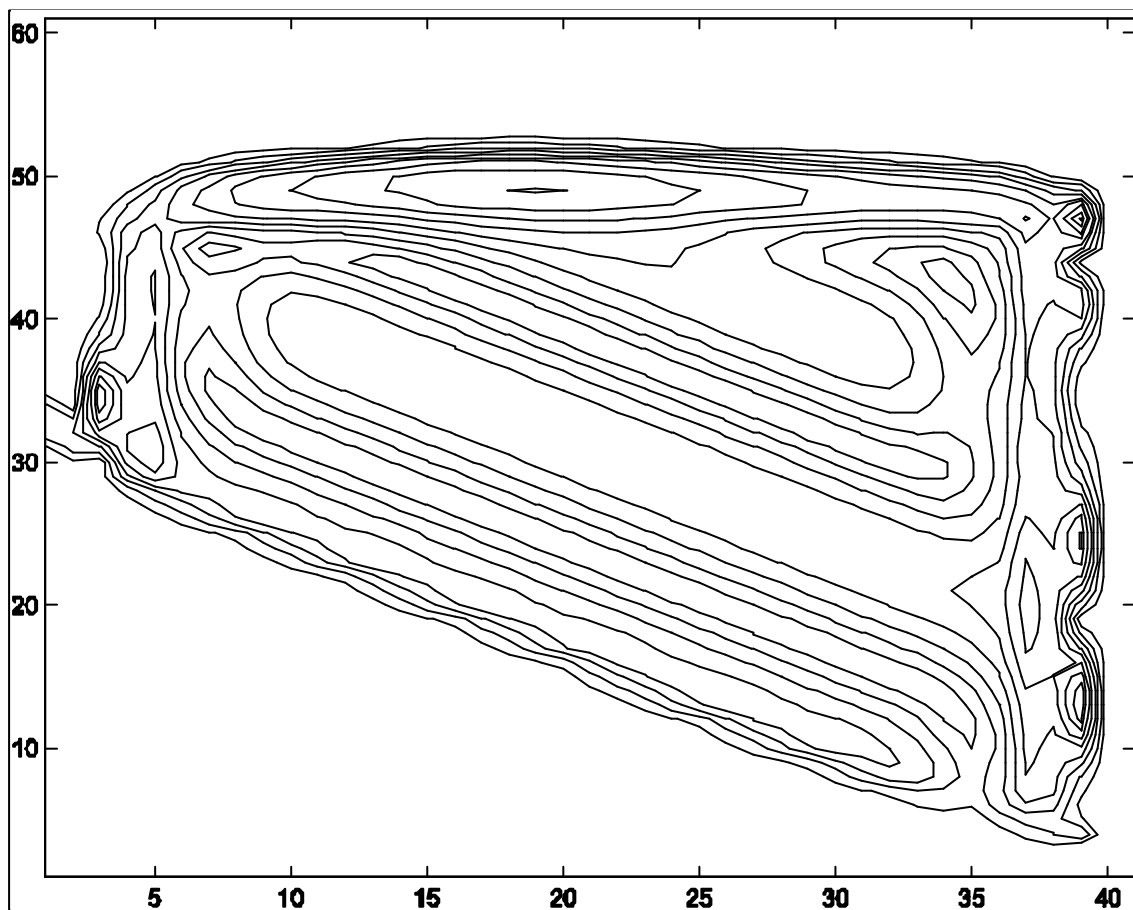
Ecuaciones de Euler en 1-D con dato inicial discontinuo y oscilatorio. Densidad. Discretización temporal utilizando un paso de extrapolación polinómica recíproca y el Runge-Kutta II TVD no lineal. Discretización espacial utilizando el PPHM.



Ecuación lineal en 2-D con dato inicial discontinuo sobre un círculo. Discretización temporal utilizando un paso de extrapolación polinómica recíproca y el Runge-Kutta II TVD no lineal. Discretización espacial utilizando el PPHM.



Ecuaciones de Euler en 2-D con dato inicial un Shock en 1-D. Densidad. Discretización temporal utilizando un paso de extrapolación polinómica recíproca y el Runge-Kutta II TVD no lineal. Discretización espacial utilizando el PPHM.



Ecuaciones de Euler en 2-D con dato inicial complejo. Densidad. Discretización temporal utilizando dos pasos de extrapolación polinómica recíproca y el Runge-Kutta III TVD no lineal. Discretización espacial utilizando el WENO 5.