



industriales
etsii

Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Industrial

Desarrollo de una librería de análisis y simulación de sistemas de control híbridos

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA INDUSTRIAL Y
AUTOMÁTICA



Universidad
Politécnica
de Cartagena

Autor: Lamdaghri, Mohamed
Director: Molina Villaplana, Javier
Codirector: Mulero Martínez, Juan Ignacio

Cartagena,

ÍNDICE

0. Objetivos.....	2
1. CAPITULO 1: Introducción.....	3
2. CAPITULO 2: Sistemas Dinámicos Híbridos.....	7
2.1 Marco de modelado.....	7
2.2 Análisis de la estabilidad en los sistemas dinámicos híbridos.....	12
3. CAPITULO 3: Métodos de simulación.....	13
3.1 Introducción a <i>HyEqSolver</i> y reglas de uso.....	13
3.2 Ejemplo de uso.....	15
4. CAPITULO 4: Resultados.....	21
4.1 Caja de cambios automática.....	21
4.1.1 Modelado.....	23
4.1.2 Simulación.....	25
4.2 Tanques interconectados.....	34
4.2.1 Modelado.....	36
4.2.2 Simulación.....	38
4.3 Control de SDH: Péndulo Invertido.....	47
4.3.1 Modelado.....	49
4.3.2 Simulación.....	53
5. Conclusiones.....	58
6. Bibliografía.....	59

0. Objetivos

Los sistemas híbridos son sistemas dinámicos compuestos de elementos discretos y continuos al mismo tiempo. También se definen como sistemas dinámicos discretos en términos de variables tanto físicas como lógicas. Estos sistemas incluyen a sistemas de control con operaciones lógicas del tipo ON-OFF y fenómenos físicos sujetos a saltos discontinuos.

En este proyecto se pretende comprender y explicar el concepto de sistemas dinámicos híbridos compuestos de variables continuas y discretas, así como el estudio de la estabilidad de este tipo de sistemas y su control.

Se pretende derivar varios modelos de control de sistemas híbridos siendo capaz de diseñar controladores capaces de guiar el comportamiento complejo de estos sistemas en situaciones reales.

Y, por último, ser capaz de hacer uso de paquetes de software optimizados especializados en la simulación de sistemas híbridos tales como el control del péndulo invertido, o la caja de cambios automática de un automóvil.

1. CAPITULO 1: Introducción.

Los sistemas dinámicos híbridos aparecen en una gran variedad de aplicaciones, tales como los sistemas de fabricación, gestión del tráfico aéreo, control de motores en la industria de la automoción, procesos de la industria química, por nombrar algunos. Los sistemas dinámicos híbridos también aparecen en la organización jerárquica de sistemas complejos, y la integración de algoritmos discretos de planificación y algoritmos de control continuo en sistemas autónomos, sistemas inteligentes. Los sistemas híbridos tienen un rol importante en sistemas de control integrados que interactúan con el mundo físico, y como tal desempeñan un papel clave en la comprensión de la evolución de sistemas que funcionan como núcleo de información y comunicación e interactúan estrechamente con el mundo físico y operaciones humanas; estos sistemas se conocen como sistemas ciber físicos (CPS). Los estudios en sistemas híbridos pueden proveer un marco de trabajo unificado para el modelado de CPS, y modelos sistemáticos para análisis, diseño y verificación de dichos sistemas.

A parte de su enorme importancia práctica, los sistemas dinámicos híbridos representan un área fascinante y retadora de estudio que engloba variedad de campos de investigación. Realmente, la introducción de cambios discretos y los saltos en los sistemas dinámicos híbridos aumenta el número de dinámicas que pueden ser modeladas por este tipo de sistemas en comparación con herramientas de modelado tradicionales, como las ecuaciones diferenciales ordinarias o los autómatas. Por lo tanto, los sistemas dinámicos híbridos son de interés por sí mismos, y se han usado con éxito para modelar una gran variedad de sistemas complejos, como redes reguladoras de genes [De Jong, 2002], redes de comunicación [Hespanha, 2004] y sistemas robóticos [Egerstedt, 2000]. Sin embargo, el precio asociado al aumento de la potencia de modelado es la dificultad de analizar las propiedades de la evolución o solución de un sistema dinámico híbrido, como la existencia de una solución única, y la dependencia continua con respecto a las condiciones iniciales y parámetros. Estas dificultades han motivado importantes e intensas actividades de investigación dirigidas al análisis formal y a la síntesis de sistemas dinámicos híbridos. Por otro lado, la introducción de la lógica de conmutación en los controladores ayuda a alcanzar rendimientos que sobrepasan cualquier controlador clásico lineal o no lineal; por ejemplo, existen algunos sistemas no lineales que no pueden ser estabilizados por ninguna ley de control continuo de lazo cerrado, pero puede alcanzarse la estabilidad asintóticamente mediante un controlador híbrido. Además, para cumplir con los exigentes requisitos de diseño de alto rendimiento que reflejan múltiples objetivos tales como velocidad de respuesta, robustez (atenuación de las perturbaciones), una arquitectura de control multimodal (híbrida) puede ser la elección adecuada. Cuando los requerimientos son presentados basados en respuestas temporales y respuestas ante estados discretos o cuando en la planta a ser controlada interactúan estrechamente dinámicas continuas con eventos discretos son necesarios emplear métodos de control híbridos.

Los sistemas dinámicos híbridos contienen dinámicas heterogéneas que interactúan entre ellas y determinan su comportamiento a lo largo del tiempo. Con dinámicas heterogéneas nos referimos a sistemas que contienen dos tipos de dinámicas: variables dinámicas continuas que evolucionan con el tiempo, normalmente descritas por ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencia; y variables discretas que cambian de valor dependiendo del estado del sistema, su evolución depende normalmente de reglas *if-then-else*, es común que estén definidas por autómatas de Petri. Estos dos tipos de dinámicas interactúan una con la otra y generan comportamientos dinámicos complejos, como cambiar de estado discreto una vez que se sobrepasa un cierto límite, o un salto en la dinámica continua una vez que se da un evento discreto.

Como ejemplo, considerando un sistema control de temperatura para una habitación típico en invierno. Asumiendo que la referencia de temperatura deseada son 22 grados centígrados. El radiador se encenderá cuando la temperatura se encuentre por debajo de los 22 grados deseados y se apagará en el caso contrario. El sistema de control de temperatura es realmente un sistema dinámico híbrido típico ya que el radiador, junto a las características de transmisión de calor de la habitación, forman la evolución de la dinámica continua donde el termostato encendido-apagado puede modelarse como un sistema de eventos discretos con dos estados “encendido” y “apagado”. La transición entre estos dos estados discretos depende de la temperatura de la habitación, mientras que la evolución de la temperatura depende del estado del radiador. Como conclusión, el sistema de control de temperatura contiene interacción entre los eventos discretos y la dinámica continua y puede ser modelado y estudiado como un sistema dinámico híbrido.

La historia de la investigación de sistemas dinámicos híbridos se remonta al menos a la década de 1960 al estudio de sistemas de ingeniería que contenían relés e histéresis. Sin embargo, los sistemas híbridos no empezaron a captar realmente el interés de los investigadores a principios de la década de 1990, mayormente por la propagación de microcontroladores y sistemas empotrados. Las últimas dos décadas han sido testigo de considerables actividades de investigación en modelado, análisis y sinterización de los sistemas dinámicos híbridos. La investigación sobre sistemas híbridos es una disciplina fascinante que hace de puente entre ingenieros, matemáticos y ciencia de computadores.

Los informáticos tienden a considerar los sistemas dinámicos híbridos principalmente como programas discretos que interactúan con el entorno físico. Ellos extienden sus modelos computacionales, como las máquinas de estado finito, los autómatas y las redes de Petri, transformando así sus modelos discretos en sistemas híbridos incorporando la dinámica de las variables continuas del mundo físico en sus modelos. Normalmente, este tipo de enfoque es capaz de tratar con dinámicas discretas complejas y hacer hincapié en los resultados del análisis (verificación) y los métodos de simulación. Tales aproximaciones suelen preguntarse si ciertas propiedades, como las que se formulan en formulas lógicas temporales, son ciertas o no para un determinado sistema dinámico híbrido. Esto es llamado verificación de sistemas híbridos, y uno de los métodos de verificación más importante es la comprobación del modelo simbólico, que se basa en el cálculo de conjuntos accesibles, subconjuntos de estados que son alcanzables con una determinada acción de control, para un sistema híbrido. En consecuencia, una gran parte de la investigación se ha centrado en el desarrollo de técnicas sofisticadas extraídas del control óptimo, teoría de juegos y geometría computacional para calcular o aproximar los conjuntos accesibles para varias clases de sistemas dinámicos híbridos. Por otro lado, los investigadores de las áreas de sistemas dinámicos y teoría de control enfocan los sistemas dinámicos híbridos como una colección de ecuaciones diferenciales con discontinuidades o que pueden adquirir distintos valores para un mismo instante de tiempo. Marcos de modelado representativos en esta categoría son los sistemas lineales y sistemas conmutados por partes. Amplían los modelos y metodologías para los sistemas de variables continuas tradicionales, como las ecuaciones diferenciales o en diferencia ordinarias, incluyendo variables discretas para describir los fenómenos de salto o cambio. Normalmente, estos enfoques son capaces de hacer frente a la dinámica variable continua compleja y se centran en el estudio de la estabilidad, control, robustez y síntesis.

Los métodos para estudiar los sistemas dinámicos híbridos están distribuidos a lo largo de un ancho espectro, desde métodos conocidos en el dominio discreto a un lado, hasta los enfoques tradicionales para los sistemas físicos continuos al otro. Arraigados en extremos opuestos, tanto las ciencias computacionales como la teoría de control han hecho importantes

contribuciones al estudio de los sistemas dinámicos híbridos mediante la extensión de los métodos tradicionales de dominio puramente discreto o continuo para tratar con sistemas híbridos. Sin embargo, en general, se ha trabajado poco en la integración de los métodos de estos dos dominios. Esto es debido posiblemente a que los métodos formales en la ciencia de la computación tradicionalmente se encuentran definidos en el ámbito de la matemática discreta, mientras que los enfoques de la teoría de control se encuentran principalmente en el dominio de la matemática continua. Una de las tendencias notables recientemente en la literatura de los sistemas híbridos hace hincapié en la síntesis de controladores híbridos para sistemas dinámicos continuos o híbridos para satisfacer especificaciones temporales. Esto se conoce como control simbólico o control de supervisión híbrido, que puede verse como una convergencia entre estas dos escuelas de pensamiento.

A lo largo de la historia de los sistemas dinámicos híbridos se han empleado diferentes marcos matemáticos para modelar los sistemas dinámicos híbridos que ponen en manifiesto la diversidad de las corrientes de investigación.

[Tavernini en 1987] introdujo los autómatas diferenciales, [Nerode et al. en 1993] tomaron un enfoque de autómatas para los sistemas dinámicos que se componen de ecuaciones diferenciales en interacción y autómatas finitos. En [Antsaklis et al, 1993] se adopta un enfoque de sistemas dinámicos de eventos discretos. En [Brockett, 1993] se combinan las ecuaciones diferenciales ordinarias y los fenómenos discretos para describir sistemas de movimiento. En [Back et al., 1993] se proporciona un marco de referencia adecuado para la simulación numérica. En [Alur et al., 1993] se usan autómatas híbridos, una extensión de los autómatas temporizados.

Los autómatas dependientes del tiempo y los autómatas híbridos han sido usados por varios investigadores para el modelado y verificación de los sistemas híbridos. En [Alur y Dill, 1994] se propusieron autómatas temporizados para modelar el comportamiento de los sistemas de tiempo real. Los autómatas dependientes del tiempo se estudian desde la perspectiva de la teoría del lenguaje formal. La teoría se aplica a la verificación automática de los requisitos de tiempo real de las máquinas de estado finito. En [Alur et al, 1995] se introdujo el marco de referencia de autómatas híbridos como un modelo y el lenguaje de especificación para sistemas híbridos.

En [Puri y Baraya, 1994] se presentan dos métodos para la verificación de sistemas híbridos. El marco de modelado usado es el de los autómatas híbridos. La verificación está basada en abstraer la dinámica continua del sistema híbrido mediante dinámicas continuas más simples. En [Desphande y Baraya, 1996] se usan autómatas finitos no determinísticos para modelar el comportamiento discreto e inclusiones diferenciales para modelar el comportamiento continuo de los sistemas híbridos y se diseña un controlador híbrido que produce trayectorias viables.

En [Branicky 1998] se presentan algunas herramientas de análisis para los sistemas conmutados e híbridos. En particular, se usan funciones múltiples de Lyapunov para el análisis de estabilidad de los sistemas discretos y se usan sistemas de funciones iterativas para la estabilidad de Lagrange. En [Henzinger et al., 1998] se presenta una metodología para analizar mediante algoritmos sistemas híbridos no lineales traduciéndolos primero a autómatas híbridos lineales, y entonces usando herramientas de verificación de modelos automatizados.

El autómata finito es un modelo de base para representar las dinámicas discretas de los sistemas y su interacción con el medio. Como este modelo estaba muy limitado se hizo una ampliación de este, introduciendo el tiempo en los estados discretos, como una forma de interacción continua. Sin embargo, debido a la creciente demanda de modelos más exactos y

generales para los diferentes sistemas que tenían en su estructura fenómenos tanto discretos como continuos, se realizó una extensión del autómata finito, agregando aparte del tiempo en los estados discretos, ecuaciones continuas, lo que dio lugar al autómata híbrido [Favela et al., 1998]. Así, el modelo del autómata híbrido está basado en una representación explícita tanto de las dinámicas continuas del sistema como de las discretas. Las dinámicas continuas se representan por modelos de estados mediante ecuaciones diferenciales que las describen. Las dinámicas discretas se representan mediante el modelo del autómata finito, donde se observa explícitamente la lógica de conmutación de este [Favela et al., 1999].

En [Balluchi et al., 2003] se introduce las nociones genéricas para determinar los estados estables asintóticos en los sistemas híbridos y se dan las condiciones suficientes para alcanzar un estado final. Dichas condiciones se pueden verificar aún si alguno de los subsistemas continuos del sistema híbrido no es observable y se relacionan con el tiempo de permanencia mínimo y máximo en cada estado. En [Morari, 2005] se ilustra la evolución de los sistemas híbridos en el campo del control, primero con algunos ejemplos históricos y luego en el área emergente de sistemas híbridos. Resaltan los desarrollos teóricos y se menciona el software extenso que ayuda a traer la teoría a ejemplos prácticos. Se presenta una perspectiva para los sistemas híbridos en el área de control.

Se han propuesto numerosas herramientas para la simulación, verificación e implementación de los sistemas híbridos. En [Henzinger y Ho, 1995] se propone HYTECH como una herramienta automática para analizar sistemas híbridos. En [Taylor y Kebede, 1996] se desarrollaron herramientas en MATLAB para el modelado y simulación de sistemas híbridos. En [Daws et al., 1996] se desarrolla KRONOS como plataforma de verificación para sistemas complejos en tiempo real. En [Inihov et al., 1997] se desarrolla el programa Model Vision Studium como una herramienta para la investigación numérica de sistemas híbridos utilizando la tecnología de programación orientada a objetos. SHIFT, propuesto por Desphande, es un lenguaje de programación para describir redes dinámicas de autómatas híbridos, [Desphande et al., 1998]. Los modelos de SHIFT ofrecen el nivel apropiado de abstracción para describir aplicaciones complejas como los sistemas automatizados para autopistas cuya operación no puede ser capturada fácilmente por los sistemas convencionales. En [Furlas et al., 2004] propone un marco de referencia para el modelado de sistemas de potencia usando sistemas híbridos. El sistema se construye y simula en el ambiente Simulink y Stateflow de MatLab.

En el análisis del comportamiento dinámico de sistemas influenciados por la ocurrencia de eventos discretos, hay dos importantes líneas de investigación: la que se basa en el modelo del autómata y la que se basa en las redes de Petri. El interés de este trabajo se basa en la modelación y análisis de sistemas híbridos mediante el modelo del autómata híbrido continuo lineal invariante en el tiempo, propuesto por [Favela et al, 1999].

2. CAPITULO 2: Sistemas Dinámicos Híbridos

2.1. Marco de modelado

Varios modelos y conceptos de solución para modelar sistemas dinámicos híbridos se han propuesto durante las últimas décadas. Entre otros, cabe destacar los trabajos de Tavernini, Michael and Hu, J. Lygeros y Van der Schaft y Schumacher entre otros.

Durante el desarrollo de este proyecto usaremos el marco de trabajo esbozado por [R. Goebel et. Al., 2004] y establecido en [R. Goebel, A.R. Teel, 2006].

Un sistema dinámico híbrido está definido por su espacio de estados, que lo escogemos para que sea un conjunto abierto en el espacio euclídeo, funciones que especifican la evolución continua y discontinua, y conjuntos contenidos en el espacio de estado donde tanto la evolución continua y la evolución discontinua o a saltos son posibles. Normalmente se usa $O \subset \mathbb{R}^2$ para denotar el espacio de estados. $C \subset O$ para denotar el conjunto de flujo, que es el conjunto donde la evolución continua tiene lugar. $D \subset O$ define el conjunto de salto, que es el conjunto donde la evolución discontinua, saltos, se puede dar.

$f: C \rightarrow \mathbb{R}^2$ denota el mapa que determina la evolución continua, al cual nos vamos a referir como mapa de flujo, de acuerdo con la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Y $g: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ denota el mapa que determina la evolución discontinua, al cual nos vamos a referir como mapa de saltos, de acuerdo con la ecuación en diferencia $x^+ = g(x)$.

Un sistema dinámico híbrido se puede resumir bajo este marco de modelado con los siguientes datos $H := (O, f, C, g, D)$ y/o con las siguientes ecuaciones

$$H: x \in O \quad f(x) = \begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in C. \\ x^+ = g(x), & x \in D. \end{cases} \quad (2.1)$$

Los comportamientos típicamente continuos y discontinuos de los sistemas dinámicos híbridos producen movimientos (o soluciones) que fluyen cuando el comportamiento es continuo y saltan cuando la evolución es discontinua. En el caso de los sistemas continuos clásicos, parametrizamos la evolución de las dinámicas continuas con la variable de tiempo ordinario $t \in \mathbb{R} \geq 0$, mientras que en caso de los sistemas discretos clásicos se parametrizan los saltos con la variable de tiempo discreto $j \in \mathbb{N}$.

Con esta parametrización, una solución para un sistema híbrido H es dada por la función, que vamos a llamar arco híbrido, definida en dominio temporal extendido, que llamaremos dominio de tiempo híbrido.

Siendo E un subconjunto $E \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{N}$ es dominio de tiempo híbrido si para cada $(T, J) \in E$,

$$E \cap ([0, T] \times \{0, 1, \dots, J\}) = \bigcup_{j=0}^{J-1} ([t_j, t_{j+1}], j) \quad (2.2)$$

para una secuencia finita de tiempos $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_j$. Es decir, para cada elemento (T, J) de E , su truncamiento hasta (T, J) puede ser escrito como la unión de intervalos en t indexados por la variable j . Entonces, una función $x: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un arco híbrido si E es un dominio de tiempo híbrido y si para cada $j \in \mathbb{N}$, la función $t \rightarrow x(t, j)$ es absolutamente continua de manera local.

En un dominio de tiempo híbrido hay un ordenamiento natural de los puntos, decimos que $(t, j) \preceq (t', j')$ para $(t, j), (t', j') \in E$, si $t \leq t'$ y $j \leq j'$.

Un arco híbrido x puede clasificarse según su dominio de tiempo híbrido. Decimos que es no trivial si el dominio de x contiene al menos dos puntos; decimos que es completo si el dominio de x es no limitado; Zeno si es completo y su dominio está limitado en la componente t .

Un arco híbrido es solución para un sistema dinámico híbrido solo cuando las dinámicas definidas para los datos (O, C, D, g, f) se satisfacen durante flujos y saltos. De manera más precisa, un arco híbrido x es una solución para el sistema dinámico híbrido H si $x(0, 0) \in \bar{C} \cup D$, $x(t, j) \in O$ para todo $x(t, j) \in \text{dom } x, y$

- (S1) para todo $j \in \mathbb{N}$ de tal modo que I^j tiene interior no vacío, donde

$$I^j \times \{j\} = \text{dom } x \cap ([0, \text{inf}) \times \{j\}),$$

$$x(t, j) \in C \text{ para todo } t \in \text{int } I^j,$$

$$\dot{x}(t, j) = f(x(t, j)) \text{ para casi todo } t \in I^j;$$

- (S2) para todo $(t, j) \in \text{dom } x$ de tal modo que $(t, j + 1) \in \text{dom } x$,

$$x(t, j) \in D, \quad x(t, j + 1) = g(x(t, j))$$

Hay que tener en cuenta que las soluciones para un sistema dinámico híbrido H pueden ser no únicas para puntos de conjunto O que puedan estar contenidos en el conjunto C y D de manera simultáneamente. Para los que cualquiera de los comportamientos es posible, es decir, tanto S1 como S2.

Un ejemplo muy ilustrativo para poder entender el marco de modelado puede ser el control de llenado de un tanque. Considerando el esquema básico de control para un tanque de agua que se muestra en la siguiente figura, donde el objetivo es mantener el nivel $h(t)$ entre el valor máximo de altura (H_{max}) y el nivel mínimo (H_{min}) medido por dos sensores todo o nada colocados a las diferentes alturas.

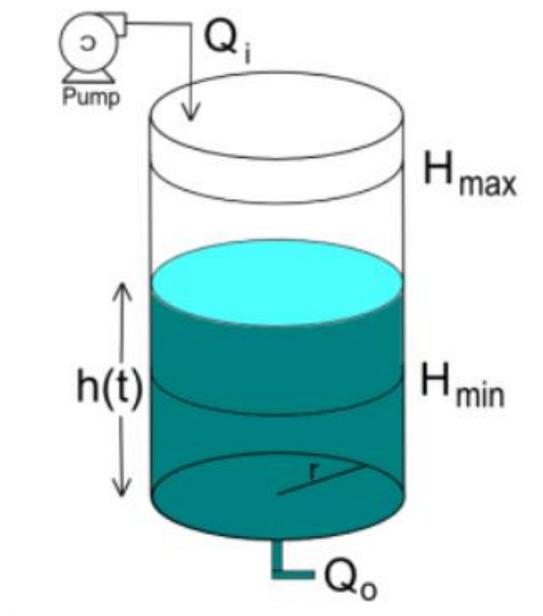


Fig 2.1. Tanque de nivel.

El tanque se llena mediante una bomba que tiene dos estados, todo o nada, que permite un flujo de entrada Q_i . En el fondo del tanque se encuentra un flujo de salida Q_o que varía en función de la presión hidrostática y la presión en el exterior.

El estado de la bomba cambiara dependiendo de la altura del líquido en el tanque, cuando se alcance el límite superior la bomba se apagará y cuando el líquido alcance el nivel mínimo la bomba se activará. En la siguiente figura podemos observar la Red de Petri correspondiente al sistema que estamos estudiando.

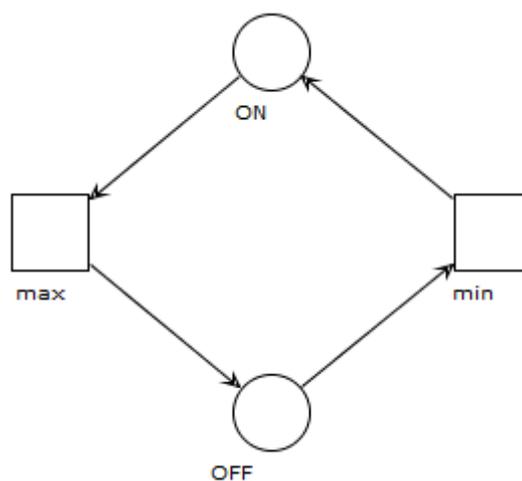


Fig. 2.2. Autómata que describe la conmutación de la bomba.

Este sistema se puede representar como un sistema dinámico híbrido de la siguiente manera:

La matriz de estados del sistema:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Donde x_1 es la altura del líquido en metros y x_2 es el estado de la bomba (0 = apagada, 1 = encendida).

La evolución continua del sistema:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot (x_2 \cdot Q_i - k_v \cdot \sqrt{g \cdot x_1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Donde g es la constante gravitacional y k_v el coeficiente de flujo.

Conjunto donde la evolución continua es posible:

$$C := \{x: x_1 < H_{max}\} \cup \{x: x_1 \leq H_{min}, x_2 = 1\} \cup \{x: x_1 \geq H_{max}, x_2 = 0\} \quad (2.3)$$

La evolución discreta del sistema:

$$g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 - x_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Conjunto donde la evolución discreta tiene lugar:

$$D := \{x: x_1 \geq H_{max}, x_2 = 1\} \cup \{x: x_1 \leq H_{min}, x_2 = 0\} \quad (2.5)$$

Simulamos el sistema con las siguientes condiciones iniciales y valores para los parámetros necesarios:

<i>Parametro</i>	<i>Valor</i>
$H_{max}(m)$	1.2
$H_{min}(m)$	0.8
$Q_i(m^3 \cdot s^{-1})$	0.4
k_v	0.05
h_0	0
$A(m^2)$	0.8

Tabla. 2.1

En la gráfica de la figura 2.3 podemos observar la evolución de la altura del líquido frente al tiempo y frente a los saltos discretos. Como podemos apreciar el primer salto discreto ocurre cuando el líquido llega al límite superior y sucesivamente van ocurriendo cuando el nivel se encuentra en el mínimo o en el máximo.

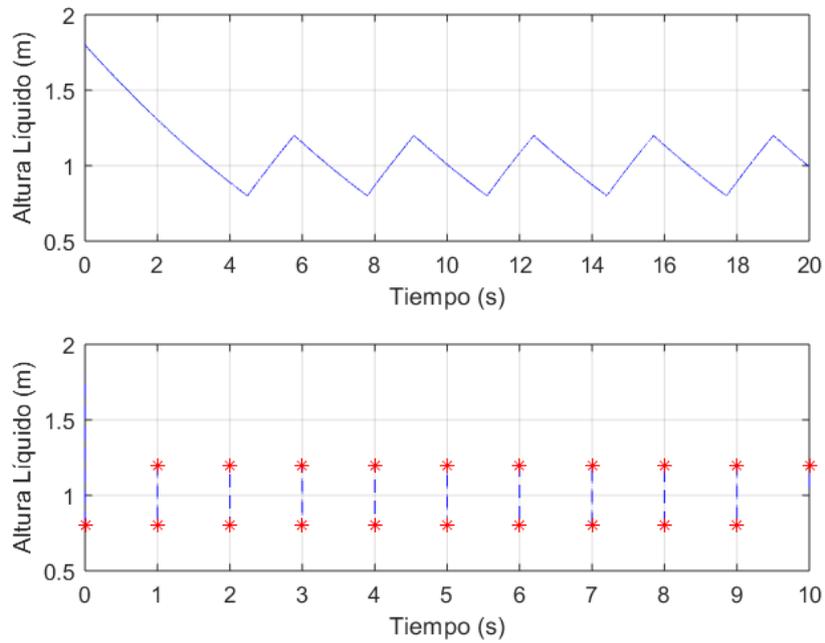


Fig. 2.3. Evolución nivel de líquido dentro del tanque.

En la gráfica de la figura 2.4 se observa el estado de la bomba tanto en función del tiempo como de los saltos discretos, la bomba alterna entre todo-nada dependiendo del nivel del líquido.

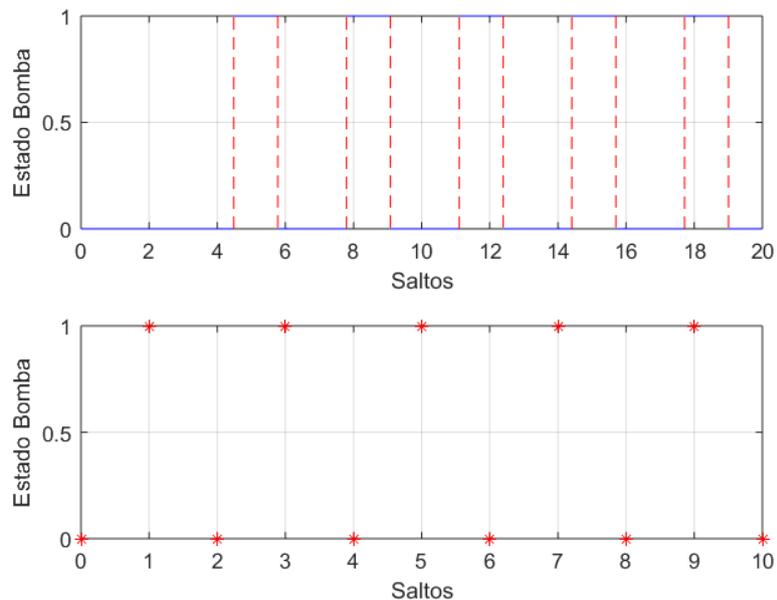


Fig. 2.4. Evolución estado de la bomba.

2.2 Análisis de la estabilidad en los sistemas dinámicos híbridos.

Ya que los sistemas dinámicos híbridos normalmente contienen variables lógicas, contadores, etc.... que no necesariamente convergen a un punto, es natural en los sistemas dinámicos híbridos considerar la estabilidad asintótica en conjuntos compactos ante puntos simples de equilibrio. La noción de estabilidad asintótica uniforme global es relevante aquí. Los resultados que se muestran en [Chaohong Cai et al.] implican lo siguiente:

Considerando que $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ sea compacto. El conjunto \mathcal{A} se dice que es

- estable uniformemente de manera global para H si existe $\gamma \in k_\infty$ de tal modo que para cada solución x del sistema dinámico híbrido H se satisface $|x(t,j)|_{\mathcal{A}} \leq \gamma(|x(0,0)|_{\mathcal{A}})$ para todo $(t,j) \in \text{dom } x$;
- uniformemente pre-atractivo de manera global para H si para cada $\varepsilon > 0$ y $\tau > 0$ existe $T > 0$ de tal modo, para cualquier solución x para H con $|x(0,0)|_{\mathcal{A}} \leq \tau$, $(t,j) \in \text{dom } x$ y $t + j \geq T$ implica $|x(t,j)|_{\mathcal{A}} \leq \varepsilon$
- uniformemente pre-asintoticamente estable de manera global para H si es tanto uniformemente pre-atractivo de manera global y estable uniformemente de manera global.

Resulta que la estabilidad pre-asintótica global uniforme es equivalente a la existencia de $\alpha_1, \alpha_2 \in k_\infty$ de tal modo que cualquier solución x para H satisface

$$|x(t,j)|_{\mathcal{A}} \leq \alpha_1 \cdot \left(\frac{\alpha_2 \cdot (|x(0,0)|_{\mathcal{A}})}{\exp(t+j)} \right) \quad \forall (t,j) \in \text{dom } x,$$

donde $|x|_{\mathcal{A}}$ denota la distancia de x al conjunto \mathcal{A} .

Una condición suficiente para la estabilidad pre-asintótica global uniforme es dada en las siguientes condiciones de Lyapunov. De hecho, el conjunto \mathcal{A} es uniformemente estable pre-asintoticamente de manera global si $G(D) \subset \bar{C} \cup \bar{D}$ y ahí existe una ecuación continua diferenciable $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in k_\infty$ y una función continua definida positiva $\rho: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, de tal modo que

$$\alpha_1 \cdot (|x|_{\mathcal{A}}) \leq V(x) \leq \alpha_2 \cdot (|x|_{\mathcal{A}}) \quad \forall x \in C \cup D$$

$$\sup_{f \in F(x)} \langle \nabla V(x), f \rangle \leq -\rho \cdot (|x|_{\mathcal{A}}) \quad \forall x \in C$$

$$\sup_{g \in G(x)} V(g) - V(x) \leq -\rho \cdot (|x|_{\mathcal{A}}) \quad \forall x \in D$$

3. CAPITULO 3: Métodos de simulación.

En este capítulo se expone la metodología y las herramientas que van a ser usadas para la simulación de sistemas dinámicos híbridos.

3.1. Introducción a HyEqSolver y reglas de uso.

Durante el desarrollo de la simulación ha sido usada la *toolbox* de ecuaciones híbridas (HyEQ) implementada en MATLAB/Simulink para la simulación de sistemas dinámicos híbridos por Ricardo G. Sanfelice, David A. Copp y Pablo Nanez.

Esta *toolbox* es capaz de simular sistemas dinámicos híbridos individuales e interconectados en los que varios sistemas híbridos están conectados e interactúan, como una pelota que rebota contra una plataforma en movimiento, luciérnagas que sincronizan su parpadeo, etc. La implementación de Simulink incluye cuatro bloques básicos que definen la dinámica de un sistema dinámico híbrido. Se trata de un mapa de flujos, un conjunto de flujos, un mapa de saltos y un conjunto de saltos. Los flujos y los saltos del sistema se calculan mediante el sistema integrador que se compone de bloque que computan la dinámica continua del sistema dinámico híbrido, disparan los saltos, actualizan el estado del sistema y el tiempo de simulación en los saltos, y detiene la simulación.

Un sistema dinámico híbrido es un sistema dinámico con dinámicas continuas y discretas. Diversos modelos matemáticos han aparecido a lo largo de la literatura. Durante el desarrollo de este proyecto se ha hecho uso del marco de modelado descrito en el punto 2, donde un sistema dinámico híbrido H en un espacio de estado R^n con un espacio de entrada R^m es definido por los siguientes objetos:

- Un conjunto $C \subset R^n \times R^m$ llamado conjunto de flujo.
- Una función $f: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ llamada mapa de flujo.
- Un conjunto $D \subset R^n \times R^m$ llamado conjunto de salto.
- Una función $g: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ llamada mapa de salto.

Consideramos la simulación en MATLAB/Simulink de un sistema dinámico híbrido $H = (C, f, D, g)$ escrito como:

$$H: x, u \in R^m, y \in R^n \begin{cases} x = f(x, u) & (x, u) \in C \\ x^+ = g(x, u) & (x, u) \in D \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.1).$$

El mapa de flujo f define la dinámica continua que tiene lugar dentro del conjunto C , mientras que el mapa de saltos g define la dinámica discreta que tiene lugar contenida en el conjunto D . Estos objetos son referidos como los datos del sistema híbrido H , que a veces es denotado explícitamente como $H = (C, f, D, g)$. Ilustramos en este marco sencillo, pero rico en comportamiento, sistema dinámico híbrido.

Un modo de simular sistemas dinámicos híbridos es usando llamadas a funciones ODE mediante eventos en MATLAB. Una implementación de estas características resulta en simulaciones rápidas de sistemas dinámicos híbridos.

En la herramienta *HyEqSolver*, cuatro funciones básicas son necesarias para definir la información del sistema dinámico híbrido H como en se muestra en la ecuación 3.1:

- El mapa de flujo está definido en la función de MATLAB *f.m*. Los argumentos de entrada para esta función es un vector cuyos elementos definen el estado del sistema x . La función retorna el valor del mapa de flujo f .
- El conjunto de flujo está definido en la función de MATLAB *C.m*. Los argumentos de entrada para esta función es un vector cuyos elementos definen el estado del sistema x . La función retorna 1 si el estado del sistema pertenece al conjunto C y 0 en caso contrario.
- El mapa de salto está definido en la función de MATLAB *g.m*. Los argumentos de entrada para esta función es un vector cuyos elementos definen el estado del sistema x . La función retorna el valor del mapa de salto f .
- El conjunto de salto está definido en la función de MATLAB *D.m*. Los argumentos de entrada para esta función es un vector cuyos elementos definen el estado del sistema x . La función retorna 1 si el estado del sistema pertenece al conjunto D y 0 en caso contrario.

El *HyEq Simulator* usa una función principal *run.m* para inicializar, ejecutar y mostrar los resultados de la simulación, las funciones *f.m*, *C.m*, *g.m* y *D.m* para implementar los datos de del sistema dinámico híbrido, y *HyEqSolver.m* que resolverá las ecuaciones diferenciales integrando la dinámica continua $\dot{x} = f(x)$, y saltando con la ley de actualización $x^+ = g(x)$. El ODE usado para resolver las ecuaciones llamado en *HyEqSolver.m* utiliza inicialmente el tamaño de paso inicial o el mas reciente, y después de cada integración, los algoritmos en *HyEqSolver.m* comprueban si la solución se encuentra dentro del conjunto C o D , o ninguno. Dependiendo del conjunto en el que se encuentre la solución, la simulación se reinicia en consecuencia siguiendo las dinámicas descritas en f o g , o se detiene la simulación. El resultado de esta simulación es rápido ya que no almacena variables en el espacio de trabajo y solo utiliza llamadas a las funciones ODE incorporadas.

Los horizontes de tiempo y saltos se definen para la simulación utilizando $TSPAN = [TSTARTTFINAL]$ como intervalo de tiempo de la simulación y $JSPAN = [JSTARTJSTOP]$ como el intervalo para el numero de saltos discretos permitidos. La simulación se detendrá una vez alcanzado el horizonte de tiempo o de saltos.

La función *HyEqSolver* resuelve el sistema dinámico híbrido usando tres funciones diferentes. En primer lugar, los flujos se calculan utilizando la función de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias ODE45 incorporada en MATLAB. Si la solución se encuentra fuera del conjunto de flujos C , el evento discreto se detecta usando la función *zeroevents*. Cuando se detecta un salto de estado el siguiente valor del estado es calculado por el mapa de saltos g .

Antes de comenzar una simulación es importante determinar el esquema del integrador necesario, los ajustes de detección de paso por cero, la precisión y otras tolerancias. El uso de los ajustes por defecto no siempre proporciona las simulaciones más eficientes ni las simulaciones más precisas. En el *HyEq Simulator* estos parámetros se modifican en el archivo *run.m* tal y como se muestra en la figura 3.1.

```
options = odeset(RelTol,1e-6,MaxStep ,.1);.
```

Fig. 3.1. Parámetro de configuración

El *HyEQ Simulator* se inicializa y ejecuta llamando a la función descrita en el archivo *run.m*. Dentro del fichero *run.m* se definen las condiciones iniciales del sistema, el horizonte de tiempo y saltos, regla que rige los saltos, y las tolerancias para la simulación. Una vez que todos los parámetros están definidos se invoca la función *HyEQsolver* y la simulación se ejecuta.

La función *run.m* también se suele utilizar para graficar los resultados obtenidos mediante la simulación del sistema dinámico híbrido. La *toolbox HyEQ* ofrece una serie de funciones para mostrar características especiales de los sistemas dinámicos híbridos. Por ejemplo, la función *plotHybridArc(t,j,x,jstar,resolution)* crea a partir de los parámetros que recibe como argumentos una gráfica de tres dimensiones donde se puede visualizar la evolución del sistema frente a los saltos y la evolución del tiempo.

3.2 Ejemplo de uso

Volviendo al ejemplo del control de llenado de un tanque individual expuesto en el punto 2 vamos a estudiar cómo podríamos adaptarlo bajo las reglas de la *toolbox HyEQ*.

Empezaremos con el mapa de flujos, como ya se ha demostrado en el punto 2 las ecuaciones que describen el mapa de flujos son las siguientes:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot (x_2 \cdot Q_i - k_v \cdot \sqrt{g \cdot x_1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2).$$

La ecuación 3.2 expresa la evolución dinámica del sistema frente al tiempo, como hemos visto anteriormente esta ecuación que describe el campo de flujos se debe implementar en el archivo o función *f.m*. En la figura 4.2 podemos observar cómo se ha de implementar.

```

1  function xdot = f(x)
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  % Matlab M-file      Project: HyEQ Toolbox @ Hybrid Dynamics and Control
4  %
5  % Name: f.m
6  %
7  % Description: Flow map
8  %
9  % Version 1.0
10 %
11 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
12 % flow map: xdot=f(x,u,parameters);
13 % Constants:
14 global Qi;
15 global kv;
16 global A;
17
18 % State
19 xil = x(1); % Tank level h
20 xi2 = x(2); % Pump state
21
22 % flow map
23 %xdot=f(x,u);
24 xildot = 1/A*(xi2*Qi-kv*sqrt(9.81*xil));
25 xi2dot = 0;
26
27 xdot = [xildot;xi2dot];

```

Fig .3.2. Ejemplo de fichero para la función $f(x)$.

Como observamos en la figura 3.2 la función f recibe como parámetro un vector de estados x y retorna el estado del sistema, dentro de la función f se describen las ecuaciones diferenciales a integrar que describen el flujo del sistema.

Junto al mapa de flujo es necesario el conjunto de flujo, que acota la región donde el sistema es capaz de fluir. Tal y como se vio en el punto 2 el conjunto de saltos se describe de la siguiente manera:

$$C := \{x: x_1 < Hmax\} \cup \{x: x_1 \leq Hmin, x_2 = 1\} \cup \{x: x_1 \geq Hmax, x_2 = 0\} \quad (3.3).$$

Para describir el conjunto de flujo dentro del marco de *HyEQ Simulator* se hace uso del fichero o función *C.m*. En la figura 4.3 podemos observar cómo se ha de implementar.

```

1  function v = C(x)
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  % Matlab M-file      Project: HyEQ Toolbox @ Hybrid Dynamics and Control
4  %
5  % Name: C.m
6  %
7  % Description: Flow set
8  %
9  % Version: 1.0
10 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
11 % Constants
12 global hmin;
13 global hmax;
14
15 % State
16 xi1 = x(1);
17 xi2 = x(2);
18
19 % flow condition
20
21 if ((xi1 <= hmin ) && (xi2 == 1)) || ((xi1 >= hmax ) && (xi2 == 0))
22     v = 1; % report flow
23 elseif (xi1 < hmax )
24     v = 1; % report flow
25 else
26     v = 0; % do not report flow
27 end

```

Fig. 3.3. Ejemplo de fichero para la función $C(x)$.

Como podemos observar en la figura 3.3 la función declarada C recibe como entrada el argumento x que es un vector que describe el estado del sistema. Mediante lógica *if-else* la función retorna un 1 si el estado del sistema se encuentra dentro del conjunto de flujo, o un 0 si se encuentra fuera.

Para describir la lógica de conmutación de nuestro sistema dinámico híbrido bajo las reglas de *HyEQ Simulator* se hace uso de las funciones g y D . Para describir el mapa de saltos se hace uso del fichero o función g , como ya sabemos el mapa de saltos del sistema se describe mediante la siguiente ecuación:

$$g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 - x_2 \end{bmatrix} \quad (3.4).$$

En la 3.4 figura se muestra la implementación de la función g para nuestro caso particular:

```

1  function xplus = g(x)
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  % Matlab M-file      Project: HyEQ Toolbox @ Hybrid Dynamics and Control
4  %
5  % Name: g.m
6  %
7  % Description: Jump map
8  %
9  % Version: 1.0
10 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
11 % jump map: xplus = g(x,u,parameters);
12 % state
13 -  x1l = x(1);
14 -  x12 = x(2);
15
16 -  x1lplus=x1l;
17 -  x12plus=1-x12;
18
19 -  xplus = [x1lplus;x12plus];

```

Fig. 3.4. Ejemplo de fichero para la función $g(x)$.

En la figura 3.4 observamos que la función g recibe como parámetro el vector de estados x y retorna el estado posterior al salto del sistema.

Por último, para acabar de describir el sistema necesitamos definir el conjunto de saltos D que define el espacio de estados donde el sistema debe saltar. Para nuestro caso se describe el conjunto de la siguiente manera:

$$D := \{x: x_1 \geq Hmax, x_2 = 1\} \cup \{x: x_1 \leq Hmin, x_2 = 0\} \quad (3.5).$$

En la figura 3.5 se muestra la implementación de la función D para nuestro caso particular:

```

1  function v = D(x)
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  % Matlab M-file      Project: HyEQ Toolbox @ Hybrid Dynamics and Control
4  %
5  % Name: D.m
6  %
7  % Description: Jump set
8  %
9  % Version: 1.0
10 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
11 %
12 % Check on flow conditions
13 % Constants
14 global hmin;
15 global hmax;
16 % state
17 xi1 = x(1);
18 xi2 = x(2);
19
20 % Jump conditions
21 if ((xi1 >= hmax) && ( xi2 == 1))
22     v = 1; % report jump
23 elseif ((xi1 <= hmin) && ( xi2 == 0)) % jump condition
24     v = 1; % report jump
25 else
26     v = 0; % do not report jump
27 end

```

Fig. 3.5. Ejemplo de fichero para la función $D(x)$.

Como podemos observar en la figura 3.5 la función declarada D recibe como entrada el argumento x que es un vector que describe el estado del sistema. Mediante lógica *if-else* la función retorna un 1 si el estado del sistema se encuentra dentro del conjunto de salto, o un 0 si se encuentra fuera.

Una vez que tenemos el sistema discreto mediante las funciones f, C, g y D necesitamos definir las condiciones iniciales, la configuración del simulador y la regla para los saltos. Tras tener todos los parámetros definidos dentro del fichero *run.m* y las funciones que describen el sistema definidas dentro del mismo fichero *run.m* podemos invocar el simulador *HyEQsolver* para que compute la simulación.

En la figura 3.6 se muestra un ejemplo de fichero *run.m* para la simulación de control del nivel de un tanque y su post-procesado. En este ejemplo se ha hecho uso de una de las funciones provistas por la *toolbox* que permite graficar los resultados.

```

1  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2  % Matlab M-file      Project: HyEQ Toolbox @ Hybrid Dynamics and Control
3  %
4  % Filename: run.m
5  %
6  % Version 1.0
7  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
8  function run_tank
9  %constants
10 - hmin=0.8;
11 - hmax=1.2;
12 - Qi=0.4;
13 - kv=0.05;
14 - A=0.5^2*pi;
15 - global hmin hmax Qi kv A;
16 % initial conditions
17 - x0 = [1.8;0];
18
19 % simulation horizon
20 - TSPAN=[0 20];
21 - JSPAN = [0 20];
22
23 % rule for jumps
24 - rule = 1;
25
26 - options = odeset('RelTol',1e-6,'MaxStep',1e-3);
27
28 % simulate
29 - [t j x] = HyEQsolver( @f,@g,@C,@D,...
30     x0,TSPAN,JSPAN,rule,options);
31
32 % plot hybrid arc
33 - figure(1)
34 - plotHybridArc(t,j,x(:,1))
35 - xlabel('j')
36 - ylabel('t')
37 - zlabel('x1')

```

Fig. 4.6. Ejemplo de fichero run.m

Se puede observar en la figura 3.6 en la línea 17 la declaración de las condiciones iniciales, en la línea 20 y 21 la definición del horizonte de simulación, en la línea 24 la regla de saltos, en la línea 26 la configuración de la simulación y en la línea 29 la llamada a HyEQsolver. A partir de la línea 32 vemos como graficar el resultado de la simulación.

4. CAPITULO 4: Resultados.

A lo largo de este capítulo se estudiarán diferentes sistemas dinámicos y su naturaleza híbrida así como se realizara la simulación de dichos sistemas.

4.1 Caja de cambios automática

El primer sistema dinámico híbrido que se va a estudiar consiste en una caja automática de cambios para un automóvil. La caja de cambios dispone de 4 relaciones de marchas diferentes, debido a que cada marcha describe un comportamiento dinámico diferente, ya que la relación de transmisión difiere, es necesaria una acción de control diferente para cada marcha. Cada marcha de la caja de cambios se considerará como un estado discreto único con sus particularidades y características.

Una caja de cambios automática para automóviles es un sistema conmutado con una evolución discontinua del estado continuo. Los saltos de estado ocurren de manera síncrona con la conmutación controlada, en este caso el cambio de marcha.

Las cajas de cambios automáticas son usadas para cambiar las ratios de transmisión entre el motor y las ruedas del coche automáticamente. En este punto se aborda una caja de cambios automática de 4 relaciones. El sistema se compone de la caja de cambios y un controlador compuesto por una parte por un controlador discreto y por otra por un controlador continuo como se muestra en la figura 4.1.

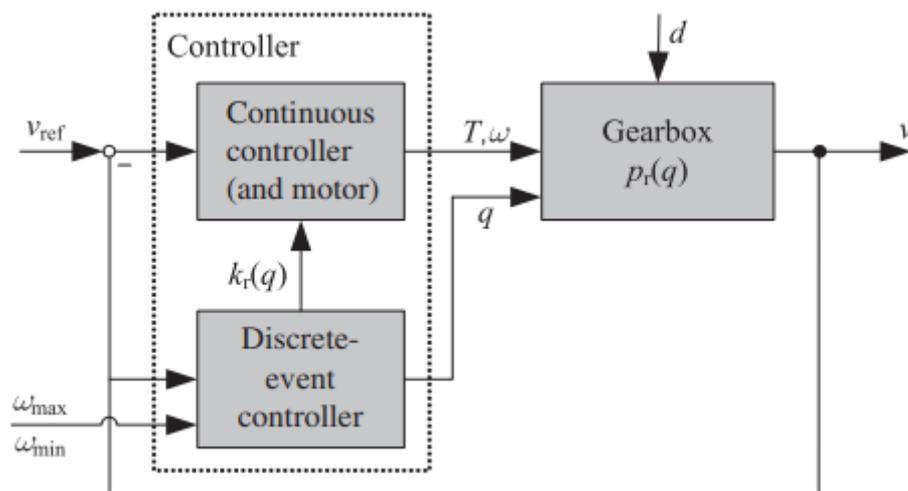


Fig. 4.1. Diagrama de bloques caja de cambios.

La caja de cambios y el controlador interactúan entre sí en función de la velocidad del vehículo $v(t)$. Las entradas continuas de la caja de cambios son el par $u(t) = T(t)$ y la velocidad angular del motor $w(t)$. Las perturbaciones $d(t)$ son incluidas por la carretera, por ejemplo, por los diferentes coeficientes de fricción.

La caja de cambios automática que vamos a considerar tiene cuatro estados discretos $q(t)$

$$q(t) \in 1,2,3,4 \quad (4.1),$$

que influyen en la dinámica continua del sistema modificando la relación de transmisión $p_r(q)$. En la figura num se presentan los distintos modos discretos con los respectivos valores de $p_r(q)$ y $k_r(q)$, donde se cumple

$$p_r(1) > p_r(2) > p_r(3) > p_r.$$

$q(t)$	Relacion de Trnasmisión	Ganancia del controlador
1	$p_r(1)$	$k_r(1)$
2	$p_r(2)$	$k_r(2)$
3	$p_r(3)$	$k_r(3)$
4	$p_r(4)$	$k_r(4)$

Tabla. 4.1

La parte continua del controlador consiste en un controlador del tipo PI con el estado integrador $T_I(t)$. Para obtener una conducción cómoda, se imponen restricciones a la derivada de la aceleración $\ddot{v}(t)$, lo que hace necesario modificar los parámetros del controlador continuo, la ganancia $k_r(q)$, en función de la marcha $q(t)$ e imponer saltos de estado del integrador cada vez que se lleva a cabo un cambio de marcha.

En la figura 4.2 se muestra el esquema de conmutación para la caja de cambios automática.

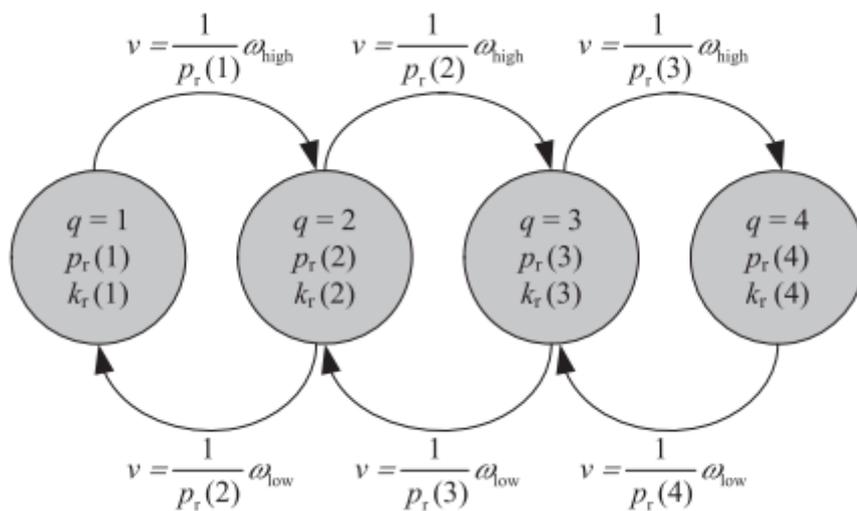


Fig. 4.2. Autómata híbrido de la caja de cambios.

4.1.1 Modelado

La caja de cambio automática se modela únicamente con la velocidad como variable continua de estado.

$$x(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ T_I(t) \end{pmatrix} \quad (4.2).$$

La relación de transmisión influencia el torque aplicado $T(t)$ y la velocidad angular $w(t)$ del motor de acuerdo con las siguientes expresiones

$$T_w(t) = p(q) \cdot T(t) = p(q) \cdot u(t) \quad (4.3),$$

$$w_w(t) = \frac{1}{p(q)} \cdot w(t) \quad (4.4),$$

donde $T_w(t)$, $w_w(t)$ son respectivamente el torque y la velocidad que se transmite a las ruedas, y $p(q)$ describe la relación de transmisión entre el motor y las ruedas que define la caja de cambio, que se obtiene mediante la fracción entre $p_r(q)$ introducido en la figura 4.1, de la siguiente manera

$$p_r(q) = \frac{p(q)}{r} \quad (4.5),$$

donde r es el radio de la rueda.

La relación entre el torque y la fuerza transmitida $F(t)$ que acelera el vehículo y la relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular viene dada por

$$F(t) = \frac{T_w(t)}{r} \quad (4.6),$$

$$v(t) = r \cdot w_w(t) \quad (4.7).$$

Aplicando las leyes de movimiento de Newton, se puede describir la dinámica del vehículo como

$$m \cdot \dot{v}(t) = F(t) - F_I(t) \quad (4.8),$$

$$\dot{v}(t) = \frac{p_r(q) \cdot u(t)}{m} - \frac{c}{m} \cdot v(t)^2 \cdot \text{sign}(v(t)) - g \cdot \sin(d(t)) \quad (4.9),$$

donde m es la masa del vehículo y los dos últimos términos de la ecuación 13 representan la fuerza de carga $F_I(t)$ que se asume que es proporcional al cuadrado de la velocidad. La perturbación $d(t)$ se considera como el ángulo de la carretera.

Un cambio de marcha debe ocurrir cuando la velocidad angular $w(t)$ alcanza un límite superior (*high*) o límite inferior (*low*), respectivamente como se muestra en la figura 4.2.

De acuerdo con la relación

$$w(t) = p_r(q) \cdot v(t) \quad (4.10)$$

los límites corresponden a ciertas velocidades del vehículo.

El modo de cambio se describe mediante los siguientes conjuntos de conmutación

$$S_{q,q+1} = \{v \in \mathbb{R} \mid v = \frac{1}{p(q)} \cdot w_{high}\} \quad (4.11),$$

$$S_{q+1,q} = \{v \in \mathbb{R} \mid v = \frac{1}{p(q)} \cdot w_{low}\} \quad (4.12),$$

donde $S_{q,q+1}$ describe el modo de cambio desde el estado discreto q al estado discreto siguiente $q + 1$, y $S_{q+1,q}$ describe el modo de cambio desde el estado discreto $q + 1$ al estado discreto anterior q .

La ley de control continuo PI con compensación de las no linealidades es dada por

$$u(t) = T_p(t) + T_I(t) + \frac{c}{m} \cdot v(t)^2 \cdot \text{sign}(v(t)) \quad (4.13)$$

tomando

$$T_p(t) = k_r(q) \cdot (v_{ref}(t) - v(t)) \quad (4.14)$$

$$\dot{T}_I = \frac{k_r}{T_R} \cdot (v_{ref}(t) - v(t)) \quad (4.15)$$

donde T_R es la constante de integración. Cada vez que un nuevo valor de velocidad es $v_{ref}(t)$ es establecido mediante el conductor, el estado del integrador $T_I(t)$ es puesto a cero (estado de salto controlado).

Un estado de conducción cómoda se alcanza si se le imponen restricciones a la aceleración, que causa una restricción en la ganancia $k_r(q)$ del sistema, y si se imponen restricciones sobre la derivada de la aceleración.

Si $k_r(q)$ toma valores del siguiente conjunto

$$k_r(q) \in \{k_r(1), k_r(2), k_r(3), k_r(4)\} \quad (4.16)$$

no ocurrirán cambios bruscos de $\ddot{v}(t)$ y de $\dot{v}(t)$ debido al modo de cambio si se cumple

$$p_r(q) \cdot k_r(q) = p_r(q + 1) \cdot k_r(q + 1) \quad (4.17)$$

para el modo de cambio $q \rightarrow q + 1$

$$p_r(q) \cdot T_I(\bar{t}^-) = p_r(q + 1) \cdot T_I(\bar{t}^+) \quad (4.18)$$

, para el modo de cambio $q \rightarrow q - 1$

$$p_r(q) \cdot T_I(\bar{t}^-) = p_r(q - 1) \cdot T_I(\bar{t}^+) \quad (5.19).$$

4.1.2 Simulación

Para llevar a cabo la simulación dentro de la herramienta de MATLAB HyEQ se han tomado los siguientes valores.

La relación de transmisión en los diferentes estados toma los valores mostrados en la tabla 4.2.

p_r	Valor
$p_r(1)$	50
$p_r(2)$	32
$p_r(3)$	20
$p_r(4)$	14

Tabla. 4.2

La ganancia del sistema en los diferentes estados toma los valores mostrados en la tabla 4.3.

p_r	Valor($N \cdot s$)
$k_r(1)$	3.75
$k_r(2)$	5.86
$k_r(3)$	9.375
$k_r(4)$	11.39

Tabla. 4.3

Las constantes necesarias para poder llevar a cabo la simulación toman los valores que se muestran en la tabla 4.4.

Constante	Valor
$c (kg \cdot m^{-1})$	0.7
$m(kg)$	1500
$g(m \cdot s^{-2})$	10
$T_R(s)$	40

Tabla. 4.4

Los parámetros de entrada del sistema necesarios para poder llevar a cabo la simulación toman los valores que se muestran en la tabla 4.5.

<i>Parametro</i>	<i>Valor</i>
$v_{ref}(m \cdot s^{-1})$	30
$w_{high} \cdot (rad \cdot s^{-1})$	500
$w_{low}(rad \cdot s^{-1})$	230
$d(rad)$	0

Tabla. 4.5

Las condiciones iniciales para el sistema toman los valores que se muestran en la tabla 4.6.

<i>Parametro</i>	<i>Valor</i>
$v(m \cdot s^{-1})$	14
$T_l(N \cdot m)$	0
q	2

Tabla. 4.6

Para llevar a cabo la simulación se ha definido un horizonte de tiempo para la simulación igual a

$$TSPAN = [0 \ 500]$$

, y un horizonte para los saltos a realizar durante la simulación igual a

$$JSPAN = [0 \ 500].$$

La prioridad de salto se ha configurado de tal modo que el flujo del sistema tenga prioridad.

Tras realizar la simulación usando la herramienta de MATLAB HyEQ obtenemos los siguientes resultados. En la figura 4.3 se muestra la evolución del par aplicado frente a la velocidad. Son notables los cambios de estado en la evolución del par, por ejemplo, entre las velocidades de 14 y 16 $m \cdot s^{-1}$ la evolución del par cambia de dinámica al igual que entre las velocidades 24 y 26 $m \cdot s^{-1}$. Esto se debe al salto del estado 2 al 3 y del cambio del estado 3 al 4 respectivamente que equivale al cambio de marcha.

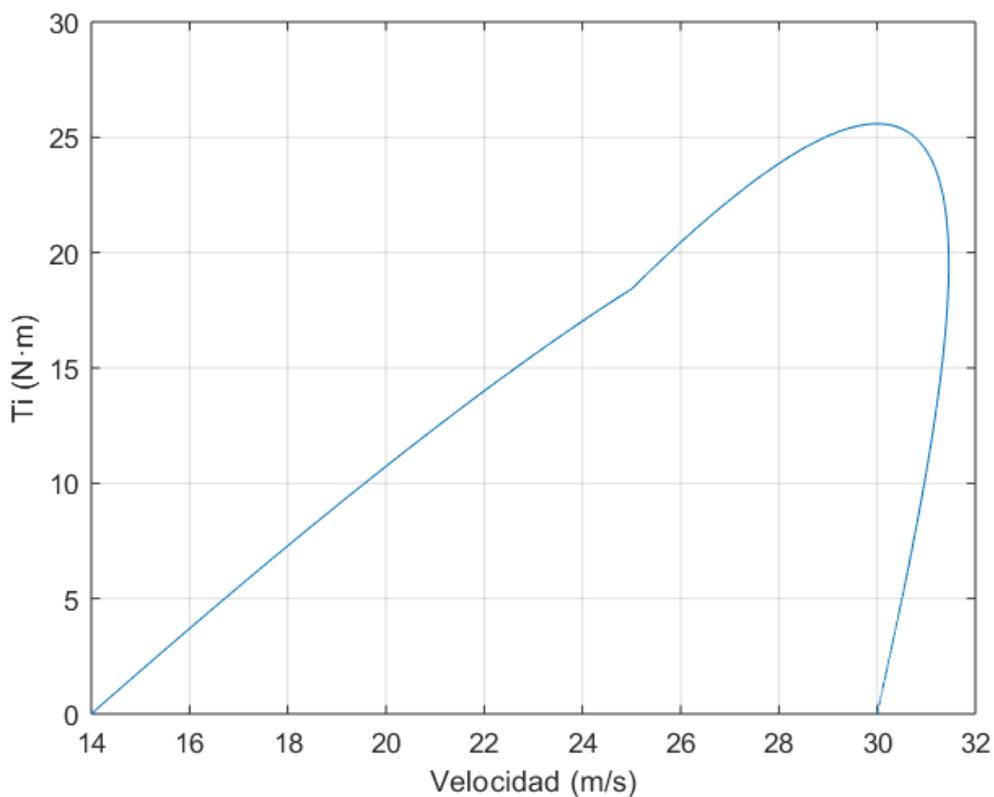


Fig. 4.3. Evolución del par del frente a la velocidad.

En la figura 4.4 se puede apreciar la evolución de los saltos que efectúa el sistema en función del transcurso del tiempo. El sistema debido a la condición inicial del valor de la velocidad que es igual a $14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ comienza en el estado 2, es decir el vehículo avanza con la segunda relación de marchas. Al imponer la referencia de velocidad como $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ el vehículo comienza a acelerar, se mantiene en la segunda marcha hasta que alcanza el límite superior de velocidad angular permitida. Tras cambiar a la tercera marcha el vehículo se mantiene acelerando hasta que llega de nuevo al límite de velocidad angular impuesto cambiando de este modo a la cuarta marcha. Una vez en la cuarta marcha el vehículo logra alcanzar la velocidad de referencia establecida y deja de acelerar llegando el sistema a su estacionario esperando a recibir una nueva directriz del piloto.

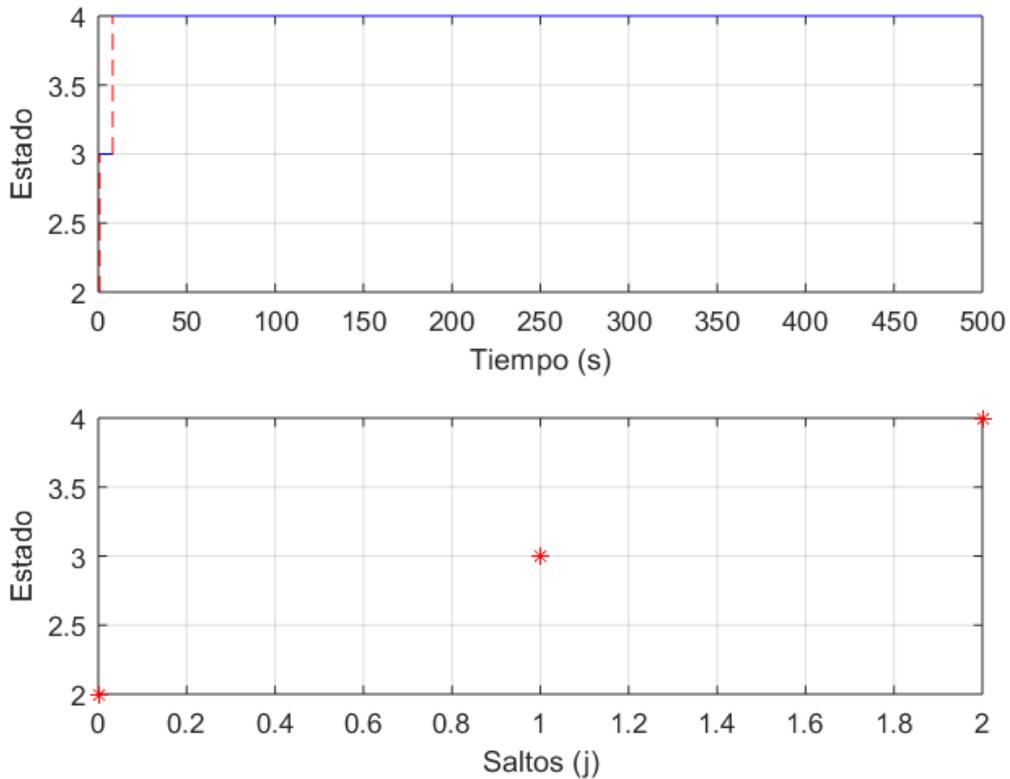


Fig. 4.4. Evolución de los saltos discretos del sistema.

En la figura 4.5 podemos observar la evolución del par frente al tiempo, se observa que el par sufre un impulso generado por la aceleración necesaria para llevar el vehículo a la velocidad deseada. Una vez entregada la fuerza necesaria para llevar el vehículo desde la velocidad inicial a la velocidad de referencia la fuerza decrece hasta cero ya que se consideran condiciones ideales y no existen fuerzas que frenen el vehículo.

En la figura 4.6 se observa la evolución de la velocidad frente al tiempo, en el punto inicial, tiempo transcurrido igual a cero, la velocidad es de $14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ tras la acción de control la velocidad alcanza los $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Se observa un ligero sobre-pico.

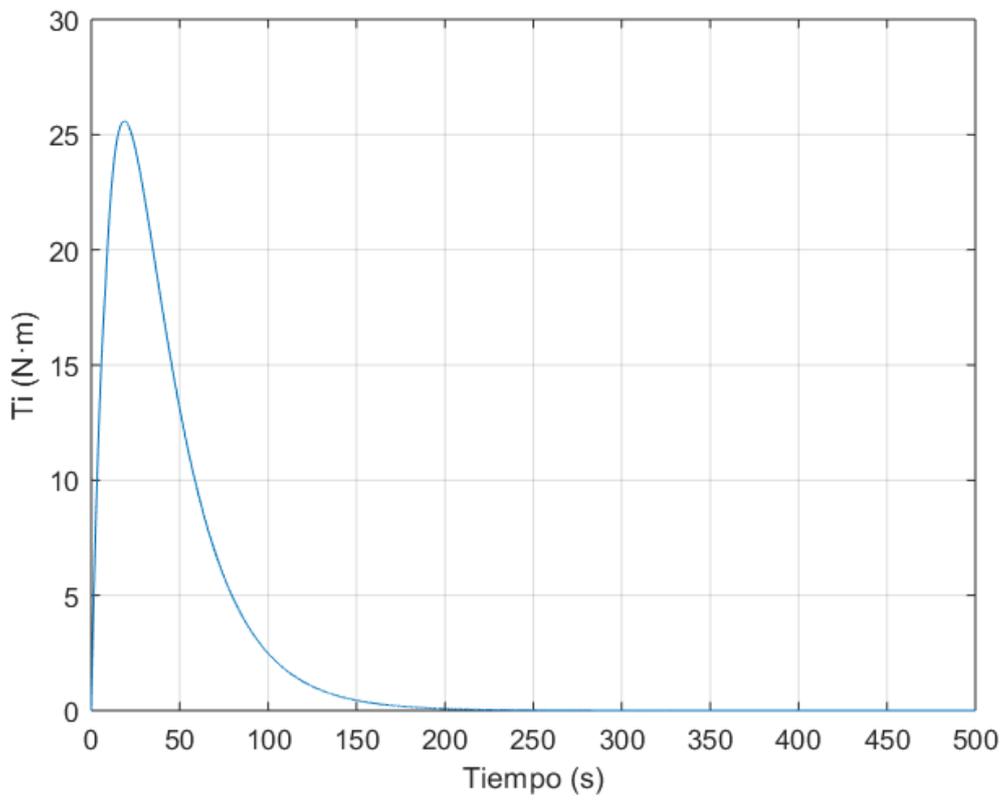


Fig. 4.5. Evolución del par frente al tiempo.

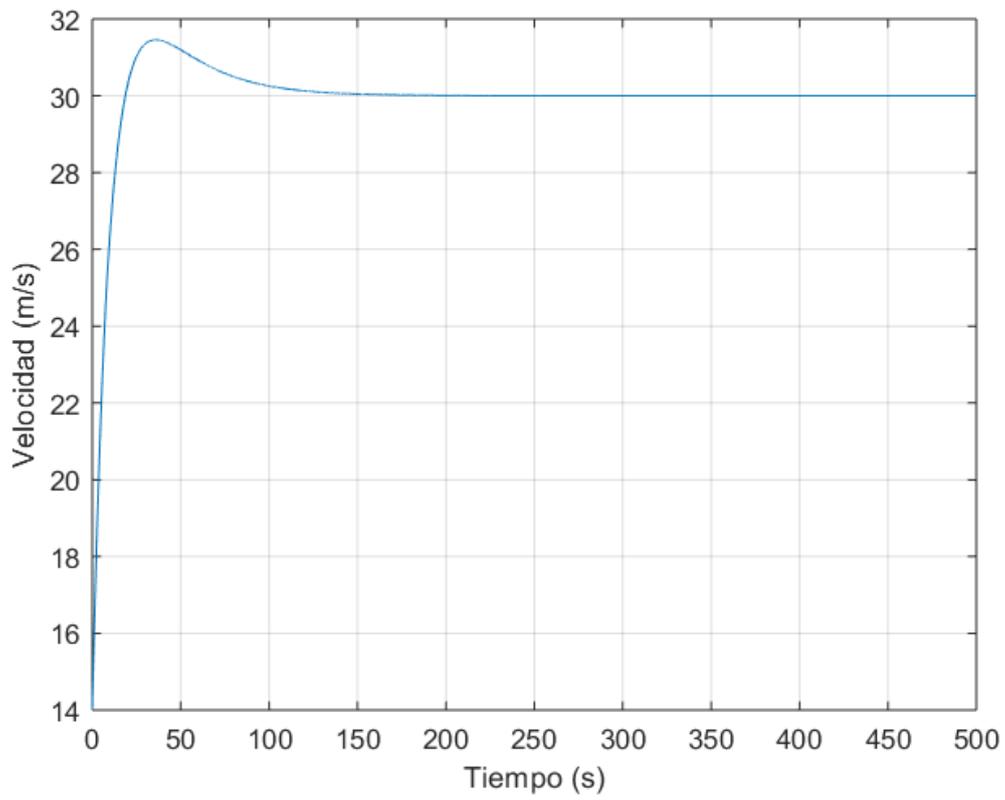


Fig. 4.6. Evolución de la velocidad frente al tiempo.

Para poder observar la evolución del sistema en un caso en el que se debe reducir la relación de marchas de la caja de cambios automática se introduce en el sistema una fuerza de frenado de equivalente a una pendiente de 0.01 rad hasta que se llega a la velocidad de referencia, entonces la fuerza cede.

Los parámetros de entrada del sistema necesarios para poder llevar a cabo la simulación toman los valores que se muestran en la tabla 4.7.

<i>Parametro</i>	<i>Valor</i>
$v_{ref}(m \cdot s^{-1})$	14
$w_{high} \cdot (rad \cdot s^{-1})$	500
$w_{low}(rad \cdot s^{-1})$	230
$d(rad)$	0.01

Tabla. 4.7

Las condiciones iniciales para el sistema toman los valores que se muestran en la tabla 4.8.

<i>Parametro</i>	<i>Valor</i>
$v(m \cdot s^{-1})$	30
$T_l(N \cdot m)$	0
q	4

Tabla. 4.8

Para llevar a cabo la simulación se ha definido un horizonte de tiempo para la simulación igual a

$$TSPAN = [0 \ 500]$$

, y un horizonte para los saltos a realizar durante la simulación igual a

$$JSPAN = [0 \ 500].$$

La prioridad de salto se ha configurado de tal modo que el flujo del sistema tenga prioridad.

En la figura 4.7 se muestra cómo evoluciona el par frente a la velocidad, al comienzo de la simulación el vehículo se encuentra a una velocidad de $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, para poder llevar el vehículo a una velocidad inferior, $14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, se aplica una fuerza negativa de frenada hasta que se logra conseguir llegar a la velocidad deseada.

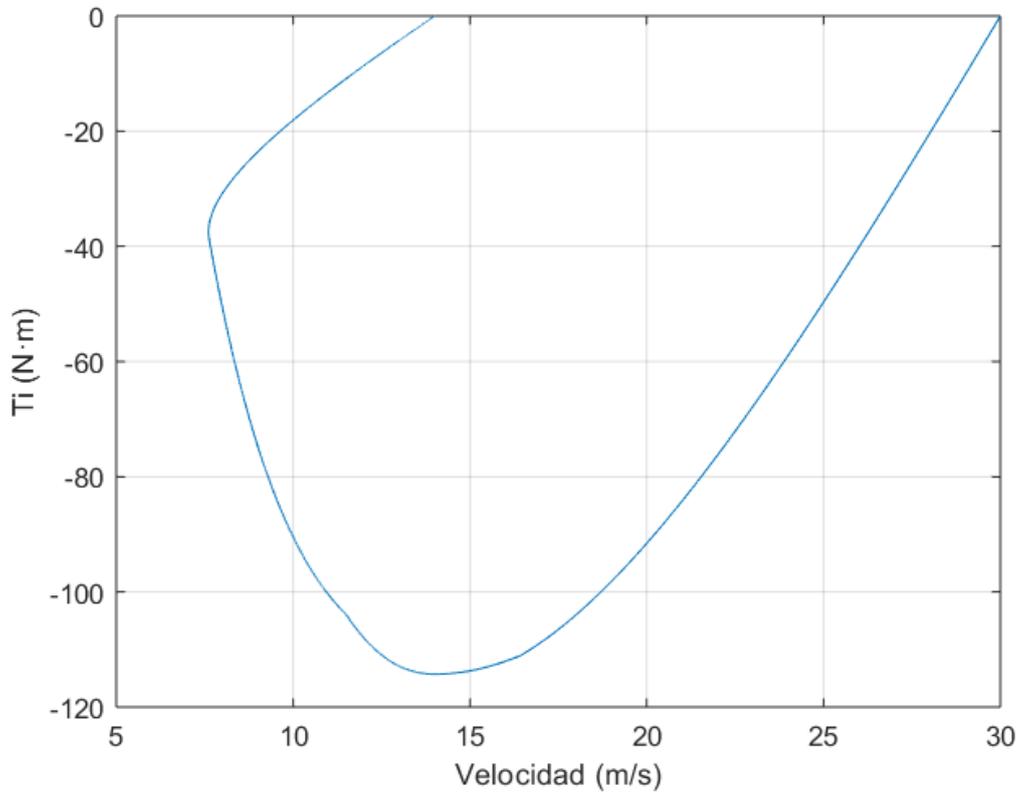


Fig. 4.7. Evolución del par frente a la velocidad.

En la figura 4.8 se pueden observar los cambios de marcha que realiza el vehículo a lo largo de la simulación. Comienza en la cuarta marcha, una vez se alcanza el límite inferior de velocidad angular salta a la marcha número 3 y de la misma manera cuando se alcanza de nuevo el límite inferior salta a la marcha número 2. Como la velocidad de referencia usada hace uso de una velocidad angular que se encuentra entre el límite inferior y superior se establece en ese estado.

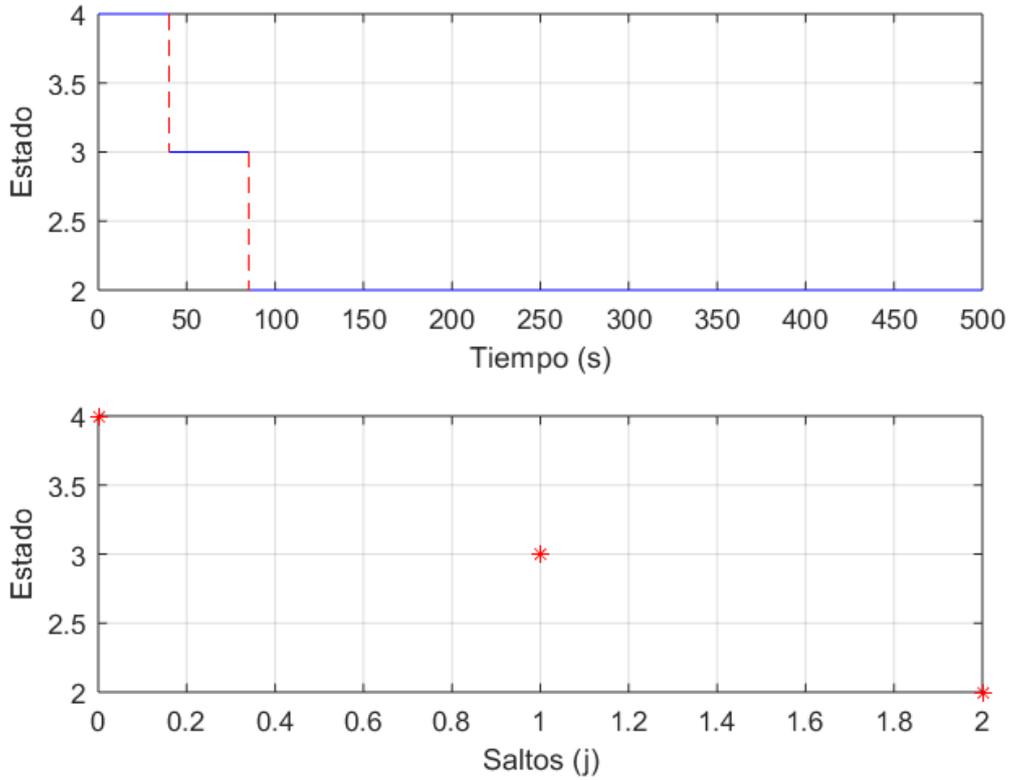


Fig. 4.8. Evolución de los saltos discretos del sistema.

En la figura 4.9 podemos observar la evolución del par frente al tiempo, se observa que el par sufre un impulso generado por la fuerza de frenada necesaria para llevar el vehículo a la velocidad deseada. Una vez entregada la fuerza necesaria para llevar el vehículo desde la velocidad inicial a la velocidad de referencia la fuerza decrece hasta cero ya que se consideran condiciones ideales y no existen fuerzas que frenen el vehículo.

En la figura 4.10 se observa la evolución de la velocidad frente al tiempo, en el punto inicial, tiempo transcurrido igual a cero, la velocidad es de $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ tras la acción de control la velocidad alcanza los $14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Se observa un ligero sobre-pico.

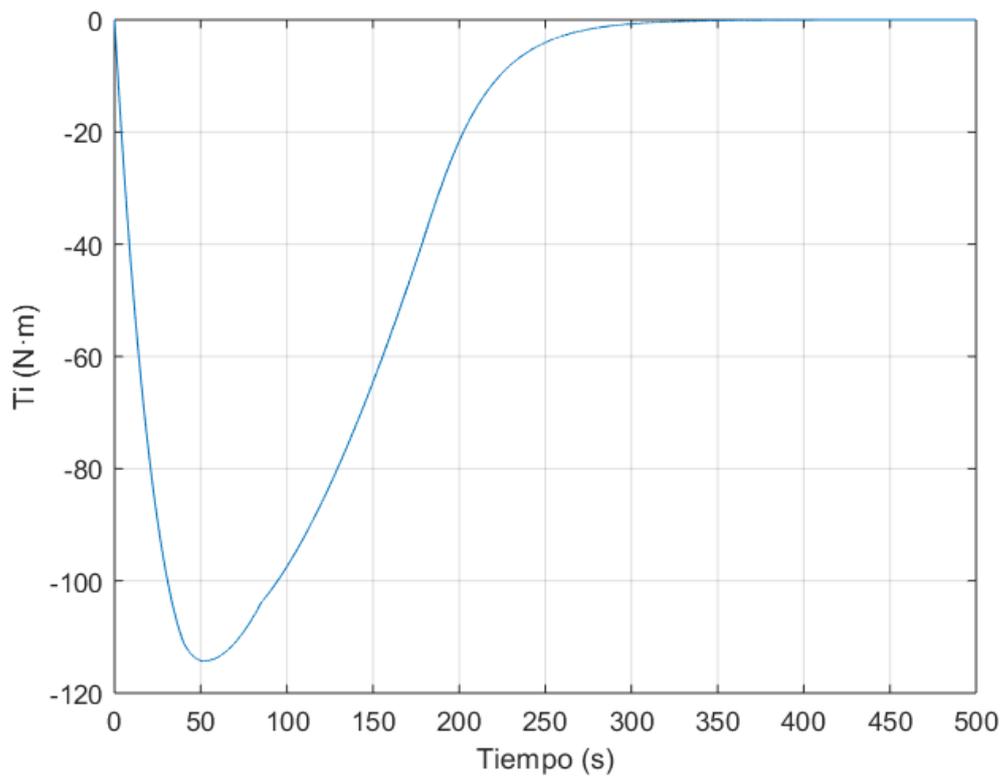


Fig. 4.9. Evolución del par frente al tiempo.

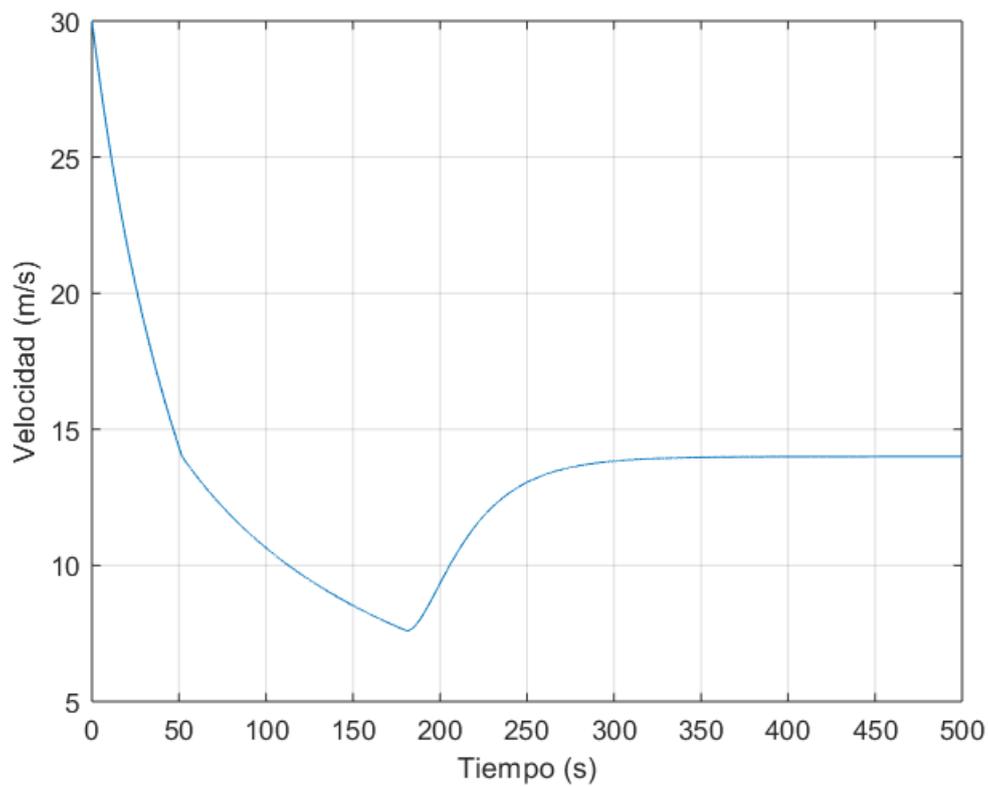


Fig. 4.10. Evolución de la velocidad frente al tiempo.

4.2 Tanques interconectados

El sistema de tanques interconectados es un sistema no lineal con una dinámica compleja de modelar por ello se va a abordar como un sistema dinámico híbrido. A parte del carácter discretos del estado todo o nada de las válvulas del tanque, podemos apreciar la naturaleza híbrida del sistema si denotamos como un estado discreto las posibles combinaciones de conexión entre los tanques, por ejemplo, cuando los dos tanques tienen un nivel de líquido superior a la altura de la válvula V_1 como se muestra en la figura 5.11 se comunican a través de las dos tuberías en cambio si tienen un nivel inferior solo por la tubería inferior, el comportamiento dinámico del sistema en cada caso es diferente y se modela con ecuaciones diferentes.

El sistema de tanques interconectados es un sistema dinámico híbrido con conmutación autónoma. La tarea de control principal es estabilizar el estado. Este sistema representa una versión simplificada de sistemas que son usados dentro de la industria de procesos para abastecer al cliente con un flujo continuo de líquido manteniendo los niveles del líquido dentro del tanque a unos niveles prescritos.

El sistema que vamos a estudiar consiste en dos tanques cilíndricos acoplados, tanque T_1 y tanque T_2 , conectados mediante tubos, como se muestra en la figura 4.11.

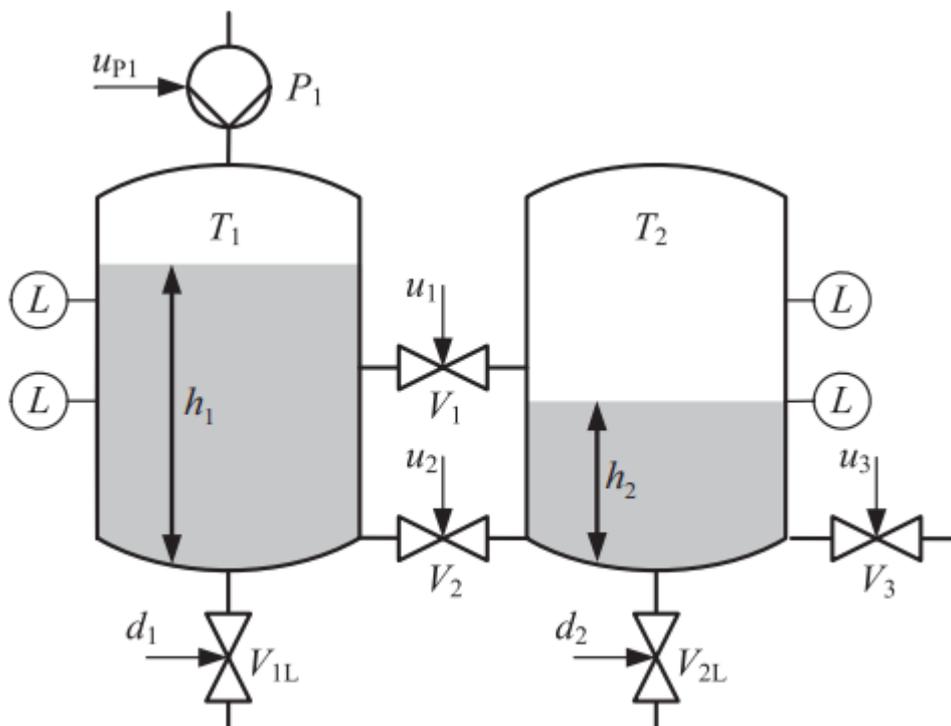


Fig. 4.11. Representación del sistema de doble tanque interconectados.

El líquido que fluye entre los tanques y hacia fuera de ellos se puede controlar mediante las válvulas V_1 , V_2 , V_3 , V_{1L} y V_{2L} , las cuales solo pueden tomar los valores 0 y 1, completamente cerrada o completamente abierta. Los tubos que interconectan los tanques están situados en la parte baja de los tanques, con la válvula V_2 , y a la altura h_0 teniendo como referencia la base de los tanques, con la válvula V_1 .

El nivel máximo de líquido que se puede alcanzar dentro de cada tanque se denota como h_{max} . Los tanques se encuentran al mismo nivel y tiene la misma superficie de base A .

En una situación típica las válvulas V_1 y V_2 y V_3 están completamente abiertas y las válvulas V_{1L} y V_{2L} están completamente cerradas. El líquido es bombeado dentro del tanque de la izquierda, tanque T_1 , mediante la bomba P_1 . Las mediciones hacen referencia a los niveles $h_1(t)$ y $h_2(t)$, altura del líquido alcanzada dentro del tanque T_1 y T_2 respectivamente. Los sensores discretos, denotados como L en la figura, nos permiten describir el estado del nivel del tanque como *medio* (el líquido se encuentra entre los dos sensores), *alto* (el líquido se encuentra por encima del sensor superior) y *bajo* (el líquido se encuentra por debajo del sensor inferior).

El sistema tiene tanto entradas continuas como entradas discretas. La entrada continua del sistema es el caudal de líquido que proporciona la bomba $u_{p1}(t) = Q^{P1}(t)$. Las entradas discretas del sistema comprenden las posiciones de las válvulas V_1 , V_2 y V_3 . De tal modo se mantiene

$$u(t) = (u_{p1}(t) \ u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t))^T \quad (4.20).$$

Las perturbaciones que afectan al sistema se pueden inducir en el cambiando la posición de las válvulas V_{1L} y V_{2L} .

El sistema de doble tanque es un sistema dinámico híbrido típico, ya que contiene dinámicas continuas con dependencia de estado y conmutación controlada. Si la posición de las válvulas se mantiene invariante las dinámicas continuas conmutan autónomamente entre cuatro estados discretos $q(t)$ dependiendo en si el líquido supera o no la altura h_0 del tubo superior. La dinámica discreta del sistema es representada mediante el autómata de la figura 4.12.

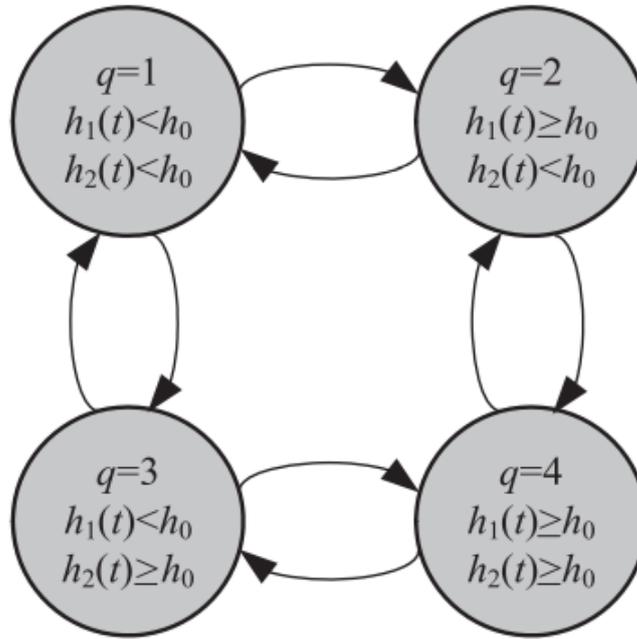


Fig. 4.12. Autómata híbrido sistema doble tanque.

4.2.1 Modelado

El sistema de tanques interconectados tiene dos variables de estado continuas

$$x(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}, \quad h_i \in \mathbb{R} \quad (4.21)$$

y cuatro estados discretos

$$q(t) = \{1, 2, 3, 4\} \quad (4.22),$$

que dependen del nivel del líquido en el tanque T_1 y el tanque T_2 como se muestra en tabla 4.9.

$q(t)$	$h_1(t)$	$h_2(t)$
1	$< h_0$	$< h_0$
2	$\geq h_0$	$< h_0$
3	$< h_0$	$\geq h_0$
4	$\geq h_0$	$\geq h_0$

Tabla. 4.9

La dinámica no lineal del sistema sigue la Ley de Torricelli

$$Q_{ij}^{vl}(t) = c \cdot \text{sgn}(h_i(t) - h_j(t)) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot |h_i(t) - h_j(t)|} \cdot u_i(t) \quad (4.22),$$

donde $Q_{ij}^{V_l}(t)$ es el flujo de líquido desde el tanque T_i hacia el tanque T_j mediante el tubo a través de la válvula V_l , c es la constante de flujo de la válvula, $u_l(t) \in \{0,1\}$ es la posición de la válvula V_l siendo 1 la válvula totalmente abierta y 0 la válvula totalmente cerrada, y g es la constante de la gravedad.

La variación de volumen de líquido dentro de un tanque $V(t)$ puede describirse mediante

$$\dot{V}(t) = \dot{h}(t) \cdot A = \sum Q_{in}(t) - \sum Q_{out}(t) \quad (4.23),$$

donde $\sum Q_{in}(t)$ es el sumatorio de todos los flujos que aportan líquido a los tanques y $\sum Q_{out}(t)$ es la suma de todos los flujos de líquido que sale de los tanques. Aplicando esta ecuación a nuestro sistema de tanques interconectados se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\dot{h}_1(t) = \frac{u_{P1}(t) - Q_{12}^{V_1}(t) - Q_{12}^{V_2}(t) - Q_L^{V_{1L}}(t)}{A} \quad (4.24)$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{Q_{12}^{V_1}(t) + Q_{12}^{V_2}(t) - Q_L^{V_{2L}}(t) - Q_N^{V_3}(t)}{A} \quad (4.25)$$

El flujo $Q_{12}^{V_1}(t)$ a través de la válvula V_1 depende del estado discreto $q(t)$ de la siguiente manera:

- Si se encuentra en el estado discreto 1, $q(t) = 1$:

$$Q_{12}^{V_1}(t) = 0 \quad (4.26).$$

- Si se encuentra en el estado discreto 2, $q(t) = 2$:

$$Q_{12}^{V_1}(t) = c \cdot \text{sgn}(h_1(t) - h_0) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot |h_1(t) - h_0|} \cdot u_1(t) \quad (4.27)$$

- Si se encuentra en el estado discreto 3, $q(t) = 3$:

$$Q_{12}^{V_1}(t) = c \cdot \text{sgn}(h_0 - h_2(t)) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot |h_0 - h_2(t)|} \cdot u_1(t) \quad (4.28)$$

- Si se encuentra en el estado discreto 4, $q(t) = 4$:

$$Q_{12}^{V_1}(t) = c \cdot \text{sgn}(h_1(t) - h_2(t)) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot |h_1(t) - h_2(t)|} \cdot u_1(t) \quad (4.29)$$

Las expresiones que modelan el resto de los flujos entre los tanques se mantienen constantes a lo largo de los cuatro modos discretos:

$$Q_{12}^{V_2}(t) = c \cdot \text{sgn}(h_1(t) - h_2(t)) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot |h_1(t) - h_2|} \cdot u_2(t) \quad (4.30),$$

$$Q_N^{V_3}(t) = c \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2(t)} \cdot u_3(t) \quad (4.31),$$

$$Q_L^{V_{1L}}(t) = c \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1(t)} \cdot d_1(t) \quad (4.32),$$

$$Q_L^{V_{2L}}(t) = c \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2(t)} \cdot d_2(t) \quad (4.33),$$

donde $Q_N^{V_3}(t)$ es el caudal de líquido que abandona el tanque T_2 a través del tubo con la válvula V_3 , $Q_L^{V_{1L}}(t)$ es el caudal de líquido que abandona el tanque T_1 a través del tubo con la válvula V_{1L} , y $Q_L^{V_{2L}}(t)$ es el caudal de líquido que abandona el tanque T_2 a través del tubo con la válvula V_{2L}

4.2.2 Simulación

Para llevar a cabo la simulación dentro de la herramienta de MATLAB HyEQ se han tomado los siguientes valores.

Las constantes necesarias para poder llevar a cabo la simulación toman los valores que se muestran en la tabla 4.10.

Constante	Valor
$c \text{ (m}^2\text{)}$	3.6×10^{-5}
$h_0 \text{ (m)}$	0.3
$h_{max} \text{ (m)}$	0.6
$A \text{ (m}^2\text{)}$	0.0154
$g \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$	9.81
$Q_{max} \text{ (m}^3 \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$	0.1×10^{-3}

Tabla. 4.10

Para poder considerar en qué estado se encuentra el nivel del tanque se toman los valores que se muestran en la figura tabla 4.11.

<i>Valor Cualitativo</i>	<i>Rango(cm)</i>
<i>low</i>	[0 20]
<i>medium</i>	[20 25]
<i>high</i>	[25 60]

Tabla. 4.11

Los parámetros de entrada del sistema necesarios para poder llevar a cabo la simulación toman los valores que se muestran en la tabla 4.12.

<i>Parametro</i>	<i>Valor</i>
u_1	1
u_2	1
u_3	1
u_{P1}	0
d_1	0
d_2	0

Tabla. 4.12

Las condiciones iniciales para el sistema toman los valores que se muestran en la tabla 4.13.

<i>Parametro</i>	<i>Valor</i>
$h_1(m)$	0.25
$h_2(m)$	0.45
q	3

Tabla. 4.13

Para llevar a cabo la simulación se ha definido un horizonte de tiempo para la simulación igual a

$$TSPAN = [0 \ 100]$$

, y un horizonte para los saltos a realizar durante la simulación igual a

$$JSPAN = [0 \ 100].$$

La prioridad de salto se ha configurado de tal modo que el flujo del sistema tenga prioridad.

Una vez realizada la simulación podemos observar en la figura 4.13 la evolución de la altura de líquido dentro del tanque T_1 y la evolución de la altura de líquido dentro del tanque T_2 frente al tiempo. Ya que para la simulación se ha considerado que la válvula de la bomba P_1 esta totalmente cerrada, es lógico el comportamiento que se observa, al ser la altura de líquido en el

segundo tanque mayor que en el primer tanque en los primeros instantes de la simulación existe un flujo de líquido desde el tanque T_2 hacia el tanque T_1 , y simultáneamente existe un flujo de líquido que abandona el tanque T_2 a través de la válvula V_3 . Esto se observa en la figura num, en los primeros segundos la pendiente de la curva que describe el comportamiento de la altura del tanque T_2 tiene una pendiente negativa mayor y la curva que describe la altura del tanque T_1 tiene una pendiente positiva.

Una vez que los dos tanques se encuentran a la misma altura el flujo entre los dos tanques se detendría pero al perder líquido el tanque T_2 a través de la válvula V_3 baja su altura y la presión del tanque T_1 es mayor a la del tanque T_2 , la dinámica del tanque T_1 se invierte a la misma vez que se invierte la dirección del flujo que atraviesa los tubos que son gobernados por las válvulas V_1 y V_2 , fluyendo caudal de líquido desde el tanque T_1 hacia el tanque T_2 . Al recibir el tanque T_2 desde el tanque T_1 consigue mitigar los efectos debidos al vaciado mediante la válvula V_3 y la pendiente negativa disminuye.

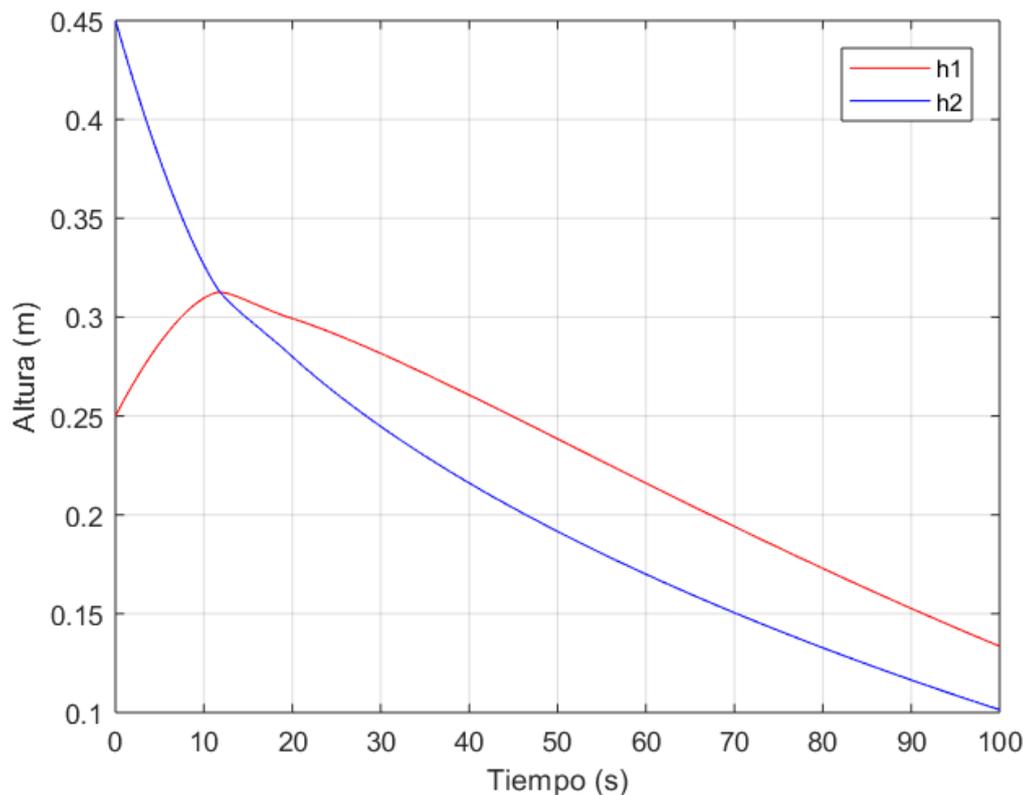


Fig. 4.13. Altura del líquido frente al tiempo

En la figura 4.14 se muestra la evolución de los estados discretos del sistema a lo largo de la simulación. En los primeros segundos de la simulación la altura del tanque T_2 se encuentra por encima de la altura h_0 y la altura del tanque T_1 se encuentra por debajo, esta combinación

corresponde al estado discreto 3. Una vez que la altura del tanque T_1 super la altura h_0 los dos tanques se encuentran por encima y cambia al estado 4, los dos tanques contienen suficiente liquido como para superar la altura h_0 . Como el nivel de altura del tanque T_2 sigue disminuyendo una vez que se encuentra por debajo de h_0 el sistema avanza al siguiente estado que en este caso corresponde al estado 2, la altura del tanque T_1 es mayor a h_0 y la altura del tanque T_2 es menor. Y por último, como el nivel de los tanques 1 y 2 sigue disminuyendo ya que no existe aportación de agua por parte de la bomba se llega al estado número 1 en el que tanto la altura del tanque T_1 y la altura del tanque T_2 se encuentran por debajo de h_0 .

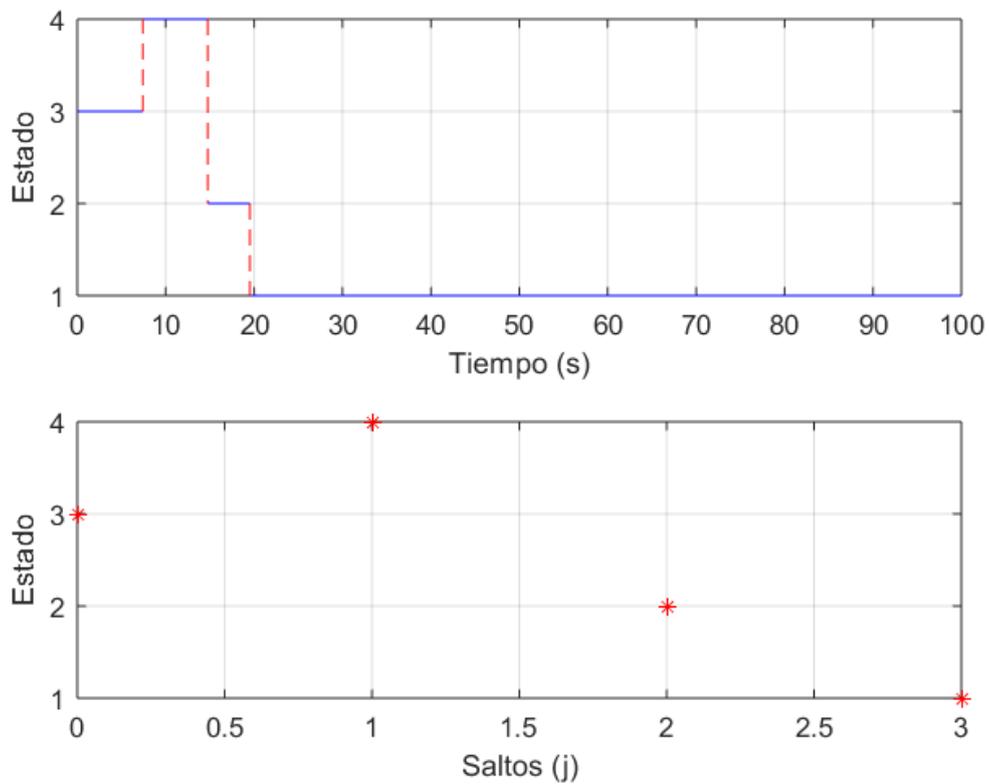


Fig. 4.14. Evolución discreta del sistema.

Si se quiere estudiar la estabilidad del sistema tal y como se describe en el capítulo 2 mediante la ecuación de Lyapunov

$$W(t) = \frac{1}{2} \cdot h_1(t)^2 + \frac{1}{2} \cdot h_2(t)^2 \quad (5.33),$$

se observa en la figura 4.15 la evolución de la ecuación de Lyapunov del sistema, el sistema tiende hacia el cero por lo que se puede asumir que el sistema es estable.

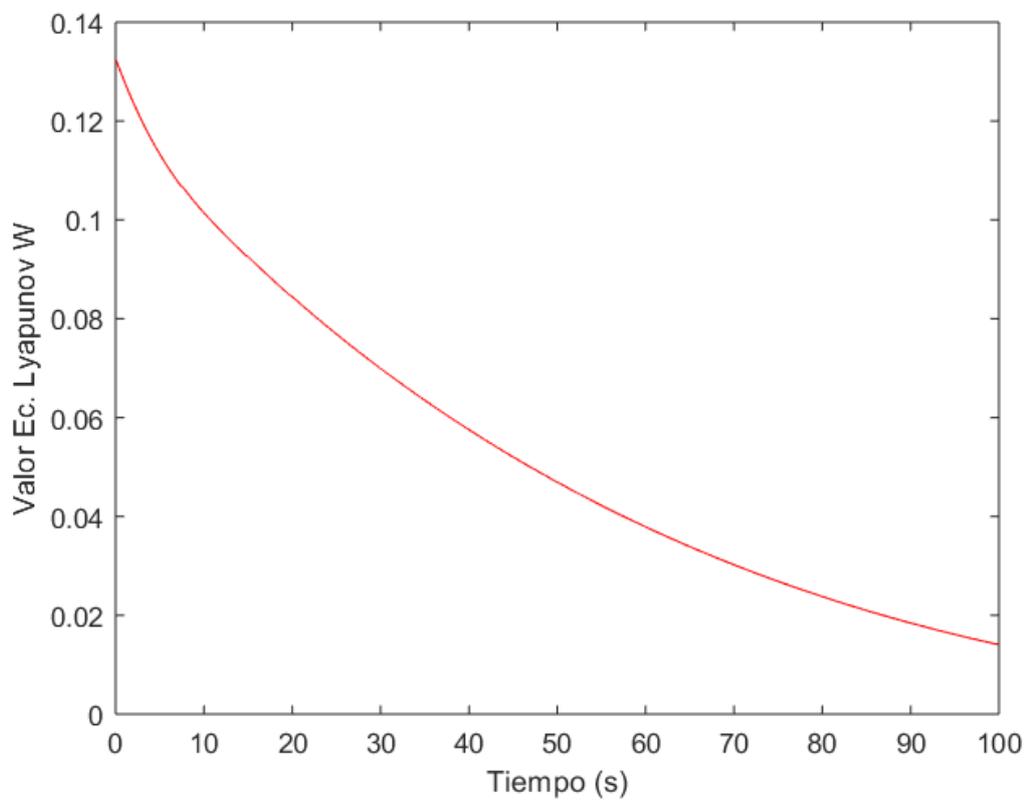


Fig. 4.15. Función de Lyapunov para el análisis de la estabilidad.

Si realizamos la simulación para un valor de regulación para la bomba de 0.5 obtenemos los siguientes resultados.

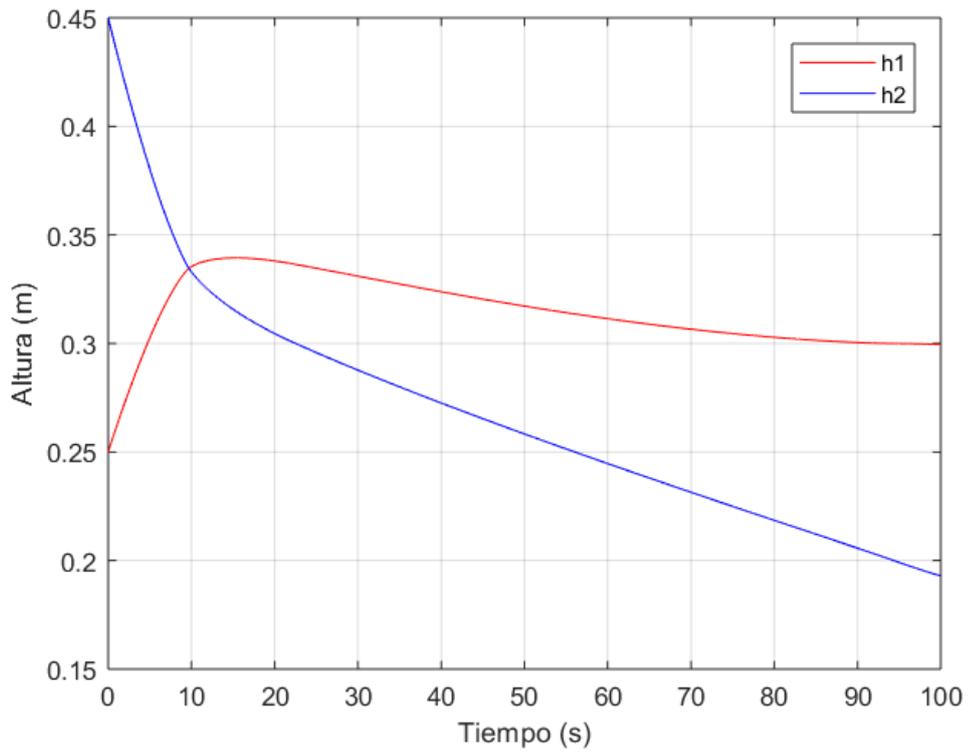


Fig. 4.16. Altura del líquido frente al tiempo.

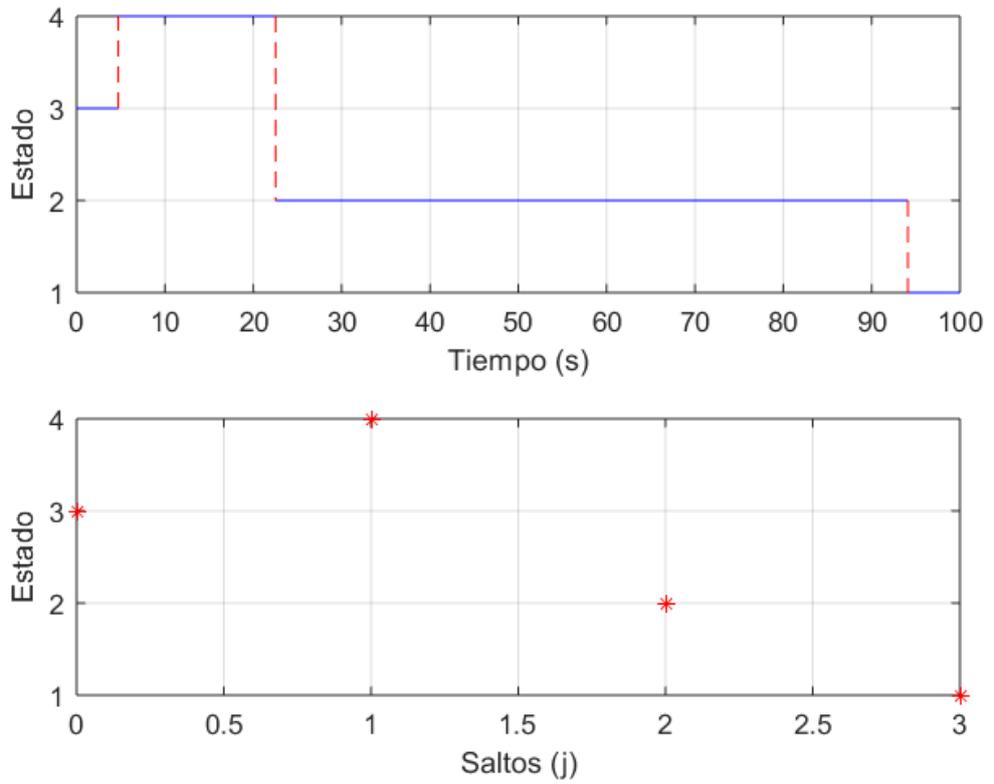


Fig. 4.17. Evolución discreta del sistema.

Los resultados de la función de Lyapunov, en la figura 4.18, reflejan que el sistema con un valor para la bomba del 50 % de su capacidad el sistema se encuentra dentro del límite de estabilidad.

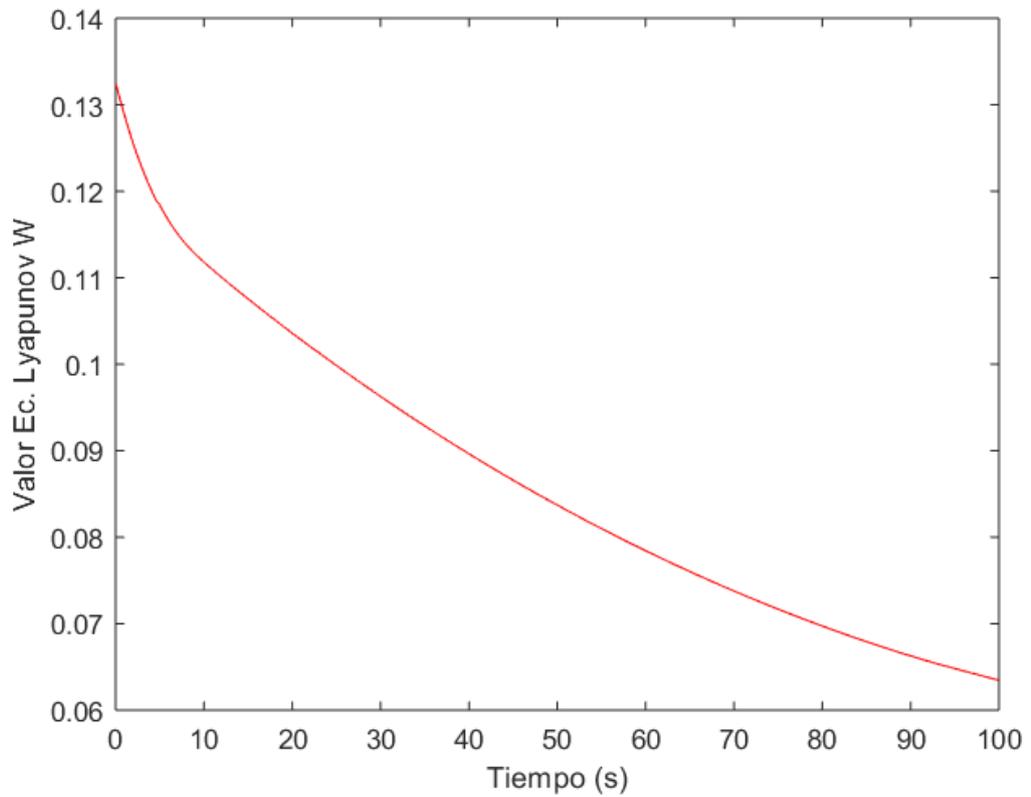


Fig. 4.18. Función de Lyapunov para el análisis de la estabilidad.

Si realizamos la simulación para un valor de regulación para la bomba de 1 manteniendo los valores de las válvulas que componen el sistema, obtenemos los siguientes resultados.

En la figura 4.19 se muestra como las alturas del líquido dentro de los tanques T_1 y T_2 continúan aumentando por encima del nivel de h_0 manteniéndose en el estado discreto numero 4 como se muestra en la figura 4.20.

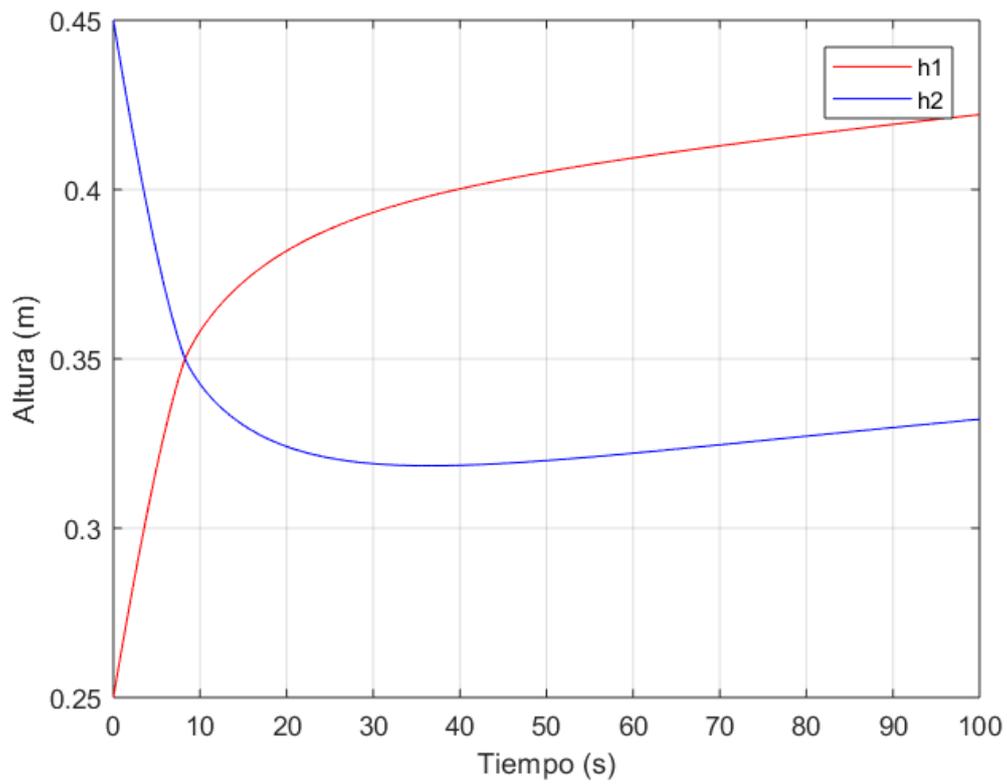


Fig. 4.19. Altura del líquido frente al tiempo.

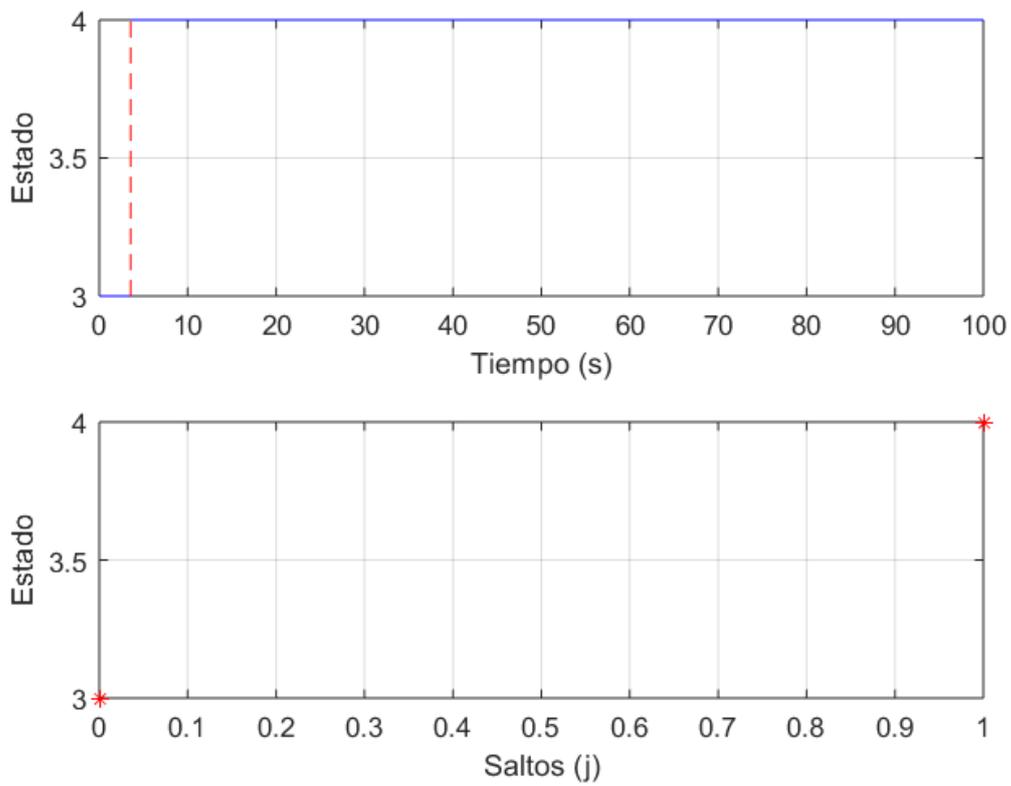


Fig. 4.20. Evolución discreta del sistema.

Los resultados de la función de Lyapunov, en la figura 4.21, reflejan que el sistema con un valor para la bomba del 100% de su capacidad el sistema tiende a la inestabilidad ya que su valor aumenta y diverge del 0. Esto significa que la energía del sistema tiende a aumentar.

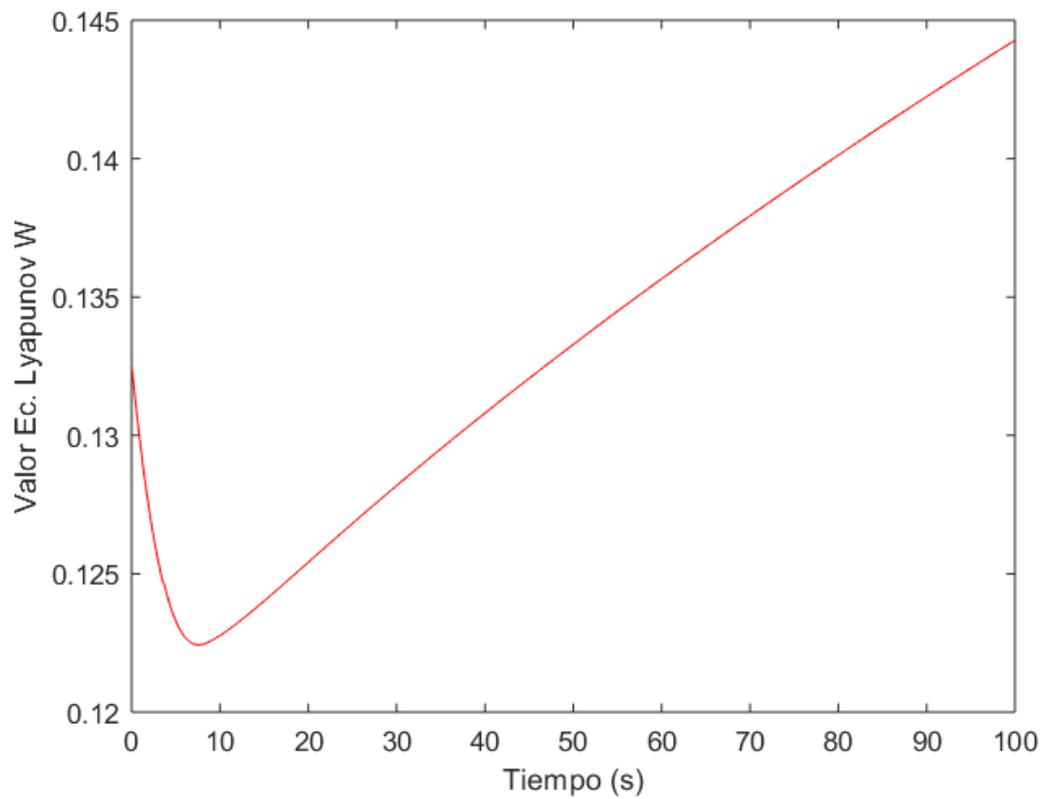


Fig. 4.21. Función de Lyapunov para el análisis de la estabilidad.

4.3 Péndulo Invertido

El péndulo invertido ha sido una herramienta clásica en los laboratorios de ingeniería de control desde los años 50. Originalmente su uso consistía en ilustrar ideas en el campo del control no lineal como estabilización de sistemas inestables. Debido a su naturaleza no lineal el péndulo invertido ha mantenido su utilidad y es usado actualmente para demostrar ideas que emergen del campo del control no lineal. Ejemplos típicos son la estabilización en lazo cerrado, el control de estructura variable, control basado en la pasividad, controladores de paso atrás y adelante, observadores no lineales, compensación por fricción, y reducción de modelos no lineales. El péndulo invertido también se ha usado en tareas centradas en el control como el levantamiento y atrapamiento del péndulo.

En este punto se estudiará la estrategia de levantar el péndulo desde la posición inicial hasta la posición deseada basándose en el control por energía.

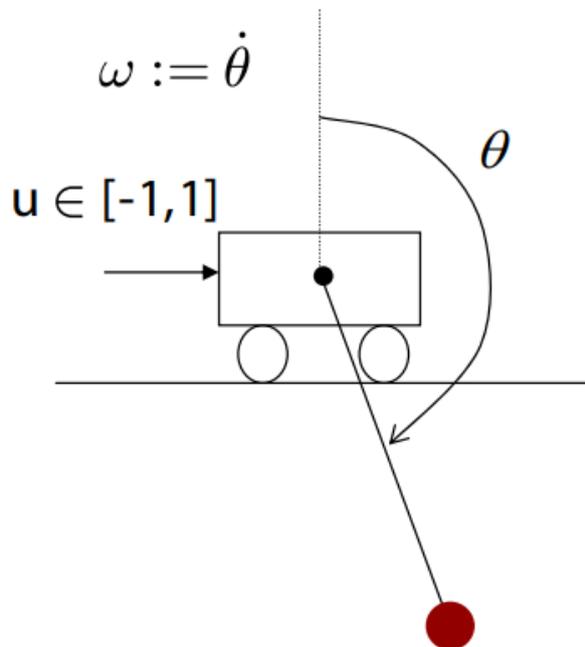


Fig. 4.22. Representación del sistema carro-péndulo.

Como se muestra en la figura 4.22 el carro sobre el que rota el péndulo podrá tomar valores de fuerza u entre 1 y -1 . Se considera que el péndulo se encuentra a 0 rad cuando está totalmente perpendicular a la superficie superior del carro.

El sistema se compone de un carro que aporta el movimiento de excitación al péndulo y el péndulo. El péndulo se ha de considerar como una vara de masa despreciable con una masa en su punta, y la punta opuesta sujeta al carro.

Para realizar el control del sistema del péndulo invertido se hará uso de un autómata híbrido que consta de cuatro estados. Dependiendo en la energía del sistema el autómata cambiara de un estado a otro.

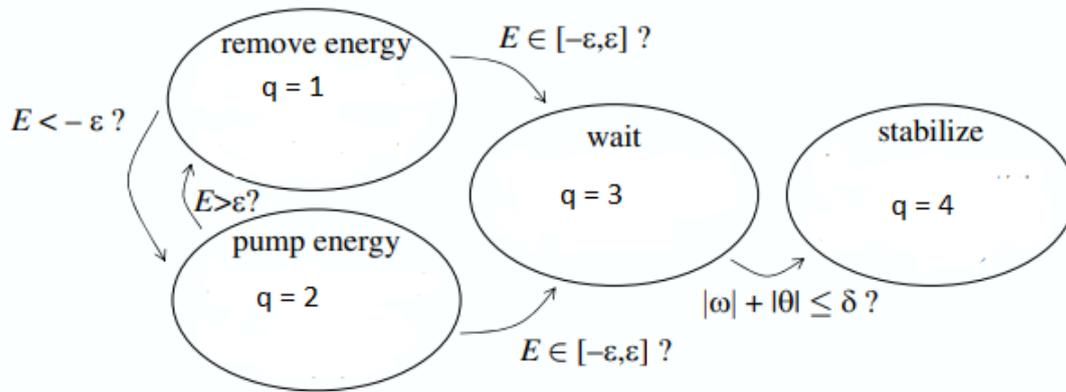


Fig. 4.23. Autómata híbrido péndulo invertido

Como se muestra en la figura 4.23 dependiendo de la posición del péndulo (consideramos que no parte nunca desde la posición deseada) parte del estado número 1 o 2. En cualquiera de los dos estados el objetivo es modificar la energía del sistema, acelerando o decelerando el carro, hasta que la energía del sistema se encuentre dentro del intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Una vez se encuentra dentro del estado número 3 se cesa la actividad del carro y se mantiene el sistema a la espera de que el péndulo se encuentre dentro de una posición cercana a la deseada, en nuestro caso 0 rad .

Una vez que el péndulo se encuentra en una posición suficientemente cercana a la posición deseada, haciendo uso de las ecuaciones

$$\ddot{\theta} + 2 \cdot \dot{\theta} + \theta = 0 \quad (4.34), \quad y$$

$$\ddot{\theta} = \sin\theta - u \cdot \cos\theta \quad (4.35)$$

llegamos a que la fuerza necesaria u para llevar el sistema a la posición deseada, aplicada en el estado 4, es la siguiente

$$u = \frac{2 \cdot \dot{\theta} + \theta + \sin\theta}{\cos\theta} \quad (4.36).$$

4.3.1 Modelado

Definimos las variables continuas de estado del sistema como

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (4.37),$$

y cuatro estados discretos

$$q(t) = \{1, 2, 3, 4\} \quad (4.38).$$

Considerando un péndulo simple cuya masa es m y su momento de inercia respecto al punto de sujeción con el carro es igual a J . Además, sea l la distancia del pivote al centro de masas. El ángulo entre la vertical y el péndulo sea θ , donde θ es positiva en el sentido de las agujas del reloj. La aceleración de la gravedad es g y la aceleración del pivote sea a . La aceleración del pivote es positiva en el sentido positivo de eje x . La ecuación del movimiento del péndulo es

$$J \cdot \ddot{\theta} - m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta + m \cdot u \cdot l \cdot \cos\theta = 0 \quad (4.39)$$

El sistema tiene dos variables de estado, el ángulo θ y la ratio de variación del ángulo $\dot{\theta}$. Es natural definir tomar como espacio de estado un cilindro. En este espacio de estados el sistema tiene dos puntos de equilibrio correspondientes a $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$, y $\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$.

El modelo dado por la ecuación número 4.39 se toman las siguientes consideraciones: se desprecia la fricción y se asume que el péndulo es un cuerpo rígido. También se ha asumido que no hay limitación en la velocidad del pivote.

La energía del péndulo sin controlar ($u = 0$) es

$$E = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot l \cdot (\cos\theta - 1) \quad (4.40).$$

Su valor es 0 cuando el péndulo se encuentra en la posición vertical. El modelo dado por la ecuación numero 4.39 tiene cuatro parámetros: el momento de inercia J , la masa m , la longitud l y la aceleración de la gravedad g . Tomando la máxima aceleración del pivote como

$$u_{max} = \max|u| = n \cdot g \quad (4.41).$$

Tomando la variable normalizada

$$w_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot l}{J}} \quad (4.42),$$

y la variable

$$\tau = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot l}{J}} \cdot t = w_0 \cdot t \quad (4.43),$$

y tomando

$$u = \frac{a}{g} \quad (4.44).$$

La ecuación del movimiento del péndulo de la ecuación 4.39 queda de la siguiente manera

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} - \sin\theta + u \cdot \cos\theta = 0 \quad (4.45)$$

donde $|u| \leq n$. La energía total normalizada del sistema sin controlar ($u = 0$) es

$$E_n = \frac{E}{m \cdot g \cdot l} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \cos\theta - 1 \quad (4.46).$$

La energía E del péndulo sin controlar es dada por la ecuación número 4.40. Para llevar a cabo el control por energía es necesario comprender como la energía es influenciada por la aceleración del pivote. Calculando la derivada de la energía respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{dE}{dt} = J \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} - m \cdot g \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta = -m \cdot a \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta = (-u \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta)_n \quad (4.47),$$

donde la ecuación número 6.6 ha sido usada para llegar a la segunda igualdad.

La aceleración u toma los siguientes valores dependiendo del estado discreto en el que se encuentre:

- Si el estado discreto es $q = 1$

$$u = \frac{w}{1 + |w|} \cdot \cos\theta \quad (4.48)$$

- Si el estado discreto es $q = 2$

$$u = \frac{-w}{1 + |w|} \cdot \cos\theta \quad (4.49)$$

- Si el estado discreto es $q = 3$

$$u = 0 \quad (4.50)$$

- Si el estado discreto es $q = 4$

$$u = \frac{2 \cdot \dot{\theta} + \theta + \sin\theta}{\cos\theta} \quad (4.51)$$

Para poder llevar a cabo el control necesitamos conocer los valores de ε y δ validos para que el control sea satisfactorio.

La constante δ debe ser lo suficientemente pequeña para que la aceleración u se mantenga dentro del rango $[-1, 1]$ para cualquier solución dentro del estado discreto de estabilización, estado 4. Para obtener el valor de δ , teniendo en cuenta que en este estado tenemos:

$$\ddot{\theta} + 2 \cdot \dot{\theta} + \theta = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \theta(t) = \tau \cdot (e^{-\tau} + e^{-\tau}) \cdot \theta_0 + \tau \cdot e^{-\tau} \cdot w_0 \\ \dot{\theta}(t) = -\tau \cdot e^{-\tau} \cdot \theta_0 - \tau \cdot e^{-\tau} \cdot w_0 + e^{-\tau} \cdot w_0 \end{cases}$$

donde τ denota el tiempo transcurrido desde que el sistema entra en el estado y θ_0 y w_0 los valores iniciales de θ y $\dot{\theta}$. Desde que $\tau \cdot e^{-\tau} \leq e^{-1}$, para todo $\tau \geq 0$, se concluye en este modo

$$|\theta(t)| \leq (e^{-1} + 1) \cdot |\theta_0| + e^{-1} \cdot |w_0| \leq (e^{-1} + 2) \cdot \delta,$$

$$|\dot{\theta}(t)| \leq e^{-1} \cdot |\theta_0| + (e^{-1} + 1) \cdot |w_0| \leq (e^{-1} + 2) \cdot \delta,$$

donde los límites para el termino δ resultan del hecho de que el sistema cuando entra en el estado de estabilización necesariamente tenemos $|w_0| \leq \delta$ y $|\theta_0| \leq \delta$. Por lo tanto

$$|u(t)| = \left| \frac{2 \cdot \dot{\theta} + \theta + \sin\theta}{\cos\theta} \right| \leq \frac{4 \cdot (e^{-1} + 2)\delta}{1 - (e^{-1} + 2)^2 \cdot \delta^2},$$

donde usamos el hecho de que $|\sin\theta| \leq |\theta|$ y $|\cos\theta| \geq 1 - \frac{\theta^2}{2}$, para todo θ . Para mantener $|u(t)| \leq 1$, es suficiente elegir un $\delta > 0$ de tal modo que

$$\frac{4 \cdot (e^{-1} + 2)\delta}{1 - (e^{-1} + 2)^2 \cdot \delta^2} \leq 1 \leftrightarrow \delta^2 + \frac{4 \cdot \delta}{e^{-1} + 2} - \frac{1}{(e^{-1} + 2)^2} \leq 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{-\sqrt{5} - 2}{e^{-1} + 2} \leq \delta \leq \frac{\sqrt{5} - 2}{e^{-1} + 2} \approx 0.099.$$

La constante ε debe ser lo suficientemente pequeña para que el péndulo entre en la región $|w| + |\theta| \leq \delta$ en un tiempo finito, tras entrar en el estado de espera número 3.

Suponemos que el sistema antes entra en el estado de espera con energía positiva $0 \leq E \leq \varepsilon$. Entonces debemos asegurarnos de que la energía no es demasiada alta para transitar al estado de estabilización numero 4 cuando el péndulo cruza $\theta = 0$, o antes. Cuando $\theta = 0$, tenemos

$$E|_{w=0} = \frac{w^2}{2} \leq \varepsilon,$$

y, por lo tanto

$$|w| + |\theta| = |w| \leq \sqrt{2 \cdot \varepsilon}.$$

Eligiendo $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeña de tal modo que

$$\sqrt{2 \cdot \varepsilon} \leq \delta \leftrightarrow \varepsilon \leq \frac{\delta^2}{2},$$

por lo que se garantiza el acceso al modo de estabilización ya que al menos en la cúspide tenemos

$$|w| + |\theta| = |w| \leq \sqrt{2 \cdot \varepsilon} \leq \delta$$

Suponiendo ahora que el péndulo entra el estado de espera con energía negativa $-\varepsilon \leq E \leq 0$. Entonces se tiene que asegurar que la energía no es demasiado pequeña como para entrar en el estado de estabilización cuando el péndulo alcanza su cúspide con $w = 0$, o antes. Cuando $w = 0$, tenemos

$$E|_{w=0} = \cos\theta - 1 \geq -\varepsilon \leftrightarrow \cos\theta \geq 1 - \varepsilon$$

y para poder alcanzar el estado de estabilización, necesitamos

$$|w| + |\theta| \leq \delta.$$

Eligiendo $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño de tal modo que

$$\cos\delta \leq 1 - \varepsilon \leftrightarrow \varepsilon \leq 1 - \cos\delta$$

garantizamos que el transita hacia el estado de estabilización por que al menos en la cúspide tenemos que $\cos\theta \geq 1 - \varepsilon \geq \cos\delta$ y por lo tanto $|\theta| \leq \delta$ como se desea.

Combinando las dos restricciones de energía, tanto como si es positiva como negativa llegamos a la conclusión de que ε debe satisfacer:

$$\varepsilon \leq \min \left\{ \frac{\delta^2}{2}, 1 - \cos\delta \right\}.$$

Por último, una solución simple para la singularidad en $\theta = \pi$ y $w = 0$ consiste en añadir un estado extra con $u = 1$ desde el que el sistema transita al estado de agregar energía tan pronto como alcance un vecino cercano a $\theta = \pi$ y $w = 0$. El sistema híbrido siempre se inicializará en este modo. El controlador híbrido resultante se muestra en la figura 4.24.

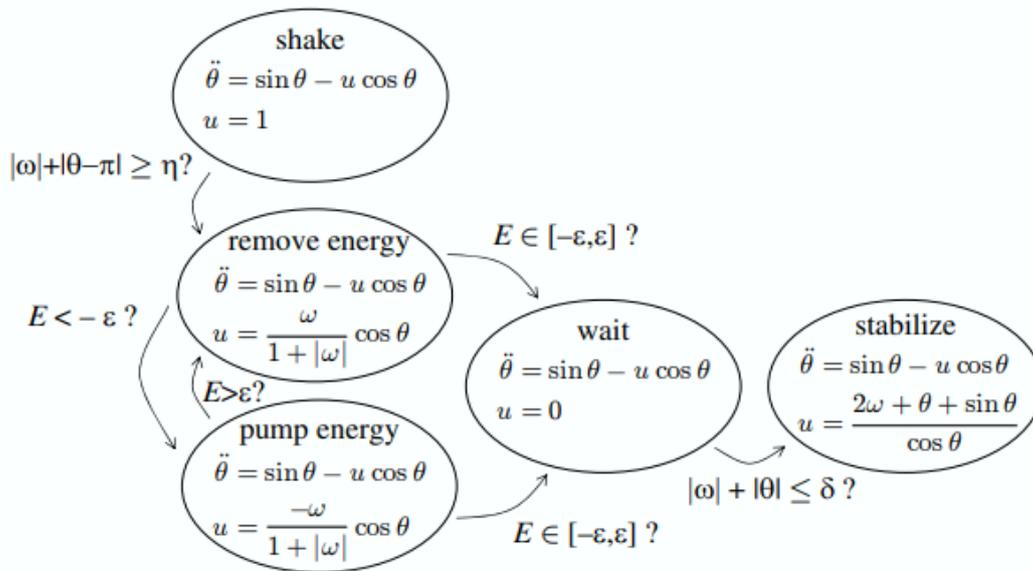


Fig. 4.24. Autómata híbrido péndulo invertido con estado de excitación añadido

4.3.2 Simulación

Para llevar a cabo la simulación dentro de la herramienta de MATLAB *HyEQ* se han tomado los siguientes valores mostrados en la tabla 4.14.

<i>Parametro</i>	<i>Valor</i>
η	0.5
ε	0.004
δ	0.099

Tabla. 4.14

Las condiciones iniciales para el sistema toman los valores que se muestran en la tabla 4.15.

<i>Parametro</i>	<i>Valor</i>
$\theta(rad)$	π
$\dot{\theta}(rad \cdot s^{-1})$	0
q	1

Tabla. 4.15

Para llevar a cabo la simulación se ha definido un horizonte de tiempo para la simulación igual a

$$TSPAN = [0 \ 100]$$

, y un horizonte para los saltos a realizar durante la simulación igual a

$$JSPAN = [0 \ 100].$$

La prioridad de salto se ha configurado de tal modo que el flujo del sistema tenga prioridad.

Si se quiere estudiar la estabilidad del sistema tal y como se describe en el capítulo 2 mediante la ecuación de Lyapunov

$$W(t) = \frac{1}{2} \cdot \theta^2 + \frac{1}{2} \cdot w^2 \quad (6.19),$$

se observa en la figura 4.28 la evolución de la ecuación de Lyapunov del sistema, el sistema tiende hacia el cero por lo que se puede asumir que el sistema es estable

Una vez realizada la simulación obtenemos los siguientes resultados. En la figura 4.25 se muestra la evolución de la posición angular del péndulo a lo largo del tiempo. Se puede observar como comienza en la posición inicial igual a 180 grados y gracias a la energía aportada por el movimiento del carro comienza a oscilar el péndulo, con cada oscilación la amplitud es mas amplia hasta que consigue posicionarse en la posición angular objetivo, 0 grados.

En la figura 4.26 se observa la evolución de la velocidad angular a lo largo del tiempo, comienza teniendo un valor inicial nulo, tras un impulso generado por el carro la velocidad comienza a variar entre valores positivos y negativos debido a la oscilación del péndulo. Una vez el péndulo alcanza la posición deseada la velocidad se establece de nuevo en cero.

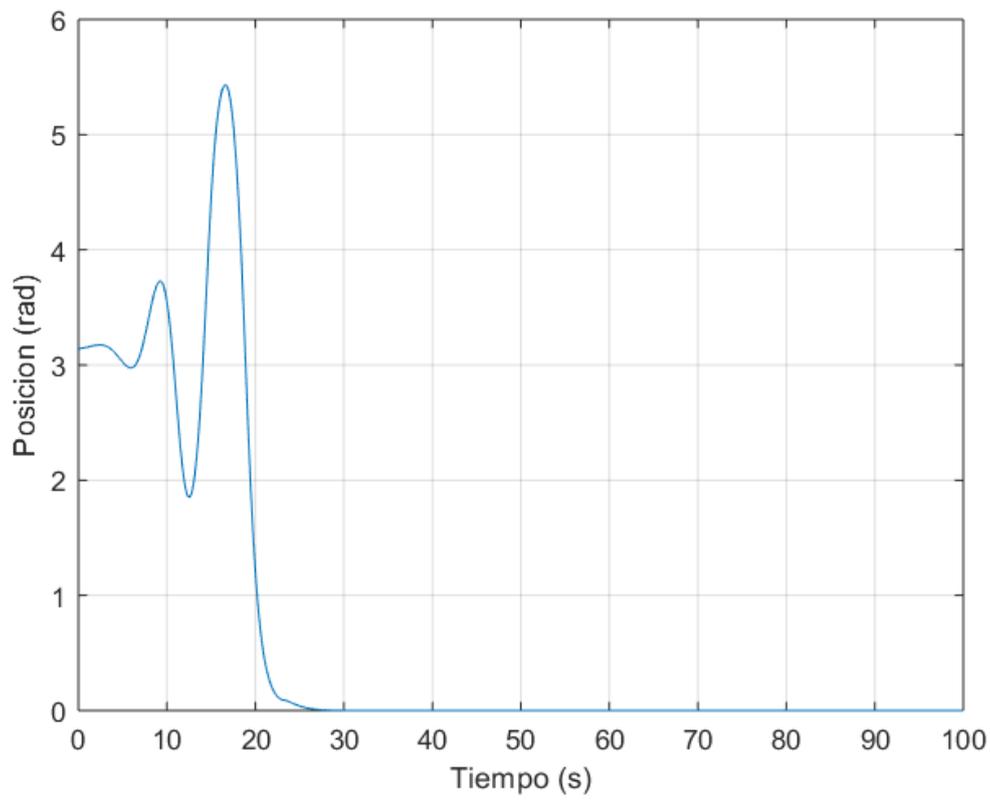


Fig. 4.25. Evolución de la posición angular frente al tiempo.

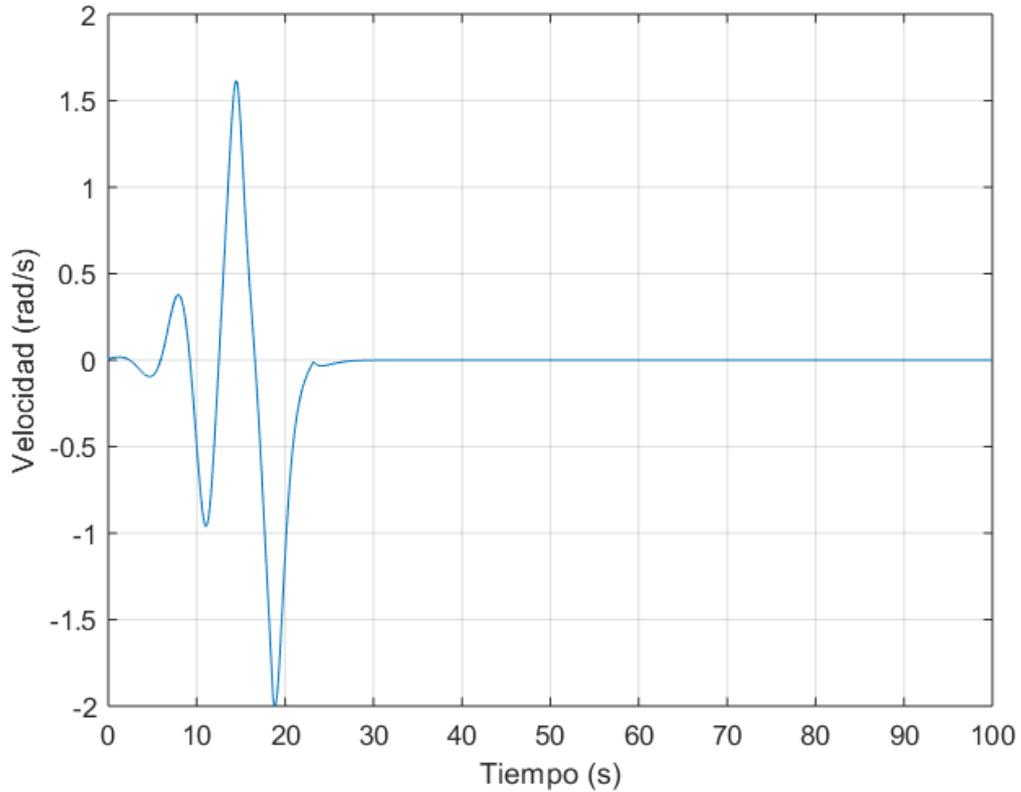


Fig. 4.26 Evolución de la velocidad angular frente al tiempo.

En la figura 4.27 se muestra la evolución de los estados discretos del sistema a lo largo del tiempo. El sistema comienza en el estado discreto número 1, tras aportar un impulso suficiente para que el péndulo pueda abandonar la posición inicial el sistema avanza al estado 3. En el estado 3 el carro aporta energía al sistema haciendo posible el movimiento del oscilante del péndulo hasta que la energía del péndulo es suficiente para poder llegar al estado número 4. En el estado número cuatro el carro no aporta energía al sistema y se mantiene a la espera de que el sistema se estabilice y logre avanzar al estado número 5 en el cual se puede considerar que el péndulo se encuentra en la posición deseada.

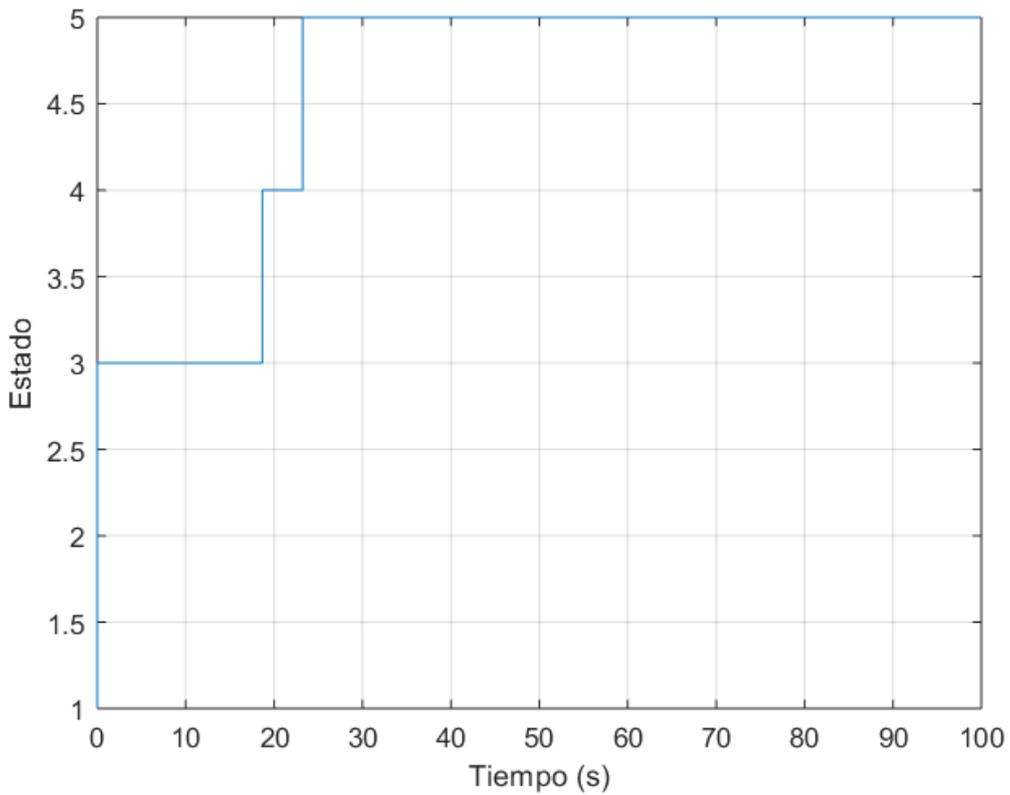


Fig. 4.27. Evolución discreta del sistema.

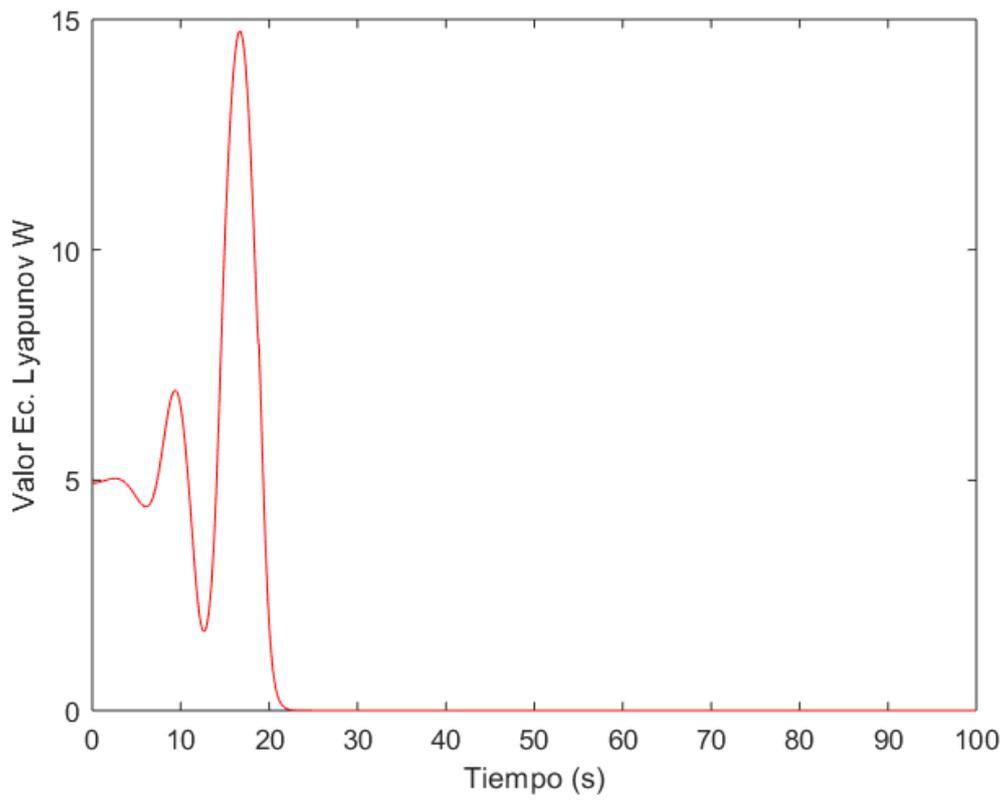


Fig. 4.28. Función de Lyapunov para el análisis de la estabilidad.

5. Conclusiones.

A lo largo del desarrollo del proyecto se han expuesto numerosas propiedades y ventajas de los sistemas dinámicos híbridos y se han probado con los diferentes sistemas analizados.

Como se ha podido observar en el estudio del sistema de la caja de cambios automática los sistemas dinámicos de control nos permiten realizar acciones de control más flexibles y precisas respecto a la dinámica del sistema y con una complejidad no muy alta. La descripción del sistema mediante un autómata híbrido nos permite tener una percepción clara de cómo el sistema conmuta entre las diferentes dinámicas con sus respectivas acciones de control.

El sistema de tanques interconectados, un sistema no lineal, cuyo modelado y control mediante técnicas de control clásicas puede llegar a ser bastante complejo, bajo el marco de los sistemas dinámicos híbridos se representa mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales simples, donde cada una de ellas representa el sistema bajo unas determinadas condiciones ligadas a la altura del líquido que contiene cada tanque. El sistema dinámico híbrido resultante nos permite analizar y controlar el sistema de una manera mucho más simple.

Por último, del análisis del control de la posición del péndulo invertido mediante el uso de sistemas dinámicos híbridos se puede concluir que, mediante un autómata de tan solo 5 estados discretos, como es el autómata que se ha usado para el control de posición del péndulo invertido, se ha resuelto un problema de control que mediante técnicas de control clásicas supondría una dificultad superior.

En definitiva, como se ha demostrado a lo largo del desarrollo del proyecto y basándose en los resultados obtenidos los sistemas dinámicos híbridos son una herramienta muy potente para casos particulares, sobre todo en sistemas cuya dinámica continua experimente variaciones o saltos a través del tiempo.

6. Bibliografía

- [1] Rafal Goebel, Joao Hespanha, Andrew R. Teel, Chaohong Cai, Ricardo Sanfelice, "Hybrid systems: Generalized solutions and robust stability", IFAC Proceedings Volumes, Volume 37, Issue 13, 2004.
- [2] R. Goebel, A.R. Teel, "Solutions to hybrid inclusions via set and graphical convergence with stability theory applications", Automatica, Volume 42, Issue 4, 2006, Pages 573-587, ISSN 0005-1098.
- [3] Chaohong Cai, Rafal Goebel, Ricardo G. Sanfelice, Andrew R. Teel, "Hybrid Systems: stability and control".
- [4] Brockett, R.W. "Hybrid models for motion control systems". Essays on Control: of the 35th IEEE Conference on Decision and Control. Kobe, Japan. pp. 1190-1195., 1993.
- [5] Balluchi, A., Benvenuti, L., Di Benedetto, M.D., Sangiovanni-Vincentelli, A.L. "Observability for hybrid systems". 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003. Proceedings. pp. 1159-1164., 2003.
- [6] Favela, A. "Hybrid Automata Models in Continuous-Linear Hybrid Systems Analysis", Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Intelligent Control/Intelligent Systems and Semiotics, Cambridge, MA., pp. 11-16, 1999.
- [7] Henzinger, T.A. and Ho, P-H. "HYTECH: The Cornell hybrid technology tool". Antsaklis et al. (1995). pp. 265-293, 1995.
- [8] Tavernini, L. "Differential automata and their discrete simulators". Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 11(6), pp. 665-683, 1987.
- [9] Favela, A., Alla, H., Flaus, J.M., "Modeling and analysis of time invariant linear hybrid systems", IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, 1998.
- [10] Morari, M. "Hybrid systems: theory, computation and applications". International Conference on Control and Automation, 2005. ICCA '05. Volumen 1.
- [11] Taylor, J.H. and Kebede, D. "Modeling and simulation of hybrid systems in MATLAB". IFAC 13th Triennial World Congress. Volumen J. San Francisco, CA. Pp. 275-280, 1996.
- [12] Daws, C., Oliveira, A., Tripakis, S. and Yovine, S. "The tool KRONOS". pp. 208-219, 1996. In Hybrid Systems III, Springer LNCS 1066, pp. 208--219, 1996.
- [13] Inihov, D., Kolesov, Y.B., Senichenkov, Y. "Model Vision Studium Standard version 3.0.17", Experimental Object Technologies (XJ), St.-Petersburg State Technical University, 1997.
- [14] Desphande, A., Gollu, A. and Varaiya, P. "The shift programming language and run-time system for dynamic networks of hybrid automata". Transactions on Automatic Control, Special Issue on Hybrid Systems, 1998.
- [15] Furlas, G.K., Kyriakopoulos, K.J. and Vournas, C.D. "Hybrid Systems Modeling for Power Systems". IEEE Circuits And Systems Magazine, pp. 16-23. 2004.

[16] van der Schaft, A. and H. Schumacher (2000). An Introduction to Hybrid Dynamical Systems. Vol. 251 of Lect. Notes in Contr. and Inform. Sci.. Springer.