ALGUNOS RESULTADOS EN ENTROPIA SECUENCIAL

FRANCISCO BALIBREA(1), JOSÉ SALVADOR CÁNOVAS PEÑA(2) Y VÍCTOR JIMÉNEZ LÓPEZ(1)

(1) Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, Campus de Espinardo, Aptdo. de Correos 4021, 30100 Murcia, España;
e-mails: `balibrea@gaia.fcu.um.es`, `vjimenez@gaia.fcu.um.es`

(2) Departamento de Matemática Aplicada, Escuela Politécnica de Cartagena, Paseo Alfonso XIII, 34-36, 30203 Cartagena, España;
e-mail: `canovas@zeus.plc.um.es`

Resumen

En este artículo investigamos la relación que existe entre la entropía secuencial de una función respecto a una sucesión A y la entropía secuencial de dicha función respecto a las subsucesiones de A. Examinamos también una cuestión relacionada con la entropía topológica secuencial cero, y damos respuesta a una pregunta formulada por D. Newton en 1970.

Introducción

Sean $(X, \beta(X), \mu)$ un espacio de Lebesgue y $f : X \to X$ una función medible que conserva la medida μ, esto es, tal que para todo conjunto $M \in \beta(X)$ se verifica que $\mu(f^{-1}M) = \mu(M)$. Dadas una sucesión de enteros positivos $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y una partición finita $\mathcal{A}$ de X en conjuntos medibles, se define la *entropía métrica secuencial de f (respecto a la sucesión A) en la partición $\mathcal{A}$* como

$$h_{\mu,A}(f, \mathcal{A}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n} f^{-a_i}\mathcal{A}\right),$$

donde $\bigvee_{i=1}^{n} f^{-a_i}\mathcal{A}$ es la partición formada por las intersecciones de conjuntos de las particiones $f^{-a_i}\mathcal{A}$ con $i = 1, ..., n$, y

$$H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n} f^{-a_i}\mathcal{A}\right) = -\sum_{A\in\bigvee_{i=1}^{n} f^{-a_i}\mathcal{A}} \mu(A)\log\mu(A).$$

Se define la *entropía métrica secuencial de f (respecto a la sucesión A)* como

$$h_{\mu,A}(f) = \sup_{\mathcal{A}} h_{\mu,A}(f, \mathcal{A}).$$

Cuando $A = \{i\}_{i=1}^{\infty}$ tenemos la entropía métrica usual, que denotaremos por $h_\mu(f)$. La entropía métrica secuencial fue introducida en 1967 por A.G. Kusnhirenko [4] para distinguir entre aplicaciones de entropía métrica cero.

Consideremos ahora un espacio topológico compacto y una función continua $f : X \to X$. En este contexto, T. N. T. Goodman define en 1974 el concepto de entropía topológica secuencial [2]. Dada una sucesión de enteros positivos A y un cubrimiento finito $\mathcal{A}$ de X por conjuntos abiertos, se define *la entropía topológica secuencial de f en el cubrimiento $\mathcal{A}$* como

$$h_A(f, \mathcal{A}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathcal{N}\left(\bigvee_{i=1}^{n} f^{-a_i}\mathcal{A}\right),$$

donde $\mathcal{N}\left(\bigvee_{i=1}^{n} f^{-a_i}\mathcal{A}\right)$ denota la mínima cardinalidad de los subcubrimientos de X que pueden extraerse de $\bigvee_{i=1}^{n} f^{-a_i}\mathcal{A}$. La *entropía topológica secuencial de f* se define como

$$h_A(f) = \sup_{\mathcal{A}} h_A(f, \mathcal{A}).$$

La entropía topológica secuencial es una buena herramienta para distinguir entre funciones continuas del intervalo caóticas y no caóticas en el sentido de Li y Yorke (ver [1]). Cuando $A = \{i\}_{i=1}^{\infty}$ tenemos la entropía topológica usual, que denotaremos por $h(f)$.

El objetivo de este artículo es, dada una sucesión A, estudiar el comportamiento de la entropía métrica (topológica) secuencial respecto a subsucesiones de A. Además, obtendremos resultados sobre sucesiones que proporcionan entropía secuencial nula.

Entropía y subsucesiones

Sea A una sucesión de enteros positivos. La principal motivación para el estudio de $h_A(f)$ y $h_{\mu,A}(f)$ respecto a sucesiones la proporcionan las fórmulas $h(f^m) = mh(f)$ y $h_\mu(f^m) = mh_\mu(f)$, donde m es un número natural arbitrario (ver [8]). Dichas fórmulas no son satisfechas en general por la entropía secuencial. Existen ejemplos en [5] que lo ponen de manifiesto. Ahora bien, dichas fórmulas, en el caso de la entropía usual, pueden ser escritas de la siguiente manera: $h_B(f) = mh(f)$ y $h_{\mu,B}(f) = mh_\mu(f)$, donde $B = \{mi\}_{i=1}^{\infty}$, es decir, como fórmulas que involucran la entropía de una sucesión, la $\{i\}_{i=1}^{\infty}$, con una subsucesión de la misma. Nos planteamos entonces el siguiente problema: dada una sucesión A y una subsucesión de la misma B, ¿qué relación existe entre las entropías topológicas $h_A(f)$ y $h_B(f)$, y entre las entropías métricas $h_{\mu,A}(f)$ y $h_{\mu,B}(f)$?

PROPOSICIÓN 1. *Sean $(X, \beta(X), \mu)$ un espacio de Lebesgue y $f : X \to X$ una función medible conservando la medida μ. Sean $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de enteros positivos y $B = \{a_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ una subsucesión de A. Pongamos $b = \limsup_{j\to\infty} \frac{i_j}{j}$. Entonces si $h_{\mu,A}(f) > 0$ o $b < \infty$ se verifica que $h_{\mu,B}(f) \leq b h_{\mu,A}(f)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una partición medible finita de X. Entonces

$$\begin{aligned} h_B(f, \mathcal{A}) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{j=1}^{n} f^{-a_{i_j}}\mathcal{A}\right) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{i_n}{n}\frac{1}{i_n} \log H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{i_n} f^{-a_i}\mathcal{A}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{i_n}{n} \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log H_\mu \left(\bigvee_{i=1}^{m} f^{-a_i} \mathcal{A} \right) \\
&= b h_{\mu,A}(f, \mathcal{A}).
\end{aligned}
$$

Tomando supremos se obtiene $h_B(f) \leq b h_A(f)$. $\square$

La siguiente proposición es la análoga para entropía topológica secuencial. La prueba es idéntica.

PROPOSICIÓN 2. *Sean X un espacio topológico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Sean $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de enteros positivos y $B = \{a_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ una subsucesión de A. Pongamos $b = \limsup_{n\to\infty} \frac{i_j}{j}$. Entonces si $h_{\mu,A}(f) > 0$ o $b < \infty$ se verifica que $h_B(f) \leq b h_A(f)$.*

Nótese que las Proposiciones 1 y 2 evitan la posibilidad $b = \infty$ y $h_{\mu,A}(f) = 0$ [resp. $h_A(f) = 0$]. De hecho el caso $b = \infty$ y $h_A(f) = 0$ es indeterminado en el siguiente sentido: existen ejemplos de funciones de entropía cero con entropía secuencial positiva respecto a la sucesión $\{2^i\}_{i=1}^{\infty}$ (ver [2] o [5]).

Para agilizar la escritura supondremos hasta el final de la sección que f, dependiendo del contexto, es una función que conserva una cierta medida μ o una función continua. A continuación obtenemos una cota de la entropía secuencial respecto a la sucesión A a partir de subsucesiones de la misma.

PROPOSICIÓN 3. *Sean $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $B = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $C = \{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ tres sucesiones estrictamente crecientes de enteros positivos tales que $A = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$. Sean $\tilde{b}_n = Card(B \cap \{a_1, a_2, \ldots, a_n\})$, $\tilde{c}_n = Card(C \cap \{a_1, a_2, \ldots, a_n\})$, y*

$$
b = \limsup_{n\to\infty} \frac{\tilde{b}_n}{n}, \quad c = \limsup_{n\to\infty} \frac{\tilde{c}_n}{n}.
$$

Entonces $h_A(f) \leq b h_B(f) + c h_C(f)$ [resp. $h_{\mu,A}(f) \leq b h_{\mu,B}(f) + c h_{\mu,C}(f)$].

Demostración. Haremos la prueba para el caso en que f es una función continua (el otro es similar).

Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento finito por abiertos de X. Entonces

$$
\begin{aligned}
h_A(f, \mathcal{A}) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathcal{N} \left(\bigvee_{i=1}^{n} f^{-a_i} \mathcal{A} \right) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\tilde{b}_n}{n\tilde{b}_n} \log \mathcal{N} \left(\bigvee_{i=1}^{\tilde{b}_n} f^{-b_i} \mathcal{A} \right) + \limsup_{n\to\infty} \frac{\tilde{c}_n}{n\tilde{c}_n} \log \mathcal{N} \left(\bigvee_{i=1}^{\tilde{c}_n} f^{-c_i} \mathcal{A} \right) \\
&\leq b h_B(f, \mathcal{A}) + c h_C(f, \mathcal{A}).
\end{aligned}
$$

De aquí $h_A(f) \leq b h_B(f) + c h_C(f)$. $\square$

Nota. Si $A = \bigcup_{m=1}^{k} B_m$, donde las subsucesiones B_m son disjuntas dos a dos, existirán números $b_m \in [0, 1]$ tales que $h_A(f) \leq \sum_{i=1}^{k} b_i h_{B_i}(f)$ [resp. $h_{\mu,A}(f) \leq \sum_{i=1}^{k} b_i h_{\mu,B_i}(f)$]. Para demostrarlo es suficiente proceder por inducción y seguir los pasos de la Proposición 3.

PROPOSICIÓN 4. *En las condiciones de la Proposición 3, si* $c = 0$ *entonces* $h_A(f) = h_B(f)$ *[resp.* $h_{\mu,A}(f) = h_{\mu,B}(f)$*].*

Demostración. Supondremos por ejemplo que estamos en el caso en que f es una función continua.

Como $c = \limsup_{n\to\infty} \frac{\tilde{c}_n}{n} = 0$, también $\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{c}_n}{n} = 0$. Como $\tilde{b}_n + \tilde{c}_n = n$ para cada n, $b = \limsup_{n\to\infty} \frac{\tilde{b}_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{b}_n}{n} = 1$. Por la Proposición 3, $h_A(f) \leq h_B(f)$.

Para ver la desigualdad inversa, sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento finito por abiertos de X. Si $B = \{a_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ y $\tilde{b} = \limsup_{j\to\infty} \frac{i_j}{j}$, la Proposición 1 implica $h_B(f, \mathcal{A}) \leq \tilde{b} h_A(f, \mathcal{A})$ en el caso de que $\tilde{b}$ sea finito. Bastará entonces demostrar que $\tilde{b} = 1$. Ahora bien, $\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{c}_n}{n} = 0$, e $i_n = \tilde{b}_{i_n} + \tilde{c}_{i_n} = n + \tilde{c}_{i_n}$. De aquí

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{i_n}{i_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + \tilde{c}_{i_n}}{i_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{i_n} = \frac{1}{\tilde{b}}$$

como queríamos demostrar. $\square$

Un resultado sobre entropía cero

A. Saleski probó en [7] que si f es una función invertible conservando una cierta medida μ, esta medida es *ergódica* para f [es decir, $f^{-1}M = M$ implica $\mu(M) = 0$ o 1], y $h_{\mu,A}(f) = 0$ con A una sucesión creciente, entonces que $h_\mu(f) = 0$. Probamos a continuación un resultado análogo para la entropía topológica.

PROPOSICIÓN 5. *Sea* $f : X \to X$ *una función continua. Si* A *es una sucesión creciente con* $h_A(f) = 0$ *entonces* $h(f) = 0$.

Demostración. Consideramos primero el caso en el que f es invertible. Sea $\beta(X)$ la σ-álgebra de Borel de X y denotemos por $\mathcal{M}(X, f)$ el conjunto de todas las medidas conservadas por f. De la desigualdad $h_A(f) \geq \sup\{h_{\mu,A}(f) : \mu \in \mathcal{M}(X, f)\}$ (ver [2]), se deduce que $h_{\mu,A}(f) = 0$ para toda medida μ conservada por f. En particular $h_{\mu,A}(f) = 0$ para toda medida ergódica μ, con lo que $h_\mu(f) = 0$ por [7]. Como $h(f) = \sup\{h_\mu(f) : \mu \text{ es ergodica}\}$ (ver [8]), se tiene que $h(f) = 0$.

En el caso general definamos

$$\Sigma_f = \{(x_0, x_1, ...) : f(x_n) = x_{n-1},\ n = 1, 2, , , \} \subset X^{\mathbf{N}}.$$

Dicho conjunto es compacto y podemos definir un homeomorfismo $\tilde{f} : \Sigma_f \to \Sigma_f$ dado por $\tilde{f}(x_0, x_1, ...) = (f(x_0), x_0, x_1, ...)$. Puede demostrarse que $h(f) = h(\tilde{f})$ (ver [3]). Por otro lado, [2] implica que que $h_A(\tilde{f}) \leq h_A(f) = 0$. Como la entropía siempre es positiva o nula tenemos que $h_A(\tilde{f}) = 0$. Como $\tilde{f}$ es invertible, aplicamos el resultado del primer párrafo para obtener $h(\tilde{f}) = 0$. Entonces $h(\tilde{f}) = h(f) = 0$. $\square$

Sobre una cuestión de D. Newton

D. Newton planteó en [6] la siguiente cuestión. Sea f una función invertible conservando una medida ergódica μ. Si $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de enteros positivos y $d(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_i}{i} < \infty$ entonces se verifica que $h_{\mu,A}(f) \leq d(A) h_\mu(f)$. D. Newton preguntó acerca de si era siempre posible reemplazar "$\leq$" por "$=$". A continuación damos un ejemplo que muestra que no.

Consideremos una función invertible tal que $h_\mu(f) > 0$, y tal que la medida μ sea ergódica para f. [Por ejemplo, basta considerar la aplicación shift $\sigma : (\Sigma^2, \beta(\Sigma^2), \mu) \to (\Sigma^2, \beta(\Sigma^2), \mu)$ donde $\Sigma^2 = \left\{ \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty} : x_n \in \{0,1\} \right\}$, $\beta(\Sigma^2)$ denota la σ-álgebra producto, μ es la medida producto, y dada una sucesión $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \Sigma^2$ se define $\sigma\left(\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\right) = \{x_{n+1}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Puede verse en [8] que σ conserva la medida μ, la cual es ergódica y $h_\mu(\sigma) = \log 2$.

Sea $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos tal que $n_1 = 1$ y con la propiedad de que si definimos $b_n = \operatorname{Card}\{n_j \in \{1, 2, ..., n\} : 1 \leq j \leq n\}$ entonces $\lim_{j\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ (por ejemplo puede tomarse la sucesión $n_j = 2^{j-1}$). Construyamos la siguiente sucesión: $a_{n_j} = 2n_j$, y $a_{n_j+k} = 2n_j + k$ si $k < n_{j+1} - n_j$. Es fácil ver que para esta sucesión $d(A) = 2$.

Por otra parte consideremos $S_A(n,l) = \operatorname{Card} \bigcup_{i=1}^{n} \{-l + a_i, ..., l + a_i\}$. Puede verse en [6] que $h_{\mu,A}(\sigma) = K(A) h_\mu(\sigma)$ si $h_\mu(\sigma) > 0$, con $K(A) = \lim_{l\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{S_A(n,l)}{n}$.

Entonces para nuestra sucesión A se verifica que $S_A(n,l) \leq n + 2lb_n$, y así $K(A) \leq \lim_{l\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{n+2lb_n}{n} = 1$. Entonces $h_{\mu,A}(\sigma) = h_\mu(\sigma) < d(A) h_\mu(\sigma)$, y la respuesta a la pregunta de D. Newton es negativa.

Agradecimientos

Este trabajo está financiado en parte por los proyectos PB95–1004 de la D.G.I.C.Y.T. y COM–20/96 MAT de la Dirección General de Universidades de la Comunidad Autónoma de Murcia.

Bibliografía

[1] N. Franzová and J. Smítal, "Positive sequence topological entropy characterizes chaotic maps", *Proc. Amer. Math. Soc.,* **112**, (1991), 1083–1086.

[2] T. N. T. Goodman, "Topological sequence entropy", *Proc. London Math. Soc.,* **29**, (1974), 331–350.

[3] L. W. Goodwyn, "The product theorem for topological entropy", *Trans. Amer. Math. Soc.,* **158**, (1971), 445–452.

[4] A. G. Kushnirenko, "On metric invariants of entropy type", *Russian Math. Surveys,* **22**, (1967), 53–61.

[5] M. Lemanczycz, "The sequence entropy for Morse shifts and some counterexamples", *Studia Math.,* **82**, (1985), 221–241.

[6] D. Newton, "On sequence entropy I", *Math. Systems Theory,* **4**, (1970), 119–125.

[7] A. Saleski, "Sequence entropy and mixing", *J. Math. Anal. Appl.,* **60**, (1977), 58–66.

[8] P. Walters, *An introduction to ergodic theory,* Springer Verlag, Berlín, 1982.