

APLICACIÓN DE LAS TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN EN EL DISEÑO DE ESTRUCTURAS LIGERAS PARA GRANDES LUCES

Por Pascual Martí

INTRODUCCIÓN

El diseño de estructuras se realiza habitualmente siguiendo un proceso iterativo (figura 1). Se parte de un diseño inicial, que es analizado para conocer su respuesta a las acciones exteriores y comprobar si esta respuesta es adecuada y segura. En el caso de que esta comprobación resulte satisfactoria, se finaliza el diseño; en caso contrario, se realiza un proceso de síntesis, que a partir de los resultados del análisis proporciona un nuevo diseño. Este diseño se analiza de nuevo y el proceso se repite hasta alcanzar un diseño satisfactorio.

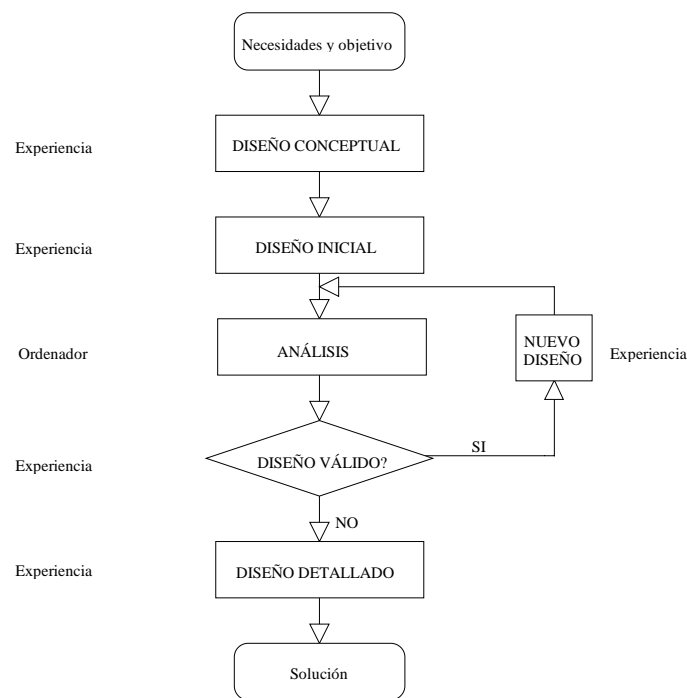


Figura 1 Diseño por prueba y error

Este método, denominado de prueba y error, presenta el inconveniente de que las modificaciones dependen totalmente de la experiencia del diseñador, lográndose soluciones buenas pero no las mejores, y además con un alto precio en tiempo del diseñador.

Desde la aparición del ordenador se han realizado grandes esfuerzos para su aplicación al diseño de estructuras. La parte del proceso de diseño que más se ha desarrollado ha sido la de análisis. Así, desde los primeros años de la década de los cincuenta se han ido realizando programas cada vez más generales, hasta llegar a los programas de Elementos Finitos actuales, capaces de analizar, de forma muy eficiente, la respuesta dinámica no lineal de estructuras de gran tamaño y complejidad. Al mismo tiempo se han realizado muchos intentos para realizar totalmente el diseño con el

ordenador, automatizando la fase de síntesis, o de modificación del diseño a partir de la información del análisis, mediante el empleo de técnicas de optimización. En la figura 2 se muestra un diagrama de flujo correspondiente al proceso de diseño con técnicas de optimización.

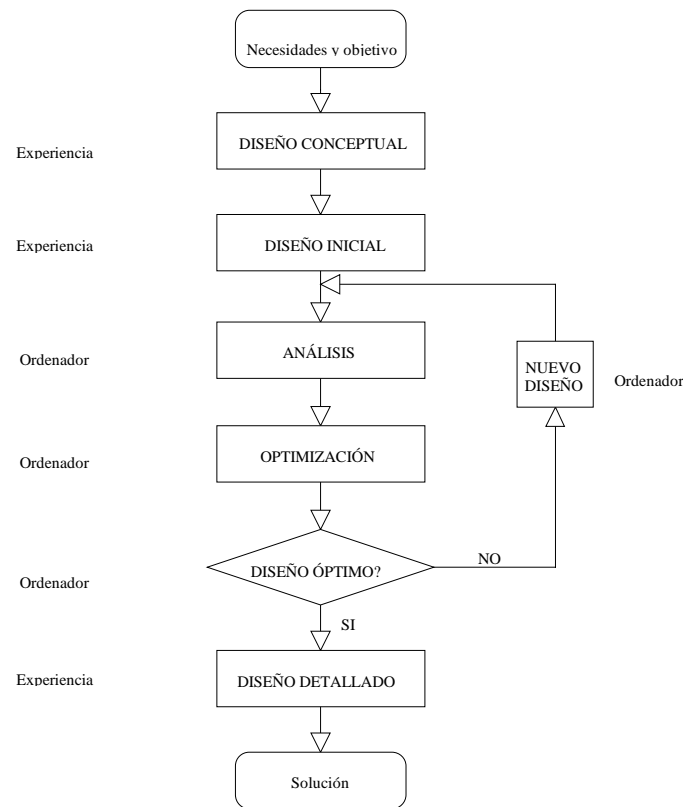


Figura 2 Diseño con técnicas de optimización

Durante los treinta últimos años, los investigadores han estado estudiando las posibilidades de emplear las técnicas de Programación Matemática y los algoritmos de búsqueda, para la resolución de problemas de diseño óptimo de estructuras.

La optimización de sistemas estructurales puede definirse como el desarrollo y aplicación de técnicas de ordenador, interactivas o automáticas, para mejorar los diseños. Se pretende obtener los diseños de costo mínimo que cumplan todas las condiciones de diseño.

En general, con la optimización se llega a un resultado que podría haber obtenido un diseñador experimentado, siempre que hubiera podido disponer del tiempo y dinero necesarios para explorar directamente todas las alternativas del diseño. La introducción de técnicas de optimización en el diseño estructural se hace necesaria a la vista de las ventajas que ofrece, entre ellas:

- reducción de costes;
- ahorro de tiempo a los diseñadores, permitiéndoles mayor dedicación a las fases más creativas del diseño, y
- la posibilidad de considerar las especificaciones de diseño, cada vez más numerosas y difíciles de cumplir, que se exigen a las estructuras actuales.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

El objetivo del diseño óptimo de estructuras es obtener un diseño, es decir, un conjunto de valores de las variables de diseño, que haga mínima una función objetivo, por ejemplo el costo, y cumpla una serie de restricciones que dependen de las mismas variables.

Las *variables de diseño* pueden ser:

- Propiedades de la sección transversal de los elementos (áreas, espesores, momentos de inercia, etc.);
- Geometría de la estructura (coordenadas de nodos, etc.);
- Topología de la estructura (conexiones de los elementos), y
- Propiedades del material de la estructura.

El tipo de optimización a realizar dependerá de cuales de estas variables se consideren.

Tradicionalmente se ha buscado el diseñar las estructuras de peso mínimo que cumplieran las condiciones de diseño, lo que ha conducido a que la *función objetivo* más habitual sea el peso de la estructura. Sin embargo, en otras aplicaciones el peso no es el factor determinante, y se recurre al empleo de otras funciones relacionadas con el costo. Asimismo, pueden emplearse como función objetivo otras cantidades, tales como la fiabilidad, el desplazamiento de algún punto, la rigidez, la frecuencia fundamental, etc.

Las *restricciones* son condiciones que debe cumplir el diseño para que pueda ser considerado válido. Las restricciones pueden ser de dos tipos: restricciones de igualdad y restricciones de desigualdad.

Las *restricciones de igualdad* suelen estar asociadas a las relaciones que fijan el comportamiento de la estructura, tales como condiciones de equilibrio, compatibilidad, ley de comportamiento del material, etc. Otras relaciones de igualdad están asociadas a las relaciones entre las variables de diseño del problema (igualdad de secciones de diferentes elementos, condiciones de simetría, etc.).

Las *restricciones de desigualdad* suelen estar asociadas a limitaciones impuestas a la respuesta de la estructura, tales como tensiones máximas, deformaciones máximas, pandeos locales, pandeos globales, frecuencias de vibración, etc. Otro tipo de restricciones de desigualdad son las que delimitan el rango de posibles valores de las variables.

En términos matemáticos, el problema de diseño óptimo se puede formular como:

Encontrar el vector de variables de diseño \mathbf{x} que

$$\begin{array}{lll} \text{minimice:} & f(\mathbf{x}) & \\ \text{sujeto a:} & h_j(\mathbf{x}) = 0 & j= 1, 2, \dots, m_i \\ & g_j(\mathbf{x}) \geq 0 & j= 1, 2, \dots, m_d \\ & x_i^I \leq x_i \leq x_i^S & i= 1, 2, \dots, n \end{array}$$

siendo: \mathbf{x} el vector *n-dimensional* de variables de diseño; $f(\mathbf{x})$ la función objetivo; $h_j(\mathbf{x})$ la restricción de diseño de igualdad j ; $g_j(\mathbf{x})$ la restricción de diseño de desigualdad j ; m_i el número de restricciones de igualdad; m_d el número de restricciones de desigualdad; n el número de variables; x_i^I el límite inferior de la variable i , y x_i^S el límite superior de la variable i .

Al espacio *n-dimensional* definido por el vector de variables \mathbf{x} se le denomina espacio de diseño. Las restricciones definen hipersuperficies que acotan un entorno en el espacio de diseño. Un conjunto de variables de diseño define un punto en el espacio de diseño. Si un punto del espacio es tal que se cumplen todas las restricciones, ese punto es un diseño válido; si, por el contrario, viola alguna restricción, el punto del espacio de diseño corresponde a un diseño no válido.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Hasta el momento actual, no existe un procedimiento que sea el más adecuado para resolver todos los problemas de optimización. Debido a esto, se usan diferentes métodos y técnicas según las características del problema que se vaya a resolver.

Una primera clasificación agrupa a los métodos de optimización en métodos analíticos y métodos numéricos. Los *métodos analíticos* se iniciaron con las teorías de Maxwell (1854) y Michell (1904), y buscan funciones y relaciones funcionales, representativas del diseño estructural, que permitan obtener diseños de peso mínimo.

Los *métodos numéricos* se han desarrollado en los últimos treinta años, y se basan en el empleo de las técnicas de Programación Matemática. Los métodos numéricos son los que más rápidamente están desarrollándose, debido a su mayor generalidad y a las posibilidades actuales de los ordenadores.

Otra clasificación de los métodos de optimización los divide en: Criterios de Optimalidad y Programación Matemática.

Los *Criterios de Optimalidad* se basan en obtener las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir el óptimo, para unos requisitos de diseño determinados.

Los métodos de *Programación Matemática* han sido los que han hecho posibles los últimos avances en la optimización numérica. Un algoritmo de Programación Matemática se inicia con un vector inicial de variables de diseño (\mathbf{x}) que se va actualizando, en cada iteración, de la forma siguiente:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \cdot \mathbf{d}_k$$

es decir, el vector de variables de diseño para la iteración $k+1$ se obtiene a partir del punto de diseño anterior (\mathbf{x}_k). La actualización viene dada por el producto $\alpha_k \mathbf{d}_k$. En este producto \mathbf{d}_k es una dirección de búsqueda en el espacio n -dimensional de las variables de diseño y α_k es la longitud del movimiento en esa dirección.

Dentro de un método de Programación Matemática se distinguen tres partes: la estrategia de optimización, el método de optimización y la minimización unidimensional. La *estrategia de optimización* se utiliza para formular un subproblema de optimización; el *método de optimización* se utiliza para obtener la dirección de búsqueda; finalmente, la *búsqueda unidimensional* se utiliza para determinar la longitud de paso α . Los diferentes métodos de Programación Matemática se distinguen por la forma en que resuelven cada una de estas partes. En la tabla 1 se da una clasificación resumida de los métodos de Programación Matemática. Otras clasificaciones más detalladas, y la explicación de cada método, puede encontrarse en las referencias (Arora, 1989; Bazaraa, 1979; Fletcher, 1980, y Gill, 1981).

Una de las grandes ventajas de los métodos de Programación Matemática es su generalidad, ya que no es necesaria ninguna estimación inicial de las restricciones que son

activas en el óptimo. El gran inconveniente es que el costo de su empleo aumenta mucho al aumentar el número de variables y restricciones, lo que es un serio inconveniente para la resolución de problemas de gran tamaño.

Tabla 1. Métodos de Programación Matemática

• Métodos de Transformación
Funciones de penalización
Funciones barrera
Método de los multiplicadores

• Métodos Directos
Direcciones posibles
Gradiente reducido generalizado
Proyección del gradiente

• Métodos de Linealización
Secuencia de pasos lineales
Secuencia de pasos convexos
Programación cuadrática sucesiva

COMPONENTES DE UN SISTEMA DE DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS

Los diferentes métodos de optimización resuelven el problema de diseño de forma iterativa, siendo necesario en cada iteración calcular los valores de la función objetivo, las restricciones y, en algunos casos, sus derivadas. Estos valores se calculan a partir de los resultados del análisis. Así pues, el software de diseño óptimo de estructuras está compuesto de software de optimización y software de análisis, organizados dentro de un proceso iterativo.

El carácter iterativo del proceso de diseño, la necesidad de calcular derivadas, y la no existencia de un método de optimización válido para todos los casos, hacen que el flujo de un programa de diseño sea muy diferente al flujo de un programa de análisis por elementos finitos, cuyas técnicas están mucho más establecidas y suelen dar la solución en un sólo paso. Las consideraciones anteriores señalan la importancia que tiene en este caso la organización general del programa y las interfaces entre los programas de elementos finitos y de optimización.

Los primeros programas de optimización se centraron en el diseño automático, en los que una vez formulado el problema e introducidos los datos se genera una solución, sin intervención del usuario. Estos programas, que tenían una organización tipo "caja negra", resultaban muy eficientes, a costa de servir para un único tipo de aplicación.

Posteriormente han ido apareciendo programas de tipo interactivo en los que el usuario puede intervenir en la evolución del diseño. Con estos programas se gana en flexibilidad; sin embargo, su eficiencia resulta muy condicionada por el flujo de datos entre las distintas partes del programa, y su utilidad depende en gran medida de la experiencia del usuario.

Los componentes básicos de un sistema integrado de diseño óptimo son:

- a) Análisis;
- b) Interfaz Análisis-Optimización;
- c) Optimización;
- d) Interfaz Optimización-Análisis, y
- e) Control e interacción con el usuario.

Estos procesadores realizan funciones independientes en el proceso de diseño. En la figura 3 se representan los componentes y flujo básico del proceso de diseño óptimo, asociando cada componente a uno de los procesadores anteriores.

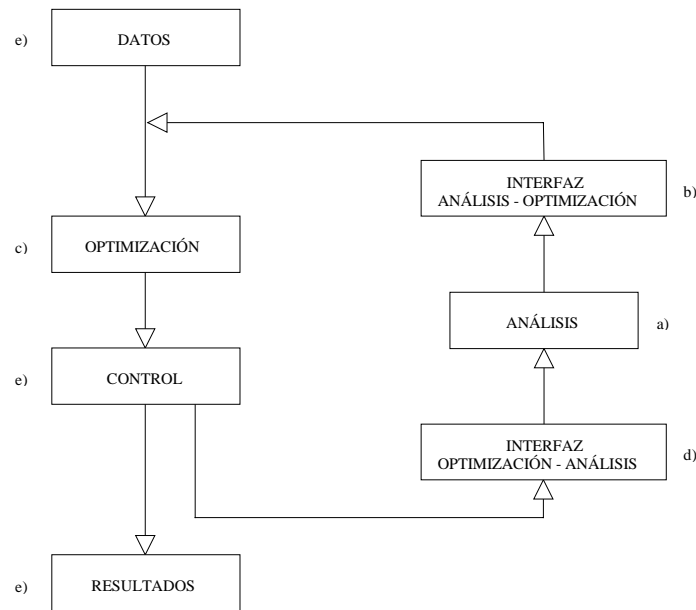


Figura 3 Componentes y flujo básico del proceso de diseño óptimo

Con el fin de combinar la necesaria flexibilidad con un buen nivel de eficiencia, estos sistemas suelen adoptar una estructura modular, organizada alrededor de una base de datos, tal como se ha representado en la figura 4.

A continuación, se pasa a describir brevemente cada uno de los componentes del sistema de la figura 4, comentando sus características más generales.

Análisis

En general, los sistemas permiten dos posibilidades: el empleo de un módulo de análisis suministrado por el usuario, y el empleo de un programa de Elementos Finitos acoplado al sistema. Los resultados de este procesador suelen ser desplazamientos, tensiones, esfuerzos, modos de pandeo, frecuencias de vibración, etc.

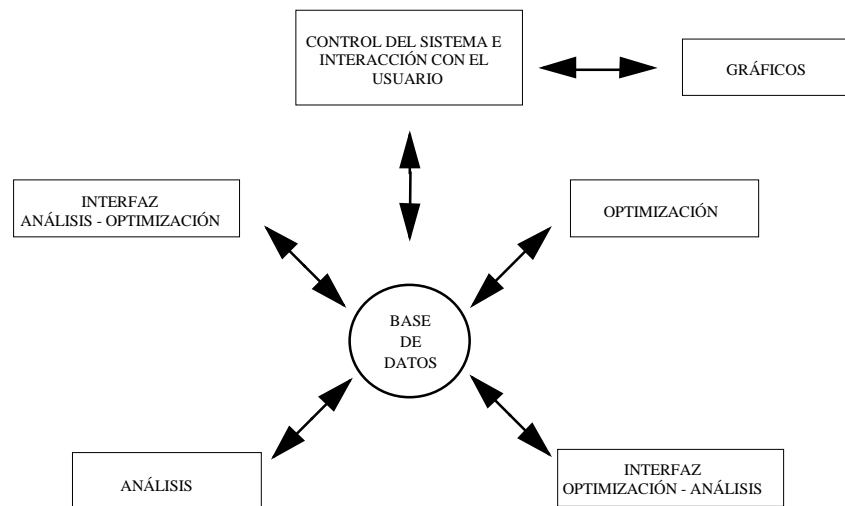


Figura 4 Estructura modular de un sistema integrado de diseño óptimo

Cuando se emplean programas de Elementos Finitos, es de gran importancia que estos programas se adapten a las necesidades del proceso de diseño. Por ejemplo, puesto que el análisis se va a realizar varias veces, es conveniente que el programa esté organizado de forma que las operaciones se puedan separar en repetibles y no repetibles, de manera que se realicen una sola vez aquellas operaciones que no dependan de las variables de diseño. Otro aspecto de gran importancia es la posibilidad de poder utilizar, en ciertas fases del proceso de diseño, métodos aproximados de análisis, con el objeto de reducir el esfuerzo de cálculo.

El procesador de análisis implementado en el sistema DISSENY (Martí, 1985) es el programa ADEF (Martí, 1993). ADEF es un programa de elementos finitos basado en el método de los desplazamientos, que resuelve el sistema de ecuaciones de equilibrio de la estructura por el método de eliminación de Gauss, con descomposición en bloques para resolver sistemas grandes con poca memoria.

Interfaz Análisis-Optimización

La función de esta interfaz es calcular la función objetivo, las restricciones y sus gradientes, cuando las necesite el algoritmo de optimización para obtener un nuevo diseño. Para realizar esta función el procesador utiliza los resultados de los desplazamientos, esfuerzos, tensiones, cargas críticas, etc., obtenidos por el programa de análisis y grabados en la base de datos.

Respecto a las sensibilidades del diseño, aunque en la mayoría de los casos es posible obtener expresiones analíticas o semianalíticas para las derivadas de la función objetivo y de las restricciones, en algunas ocasiones, sobre todo en la optimización de casos complejos, resulta poco práctico el empleo de las mismas, debido a la dificultad de evaluación, a ser fuente de errores, y a conllevar una reducción de la flexibilidad en la formulación del problema. En cualquier caso, un sistema general de diseño óptimo debe contar con un procesador de derivadas numéricas, que esté especialmente adaptado a los tipos de funciones y variables con los que se va a trabajar.

Optimización

La función del software de optimización, en particular de los algoritmos de Programación Matemática no Lineal, es la realización de la fase de síntesis del proceso de diseño, modificando las variables de diseño a partir de los valores de la función objetivo, de las restricciones y de sus gradientes, obtenidos de los resultados del análisis.

No existe un único método de optimización que sea el más adecuado para todos los problemas. Debido a esto, es conveniente disponer de varios métodos de optimización. En la optimización de sistemas estructurales, lo habitual es disponer de un método basado en criterios de optimalidad (muchas veces del tipo "Stress-ratio") y de algunos métodos de Programación Matemática.

Cuando se van a utilizar métodos de Programación Matemática, es conveniente disponer de diferentes algoritmos para resolver cada una de las fases de un algoritmo de Programación Matemática: la estrategia de optimización, la obtención de la dirección de búsqueda, y la minimización unidimensional.

El procesador de optimización implementado en el sistema DISSENY emplea un algoritmo de programación cuadrática sucesiva. Este algoritmo resuelve el problema de optimización con función objetivo y restricciones no lineales de forma sucesiva, mediante aproximaciones cuadráticas de la función objetivo, y aproximaciones lineales de las restricciones. El algoritmo utiliza una estrategia de conjunto activo de restricciones.

Interfaz Optimización-Análisis

Los algoritmos de optimización trabajan con variables de diseño, que pueden no corresponderse con los parámetros que definen el modelo de análisis. Debido a esto, la función de esta interfaz es la identificación de las variables de diseño y de su relación con el modelo de análisis.

Las misiones de esta interfaz en la actual implementación del sistema DISSENY son dos, correspondiéndose cada una con el tipo de optimización que se realiza: por una parte se encarga de calcular los valores de las propiedades de la sección transversal de los elementos de la estructura (optimización de propiedades), y por otra actualizar las coordenadas de los nudos de la estructura (optimización de geometría de la estructura).

Control e Interacción con el usuario

Este procesador se encarga de mantener la relación interactiva con el usuario y de controlar el flujo de ejecución e información del sistema.

Respecto del tratamiento gráfico de la información, se suele incluir la representación de la información del análisis (modelo de la estructura, deformada, etc.). En los sistemas más recientes también se suele incluir información relacionada con la optimización. Esta información puede ser de dos tipos: de evolución del diseño (función objetivo, variables, restricciones, etc.) y de representación del espacio de diseño (Company, 1988; Company, 1990).

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS

Como ya se ha señalado anteriormente, el objetivo del diseño óptimo de estructuras es obtener un diseño, es decir un conjunto de valores de las variables de diseño, que haga

mínima una función objetivo, por ejemplo el costo, y cumpla una serie de restricciones que dependen de las mismas variables.

Variables de diseño

En el caso más general, pueden intervenir cuatro tipos de variables:

- de material;
- de geometría;
- de topología, y
- de propiedades de la sección transversal de los elementos.

Actualmente no existen técnicas de optimización que puedan considerar, de forma eficiente, los cuatro tipos de variables de diseño, por lo que es habitual considerar fijos el material y la topología de la estructura, empleando únicamente variables de geometría y propiedades. A pesar de esta simplificación, el tamaño del problema para estructuras de grandes luces sigue siendo muy grande, por lo que se hace necesario reducir el número de variables.

Dos de los métodos más adecuados para reducir el número de variables de optimización son:

- la reducción del número de variables de propiedades de la sección transversal, refiriéndolas a una de ellas (generalmente el área), y
- el agrupamiento de variables, expresando estas en función de un número menor.

La reducción del número de variables de propiedades de la sección transversal se basa en las relaciones que presentan los perfiles pertenecientes a una misma gama. La forma operativa de conseguirlo consiste en adoptar una de las características de la sección transversal como independiente, y relacionarla con el resto de propiedades mediante expresiones del tipo

$$D = a v^b$$

donde D es la variable dependiente y v la variable independiente. Los valores de a y b se pueden obtener mediante ajustes, por mínimos cuadrados por ejemplo, de la gama de perfiles a emplear.

El agrupamiento de las variables se consigue al introducir las condiciones prácticas de diseño, tales como simetrías, igualdad de tipos estructurales de elementos, etc.

Para las variables de propiedades de los elementos, es posible expresar las áreas de todos ellos en función de un número menor de áreas independientes

$$A_j = A_{j0} + T_{ji} x_i$$

donde A_j es el área de elemento j ; A_{j0} es un valor constante del área; T_{ji} el elemento ji de una matriz de tantas columnas como variables de propiedades (nvp) y de tantas filas como grupos de elementos tiene la estructura (ng), y x_i la variable de diseño de propiedades de la que depende el área del elemento.

En las estructuras discretas, para las variables de geometría, que suelen ser las coordenadas de los nudos de la estructura, también es posible realizar una agrupación según su relación con las dimensiones elegidas como variables de diseño de geometría, distinguiéndose entre:

- *Coordenadas independientes*, que se definen a partir de las variables de geometría de la forma

$$c_j = c_{j0} + \sum_{i=1}^{nvg} T_{ji} x_i$$

donde nvg es el número de variables de diseño asociadas a la geometría; T_{ji} es un factor que indica la dependencia de la coordenada j respecto de la variable de diseño i , y c_{j0} el valor constante de la coordenada.

- *Coordenadas dependientes*, que se obtienen a partir de otras coordenadas mediante: condiciones de simetría respecto de planos y ejes de la estructura, o por interpolación lineal a partir de las coordenadas independientes o dependientes ya calculadas, con expresiones de la forma

$$c_k = c_i + factor (c_j - c_i)$$

donde c_k es la coordenada buscada; c_j y c_i son las coordenadas de los nudos entre los que se encuentra el buscado, y $factor$ es el factor de interpolación.

- *Coordenadas definidas por intersección de dos rectas* que unen nudos de coordenadas conocidas.

Para la optimización de forma de estructuras continuas, las variables de geometría suelen estar asociadas a la posición de puntos de control de curvas o superficies, que son las que definen los contornos de la estructura.

Función Objetivo

La función objetivo es el costo de la estructura

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{ng} A_j r_j l_j c_j$$

siendo ng el número de grupos de propiedades de la estructura; r_j la densidad del material de los elementos del grupo j ; l_j la suma de las longitudes de los elementos del grupo j ; c_j el costo relativo del material del grupo j , y A_j el área de los elementos del grupo j .

Restricciones

Restricciones de desplazamiento

Las restricciones de desplazamiento consisten en la limitación de todos o algunos de los movimientos (giros o desplazamientos) de un nudo.

La condición de diseño, para el grado de libertad j , es

$$d_{jlim} \geq d_j$$

donde d_j es el valor absoluto del desplazamiento según algún grado de libertad j y d_{jlim} es el valor absoluto máximo admisible para ese desplazamiento. La restricción correspondiente es

$$g_d(\mathbf{x}) = d_{jlim} - d_j \geq 0$$

Restricciones de tensión

Se pretende, al imponer estas restricciones en la búsqueda del óptimo, que la tensión de comparación no supere la máxima del material en los puntos de la sección considerados más desfavorables en este sentido.

La condición de diseño, para el elemento j, es

$$s_{jlim} \geq s_{jc}$$

donde s_{jc} es la tensión de comparación y s_{jlim} la tensión límite del material del elemento. La restricción correspondiente es

$$g_t(\mathbf{x}) = s_{jlim} - s_{jc} \geq 0$$

Restricciones de pandeo (método omega)

En el método omega (NBE-MV.103-1972) la condición de diseño, para el elemento j de una estructura de nudos articulados, es

$$s_{jlim} \geq s_{jn} \omega$$

donde s_{jn} es la tensión normal y ω es el coeficiente omega de pandeo. La restricción correspondiente es

$$g_{wp}(\mathbf{x}) = s_{jlim} - \omega s_{jn} \geq 0$$

Restricciones de esbeltez

La condición de diseño, para el elemento j, es

$$\lambda_{jmax} \geq \lambda_j$$

donde, λ_{jmax} es la esbeltez máxima admisible del elemento. La restricción correspondiente es

$$g_e(\mathbf{x}) = \lambda_{jmax} - \lambda_j \geq 0$$

Restricciones de estabilidad global de la estructura

Las restricciones de estabilidad global de la estructura consisten en la limitación de la carga crítica de la estructura para la que se produce el pandeo global de la misma.

La condición de diseño, es

$$\lambda_{crít} \geq 1$$

donde $\lambda_{crít}$ es el factor, de la carga total aplicada a la estructura, al que se produce el pandeo global de la misma. La restricción correspondiente es

$$g_{eg}(\mathbf{x}) = \lambda_{crít} - 1 \geq 0$$

Restricciones de borde

Este tipo de restricciones establece los valores máximos y mínimos que pueden tomar las variables de diseño. Las condiciones de diseño son

$$x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup}$$

donde x_i^{inf} representa el límite inferior de la variable de diseño y x_i^{sup} el superior.

Existen algunos algoritmos de optimización que tratan este tipo de restricciones directamente, pero para otros algoritmos es necesario formular las restricciones en la forma

$$g_{bs}(\mathbf{x}) = x_i^{sup} - x_i \geq 0$$

$$g_{bi}(\mathbf{x}) = x_i - x_i^{inf} \geq 0$$

Restricciones de geometría

Este tipo de restricciones permiten imponer relaciones entre las coordenadas de uno o más nudos. Estas restricciones pueden ponerse en la forma

$$g_g(\mathbf{x}) = c_{j_0} + \sum_{i=1}^{nta} f_{ij} \prod_{k=1}^{nca} c_k^{b_k} \geq 0$$

donde c_{j_0} es un valor constante, nca el número de coordenadas asociadas, c_k cada una de las coordenadas que intervienen en la relación, y f_{ij} y b_k factores que permiten definir la correspondiente relación. La expresión anterior corresponde a una formulación más general que la que se presentaba en el apartado de variables, para relacionar las distintas coordenadas de la estructura con las variables de diseño de geometría.

Restricciones del valor de los esfuerzos

Este tipo de restricciones permiten imponer relaciones entre los esfuerzos en la estructura. Estas restricciones pueden ponerse en la forma

$$g_{esf}(\mathbf{x}) = e_{j_0} + \sum_{i=1}^{nta} f_{ij} \prod_{k=1}^{nea} e_k^{b_k} \geq 0$$

donde e_{j_0} es un valor constante, nea es el número de esfuerzos asociados, y los e_k son los esfuerzos que intervienen en la relación.

Reducción de restricciones

En las estructuras de grandes luces, el número de elementos y de hipótesis de carga es muy alto, por lo que el número de restricciones también lo es. Así pues, es habitual encontrarse con problemas con varios miles de restricciones. La consideración de todas estas restricciones daría lugar a problemas de un tamaño excesivo, por lo que hay que proceder a utilizar algunas técnicas que permita reducir el número de restricciones consideradas al mismo tiempo.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Se muestran a continuación tres ejemplos de optimización de estructuras que muestran las posibilidades y limitaciones de las técnicas de optimización para el análisis de estructuras de grandes luces.

MALLA ESPACIAL

Se considera una malla espacial rectangular (figura 5) de 30 x 36 metros, módulos de 3 metros y canto variable. La malla está apoyada en todos los nudos periferales de la capa inferior (líneas de trazos) y soporta una sobrecarga uniforme de 150 kp/m².

Parámetros de diseño

En la figura 5 se muestra la topología de la malla y sus dimensiones. Los elementos utilizados para la malla son los de la gama de perfiles laminados tubulares de la NTE-EAE.

El material empleado es acero A-42b.

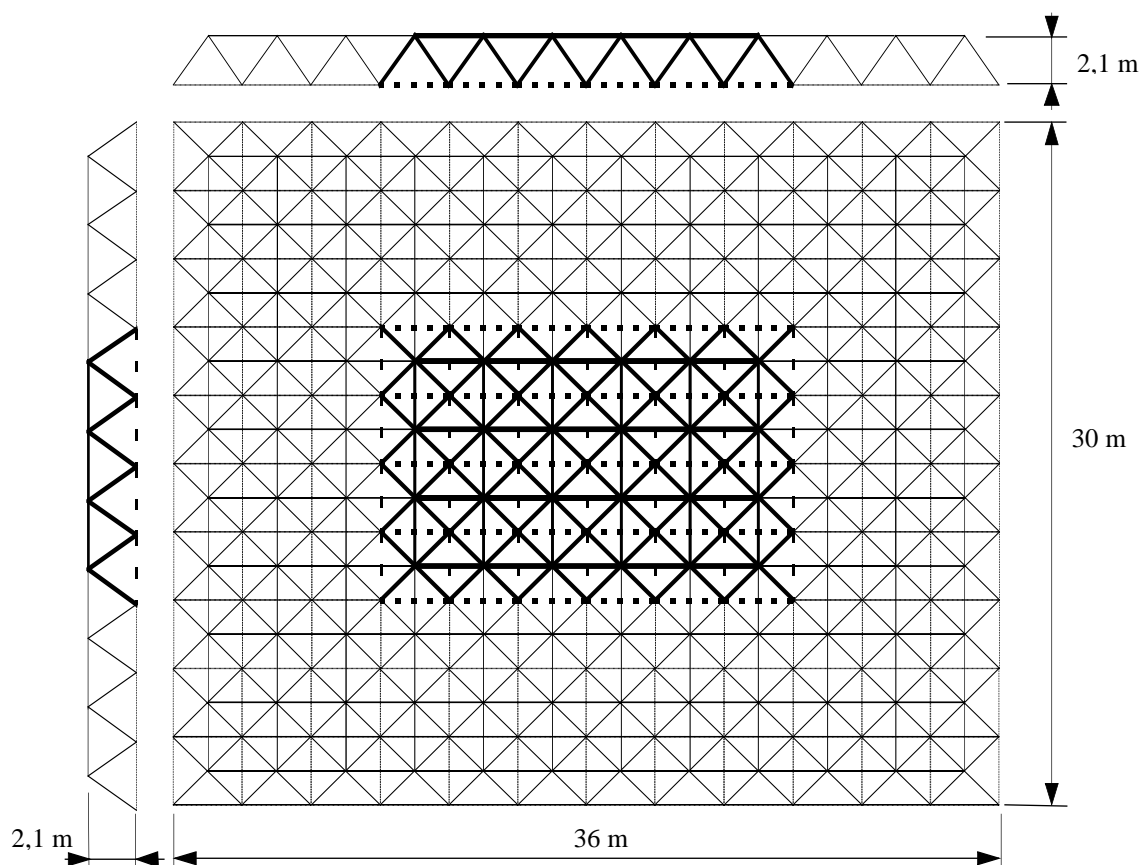


Figura 5 Malla espacial

Función objetivo

La función objetivo a minimizar es el peso de la malla. El peso específico utilizado para el acero es de 7,8 kp/dm³.

VARIABLES DE DISEÑO

Se han considerado dos casos: uno con cuatro variables y otro con siete variables. Las variables de cada caso son:

- Caso A: tres variables de propiedades (área de los elementos de la capa superior, área de los elementos de la capa inferior, área de las diagonales), y una variable de geometría (el canto de la malla).
- Caso B: seis variables de propiedades (área de los elementos exteriores y área de los elementos interiores de la capa superior, área de los elementos exteriores y área de los elementos interiores de la capa inferior, área de las diagonales exteriores y área de las diagonales interiores), y una variable de geometría (el canto de la malla).

Las inercias de los elementos se han obtenido mediante expresiones del tipo $I = a A^b$, siendo: I la inercia, A el área y a y b dos coeficientes obtenidos mediante ajustes por mínimos cuadrados. Los valores correspondientes son los de la tabla 1.

Tabla 1 Malla espacial. Coeficientes de los ajustes para las inercias

área	coef. a	coef. b	perfiles (Ø)
$0 \text{ cm}^2 < A \leq 4,9 \text{ cm}^2$	0,316200	3,001790	40.2, 50.2, 60.2, 70.2, 80.2
$4,9 \text{ cm}^2 < A \leq 9,14 \text{ cm}^2$	0,139990	3,004290	70.3, 80.3, 90.3, 100.3
$9,14 \text{ cm}^2 < A \leq 15,2 \text{ cm}^2$	0,068470	3,054660	100.4, 125.4
$15,2 \text{ cm}^2 < A \leq 30,6 \text{ cm}^2$	0,052190	2,991760	125.5, 155.5, 175.5, 200.5

RESTRICCIONES

Se consideran las restricciones siguientes:

- Restricciones de pandeo (método omega). La tensión máxima admisible es de 17,76 kp/mm², correspondiente a un coeficiente de seguridad de 1,464. Para la determinación del coeficiente omega se utiliza el límite elástico de 26 kp/mm².
- Restricciones de esbeltez. La esbeltez máxima para tracción es de 250. La esbeltez máxima para compresión en la capa superior es de 135, y la de las diagonales es de 150.
- Restricciones de desplazamiento. Se limita el desplazamiento máximo a $30/350 = 0,0857$ m.

Como diseño inicial, en todos los casos, se ha utilizado el de la malla C45 de la Norma NTE-EAE.

RESULTADOS DE LA OPTIMIZACIÓN

Las mallas se han optimizado utilizando el sistema DISSENY, y se han obtenido los resultados que se recogen en la tabla 2.

En la figura 6 se recoge la evolución del diseño (con variables continuas) para la malla del caso B, observándose el modelo de la estructura y las gráficas de evolución de la función objetivo, variables de propiedades, variables de geometría, restricciones de tensión, restricciones de esbeltez y restricciones de desplazamiento, así como las sensibilidades de la función objetivo y de la restricción más violada en el diseño óptimo final.

Tabla 2 Malla espacial. Resultados de la optimización

	C.S.Ext. (cm ²)	C.S.Int. (cm ²)	C.I.Ext. (cm ²)	C.I.Int. (cm ²)	D. Ext. (cm ²)	D. Int. (cm ²)	Canto (m)	Fun.Obj. (T)
Sol. cont. Caso A	13,05	13,05	8,34	8,34	6,88	6,88	2,80	20,808
Sol. cont. Caso B	13,08	14,21	11,73	2,69	6,71	5,53	2,28	20,285
Sol. disc. Caso A	12,1	12,1	7,26	7,26	7,26	7,26	3,3	21,287
Sol. disc. Caso B	15,2	15,2	9,14	3,02	7,26	4,9	2,60	21,056
NORMA C45	15,2	15,2	12,1	12,1	7,26	7,26	2,1	23,286
NORMA C55	15,2	15,2	8,19	8,19	8,19	8,19	3,0	24,041

Abreviaturas: “C.” capa, “S.” superior, “I.” inferior, “D.” diagonales, “Ext.” zona exterior, “Int.” zona interior, “Sol. cont.” solución continua, “Sol. disc.” solución discreta.

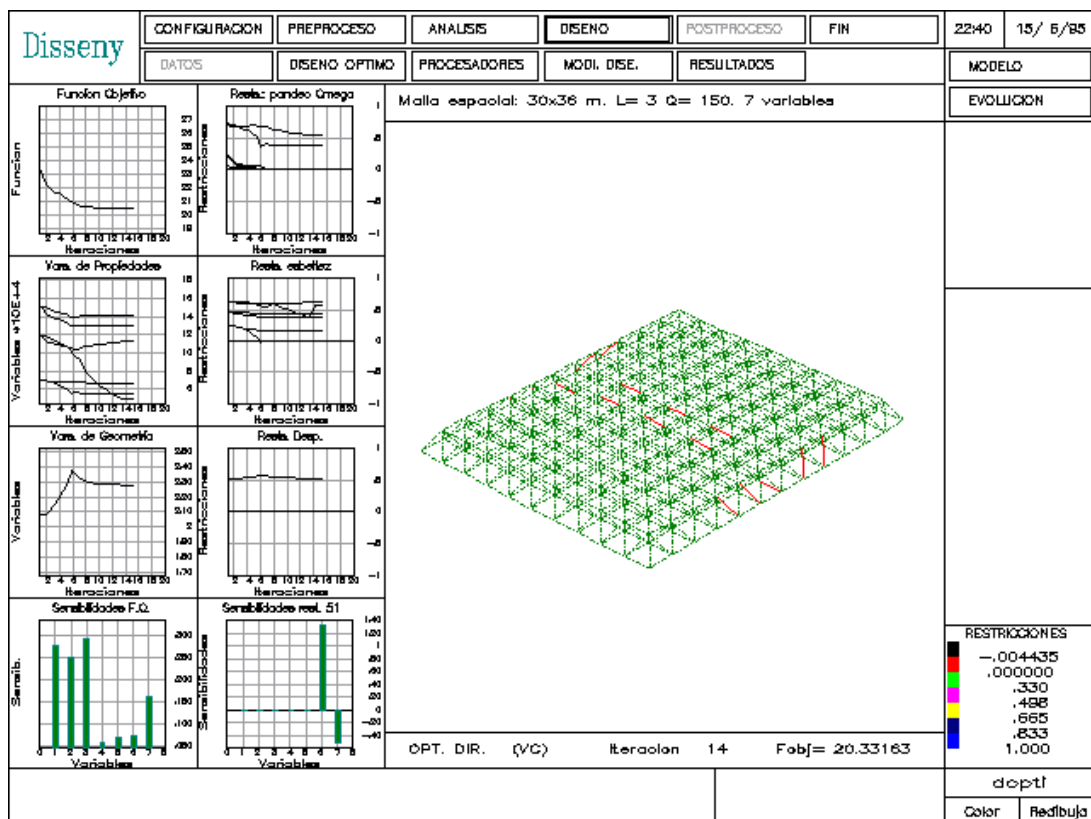


Figura 6 Malla espacial (Caso B). Evolución del diseño en el sistema DISSENY

PÓRTICO PRATT

Se considera una estructura de 59 metros de luz, que se ha optimizado utilizando, exclusivamente, variables de propiedades. Se han optimizado cuatro modelos con la misma geometría, pero con diferentes tipos de perfiles.

Parámetros de diseño

Topología

En la figura 7 se muestra la geometría y topología de la estructura. Todas las barras se han considerado como elementos de nudos rígidos. Dado que la estructura completa está formada por dos estructuras paralelas iguales, separadas 2,5 m., se ha optimizado sólo una de ellas.

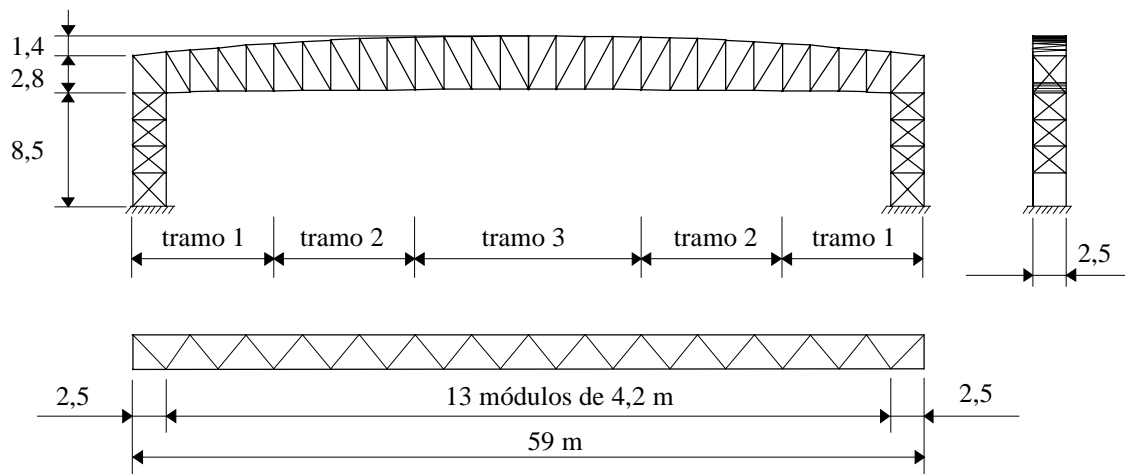


Figura 7 Pórtico Pratt

Material

El tipo de acero empleado es A-42b. Las propiedades adoptadas son las de la tabla 3.

Tabla 3 Pórtico Pratt. Propiedades del acero

Módulo de elasticidad longitudinal	2100000 kp/ cm ²
Módulo de elasticidad transversal	810000 kp/cm ²
Coefficiente de Poisson	0,30
Peso específico	7,8 kp/dm ³
Resistencia de cálculo	2600 kp/cm ²
Coefficiente de dilatación térmica	0,000012 m/m °C
Límite elástico	2600 kp/cm ²

Propiedades geométricas

En la tabla 4 se muestran los tipos de perfiles utilizados en cada uno de los cuatro modelos.

Tabla 4 Pórtico Pratt. Perfiles utilizados

modelo	perfil	elementos
1	IPE medio IPE L en cajón	Cordón interior y exterior de soportes, y cordón superior Cordón inferior Diagonales y montantes
2	UPN en cajón	Todos
3	HEB	Todos
4	IPE	Todos

Estados de carga

Los estados de carga considerados son los de la tabla 5.

Tabla 5 Pórtico Pratt. Estados de carga

estados	cargas
1	Peso Propio (PP) 7,8 kp/dm ³
2	Concargas (CC) 30 kp/m ²
3	Sobrecarga de uso (SU) 30 kp/m ²
4	Sobrecarga de nieve (SN) 40 kp/m ²
5	Acciones del viento (AV) 75 kp/m ²
6	Cargas térmicas (CT) ± 20° C
combinaciones	
7	1,33·(PP + CC) + 1,33·SU + 1,50·AV
8	1,00·(PP + CC) + 1,50·AV
9	1,33·(PP + CC) + 1,50·SU + 1,33·AV
10	1,33·(PP + CC) + 1,50·SU + 1,5·SN
11	1,33·(PP + CC) + 1,50·AV + 1,5·SN
12	1,33·(PP + CC) + 1,33·SU + 1,33·AV + 1,33·SN

Función Objetivo

La función objetivo considerada es el costo de la estructura. El costo de los perfiles utilizados es 125 pts/kg.

Variables de diseño

Como variables de diseño independientes se usan las áreas (tabla 6). El resto de las propiedades necesarias para el dimensionado (inercias, radios de giro, módulos resistentes, etc.) se calculan mediante ajustes obtenidos de los perfiles comerciales.

Restricciones

Se consideran las restricciones de diseño siguientes:

- Restricciones de tensión y pandeo (método omega). La resistencia de cálculo y el límite elástico son los de la tabla 3.
- Restricciones de esbeltez. En todos los elementos, la esbeltez máxima para tracción es de 300 y la esbeltez máxima para compresión es de 200.
- Restricciones de desplazamiento. Se limita el desplazamiento máximo del nudo central a 0,17 m.

Para la determinación de los coeficientes beta y de las longitudes de pandeo de las barras se ha utilizado la norma NBE-MV.103-1972. Posteriormente, mediante el programa ANSYS, se han comprobado los cuatro primeros modos de pandeo global de la estructura (figura 8), para verificar que las cargas críticas de pandeo eran superiores a las cargas aplicadas.

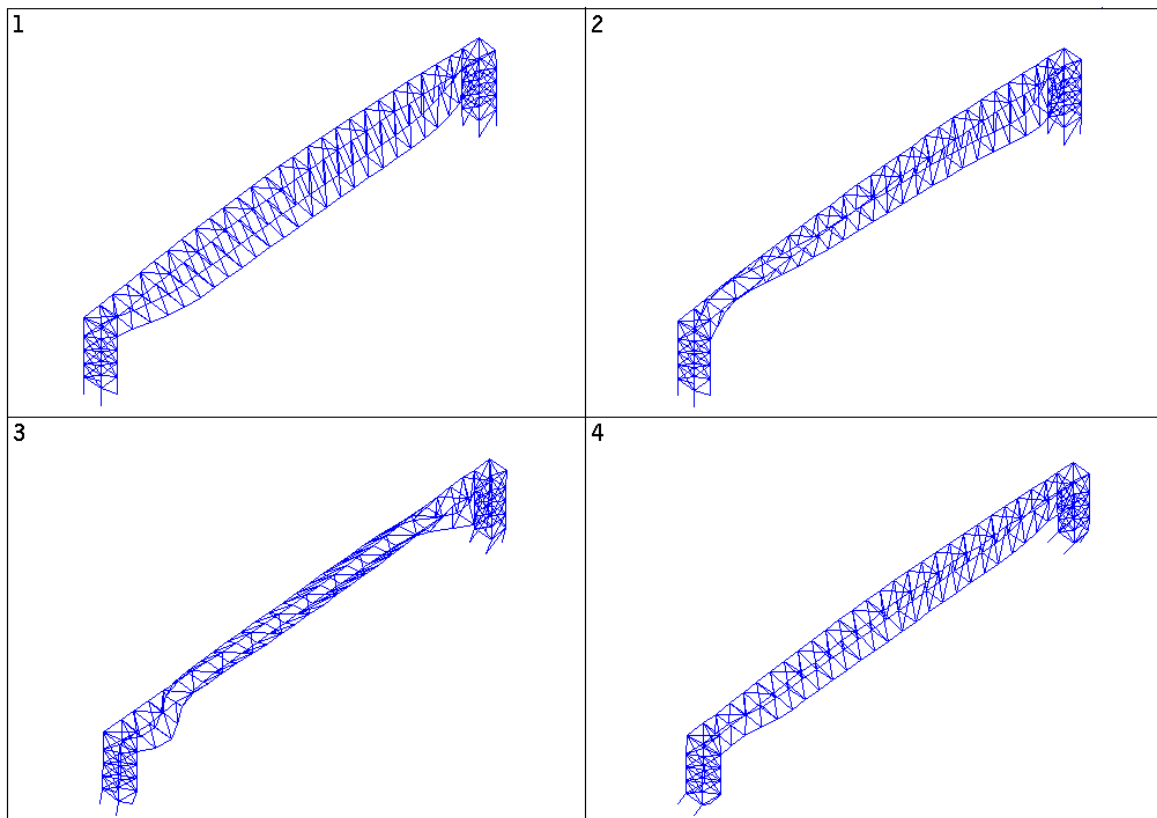


Figura 8 Pórtico Pratt. Modos de pandeo global

Estrategia de optimización

Dado que los valores iniciales de las variables de diseño son arbitrarios, para alcanzar un punto de partida razonablemente próximo al diseño óptimo, que garantice el buen funcionamiento de los algoritmos de programación matemática, se han efectuado seis ciclos de optimización con el método stress-ratio. Posteriormente se ha realizado la optimización formulando subproblemas aproximados y utilizando un algoritmo de

programación cuadrática sucesiva. Finalmente se ha realizado una discretización de las variables para adaptarse a las gamas comerciales.

Resultados de la optimización

La estructura se ha optimizado utilizando el sistema DISSENY, y se han obtenido los resultados que se recogen en la tabla 6.

Tabla 6 Pórtico Pratt. Resultados de las variables de diseño y función objetivo

var.	propiedad de diseño (cm ²)	mod. 1		mod. 2		mod. 3		mod. 4	
		inic.	opt.	inic.	opt.	inic.	opt.	inic.	opt.
1	Área cordones apoyos interiores	33,4	33,4	48,0	56,0	43,0	54,3	39,1	33,4
2	Área diagonales esquinas	38,4	38,4	48,0	34,0	43,0	43,0	39,1	53,8
3	Área diagonales apoyos	21,2	21,2	48,0	22,0	43,0	26,0	39,1	33,4
4	Área montantes apoyos	11,6	8,6	48,0	22,0	43,0	26,0	39,1	13,2
5	Área cordón superior tramo 1	33,4	23,9	48,0	40,8	43,0	43,0	39,1	20,1
6	Área cordón superior tramo 2	33,4	33,4	48,0	56,0	43,0	54,3	39,1	33,4
7	Área cordón superior tramo 3	33,4	33,4	48,0	64,4	43,0	65,3	39,1	33,4
8	Área cordón inferior tramo 1	57,8	78,0	48,0	56,0	43,0	54,3	39,1	33,4
9	Área cordón inferior tramo 2	57,8	57,8	48,0	34,0	43,0	34,0	39,1	16,4
10	Área cordón inferior tramo 3	8,21	23,0	48,0	22,0	43,0	26,0	39,1	16,4
11	Área diagonales tramo 1	9,6	9,6	48,0	22,0	43,0	26,0	39,1	13,2
12	Área diagonales tramo 2	6,16	6,16	48,0	22,0	43,0	26,0	39,1	13,2
13	Área diagonales tramo 3	6,16	6,16	48,0	22,0	43,0	26,0	39,1	16,4
14	Área montantes tramo 1	34,2	30,2	48,0	22,0	43,0	26,0	39,1	28,5
15	Área montantes tramo 2	18,1	18,1	48,0	22,0	43,0	26,0	39,1	28,5
16	Área montantes tramo 3	11,6	11,6	48,0	22,0	43,0	26,0	39,1	23,9
17	Área cordón apoyos exteriores	33,4	28,5	48,0	48,0	43,0	54,3	39,1	28,5
función objetivo (pts.)		994 368		1 340 400		1 469 800		1 003 100	

Abreviaturas: “var.” variable, “mod.” modelo, “inic.” valor inicial, “opt.” valor óptimo.

En la figura 9 se muestra la evolución del diseño, observándose el modelo de la estructura y las gráficas de la evolución de la función objetivo, variables de propiedades, restricciones de tensión, restricciones de esbeltez y restricciones de desplazamiento, así como las sensibilidades de la función objetivo y de la restricción mas violada en el diseño óptimo final.

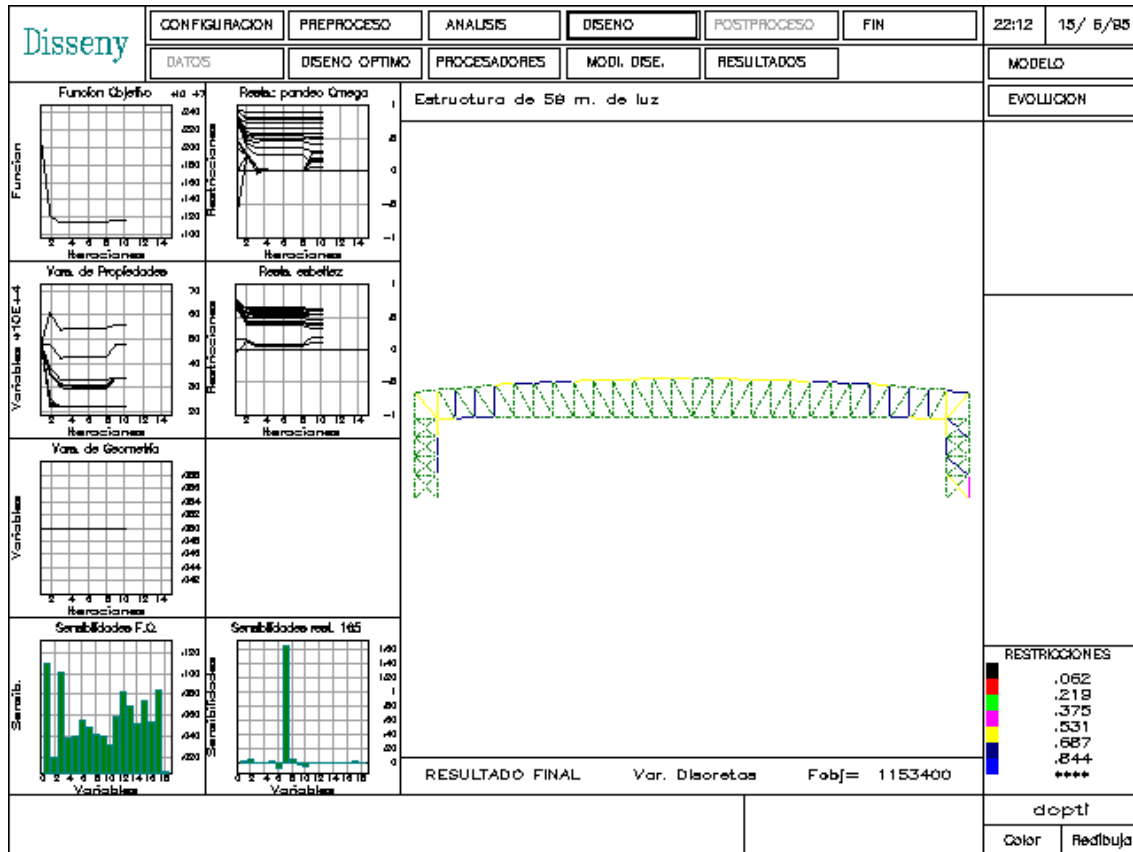


Figura 9 Pórtico Pratt. Evolución del diseño en el sistema DISSENY

ARCO DE HORMIGÓN

Se considera un arco de hormigón, de 50 m. de luz, sometido únicamente a su peso propio (figura 10). El problema consiste en obtener la forma de peso mínimo sin sobrepasar la resistencia máxima del hormigón, tanto de tracción como de compresión.

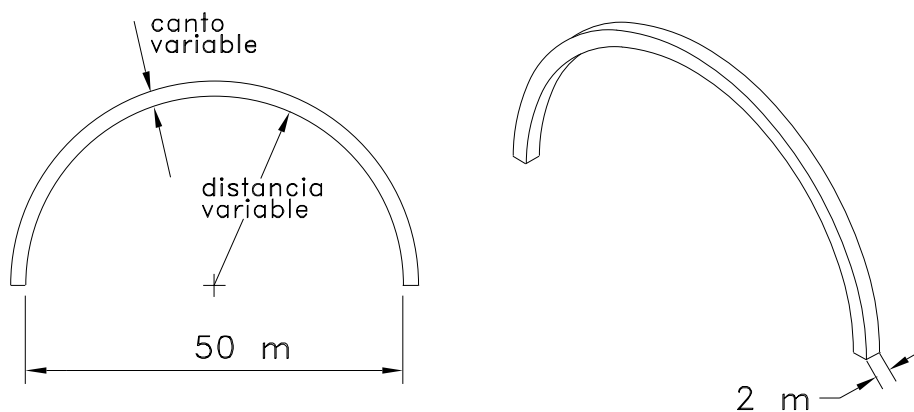


Figura 10 Arco de hormigón

Modelo de diseño

El contorno del arco se define mediante ocho rectas, que representan las bases del arco, y cuatro curvas B_Spline.

Las ocho rectas se definen mediante los cuatro puntos fijos (PF1 a PF4) correspondientes a los cuatro puntos interiores del arco en contacto con el suelo.

Las dos curvas B_Spline que definen la superficie superior del arco se definen mediante diez puntos de control (PC1 a PC10). Las dos curvas B_Spline que definen la superficie inferior del arco se definen mediante los cuatro puntos fijos (PF1 a PF4) y seis puntos de control (PC11 a PC16). Las diferentes superficies del arco se obtienen a partir de las rectas y curvas anteriores.

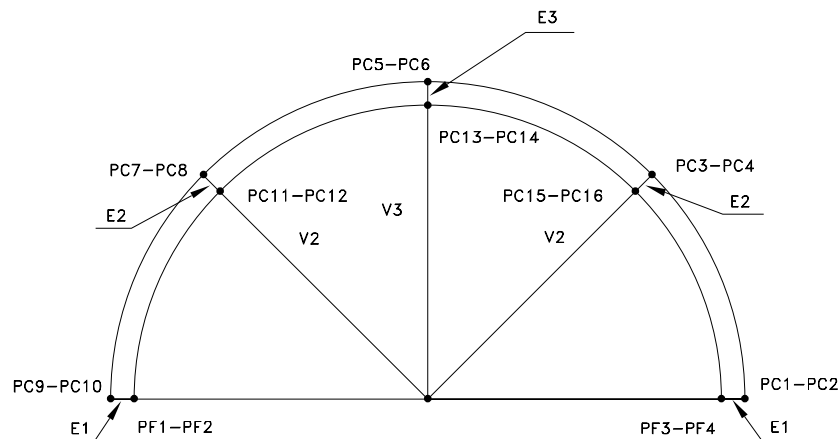


Figura 11 Arco. Puntos directores y variables de diseño

Modelo de análisis

Cargas

Las debidas al peso propio.

Malla de elementos finitos

Una vez definido el modelo de diseño, se establece una malla libre de elementos finitos prismáticos de 8 nudos (SOLID45-8N 3D de ANSYS). El mallado del diseño inicial consta de 70 elementos y 284 nudos. El número de elementos y nudos es constante para todas las iteraciones, y no se ha utilizado el mallado adaptativo.

Modelo de optimización

Variables de diseño

Las variables de diseño son las distancias desde el centro de la línea de base del arco a los puntos de control de las dos curvas B_Spline que definen la superficie inferior del arco, y las distancias entre los puntos de control de estas curvas B_Spline y las que definen la superficie superior (figura 11). Debido a que el arco tiene dos planos de simetría, las dieciséis variables de diseño iniciales se reducen a cinco variables independientes, dos asociadas a la forma del arco (V2, V3) y tres asociadas al canto (E1, E2, E3).

El valor inicial de las variables de diseño es el correspondiente a una forma semicircular de 25 m de radio y 2 m de espesor.

Función objetivo

La función objetivo considerada es el volumen del arco.

Restricciones

Las restricciones de resistencia que se imponen son que las tensiones principales en el arco sean menores que las resistencias de cálculo del hormigón, tanto a tracción como a compresión.

Los valores adoptados para el hormigón son los de la tabla 9.

Tabla 9 Arco. Valores del hormigón

Resistencia de cálculo a compresión	1333 T/m ²
Resistencia de cálculo a tracción	75 T/m ²
Coefficiente de Poisson	0,2
Módulo de deformación longitudinal	2687000 T/m ²
Peso específico	2,3 T/m ³

Resultados

En la tabla 10 se recogen los valores inicial, mínimo, máximo y final de las variables de diseño y de la función objetivo.

Tabla 10 Arco. Valores de las variables de diseño y de la función objetivo

variables de geometría	inicial	mínimo	máximo	final
V2 (m)	25,0	17,0	30,0	18,531
V3 (m)	25,0	17,0	30,0	17,215
E1 (m)	2,0	0,25	5,0	1,989
E2 (m)	2,0	0,25	4,0	0,344
E3 (m)	2,0	0,25	4,0	0,541
función objetivo (m³)	325,054	—	—	86,113

En la figura 12 se muestra el diseño final obtenido y la deformada ampliada doscientas veces.

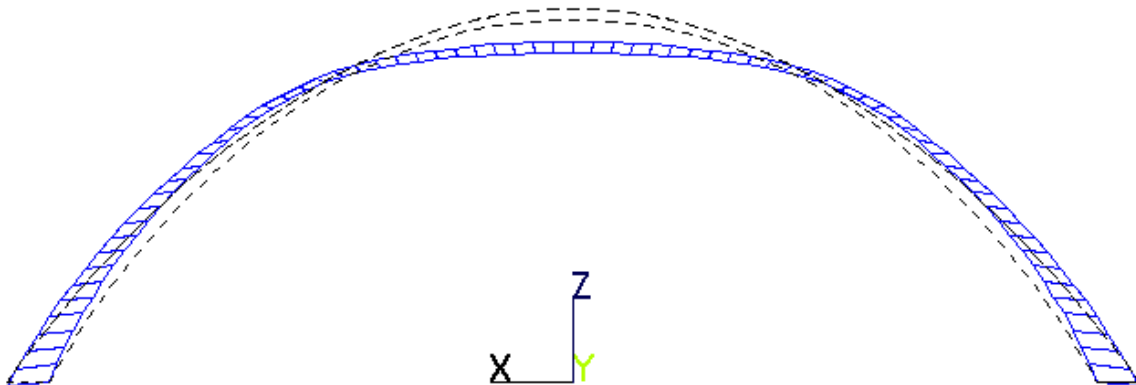


Figura 12 Arco. Forma óptima y deformada ampliada (x 200)

ESTADO ACTUAL Y TENDENCIAS

La investigación, desarrollo y aplicación de las técnicas de optimización numérica, siguen teniendo un fuerte incremento desde el trabajo inicial de Schmit en 1960 (Schmit, 1960).

Si la década de los 60 tuvo importancia por iniciarse lo que se puede considerar como la Optimización Estructural Moderna y la década de los 70 se caracterizó por la búsqueda de la eficiencia, una de las características principales de la década actual es la gran cantidad de medios que las grandes empresas, tales como General Motors y General Electric, están dedicando a la investigación y desarrollo de la optimización. Fundamentalmente, estos medios han ido encaminados a pasar de la teoría de la optimización a su aplicación a situaciones reales de diseño.

El empleo de las técnicas de optimización en situaciones reales de diseño exige disponer de sistemas de optimización flexibles, robustos y fiables, lo cual supone un trabajo de investigación, desarrollo e implementación muy importante; debido a esto, así como al costo de los computadores y a los tiempos de proceso, hasta mediados de la década de los 80 estos sistemas eran desarrollados y utilizados, casi con exclusividad, por las empresas aeroespaciales. En los últimos años, las investigaciones realizadas, la experiencia acumulada, la mejora de prestaciones y la reducción del precio de los computadores, ha hecho posible el acceso a estos sistemas de empresas y oficinas de diseño ajenas al sector aeroespacial. Ahora bien, en contra de las optimistas previsiones de los primeros años, en las que se suponía que las técnicas de optimización eliminarían totalmente la necesidad de disponer de buenos diseñadores, el estado actual del tema indica que los diseñadores experimentados son los que más ventajas pueden obtener de estas nuevas técnicas. Si se utilizan correctamente, las técnicas de optimización permiten realizar diseños con decenas o centenas de variables, y miles de restricciones, de forma muy eficiente.

A pesar de la gran cantidad de investigaciones y de programas realizados, el diseño de estructuras basado en técnicas de optimización no ha tenido la misma aceptación que los programas de análisis. Tradicionalmente se han propuesto distintas razones para explicar esta falta de aceptación. Algunas de estas razones son:

1. la falta de flexibilidad de los programas;
2. la dificultad de empleo de estos programas.
3. la falta de algoritmos de optimización lo suficientemente robustos para aplicarlos en problemas generales de diseño;
4. la lenta convergencia de los algoritmos de optimización;
5. la falta de familiarización con las técnicas de optimización;

Respecto de la optimización con variables de propiedades y de geometría (con un número reducido de variables), las cuatro primeras razones ya no son válidas hoy en día. Respecto a los puntos 1 y 2, la optimización de estas estructuras puede realizarse con programas de tipo "caja negra", fáciles de realizar, de mantener y de utilizar. Respecto a los puntos 3 y 4, los avances experimentados en la Programación Matemática, y la mayor experiencia en su empleo, hacen posible que la optimización de elementos sea una tarea de dificultad parecida a cualquier análisis. Respecto a la razón 5, sí que sigue siendo válida, y habría que eliminarla con la realización de cursos de perfeccionamiento y la inclusión de las técnicas de optimización en las carreras técnicas.

Respecto a la optimización de grandes estructuras (con un gran número de variables de propiedades y de geometría), el costo de la Programación Matemática empieza a ser alto, y resulta más adecuado el empleo de Criterios de Optimalidad, o de métodos híbridos, que combinen ambas técnicas.

El diseño de forma, tanto de las estructuras discretas como de las estructuras continuas, es el caso que presenta mayores dificultades, y donde se están realizando las investigaciones más importantes. Los principales esfuerzos se centran en los puntos siguientes:

- Mayor acoplamiento entre las tecnologías CAD y la optimización, con el objeto de disponer de modelos CAD de estructuras más adaptados al proceso de optimización;
- Mejora de los algoritmos de optimización, con el objeto de hacerlos más generales, robustos y eficientes, con el fin de conseguir la convergencia en un número razonable de iteraciones (de 10 a 20);
- Estudio de técnicas de estrategias de descomposición, y de optimización multinivel, con el objeto de reducir el tamaño del problema de diseño.
- Desarrollo de mejores interfaces gráficas, para facilitar el trabajo de generar los modelos de diseño y análisis y de interpretar los datos y resultados de la optimización.

En el caso particular de las estructuras ligeras de grandes luces, sus especiales características exigen nuevas investigaciones para poder incluir, en el modelo de optimización, el comportamiento no lineal y las restricciones de estabilidad global (con imperfecciones) de la estructura.

REFERENCIAS

1. Arora, J.S., *Introduction to Optimum Design*. Mac Graw-Hill, New York, 1989.
2. Atrek, E., Gallagher, R.H., Ragsdell, K.M. and Zienkiewicz, O.C. (Ed.), *New Directions in Optimum Structural Design*, Wiley-Interscience Publication, 1984.
3. Bazaraa, M.S. and Shetty, C.M. *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, New York, 1979.
4. Bou, E.J. *Diseño, implementación y prueba de un preprocesador y de un postprocesador para el diseño óptimo de estructuras tridimensionales metálicas*. E.T.S.I.I., Universidad de Murcia, 1994.
5. Braibant, V. and C. Fleury, Shape Optimal Design Using B-splines, *Compt. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 44, pp. 247-267, 1984.
6. Cervantes, F.J. *Diseño óptimo de forma de elementos estructurales mediante el programa de elementos finitos ANSYS*. E.T.S.I.I., Universidad de Murcia, 1994.
7. Company, P. y Martí, P. Aplicación de las técnicas CAD para el análisis y diseño interactivo de estructuras en el sistema DISSENY, *Anales de Ingeniería Mecánica*. Año 6, nº III, pp. 275-280, 1988.
8. Company, P. y Martí, P. Representación gráfica del proceso de diseño óptimo de estructuras en el sistema DISSENY. En *Memorias I Congreso Métodos Numéricos en Ingeniería*, Winter, G. y Galante, M (Eds.), S.E.M.N.I., Barcelona, pp. 779-786, 1990.
9. Fletcher, R., *Practical Methods of Optimization*, Vol. I and II, John Wiley & Sons, 1980.
10. Gallagher, R.H. and Zienkiewicz, O.C. *Optimum Structural Design: Theory and Applications*, Wiley Interscience Publication, 1983.
11. Gellatly, R.A. and Berke, L. Optimality-Criterion-Based Algorithms, in *Optimum Structural Design: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1973.
12. Gill, P.; Murray, W. y Wright, M. *Practical Optimization*, Academic Press, Orlando (Florida), 1981.
13. Haftka, R.T. and Kamat, M.P. *Elements of Structural Optimization*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1985.
14. Haftka, R.T., Grandhi, R.V. Structural Shape Optimization- A Survey, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57, pp. 91-106, 1986.
15. Kirsch, U., *Optimum Structural Design: Concepts, Methods and Applications*, McGraw-Hill, 1981.
16. López, D., Cañavate, F. y Martí, P. Diseño óptimo de forma de elementos estructurales planos. *Anales de Ingeniería Mecánica*. Año 10, vol. 1, pp. 401-408, 1994.
17. López-Alanis, C., Sánchez, G. y Martí, P. Diseño óptimo de torres de transmisión de energía eléctrica teniendo en cuenta el comportamiento no lineal (grandes desplazamientos). *Anales de Ingeniería Mecánica*. Año 10, vol. 1, pp. 409-416, 1994.
18. Martí, P., Company, P. y Sanchis, M. DISSENY. Un sistema interactivo para el diseño de estructuras basado en técnicas de optimización, *Anales de Ingeniería Mecánica*, 3, 1, pp. 285-290, 1985.
19. Martí, P., Company P. y Sanchis M., "Acoplamiento elementos finitos - técnicas de optimización en el sistema DISSENY", *II Simposium sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería*, Barcelona, 1986.

20. Martí, P. y Company, P. *Análisis interactivo de estructuras por elementos finitos*. Secretariado de Publicaciones, Universidad de Murcia, 1993.
21. Mitchell, A.G.M. The Limits of Economy of Material in Framed Structures. *Phil. Mag.* (Series 6), 8, pp 589-597, 1904.
22. M.O.P.T. *NBE-MV.103-1972 Cálculo de las estructuras de acero laminado en edificación*.
23. M.O.P.U. *NTE-EAE Estructuras de Acero. Espaciales*.
24. Morris, A.J., *Foundations of Structural Optimization: A Unified Approach*, John Wiley & Sons, 1982.
25. Reig, R. *Aplicación de las técnicas de optimización para la determinación de los parámetros de diseño óptimo de las mallas espaciales*. Proyecto Fin de Carrera, E.T.S.I.I., Universidad Politécnica de Valencia, 1992.
26. Schmit, L.A. Structural Design by Systematic Synthesis. *Proceedings of the Second Conference on Electronic Computation*. ASCE, Pittsburgh, pp. 105-122, 1960.
27. Templeman, A.B., Discrete Optimum Structural Design, *Computers & Structures*, Vol. 30, No. 3, pp. 511-518, 1988.
28. Vanderplaats, G.N. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications*, McGraw-Hill, New York, 1984.