

Proyecto Fin de Carrera

# Splines Cúbicos Interpolantes en el Diseño Naval



Alumna: *Irene Gallego Valdellós*

Directores: *Juan Carlos Trillo Moya*  
*Carlos Angosto Hernández*

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA NAVAL Y OCEÁNICA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Proyecto Fin de Carrera

# **Splines Cúbicos Interpolantes en el Diseño Naval**

Alumna: *Irene Gallego Valdellós*

Directores: *Juan Carlos Trillo Moya*  
*Carlos Angosto Hernández*

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA NAVAL Y OCEÁNICA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

*Dedicado a cada uno de mis familiares y amigos que me han apoyado en este camino y a todos aquellos profesores que han mantenido mi ilusión por aprender.*

# Índice de Contenidos

---

❖	<b>Introducción.....</b>	<b>1</b>
❖	<b>I - Conceptos básicos .....</b>	<b>3</b>
◆	1-Zonas de referencia del casco de un buque .....	3
◆	2-Dimensiones principales del buque.....	5
◆	3-Planos y líneas de referencia del casco.....	8
❖	<b>II - Representación de formas .....</b>	<b>9</b>
◆	1-Introducción .....	9
◆	2-Ejes de referencia.....	9
◆	3-Representación de las formas de un buque .....	10
▪	3.1-Secciones.....	11
▪	3.2-Líneas de Agua .....	11
▪	3.3-Longitudinales .....	12
▪	3.4-Diagonales.....	12
▪	3.5-Plano de formas .....	13
▪	3.6-Trazado fuera de miembros o fuera de forro .....	14
◆	4-Cartilla de trazado .....	15
❖	<b>III - Métodos para el alisado de formas .....</b>	<b>16</b>
◆	1-Introducción .....	16
◆	2-Métodos históricos.....	17
▪	2.1-Alisado en gálibos.....	17
▪	2.2-Alisado a escala 1/10.....	18
▪	2.3-Inconvenientes de los métodos antiguos .....	19
◆	3-Alisado matemático (faireado) .....	19
◆	4-Métodos gráficos iterativos .....	21
▪	4.1-Modelos de alambre .....	21
▪	4.2-Modelos de superficie.....	22
▪	4.3-Comprobación del alisado.....	23

❖	<b>IV - Curvas suaves en dibujo naval .....</b>	<b>25</b>
◆	1-Introducción .....	25
◆	2-Explicación a partir del dibujo manual .....	25
❖	<b>V - Splines .....</b>	<b>30</b>
◆	1-Introducción .....	30
◆	2-Definición de función Spline .....	31
◆	3-Aplicaciones.....	32
❖	<b>VI - Splines cúbicos interpolantes.....</b>	<b>33</b>
◆	1-Planteamiento del problema .....	33
◆	2-Definición .....	34
◆	3-Condiciones de contorno .....	34
◆	4-Elección de las condiciones de contorno .....	36
◆	5-Elección de los nodos de interpolación.....	37
◆	6-Construcción del Spline cúbico interpolante.....	37
◆	7-Comprobación de sistema compatible determinado.....	42
▪	7.1-Introducción .....	42
▪	7.2-Caso $CI=1, CD=1$ .....	43
▪	7.3-Caso $CI=1, CD=2$ .....	44
▪	7.4-Caso $CI=1, CD=4$ .....	44
▪	7.5-Caso $CI=3, CD=3$ .....	46
▪	7.6-Otros casos.....	47
❖	<b>VII - Resolución de Splines en Matlab .....</b>	<b>48</b>
◆	1-Planteamiento de los datos .....	48
▪	1.1-Datos de entrada y salida.....	48
▪	1.2-Condiciones de contorno .....	49
▪	1.3-Gráficas .....	49
▪	1.4-Mensajes de error .....	49
◆	2-Código .....	51
❖	<b>VIII - Tutorial de la interfaz gráfica .....</b>	<b>58</b>
◆	1-Ejecución de la interfaz.....	58
◆	2-Descripción .....	58
◆	3-Panel de datos iniciales .....	60
◆	4-Panel de condiciones de contorno .....	61

◆	5-Panel de gráficas .....	62
◆	6-Botones de acción .....	63
◆	7-Ejemplo .....	64
❖	IX - Caso práctico .....	69
◆	1-Introducción .....	69
◆	2-Obtención de datos de entrada .....	69
◆	3-Resolución del problema .....	71
◆	4-Conclusiones .....	74
❖	Conclusión.....	77
❖	Bibliografía.....	79

# Índice de Figuras

---

♦ 1.1 Zonas principales de referencia del casco del buque.....	3
♦ 1.2 Sección transversal del casco .....	4
♦ 1.3 Nomenclatura del casco.....	4
♦ 1.4 Esloras del buque .....	5
♦ 1.5 Planos de referencia .....	8
♦ 2.1 Ejes de referencia .....	10
♦ 2.2 Secciones.....	11
♦ 2.3 Líneas de agua .....	12
♦ 2.4 Longitudinales .....	12
♦ 2.5 Diagonales o vagras .....	13
♦ 2.6 Líneas que representan las formas .....	13
♦ 2.7 Plano de formas.....	14
♦ 2.8 Cartilla de trazado .....	15
♦ 3.1 Plano de formas.....	18
♦ 3.2 Modelo de alambre .....	21
♦ 3.3 Modelo de superficie .....	22
♦ 3.4 Comprobación visual del alisado mediante renderizado .....	23
♦ 3.5 Comprobación visual del alisado mediante superficie “cebra” .....	23
♦ 3.6 Representación de la curvatura gaussiana de la superficie .....	24
♦ 3.7 Análisis de la curvatura de la curva .....	24
♦ 4.1 Junquillo sin ajustar .....	25
♦ 4.2 Junquillo traccionado.....	26
♦ 4.3 Fotografía del trazado mediante junquillo.....	26

♦ 4.4 Junquillo controlado con muelles.....	27
♦ 4.5 Junquillo traccionado por muelles.....	28
♦ 5.1 Segmento [a,b] .....	31
♦ 6.1 Derivadas segundas .....	38
♦ 8.1 Elementos de la interfaz .....	59
♦ 8.2 Menú de ayuda y Acerca de... .....	60
♦ 8.3 Panel de datos iniciales.....	60
♦ 8.4 Panel de condiciones de contorno.....	61
♦ 8.5 Panel de gráficas.....	63
♦ 8.6 Botones de acción.....	63
♦ 8.7 Interfaz gráfica completada con el ejemplo .....	65
♦ 8.8 Gráfica valores interpolados .....	66
♦ 8.9 Gráfica Spline cúbico interpolante .....	66
♦ 8.10 Primera derivada del Spline cúbico interpolante .....	66
♦ 8.11 Segunda derivada del Spline cúbico interpolante .....	67
♦ 8.12 Salida del Programa .....	68
♦ 9.1 Caja de cuadernas.....	70
♦ 9.2 Propiedades de los puntos.....	70
♦ 9.3 Interfaz gráfica completada .....	72
♦ 9.4 Spline de la sección reconstruida .....	72
♦ 9.5 Primera derivada de la sección reconstruida .....	73
♦ 9.6 Segunda derivada de la sección reconstruida .....	73
♦ 9.7 Curva original y reconstruida acopladas .....	74
♦ 9.8 Cambio en la uniformidad de la curvatura.....	75



# Introducción

---

Referente al proceso de diseño y alisado de la carena de un buque, actualmente estamos acostumbrados a manejar distintos programas de ordenador que nos muestran la superficie tridimensional que creamos a partir de un conjunto de curvas bidimensionales (correspondientes a los longitudinales, líneas de aguas y secciones). O bien adaptando una superficie base a la forma representada por unos puntos marcadores de la geometría del buque (puntos de la cartilla de trazado).

Se ha avanzado mucho desde hace unos pocos años cuando aún era necesario aprender a dibujar manualmente cada una de las curvas, mediante el uso de junquillos y plomos, para realizar un plano de formas a partir de una cartilla de trazado; lo cual conllevaba muchas horas de trabajo, no sólo para conseguir unas curvas suaves que representaran una superficie alisada, sino para conseguir cuadrar cada uno de los puntos y obtener un dibujo limpio y claro sin imperfecciones. Por no decir que la única manera de ver la superficie en 3D era construyendo un modelo a escala de madera u otros materiales.

Como bien sabemos, debido a la complejidad que entraña representar y modificar las formas de un buque directamente mediante una ecuación matemática, seguimos valiéndonos de las representaciones gráficas para el proceso de alisado de la carena, ya sea en 3D o a través de un plano de formas.

Aunque no seamos conscientes de su uso al dibujar y modificar las distintas curvas mediante las que representamos nuestros planos de formas, estamos utilizando curvas Spline, que se caracterizan por la suavidad con la que cambia su curvatura; es decir, que son ideales para obtener una carena alisada sin “abolladuras”, “pliegues” o “arrugas” que causen perturbaciones en el flujo que atraviesa. Estas imperfecciones en el alisado conllevan un aumento de la resistencia al avance y por consiguiente generan un mayor gasto de combustible o pérdida de velocidad disminuyendo, en definitiva, la eficiencia del buque.

Así pues, considerando la importancia de este tipo de curvas en el diseño naval, vamos a adentrarnos en su definición matemática. A partir de los conocimientos adquiridos sobre la construcción matemática de Splines cúbicos interpolantes, se

desarrollará, mediante Matlab, un programa y una interfaz gráfica que permitan a cualquier usuario con conocimientos básicos construir una curva suave que pase por una serie de puntos dados y con unas condiciones de contorno determinadas. Además de las expresiones de los polinomios cúbicos que definen el Spline se obtendrán su gráfica y la de su primera y segunda derivada, puesto que éstas ayudan a analizar la pendiente y el cambio de curvatura de la curva que se diseñe. También cabrá la posibilidad de utilizar la curva suave construida de esta forma para interpolar valores intermedios que se deseen conocer.

En particular, el objetivo es aplicar todos los conocimientos que se aprendan sobre la construcción de los Splines cúbicos interpolantes mediante el programa que se desarrolle utilizando el lenguaje de programación Matlab. Y ya que este proyecto constituye el final de una ingeniería técnica naval, aplicaremos lo aprendido a un caso práctico en el que se desee obtener la expresión matemática que define una curva suave, la cual forme parte de un plano de formas que represente el casco de un buque. Para ello nos valdremos de la interfaz gráfica que se desarrolle, de forma que, además de obtener las expresiones de los polinomios cúbicos que definen el Spline, obtengamos la gráfica de su primera derivada y la de su segunda derivada, las cuales permiten analizar la forma y la suavidad de la curva construida con este método.

# I - Conceptos básicos

---

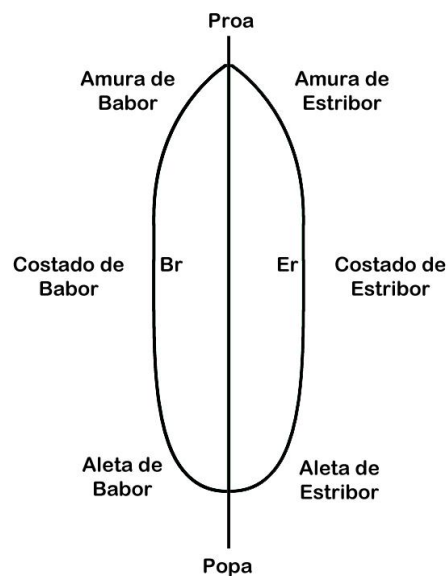
**1- Zonas de referencia del casco de un buque**

**2- Dimensiones principales del buque**

**3- Planos y líneas de referencia del casco**

## 1. Zonas de referencia del casco de un buque

Las principales zonas de referencia en las que se divide el casco de un buque son las siguientes:



*Figura 1.1: Zonas principales de referencia del casco del buque*

- Proa (Pr)**: Es la parte delantera del buque en el sentido normal del movimiento
- Popa (Pp)**: Es la parte posterior del buque en el sentido normal del movimiento.
- Estribor (Er)**: Es la banda o costado del buque que queda a la derecha de un observador que mira hacia proa.
- Babor (Br)**: Es la banda o costado del buque que queda a la izquierda de un observador que mira hacia proa.
- Amura**: Zona de los costados de proa del buque.
- Aleta**: Zona de los costados de popa del buque.
- Través**: Dirección perpendicular al costado del buque.

Transversalmente, podemos encontrar las siguientes zonas:

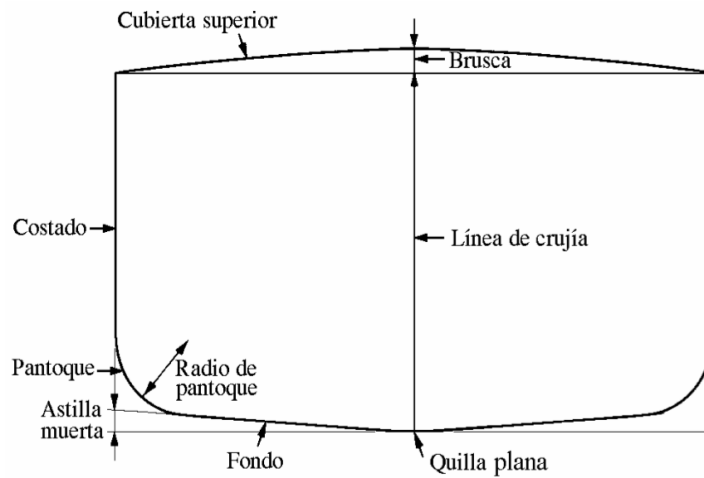


Figura 1.2: Sección transversal del casco

- Cubierta superior:** Superficie de cierre superior del casco.
- Forro:** Superficie que forma el cierre exterior del casco.
- Quilla plana:** Zona inferior y en crujía del forro del casco.
- Fondo:** Parte inferior del casco, junto a la quilla.
- Pantoque:** zona curva de unión entre el fondo y el costado del barco.
- Costado:** Cada uno de los laterales del casco, entre el pantoque y la cubierta superior.
- Brusca:** Es la curvatura transversal de la cubierta medida por la altura de la cuerda en crujía, desde la cara inferior de la cubierta hasta el punto más alto del costado.
- Astilla muerta:** elevación de la cuaderna sobre el plano base, medida en la mitad de la manga.

La nomenclatura que recibe el casco visto longitudinalmente es la siguiente:

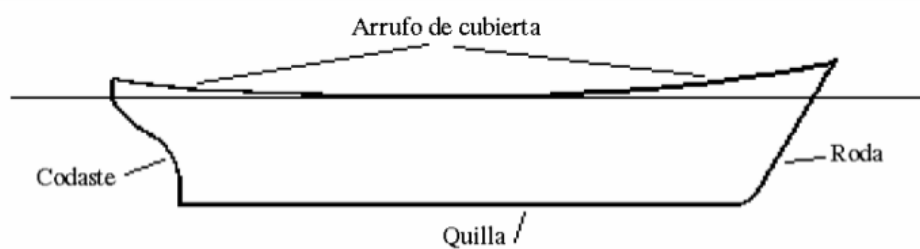


Figura 1.3: Nomenclatura del casco

- Roda:** Es la zona más a proa del casco, donde se unen los costados.
- Codaste:** Es la zona más a popa del casco, donde se unen los costados por debajo de la flotación.
- Arrufo de cubierta:** Es la curvatura estructural que se le da a la cubierta en sentido longitudinal. El arrufo varía a lo largo de la eslora siendo mayor en los extremos.

## **2. Dimensiones principales del buque**

### **2.1 Eslora**

Dimensión del barco en sentido longitudinal, es decir, de proa a popa. Se pueden considerar diferentes esloras, las cuales se detallan a continuación.

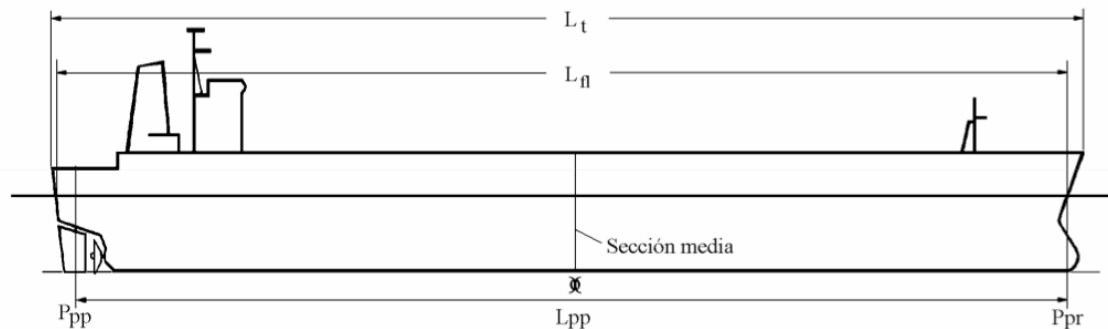


Figura 1.4: Esloras del buque

-**Eslora entre perpendiculares:** Se representa por  $L_{PP}$  y es la dimensión longitudinal de trazado del casco del buque, medida horizontalmente entre las perpendiculares de proa y popa, siendo:

Perpendicular de proa: la línea imaginaria perpendicular a la flotación de trazado o proyecto, que pasa por el punto de intersección de la roda con dicha flotación.

Perpendicular de popa: la línea imaginaria perpendicular a la flotación de trazado o proyecto, que pasa por la mecha del timón, o bien, por la cara de popa del codaste popel en caso de codaste cerrado.

La mitad del buque se considera que está en la mitad de la eslora entre perpendiculares, siendo la *sección media* la sección transversal que se encuentra en esa posición.

**-Eslora en una flotación:** Se representa por  $L_{FL}$  y es la máxima longitud del buque en la intersección de esa flotación con la proa y popa del buque.

**-Eslora total:** Se representa por  $L_T$  y es la máxima longitud del buque entre los puntos más alejados a proa y popa.

**-Eslora de Francobordo:** Es el 96% de la eslora total en una flotación situada a una altura sobre el canto superior de la quilla igual al 85% del puntal de trazado, o bien, la eslora desde la cara de proa de la roda al eje de la mecha del timón en esa misma flotación, si este último valor es mayor.

## **2.2 Manga**

Dimensión de barco en sentido transversal. Se puede distinguir entre las siguientes mangas:

**-Manga de trazado:** Se representa por la letra B y es la máxima dimensión transversal de trazado del casco del buque a lo largo de la eslora. En los barcos de madera y materiales compuestos, las dimensiones de trazado son fuera de forros, sin embargo, en los cascos metálicos son fuera de miembros. Por tanto, en buque metálicos, la manga fuera de forros es igual a la manga de trazado más el espesor del forro por ambos costados.

**-Manga en una flotación:** Es la manga máxima en la flotación considerada.

## **2.3 Puntal**

Dimensión en sentido vertical del buque. Se pueden considerar los siguientes puntales:

**-Puntal de trazado:** Se representa por la letra D y es la máxima distancia vertical de trazado del casco del buque, medida en el costado y en la sección media. En barcos de casco metálico, es la distancia desde el canto alto de la quilla hasta la cara inferior de la cubierta superior.

Cuando el buque tenga trancañil curvo, el puntal se medirá hasta el punto de intersección de la línea de trazado de la cubierta con la del costado, prolongando

imaginariamente las líneas. Trancanil es la zona de cubierta en su unión con el costado del barco.

**-Puntal de bodega:** Es la distancia vertical desde la cara alta del fondo, o doble fondo, hasta la cara inferior de la cubierta más baja.

**-Puntal de entrepuente:** Es la distancia vertical entre dos cubiertas contiguas, dentro de una misma bodega. Entrepuente es la zona de bodega entre dos cubiertas de la misma, pues un barco puede tener más de una cubierta.

#### **2.4 Calado**

Distancia vertical correspondiente a la parte sumergida del buque. Se pueden considerar los siguientes calados:

**-Calado de trazado:** Se representa por la letra T y es la distancia vertical de trazado de la parte sumergida del casco del buque por debajo de la flotación de trazado o proyecto, medida en la sección media.

**-Calado en una flotación o calado real en esa flotación:** Es el calado medido desde la cara inferior o exterior de la quilla hasta el nivel de la flotación correspondiente.

**-Calado a proa:** Se representa por  $T_{Pr}$  y es el calado real del buque en la perpendicular de proa.

**-Calado a popa:** Se representa por  $T_{Pp}$  y es el calado real del buque en la perpendicular de popa.

**-Calado en la sección media:** Es el calado en la sección media del buque.

**-Calado medio:** Es la semisuma de los calados a proa y popa.

**-Asiento o trimado:** Es la diferencia entre el calado de popa menos el calado de proa. Esa diferencia es mayor que cero cuando el calado de popa es mayor que el de proa, y se dice que el buque tiene asiento positivo. Cuando la diferencia es negativa, se dice que el buque tiene asiento negativo.

### **3. Planos y líneas de referencia del casco**

El casco de un buque se puede cortar según un conjunto de tres planos perpendiculares entre sí, paralelos a los planos de un triedro .

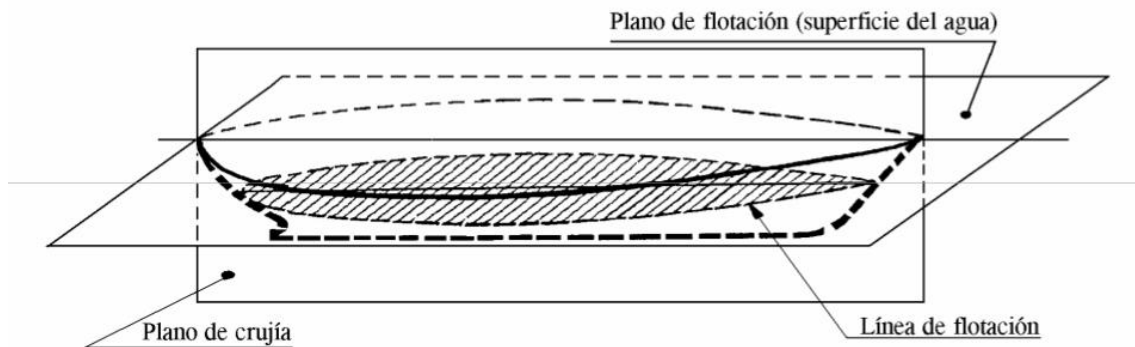


Figura 1.5: Planos de referencia

**-Plano de crujía:** Es el plano de simetría del barco en sentido longitudinal. La intersección de este plano con el casco se llama *línea de crujía*. Los planos paralelos a éste se llaman *planos longitudinales* y sus líneas de corte con el casco se llaman *longitudinales*.

**-Plano de flotación:** Es el plano que representa la superficie del agua sin oleaje. Se define el plano de flotación de trazado como aquel situado a la altura del calado de trazado o de proyecto del buque, es decir, al calado que se estima que tendrá el buque sin tener que corresponder al real necesariamente.

La intersección del plano con el casco se llama *línea de flotación de trazado*. Las intersecciones de planos paralelos a éste se llaman *líneas de agua*. El plano paralelo que pasa por el canto alto de la quilla en la sección media se denomina *plano base* y su intersección con el plano de crujía es lo que se denomina como *línea base*.

**-Plano transversal:** Es un plano perpendicular a los dos descritos anteriormente, sus intersecciones con el casco se llaman *secciones* o *cuadernas de trazado*, cuyo conjunto forma la *caja de cuadernas*.



# II - Representación de formas

---

## **1- Introducción**

## **2- Ejes de referencia**

## **3- Representación de las formas de un buque**

### *3.1 Secciones*

### *3.2 Líneas de Agua*

### *3.3 Longitudinales*

### *3.4 Diagonales*

### *3.5 Plano de formas*

### *3.6 Trazado fuera de miembros o fuera de forro*

## **4- Cartilla de trazado**

### **1. Introducción**

La base fundamental para poder estudiar las características geométricas que definen el casco de un buque es tener la representación de sus formas trazadas a escala. Dicho trazado es lo que se denomina plano de formas.

### **2. Ejes de referencia**

Para la representación de las formas de un buque es necesario considerar un sistema de referencia tridimensional ortogonal asociado al mismo.

Aunque hay unos estándares fijados respecto a la ubicación del origen y el sentido de los ejes, no existe una norma única, por lo que será importante señalar siempre el criterio utilizado. Los dos más extendidos son el europeo y el americano.

El origen O, lo fijamos transversalmente en el plano de crujía o de simetría del buque. Verticalmente se posicionará sobre la línea base que se considere. Pero longitudinalmente varía según su utilidad. Si el plano de formas será utilizado en el diseño y la construcción, lo ubicaremos en la perpendicular de popa (criterio europeo)

o bien en la de proa (criterio americano). En cambio, si va a ser utilizado en pruebas hidrodinámicas, conviene situar el origen en la sección media, pues permite determinar la posición longitudinal del centro de carena respecto a dicha sección directamente.

Respecto al eje OX longitudinal, en el criterio europeo el sentido positivo es de Popa a Proa y en el criterio americano al contrario.

Respecto al eje OY transversal, en el criterio europeo el sentido positivo es de Estribor a Babor y en el criterio americano al contrario.

Respecto al eje OZ vertical, ambos criterios coinciden siendo el sentido positivo de la quilla hacia la cubierta.

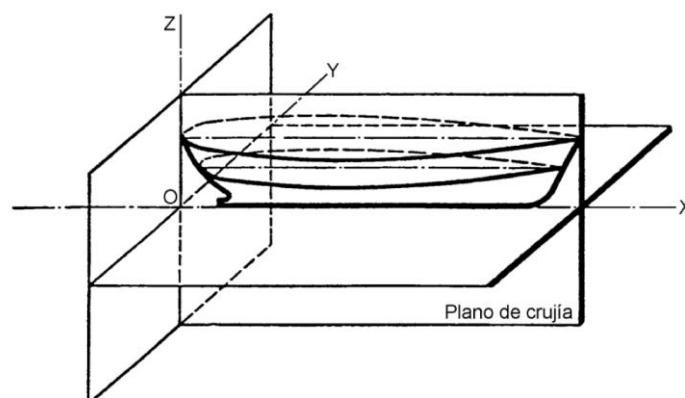


Figura 2.1: Ejes de referencia

### **3. Representación de las formas de un buque**

Como ya hemos indicado, las formas de un buque se representan en el plano de formas. Dicho plano consta de un conjunto de líneas representadas en tres proyecciones ortogonales, obtenidas al cortar el buque por un sistema de planos paralelos a los tres planos del triedro tri-rectángulo que conforma el sistema de referencia utilizado. Por tanto, mediante el plano de formas es posible situar en el espacio cualquier punto de la superficie del casco del buque.

Teniendo en cuenta que los buques suelen ser simétricos, sólo representa la mitad de babor del casco.

### 3.1 Secciones

En la proyección del plano transversal se representan las *secciones* o *cuadernas de trazado*. Que se forman por los cortes del casco con planos paralelos al plano contenido por los ejes OY y OZ.

Las secciones de la mitad de proa se representan a la derecha de la traza de la línea de crujía y las de la mitad de popa a la izquierda de ésta, en la vista del plano llamada *caja de cuadernas*.

Normalmente el buque se divide en 10 o 20 partes iguales, por lo que existirán 11 o 21 secciones equidistantes, según sean las necesarias para cubrir los cambios de forma a lo largo de la eslora. Es decir que para buques de grandes esloras se usarán 20 secciones. Además, en los finos de proa y popa se utilizarán secciones auxiliares (con una separación de un cuarto o un medio del intervalo normal), para definir mejor las curvaturas de esas zonas.

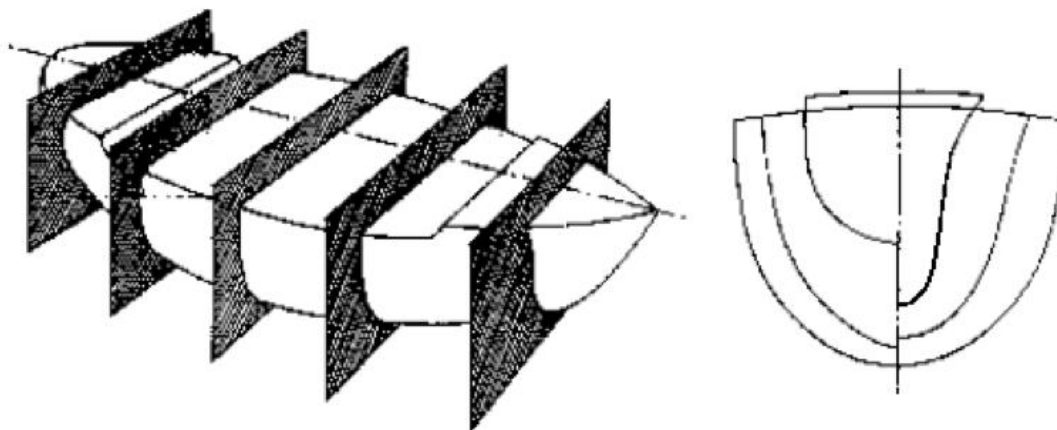


Figura 2.2: Secciones

### 3.2 Líneas de Agua

En la proyección del plano horizontal se representan las *líneas de agua*. Las cuales se forman por los cortes del casco con planos paralelos al de la flotación, que será paralelo al contenido por los ejes OX y OY.

La línea del plano base será la cero y la línea del plano de la flotación se hará coincidir con la 6, equiespaciando el resto entre las mismas. En barcos de mayor calado se pueden utilizar 10 en vez de 6 para definir mejor las curvaturas. Por el mismo motivo también se suele incluir una línea de agua  $\frac{1}{2}$ , separada medio intervalo de la línea base.

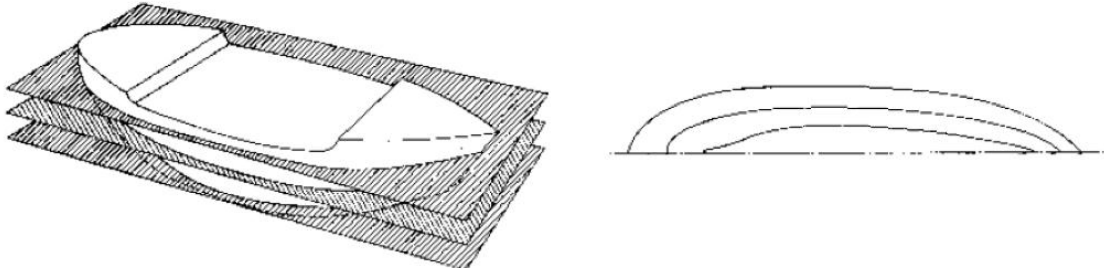


Figura 2.3: Líneas de agua

### 3.3 Longitudinales

En la proyección del plano longitudinal se representan las *líneas longitudinales* o *longitudinales*. Las cuales se forman por los cortes del casco con planos paralelos al plano de crujía, contenido por los ejes OX y OZ.

El número de longitudinales queda a criterio del proyectista, pero habitualmente se usan entre 3 y 6 equidistantes, sin contar con la línea de crujía e indicándose siempre en números romanos.

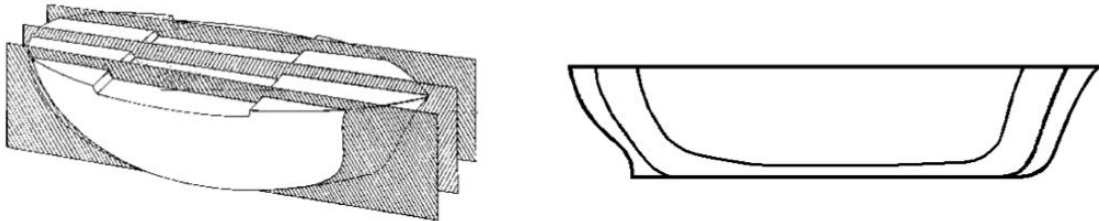


Figura 2.4: Longitudinales

### 3.4 Diagonales

Ampliando la información ofrecida por estas líneas, existen otras de apoyo para definir las formas del casco, denominadas *vagras* o *diagonales*. Las cuales resultan de cortar el buque por planos perpendiculares al transversal y que forman un ángulo determinado con el plano de crujía. Con estas líneas se obtiene una mayor precisión en determinadas zonas del buque, como el pantoque, evitando cometer errores que producirían “abolladuras” en la superficie del casco.

Su número y ángulo es variable, siendo habitual representar al menos dos de ellas. Se dibujan en la proyección horizontal, por la parte inferior de crujía para no mezclarlas con las líneas de agua.

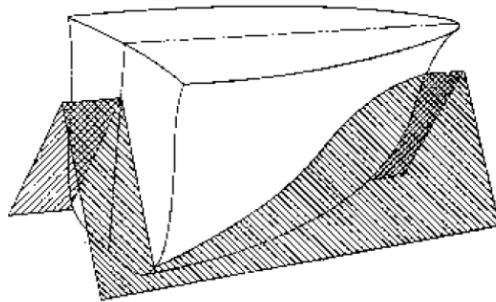


Figura 2.5: Diagonales o vagras

### 3.5 Plano de formas

Recopilando los distintos conjuntos de líneas proyectadas en sus distintos planos de referencia, podemos ver en la siguiente figura lo que acabamos de describir.

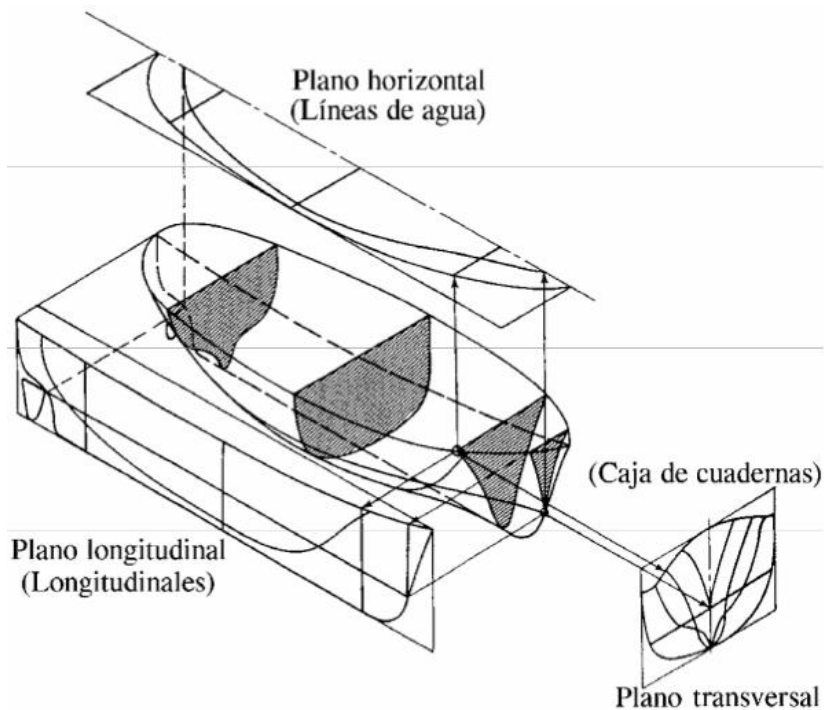


Figura 2.6: Líneas que representan las formas

Situando estas líneas sobre un plano obtenemos el *plano de formas*, si seguimos unos criterios básicos como: que la proyección horizontal se encuentre por debajo de la longitudinal coincidiendo las marcas de las secciones; y que la caja de cuadernas se sitúe a continuación de la proyección longitudinal de forma que las marcas de las

líneas de agua coincidan, o bien se sitúe en el centro de la misma en caso de que la longitud el cuerpo cilíndrico se lo permita.

Según el criterio europeo las secciones se cuentan desde la perpendicular de popa, de 0 a 10/20 y el buque se sitúa con la proa mirando hacia la derecha. Sin embargo en EEUU el buque se sitúa al contrario, con la proa mirando hacia la izquierda, y por tanto la numeración de las mismas empieza en la perpendicular de proa.

Además de las líneas ya descritas, en el plano de formas se incluyen también las intersecciones de las cubiertas con el plano de crujía y con el transversal. Quedando por tanto representadas las cubiertas en la proyección longitudinal y en la caja de cuadernas.

En la siguiente figura podemos ver un ejemplo de un plano de formas que sigue el criterio europeo.

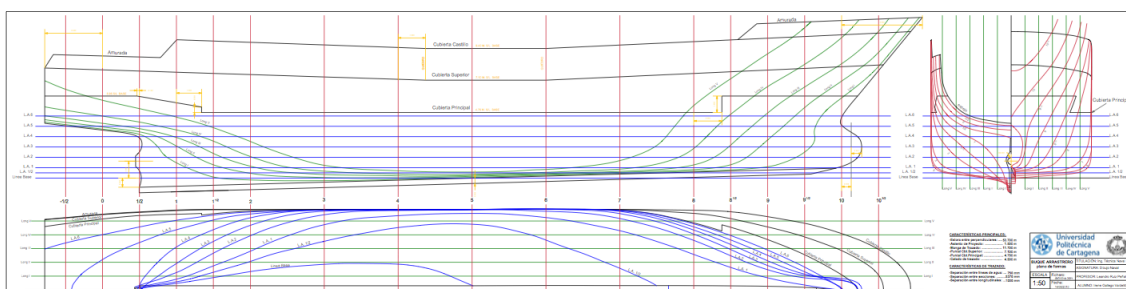


Figura 2.7: Plano de formas

### 3.6 Trazado fuera de miembros o fuera de forro

A la hora de trazar la superficie del casco, también influye el material del que esta fabricado, puesto que en caso de ser metálico las dimensiones de las líneas de trazado no tienen en cuenta el espesor del forro exterior, lo que se denomina: *trazado fuera de miembros*. En caso de embarcaciones de madera o materiales compuestos si se tiene en cuenta el espesor del forro exterior, por lo que se realiza un *trazado fuera de forros*.

Esto se debe a que en el caso de los buques metálicos, al ser el espesor de la plancha tan pequeño al escalarlo, desde el punto de vista del trazado en plano conlleva errores prácticamente despreciables. Sin embargo, en las embarcaciones de madera o materiales compuestos el forro exterior adquiere unas dimensiones mayores, por lo que no tenerlo en cuenta llevaría a errores importantes, más aún si tenemos en cuenta

que este tipo de embarcaciones suelen ser de menor eslora y por tanto el escalado al trazar es menor.

### **4. Cartilla de trazado**

Las formas también quedan definidas mediante la cartilla de trazado, la cual consiste en una serie de cifras que representan los puntos en el espacio de la superficie del casco. Estos puntos corresponden a las intersecciones de las líneas de agua con las secciones; indicando la distancia de estas a la línea de crujía, es decir, las semimangas.

Además también se describe la posición del principio y del final de cada cuaderna, indicándose mediante los pies de las cuadernas y la intersección de éstas con las cubiertas. Para definir bien los perfiles de la roda, el codaste y la forma alta de la popa, es necesario realizar un croquis.

Secciones

	C0	C1/2	C1	C1 1/2	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
L.A. 0	-----	-----	-----	-----	0,15	0,46	0,6	0,2	-----	-----	-----	-----	-----
L.A. 1	-----	-----	-----	-----	0,46	1,91	3,11	3,16	2,49	1,61	0,83	0,31	-----
L.A. 2	-----	-----	-----	0,48	1,49	3,28	4,13	4,18	3,68	2,74	1,66	0,7	-----
L.A. 3	-----	-----	0,36	1,64	2,83	4,14	4,62	4,66	4,22	3,3	2,11	0,94	-----
L.A. 4	-----	-----	1,63	3,05	3,85	4,58	4,87	4,91	4,54	3,64	2,42	1,12	-----
L.A. 5	-----	1,92	3,28	3,98	4,43	4,81	4,98	5	4,72	3,9	2,66	1,27	-----
L.A. 6	-----	3,39	4,04	4,43	4,71	4,93	5,02	5,03	4,84	4,11	2,88	1,43	0
L.A. 7	-----	4,02	4,44	4,7	4,87	5,01	5,05	5,05	4,92	4,28	3,11	1,6	0,06
L.A. 8	-----	4,28	4,61	4,84	4,97	5,04	5,06	5,07	4,98	4,43	3,34	1,8	0,13
L.A. 9	-----	4,39	4,69	4,9	5,03	5,06	5,07	5,1	5,02	4,59	3,6	2,04	0,22
L.A. 10	3,99	4,46	4,76	4,94	5,05	5,09	5,1	5,11	5,05	4,76	3,89	2,32	0,35
Alt. Cub.	5,7	5,7	5,7	5,7	5,8	5,85	6,05	6,2	6,4	6,5	6,87	7,4	8,05
Sem. Cub.	4,02	4,48	4,78	4,95	5,06	5,1	5,12	5,12	5,1	5,05	4,7	3,77	1,62
Alt. Pie C.	-----	2,235	1,448	0,635	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,13	0,225	0,32	0,4	0,33
Sem. Pie C.	-----	0	0	0	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,15	0	0

Figura 2.8: Cartilla de trazado

# III - Métodos para el alisado de formas

---

## **1- Introducción**

## **2- Métodos históricos**

*2.1 Alisado en gálibos*

*2.2 Alisado a escala 1/10*

*2.3 Inconvenientes de los métodos antiguos*

## **3- Alisado matemático (faireado)**

## **4- Métodos gráficos iterativos**

*4.1 Modelos de alambre*

*4.2 Modelos de superficie*

*4.3 Comprobación del alisado*

## **1. Introducción**

Al referirnos al alisado, lo hacemos para describir un proceso de “suavizado”, un proceso corrector de las formas con el objetivo de hacerlas aptas para los procesos posteriores como el desarrollo de las mismas.

El método práctico manual consiste en levantar ciertas pesas para relajar el junquillo en la zona en la que está forzado, y volver a colocarlas en la nueva posición. Esto suaviza y alisa la curva, pero no necesariamente mantiene la forma original. Así pues, este método basa su exactitud en la experiencia personal de quien realiza el alisado o corregido de formas.

De manera automática se puede suavizar una curva o una superficie, pero éstas pierden su forma original pudiendo no guardar bien la relación con las formas deseadas para el buque. Es decir, aún es necesario el juicio humano para conseguir el equilibrio entre alisado y forma correcta. Por ello con los programas informáticos actuales, los métodos de alisado gráficos iterativos se basa en una combinación de técnicas matemáticas y manuales.



A continuación vamos a ver los métodos, tanto históricos como actuales, de conseguir una carena alisada, es decir, sin discontinuidades, abolladuras o fallos en la correspondencia entre proyecciones.

## **2. Métodos históricos**

Entre los sistemas históricos que se utilizaron en los astilleros podemos hablar de dos: Alisado en gálibos y a escala 1/10.

### **2.1 Alisado en gálibos**

Es un método manual de alisado. Su finalidad era tener una base firme sobre la que efectuar el trazado de manera que las distintas partes se pudieran construir con la mayor exactitud. Se ejecutaba reproduciendo un plano de formas a escala natural sobre el piso de la sala de gálibos, dibujándose la caja de cuadernas y las mitades de proa y popa.

La sala donde se realizaba el trabajo tenía que tener, evidentemente, unas dimensiones suficientes para que este dibujo se pudiera trazar sin interrupciones. El piso tenía que ser de madera de gran espesor para permitir cepillados sucesivos cuando lo requiriese la claridad del dibujo, normalmente estaba pintado de negro con el objetivo de facilitar el marcado. La sala debía tener buena iluminación y carecer de columnas que entorpecieran la continuidad de las líneas y, además, tenía que encontrarse próxima al taller para poder llevar a él, sin grandes recorridos, las plantillas de madera que se generasen.

Las líneas rectas se dibujaban con un cordel impregnado en tiza blanca (líneas inferiores a 5 m) o mediante un alambre de acero situado a cierta altura del suelo refiriéndose a éste su proyección mediante escuadras o niveles verticales o mediante trazados por aparatos ópticos basados en un haz de luz. En el caso de las líneas curvas, se usaban barrotes o junquillos de madera deformable elásticamente, teniendo menor sección en aquellas zonas donde las curvaturas resultaban más pronunciadas, quedando a criterio del trazador el alisado de las formas del buque.

## 2.2 Alisado a escala 1/10

Se basa en obtener, de un dibujo a escala 1/10, una cartilla de trazado. Es un método también manual pero más exacto que el anterior, de menor esfuerzo y con menor número de horas de trabajo. Permite además, mediante el uso de clichés realizados sobre un papel transparente e indeformable, la utilización de las máquinas de corte a escala: el mecanismo lector estaba constituido por cabezales provistos de un vástago que siguen el contorno del dibujo existente en el cliché y lo copian en la máquina. Esto ocasionó que se impusiera rápidamente frente al sistema de alisado en gálibos.

A partir de los datos de la cartilla de trazado se ha de construir el plano de formas, que tendrá tres vistas: la caja de cuadernas, las líneas de agua y el alzado del buque y en el que estarán representadas las secciones de trazado, las líneas de agua, las secciones longitudinales y las diagonales.

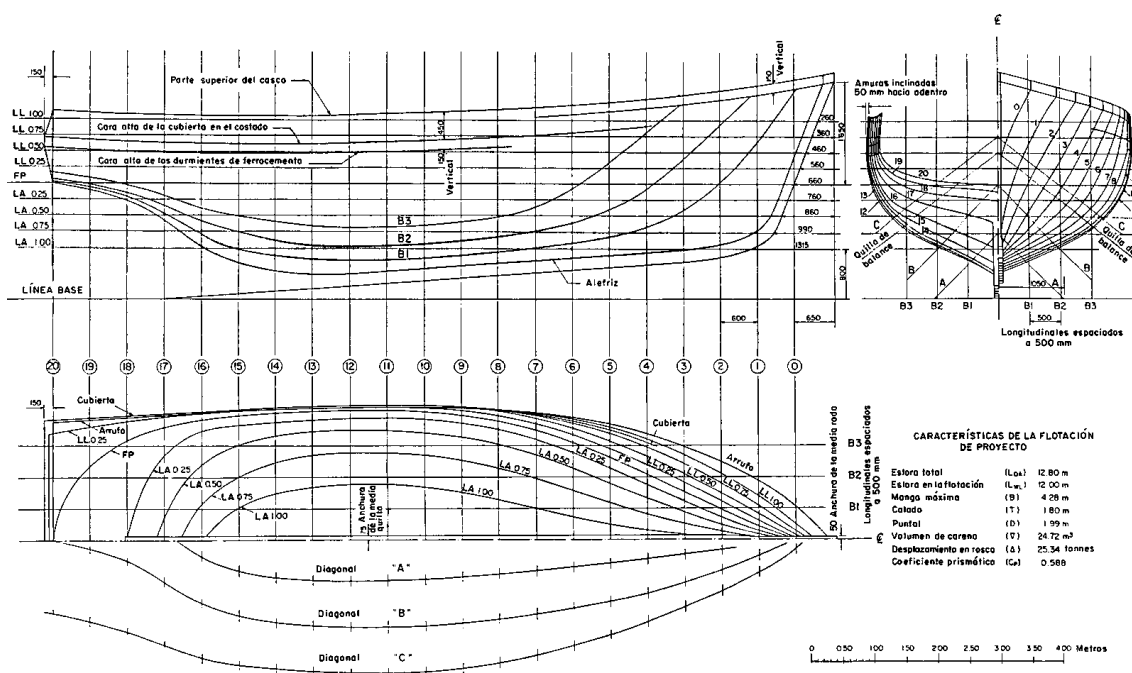


Figura 3.1: Plano de formas

El proceso de alisado de estas líneas se realiza con el junquillo, procurando que pase de forma forzada por todos los puntos definidos en la cartilla de trazado, ya que de lo contrario habría que pensar que existe un error en el sitio en cuestión. En el caso de puntos con dificultades ante el trazado del junquillo, lo habitual es pasarlo de forma promediada por todos ellos. Hay que tener en cuenta que la rectificación de un punto en una vista, trae consigo modificaciones de los correspondientes en las restantes proyecciones. Una vez armonizados todos los puntos de manera que haya una exacta

correspondencia entre las proyecciones, se modifica la cartilla de trazado inicial, si procede.

Las zonas más conflictivas de alisar son las concernientes a los finos de proa y popa y se puede considerar que habiendo logrado el alisado de estas zonas, queda resuelto el de todo el buque.

### ***2.3 Inconvenientes de los métodos antiguos***

Los principales inconvenientes de estos métodos podríamos resumirlos en:

- El primero requiere grandes superficies, un equipo costoso y mucha mano de obra.
- La suavidad de las curvas se juzga de forma subjetiva, por la "vista" del trazador y nunca por medio de normas absolutas e independientes del operario.
- Los procesos requieren muchas transmisiones de datos que siempre inducen a cometer errores más o menos importantes.
- Su ejecución requiere un tiempo muy dilatado, con el retraso consiguiente en la obtención de las formas definitivas.
- Al ser los resultados finales de forma gráfica, no están adecuados al control numérico de las actuales máquinas de corte y han de someterse a otro proceso intermedio para obtención de valores numéricos.

## **3. Alisado matemático (faireado)**

También conocido como alisado por métodos numéricos, es un sistema que se utiliza actualmente como primer escalón del alisado.

En éste método, la función que representa los valores discretos se desarrolla por aproximaciones de la curvatura, que se define por los puntos que se han dado y que se unen por medio de integraciones sucesivas o por el método de los mínimos cuadrados, utilizando para ello una función cúbica o el ajuste de arcos circulares o parabólicos, en el que el círculo o parábola que representa la curva pasa por tres puntos consecutivos, siendo el último de los puntos el primero del tramo siguiente.

El sistema divide el buque en tres zonas: Central o cilíndrica, cuerpo de proa y cuerpo de popa. Los dos últimos se separan del primero por lo que se conoce como zona

límite del cuerpo cilíndrico, que no es otra que el lugar geométrico de los puntos de la carena que se encuentran en la tangencia de las líneas de agua de esas zonas.

Suele aconsejarse alisar primero la popa, luego la zona límite, después el cuerpo cilíndrico y seguir así hasta terminar por la proa.

La definición de la superficie del casco por métodos matemáticos tiene por objeto obtener con rapidez datos precisos que se puedan utilizar en el proyecto del buque y en su construcción, así como en la aplicación al control numérico de las diferentes máquinas herramienta.

Podríamos decir que los requisitos exigibles para la correcta definición matemática de las formas con el auxilio del ordenador son:

- Que no introduzca variación alguna en los parámetros esenciales que caracterizan el proyecto ni el comportamiento de la carena.
- La superficie resultante debe satisfacer los criterios de suavidad y alisado.
- Debe lograrse la exactitud y precisión que se exija.
- La superficie del casco se expresa mediante una familia de curvas generadas por ecuaciones matemáticas.

De los programas de alisado por métodos numéricos existentes, se puede destacar el AUTOKON como uno de los de mayor difusión e importancia.

Entre los problemas de este método para la obtención de un casco alisado podemos destacar:

- Se supone que la carilla de trazado o de los datos que definen el casco representarán una superficie perfectamente alisada. Pero este caso es raro, puesto que casi siempre los datos de los que partimos corresponden a superficies que deberán sufrir pequeñas modificaciones para un correcto alisado. Algo que un proceso automático no tiene en cuenta.
- La superficie que resulta de un proceso automático de interpolación es normalmente demasiado densa para permitir una razonable modificación interactiva, pues al interpolar se genera un punto de control por cada punto que se tenga como dato de las formas. Por lo que, si posteriormente se quiere cambiar porque esté incompleta, distorsionada o sin alisar, es imposible modificarla de forma práctica.

- Es muy difícil para los métodos automáticos tratar las discontinuidades que pueden tener las formas de un buque, que se perderán en el proceso.

Por tanto, el uso eficiente de éste método pasa por incluir herramientas de ajuste manual y herramientas de ajuste semiautomático, que permitan corregir las formas suavizadas para conseguir la carena requerida alisada.

El éxito o fallo de los intentos de ajustar las superficies, no está tan determinado por los métodos matemáticos empleados, sino más bien por la habilidad en la preparación de los datos que capturan la topología esencial de la superficie.

## **4. Métodos gráficos iterativos**

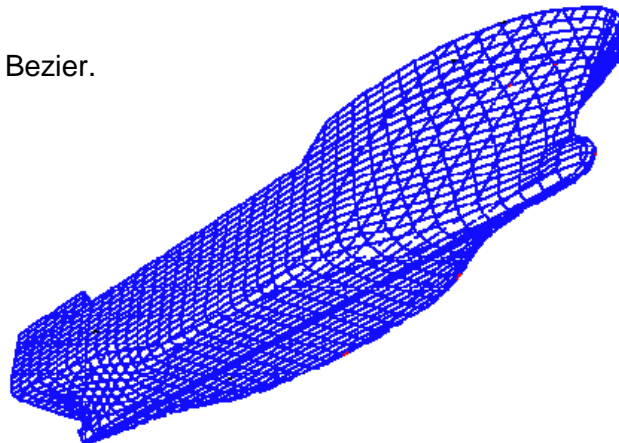
Entre estos podemos destacar como más vanguardistas y con más futuro a dos de ellos:

- 1- Modelos de alambre, mediante la definición numérica de líneas que estructuran el buque.
- 2- Modelos de superficie, utilizando la definición de superficies que, mediante “parches”, permitan hacer la cubrición de toda la carena del barco.

### **4.1 Modelos de alambre**

En el caso de los modelos de alambre, la definición matemática de líneas se utiliza diferentes procedimientos como son:

- La simulación del junquillo.
- Biarcos.
- Splines.
- Curvas de Bezier.
- B-splines.



*Figura 3.2: Modelo de alambre*

En la siguiente tabla se puede apreciar la comparación entre las características más destacables de todos estos procedimientos.

	Junquillo	Bi-arco	Spline	Bezier	B-spline
Dificultad cálculo	baja	baja	alta	media	media
Deformación almacenada	Todos los puntos, y dos más	Todos los puntos y dos tangentes	Todos los puntos	Puntos polígono	Puntos polígono y orden
Calidad del control	Buena	Buena	Pobre	Pobre	Excelente
Tipo de control	Puntos datos	Puntos datos y tangentes	Puntos datos y tangentes	Nº y vértices del polígono	Nº y vértices del polígono
Dificultad codillos	Pseudo-curva	Distintas tangentes	Partir curva	Partir curva	Nuevo polígono

#### 4.2 Modelos de superficie

En este caso lo que se pretende es ajustar una superficie, también denominada “parche”, a una malla de puntos que definen los lugares por los que ha de pasar el casco del buque. Los tipos de superficies que utilizan estos programas se centran en

- Superficies de Conos.
- Superficies de Bezier.
- B-Splines.
- Superficies de Nurbs.

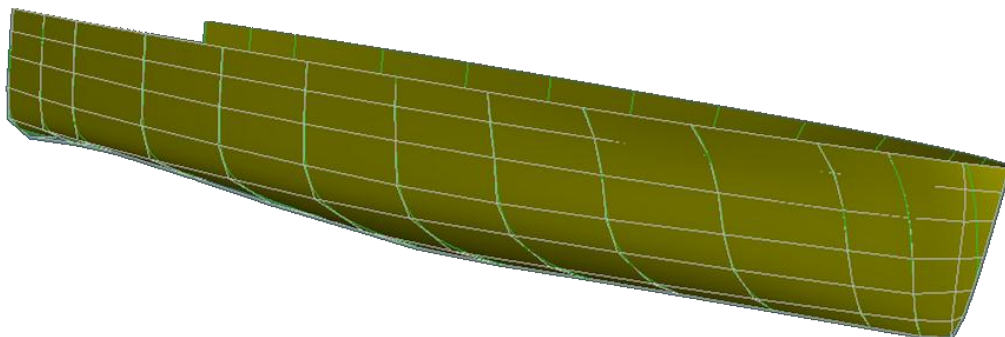


Figura 3.3: Modelo de superficie

### 4.3 Comprobación del alisado

En relación al análisis de alisado, estos programas incorporan varios sistemas, entre los que se encuentran:

- La comprobación visual mediante la aplicación de un rayo de luz sobre el casco renderizado o bien mediante un renderizado tipo “metal bruñado” que permiten ver las curvaturas del casco.

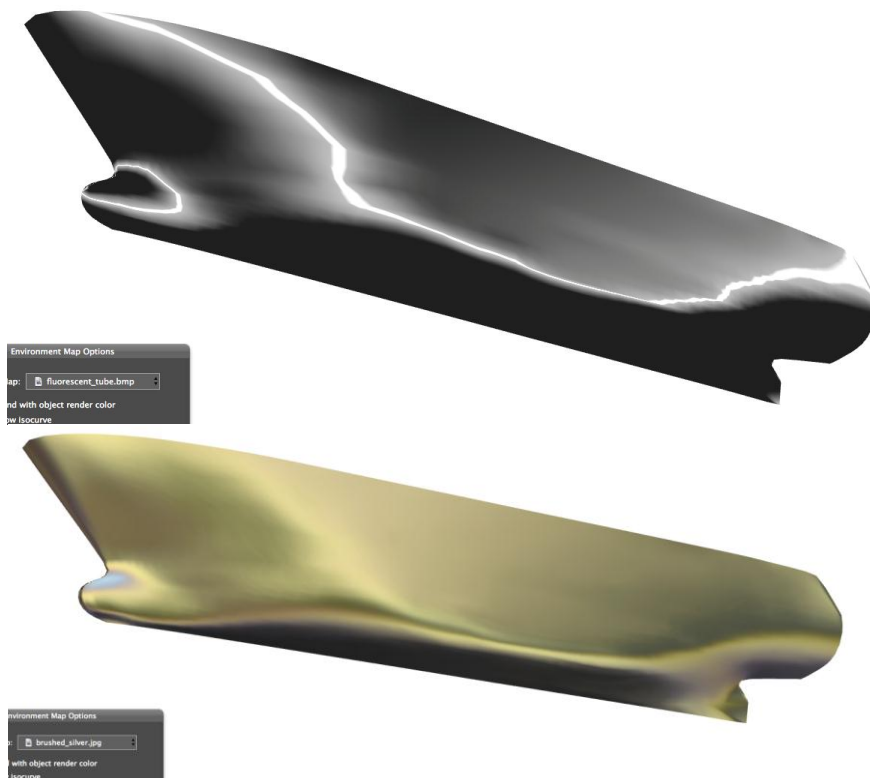


Figura 3.4: Comprobación visual del alisado mediante renderizado

- La comprobación visual mediante una superficie tipo “cebra”.

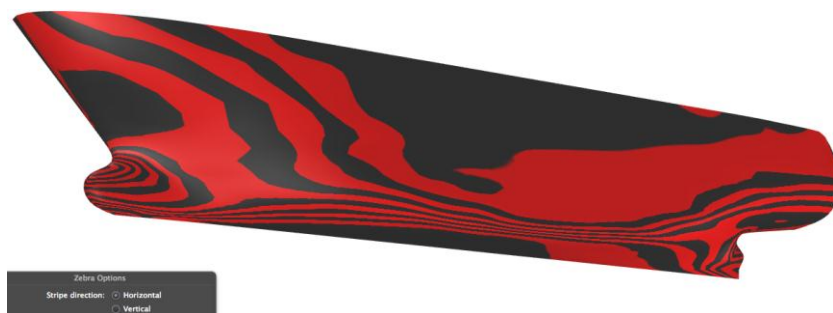
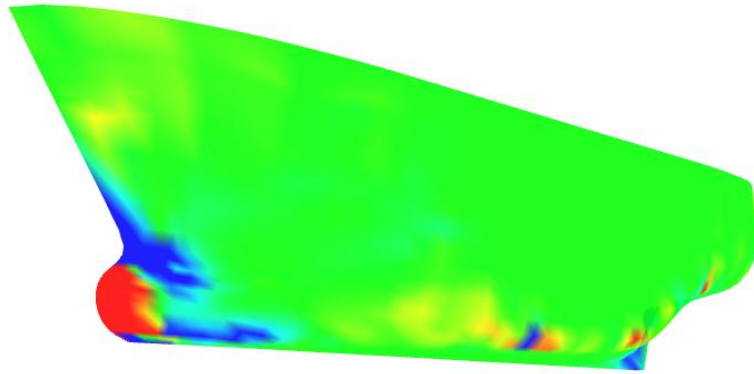


Figura 3.5: Comprobación visual del alisado mediante superficie “cebra”

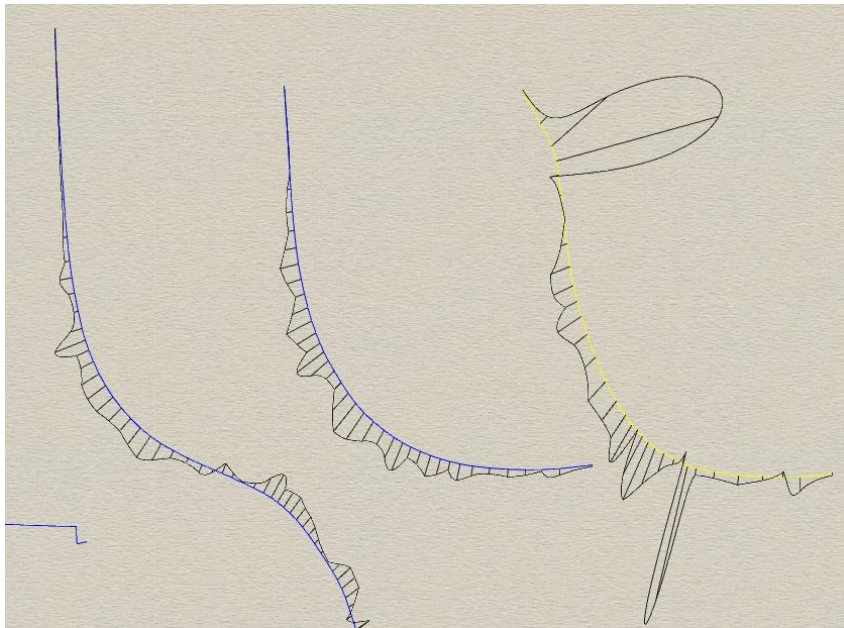


- La representación en color de la curvatura gaussiana de la superficie.



*Figura 3.6: Representación de la curvatura gaussiana de la superficie*

- Análisis de la curvatura de las curvas, usualmente se realiza mediante el cálculo de la segunda derivada de la curva. Estando nuestra curva alisada si la variación de la curvatura es uniforme.



*Figura 3.7: Análisis de la curvatura de la curva*

Las principales dificultades de estos sistemas podríamos resumirlas en que su manejo no resulta por el momento demasiado sencillo y requiere un aprendizaje más o menos complejo y prolongado (experiencia).



# IV - Curvas suaves en dibujo naval

---

## 1. Introducción

### 2. Explicación a partir del dibujo manual

#### 1. Introducción

Como hemos visto, el método gráfico iterativo es el más usado actualmente por las ventajas y los buenos resultados que proporciona. En este método se pueden usar distintos tipos de curvas y superficies, aunque a lo largo de este proyecto nos centraremos en definir, tanto desde el punto de vista del dibujo como del matemático, los Splines cúbicos.

En primer lugar, para entender el concepto básico de este tipo de curvas, vamos a explicarlas haciendo una analogía a partir de cómo se trazan de manera manual las distintas líneas de agua, longitudinales y secciones de un plano de formas con un junquillo.

#### 2. Explicación a partir del dibujo naval manual

Cuando los arquitectos navales desean dibujar manualmente curvas bidimensionales suaves, hacen uso de junquillos (“splines” en inglés) flexibles. Fijando los extremos de los mismos y aplicando una carga en uno o más puntos intermedios a lo largo del junquillo, éste se deforma según una curva que se puede trazar sobre un plano. La suavidad de la curva dependerá de la flexibilidad del junquillo y de la posición exacta de los puntos de control, pero sólo con seguir unas pocas reglas sencillas la curvatura resultante será suave.

Al principio el junquillo yacerá recto sobre el tablero de dibujo

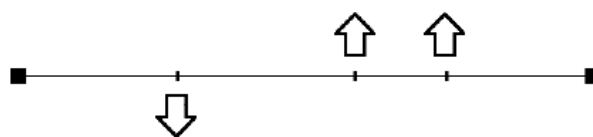


Figura 4.1: Junquillo sin ajustar

Al traccionar el junquillo por un determinado número de puntos ayudándonos de unos plomos, su flexibilidad natural dará como resultado una curva suave usada para dibujar.



Figura 4.2: Junquillo traccionado

En la siguiente figura podemos ver como un estudiante traza una curva ayudado de un junquillo para definir la curva.

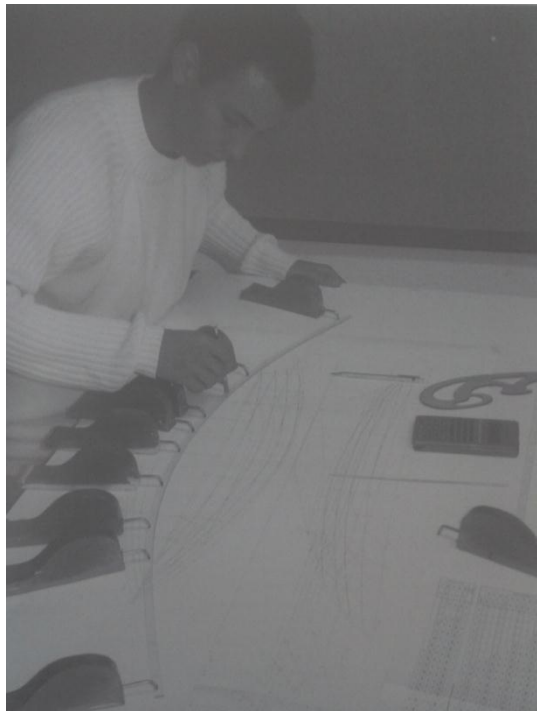


Figura 4.3: Fotografía del trazado mediante junquillo

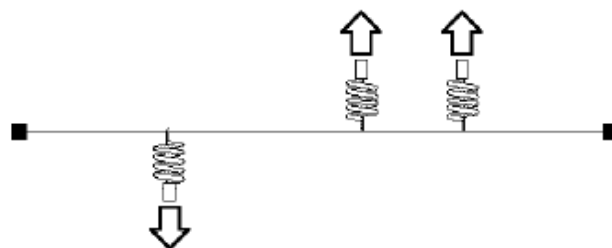
Técnicamente podemos describir un Spline considerando una regla flexible idealmente fina, la cual pasa por los puntos de control (plomos o apoyos):  $(t_i, y_i) \forall i = 0, 1, \dots, m - 1, m$  del arreglo dispuestos en el plano  $(x, y)$ . De acuerdo con la ley de Bernoulli – Euler, la ecuación linealizada de la regla encorvada es:  $EIS''(x) = M(x)$  donde  $S(x)$  es la flexión,  $M(x)$  es el momento flector, que varía linealmente de apoyo en apoyo, y  $EI$  es la rigidez de la regla. La función  $S(x)$  que describe la forma de la regla es un polinomio de tercer grado entre cada dos puntos vecinos del arreglo, y es dos veces diferenciable con continuidad en todo el intervalo  $[a, b]$ .

Con un procedimiento similar al de los junquillos podemos utilizar la ecuación matemática que define las curvas Spline. Que como en ellos, define la curva en función de la posición de sus puntos extremos, la posición y el número de puntos de control a lo largo de la curva y la flexibilidad del junquillo.

En los Splines cúbicos interpolantes los puntos de control coinciden con los puntos por donde ha de pasar la curva. En cambio, en los Splines cúbicos suavizantes los puntos de control atraen la curva hacia si con unos coeficientes denominados pesos. Esto es que, en vez de por una fila de plomos apoyados a lo largo del junquillo, los Splines cúbicos suavizantes se conforman mediante los puntos de control que se podrían considerar fijados al junquillo mediante muelles. Cuando los puntos de control se mueven, la flexibilidad propia del junquillo y de los muelles se combina para mantener la curva suave.

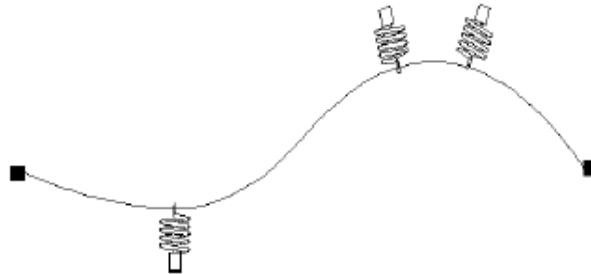
Una consecuencia evidente de esto es que los puntos de control no se hallan sobre la curva creada, sino que la curva es atraída hacia la posición de los puntos de control, y entonces los puntos por los que ha de pasar la curva sólo coinciden con los puntos de control en los extremos. Esto es por lo que, a la hora de alisar las curvas en el dibujo naval asistido por ordenador, nos puede costar un poco más entender como hemos de variar la posición de los puntos de control para obtener el movimiento de la curva deseado. Siendo en ocasiones el movimiento de un punto de control un poco más alejado de la zona a modificar el que logra la forma que deseamos. Por ello, aunque actualmente tengamos la ayuda de un programa informático, el alisado naval tiene ciertas componentes que dificultan su realización a los novatos, siendo necesaria la experiencia y en cierto modo el arte del arquitecto naval veterano.

De este modo un junquillo originalmente recto se arrastra a su nueva forma desde un número determinado de puntos.



*Figura 4.4: Junquillo controlado con muelles*

La curva resultante es suave con sólo los dos puntos de control de los extremos situados sobre la curva.



*Figura 4.5: Junquillo traccionado por muelles*

Moviendo los puntos de control a una u otra posición, es posible curvar el junquillo hasta una forma dada. La curvatura del junquillo estaría libre de irregularidades debido a la elasticidad de los muelles y la flexibilidad del propio junquillo. Así vemos la importancia de poner el menor número de puntos de control posibles, ya que a mayor número de puntos, mayor número de inflexiones y posibles cambios bruscos.

Con esta analogía, hemos podido entender de forma básica los Splines cúbicos interpolantes, así como sus diferencias con los suavizantes. Más adelante se definirán y detallarán desde el punto de vista matemático.

Aunque estamos viendo la explicación con dos dimensiones, los programas informáticos usan un procedimiento análogo para generar sus curvas en tres dimensiones, siendo capaces de generar superficies a partir de éstas. Del mismo modo que una fila de puntos de control bidimensionales puede definir una curva bidimensional, una red de puntos de control tridimensionales puede definir una superficie tridimensional completa.

Si se considera una malla tridimensional de puntos de control, es posible imaginar las curvas situadas a lo largo y a lo ancho de la red, definiendo así una superficie.

La malla se forma por filas y columnas de puntos de control, con cuatro bordes y cuatro esquinas. Se pueden utilizar más o menos número de filas y columnas dependiendo de la complejidad de la superficie deseada. Dicha superficie puede tener diferente flexibilidad en cada una de las direcciones de filas o columnas.

El efecto que un punto de control tiene sobre la superficie depende principalmente de si se halla en una esquina, en un borde o en el interior de la malla.

- Las esquinas de una superficie se definen exactamente por la posición de la esquina correspondiente de la malla.
- Los bordes se definen sólo por los puntos de control del borde correspondiente de la malla.
- Los puntos internos de la superficie pueden estar influidos por la posición de un gran número o incluso de todos los puntos de control de la malla.

# V - Splines

---

## **1. Introducción**

## **2. Definición de función Spline**

## **3. Aplicaciones**

### **1. Introducción**

En la práctica las formas de las curvas y superficies son tan complejas que no siempre pueden ser expresadas analíticamente como un todo en términos de funciones elementales. Por eso, es necesario construirlas a partir de fragmentos suaves relativamente simples: arcos de curvas o elementos de superficie, cada uno de los cuales puede ser descrito con ayuda de funciones elementales. De este modo cada fragmento será suave, pero tendremos que prestar mucha atención para que mantengan esa suavidad en las zonas de empalme entre fragmentos.

Para que la tangente a lo largo de toda la curva compuesta sea suave, es suficiente utilizar polinomios de tercer grado para la construcción de los fragmentos de curvas. El uso de polinomios de grados más altos puede generar oscilaciones indeseadas en la curva resultante. Los coeficientes de los polinomios deberán ser elegidos de modo que la curvatura de la curva sea continua.

Los Splines cúbicos de problemas unidimensionales pueden ser acondicionados para la construcción de fragmentos de superficie; surgiendo entonces, y de manera natural, los Splines bicúbicos. Éstos, son descritos mediante polinomios de tercer grado respecto a cada una de las dos variables.

El proceso con dos dimensiones requiere mayor volumen de cálculos, pero gracias a la técnica computacional, se pueden llevar a cabo obteniendo buenos resultados.

## 2. Definición de función Spline

Supongamos que en el segmento  $[a,b]$  está dado un retículo

$$w : a = t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = b.$$

Los puntos  $t_1$  y  $t_m$  se llaman *nodos fronterizos* del retículo  $w$ , y los puntos  $t_2, \dots, t_{m-1}$  son *nodos interiores*.

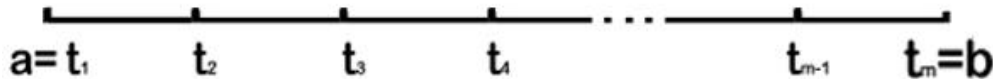


Figura 5.1: Segmento  $[a,b]$

Una función  $S(x)$ , definida en el segmento  $[a,b]$ , se llama Spline de orden  $p + 1$  (de grado  $p$ ) si:

1) en todo segmento

$$\Delta_i = [t_i, t_{i+1}] \quad \forall i = 1, \dots, m - 1$$

es un polinomio de grado  $\leq p$ :

$$S(x) = S_i(x) = \sum_{k=0}^p a_k^{(i)} (x - t_i)^k \quad \forall i = 1, \dots, m - 1.$$

En todo el segmento, el Spline es un polinomio de grado  $p$  con  $p + 1$  coeficientes. En total se tienen  $(m - 1)$  segmentos parciales. Consecuentemente, para determinar completamente el Spline es necesario hallar  $(m - 1)(p + 1)$  números.

2) es  $p - 1$  veces diferenciable con continuidad en el segmento  $[a, b]$ :

$$S(x) \in C^{p-1}[a, b].$$

Esta condición implica la continuidad de la función  $S(x)$  y sus derivadas  $S'(x), S''(x), \dots, S^{p-1}(x)$  en todos los  $m - 2$  nodos interiores del retículo  $w$ . Por tanto, para hallar los coeficientes de todos los polinomios se dispone de  $p(m - 2)$  condiciones (ecuaciones).

Para determinar completamente el Spline faltan:

$$(p + 1)(m - 1) - p(m - 2) = (m + p - 1)$$

condiciones. La elección de las condiciones adicionales dependerá del carácter del problema analizado.

### **3. Aplicaciones**

Los problemas más frecuentes en las aplicaciones son los de interpolación y suavizamiento, en los cuales se pide construir un Spline a partir de un conjunto de puntos en el plano.

En los problemas de interpolación el gráfico del Spline debe pasar por todos los puntos  $(t_i, y_i) \forall i = 1, \dots, m$ ; lo que proporciona  $m$  condiciones adicionales. Las restantes  $p - 1$  ecuaciones para la construcción unívoca del Spline son los valores de las derivadas menores del Spline en los extremos del segmento analizado: condiciones de contorno. La posibilidad de elegir diferentes condiciones de contorno permite construir Splines con las más diversas propiedades.

En los problemas de suavizamiento el Spline se construye de tal modo que su gráfico pase cerca de los puntos  $(t_i, y_i) \forall i = 1, \dots, m$ , pero no por ellos. La medida de esta cercanía se puede definir de diferentes maneras, lo que genera una gran variedad de Splines suavizadores.

En el siguiente capítulo nos centraremos en los problemas de interpolación con Splines cúbicos.



# VI - Splines cúbicos interpolantes

---

1. **Planteamiento del problema**
2. **Definición**
3. **Condiciones de contorno**
4. **Elección de las condiciones de contorno**
5. **Elección de los nodos de interpolación**
6. **Construcción del Spline cúbico interpolante**
7. **Comprobación de sistema compatible determinado**
  - 7.1 *Introducción*
  - 7.2 *Caso  $Cl=1, CD=1$*
  - 7.3 *Caso  $Cl=1, CD=2$*
  - 7.4 *Caso  $Cl=1, CD=4$*
  - 7.5 *Caso  $Cl=3, CD=3$*
  - 7.6 *Otros casos*

## 1. Planteamiento del problema

El problema de interpolación que planteamos a continuación consiste en construir en el intervalo  $[a, b]$  una función suave  $\sigma(x)$  que coincide en los nodos del retículo  $w$  con una función dada  $f(x)$ , la cual no posee la suavidad exigida.

Supongamos que en un intervalo  $[a, b]$  está definido un retículo

$$w: a = t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = b.$$

Consideremos la colección de números

$$y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m.$$

Construimos una función  $\sigma(x)$  suave en el intervalo  $[a, b]$ , que en los nodos del retículo  $w$  toma los valores dados, es decir:

$$\sigma(t_i) = y_i \quad \forall i = 1, \dots, m - 1, m.$$

Está claro que planteado así, este problema tendrá infinitas soluciones diferentes pero, imponiendo a la función  $\sigma(x)$  condiciones adicionales, es posible lograr que el problema tenga solución única.

## **2. Definición**

Se llama Spline cúbico interpolante  $S(x)$  en un retículo  $w$  a la función que:

1) En cada uno de los intervalos  $[t_i, t_{i+1}] \quad \forall i = 1, \dots, m - 1$  es un polinomio de tercer grado,

$$S(x) = S_i(x) = a_0^{(i)}(x - t_i) + a_1^{(i)}(x - t_i)^2 + a_2^{(i)}(x - t_i)^3.$$

En todo el intervalo, el Spline es un polinomio de tercer grado que se define mediante cuatro coeficientes. En total hay  $(m - 1)$  intervalos, por lo que, para definir completamente el Spline es necesario hallar  $4(m - 1)$  números:

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, \quad \forall i = 1, \dots, m - 1.$$

2) Es dos veces diferenciable con continuidad en el intervalo  $[a, b]$ , es decir, pertenece a la clase  $C^2[a, b]$ .

Esta condición significa continuidad en la función  $S(x)$  y de sus derivadas  $S'(x)$  y  $S''(x)$  en todos los nodos internos del retículo  $w$ . Como el número de nodos internos es  $m - 2$ , entonces tenemos  $3(m - 2)$  condiciones más.

3) Satisface las condiciones

$$S(t_i) = f(t_i) = y_i \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Junto con las condiciones de continuidad, tenemos  $3(m - 2) + m = 4m - 6$  condiciones (ecuaciones).

## **3. Condiciones de contorno**

Para tener las  $4(m - 1) = 4m - 4$  condiciones necesarias para la definición unívoca del Spline, nos faltan dos ecuaciones, las cuales se formulan como restricciones sobre los valores del Spline y/o sus derivadas en los extremos del intervalo  $[a, b]$ .

Generalmente para la construcción de un Spline cúbico interpolante se utilizan condiciones de entre los cuatro tipos siguientes:

A) Condiciones de primer tipo: Se dan los valores que debe tomar la derivada primera de  $S(x)$  en los extremos del intervalo  $[a, b]$ :

$$S'(a) = f'(a) \quad ; \quad S'(b) = f'(b).$$

B) Condiciones de segundo tipo: Se dan los valores que debe tomar la derivada segunda de  $S(x)$  en los extremos del intervalo  $[a, b]$ :

$$S''(a) = f''(a) \quad ; \quad S''(b) = f''(b).$$

C) Condiciones de tercer tipo: Condiciones periódicas

$$S'(a) = S'(b) \quad ; \quad S''(a) = S''(b).$$

Es natural imponer este tipo de condiciones cuando la función a interpolar es periódica de periodo  $T = b - a$ .

D) Condiciones de cuarto tipo:

$$S'''(y, t_2 - 0) = S'''(y, t_2 + 0),$$

$$S'''(y, t_{m-1} - 0) = S'''(y, t_{m-1} + 0).$$

En los puntos interiores del retículo, la derivada tercera de  $S(x)$  es, en general, discontinua. Sin embargo, el número de puntos de discontinuidad puede ser reducido con ayuda de este tipo de condiciones.

En este caso, el Spline obtenido es tres veces diferenciable con continuidad en los puntos  $t_2$  y  $t_{m-1}$  acercándose por la izquierda (-0) o acercándose por la derecha (+0).

Teorema: El Spline cúbico interpolante que satisface las condiciones

$$S(t_i) = y_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

y una condición de contorno cualquiera dentro de los cuatro tipos enumerados existe y es único.

En el apartado siete de este capítulo comprobaremos que este teorema es cierto y que además pueden tomarse condiciones de contorno mixtas (una en cada extremo), exceptuando para el caso de condiciones de tercer tipo y para el caso de condiciones de cuarto tipo con menos de cuatro nodos; existiendo el Spline cúbico interpolante con solución única.

#### **4. Elección de las condiciones de contorno**

La elección de las condiciones de contorno es uno de los problemas principales en la interpolación, y adquiere una importancia especial cuando es necesario garantizar una precisión alta del Spline  $S(x)$  en las proximidades de los extremos del intervalo  $[a, b]$ . Las condiciones de contorno ejercen una influencia visible en el comportamiento del Spline cerca de los extremos  $a$  y  $b$ , y dicha influencia se va atenuando según nos alejamos de ellos. La elección de las condiciones de contorno depende, a menudo, de la existencia de datos adicionales sobre el comportamiento del Spline.

Si se conocen los valores de la derivada primera  $f'(x)$  en los extremos del intervalo  $[a, b]$ , es decir, se conoce la dirección de la tangente de la curva en los extremos; entonces es lógico utilizar condiciones de contorno de primer tipo.

Si por el contrario, lo que se conocen son los valores de la derivada segunda  $f''(x)$ ; entonces es lógico utilizar condiciones de contorno de segundo tipo.

Si existe la posibilidad de elegir entre condiciones de primer y segundo tipo, se dará preferencia a las primeras.

Si la función es periódica, se deben elegir condiciones de contorno de tercer tipo.

En caso de no existir información adicional sobre el comportamiento de la función, se pueden utilizar las condiciones naturales de contorno:

$$S''(a) = 0 \quad ; \quad S''(b) = 0.$$

Con estas condiciones la precisión en la aproximación puede disminuir bruscamente cerca de los extremos del intervalo  $[a, b]$ .

Otra opción es utilizar las condiciones de contorno de primer o de segundo tipo con valores aproximados; esto quiere decir, que se tomarán sus aproximaciones en diferencias, en vez de los valores exactos de sus derivadas. La experiencia muestra que, en ocasiones, elegir las condiciones de contorno de cuarto tipo da buenas aproximaciones.

## **5. Elección de nodos de interpolación**

Si la derivada tercera  $f'''(x)$  tiene discontinuidades en algunos puntos del intervalo, para mejorar la aproximación, estos puntos deben ser incluidos entre los nodos de interpolación.

Si la derivada segunda  $f''(x)$  es discontinua, entonces es necesario tomar medidas especiales para evitar oscilaciones del Spline cerca de los puntos de discontinuidad. Generalmente, los nodos de interpolación se eligen de tal manera que los puntos de la discontinuidad de la derivada segunda estén contenidos en un intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  tal que:  $h_i = \alpha \min\{h_{i-1}, h_{i+1}\}$  donde  $\alpha \ll 1$ . El número  $\alpha$  puede ser elegido empíricamente, pero a menudo es suficiente tomar  $\alpha = 0,01$ .

Cuando las discontinuidades se presentan en la primera derivada  $f'(x)$ , existen varias técnicas para superar las dificultades que surgen. Una de las técnicas más simples consiste en partir el intervalo de aproximación en intervalos de continuidad de la derivada y construir en cada uno de ellos un Spline.

## **6. Construcción del Spline cúbico interpolante**

Vamos a interpolar una función  $f(x)$  sobre unos nodos  $t_i \forall i = 1, \dots, m$  mediante un Spline cúbico interpolante, siendo  $t_1 = a, t_m = b$ . Denotamos por  $y_i = f(t_i)$  los valores conocidos de la función en los nodos. Denominamos  $h_i = t_{i+1} - t_i$  a los diferentes espaciados entre los nodos. Sea  $S_i(x)$  la restricción de la función Spline  $S(x)$  al intervalo  $[t_i, t_{i+1}] \forall i = 1, \dots, m - 1$ . Como la función  $S(x)$  está definida en  $[a, b]$  como:  $S(x) = S_i(x), si x \in [t_i, t_{i+1}]$ , bastará conocer cada uno de los trozos cúbicos  $S_i(x)$ .

Recordamos que  $S_i(x)$  es un polinomio cúbico que satisface las condiciones:

$$S_i(t_i) = y_i \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

y la condición  $S_i(x) \in C^2[a, b]$ , es decir:

$$S_i'(t_i) = S_{i+1}'(t_i) \quad \forall i = 1, \dots, m - 1,$$

$$S_i''(t_i) = S_{i+1}''(t_i) \quad \forall i = 1, \dots, m - 1.$$

Al ser  $S_i(x)$  un polinomio de grado tres, su derivada será de grado dos y su segunda derivada será de grado uno.

Si denotamos por  $z_i \forall i = 1, \dots, m$  los valores que toma  $S_i''(t_i)$  para cada  $i$ , entonces para que las derivadas segundas peguen bien entre los diferentes trozos de la función  $S''(x)$  tendrá que ser del estilo de la siguiente figura:

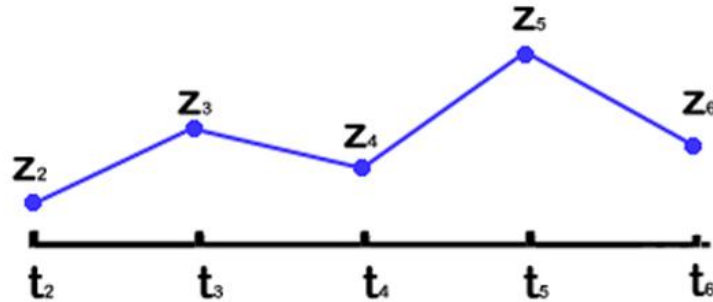


Figura 6.1: Derivadas segundas

Para que esto sea así, basta con construir cada trozo lineal  $S_i''(x)$  de manera que  $S_i''(t_i) = z_i$  y  $S_i''(t_{i+1}) = z_{i+1}$ . Usando la interpolación de Lagrange tenemos:

$$S_i''(x) = z_{i+1} \frac{x - t_i}{h_i} + z_i \frac{t_{i+1} - x}{h_i}.$$

De esta expresión, si integramos dos veces, obtenemos:

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i} (x - t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i} (t_{i+1} - x)^3 + C_i(x - t_i) + D_i(t_{i+1} - x).$$

De las condiciones  $S(t_i) = y_i \forall i = 1, \dots, m$  sabemos que:  $S_i(t_i) = y_i$  y  $S_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$ . A partir de estas condiciones podemos deducir el valor de  $C_i$  y  $D_i$ , llegando hasta la expresión:

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i} (x - t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i} (t_{i+1} - x)^3 + \left( \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6} \right) (x - t_i) + \left( \frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6} \right) (t_{i+1} - x).$$

Con esta expresión de  $S_i(x)$ , para cada intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  se garantiza la continuidad de  $S(x)$  y que coincidirá con  $f(t_i)$  en los puntos  $t_i \forall i = 1, \dots, m$ .

Queda por satisfacer la continuidad de la derivada primera de  $S(x)$ :

$$S_i'(t_i) = S_{i-1}'(t_i) \forall i = 2, \dots, m - 1.$$

Calculamos  $S'_i(t_i)$  y  $S'_{i-1}(t_i)$  :

$$S'_i(x) = \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 - \frac{z_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right),$$

$$S'_{i-1}(x) = \frac{z_i}{2h_i}(x - t_{i-1})^2 - \frac{z_{i-1}}{2h_{i-1}}(t_i - x)^2 + \left(\frac{y_i}{h_{i-1}} - \frac{z_i h_{i-1}}{6}\right) - \left(\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{z_{i-1} h_{i-1}}{6}\right).$$

Imponiendo  $S'_i(t_i) = S'_{i-1}(t_i)$ , simplificando la expresión y teniendo en cuenta que  $i = 2, \dots, m - 1$ , llegamos al sistema de ecuaciones lineales:

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}).$$

Si definimos:

$$b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) \quad \forall i = 2, \dots, m - 1,$$

entonces el sistema queda:

$$\begin{cases} h_1 z_1 + 2(h_1 + h_2)z_2 + h_2 z_3 = b_2 \\ h_2 z_2 + 2(h_2 + h_3)z_3 + h_3 z_4 = b_3 \\ \dots \\ h_{m-2} z_{m-2} + 2(h_{m-2} + h_{m-1})z_{m-1} + h_{m-1} z_m = b_{m-1}. \end{cases}$$

Se trata de  $(m - 2)$  ecuaciones lineales con  $m$  incógnitas y por tanto nos quedan dos variables libres. Para obtenerlas tenemos que aplicar condiciones de contorno.

Como hemos explicado en el apartado de “Elección de las condiciones de contorno”, éstas se escogen dependiendo de los datos adicionales que tengamos sobre el comportamiento de la función  $f(x)$ . A continuación vamos a detallar la construcción de las dos ecuaciones necesarias para poder resolver el sistema, según el tipo de condiciones de contorno que utilicemos, pudiendo estas ser distintas en cada extremo.

A) En caso de conocer condiciones de primer tipo, es decir, los valores de la primera derivada de  $S(x)$  en los extremos del intervalo  $[a, b]$ ; se obtendrían las dos ecuaciones que nos faltan para completar el sistema del siguiente modo:

- Obtenemos la derivada del trozo de Spline correspondiente al extremo.
- Evaluamos esta ecuación en punto extremo.

- Y lo igualamos al valor conocido de la primera derivada.

1) Para el extremo izquierdo (a):

$$S'_1(t_1) = -\frac{z_1}{2h_1}(t_2 - t_1)^2 + \frac{y_2}{h_1} - \frac{z_2 h_1}{6} - \frac{y_1}{h_1} + \frac{z_1 h_1}{6} = f'(a).$$

Ordenando las componentes:

$$-\frac{h_1}{3} z_1 - \frac{h_1}{6} z_2 = f'(a) - \frac{y_2 - y_1}{h_1}.$$

2) Para el extremo derecho (b):

$$S'_{m-1}(t_m) = \frac{z_m}{2h_{m-1}}(t_m - t_{m-1})^2 + \frac{y_m}{h_{m-1}} - \frac{z_m h_{m-1}}{6} - \frac{y_{m-1}}{h_{m-1}} + \frac{z_{m-1} h_{m-1}}{6} = f'(b).$$

Ordenando las componentes:

$$\frac{h_{m-1}}{3} z_m + \frac{h_{m-1}}{6} z_{m-1} = f'(b) - \frac{y_m - y_{m-1}}{h_{m-1}}.$$

B) Si utilizamos condiciones de segundo tipo, es decir, damos los valores de la segunda derivada en los extremos del intervalo  $[a, b]$ ; básicamente se han de dar los valores de  $z_1$  y  $z_m$ :

$$f''(a) = z_1; \quad f''(b) = z_m.$$

C) En caso de que la función a suavizar sea periódica de periodo  $T = b - a$ , en particular,  $f(a) = f(b)$  y por tanto  $S_1(a) = S_{m-1}(b)$ ; se utilizarán condiciones de tercer tipo, las cuales darán las siguientes ecuaciones:

1)  $S'_1(t_1) = S'_{m-1}(t_m)$  :

$$\frac{h_1}{3} z_1 + \frac{h_1}{6} z_2 + \frac{h_{m-1}}{6} z_{m-1} + \frac{h_{m-1}}{3} z_m = \frac{y_{m-1} - y_m}{h_{m-1}} + \frac{y_2 - y_1}{h_1}.$$

2)  $S''_1(t_1) = S''_{m-1}(t_m)$

$$z_1 - z_m = 0.$$

D) Si deseamos utilizar condiciones de cuarto tipo, con continuidad también en la derivada tercera de  $S(x)$  en los extremos, de forma que  $S_1 = S_2$ ,  $S_{m-2} = S_{m-1}$  sabiendo que se satisface  $S_i(x) \in C^2[a, b]$ ; entonces debemos igualar  $S'''_{i-1}(t_i)$  a  $S'''_i(t_i) \forall i = 2, m-1$ . Los Splines así construidos se suelen denominar *Splines no nodo*.



Sabemos que  $S_i''(x)$  es una recta que pasa por los puntos  $(t_{i-1}, z_{i-1})$  y  $(t_i, z_i)$ , entonces su pendiente y por tanto derivada será un coeficiente tal que:

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{t_i - t_{i-1}} = \frac{z_{i+1} - z_i}{h_i}.$$

1) En el extremo izquierdo:

$$\begin{aligned} S_1'''(t_2) &= S_2'''(t_2), \\ \frac{z_2 - z_1}{h_1} &= \frac{z_3 - z_2}{h_2}. \end{aligned}$$

Ordenando las componentes:

$$-h_2 z_1 + (h_2 + h_1) z_2 - h_1 z_3 = 0.$$

2) En el extremo derecho:

$$\begin{aligned} S_{m-1}'''(t_{m-1}) &= S_{m-2}'''(t_{m-1}), \\ \frac{z_m - z_{m-1}}{h_{m-1}} &= \frac{z_m - z_{m-2}}{h_{m-2}}. \end{aligned}$$

Ordenando las componentes:

$$-h_{m-1} z_{m-2} + (h_{m-1} + h_{m-2}) z_{m-1} - h_{m-2} z_m = 0.$$

No siempre conocemos los mismos datos en ambos extremos del intervalo  $[a, b]$ , por lo que podemos tener diferentes condiciones en cada extremo, excepto en las condiciones de tercer tipo que exigen que la función sea periódica de periodo  $T=b-a$  y en particular  $f(a) = f(b)$ .

Recordamos que las condiciones de primer tipo (primera derivada conocida) tienen preferencia sobre las de segundo tipo (segunda derivada conocida) y que en caso de no conocer los valores de estas derivadas, se pueden aproximar. Incluso si tampoco se pueden aproximar, podemos asumir  $z_1 = z_m = 0$ , en detrimento de la precisión de aproximación en caso de que la segunda derivada no fuera nula; los Splines cúbicos así construidos se denominan *naturales*. Optar por usar condiciones de cuarto tipo cuando se desconocen las demás suele dar buenos resultados.

## 7. Comprobación de sistema compatible determinado

### 7.1 Introducción

En este capítulo nos vamos a centrar en demostrar que cada uno de los sistemas que se forman incluyendo las condiciones de contorno es compatible determinado y por tanto no tendremos problemas a la hora de obtener el Spline correspondiente.

Para abreviar se utilizarán las siguientes denominaciones:

- 1: condiciones de primer tipo (se conoce el valor de la primera derivada en el extremo).
- 2: condiciones de segundo tipo (se conoce el valor de la segunda derivada en el extremo).
- 3: condiciones de tercer tipo (existe periodicidad).
- 4: condiciones de cuarto tipo (existe tercera derivada continua en el extremo).
- CI: condición de contorno en el extremo izquierdo.
- CD: condición de contorno en el extremo derecho.

Si construimos el sistema completo  $Az = B$  para que éste tenga solución compatible determinada sólo habrá que demostrar que la matriz  $A$  es invertible, es decir, que el determinante de  $A$  no es nulo.

Formalmente, se dice que la matriz  $A$  de orden  $m$  es *estrictamente diagonal dominante* cuando se satisface:

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{i,j}| \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

**Enunciado del lema de Hadamard:** Si  $A = ((a_{i,j})_{i,j}) \quad \forall i = 1, \dots, m$  es una matriz de estrictamente diagonal dominante, entonces  $A$  es invertible.

**Demostración:** Por contrarrecíproco. Supongamos que  $A$  no es invertible, entonces su núcleo no se reduce a cero, existe entonces un vector:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \neq 0$$

tal que  $AX = 0$ . Entonces, se tiene que:

$$\forall i = 1, \dots, m; \quad \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j = 0.$$

Como  $X \neq 0$ , existe  $x_{i_0} \neq 0$  tal que  $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|\} \quad \forall i = 1, \dots, m$ .

Tenemos:

$$-a_{i_0, i_0} x_{i_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^m a_{i_0, j} x_j,$$

de donde:

$$|a_{i_0, i_0} x_{i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^m |a_{i_0, j} x_j|,$$

y como:

$$\forall j = 1, \dots, m; \quad \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq 1$$

se obtiene:

$$|a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^m |a_{i_0, j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^m |a_{i_0, j}|.$$

Finalmente:

$$|a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^m |a_{i_0, j}|,$$

contradicción con la que culmina la demostración.

## 7.2 Caso $CI=1$ , $CD=1$

Las condiciones en los extremos son de primer tipo, por lo que se conocen las primeras derivadas y tenemos las dos siguientes ecuaciones adicionales:

$$-\frac{h_1}{3} z_1 - \frac{h_1}{6} z_2 = f'(a) - \frac{y_2 - y_1}{h_1},$$

$$\frac{h_{m-1}}{3} z_m + \frac{h_{m-1}}{6} z_{m-1} = f'(b) - \frac{y_m - y_{m-1}}{h_{m-1}}.$$

Por tanto la matriz quedará tal que:

$$\begin{pmatrix} \frac{-h_1}{3} & \frac{-h_1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & \frac{h_{m-1}}{3} \end{pmatrix}$$

Como se puede comprobar fácilmente la matriz es estrictamente diagonal dominante y por tanto será invertible.

### 7.3 Caso $CI=1$ , $CD=2$

La condición en el extremo izquierdo es de primer tipo y en el extremo derecho es de segundo tipo, por lo que se conoce la primera derivada en un extremo y la segunda derivada en el otro, así que tenemos las dos siguientes ecuaciones adicionales:

$$-\frac{h_1}{3} z_1 - \frac{h_1}{6} z_2 = f'(a) - \frac{y_2 - y_1}{h_1},$$

$$z_m = f''(b).$$

Por tanto la matriz quedará tal que:

$$\begin{pmatrix} \frac{-h_1}{3} & \frac{-h_1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se puede comprobar la matriz será invertible, puesto que es estrictamente diagonal dominante.

### 7.4 Caso $CI=1$ , $CD=4$

La condición en el extremo izquierdo es de primer tipo y en el extremo derecho es de cuarto tipo, por lo que se conoce la primera derivada en un extremo y que el otro extremo también es continua su tercera derivada, así que tenemos las dos siguientes ecuaciones adicionales:

$$-\frac{h_1}{3} z_1 - \frac{h_1}{6} z_2 = f'(a) - \frac{y_2 - y_1}{h_1},$$

$$-h_{m-1}z_{m-2} + (h_{m-1} + h_{m-2})z_{m-1} - h_{m-2}z_m = 0.$$

Por tanto la matriz quedará tal que:

$$\begin{pmatrix} \frac{-h_1}{3} & \frac{-h_1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & -h_{m-1} & h_{m-2} + h_{m-1} & -h_{m-2} \end{pmatrix}$$

Si la última fila la sustituimos por la penúltima menos la última, obtendremos la siguiente matriz equivalente:

$$\begin{pmatrix} \frac{-h_1}{3} & \frac{-h_1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & h_{m-2} + h_{m-1} & h_{m-2} + h_{m-1} & h_{m-2} + h_{m-1} \end{pmatrix}$$

Ahora a la columna  $m - 2$  le restamos la columna  $m$  y a su vez, a la columna  $m - 1$  le restamos la columna  $m$  multiplicada por un coeficiente  $\mu$ . Por lo que nos quedará la siguiente matriz equivalente:

$$\begin{pmatrix} \frac{-h_1}{3} & \frac{-h_1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{m-2} - h_{m-1} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) - \mu h_{m-1} & h_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & (1 - \mu)(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-2} + h_{m-1} \end{pmatrix}$$

Con  $0 < \mu < 1$  esta matriz cumple con el enunciado cuando también  $\mu < \frac{h_{m-2}}{h_{m-1}}$

ya que

$$|h_{m-2} + h_{m-1}| = h_{m-2} + h_{m-1} > (1 - \mu)(h_{m-2} + h_{m-1})$$

y

$$\begin{aligned} |2(h_{m-2} + h_{m-1}) - \mu h_{m-1}| &= 2(h_{m-2} + h_{m-1}) - \mu h_{m-1} > h_{m-2} + 2h_{m-1} \\ &\geq |h_{m-2} - h_{m-1}| + |h_{m-1}|. \end{aligned}$$

Así se observa fácilmente que es una matriz estrictamente diagonal dominante y por consiguiente el sistema tendrá solución única.

### 7.5 Caso $Cl=3$ , $CD=3$

Para este caso las ecuaciones adicionales se obtienen considerando que la función a suavizar es periódica de periodo  $T = b - a$ , de modo que aplicando las condiciones de tercer tipo se obtendrán las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} z_1 - z_m &= 0, \\ \frac{h_1}{3} z_1 + \frac{h_1}{6} z_2 + \frac{h_{m-1}}{6} z_{m-1} + \frac{h_{m-1}}{3} z_m &= \frac{y_{m-1} - y_m}{h_{m-1}} + \frac{y_2 - y_1}{h_1}. \end{aligned}$$

Construyendo el sistema con estas ecuaciones, la matriz quedará tal que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & \dots & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & \frac{h_{m-1}}{3} \end{pmatrix}$$

Si la última columna la sustituimos por su suma con la primera, tendremos la siguiente matriz equivalente:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & h_1 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & \dots & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & \frac{h_{m-1} + h_1}{3} \end{pmatrix}$$

Finalmente, sustituimos la última fila por ella misma menos la primera multiplicada por  $\frac{h_1}{3}$ , de modo que nos quedará la siguiente matriz equivalente:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & h_1 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & \frac{h_1}{6} & \dots & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & \frac{h_{m-1} + h_1}{3} \end{pmatrix}$$

y esta matriz es claramente estrictamente diagonal dominante, por lo que será invertible y el correspondiente sistema tendrá solución única.

### 7. 5 Otros casos

Tenemos seis posibles combinaciones además de las ya estudiadas, pero, puesto que serán las mismas sólo que variando una de las dos ecuaciones frontera, se desarrollarán de igual modo demostrando que son matrices estrictamente diagonales dominantes y según el enunciado del lema de Hadamard serán por tanto, invertibles y su sistema tendrá solución compatible determinada.

Es decir, utilizando correctamente las condiciones de contorno podremos construir el Spline a partir del sistema construido según se ha explicado en este capítulo.

# VII - Resolución de Splines en Matlab

---

## **1. Planteamiento de los datos**

*1.1 Datos de entrada y salida*

*1.2 Condiciones de contorno*

*1.3 Gráficas*

*1.4 Mensajes de error*

## **2. Código**

### **1. Planteamiento de los datos**

#### **1.1 Datos de entrada y salida**

Para la creación de un Spline necesitamos las coordenadas de los nodos por los que ha de pasar la curva, tanto abscisas como ordenadas.

En caso de que queramos evaluar la función en unos puntos determinados interpolando, habrá que facilitarle las abscisas de dichos puntos al programa. Pero como no siempre utilizaremos esta función del Spline, lo vamos a incluir como una opción. Por tanto como dato de entrada introduciremos  $opx = 's'/n'$  para indicar si se calculan o no; y el retículo  $x$ , que serán puntos donde queremos evaluar la función polinómica a trozos.

Por otro lado, como ya se ha explicado en el capítulo de “Splines cúbicos interpolantes”, para la construcción del Spline se necesitan dos ecuaciones adicionales que se obtienen con las condiciones de contorno, generalmente una en cada extremo. Éstas se especificarán posteriormente en el sub-apartado 1.2 de este capítulo.

Como datos de salida se obtienen, aparte de los valores interpolados si es el caso, los polinomios de tercer grado que definirán el Spline. También se obtienen la gráfica correspondiente al Spline y, si nos interesan, las gráficas para visualizar su correspondientes primera y segunda derivada.



## 1.2 Condiciones de contorno

Las condiciones pueden corresponder al extremo derecho o izquierdo, por lo que existirá un valor de entrada tal que:

CI: condición de contorno en el extremo izquierdo.

CD: condición de contorno en el extremo derecho.

Siendo las posibles condiciones de contorno:

- 1- De primer tipo: valores de la primera derivada.
- 2- De segundo tipo: valores de la segunda derivada.
- 3- De tercer tipo: periódicas de periodo  $T=b-a$   $S'(a)=S'(b)$ ;  $S''(a)=S''(b)$ . Si  $CI=3 \rightarrow CD=3$ .
- 4- De cuarto tipo: Tres veces diferenciable en los puntos  $t_2$  y/o  $t_{m-2}$ .

Aunque técnicamente las condiciones de tercer tipo (periodicidad) no se aplican a cada uno de los extremos sino al Spline en su conjunto, mantenemos como datos de entrada CI y CD incluyendo en el programa ciertos mensajes de error para asegurar que en caso de que se quiera utilizar este tipo de condiciones de contorno, los valores en ordenadas en los extremos han de coincidir ( $y_1=y_m$ ) y los valores CI y CD deberán ser iguales ( $CI=CD=3$ ).

## 1.3 Gráficas

El objetivo principal del programa desarrollado es obtener el dibujo del Spline y las expresiones de los polinomios de tercer grado que lo construyen. Pero como su aplicación radica principalmente en el diseño de líneas y superficies curvadas de forma suave, tanto para el análisis de la suavidad como para el correcto diseño de la misma será imprescindible conocer la curva de las primeras y de las segundas derivadas. Por lo que también se incluyen como opción pudiendo ser o no mostradas.

Recordamos que la primera derivada representa la tangente de la curva, la cual nos indica la pendiente o el giro de la misma que tiene una importancia considerable en el diseño de curvas y superficies. Y que la segunda derivada nos sirve para comprobar la uniformidad de la curvatura.

## 1.4 Mensajes de error

Debido a que cabe la posibilidad que el usuario final de la interfaz gráfica no esté familiarizado con la construcción de los Splines cúbicos interpolantes, deberemos incluir una serie de avisos de errores que informen de la falta o del error en los datos

facilitados al programa una vez que se ejecute el mismo. Aunque se ha intentado que la siguiente enumeración de errores sea completa, no excluye la posibilidad de que exista algún error adicional que no se haya tenido en cuenta al desarrollar el código.

1- Al menos se necesitan 3 puntos de control o nodos para construir un Spline, por lo que en caso de que  $m < 3$  aparecerá en pantalla el siguiente mensaje de error: *'El número de puntos de control debe ser mayor que 2'* y se volverá al inicio del programa.

2- Si CI es igual a 3, pero CD no lo es, aparecerá en pantalla el siguiente mensaje de error: *'Si CI=3 entonces CD debe ser también 3'* y se volverá al inicio del programa.

3- Si CD es igual a 3, pero CI no lo es, aparecerá en pantalla el siguiente mensaje de error: *'Si CD=3 entonces CI debe ser también 3'* y se volverá al inicio del programa.

4- Como ya hemos explicado, la condición de contorno 3 se utiliza cuando la función es periódica. Por lo que en caso de que CD sea igual a 3 (esto ya implica que CI ha de ser igual a 3 si no ha aparecido un mensaje de error anteriormente) y no se cumple que los valores en ordenadas de ambos extremos son idénticos, aparecerá en pantalla el siguiente mensaje de error: *'Para que la función sea periódica debe valer lo mismo en los extremos'* y se volverá al inicio del programa.

5- Para poder aplicar la condición de contorno 4 y que ésta dé como resultado dos ecuaciones adicionales para poder resolver el sistema planteado en la construcción del Spline, deben de existir mínimo cuatro nodos o puntos de control. Por lo que en caso de  $m = 3$ ,  $CI = 4$  y  $CD = 4$ , aparecerá en pantalla el siguiente mensaje de error: *'Con 3 nodos la condición CI=4 ya implica CD=4 y nos falta una condición'* y se volverá al inicio del programa.

6- Por si a caso el sistema de ecuaciones resultante ( $A \cdot z = B$ ) no se pudiera resolver correctamente de forma computacional y por tanto no se pudiera construir el Spline con este programa, se incluye un mensaje de error para que cuando el determinante de la matriz A sea nulo, con una cierta tolerancia  $abs(det(A)) \leq 10^{-14}$ , aparezca en pantalla el siguiente mensaje de error: *'El problema puede no tener solución, la matriz está cerca de no ser invertible'* y vuelva al inicio del programa.

En el código de la interfaz gráfica habrá que incluir ciertos errores cuando alguna de las casillas no se haya completado o falten condiciones de contorno por marcar.

1- Si no se ha creado ni cargado ningún archivo referente a los datos sobre los nodos y su correspondiente casilla (*edit\_nodos*) está vacía, al presionar sobre el botón “aplicar” (*push\_aplicar*) aparecerá en pantalla el siguiente mensaje de error: *'Debe introducir los nodos por los que ha de pasar el Spline'* y no se ejecutará el programa para construir el Spline.

2- Si CI o CD no se han especificado, aparecerá en pantalla el siguiente mensaje de error: *'Falta especificar alguna de las condiciones de frontera'* y se volverá al inicio del programa.

3- Si se ha marcado alguna condición de contorno de tipo uno o dos pero no se ha especificado el valor de dicha derivada, aparecerá en pantalla un mensaje de error del tipo: *'Debe introducir un valor para la “primera” derivada en la frontera “izquierda”.'*

Además en la interfaz gráfica se incluyen ciertas restricciones para evitar errores tales como:

1- Sólo se podrá marcar una condición de contorno en cada extremo (radio bottoms)

2- Si se marca como condición de contorno “periódica” en un extremo, en el otro se marcará automáticamente.

3- Si no se proporcionan datos a interpolar, no se podrá marcar la casilla de *valores interpolados* en el panel de gráficas.

## **2. Código**

A continuación se reproduce el código del programa que construye el Spline cúbico interpolante con todas las características que se han explicado anteriormente. No se escribe aquí el código de la interfaz gráfica debido a la densidad del mismo, sin embargo, éste se encuentra adjunto en el CD para su ejecución y comprobación.

```

function
Splines_Interpolantes(t,y,CI,S1a,S2a,CD,S1b,S2b,opx,x,opg1,opg2,opg3,opg4)

% Esta función busca hallar las ecuaciones que definen el Spline y
dibujar
% las gráficas de la curva, su primera y segunda derivada, así como
los
% valores obtenidos al interpolar y su gráfica. Creando ficheros que
% recojan la información.
%
Splines_Interpolantes(t,y,CI,S1a,S2a,CD,S1b,S2b,opx,x,opg1,opg2,opg3,opg4)
%
% Variables de entrada:
% t:abscisas de la tabla de valores de los nodos
% y:ordenadas de la tabla de valores de los nodos
% CI:condición de contorno en el extremo izquierdo
% CD:condición de contorno en el extremo derecho
%
% Posibles condiciones de contorno:
% 1-De primer tipo: valores de la primera derivada
% 2-De segundo tipo: valores de la segunda derivada
% 3-De tercer tipo: periódicas de periodo T=b-a
% S'(a)=S'(b); S''(a)=S''(b). Si CI=3->CD=3
% 4-De cuarto tipo: Tres veces diferenciable en los puntos t2 y/o tm-1
%
% S1a:valor de la primera derivada en el extremo izquierdo
% S2a:valor de la segunda derivada en el extremo izquierdo
% S1b:valor de la primera derivada en el extremo derecho
% S2b:valor de la segunda derivada en el extremo derecho
%
% opx:parámetro que nos indica si debemos calcular o no los valores
interpolados
% 's':se calculan; 'n': no se calculan
% x:retículo de puntos donde queremos evaluar la función polinómica a
trozos
% si opgI=1 entonces dibujará la gráfica
% opg1:parámetro que nos indica se debemos dibujar o no la gráfica de
los valores interpolados
% opg2:parámetro que nos indica se debemos dibujar o no la gráfica de
los Splines
% opg3:parámetro que nos indica se debemos dibujar o no la gráfica de
las primeras derivadas
% opg4:parámetro que nos indica se debemos dibujar o no la gráfica de
las segundas derivadas
%
%EJEMPLO:
%t=[1,3,4,6]
%y=[2,-1,3,1]
%CI=2 ; CD=1
%S1a=0; S2b=0 (no se van a utilizar, da igual el dato)
%S2a=2; S1b=2
%opx='s'
%x=[0:0.2:6]
%
%Splines_Interpolantes([1,3,4,6],[2,-
1,3,1],2,0,2,1,2,2,'s',[0:0.2:6],1,1,1,1)

```

```

% Número de puntos en la tabla
m=length(t);

% Comprobamos que las entradas son correctas
if m<3
    uiwait(msgbox('El número de puntos de control debe ser mayor que
2', 'Mensaje de error',...
    'error','modal'));
    return;

elseif CI==0 | CD==0
    uiwait(msgbox('Falta especificar alguna de las condiciones de
frontera', 'Mensaje de error',...
    'error','modal'));
    return;
elseif CI==3 & CD~=3
    uiwait(msgbox('Si CI=3 entonces CD debe ser también 3', 'Mensaje
de error',...
    'error','modal'));
    return;
elseif CD==3 & CI~=3
    uiwait(msgbox('Si CD=3 entonces CI debe ser también 3', 'Mensaje
de error',...
    'error','modal'));
    return;
elseif CD==3 & y(1)~=y(m)
    uiwait(msgbox('Para que la función sea periódica debe valer lo
mismo en los extremos', 'Mensaje de error',...
    'error','modal'));
    return;
elseif m==3 & CI==4 & CD==4
    uiwait(msgbox('Con 3 nodos la condición CI=4 ya implica CD=4 y nos
falta una condición', 'Mensaje de error',...
    'error','modal'));
    return;
end

% Definimos el vector h de distancias entre las abscisas
h=diff(t,1);

% Inicializamos
z=zeros(1,m);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Cálculo de las derivadas segundas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Definimos la matriz de coeficientes del sistema lineal
A=zeros(m,m);
% Definimos el término independiente
B=zeros(m,1);
% Definimos la primera ecuación del sistema dependiendo de CI
if CI==1
    A(1,1)=-h(1)/3;
    A(1,2)=-h(1)/6;
    B(1)=S1a+(y(1)-y(2))/h(1);
elseif CI==2
    B(1)=S2a;
    A(1,1)=1;

```

```

elseif CI==3
    % primera ecuación
    A(1,1)=h(1)/3; A(1,2)=h(1)/6; A(1,m-1)=h(m-1)/6; A(1,m)=h(m-1)/3;
    B(1)=(y(m-1)-y(m))/h(m-1)+(y(2)-y(1))/h(1);
    % última ecuación
    A(m,1)=1; A(m,m)=-1;
elseif CI==4
    A(1,1)=-h(2); A(1,2)=h(1)+h(2); A(1,3)=-h(1);
end
% Definimos las m-2 ecuaciones intermedias
for i=2:m-1
    A(i,i-1)=h(i-1);
    A(i,i)=2*(h(i-1)+h(i));
    A(i,i+1)=h(i);
end

% A continuación definimos la matriz B
for i=2:m-1
    B(i)=6/h(i)*(y(i+1)-y(i))-6/h(i-1)*(y(i)-y(i-1));
end
% Definimos la última ecuación del sistema dependiendo de CD
if CD==1
    A(m,m-1)=h(m-1)/6; A(m,m)=h(m-1)/3;
    B(m)=S1b+(y(m-1)-y(m))/h(m-1);
elseif CD==2
    B(m)=S2b;
    A(m,m)=1;
elseif CD==4
    A(m,m-2)=-h(m-1); A(m,m-1)=h(m-1)+h(m-2); A(m,m)=-h(m-2);
end

% Resolución del sistema
if abs(det(A))<=10^(-14)
    uiwait(msgbox('El problema puede no tener solución, la matriz está
cerca de no ser invertible',...
'Mensaje de error','error','modal'));
    return;
else
    z(1:m)=A\B;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Evaluación de los Splines en x
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if opx=='s'
    % Encuentra el trozo polinómico a evaluar según cada entrada de x
    if x(1)==t(1)
        minim=y(1); maxim=y(1);
        Si(1)=y(1);
    else
        ind=find((x(1)>t)==0);
        ind=ind(1)-1;
        ind=ind(1);
        % Aplica la fórmula para calcular S_ind(x)
        Si(1)=z(ind+1)/(6*h(ind))*(x(1)-t(ind))^3+...
            z(ind)/(6*h(ind))*(t(ind+1)-x(1))^3+(y(ind+1)/h(ind)-...
            z(ind+1)*h(ind)/6)*(x(1)-t(ind))+y(ind)/h(ind)-...
            z(ind)*h(ind)/6*(t(ind+1)-x(1));
        minim=Si; maxim=Si;
    end
end

```

```

for i=2:length(x)
    ind=find((x(i)>t)==0);
    ind=ind(1)-1;
    ind=ind(1);
    % Aplica la fórmula para calcular S_ind(x)
    Si(i)=z(ind+1)/(6*h(ind))*(x(i)-t(ind))^3+...
        z(ind)/(6*h(ind))*(t(ind+1)-x(i))^3+(y(ind+1)/h(ind)-...
        z(ind+1)*h(ind)/6)*(x(i)-t(ind))+y(ind)/h(ind)-...
        z(ind)*h(ind)/6)*(t(ind+1)-x(i));
    if Si(i)<minim
        minim=Si(i);
    elseif Si(i)>maxim
        maxim=Si(i);
    end
end

if opg1==1
    figure(1);
    %Dibuja los puntos de control en la gráfica
    b1=plot(t,y,'ko','MarkerSize',2,'LineWidth',3);
    hold on;
    %Dibuja los valores interpolados en la gráfica
    b2=plot(x,Si,'ro','MarkerSize',3);
    hold on;
    axis([t(1)-0.1*(t(2)-t(1)) t(length(t))+...
        0.1*(t(2)-t(1)) min(min(y),minim)-...
        0.1*(max(y)-min(y)) max(max(y),maxim)+0.1*(max(y)-...
        min(y))]);
    axis equal;
    legend([b1,b2],'Puntos de Control','Valores Interpolados');
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Polinomios S_i(x)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

syms r;

for i=1:m-1
    S(i)=z(i+1)/(6*h(i))*(r-t(i))^3+z(i)/(6*h(i))*(t(i+1)-r)^3+...
        (y(i+1)/h(i)-z(i+1)*h(i)/6)*(r-t(i))+y(i)/h(i)-...
        z(i)*h(i)/6)*(t(i+1)-r);
end

if opg2==1
    %Dibuja los puntos de control en la gráfica
    figure(2);
    b1=plot(t,y,'ko','MarkerSize',2,'LineWidth',3);
    hold on;
    %Dibuja cada uno de los polinomios
    Ms=0;
    ms=0;
    for i=1:m-1
        b3=ezplot(S(i),[t(i),t(i+1)]);
        auxX=t(i):(t(i+1)-t(i))/10:t(i+1);
        auxY=subs(S(i),auxX); MauxY=max(auxY); mauxY=min(auxY);
        if MauxY>Ms
            Ms=MauxY;
        end
    end
end

```

```

        if mauxY<ms
            ms=mauxY;
        end
    end
    axis ([t(1)-0.1*(t(2)-t(1)) t(length(t))+...
          0.1*(t(2)-t(1)) ms-0.1*(Ms-ms) Ms+0.1*(Ms-ms)]);
    axis equal;
    legend([b1,b3], 'Puntos de Control', 'Splines Cúbicos');
    title('Ajuste por Splines Cúbicos Interpolantes');
end

if opg3==1
    %Dibuja cada una de las primeras derivadas
    figure(3);
    hold on
    Ms=0;
    ms=0;
    S1=diff(S,1);
    for i=1:m-1
        b4=ezplot(S1(i), [t(i),t(i+1)]);
        auxX=t(i):(t(i+1)-t(i))/10:t(i+1);
        auxY=subs(S1(i),auxX); MauxY=max(auxY); mauxY=min(auxY);
        if MauxY>Ms
            Ms=MauxY;
        end
        if mauxY<ms
            ms=mauxY;
        end
    end
    axis ([t(1)-0.1*(t(2)-t(1)) t(length(t))+...
          0.1*(t(2)-t(1)) ms-0.1*(Ms-ms) Ms+0.1*(Ms-ms)]);
    legend(b4, 'Primera Derivada Splines Cúbicos');
    title('Primera Derivada de los Splines Cúbicos Interpolantes');
end

if opg4==1
    %Dibuja cada una de las segundas derivadas
    figure(4)
    hold on
    S2=diff(S,2);
    Msd=subs(S2(1),t(1));
    msd=subs(S2(1),t(1));
    for i=1:m-1
        b5=ezplot(S2(i), [t(i),t(i+1)]);
        aux=subs(S2(i),t(i+1));
        if aux>Msd
            Msd=aux;
        elseif aux<msd
            msd=aux;
        end
    end
    axis ([t(1)-0.1*(t(2)-t(1)) t(length(t))+...
          0.1*(t(2)-t(1)) msd-0.1*(Msd-msd) Msd+0.1*(Msd-msd)]);
    legend(b5, 'Segunda Derivada Splines Cúbicos');
    title('Segunda Derivada de los Splines Cúbicos Interpolantes');
end

```



```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% SALIDA DE RESULTADOS A UN FICHERO
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Se abre o crea un archivo y se escribe en él para los resultados de
% valores interpolados
if opx=='s'
    fid=fopen('resul_valores_interpolados.txt','w');

    fprintf(fid, '*****\n');
    hora=clock;
    fprintf(fid, 'Resultado ejecutado el dia %d-%d-%d a las %d : %d :
%d\n', ...
        hora(3), hora(2), hora(1), hora(4), hora(5), fix(hora(6)));

    fprintf(fid, '*****\n\n');
    for i=1:length(x)
        fprintf(fid, '%f %f \n', x(i), Si(i));
    end
    fclose(fid);
end

% Se abre o crea un archivo y se escribe en él para los resultados de
% los polinomios del Spline
fid=fopen('polinomios_splines.txt','w');
fprintf(fid, '*****\n');
hora=clock;
fprintf(fid, 'Resultado ejecutado el dia %d-%d-%d a las %d : %d :
%d\n', ...
        hora(3), hora(2), hora(1), hora(4), hora(5), fix(hora(6)));
fprintf(fid, '*****\n\n');
signos='----';
for i=1:length(t)-1
    coefi=sym2poly(expand(S(i)));
    for j=1:4
        if coefi(j)>=0
            signos(j)='+';
        end
    end
    fprintf(fid, ' %c %f x^3 %c %f x^2 %c %f x %c %f \n', ...
        signos(1), abs(coefi(1)), signos(2), abs(coefi(2)), signos(3), ...
        abs(coefi(3)), signos(4), abs(coefi(4)));
end
fprintf(fid, '\n');
fclose(fid);

```

# Tutorial de la interfaz gráfica

---

## **1. Ejecución de la interfaz**

### **2. Descripción**

### **3 Panel de datos iniciales**

### **4. Panel de condiciones de contorno**

### **5. Panel de gráficas**

### **6. Botones de acción**

### **7. Ejemplo**

## **1. Ejecución de la interfaz**

Se ha utilizado el entorno gráfico de Matlab (GUIDE) para elaborar una interfaz gráfica que permita a cualquier usuario construir Splines o resolver problemas de interpolación con estos, por lo que a continuación se explica cómo abrir la interfaz.

Una vez abierto el programa Matlab debemos seleccionar como carpeta (“Current Folder”) la que contiene los documentos de la interfaz. Es importante que en dicha carpeta se encuentren todos los archivos:

- tutorial.pdf
- acerca\_de.txt
- escudo.jpeg
- crear\_nodos.m / el archivo correspondiente a los datos de los nodos.
- crear\_datos.m / el archivo correspondiente a los datos a interpolar.
- Splines\_Interpolantes.m
- splines\_cubicos\_interpolantes.m
- splines\_cubicos\_interpolantes.fig

En la ventana de comandos del programa (“Command Window”) se puede ejecutar la interfaz con el comando: `splines_cubicos_interpolantes`

## **2. Descripción**

En este apartado se describe gráficamente cada una de las partes de la interfaz, en los apartados posteriores nos centraremos en cada uno de los paneles.

Se pueden observar los siguientes elementos:

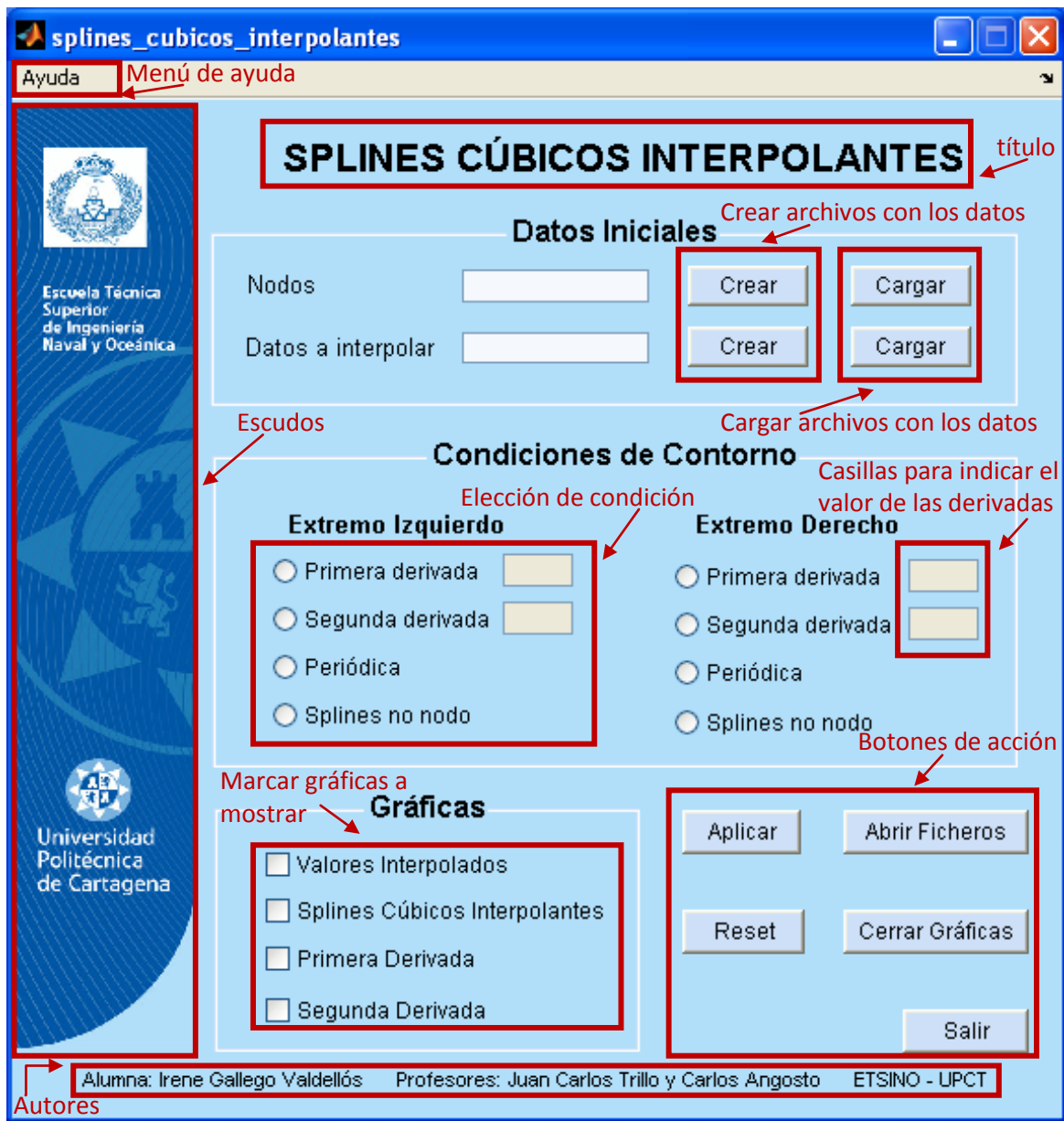


Figura 8.1: Elementos de la interfaz

En esta interfaz hemos de diferenciar entre los botones redondos y los cuadrados para marcar en los paneles de “Condiciones de Contorno” y “Gráficas”. Puesto que los primeros indican que existe restricción a la hora de marcarlos, sólo se puede elegir uno de cada lista. En cambio, en los botones cuadrados podemos indicar cuantas gráficas queremos, con la única restricción de que no podremos marcar que dibuje la gráfica de “Valores Interpolados” si no se le han especificado “Datos a interpolar” anteriormente.

En el menú de ayuda podemos desplegar una barra con accesos a este capítulo como tutorial (acceso rápido: Ctrl+T) y al archivo “acerca\_de” que se puede ver en la siguiente imagen:

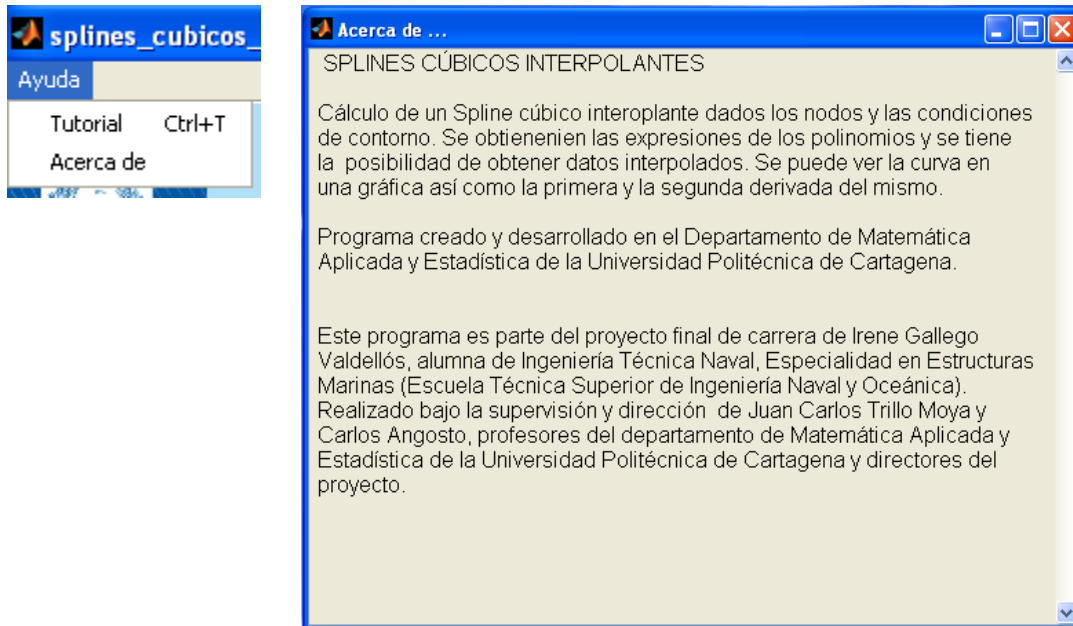


Figura 8.2: Menú de ayuda y Acerca de...

### **3. Panel de datos iniciales**

En este panel debemos especificar las coordenadas de los nodos y las abscisas de los datos a interpolar si es que queremos obtener ciertos valores interpolados.

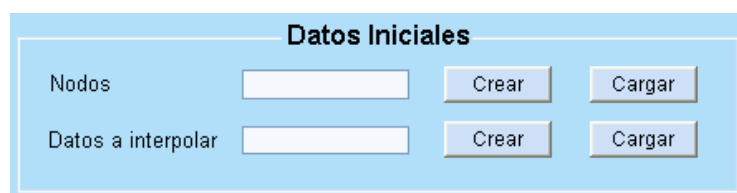


Figura 8.3: Panel datos iniciales

En caso de tener creado un archivo en el que se especifiquen “t” e “y” entonces pulsando el botón “Cargar” correspondiente accederemos a un explorador con el que podremos seleccionar nuestro archivo. Pero en el caso de no tenerlo creado podremos pulsar el botón “Crear” correspondiente y se abrirá una ventana del editor de Matlab con el archivo “crear\_nodos.m” el cual podremos modificar para especificar las coordenadas de nuestros nodos. Recordamos que “t” son las abscisas e “y” las ordenadas. El diálogo será tal que:

```
function [t,y]=crear_nodos()

% completar vector de abscisas
t=[0,0.1919,0.5497,0.7847,0.9479,1.0584,1.1433,1.2743,1.4216,1.9949];
% completar vector de ordenadas asociadas
y=[0.1451,0.2415,0.483,0.7245,0.966,1.2075,1.449,1.932,2.415,3.381];
```

En caso de querer obtener los valores de los datos a interpolar con el Spline construido, entonces el procedimiento será análogo al que acabamos de explicar con los nodos. Pero en este caso el archivo que se abre en el editor de Matlab al pulsar el botón “Crear” correspondiente es “crear\_datos.m” y el diálogo será tal que:

```
function x=crear_datos()

% completar las abscisas donde se quiere evaluar la reconstrucción
x=[0:0.5:1.5];
```

#### **4. Panel de condiciones de contorno**

En este panel es donde se han de especificar las condiciones de contorno en cada extremo.

El panel, titulado "Condiciones de Contorno", está dividido en dos columnas: "Extremo Izquierdo" y "Extremo Derecho". Cada columna contiene cuatro opciones de radio botones con un campo de entrada de texto adyacente:

- Primera derivada
- Segunda derivada
- Periódica
- Splines no nodo

*Figura 8.4: Panel de condiciones de contorno*

En cada extremo podemos utilizar una condición de contorno distinta, pero con la salvedad de que en el caso de seleccionar periódica, esta condición corresponde a todo el Spline, por lo que si seleccionas en un extremo “Periódica” en el otro se seleccionará automáticamente esta misma. Por la misma razón al activar otro tipo de condición en el panel se desactivarán las dos “Periódica”, evitando así cometer el error de seleccionar que la curva es periódica sólo en un extremo, lo que no tiene sentido.

Si conocemos el valor de la primera derivada en el extremo, que corresponde al giro o pendiente de la curva en el mismo, es aconsejable utilizar este dato. Al seleccionar

como condición “Primera derivada” se activará el cuadro de texto y podremos escribir el valor numérico. En cambio, si lo que conocemos es el valor de la segunda derivada en los extremos, se selecciona como condición ésta y habrá que completar el cuadro de texto que se activa a su derecha.

Si por cualquier razón se quedara un cuadro de texto con algún valor numérico desactivado porque se ha decidido más tarde utilizar otro tipo de condición, no hay que preocuparse por él, puesto que no se usará este dato a la hora de construir el Spline.

La condición de “Splines no nodo” hace referencia a la condición de cuarto tipo en la que la tercera derivada en el extremo también es continua. Por lo que para usarla en ambos extremos mínimo tendrán que existir cuatro nodos, ya que en caso de ser tres nodos la condición en ambos extremos sería la misma y sólo formaría una de las dos ecuaciones adicionales que se necesitan en la construcción del Spline.

Generalmente este último tipo de condiciones dan buenos resultados en caso de no conocer los valores de las derivadas primera o segunda. Aunque también podemos hacer uso de los Splines cúbicos naturales si indicamos como 0 el valor de las segundas derivadas en cada extremo; esto suele darnos resultado cuando no tenemos ninguna otra posibilidad, pero en caso de que el valor de dicha derivada no sea próximo a 0 la precisión del Spline se verá mermada. Si no conocemos el valor exacto de las derivadas pero sí podemos aproximarlos, será beneficioso para la suavidad y precisión de la curva el utilizar dichos valores aproximados.

Si podemos elegir entre aportar los valores de la primera o de la segunda derivada a la construcción del Spline, se aconseja especificar los valores de la primera derivada.

## **5. Panel de gráficas**

Puesto que depende del problema que estemos intentando resolver necesitaremos una serie de gráficas u otras, podremos indicarle al programa cuáles queremos que nos dibuje al finalizar el cálculo de los Splines.

Como podemos ver en la interfaz, tenemos cuatro gráficas que pueden ser mostradas. La primera, “Valores Interpolados”, sólo se podrá marcar en caso de introducir

anteriormente las abscisas de los valores que queremos interpolar. Las siguientes tres se pueden pedir siempre que se construya el Spline, ya sea para interpolar o no.

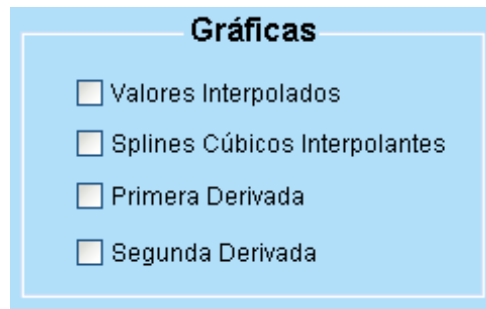


Figura 8.5: Panel de gráficas

La gráfica de "Splines Cúbicos Interpolantes" muestra el Spline construido, así como los nodos que se han introducido para su construcción.

La gráfica de "Primera Derivada" muestra la primera derivada de la curva construida.

La gráfica de "Segunda Derivada" muestra la segunda derivada de la curva construida, muy útil para comprobar la uniformidad de la curvatura.

## **6. Botones de acción**

Los botones de acción son aquellos que llevan a cabo distintas acciones en el programa.



Figura 8.6: Botones de acción

- **Aplicar:** recoge los datos proporcionados en la interfaz gráfica y llama al programa de construcción de Splines ("Splines\_Interpolantes.m") que se encarga de: la resolución del sistema, dibujar las gráficas que se han pedido y escribir los datos en los ficheros "polinomios\_splines.txt" y "resul\_valores\_interpolados.m" si están creados o los crea nuevos y escribe en ellos, borrando los que existieran anteriormente con ese nombre.

Debido que el presionar el botón “Aplicar” conlleva borrar los datos existentes anteriormente en el fichero con el nombre “polinomios\_splines.txt” y, en caso de calcular valores interpolados, también en “resul\_valores\_interpolados.m”; es muy importante que guardemos los datos obtenidos en algún cálculo anterior de forma que al realizar nuevos cálculos no destruyamos los anteriores.

- **Abrir Ficheros:** abre en el editor de Matlab los ficheros creados al aplicar el programa anteriormente.
- **Reset:** borra todos los datos introducidos en la interfaz y desactiva todas las opciones que se hubieran marcado. También borra la pantalla de comandos (“Command Window”) de Matlab. Es decir, vuelve al inicio del programa limpiando, pero no borra las variables que se hubieran definido en Matlab.
- **Cerrar Gráficas:** cierra todas las gráficas que se hubieran abierto al aplicar el programa. Para volver a abrirlas es necesario volver a presionar el botón “Aplicar”.
- **Salir:** cierra la interfaz gráfica, aunque el programa preguntará por seguridad si realmente desea cerrar la interfaz.

## 7. Ejemplo

En la ventana de comandos del programa (“Command Window”) ejecutamos la interfaz con el comando: >> splines\_cubicos\_interpolantes.

A continuación presionamos el botón “Crear” correspondiente a los “Nodos” y completamos “t” con las abscisas: 0,3,4,6; e “y” con las ordenadas: 2,-1,3,1. De forma que el diálogo será:

```
function [t,y]=crear_nodos()

% completar vector de abscisas
t=[0,3,4,6];
% completar vector de ordenadas asociadas
y=[2,-1,3,1];
```



Queremos interpolar una serie de valores, desde 0 hasta 6 en pasos de 0.2. Por lo que presionamos el botón “Crear” correspondiente a los “Datos a interpolar” e introducimos las abscisas de los valores de modo que el diálogo será:

```
function x=crear_datos()
% completar las abscisas donde se quiere evaluar la reconstrucción
x=[0:0.2:6];
```

A continuación debemos indicar las condiciones de contorno, en este ejemplo conocemos el valor de la segunda derivada en el extremo izquierdo (2) y el valor de la primera derivada en el extremo derecho (2).

Y queremos visualizar todas las gráficas, de modo que marcamos todas en el panel “Gráficas”. Completado esto, la interfaz queda tal y como se muestra en la siguiente imagen.

**SPLINES CÚBICOS INTERPOLANTES**

**Datos Iniciales**

Nodos:

Datos a interpolar:

**Condiciones de Contorno**

**Extremo Izquierdo**

Primera derivada

Segunda derivada

Periódica

Splines no nodo

**Extremo Derecho**

Primera derivada

Segunda derivada

Periódica

Splines no nodo

**Gráficas**

Valores Interpolados

Splines Cúbicos Interpolantes

Primera Derivada

Segunda Derivada

Alumna: Irene Gallego Valdellós Profesores: Juan Carlos Trillo y Carlos Angosto ETSINO - UPCT

Figura 8.7: Interfaz gráfica completada con el ejemplo

Al presionar el botón aplicar se mostrarán las siguientes gráficas en ventanas emergentes:

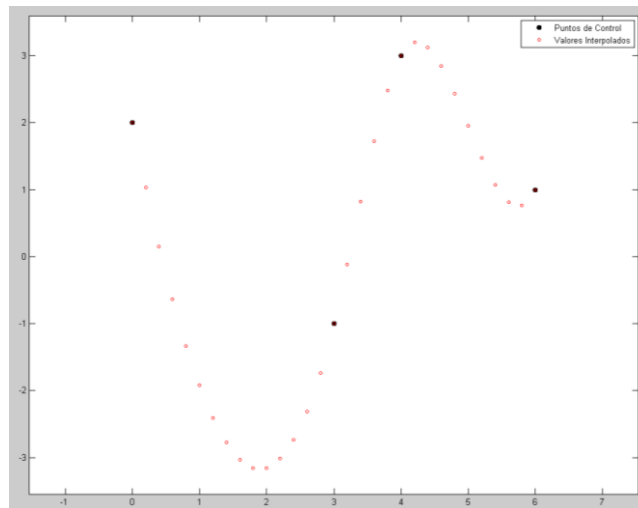


Figura 8.8: Gráfica valores interpolados

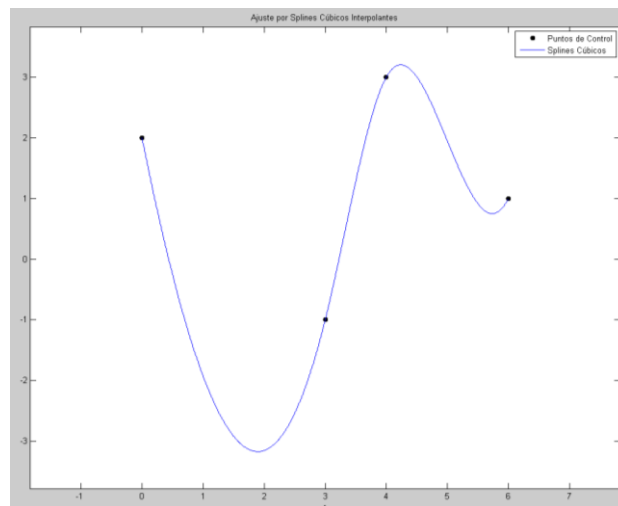


Figura 8.9: Gráfica Spline cúbico interpolante

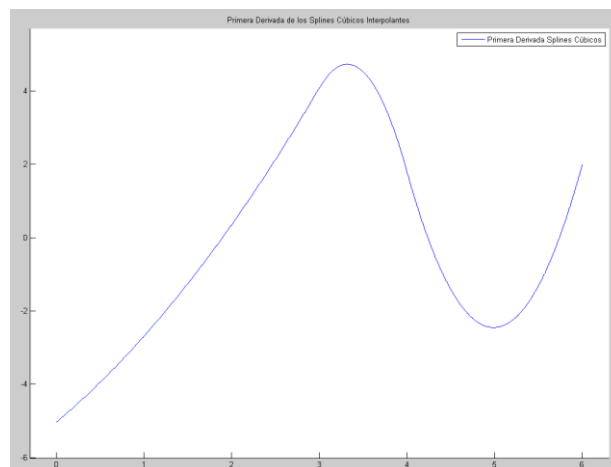


Figura 8.10: Primera derivada del Spline cúbico interpolante

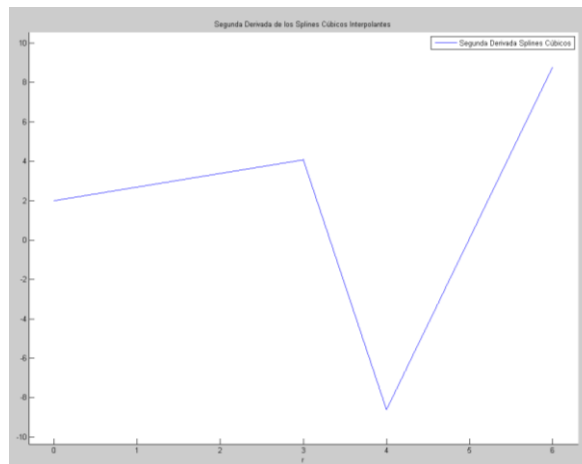


Figura 8.11: Segunda derivada del Spline cúbico interpolante

Al presionar el botón “Abrir Ficheros” aparecerán dos archivos en el editor de Matlab, uno correspondiente a las expresiones de los polinomios que forman el Spline y otro correspondiente a los valores interpolados.

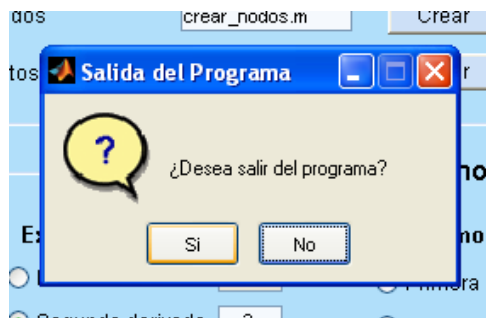
- “polinomios\_splines.txt”:

```
+ 0.115385 x^3 + 1.000000 x^2 - 5.038462 x + 2.000000
+ 2.115385 x^3 + 21.076923 x^2 - 65.269231 x + 62.230769
+ 1.451923 x^3 + 21.730769 x^2 + 105.961538 x + 166.076923
```

- “resul\_valores\_interpolados.txt”: [x,y]

```
0.000000 2.000000
0.200000 1.033231
0.400000 0.152000
0.600000 -0.638154
0.800000 -1.331692
1.000000 -1.923077
1.200000 -2.406769
1.400000 -2.777231
1.600000 -3.028923
1.800000 -3.156308
2.000000 -3.153846
2.200000 -3.016000
2.400000 -2.737231
2.600000 -2.312000
2.800000 -1.734769
3.000000 -1.000000
3.200000 -0.120000
3.400000 0.821538
3.600000 1.723077
3.800000 2.483077
4.000000 3.000000
4.200000 3.200846
4.400000 3.126769
4.600000 2.847462
4.800000 2.432615
5.000000 1.951923
5.200000 1.475077
5.400000 1.071769
5.600000 0.811692
5.800000 0.764538
6.000000 1.000000
```

Finalmente si queremos salir del programa presionamos el botón “Salir” y en el cuadro de diálogo que aparece presionamos “Si”.



*Figura 8.12: Salida del Programa*

# IX - Caso práctico

---

- 1. Introducción**
- 2. Obtención de datos de entrada**
- 3. Resolución del problema**
- 4. Conclusiones**

## **1. Introducción**

Aunque los casos para los cuales puede ser útil conocer la representación matemática de una curva suave son muy diversos dentro del campo de la ingeniería; ya que este proyecto constituye el final de una ingeniería técnica naval, vamos a aplicar lo aprendido sobre la construcción de los Splines cúbicos interpolantes a un caso práctico en el que se desea obtener la expresión matemática que define una curva suave, la cual constituye parte de un plano de formas que representa el casco de un buque. Para ello nos vamos a valer de la interfaz gráfica que se ha desarrollado, de forma que, además de obtener las expresiones de los polinomios cúbicos que definen el Spline, obtengamos la gráfica de su primera derivada y la de su segunda derivada, las cuales nos permitirán analizar la forma y la suavidad de la curva construida con este método.

## **2. Obtención de datos de entrada**

Es muy importante que los datos se obtengan de una carena ya alisada, puesto que de no ser así la curva resultante probablemente no será suficientemente suave. Esto ocurre porque el Spline cúbico interpolante pasa exactamente por los nodos y si estos tienen algún error no se corregirán. Si tenemos los datos de una carena sin alisar y queremos dibujar un Spline que se aproxime a los puntos dados porque no es estrictamente necesario que pase por los mismos, entonces obtendremos mejores resultados con otro tipo de Splines, como pueden ser los cúbicos suavizantes o los B-Splines.

Por tanto, hemos de partir de una cartilla de trazado que sepamos que corresponda a un casco alisado previamente. En nuestro caso tenemos el plano de formas de un casco ya alisado, por lo que, por ejemplo, seleccionamos la octava sección para reconstruir con la interfaz gráfica desarrollada en Matlab. Ayudándonos del programa de diseño Rhinoceros, movemos la caja de cuadernas hasta el eje de coordenadas de modo que al introducir los puntos empezemos por la abscisa  $t_1=0$ . En la siguiente imagen podemos ver la sección seleccionada de color azul.

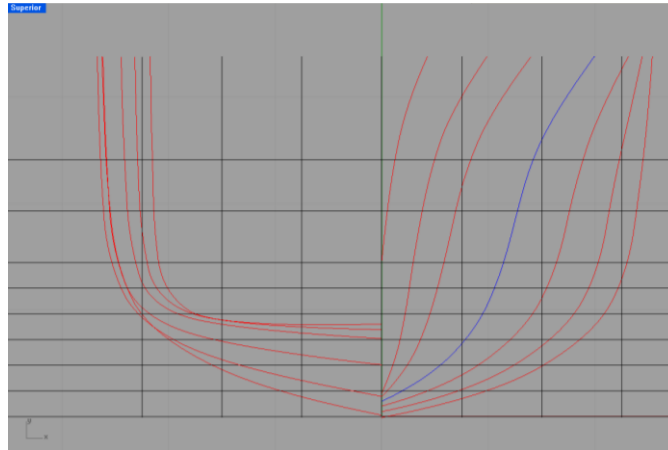


Figura 9.1: Caja de cuadernas

A continuación obtenemos los puntos de intersección de la curva con las líneas de agua principales y sus intermedias. Y si los seleccionamos en conjunto y abrimos sus propiedades, podemos ver los detalles de dichos puntos. De esta forma obtenemos un fichero que podremos guardar y en el cual nos indica el número de identificación (ID) de cada uno de los puntos y sus correspondientes coordenadas.

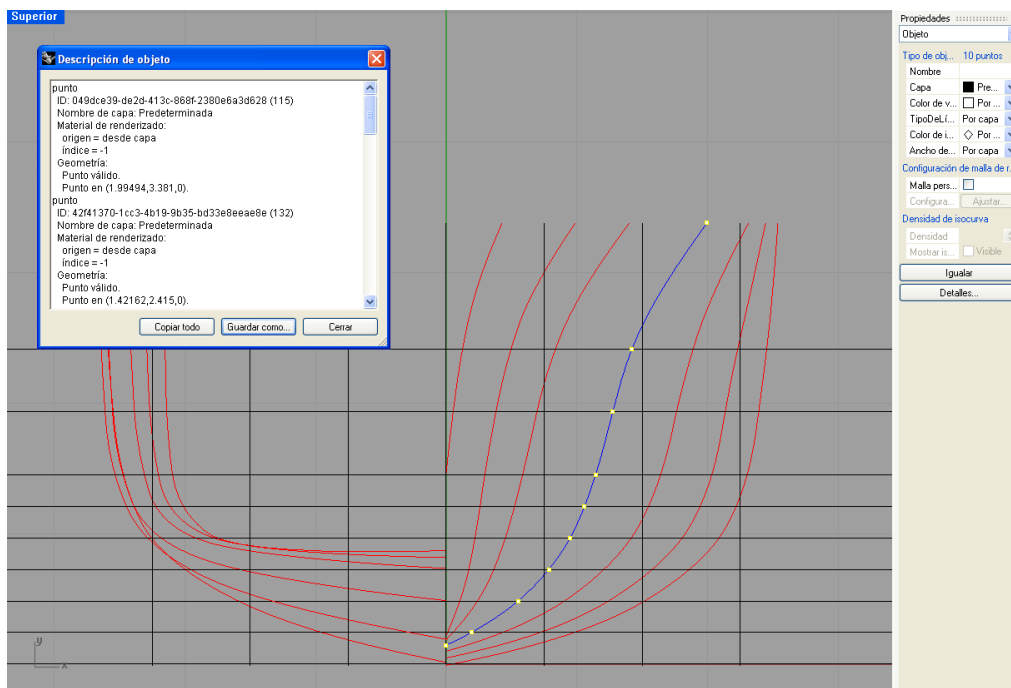


Figura 9.2: Propiedades de los puntos

Hemos elegido sólo estos puntos puesto que cuanto menor número de nodos tengamos, mejor será el alisado ya que tendrá menor número de cambios en su curvatura. Pero aun así no despreciamos las intersecciones con las líneas de agua intermedias puesto que en la zona de la obra viva es muy importante que esté bien definida la curva y como en este caso las formas del buque ya han sido alisadas, no deberían darnos cambios bruscos. En total, tenemos diez puntos para definir la sección escogida.

Si extraemos los datos de las coordenadas de forma que nos sean útiles a la hora de indicarlos en la interfaz, obtendremos:

- Abscisas: 0, 0.1919, 0.5497, 0.7847, 0.9479, 1.0584, 1.1433, 1.2743, 1.4216, 1.9949
- Ordenadas: 0.1451, 0.2415, 0.483, 0.7245, 0.966, 1.2075, 1.449, 1.932, 2.415, 3.381

### **3. Resolución del problema**

Para la reconstrucción de la sección vamos a utilizar la interfaz gráfica que hemos desarrollado. Además de reconstruirla y obtener las expresiones de los polinomios que las definen, obtendremos la primera derivada para ver como cambia la pendiente de la curva y la segunda derivada para comprobar la uniformidad del cambio de la curvatura y si está correctamente alisada.

Así pues, arrancamos el programa Matlab y ejecutamos nuestra interfaz gráfica con el comando: “splines\_cubicos\_interpolantes”. Una vez abierta, pulsamos el botón “Crear” correspondiente a los nodos, en la ventana de edición que nos aparece debemos indicar las coordenadas de los diez nodos que extrajimos de la curva en el apartado anterior. De forma que el diálogo de comandos quedará así:

```
function [t,y]=crear_nodos()
% completar vector de abscisas
t=[0,0.1919,0.5497,0.7847,0.9479,1.0584,1.1433,1.2743,1.4216,1.9949];
% completar vector de ordenadas asociadas
y=[0.1451,0.2415,0.483,0.7245,0.966,1.2075,1.449,1.932,2.415,3.381];
```

Como condiciones de contorno elegimos “Splines no nodo” en ambos extremos y pedimos que nos muestre las gráficas de los Splines, de la primera y segunda derivada.

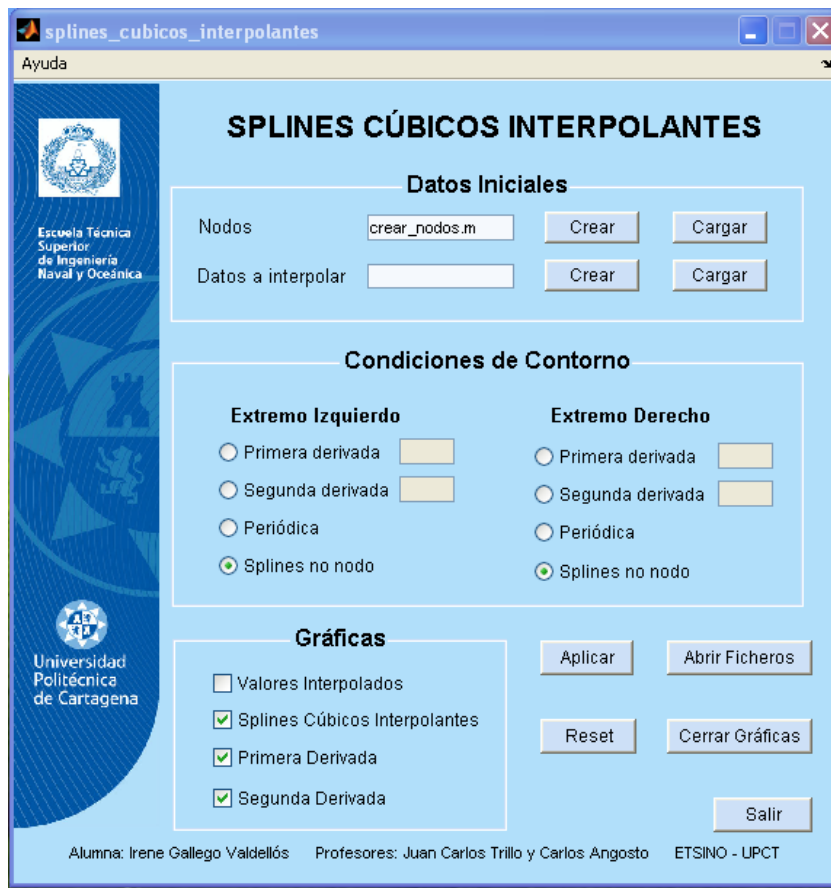


Figura 9.3: Interfaz gráfica completada

Pulsando el botón “Aplicar” aparecerán en pantalla las siguientes gráficas:

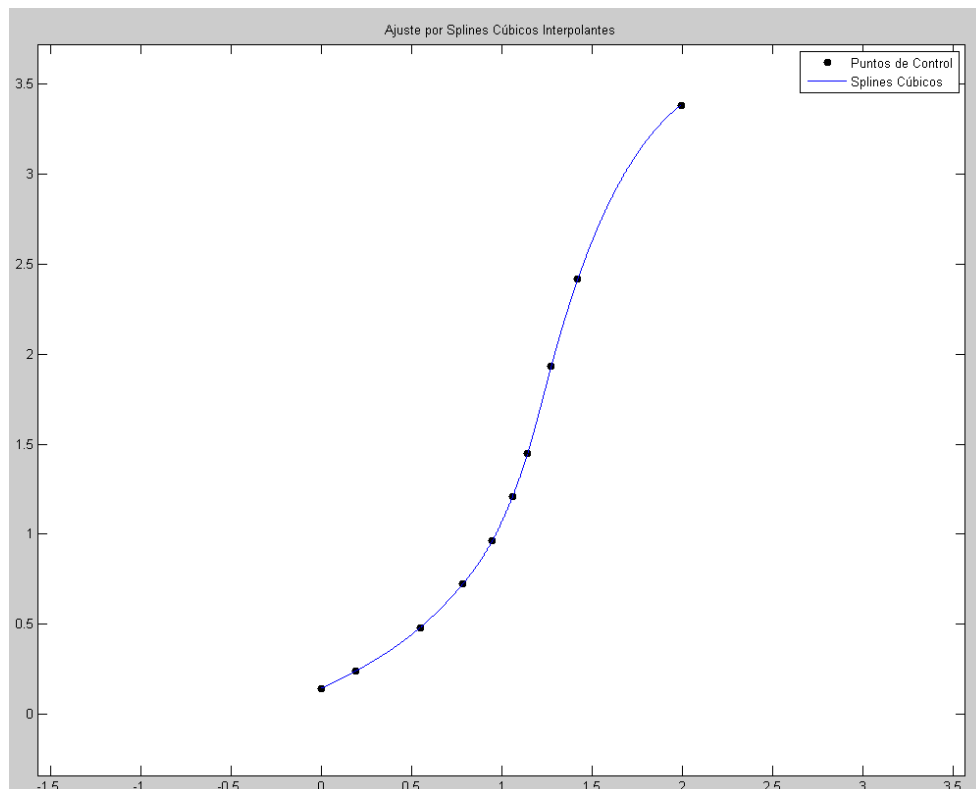


Figura 9.4: Spline de la sección reconstruida



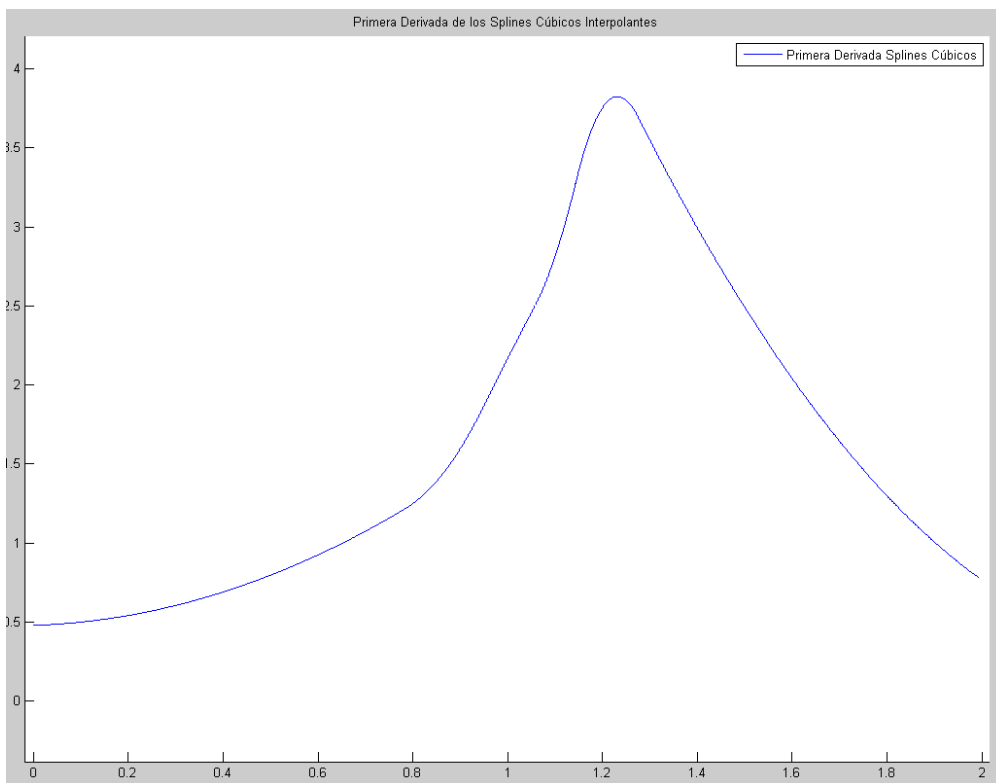


Figura 9.5: Primera derivada de la sección reconstruida

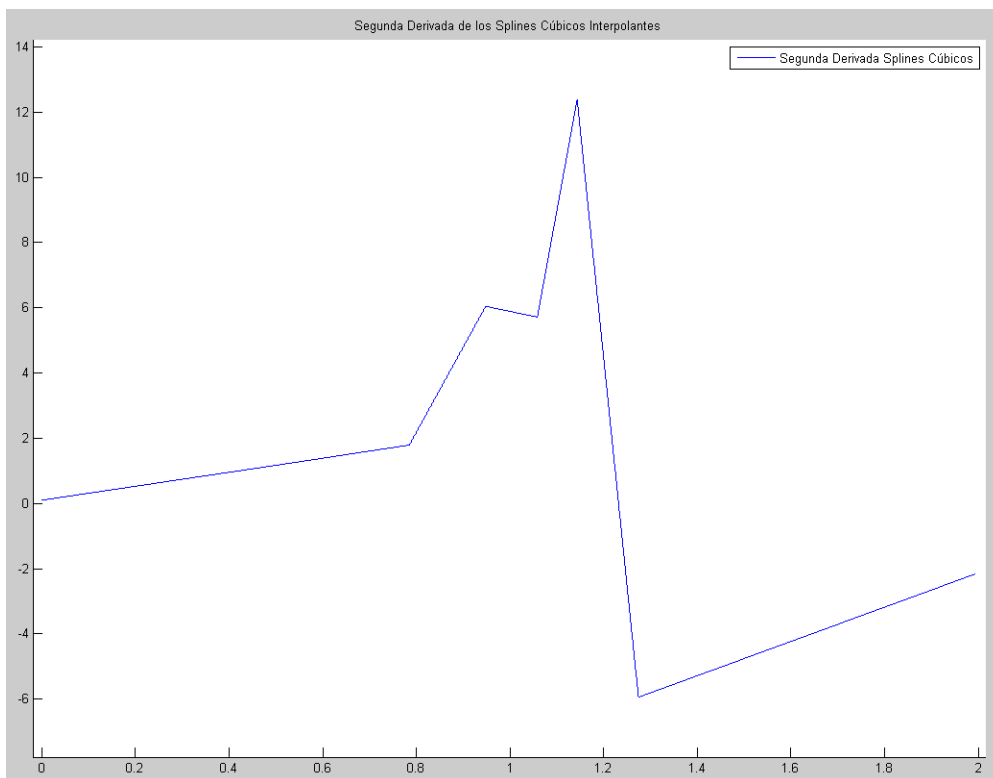


Figura 9.6: Segunda derivada de la sección reconstruida

Por último pulsamos el botón “Abrir Ficheros” y copiamos las expresiones de los polinomios:

```
+ 0.357178 x^3 + 0.049130 x^2 + 0.479764 x + 0.145100
+ 0.357178 x^3 + 0.049130 x^2 + 0.479764 x + 0.145100
+ 0.364530 x^3 + 0.037006 x^2 + 0.486428 x + 0.143879
+ 4.347940 x^3 + 9.340339 x^2 + 7.844831 x + 1.780834
+ 0.499212 x^3 + 4.443506 x^2 + 5.220876 x + 2.347494
+ 13.092963 x^3 + 38.714368 x^2 + 40.457418 x + 13.767808
+ 23.322336 x^3 + 86.186466 x^2 + 102.341706 x + 40.652938
+ 0.876127 x^3 + 6.321838 x^2 + 15.541627 x + 9.419972
+ 0.876127 x^3 + 6.321838 x^2 + 15.541627 x + 9.419972
```

### **3. Conclusiones**

En unos pocos minutos hemos sido capaces de reconstruir la sección obteniendo su primera y segunda derivada correctamente, así como las expresiones de los polinomios cúbicos que las definen. A continuación vamos a comprobar que realmente hemos obtenido la misma curva y no nos hemos equivocado a la hora de introducir ningún dato. Y lo más importante, elegir las condiciones de contorno de cuarto tipo, en las que el Spline también tiene continuidad en los extremos en su tercera derivada, nos da mejores resultados en este caso.

Para comprobar si la reconstrucción de la curva es correcta tratamos la imagen de la gráfica obtenida con Matlab. Convertimos el fondo en transparente y coloreamos la imagen en verde de forma que podamos superponer las dos imágenes y distinguir las dos curvas. El resultado se puede ver en a siguiente figura:

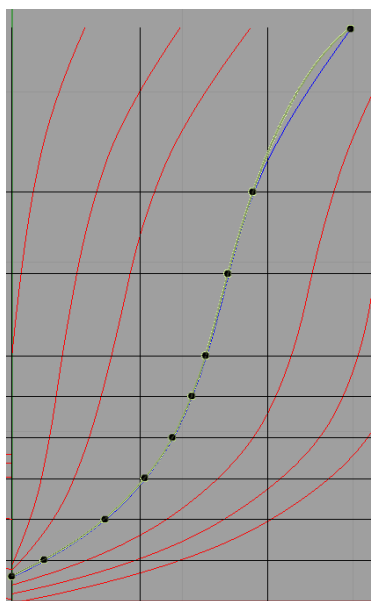


Figura 9.7: Curva original y reconstruida solapadas

Como podemos observar, la curva reconstruida en verde sólo se diferencia de la original en el extremo derecho, por lo que quizás ahí deberíamos escoger otro tipo de condición de contorno. Pero como desconocemos el valor de la primera y de la segunda derivada, sólo podemos aventurarnos probando distintos valores aproximados e ir iterando hasta encontrar el correcto, lo que nos puede llevar mucho más tiempo del que sería rentable. Por otro lado, sabemos que el método de alisado utilizado con la sección original asumía Splines naturales, es decir, cuya derivada segunda en los extremos es cero. Esto no quiere decir que sea correcto asumir dicho valor en la derivada segunda para un buen alisado, puesto que dicho método de alisado falla concretamente en los extremos y conlleva una gran dificultad eliminar los cambios bruscos de curvatura en esas zonas.

Por tanto, vamos a asumir que la sección cambie entre las líneas de agua cinco y seis; y puesto que no tenemos ningún punto original de la cartilla de trazado que nos restrinja la forma de la curva en esa zona, nos vamos a centrar en el análisis del alisado del Spline reconstruido.

En la gráfica de la primera derivada observamos un cambio en la pendiente en torno a la abscisa 1.2 y comprobamos que ciertamente existe un cambio en la curva en esa altura. Si nos fijamos en la gráfica de la segunda derivada observamos cómo en la altura de dicha abscisa aparecen dos picos (uno hacia arriba y otro hacia abajo), los cuales nos indican el cambio de curvatura que estamos analizando. Pero a la izquierda del mismo aparece otro pico más pequeño que indica un pequeño cambio brusco de la curvatura y que no se corresponde con el diseño de la sección, por lo que éste pequeño pico altera la uniformidad de la curvatura y es susceptible de ser eliminado en un mejor alisado.



*Figura 9.8: Cambio en la uniformidad de la curvatura*

Así que si consiguiéramos eliminarlo, la uniformidad en el cambio de curvatura se vería incrementada. Pero para ello deberíamos volver al proceso de alisado anterior al que fue sometido el casco. Debido a que un cambio en un punto afecta no sólo a la sección que estamos estudiando, sino a toda la zona del casco; consideramos que, desde el punto de vista localizado actual, no tenemos suficientes datos para decidir si debemos aumentar el tiempo en el proceso de diseño, dando una vuelta más al alisado, puesto que no está claro que el grado de alisado aumente considerablemente sin variar drásticamente el diseño del casco. Es decir, no parece oportuno repetir el proceso de alisado ya que éste no tiene porque ser mejor después de aumentar considerablemente las horas de trabajo sobre el casco, considerando que el casco que ha llegado hasta aquí ya ha pasado repetitivamente por el mismo proceso de alisado.

Por último podemos ver que en la zona de crujía, abscisa 0, la primera derivada no es cero como correspondería a un casco con continuidad de curvatura en el plan. Pero esto es debido a que, concretamente en el casco del que estamos analizando una sección, no continúa la curvatura en línea de crujía, sino que lleva una superficie completamente llana en la zona del plano de crujía.

En el extremo derecho, en el que anteriormente hablábamos que no coinciden la curva original con la reconstruida, podemos ver en la primera y segunda derivada que existe una buena uniformidad en la zona, por lo que consideramos que la curva actual es correcta.

Por tanto, podemos considerar acertadas las condiciones de contorno asignadas en cada uno de los extremos puesto que conllevan un buen alisado de la sección. Y si nos fijamos en las expresiones de los polinomios cúbicos, comprobamos que hay continuidad en la tercera derivada en los extremos, ya que los coeficientes de los mismos coinciden al ser idénticas sus primera, segunda y tercera derivadas.

# Conclusión

---

A través del dibujo naval manual y de la definición matemática de los Splines hemos podido entender y construir este tipo de curvas suaves. Además, a lo largo de este proyecto se han desarrollado varios programas informáticos que permiten seleccionar el tipo de condiciones de contorno que se quieran aplicar y los datos de salida que se deseen obtener, aportando esto una gran versatilidad a la hora de utilizar tanto el programa base como la interfaz gráfica.

Aunque para la realización de este proyecto no se ha tenido en cuenta, Matlab ya incluye un programa de construcción de Splines cúbicos interpolantes. Aun así se ha querido desarrollar uno propio por el conocimiento que se adquiere a través de la creación del mismo y porque, aunque el programa perteneciente a Matlab esté más optimizado en cuanto a velocidad, el desarrollado aquí nos permite realizar cambios y adecuarlo a nuestras necesidades particulares.

Dentro del campo de la ingeniería naval hemos centrado el caso práctico en el análisis de una sección de la caja de cuadernas de un buque, pero la construcción matemática del Spline cúbico interpolante tiene también muchas otras utilidades; como por ejemplo, indicarle el recorrido a realizar a una grúa que transporte pesos o contenedores dentro de un buque, de forma que su trayectoria sea suave y sin giros bruscos. Del mismo modo, dentro del campo del diseño el uso de las curvas suaves está muy extendido, tanto para ofrecer al cliente un producto con el aspecto y los acabados deseados como para obtener unas formas aerodinámicas o hidrodinámicas necesarias y/o convenientes en muchos vehículos de transporte.

Actualmente, el uso interactivo de las curvas tipo Spline es el más extendido por la facilidad que supone modificarlas hasta conseguir las superficies deseadas. Sin embargo, a la hora de analizar la suavidad de las mismas seguimos valiéndonos de la representación gráfica de la curvatura o de los renderizados; y aunque el poder analizar la segunda derivada de cada una de las curvas que forman la superficie está mucho menos extendido, es significativamente más útil y objetivo. Por lo que uno de los campos aún a desarrollar más ampliamente radicaría en el análisis del alisado de la malla de forma más objetiva que la simple comprobación visual.

Casi todos los programas de diseño actuales tienen implementadas cada una de las diferentes curvas Spline (interpolantes, suavizantes, B-Splines...) que formando una malla permiten generar superficies. Pero hasta hace poco tiempo nos encontrábamos con el problema de realizar esquinas con estas superficies o ciertas formas más complejas como los codastes y la unión de las orzas y timones con el casco de una embarcación. Para solventar estos problemas se ha implementando el uso de nuevos puntos de control de la malla unidos a una sola fila o a una sola columna sin necesidad de formar parte de ambas, con la consiguiente suavidad que esto aporta al no aumentar el número de nodos y el consiguiente control que se obtiene en la zona. Este tipo de curvas se denominan T-Splines y actualmente se pueden adquirir a través de Autodesk para su uso en Rhinoceros y Orca.

Finalmente, podemos decir que a través de este proyecto se han adquirido conocimientos más amplios sobre la construcción de las curvas suaves utilizadas en el diseño, en particular, sobre la construcción de los Splines cúbicos interpolantes. Así como se ha ampliado considerablemente los conocimientos de programación, incluyendo la creación de una interfaz gráfica que permite a cualquier usuario resolver ciertos problemas conociendo únicamente los datos de entrada y sin necesidad de aprender todo el proceso de cálculo.

# Bibliografía

---

- ❖ FICATIER, Bernard; ROCHE, Hugues; ANGELI, Jean (2004). *Concevoir, reveler et dessiner des plans de voiliers classiques et traditionnels*. Le Chasse-Marée.
- ❖ GONZÁLEZ LÓPEZ, Primitivo B (2005). *Técnicas de Construcción Naval*. 2ª Edición. Universidade da Coruña.
- ❖ CRUCELAEGUI CORVINOS, Antonio (1985). *Geometría y Representación de Carenas*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales.
- ❖ Programas Informáticos Navales. [Apuntes] José Alfonso Martínez García. Departamento de Tecnología Naval (ETSINO-Universidad Politécnica de Cartagena).
- ❖ Fundamentos de la Construcción Naval. [Apuntes] José Alfonso Martínez García. Departamento de Tecnología Naval (ETSINO-Universidad Politécnica de Cartagena).
- ❖ Dibujo Naval. [Apuntes] Leandro Ruíz Peñalver. Departamento de Tecnología Naval (ETSINO-Universidad Politécnica de Cartagena).
- ❖ Expresión Gráfica. [Apuntes] Mariano Hernández Albaladejo. Departamento de Expresión Gráfica (ETSINO-Universidad Politécnica de Cartagena).
- ❖ Matemáticas Asistidas por Computador. [Apuntes] Antonio Escudero Vergara. Departamento de Matemática Aplicada y Estadística (ETSINO-Universidad Politécnica de Cartagena).
- ❖ KRASNOV, M. (2003). *Curso de Matemáticas Superiores*. URSS (Tomo 9).
- ❖ CORDERO BARBERO, A.; MOLADA MARTÍNEZ, E.; HUESO PAGOAGA, J.L.; TORREGROSA SÁNCHEZ, J.R. *Métodos numéricos con Matlab*. Editorial Universidad Politécnica de Valencia.
- ❖ Matriz de diagonal estrictamente dominante - Wikipedia, la enciclopedia libre [en línea] [Consulta: 20 de Noviembre del 2012]  
<[http://es.wikipedia.org/wiki/Matriz\\_de\\_diagonal\\_estrictamente\\_dominante](http://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_de_diagonal_estrictamente_dominante)>