

**SOBRE LOS MODELOS MATEMÁTICOS EN  
LA INGENIERÍA DE PROCESOS DE  
FABRICACIÓN Y SU APLICACIÓN A LOS  
PROCESOS DE FUNDICIÓN**

**Discurso del Académico electo  
Ilmo. Sr. D. Félix Faura Mateu  
leído en la sesión solemne de toma de posesión  
el día 27 de septiembre de 2005  
y contestación del Ilmo. Sr. D. Juan López  
Coronado**

# Contenido

|   |    |
|---|----|
| Introducción .....  | 5  |
| Algunas consideraciones sobre Tecnología e Ingeniería ..... | 7  |
| Sobre los modelos técnico económicos .....                  | 16 |
| Sobre modelos matemáticos en procesos de fabricación .....  | 21 |
| Consideraciones finales .....                               | 34 |
| Referencias .....   | 36 |
| Discurso de contestación .....                              | 39 |



Excmo. Sr. Presidente,  
Ilmos. Sra. y Sres. Académicos,  
Sras. y Sres.:

Quisiera comenzar mi discurso de ingreso en la Academia con un sincero agradecimiento a quienes han hecho posible que hoy pueda estar aquí tomando posesión como Académico Numerario. En primer lugar, al Prof. Miguel Ángel Sebastián, con quien di mis primeros y decisivos pasos en la actividad investigadora propia de la Ingeniería. Al Prof. Julian Szekely y a su grupo de investigación, en particular al Dr. Trapaga, quienes me acogieron en su prestigioso equipo, en el *Massachusetts Institute of Technology (MIT)*, abriendo mi mente y guiándome hacia el conocimiento de nuevos horizontes donde Ciencia, Tecnología e Ingeniería se dan la mano buscando la excelencia. Y al Prof. Julio Hernández, la mente más lúcida que he tenido oportunidad de conocer, maestro, compañero y amigo sincero con quien siempre estaré en deuda. También a todos mis compañeros de fatigas del Grupo de Investigación de Ingeniería de Fabricación de la UPCT, con quienes he compartido, durante los últimos quince años, dificultades, alegrías y, sobre todo, trabajo, mucho trabajo. Y, por supuesto, a mi familia, soporte material y espiritual sin el que nada, absolutamente nada, hubiera sido posible.

Siendo esta una Academia de Ciencias y yo el primer ingeniero electo, creo que es pertinente hacer una breve reflexión sobre Ciencia, Tecnología e Ingeniería que permita contextualizar correctamente los discursos.

No hablaré mucho de Ciencia, sería un exceso por mi parte intentar realizar alguna aportación en ese ámbito ante quienes prestigiosamente la ejercen y hoy me reciben en esta joven y docta Institución. Sin embargo, haré algunas consideraciones en torno a la Tecnología y la Ingeniería que, espero, puedan aportar alguna nueva perspectiva que contribuya a mejorar la comprensión de este universo o, al menos, de una parte de él.

Anticipándome un poco al tema central del discurso quisiera repasar, obviamente de forma figurada, alguna de las ecuaciones que rigen el universo de la Tecnología e Ingeniería, así como de las condiciones de contorno que permiten encontrar soluciones en él. Esta reflexión inicial pretende revisar las características y circunstancias en que se desarrolla la investigación y el desarrollo en estos ámbitos, a la vez que nos servirá de introducción, sin solución de continuidad, al núcleo del discurso.

Comenzaremos con unos breves comentarios desde la reflexión filosófica sobre la Tecnología, considerando que, cuanto se diga en este asunto, es extrapolable a la Ingeniería. Partimos del principio -que posteriormente se comentará con mayor detalle- de que la Tecnología es parte de la Ingeniería o,

más propiamente, una parte del sistema que “gobiernan” las ingenierías.

### **Algunas Consideraciones sobre Tecnología e Ingeniería**

Existen varias definiciones, con acepciones y connotaciones muy diversas, sobre la Tecnología. De hecho, este vocablo no ha encontrado todavía en castellano un significado unívoco, cosa que también ocurre en inglés o francés. Tampoco creo que sea posible llegar a una definición con límites muy precisos, porque los conceptos desde los que se piensan las actividades humanas pertenecen a las humanidades y, en ellas, la búsqueda de definiciones precisas desemboca, con frecuencia, en laberintos donde los límites conceptuales son difusos, permitiendo el entrecruzamiento y solapamiento.

Partiremos de una visión, aún vigente en algunos círculos académicos, sobre las características esenciales de la Tecnología y, por ende, de la Ingeniería. Según esta visión, las Tecnologías tienen que ver más con el *hacer* que con el *saber*, es decir, son instrumentales: sirven para hacer algo, para alcanzar un fin y, sobre todo, son, salvo para especialistas e ingenieros, algo que se *usa*. En segunda instancia, también se consideran como algo *artificial* -supuestamente todo lo natural es superior a lo artificioso-, y actúan en un plano *superficial*, por lo que no pueden resolver las *necesidades* de la humanidad. Por último, también son *optativas* y, por tanto, moralmente *neutrales*, es decir, el juicio moral no recae sobre ellas sino sobre el uso que sobre ellas pueda hacerse.

Evidentemente, las tres consideraciones apuntan aspectos parcialmente ciertos y, en consecuencia, presentan una imagen distorsionada, un tanto negativa y reactiva de la Tecnología.

En efecto, no es posible obviar el ámbito utilitarista en que las tecnologías pueden nacer y crecer: muchas veces se orientan al dominio del mundo, actuando de forma incisiva, cuando no agresiva, en nuestra estrategia de independencia y liberación del mundo en que vivimos. O cuando anteponen el valor de la rentabilidad al de la persona. Sin embargo, no es el cálculo racional del interés lo que define la razón de ser de la Tecnología, ni la necesidad el motor que mueve la actividad tecnológica. Aunque se actúe movido por un interés o motivo perfectamente definido, el impulso primario que mueve y provoca es la imaginación. Como irónicamente dice la segunda ley de M. Kranzberg *«la invención es madre de la necesidad y esta hija es, en ocasiones, muy mal educada»*. Todo esto sugiere que, aunque la relación entre la necesidad y la invención es muy compleja, es ésta última la causa de la primera. En consecuencia, la razón de ser de cualquier tipo de Tecnología está en nuestra curiosidad, en la conciencia de nuestros límites y en la vocación de superarlos, en nuestro deseo de organizar una vida más digna y plena. Como dijo Aristóteles: *«es indigno del hombre no cultivar un saber que le es posible»*.

En esta línea, otros filósofos nos presentan la técnica como el procedimiento más eficiente para nuestro progreso

incluso, como decía Ortega y Gasset, para buscar la felicidad: *«La idea de un mundo coincidente con el deseo es lo que se llama felicidad. El hombre se siente infeliz y, precisamente por ello, su destino es la felicidad. Ahora bien, no tiene otro instrumento para transformar este mundo en el mundo que puede ser suyo y con él coincidir que la técnica,...»*.

La exploración de horizontes, de fronteras, de nuevas realidades que cambien nuestro mundo se constituye así en la *energía interna* de la Tecnología. Quizá sólo seamos capaces de descubrir lo que ya estaba aquí, aunque fuera de nuestro alcance, que no es poco, pero esa es la verdadera causa: la capacidad de concebir, de imaginar nuevas realidades posibles.

En este sentido, la Tecnología nos recuerda permanentemente los límites de nuestro conocimiento, nos demuestra cuál es nuestra dimensión real, pero también nos muestra el camino. Un camino que se asienta no tanto en nuestras limitaciones cuanto en nuestra capacidad para responder al desafío que trasluce el deseo de vivir una vida más perfecta, aunque inevitablemente limitada, en un entorno muy complejo aunque potencialmente inteligible.

Los hitos de este camino o, lo que es igual, las grandes aportaciones de la Tecnología a la humanidad, han sido resultado del ingenio, la perseverancia, la intuición, incluso la suerte -que como decía Claude Bernard, suele favorecer a los espíritus preparados- en las que siempre ha sido absolutamente necesaria la cooperación de muchísimas personas, a las que unió el deseo de mejorar y la satisfacción por descubrir y explorar nuevas posibilidades.

En síntesis, Tecnología e Ingeniería por una parte, y Ciencia por otra, son ámbitos de actividad diferenciados, con contenidos y objetivos propios, sin embargo no se puede, ni se debe, ocultar su dinámica de colaboración.

Sobre las relaciones entre ellas, desde el punto de vista histórico, convendría recordar los casos donde la Tecnología ha precedido al establecimiento de la Ciencia que, posteriormente, le ha dado soporte. Esto fue, por ejemplo, lo ocurrido con la máquina de vapor, el artefacto tecnológico paradigmático de la Revolución Industrial que, como se ha dicho, *«fue realizado por cabezas duras y dedos inteligentes»*, y que precedió y dio origen al nacimiento de todo un cuerpo científico: la Termodinámica.

Como decíamos, la Tecnología se propone actuar sobre el mundo para someterlo a nuestras necesidades y deseos y, en consecuencia, puede decirse que su presencia es contemporánea a nuestra propia existencia, mientras que la Ciencia, hija de la filosofía, irrumpió en la historia tras un largo y complejo proceso, en el contexto de la revolución científica del Renacimiento. Si bien la influencia de las Ciencias sobre la Técnica fue muy escasa antes de la primera industrialización, ha ido creciendo de forma significativa hasta nuestros tiempos. Inversamente, resulta inimaginable el desarrollo de la Ciencia sin la colaboración de la Técnica. De hecho, en las últimas décadas resulta difícil establecer un preciso criterio de demarcación entre estos dos ámbitos, existiendo una relación

recíproca en la que, probablemente, la Ciencia obtiene de la Tecnología tanto como ésta se beneficia de aquella.

Avanzando un poco más, podemos identificar las diferencias esenciales de lo que hasta ahora hemos analizado como un continuo: Tecnología e Ingeniería. Una forma muy sencilla de apreciar las características propias de cada una de ellas es la identificación de los recursos que se procesan en cada ámbito.

Desde esta perspectiva, existe una diferencia esencial entre Tecnología e Ingeniería. La acción tecnológica, aunque en un principio sólo pudo realizarse sobre simples procesamientos de materia, ha evolucionado con el ser humano hasta darnos la capacidad para procesar no sólo materia sino también energía e información. Sobre estos tres recursos, y por medio de los adecuados procesos, se puede desarrollar cualquier tecnología por muy compleja que sea.

La actividad, en el ámbito de la Ingeniería implica, sin embargo, el procesamiento de más recursos. En este caso, a los tres recursos básicos de la Tecnología, se añaden dos nuevos: los humanos y los económicos, que deben ser procesados, junto con los anteriores, para alcanzar los objetivos propios de cualquier Ingeniería.

Así pues, en cualquier definición rigurosa de Ingeniería, desde la más antigua a la más actual, aparece el recurso humano y el económico, presentándose la Ingeniería como una actividad que requiere, tanto de conocimientos científicos

y de creatividad, como del adecuado conocimiento del contexto en el que se desarrolla.

Existe también otra característica particular de la Ingeniería que introduce diferencias sustanciales con respecto a los ámbitos anteriormente comentados, y que no es una cuestión menor. Nos referimos a la cuestión del método. Hay diversos autores que consideran que la imagen tradicional de “método científico” no sería aplicable, generalmente, como método de trabajo en Ingeniería. Es ésta una cuestión compleja que alcanza al propio concepto de Ciencia, baste recordar a Popper y su afirmación de que no existe propiamente un método para la Ciencia. En cualquier caso, en este contexto, se pueden comprender las palabras de B. Vaughn, cuando afirma que el método de trabajo en Ingeniería consistiría en la «*estrategia para causar, con los recursos disponibles, el mejor cambio posible en una situación incierta o pobremente estudiada*». La estrategia estaría formada por toda una serie de momentos heurísticos que conducen a *una* solución. En vez de buscar la respuesta a un problema, como lo hace el científico, para lo cual busca una hipótesis que luego contrasta, el ingeniero busca *estrategias heurísticas* que se construyen desde una perspectiva pragmática, teniendo en cuenta los contextos de aplicación.

Debe notarse que la definición comentada de método implica algo más: se trata del *mejor cambio posible* en una situación incierta o pobremente estudiada, y este *mejor* implica una valoración que conecta con la esfera de lo social. En consecuencia, la Ingeniería sobrepasa el puro conocimiento de la realidad material y se conecta con valores humanos y, por ende, sociales. Presenta, por tanto, la posibilidad de límites

éticos, que encuentran su fundamento en la dignidad de la persona y, por tanto, en un profundo sentido de la convivencia social. Aquí radica otra de las diferencias esenciales de la Ingeniería respecto de la Ciencia: la interacción con la sociedad. Desde esta perspectiva, la razón de ser de la Ingeniería es la construcción de lo que se definen como *sistemas tecnológicos* que son precisamente los que producen las grandes transformaciones sociales.

T. Hughes demostró cómo los sistemas tecnológicos contienen complejos y desordenados componentes que interactúan en la solución de problemas. Los componentes de los sistemas tecnológicos se pueden agrupar en tres aspectos completamente diferentes que interactúan: el cultural, el organizativo y el puramente técnico. Hughes explica la acción de la Ingeniería -en el sentido interacción entre tecnología y sociedad- a partir del concepto de *momentum tecnológico*. Según este autor, cuando el sistema es joven, el entorno configura el sistema. A medida que el sistema va madurando y se vuelve más complejo va cobrando impulso o *momentum*, siendo cada vez menos configurado por su entorno, pudiendo llegar el momento en que el sistema se convierte en el elemento que más configura el entorno. En otras palabras, el sistema configura la sociedad y es configurado por ella.

Así pues, lo social y lo técnico se interrelacionan en los sistemas tecnológicos, en lo que se ha llamado un *tejido sin costuras*. Pero se trata de una interacción asimétrica en el tiempo de la que son responsables los ingenieros, ya que son capaces de resolver problemas organizativos, de encontrar recursos económicos, o de responder a condicionamientos políticos. Es este el sentido en el que es posible ver en T.

Edison un icono de la ingeniería: el constructor de un sistema tecnológico -el sistema eléctrico de potencia- capaz de combinar conocimientos y capacidad organizativa para la resolución de problemas muy complejos, consiguiendo conciliar los intereses financieros, políticos y sociales necesarios para su desarrollo.

La idea del ingeniero como constructor de sistemas tecnológicos ha sido planteada de manera equivalente por autores como M. Callon en términos de ingeniero-sociólogo, en el sentido de que logra aunar o interesar diferentes agentes sociales en un proceso de innovación, acercando a todos los componentes que entran en juego en el sistema. Igualmente, C. Mitchan se ha referido a los ingenieros como los filósofos no reconocidos de la postmodernidad, en el sentido de que lo distintivo de la base material ésta es una materialidad ingenieril.

En consecuencia, el ingeniero y la Ingeniería no limitan su actividad a una relación con la Tecnología en sentido restringido -conocedor en profundidad de ellas y con capacidad de crearlas o mejorarlas- sino que, de forma mucho más general, el ingeniero actúa en un contexto social en varias direcciones, con diversos agentes entre los que se encuentra la Tecnología. Es a partir de los sistemas tecnológicos como unidad de análisis como mejor se entienden los efectos de la Ingeniería sobre la sociedad y, por tanto, esa interacción comentada anteriormente, donde la Tecnología configura la sociedad y es configurada por ella.

En este enfoque sistémico los sistemas tecnológicos se encuentran en la base de los cambios de la sociedad. Estos cambios no implican sólo productos y servicios nuevos, sino que afectan directa o indirectamente a todo el tejido social. Para referirse a estas transformaciones, desde una perspectiva histórica, C. Freeman, empleando la terminología difundida por T. S. Kuhn, en su obra *La estructura de la revoluciones científicas*, habla de *paradigma tecnoeconómico*, entendido como un tipo ideal de organización productiva que define el entorno de combinaciones técnicas y económicas más eficiente durante un período de tiempo dado, y sirve, en consecuencia, como norma implícita orientadora de las decisiones de inversión y de innovación tecnológica.

Con esta concepción se pueden explicar los grandes ciclos históricos de la humanidad, pudiéndose visualizar, mediante *ondas de ciclo largo*, cómo un paradigma tecnoeconómico ha sucedido a otro mediante una revolución tecnológica: desde la mecanización y la revolución industrial hasta la microelectrónica y la revolución de la sociedad del conocimiento, pasando por la producción en masa y la revolución de las fuentes de energía. En todos ellos, el factor crítico que ha propiciado el cambio de paradigma tecnoeconómico ha sido una ingeniería capaz de desarrollar un nuevo sistema tecnológico.

Esta reflexión sobre la Ingeniería nos permite conectar con una línea de investigación: la modelización técnico-económica en ingeniería de procesos, a la que he dedicado parte de mi actividad investigadora y cuyos objetivos se incardinan perfectamente en el concepto de Ingeniería anteriormente comentado.

### **Sobre los Modelos Técnico Económicos en la Ingeniería de Procesos**

Las necesidades de análisis y evaluaciones cuantitativas - predictivas y preventivas- en la ingeniería de procesos han propiciado en los últimos años un fuerte auge de las técnicas de modelización. Los modelos, aunque no satisfacen plenamente la captura de las intrincadas relaciones tecnológicas, económicas y humanas que controlan el comportamiento de un sistema tecnológico, son una de las herramientas que presentan más posibilidades a un coste razonable.

En general, un modelo técnico-económico se puede definir como una variación de los modelos de proceso convencionales, con particular énfasis en la captura de las implicaciones entre las variables tecnológicas y las económicas, aplicable a tecnologías existentes y a tecnologías nuevas o emergentes. Fueron desarrollados en el MIT a principios de la década pasada y, en una primera aproximación metodológica, se podría decir que éstos tratan de vincular dos disciplinas de

modelado: los modelos matemáticos “predictivos” y los modelos de costes “descriptivos”.

Con el desarrollo de las computadoras, los modelos de costes “descriptivos” empezaron a adquirir un cierto rigor científico. Se ha evolucionado del tratamiento del coste con ecuaciones simplistas basadas en la mano de obra y el material, al desarrollo de complejas ecuaciones de costes que capturan los múltiples factores que les afectan y los interrelacionan. A pesar de que los nuevos modelos de costes representan un gran avance, son todavía inadecuados en muchas situaciones, en particular cuando se tratan de tecnologías nuevas, emergentes, o insuficientemente comprendidas, o en procesos de fabricación no optimizados. A pesar de la exactitud computacional, estas ecuaciones no aportan bases o guías para estimar las variables técnicas del proceso que ellas incorporan.

En cuanto a los modelos matemáticos “predictivos”, su evolución ha sido muy distinta dependiendo de la comunidad a la cual prestaran su servicio. Se pueden clasificar en función de la utilidad del modelo -modelos de investigación o de control-, o en función de las técnicas de resolución -analíticas o numéricas-. Sin embargo, la clasificación más usual es la que establece los siguientes tres grupos: modelos teóricos, también denominados modelos mecanicistas; los modelos semiempíricos y los modelos empíricos, estocásticos o de caja negra. Cuando el ámbito de actuación es exclusivamente un sector productivo se les suelen clasificar como modelos de proceso y producto.

En un determinado sistema, con los algoritmos que describen -por ejemplo- la transferencia de calor y los

fenómenos de transporte asociados a un proceso de fabricación, se puede desarrollar un modelo matemático capaz de predecir variables tales como el tiempo del ciclo, requerimientos de energía, o consumo de materiales. Por otra parte, con estas variables se puede desarrollar también un modelo para describir, con suficiente precisión, los costes de los materiales, la energía o el trabajo asociado al proceso. El reto estará en desarrollar un macromodelo que integre ambos tipos de modelos. Con este enfoque se puede tener una herramienta de extraordinario potencial con la que el coste de los procesos insuficientemente comprendidos puede ser estimado, y pueden ser establecidas estrategias para optimizar estos procesos.

Comentaremos a continuación algunas de las aportaciones de mi grupo de investigación en este ámbito, las cuales se han orientado, fundamentalmente, a un proceso de fabricación, aunque con las debidas modificaciones podrían ser extensibles a otros muchos procesos.

Los procesos de conformado por fusión son uno de los procesos de fabricación más antiguos que se conocen -se tiene constancia de su uso desde el año 4000 a. C.- aunque todavía persiste un conocimiento científico muy limitado de ellos. Gran parte de este retraso se debe, fundamentalmente, a la natural dificultad de los complejos fenómenos que evolucionan en el proceso -metalúrgicos, térmicos o fluidodinámicos- así como a la interacción y el acoplamiento entre ellos. No obstante, el reciente desarrollo de diferentes técnicas computacionales ha contribuido notablemente al progreso del estudio de las diferentes fases del ciclo productivo -lo que está dotando de mayor flexibilidad a estos

procesos- y está permitiendo disponer de una mayor capacidad de predicción de defectos y, por tanto, de su corrección.

Desde principios del siglo XX se están desarrollando nuevas tecnologías que permiten automatizar y reducir los tiempos de producción, introduciendo a gran velocidad el metal líquido en un molde metálico generalmente refrigerado. Estos procesos, denominados procesos de Fundición por Inyección a Alta Presión, presentan en la actualidad un gran interés en los sectores de automoción y aeronáutico. En ambos, donde existe una gran demanda de aleaciones ligeras de aluminio, tienen una especial relevancia todas las cuestiones relativas a costes y calidad del producto.

Las previsiones a corto y medio plazo indican que el consumo de las aleaciones de aluminio en el sector de automoción seguirá creciendo. Es sabido que ellas son las únicas aleaciones metálicas cuya utilización ha experimentado un crecimiento importante y sostenido en las dos últimas décadas. A pesar de la reducción de peso de los automóviles en los últimos veinte años -un 16%, aproximadamente-, las aleaciones de aluminio han incrementado su presencia en los automóviles en un 44% en peso. Algunas de las causas que han impulsado el crecimiento de las aplicaciones de estas aleaciones en el sector de automoción son las relacionadas con su atractivo para satisfacer algunos de los objetivos prioritarios de la industria de automoción y sus consumidores: reducción del consumo energético -del orden de 1 litro de combustible por cada 100 km-, posibilidades de reciclado, seguridad -sistemas de frenado y dirección más seguros-, etc.

Además del elevado ritmo de producción que permiten los procesos de fundición por inyección a presión, los aspectos relacionados con la precisión dimensional, el acabado

superficial, la capacidad para reproducir detalles y el bajo coste han hecho que estos procesos adquieran una posición importante dentro de los procesos de fabricación en general, y en la industria de automoción en particular.

Frente a las ventajas mencionadas, un problema muy difícilmente evitable en estos procesos es el derivado de la mayor tendencia a la aparición de niveles elevados de porosidad en las piezas. Así, en piezas con exigencias de funcionamiento poco severas la disminución de la calidad por porosidad se ve compensada por las grandes ventajas antes mencionadas, pero cuando los requerimientos funcionales son mayores, la reducción a un límite admisible del nivel de porosidad es un objetivo esencial que requiere la utilización de tecnología compleja y el conocimiento y control de los factores que le afectan.

Se plantea pues un problema ciertamente complejo. La gran demanda de piezas de aleaciones ligeras en sectores industriales muy importantes impulsa el desarrollo de los procesos de fundición. Esto genera una dinámica competitiva entre las diversas tecnologías existentes y las emergentes por la supremacía en estos dinámicos sectores. Obviamente, cada tecnología presenta unas características propias, tales como tiempos de producción, calidad del producto o precisión dimensional, que les pueden hacer más o menos atractivas en un determinado escenario.

Para poder tomar decisiones sobre el proceso más adecuado, en un contexto inestable y en permanente evolución, se requiere disponer de modelos técnico-económicos eficientes especialmente adaptados a estos ámbitos, lo que justifica la

necesidad de investigación y desarrollo de dichos modelos. Pero para poder disponer de éstos modelos es necesario comprender suficientemente todos los fenómenos que provocan su limitación en aspectos de la calidad como los comentados anteriormente, lo que requiere un cierto conocimiento de asuntos tales como el flujo del metal fundido, la solidificación o la transferencia de calor -que a su vez están influenciados por otros factores tales como el material y el diseño del molde, el material de la pieza que se va a fabricar o la máquina empleada-.

En consecuencia, existe un problema de Ingeniería en torno a estos procesos de fabricación que demanda la investigación de diferentes tipos de modelos capaces de poder aportar soluciones, criterios, pautas o guías de su propio desarrollo. A continuación, nos centraremos en las aportaciones realizadas sobre los modelos matemáticos aplicados a estos procesos, quedando fuera las contribuciones sobre modelos de costes y la integración en modelos técnico-económicos que permiten establecer estrategias de mejora del proceso.

### **Sobre Modelos Matemáticos en Procesos de Fabricación por Fundición**

Como se ha comentado, en los procesos de fundición de metales aparecen diversos problemas asociados, tanto a la ingestión y el atrapamiento de aire como a la solidificación del metal, de los que dependen, en gran medida, las características de las piezas fabricadas y que tienen importancia variable en diversas etapas de dichos procesos. Estos problemas vienen determinados, para un tipo de proceso y condiciones de

operación dados, por las propiedades de la aleación y la termofluidodinámica del proceso, en particular por la dinámica y los fenómenos interfaciales que tienen lugar en las zonas de separación entre aire, metal -en sus distintas fases y componentes- y paredes interiores de los diversos elementos del sistema de fundición. En dichas zonas de separación -en particular, en la superficie de separación aire-metal o entrefase entre metal fundido y solidificado-, que obviamente evolucionan con el tiempo, tienen lugar simultáneamente fenómenos físicos y metalúrgicos muy complejos, con diversas escalas espaciales y temporales asociadas, cuyo estudio presenta en general una gran dificultad.

El proceso de fundición por inyección a presión constituye un buen ejemplo en el que los métodos de simulación numérica deben afrontar especiales dificultades, asociadas a la complejidad de los fenómenos físicos que tienen lugar durante las distintas etapas del proceso. Estos fenómenos están en general fuertemente acoplados entre sí, y tienen lugar en escalas características que pueden ser muy dispares, lo que introduce una complejidad adicional. Incluso prescindiendo de los efectos de transmisión de calor, solidificación y tensión superficial, el movimiento de un metal en estado líquido en la cámara de inyección de una máquina de fundición puede ser muy complejo, excepto en la etapa inicial de la inyección, en la que es posible utilizar modelos analíticos. Cuando las condiciones de operación no son óptimas, la aparición de fenómenos de rotura de la ola de metal fundido o de impacto de ésta contra las paredes de la cámara da lugar a que se produzca la transición a la turbulencia, una fuerte distorsión de la superficie de separación metal-aire y, como

resultado de la ingestión de aire en el metal en forma de burbujas y la generación de gotas, la formación de un complejo flujo bifásico. En la entrada al molde, debido a la presencia de aire atrapado en el metal fundido en la cámara, o como consecuencia de la inestabilidad del chorro de metal, puede producirse un complejo flujo bifásico en forma de *spray*. En todos los casos, la aparición de gotas y burbujas se debe a la generación de estructuras en el flujo con escalas lo suficientemente pequeñas como para que los efectos de la tensión superficial sean relevantes.

La existencia de diferentes escalas en el movimiento de metal fundido y aire complica la física del problema y, consecuentemente, su simulación numérica. Si la inyección fuese lo suficientemente lenta como para que el flujo fuese laminar, podrían resolverse numéricamente, de forma directa, las ecuaciones de conservación que describen el flujo. Para ello es necesaria la utilización de algoritmos numéricos a la vez robustos, precisos y eficientes, cuyo desarrollo, a pesar de que se trate de un flujo laminar, puede suponer una considerable dificultad. En realidad, durante la inyección es frecuente que el flujo sea turbulento, caracterizado por la existencia de estructuras de flujo -remolinos- de diferentes escalas. El tamaño de la escala más pequeña disminuye al aumentar el número de Reynolds, lo que hace que aumente el coste computacional necesario para resolver todos los detalles del flujo al aumentar la velocidad de inyección. Si el número de Reynolds fuese relativamente bajo, aún podría ser viable resolver el flujo en todas sus escalas de forma directa -es decir, resolver las ecuaciones no estacionarias de Navier-Stokes, que describen fielmente el flujo-. Para números de Reynolds moderados, la simulación directa resulta muy costosa y frecuentemente inviable en la práctica. La alternativa puede

consistir en resolver de forma directa las grandes escalas del flujo, utilizando un modelo de tipo estocástico para resolver las escalas más pequeñas. También es posible utilizar un modelo estocástico basado en la resolución de las ecuaciones de conservación promediadas, que requiere modelar correlaciones de magnitudes fluctuantes para lo que, generalmente, se hace uso de ecuaciones de conservación en derivadas parciales adicionales para magnitudes que caracterizan la turbulencia.

La existencia de dos fases en el flujo complica extraordinariamente su resolución numérica, tanto en el caso de que se realice una simulación directa (identificando en todo instante la forma de la superficie de separación metal-aire, lo que puede hacerse sólo si el flujo es laminar o con un nivel de turbulencia suficientemente bajo) como cuando debe recurrirse a la utilización de un modelo de turbulencia para flujos bifásicos.

Los fenómenos de transferencia de calor y solidificación introducen una complicación adicional importante. La estructura microscópica que adopta el metal al solidificarse y, en particular, el tamaño de la escala morfológica -por ejemplo, el espacio entre dendritas-, depende del balance entre los procesos de transporte que intervienen, asociados a distintas escalas características: térmica, convectiva, de transporte de soluto y longitud capilar en un sistema binario eutéctico. La existencia de un frente de solidificación introduce una nueva superficie de separación entre dos fases de propiedades muy diferentes, cuyo seguimiento forma parte del problema de resolución de las ecuaciones que describen la evolución de las dos fases. Hasta época reciente, la mayoría de los estudios se

han centrado en simular los procesos de llenado y solidificación con objeto de predecir los defectos macroestructurales. Sin embargo, para mejorar la capacidad de predicción de las especificaciones mecánicas de las piezas fabricadas y dependiendo del alcance del estudio que se desee realizar, puede ser necesario tener en cuenta aspectos microestructurales. En particular, se ha encontrado que la microporosidad tiene un efecto importante en las propiedades del material en relación con la resistencia frente a tensiones y fatiga.

Existen, por otra parte, estudios que tratan de acoplar modelos macroscópicos de flujo y transferencia de calor con modelos microscópicos de formación de dendritas y microporosidad. Además, los avances en dinámica de fluidos computacional han proporcionado herramientas nuevas y muy potentes para analizar el proceso de solidificación y la predicción de porosidad de piezas fundidas. Estas nuevas técnicas de análisis, junto con el avance en el conocimiento de los mecanismos de formación de poros, han permitido utilizar, desde principios de los años ochenta hasta la actualidad, métodos de análisis cada vez más complejos que resuelven el acoplamiento de los fenómenos de transferencia de calor, fluidodinámicos y de solidificación. Sin embargo, a la ya comentada dificultad que en algunos casos puede presentar la simulación a nivel macroscópico, debe añadirse la no menor complejidad de la simulación microscópica del proceso de solidificación y, sobre todo, la diversidad de escalas en las que tienen lugar los complejos fenómenos que ocurren microscópicamente y macroscópicamente, lo que hace absolutamente inviable resolver el problema en su conjunto mediante simulación directa.

Dada la extraordinaria complejidad del proceso objeto de estudio, en mi grupo de investigación nos hemos centrado preferentemente en algunos aspectos concretos de los problemas a los que acabo de referirme. En primer lugar, hemos estudiado la contribución que representa el atrapamiento de aire en la cámara de inyección en el nivel de porosidad en la pieza fabricada, y las condiciones óptimas de operación que minimizan el volumen de aire atrapado. Para ello ha sido necesario analizar el flujo en la cámara haciendo uso de distintos tipos de modelos, analíticos y numéricos, así como mediante la realización de experimentos. Actualmente, la investigación se centra en los efectos térmicos y de solidificación.

Para condiciones de operación en la cámara de inyección no muy alejadas de las óptimas, hemos desarrollado modelos teóricos basados en la aproximación de aguas poco profundas, que pueden ser resueltos analíticamente o mediante la utilización de técnicas numéricas sencillas -basadas en el método de las características-. Estos modelos están posibilitando una mejora sustancial del conocimiento del proceso. Por ejemplo, han permitido la determinación de límites en las condiciones de operación y de leyes de movimiento del pistón en la cámara de inyección que reducen el atrapamiento de aire.

Para condiciones de operación más complejas, hemos desarrollado métodos numéricos que permiten la simulación directa de los flujos altamente no estacionarios que se producen en la cámara de inyección -el proceso tiene lugar habitualmente en un tiempo inferior a un segundo, pudiendo producirse fenómenos que requieren una resolución temporal

de centésimas de milisegundo-, o dentro del molde cuando la velocidad de inyección es suficientemente baja. El desarrollo de métodos numéricos para la simulación directa de flujos interfaciales que sean robustos y precisos -dos cualidades que tienden a ser incompatibles entre sí- y, además, eficientes -es decir, que tengan un coste computacional razonable- es una tarea compleja. A lo largo de los últimos años, y en algunos casos muy recientemente, se han propuesto diferentes métodos numéricos para analizar este tipo de flujos, basados en alguno de los tres enfoques básicos siguientes: euleriano, lagrangiano y ALE (arbitrary Lagrangian-Eulerian).

Los métodos lagrangianos emplean mallas móviles adaptadas a la forma de la superficie libre, que deben ser reconstruidas cuando ésta adopta formas muy distorsionadas, lo que supone una complicación importante. El enfoque Lagrangiano-Euleriano arbitrario (ALE) es una variante del Lagrangiano en el que la malla se deforma en función de una velocidad “arbitraria”, independiente de la velocidad del fluido. La velocidad de la malla aparece incorporada en el término convectivo, lo que proporciona mayor estabilidad numérica. Existen también enfoques de tipo mixto Euleriano-Lagrangiano basados en una formulación Euleriana combinada con un método Lagrangiano de seguimiento de la superficie libre, en los que se realiza una determinación explícita de la superficie libre -lo que facilita la aplicación de condiciones de contorno-, adaptando la malla a la forma de ésta, y se incorporan métodos que evitan el remallado mientras la distorsión no sea excesiva.

En los esquemas de tipo Euleriano las ecuaciones se resuelven en una malla fija e indeformable, evitando los problemas asociados con el cálculo de ésta. La principal ventaja es la mayor robustez del proceso de cálculo, que

permite tratar interfaces que sufran grandes distorsiones. Cabe distinguir dos tipos de esquemas con malla Euleriana: los basados en el seguimiento explícito de la superficie -de partículas marcadoras, de seguimiento del frente- y los basados en la captura de la superficie -de tipo *Volume of Fluid* (VOF), *level set* y *phase field*, principalmente -. Ambos se diferencian en la forma de determinar la localización de la superficie de separación que forma parte del problema. En los métodos basados en el seguimiento de la superficie se utilizan partículas marcadoras cuyo movimiento -que determina el de la interfaz- es descrito mediante una ecuación de advección.

Los métodos de captura de la superficie eliminan la necesidad de utilizar procedimientos especiales de seguimiento explícito de la superficie libre. El método VOF utiliza una función escalar para representar la fracción volumétrica de líquido contenido en cada celda de la malla de cálculo, cuya advección se resuelve mediante procedimientos geométricos, lo que evita la excesiva difusión numérica que producen los algoritmos convencionales utilizados para resolver la ecuación de advección. Una vez conocida la distribución de la fracción volumétrica, la superficie libre se reconstruye en cada celda mediante uno -generalmente - o más segmentos, posicionados según el valor de la fracción volumétrica de cada celda y cuya orientación depende de las fracciones volumétricas de las celdas adyacentes.

Los métodos de tipo *level set*, de desarrollo muy reciente, están entre los métodos de captura más utilizados actualmente. Se basan en definir implícitamente la interfaz como el lugar geométrico determinado por el conjunto de valores nulos de una función, definida sobre un espacio dimensionalmente superior al de la interfaz, que usualmente es una función

distancia, y cuya ecuación de evolución se aproxima utilizando alguna de las numerosas técnicas de discretización desarrolladas para resolver ecuaciones hiperbólicas. En comparación con otros métodos, en particular con los también ampliamente utilizados métodos de tipo VOF y los lagrangianos de seguimiento del frente *-front tracking-* y de partículas marcadoras, los métodos *level set* tienen obviamente ventajas e inconvenientes. Son relativamente estables, proporcionan una ‘suave’ descripción geométrica de la interfaz -facilitando el cálculo de magnitudes geométricas tales como la curvatura-, su implementación es relativamente sencilla y su extensión a problemas tridimensionales no plantea especiales problemas. Sin embargo, estos métodos tienden a producir una excesiva regularización en zonas en las que la resolución espacial que proporciona la malla de cálculo es insuficiente, lo que da lugar a errores importantes en la conservación del volumen de cada uno de los medios que separa la interfaz.

Por otra parte, dos importantes ventajas de los métodos de tipo VOF son la conservación local del volumen de cada fluido y el mantenimiento de una interfaz compacta; como inconveniente debe mencionarse que estos métodos no son muy precisos en el cálculo de características geométricas tales como la curvatura, y que tienden a producir fragmentaciones de filamentos fluidos cuando éstos tienen un tamaño inferior al de las celdas de la malla de cálculo. Ambos tipos de métodos, VOF y *level set*, presentan la ventaja adicional de que no requieren métodos especiales para tener en cuenta cambios topológicos de la interfaz -tales como los que ocurren en la coalescencia o rotura de gotas-, lo que hace que su extensión a tres dimensiones sea relativamente sencilla -en comparación, por ejemplo, con lo que ocurre con métodos de seguimiento

del frente o de partículas-. Los métodos de seguimiento del frente generalmente reducen, en una medida considerable, la resolución necesaria para alcanzar una precisión comparable a la de los métodos de captura, y mantienen más eficazmente que éstos estructuras fluidas con formas de filamentos. Además, en estos métodos la reconstrucción de la interfaz es bastante independiente de la malla de cálculo, la determinación de la posición de la interfaz es simple y el cálculo de las propiedades geométricas es más precisa. Sin embargo, la dificultad de su extensión a 3D es considerablemente mayor que en los métodos *level set* y VOF, requieren la utilización de algoritmos de remallado para evitar la concentración de partículas en zonas de elevada curvatura, requieren procedimientos especiales para el tratamiento de cambios topológicos en la interfaz y no son intrínsecamente conservativos -aunque debe reconocerse que en la práctica consiguen una adecuada conservación de la masa-. La falta de conectividad entre las partículas hace que los métodos basados en partículas marcadoras sean más fáciles de implementar que los de seguimiento del frente, aunque tienen el inconveniente, frente a éstos, de que proporcionan una descripción de la geometría de la interfaz menos precisa.

Muy recientemente se han propuesto diversos métodos híbridos que tienen por objeto combinar algunas de las ventajas de los métodos de tipo VOF, *level set* y de seguimiento del frente, y existen además otros tipos de métodos de gran interés en determinadas aplicaciones, tales como los basados en formulaciones integrales en el contorno, que tienen unas posibilidades de aplicación más limitadas a determinadas fases de algunos procesos de fundición. Independientemente del desarrollo de métodos híbridos, se siguen publicando avances de los métodos originales. En los métodos VOF algunas

mejoras recientes se centran en la evolución de los algoritmos de tipo heurístico hacia algoritmos formalmente más matemáticos, basados fundamentalmente en técnicas de tipo geométrico. La extensión de métodos multidimensionales de advección a problemas tridimensionales y mallas no estructuradas supone todavía un reto importante. En los métodos *level set*, los avances se centran, por ejemplo, en procedimientos de reinicialización más eficaces, localización del método para mejorar la eficiencia mediante la resolución de las ecuaciones de transporte de la función *level set* y de reinicialización sólo en las proximidades de la interfaz, y la utilización de mallas adaptadas.

En mi grupo de investigación hemos centrado el esfuerzo en desarrollar nuevos métodos mejorados de tipo VOF y *level set*. El método VOF propuesto incorpora un nuevo algoritmo de advección multidimensional y un nuevo procedimiento de reconstrucción mediante *splines*. Se ha desarrollado además un procedimiento híbrido, basado en la introducción de partículas marcadoras que se mueven con la velocidad del fluido, para mejorar el procedimiento de reconstrucción cuando en el flujo aparecen filamentos de alguno de los dos fluidos con un tamaño inferior al del tamaño de la malla de cálculo. Recientemente se ha llevado a cabo la extensión del método propuesto a flujos tridimensionales.

Hemos desarrollado asimismo un método de tipo *level set* de banda estrecha con refinamiento local, con el que también se ha mejorado notablemente la precisión de métodos propuestos previamente por otros autores, e incluso se ha igualado la de métodos híbridos partículas-*level set* más sofisticados.

Los métodos anteriores para la descripción de la interfaz han sido incorporados en un código propio que resuelve las ecuaciones del movimiento utilizando un método de proyección aproximada y técnicas de discretización de diferencias finitas, teniendo en cuenta fenómenos de tensión superficial. El código permite la deformación de la malla mediante un método de tipo lagrangiano-euleriano arbitrario.

El código numérico y los distintos métodos desarrollados han sido validados exhaustivamente mediante la realización de numerosos ensayos numéricos basados en la simulación de diversos problemas: advección de interfaces en distintos tipos de flujos prefijados; inestabilidad de Rayleigh-Taylor; propagación de ondas de pequeña amplitud, de gravedad y capilares, en la superficie de separación de fluidos viscosos de distinta densidad; problemas de rotura de presas; rotura de olas, e impacto de olas contra paredes verticales, entre otros.

Los resultados numéricos obtenidos para el flujo en la cámara de inyección de una máquina de fundición han sido comparados con resultados del modelo teórico mencionado anteriormente -para condiciones de operación en las que la complejidad del flujo es pequeña-, con resultados obtenidos mediante códigos comerciales de propósito general y específicamente desarrollados para problemas de fundición -siendo el resultado de la comparación muy ventajoso para nuestro código-, y con los resultados experimentales obtenidos en una máquina de fundición real y en ensayos de

visualización realizados en modelos de cámara utilizando agua como fluido de trabajo.

Debe resaltarse que las predicciones realizadas a partir de los modelos matemáticos desarrollados han permitido identificar las condiciones de operación más adecuadas y los límites en los que, en cualquier caso, deben mantenerse los principales parámetros del proceso, así como la aproximación a las condiciones de operación donde pueden presentarse fenómenos indeseables que todavía no tenemos capacidad de simular numéricamente con precisión. En cualquier caso, las predicciones mediante modelos matemáticos son esencialmente teóricas, lo que requiere en algún momento una validación experimental concluyente. Esta cuestión exige una infraestructura muy compleja y costosa que requiere muy diversos equipos e instalaciones a los que se ha podido llegar a acceder -con bastante esfuerzo- a lo largo de estos años.

Los estudios experimentales se han realizado y se están realizando desde dos enfoques complementarios. Uno de ellos en condiciones reales de operación en laboratorios y talleres de fabricación, lo que ha exigido disponer de una instalación -máquina de inyección, moldes, hornos, sistemas de control, equipos y sistemas de medida, etc.- muy compleja -no tenemos conocimiento de que exista una infraestructura similar a ésta en entornos universitarios-. Los ensayos se realizan en condiciones de operación estrictamente reales, lo que implica trabajar en un entorno productivo ciertamente duro que entraña situaciones de cierto riesgo.

Los otros estudios se desarrollan en un laboratorio de mecánica de fluidos en el que se ha dispuesto de un banco de ensayos de visualización de flujos donde se está pudiendo analizar el comportamiento de la ola de metal fundido que

causa el movimiento del pistón, las condiciones bajo las que se produce su rotura y las características generales del proceso de ella, en las condiciones típicas que pueden darse en la cámara de inyección.

### **Consideraciones finales**

El espectacular avance que se ha producido en los últimos años en el conocimiento científico de los procesos de fundición ha estado ligado, muy probablemente, al alto grado de desarrollo de complejos modelos matemáticos. Estos modelos están permitiendo simular, con suficiente precisión, gran parte de los fenómenos asociados a las condiciones de operación de estos procesos y a las diferentes fases de su ciclo

productivo, así como el desarrollo de potentes modelos técnico-económicos de análisis de sistemas. Todo ello ha exigido una ingeniería de procesos que integre equipos de investigación y desarrollo multidisciplinares de amplia formación en diferentes áreas tales como: metalurgia, termo-fluidomecánica, mecánica o informática.

Por otra parte, los diferentes modelos teóricos desarrollados han requerido, en su largo y complicado proceso de evolución, de muy difíciles estudios experimentales de verificación. A pesar de las muy diferentes capacidades y habilidades que se requieren para ambos tipos de estudios, la clave del éxito de los grupos de investigación que los han abordado ha estado, como en toda buena ingeniería, en la sabia combinación de conocimiento, método, ingenio y perseverancia.

Un apunte final: la elitista formación científica de las Escuelas especiales de Ingeniería, cuya creación en España precede a la de las Facultades de Ciencias, hizo que ingenieros civiles y militares tuviesen un papel decisivo en la gestación y evolución inicial de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, creada hace poco más de siglo y medio, y cuya historia invito a repasar.

Con el mismo ánimo de colaboración y responsabilidad, y esperando poder aportar mi modesta experiencia, principalmente en el ámbito de la Ingeniería y la Tecnología, me incorporo como Académico de Número a la Academia de Ciencias de la Región de Murcia, agradeciendo a todos sus

miembros el gran honor que me han dispensado al proponerme formar parte de esta Institución.

Finalmente, mis últimas palabras quisiera que fueran también, como las primeras, de sincero agradecimiento a todos los aquí presentes: autoridades, compañeros, amigos y familiares, que habéis tenido la amabilidad de acompañarme en este día, así como al académico Prof. López Coronado, por su disponibilidad al aceptar pronunciar el discurso de contestación.

Esto es todo. Muchas gracias por su atención.

#### **REFERENCIAS**

- Callon, M., “El proceso de la construcción de la sociedad. El estudio de la tecnología como herramienta para el análisis sociológico”, en: M. Doménech y F.J. Tirado, *Sociología Simétrica*, Barcelona: Gedisa, 1998.

- Faura, F., “Los modelos técnico-económicos para análisis de sistemas materiales y su aplicación a la fabricación de piezas de automoción”, *Revista de Metalurgia*, 32 (6), 381-390, 1996.
- Faura, F., López, J. y Hernández, J., “On the Optimum Plunger Acceleration Law in the Slow Shot Phase of Pressure Die Casting Machine”, *International Journal of Machine Tool and Manufacture*, 41 (2), 173-191, 2001.
- Freeman, C., “Structural Crises of Adjustment: Business Cycles and Investment Behaviour”, en: G. Dosi, C. Freeman, R. Nelson, G. Silverberg y L. Soete (eds.). *Technical Change and Economic Theory*, London: Printer Publishers, 1988.
- Hernández, J., López, J., Faura, F. y Gómez, P., “Analysis of the Flow in a High Pressure Die Casting Injection Chamber”, *Journal of Fluids Engineering*, 125 (2), 315-324, 2003.
- Hernández, J., López, J. y Faura, F., “Influence of Unsteady Effects on Air Venting in Pressure Die Casting”, *Journal of Fluids Engineering*, 123 (4), 884-892, 2001.
- Hirt, C.W., Amsden, A.A. y Cook, J.L., “An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for all Flow Speeds”, *Journal of Computational Physics*, 14, 227-253, 1974.
- Hirt, C.W., y Nichols, B.D., “Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries”, *Journal of Computational Physics*, 39, 201-225, 1981.
- Hughes, T.P., *Networks of Power*, Baltimore: The John Hopking University Press, 1983.
- Kranzberg, M., “Technology and History: Kranzberg’s Laws” *Technology and Culture*, 27(3), 544-560, 1986.
- López, J., Faura, F., Hernández, J. y Gómez, P., “On the Critical Plunger Speed and Three-Dimensional Effects in High-Pressure Die Casting Injection Chambers”, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 125(3), 529-537, 2003.
- López, J., Hernández, J., Faura, F. y Trapaga, G., “Shot Sleeve Wave Dynamics in the Slow Phase of Die Casting Injection”, *Journal of Fluids Engineering*, 122 (2), 349-356, 2000.
- López, J., Hernández, J., Gómez, P. y Faura, F., “A Volume of Fluid Method Based on Multidimensional Advection and Spline Interface Reconstruction”, *Journal of Computational Physics*, 195, 718-742, 2004.

- 
- López, J., Hernández, J., Gómez, P. y Faura, F., “An Improved PLIC-VOF Method for Tracking Thin Fluid Structures in Incompressible Two-Phase Flows”, *Journal of Computational Physics*, 208, 51-74, 2005.
  - Mitcham, C., “La importancia de la filosofía en la ingeniería”, en J.A. López Cerezo, et. al. (eds.), *Filosofía de la tecnología*, Madrid: EOI, 2001.
  - Nichols, B.D., Hirt, C.W. y Hotchkiss, R.S., “SOLA-VOF, A Solution Algorithm for Transient Fluid Flow With Multiple Free Boundaries”, Technical Report LA-8355, Los Alamos Scientific Laboratory, 1980.
  - Ortega y Gasset, J., “Una interpretación de la historia universal”, Obras completas, IX, *Revista de Occidente*, Madrid, 1965.
  - Scardovelli, R y Zaleski, S., “Direct Numerical Simulation of Free-Surface and Interfacial Flow”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 31, 567-603, 1999.
  - Szekely, J., *Fluid Flow Phenomena in Metals Processing*, New York: Academic Press, 1979.
  - Vaughn B., *El método de ingeniería*, Santiago: ACOFI, 1985.
  - Welch, J.E., Harlow, F.H., Shanon, P.J y Dally, B.T., “The MAC Method, A Computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid Flow Problems Involving Free Surfaces,” Technical Report LA-3425, Los Alamos Scientific Laboratory, 1965.