



industriales  
etsii

Escuela Técnica  
Superior  
de Ingeniería  
Industrial

# UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

## Diseño de reguladores para el control estocástico óptimo basados en la solución de la ecuación de Hamilton- Jacobi-Bellman

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA INDUSTRIAL Y  
AUTOMÁTICA

**Autor:** Ana Isabel Jerez Fernández  
**Director:** Juan Ignacio Mulero Martínez  
**Codirector:** Javier Molina Vilaplana



Universidad  
Politécnica  
de Cartagena

Cartagena, 26 de abril de 2019

*Agradecimientos:*

Miguel Ángel Jerez Fernández

Abderrahim Boussala

Juan Ignacio Mulero

## Contenido

CAPITULO 1: INTRODUCCIÓN.....	5
1.1. OBJETIVO.....	6
1.2. MOTIVACIÓN.....	6
1.3. ESTADO DEL ARTE.....	6
1.4. ORGANIZACIÓN DEL PROYECTO.....	6
CÁPITULO 2: TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO ESTOCÁSTICO.....	7
Capítulo 3 DESCRIPCIÓN DEL TOOLBOX: SDE DE MATLAB.....	13
CAPÍTULO 4: DESCRIPCIÓN DEL OSCILADOR ARMÓNICO CUÁNTICO.....	19
4.1. Introducción.....	20
4.2. Osciladores Armónicos en dos y tres dimensiones.....	21
4.3. Métodos de operadores para el oscilador armónico.....	21
4.4. Descripción del oscilador armónico cuántico según el operador de densidad.....	22
4.4.1 Medida continua.....	22
4.4.2 Operador densidad.....	22
4.4.3 Medida continua de un observable.....	23
4.4.5 Ecuación maestra estocástica.....	25
5. Forma general de la ecuación maestra estocástica.....	26
6. Ecuación estocástica del oscilador armónico.....	27
6.3 Ecuación maestra.....	28
Capítulo 5 IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROL ÓPTIMO CUÁNTICO.....	29
5.1 Solución de los parámetros de la función valor.....	30
5.1.1 Solución numérica.....	30
5.1.2 Solución analítica.....	32
5.2 Cálculo de los puntos de equilibrio.....	36
CAPÍTULO 6 SIMULACIÓN Y RESULTADOS.....	41
7. Bibliografía.....	51



## CAPITULO 1: INTRODUCCIÓN

## 1.1. OBJETIVO

- Análisis y diseño de reguladores óptimos para el control de sistemas estocásticos
- Estudio del Toolbox Financial de MATLAB para la simulación de sistemas
- Aplicación al caso particular del oscilador cuántico

## 1.2. MOTIVACIÓN

Este trabajo se basa y es continuación del trabajo fin de grado, titulado: *Análisis y control de sistemas estocásticos con aplicaciones en tecnologías cuánticas*

Por otra parte, este trabajo se marca dentro de la actividad investigadora del departamento de automática, ingeniería eléctrica e ingeriría electrónica en la Universidad Politécnica de Cartagena.

Además, supone un gran reto al desarrollar una aplicación práctica a nivel de simulación dentro de un campo que se mueve en la frontera del conocimiento, Este trabajo puede servir de referencia para trabajos futuros dentro de esta universidad como en otras universidades españolas

## 1.3. ESTADO DEL ARTE

Las ecuaciones diferenciales estocásticas se han trabajado de forma extensa en el campo de la economía financiera. En los últimos años con el desarrollo de las tecnologías cuánticas, el control de sistemas estocásticos ha suscitado un gran interés por parte de la comunidad científica

Relacionadas con la cuántica, nos encontramos, como he comentado anteriormente con un trabajo de fin de grado, realizado en la Universidad Politécnica de Cartagena.

El mundo cuántico está despertando mucho interés por el gran potencial que puede tener en la computación. Esta tecnología puede llegar a ser una revolución para el procesamiento de datos, ya que actualmente se trabaja con bits, que solo tiene dos estados posibles (0 y 1), en cambio, en la computación cuántica se trabaja con la superposición de ambos estados, es decir, trabajamos con qubits. La diferencia entre ambos es los segundos mejoran la complejidad computacional, como por ejemplo el algoritmo de Grover's ; este algoritmo sirve para búsqueda en base de datos no estructuradas, este algoritmo tiene una complejidad computacional ( $O(\sqrt{N})$ ), es una mejora cuadrática, respecto a los métodos clásicos de computación. Dado este conocimiento diferentes empresas han lanzado proyectos para la investigación de este tipo de procesadores, por ejemplo, IBM ha puesto en marcha el proyecto "Quantum Experience", una plataforma abierta para que investigadores desarrollen un procesador de cincuenta qubits. [7.8]

## 1.4. ORGANIZACIÓN DEL PROYECTO

- Fase 1: Documentación de las ecuaciones de ecuaciones diferenciales estocásticas y su situación
- Fase 2: Estudio del financial toolbox de MATLAB
- Fase 3: Cálculo de los parametros de la función valor
- Fase 4: Cálculo de los puntos de equilibrio
- Fase 5: Simulación del oscilador armónico cuántico.

## CÁPITULO 2: TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO ESTOCÁSTICO

En este capítulo se pretende dar una descripción del control óptimo relativo a los sistemas estocásticos [7.1] deducir la función valor, dicha función actúa como una función de energía de Jacobi que se ha aplicado a un caso concreto, el cual tiene una parte de arrastre y de dispersión lineal.

A diferencia del proyecto fin de estudios: *Análisis y control de sistemas estocásticos con aplicaciones en tecnologías cuánticas*, resolvemos el problema óptimo no en régimen estacionario mediante la ecuación de Riccati, si no en régimen transitorio

Consideramos el siguiente sistema dinámico estocástico con vector de estado  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , y vector de control  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ :

$$dx(t) = f(x(t), u(t), t) dt + g(x(t), u(t), t) dW$$

$$x(0) = x_0$$

Para ciertos campos vectoriales  $f, g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sea  $W(t)$  un movimiento Browniano  $k$ -dimensional sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ . Más aún, sobre un intervalo de tiempo fijo  $[0; T]$  restringimos el vector de control  $u(t)$  de manera que  $u(t) \in \mathcal{U}$  para todo  $t \in [0; T]$ . El conjunto de controles permisibles  $\mathcal{U}$  es un subconjunto convexo, cerrado e invariante en el tiempo del espacio de control  $\mathbb{R}^m$ .

Consideramos a continuación el coste funcional

$$V(u) = \mathbb{E} \left[ K(x(T)) + \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt \right]$$

Para ciertas funciones escalares  $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $K: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Problema 1** Minimizar  $V(u)$  en (2) mediante una acción de control  $u^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfaciendo

$$V(u^*) = \min_{u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m} V(u)$$

La trayectoria de estado óptima  $x^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  así como el par de control óptimo  $u^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  constituyen el par óptimo  $(x^*, u^*)$ . Definimos la función de coste óptimo  $V(t, x)$  como

$$V(0, x_0) = V(u^*) = \min_{u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m} V(u)$$

## 2. Ecuación Estocástica de Hamilton-Jacobi-Bellman

Los pasos para encontrar una solución al problema de control óptimo estocástico siguen la estrategia de Richard Bellman llamada programación dinámica. Esencialmente la idea es que un camino óptimo tiene la propiedad de que cualesquiera que sean las condiciones iniciales y los valores de control sobre un cierto periodo inicial, las variables de control sobre el periodo restante tienen que ser óptimas para el problema restante.

Esto significa que el problema se puede dividir en dos partes, donde se supone que desde  $t + \Delta t$  hasta  $T$  se ha calculado la solución óptima y estamos todavía buscando la solución desde  $t$  hasta  $t + \Delta t$ . Es suficiente buscar la solución de la primera parte debido a que la segunda parte es ya óptima

$$u(t) = \begin{cases} u(s) & t \leq s \leq t + \Delta t \\ u(s)^* & \text{para } t + \Delta t \leq s \leq T \end{cases}$$



La función de coste se puede dividir en dos partes

$$V(x, t) = \min_{u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m} V(u) \mathbb{E} \left[ \int_t^{t+\Delta t} L(x(s), u(s), s) ds + K(x(T)) + \int_{t+\Delta t}^T L(x(s), u^*(s), s) ds \right] \quad (3)$$

Donde

$$\mathbb{E} \left[ K(x(T)) + \int_{t+\Delta t}^T L(x(s), u^*(s), s) ds \right] = V(x, t + \Delta t)$$

Supondremos que la función de control  $u(t)$  en  $t_0 + \Delta t \leq t \leq T$  es óptima para el problema comenzando en  $t = t_0 + \Delta t$  por lo que podemos escribir la segunda integral como  $V(x, t + \Delta t)$ . Entoces sustituimos esta función al tomar la diferencial total e integandola. Tenemos que tener cuidado de que  $x$  es un proceso estocástico y por tanto hay que aplicar en cálculo de Ito. Esto produce la siguiente expresión para  $V(x, t + \Delta t)$ :

$$V(x, t + \Delta t) = V(x, t) + \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \mathcal{A}V(x, t) \right) dt + \int_{t+\Delta t}^T V_x^T(x(t), u(t), t) g(x(t), u(t), t) dW$$

Donde hemos utilizado el operador diferencial siguiente:

$$\mathcal{A}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)^T}{\partial x} f(x, u, t) + \frac{1}{2} Tr \left( g(x, u, t)^T \frac{\partial^2(\cdot)^T}{\partial x^2} g(x, u, t) \right) \quad (4)$$

Ahora introducimos (4) en (3)

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \min_{u: [t, t+\Delta t] \rightarrow u} \mathbb{E} \left[ \int_t^{t+\Delta t} L(x(t), u(t), t) dt \right] + V(x, t + \Delta t) \\ &= \min_{u: [t, t+\Delta t] \rightarrow u} \mathbb{E} \left[ V(x, t) + \int_t^{t+\Delta t} L(x(t), u(t), t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \mathcal{A}V(x, t) \right) dt + \int_{t+\Delta t}^T V_x^T(x(t), u(t), t) g(x(t), u(t), t) dW \right] \\ &= \min_{u: [t, t+\Delta t] \rightarrow u} \mathbb{E} \left[ V(x, t) + \int_t^{t+\Delta t} L(x(t), u(t), t) dt + \int_{t+\Delta t}^T \left( \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \mathcal{A}V(x, t) \right) dt \right] \end{aligned}$$

La esperanza elimina la integral estocástica y ahora tomamos esperanzas a ambos lados:

$$0 = \min_{u: [t, t+\Delta t] \rightarrow u} \left[ \int_t^{t+\Delta t} L(x(t), u(t), t) dt + \int_{t+\Delta t}^T \left( \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \mathcal{A}V(x, t) \right) dt \right] \quad (9)$$

Para que se satisfaga la ecuación (9) ponemos los argumentos de la integral a cero e intercambiamos el operador mínimo con la integral. De esta forma llegamos a la ecuación HJB<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> HJB: Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \mathcal{A}V(x, t) \right\} = 0$$

Y expandiendo el operador diferencial  $\mathcal{A}(\cdot)$  obtenemos:

$$-\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \min_{u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m} \left\{ L(x(t), u(t), t) + V_x^T(x, u, t) + \frac{1}{2} \text{Tr}(g(x, u, t)^T V_{xx} g(x, u, t)) \right\} \quad (10)$$

Esta es la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el proceso estocástico (1) y el funcional de coste (2). La acción de control minimizante se puede encontrar en términos de  $x$ ,  $t$ ,  $V_x$ ,  $V_{xx}$  e introducida en (10). Se puede encontrar una solución explícita para el control óptimo  $u(t)$  resolviendo la ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) para la función de coste  $V(x, t)$ .

### 3. Procedimiento de solución.

Los siguientes pasos conducen a la ley de control por realimentación óptima, así como a la función calor mínima:

1. Para una función valor  $V(x, t)$ , encontrar  $u = u(x, V_x, V_{xx}, t)$  tal que

$$L(x, u, t) + V_x^T(x, t) f(x, u, t) + \frac{1}{2} \text{Tr}(g(x, u, t)^T V_{xx} g(x, u, t)) \text{ sea mínimo}$$

2. La función  $u$  se coloca en la ecuación HJB para  $u$ , se resuelve la ecuación en derivadas parciales

$$V_t(x, t) + L(x, u, t) + V_x^T(x, t) f(x, u, t) + \frac{1}{2} \text{Tr}(g(x, u, t)^T V_{xx} g(x, u, t)) = 0$$

Con la condición terminal  $V(x, T) = K(x)$ . La solución  $V(x, t)$  es la función valor mínima.

3. La función  $J(x, t)$  se pone en la ecuación para  $u$  que se obtuvo en el paso 1. Esto produce la ley de control por realimentación óptima  $u^* = u^*(x, V(x, t), t)$

En la siguiente sección aplicamos este procedimiento a un sistema dinámico lineal y un funcional de coste cuadrático.

### 4. LQG con la ecuación HJB

Consideremos el siguiente problema LQG:

$$\begin{cases} dx(t) = (Ax + b + gu)dt + (Fx + G)dW \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$V(x, t) = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2} x(T)^T M x(T) \right] + \frac{1}{2} \int_0^T u^T(t) u(t) dt + \int_0^T x^T(t) Q x(t) dt$$

Donde  $M \geq 0$ .

Seguiremos los siguientes pasos:

1. Calcular  $u(x, V_x, t)$  para la función valor  $V(t, x)$ :

$$V_t + \min_{u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m} \left\{ \frac{1}{2} u^T(t) u(t) + x^T(t) Q x(t) + V_x^T (Ax + b - g V_x^T g) + \frac{1}{2} \text{Tr}((Fx + G)^T V_{xx} (Fx + G)) \right\} = 0$$

Donde  $Q \geq 0$ . La minimización con respecto a  $u(x, V_x, t)$  produce

$$u(x, V_x, t) = -V_x^T g$$

2. Introducir la ley de control obtenida  $u(x, V_x, t)$  en la ecuación HJB y resolverla

$$V_t + g^T V_x V_x^T g + x^T(t) Q x(t) + V_x^T (Ax + b - g V_x^T g) + \frac{1}{2} (Fx + G)^T V_{xx} (Fx + G) = 0$$

Y teniendo en cuenta que  $g^T V_x = V_x^T g$  se puede simplificar más todavía:

$$V_t + x^T(t) Q x(t) + V_x^T (Ax + b - g V_x^T g) + \frac{1}{2} (Fx + G)^T V_{xx} (Fx + G) = 0$$

Para resolver esta ecuación no lineal en derivadas parciales hacemos el siguiente ansatz:

$$V(t, x) = a_0(t) + a_1^T(t) x(t) + x(t)^T B(t) x(t)$$

Introduciendo este ansatz en la EDP

$$\left( \dot{a}_0(t) + a_1^T(t) \dot{x}(t) + x(t)^T \dot{B}(t) x(t) \right) + x(t)^T Q x(t) + 2x(t)^T B(t) (Ax + b) + a_1^T(t) (Ax + b) + (Fx + G)^T B(t) (Fx + G) = 0 \quad (11)$$

Para asegurar que la ecuación anterior se satisface para  $x \in \mathbb{R}^n$ , el término cuadrático  $x^T (\dots) x$  debería ser nulo. De igual forma el término lineal  $x^T (\dots)$  debería ser cero y exactamente igual para el término constante. Las condiciones para el término cuadrático son las siguientes

$$\begin{cases} \dot{B}(t) + Q + 2B(t)A + F^T B(t) F = 0 \\ B(T) = M \end{cases}$$

Esta es realmente una ecuación diferencial de primer orden.

Ahora las condiciones para que los términos lineales y constantes se hagan cero son las siguientes

$$\begin{cases} \dot{a}_1(t) + 2B(t)b + A^T a_1 + 2F^T B(t)G = 0 \\ a_1(T) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{a}_0(t) + a_1^T b + G^T B(t) G = 0 \\ a_0(T) = 0 \end{cases}$$

3. Una vez que se ha obtenido una solución a la EDP de HJB, la ley de realimentación de estado lineal se puede establecer explícitamente:

$$u(x, V_x, t) = -V_x^T g$$

Y con la derivada de primer orden de el ansatz cuadrático  $V(x)$

$$V_x = (a_1(t) + 2B(t) x(t))^T g$$

La ley de realimentación óptima es:

$$u^*(t, x) = (a_1(t) + 2B(t)x(t))^T g$$

El valor funcional de coste óptimo se puede calcular también:

$$V_0 = V(0, x_0) = a_0(0) + a_1^T(0)x_0 + x_0^T B(0)x_0$$

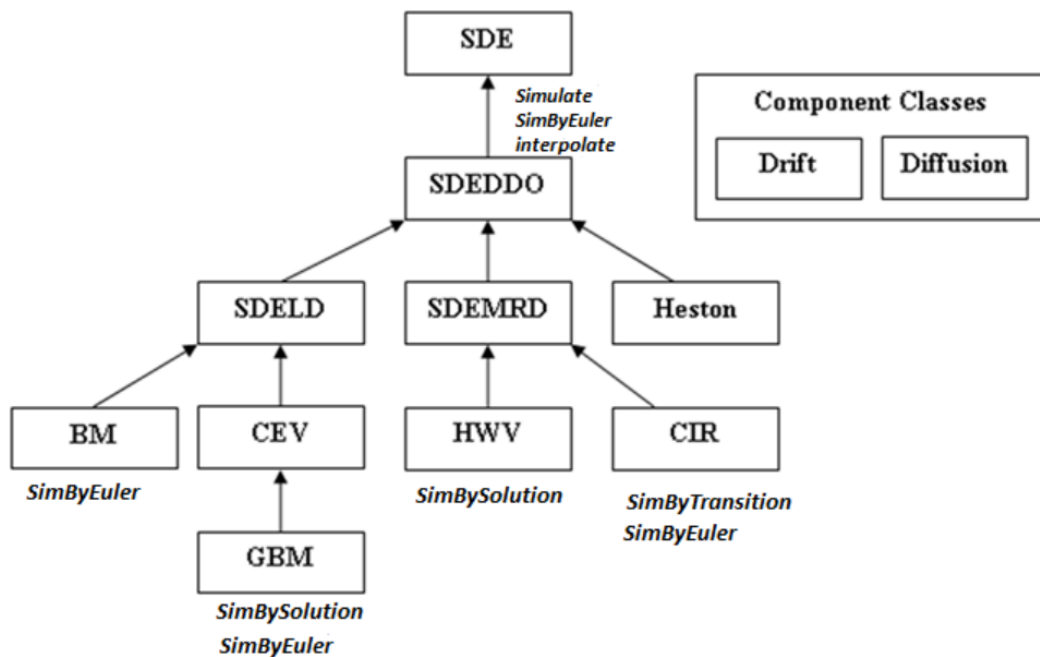
## C pítulo 3 DESCRIPCIÓN DEL TOOLBOX: SDE DE MATLAB

En este capítulo, se hará una descripción sobre el financial toolbox de Matlab y se detalla como se introduce con algunos ejemplos sencillos. Por último se describe como hacer la simulación.

La herramienta que ofrece Matlab para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas, es un toolbox asociado a finanzas, que tiene diferentes clases, para resolver diferentes tipos de modelos de ecuaciones, como se observa en la figura:

**Clases SDE**

Nombre de la clase	Para obtener más información, vea...
SDE	<a href="#">sde</a> y Base SDE modelos
Drift, Diffusion	<a href="#">Resumen</a> , <a href="#">drifty diffusion</a>
SDEDDO	<a href="#">sdeddo</a> y modelos de difusión y deriva
SDELD	<a href="#">sdelld</a> y Modelos lineales de deriva
CEV	modelos de elasticidad constante creación de la varianza (CEV) y <a href="#">cev</a>
BM	<a href="#">bm</a> y la creación de modelos de movimiento browniano (BM)
SDEMURD	<a href="#">sdemurd</a> y ecuaciones diferenciales estocásticas creación de modelos significa revertir la deriva (SDEMURD)
GBM	modelos de creación de movimiento browniano geométrico (GBM) y <a href="#">gbm</a>
HWV	Modelos de difusión gaussiano creación de Hull-White/Vasicek (HWV) y <a href="#">hwv</a>
CIR	<a href="#">cir</a> y la creación de modelos de difusión de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) raíz cuadrada
Heston	<a href="#">heston</a> y Heston de la creación de modelos de volatilidad estocástica



Para el desarrollo de este proyecto se ha utilizado la clase SDE, cuya sintaxis es:

```

SDE = sde(DriftRate,DiffusionRate)
SDE = sde( __,Name,Value)

```

Donde:

- Drift es el termino de arraste que gobierna la ecuación diferencial, es decir, el termino determinista
- Diffusion es la parte que representa al ruido y es de naturaleza Browniana

Si tenemos una ecuación del tipo:  $dX_t = 0.1X_t dt + 0.3X_t dW$ . Su introducción se hace de la siguiente forma:

```
1   Dritf = @(t,X) 0.1 * X;  
2   Diff = @(t,X) 0.3 * X;  
3  
4   obj = sde(Dritf, Diff)
```

Si tenemos una ecuación matricial del tipo  $dX_t = A dt + P dW$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

En Matlab lo introduciremos de la siguiente forma:

```
5 -   P = [1 2; 2 5]  
6 -   A = [-1 0; 0 -2]  
7  
8 -   DR = drift([0 ; 0], A)  
9 -   DIFF = diffusion([0 ; 0], P)  
10  
11 -   obj = sde(DR, DIFF)  
12
```

A los terminos de Dispersión y Difusión hay que introducirles momento de la primera observación, como observa en la figura, en este ejemplo se ha evaluado en el cero.

El objeto para su introducción, tiene los siguientes parámetros que el usuario puede modificar según sea la función que desea obtener'

---

SDE = sde(DriftRate, DiffusionRate) crear un objeto predeterminado de SDE .

SDE = sde( \_\_, Name, Value) crear un objeto SDE con opciones adicionales especificadas por uno o más SDE argumentos par.

Name es un nombre de propiedad y valores su valor correspondiente. Value debe aparecer dentro de comillas simples"). Puede especificar varios argumentos en cualquier orden como Name .

El objeto SDE tiene las siguientes SDE :

- StartTime : inicial tiempo de observación
- StartState - inicial Estado tiempo StartTime
- Correlation : argumento, exigible en función del tiempo de entrada de la función de acceso para la Correlation
- Drift - función compuesta tipo de deriva, exigible en función del tiempo y del estado
- Diffusion - función compuesta tasa de difusión, exigible en función del tiempo y del estado
- Simulation : un método o función de la simulación

También ofrece varias posibilidades de simulación:

En este proyecto se ha simulado a través del algoritmo de Montecarlo, ya que el proceso estocástico es lo que ofrece la solución SDE, para:

$$\bar{X}: \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad [7.3]$$

Si fijamos el tiempo  $\bar{X}_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tenemos las variables aleatorias

Si fijamos la  $w \bar{X}_w: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tenemos la señal determinista. Ensemble de señales  $\bar{X}_w: \{w \in \Omega\}$

La simulación de Montecarlo utiliza la ley de los Números Grandes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{\bar{X}_m}{m} \right] = \mathbb{E} [\bar{X}_t]$$

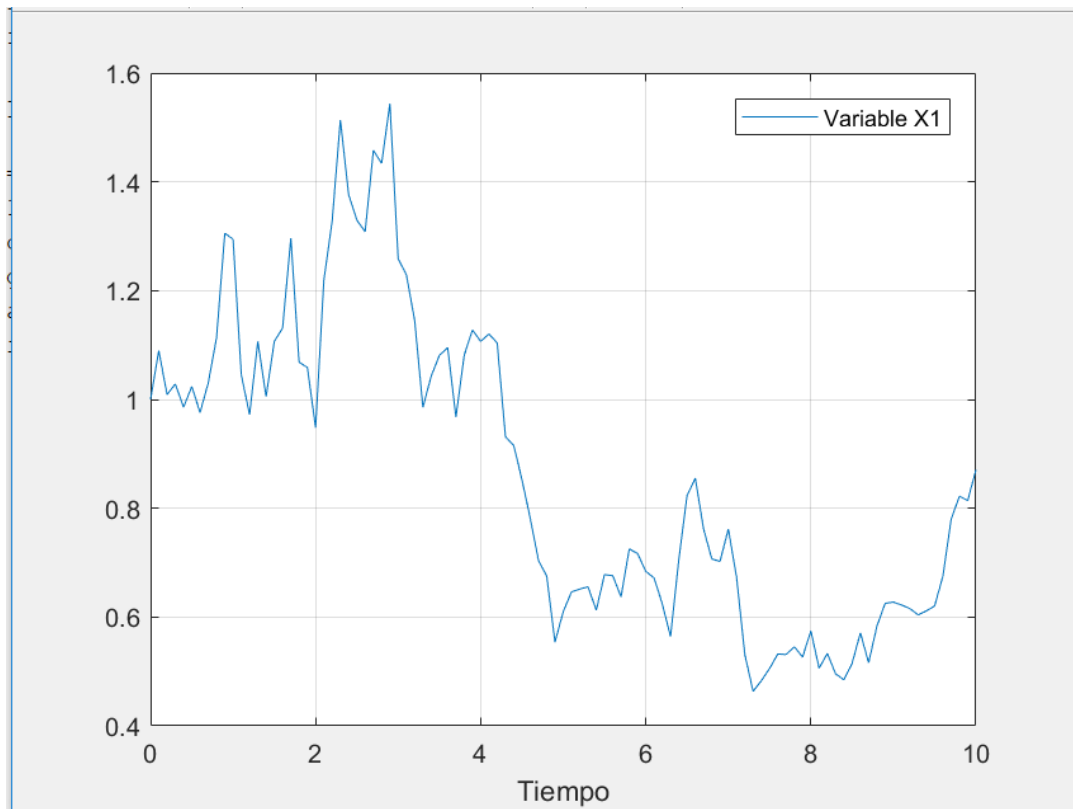
Lo que se hace mediante este tipo de simulación, es que para un instante de tiempo  $t$  se muestrea la señal

<a href="#">interpolate</a>	Browniano interpolación de ecuaciones diferenciales estocásticas
<a href="#">simulate</a>	Simuladoras multivariantes ecuaciones diferenciales estocásticas (SDEs)
<a href="#">simByEuler</a>	Simulación de Euler de ecuaciones diferenciales estocásticas (SDEs)

Si volvemos a los ejemplos anteriores las simulaciones quedarán de la siguiente forma:

```
1   Drift = @(t,X) 0.1 * X;
2   Diff = @(t,X) 0.3 * X;
3
4   obj = sde(Drift, Diff)
5
6   dt=0.1;
7   [X1, tiempo, X] = obj.simulate(100, 'DeltaTime', dt);
8   plot(tiempo, X1)
9   legend(['Variable X1'])
10  xlabel('Tiempo')
11  grid on;
```



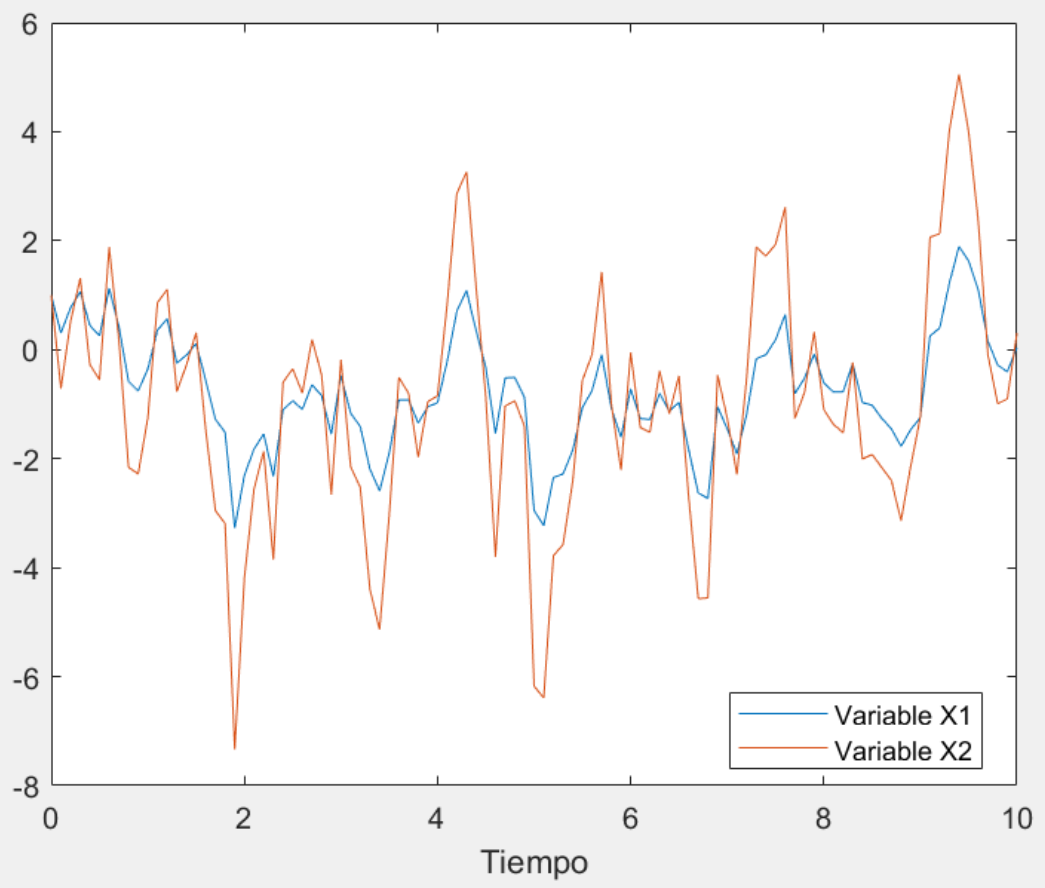


## Ejemplo 2

```

1 -   clc
2 -   clear all
3 -   close all
4
5 -   P = [1 2; 2 5]
6 -   A = [-1 0; 0 -2]
7
8 -   DR=drift([0 ; 0],A)
9 -   DIFF=diffusion([0 ; 0],P)
10
11 -  obj = sde(DR, DIFF)
12
13 -  dt=0.01;
14 -  dt=0.1;
15 -  [X1,tiempo,X] = obj.simulate(100,'DeltaTime',dt);
16 -  plot(tiempo,X1)
17 -  legend(['Variable X1' ; 'Variable X2'],'Location','Best')
18 -  xlabel('Tiempo') |

```



## CAPÍTULO 4: DESCRIPCIÓN DEL OSCILADOR ARMÓNICO CUÁNTICO

## 4.1. Introducción

En este capítulo se describirá la ecuación de Schrödinger, que describe la energía del oscilador, los osciladores en dos y tres dimensiones, los métodos de operadores para el oscilador armónico y la descripción según el método que apliquemos. Por último, la ecuación estocástica del oscilador armónico. Muchos problemas en Física se pueden reducir al oscilador armónico bajo condiciones adecuadas. Consideramos una partícula que se mueve en un campo generado por un potencial asociado a un oscilador armónico cuántico:

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

donde  $k$  es una constante.

En mecánica clásica el potencial  $V(x)$  se puede conseguir haciendo una expansión de Taylor de segundo orden en torno a un punto de equilibrio.

**Ecuación de Schrödinger** El Hamiltoniano (energía) para un oscilador armónico unidimensional viene dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2$$

donde  $K = m\omega^2$ . Las variables  $\omega$  y  $m$  son respectivamente la frecuencia angular (rad/seg), y la masa (Kg) del oscilador. Tenemos entonces que:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

La ecuación estacionaria de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi_n(x) = E \psi_n(x)$$

Las funciones propias (eigenfunciones), que son soluciones de la ecuación de Schrödinger estacionaria se pueden calcular como

$$\psi_n(x) = \left( \frac{1}{\pi \lambda^2} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left( \frac{x}{\lambda} \right) e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}$$

donde  $\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$  y  $H_n$  son los polinomios de Hermite. Los valores propios del oscilador armónico son las energías propias:

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

## 4.2. Osciladores Armónicos en dos y tres dimensiones

De una forma análoga a como se vio para el caso unidimensional se puede escribir el Hamiltoniano para el caso bidimensional:

$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2$$

En este caso el Hamiltoniano es separable en las variables  $x$  e  $y$ , por lo que el problema se reduce a dos osciladores armónicos unidimensionales, uno en  $x$  y el otro en  $y$ . Las funciones propias en este caso son

$$\psi_{n_x, n_y}(x, y) = \psi_{n_x}(x) \psi_{n_y}(y)$$

Donde  $\psi_{n_i}(x_i)$  es la función propia del oscilador armónico unidimensional correspondiente. El valor propio correspondiente a  $\psi_{n_x, n_y}(x, y)$  es:

$$E_{n_x, n_y} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_y$$

La generalización al caso tridimensional es directa por lo que la omitimos.

## 4.3. Métodos de operadores para el oscilador armónico

Las funciones propias se pueden entender como una base ortonormal de vectores unitarios en un espacio vectorial de dimensión  $n$  que se obtiene al resolver la ecuación de Schrödinger. Daremos un paso más de abstracción y encontraremos el espectro de valores propios y de funciones propias utilizando operadores nada más. Para ello definiremos los operadores elevación y descenso,  $a^\dagger$  y  $a$  como

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i \hat{p}}{2m} \right)$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i \hat{p}}{2m} \right)$$

Estos operadores son herramientas muy útiles para la representación de las funciones propias del oscilador armónico. El Hamiltoniano del oscilador armónico se puede entonces escribir de forma compacta como:

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

o incluso como

$$H = \hbar\omega \left( a a^\dagger - \frac{1}{2} \right)$$

Se puede probar que las relaciones de conmutación para estos operadores son las siguientes:

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$[H, a] = -\hbar\omega a$$

$$[H, a^\dagger] = -\hbar\omega a^\dagger$$

Denotemos el  $n$ -ésimo estado del oscilador armónico  $\psi_n(y)$  como  $|n\rangle$ , por lo que  $a$  y  $a^\dagger$  satisfacen las relaciones:

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{cases}$$

Ahora queda clara la denominación de los operadores  $a$  y  $a^\dagger$  como operadores descenso y elevación respectivamente. De esta forma podemos construir el estado  $|n\rangle$  de la siguiente forma

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle$$

donde  $|0\rangle$  es el estado del vacío ( $n = 0$ ).

## 4.4. Descripción del oscilador armónico cuántico según el operador de densidad

### 4.4.1 Medida continua

Consideraremos que el sistema está siendo continuamente monitorizado en lo que se llama medida cuántica continua o medida débil de un sistema. A diferencia de esta situación, la medida fuerte del sistema representa una medida discreta instantánea, la cual es poco realista ya que toda medida requiere un tiempo por pequeño que sea. Si el tiempo para registrar una medida es lento en comparación con la dinámica del sistema entonces es necesario comprender tanto la dinámica del flujo de información como el efecto de la medida sobre el sistema.

La medida continua tiene una aplicación muy importante en el control realimentado de sistemas cuánticos donde la información se utiliza para modificar el Hamiltoniano del sistema y así obtener un comportamiento deseado.

### 4.4.2 Operador densidad

El operador densidad representa el estado del sistema cuántico. Representa el estado de conocimiento del observador sobre el sistema cuántico. Es una formulación más general que el propio vector de estado  $|\psi\rangle$ .

Cuando el estado cuántico se puede representar por un vector de estado  $|\psi\rangle$ , el operador densidad se define como el producto

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (1)$$

El contenido de información del operador densidad es el mismo que el del vector de estado, salvo por la fase global que no es de relevancia desde el punto de vista físico.

El vector de estado  $|\psi\rangle$  representa estados de superposición coherente. La potencia del operador densidad radica en el hecho de que puede representar superposición incoherente también. Por ejemplo, el operador densidad

$$\rho = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\psi\rangle \langle\psi| \quad (2)$$

representa el hecho de que no conocemos en qué estado  $|\psi\rangle$  se encuentra el sistema; tan sólo sabemos que puede estar en  $|\psi\rangle$  con probabilidad  $p_{\alpha}$ .

El vector de estado cuántico  $|\psi\rangle$  representa cierta incertidumbre intrínseca con respecto a los observables del sistema. El operador densidad puede representar un conglomerado de sistemas idénticos en estados diferentes.

Los estados de la forma (1) se llaman estados puros. Un estado que no se puede escribir en la forma (1) se llama mixto y se describe según (2).

Derivando la el operador densidad con respecto al tiempo y recurriendo a la ecuación de Schrödinger  $i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle$ , se puede obtener fácilmente la ecuación de movimiento del operador densidad:

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} H\rho$$

Esta ecuación se llama la ecuación de Schrödinger-von Neumann. El operador densidad permite obtener ecuaciones de evolución más generales que las que se obtienen con la dinámica del vector de estado.

#### 4.4.3 Medida continua de un observable

Una medida continua es una medida en la cual la información se extrae de forma continua de un sistema. La cantidad de información tiende a cero cuando la duración de la medida se aproxima a cero.

Se suele hacer una partición del tiempo en intervalos de longitud  $\Delta t$  y considerar una medida débil en cada uno de ellos. La fortaleza de cada medida es proporcional a la longitud del intervalo. Por último hacemos  $\Delta t \rightarrow 0$ .

En cada intervalo se realiza una medida a través de un operador  $A(\alpha)$  que es una suma ponderada Gaussiana de las proyecciones de los estados propios del observable  $X$  que estamos midiendo (, operador Hermítico). El parámetro  $\alpha$  es un índice continuo indicando el resultado de la medida.

$$A(\alpha) = K \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - \alpha) |x\rangle \langle x| dx$$

donde  $x$  es un estado propio de  $X$  asociado a la función propia  $|x\rangle$ , y

$$\phi(x) = e^{-2k \Delta t x^2}$$

$$k = \left( \frac{4k \Delta t}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}}$$

**Lemma 1** El valor medio  $|\alpha\rangle$  es exactamente  $\langle X \rangle$ .

**Proof.** Basta tener en cuenta que dado el operador  $A(\alpha)$  la probabilidad de obtener el resultado  $\alpha$  es exactamente

$$\mathbb{P}(\alpha) = |A(\alpha)|\psi\rangle|^2 = \langle\psi| A(\alpha)^\dagger A(\alpha)|\psi\rangle$$

Entonces podemos calcular el valor medio de  $\alpha$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \langle\alpha\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \mathbb{P}(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha T_r (A(\alpha)^\dagger A(\alpha) |\psi\rangle \langle\psi| d\alpha) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \langle\psi| \left( K \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-\alpha) |x\rangle \langle x| dx \right) \left( K \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y-\alpha) |y\rangle \langle y| dy \right) \end{aligned}$$

donde

$$A(\alpha)^\dagger A(\alpha) = K^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-\alpha) \phi(y-\alpha) |x\rangle \langle x| |y\rangle \langle y| dx dy$$

Dado que  $|x\rangle$  y  $|y\rangle$  son funciones propias del operador y por tanto son elementos de una base ortonormal, se sigue que

$$\langle x| |y\rangle = \delta(x-y)$$

Así pues,

$$A(\alpha)^\dagger A(\alpha) = K^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-\alpha) \phi(y-\alpha) |x\rangle \langle x| |y\rangle \langle y| dx dy = K^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-\alpha)^2 |x\rangle \langle x| dx$$

El valor medio de  $\alpha$  es escribe por tanto como

$$\langle\alpha\rangle = K^2 \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-\alpha)^2 \langle\psi| |x\rangle^2 dx d\alpha = K^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \phi(x-\alpha)^2 d\alpha \right) \langle\psi| |x\rangle^2 dx$$

La integral anterior se puede calcular de manera cómoda utilizando la siguiente propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-b(x-a)^2} dx = a \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

De esta forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha \phi(x-\alpha)^2 d\alpha = x \sqrt{\frac{\pi}{4k \Delta t}}$$

y



$$\langle \alpha \rangle = K^2 \sqrt{\frac{\pi}{4k \Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi\rangle \langle x|^2 dx = \sqrt{\frac{4k \Delta t}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{4k \Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi\rangle \langle x|^2 dx = \langle X \rangle$$

Ahora analizamos la función densidad de probabilidad  $\mathbb{P}(\alpha)$  :

$$\mathbb{P}(\alpha) = K^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - \alpha)^2 |\psi\rangle \langle x|^2 dx = K^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - \alpha)^2 dx$$

Cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , observamos que la Gaussiana es mucho más ancha que la función de onda  $\psi(x)$  por lo que  $|\psi\rangle \langle x|^2$  se puede aproximar por un delta de Kronecker centrado en  $\langle X \rangle = \langle \alpha \rangle$  :

$$\mathbb{P}(\alpha) = K^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - \alpha)^2 \delta(x - \langle X \rangle) dx = \sqrt{\frac{4k \Delta t}{\pi}} e^{-1k \Delta t (\alpha - \langle X \rangle)^2}$$

Escribimos  $\alpha$  como una cantidad estocástica

$$\alpha_S = \langle X \rangle + \frac{\Delta W}{\sqrt{8k \Delta t}}$$

donde  $\Delta W$  es una variable aleatoria Gaussiana de media cero y varianza  $\Delta t$ .

La medida continua se obtiene cuando se realiza una sucesión de medidas y se toma el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ .

#### 4.4.5 Ecuación maestra estocástica

La ecuación de movimiento es estocástica debido a la naturaleza aleatoria de la medida. Hacemos una medida  $A(\alpha)$  en cada paso de tiempo

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle \approx A(\alpha)|\psi(t)\rangle \approx k e^{-1k \Delta t (\alpha - X)^2} |\psi(t)\rangle$$

Tomando  $\Delta t \rightarrow 0$ , podemos hacer la identificación  $\Delta t = dt$ ,  $\Delta W = dW$ ,  $(\Delta W)^2 = dt$ , y haciendo una expansión de la exponencial y

$$|\psi(t + dt)\rangle \approx (1 - [kX^2 - akX\langle X \rangle] dt + \sqrt{2kX} dW) |\psi(t)\rangle$$

y dado que  $d|\psi\rangle \approx |\psi(t + dt)\rangle - |\psi(t)\rangle$  llegamos a la ecuación de Schrödinger estocástica (SSE):

$$d|\psi\rangle = -(kX^2 - 4kX\langle X \rangle) dt + \sqrt{2kX} dW |\psi(t)\rangle$$

cuyas soluciones evolucionan aleatoriamente y son llamadas trayectorias cuánticas.

### Ecuación de estado:

Ahora estamos en condiciones de escribir la SSE en términos del operador densidad, teniendo en cuenta que  $d\rho \approx \rho(t + \Delta t) - \rho(t)$

Ahora estamos en condiciones de escribir la SSE en términos del operador densidad, teniendo en cuenta

$$d\rho = (d|\psi\rangle)\langle\psi| + |\psi\rangle d(\langle\psi|) + (d|\psi\rangle)d(\langle\psi|) = -k[X, [X, \rho]]dt + \sqrt{2k}(X\rho + \rho - 2\langle X\rangle\rho) dW$$

Esta ecuación es llamada la ecuación maestra estocástica (SME) y las soluciones definen las trayectorias cuánticas  $\rho(t)$ .

### Ecuación de salida:

El operador densidad en cada instante  $t$  da información sobre el estado de conocimiento del observador. El observador obtiene como resultado de la medida el valor esperado más una componente aleatoria debida a la anchura de  $\mathbb{P}(\alpha)$ :

$$dy = \langle X \rangle dt + \frac{dW}{\sqrt{8k}}$$

En realidad tenemos una ecuación diferencial para el resultado de la medida ya que se va adquiriendo información en cada intervalo de tiempo infinitesimal  $dt$ . El conjunto de resultados de medida se suele denominar como registro de medida  $dy(t)$ .

## 5. Forma general de la ecuación maestra estocástica

Mediante incrementos podemos obtener la ecuación de Schrödinger-von Neumann:

$$\rho + d\rho = \left(1 - i\frac{H}{\hbar}dt\right) \rho \left(1 - i\frac{H}{\hbar}dt\right) = \rho - \frac{i}{\hbar}[H, \rho] dt$$

Cualquier transformación del operador densidad debe preservar la positividad de  $\rho$  ya que los valores propios de  $\rho$  representan probabilidades. La forma más general de transformación es la siguiente:

$$\rho \mapsto \sum_n A_n \rho A_n^\dagger \quad (3)$$

Utilizamos un ansatz para el operador estocástico de la forma siguiente:

$$A = 1 - i\frac{H}{\hbar}dt + bdt + cdW$$

Introduciéndolo en (3):

$$d\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] dt + [b, \rho]_+ dt + c\rho c^\dagger dt + (c\rho + \rho c^\dagger) dW$$

con  $[A, B]_+ = AB + BA$ . Se puede comprobar haciendo la media con respecto al operador densidad que  $b = -\frac{c^\dagger c}{2}$ , lo cual conduce a la ecuación maestra siguiente:

$$d\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] dt + \mathcal{D}[c] \rho dt + (c\rho + \rho c^\dagger) dW \quad (4)$$

$$\mathcal{D}[c] \rho = -\frac{1}{2}(c^\dagger c \rho + \rho c^\dagger c)$$

El término  $\mathcal{D}[c] \rho$  representa la perturbación al estado del sistema debida a la medida. La ecuación (4) no preserva la traza del operador densidad debido a que  $Tr[d\rho] = 0$  implica que  $Tr[\rho(c + c^\dagger) dW] = 0$ . Podemos forzar esta situación modificando la ecuación:

$$d\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] dt + \mathcal{D}[c] \rho dt + \mathcal{H}[c] \rho dW$$

$$\mathcal{H}[c] \rho = c\rho + \rho c^\dagger - \langle c + c^\dagger \rangle \rho$$

El término de ruido  $\mathcal{H}[c] \rho$  representa la ganancia de información debida al proceso de medida. Por último cuando tenemos medidas ineficientes es necesario introducir un factor de eficiencia  $\eta$ :

$$d\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] dt + \mathcal{D}[c] \rho dt + \sqrt{\eta} \mathcal{H}[c] \rho dW$$

Hay que notar que el factor de eficiencia sólo afecta al ruido y no a la acción hacia atrás  $\mathcal{D}[c] \rho$ , por lo tanto es independiente de si el observador utiliza o no la información ( $\eta = 1$  ó  $\eta = 0$ ).

Esta ecuación se puede generalizar fácilmente a sistemas con más de un canal de detección.

## 6. Ecuación estocástica del oscilador armónico

Tal y como vimos el Hamiltoniano para un oscilador armónico es de la forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 X^2$$

Consideraremos sólo momentos de primer y segundo orden sobre las variable  $X$  y  $P$ : las esperanzas  $\langle X \rangle$  y  $\langle P \rangle$ , las varianzas  $V_x$  y  $V_p$ , donde  $V_x = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ , y la covarianza  $C_{XP} = \frac{1}{2} \langle [X, P]_+ \rangle - \langle X \rangle \langle P \rangle$ . Mediremos la posición.

Los valores esperados de la posición  $X$  y del momento  $P$  se pueden determinar teniendo en cuenta que  $\langle A \rangle = Tr[A d\rho]$  para un operador arbitrario  $A$ . La ecuación diferencial de  $\langle A \rangle$  se consigue de acuerdo a las siguientes relaciones:

$$Tr[A [H, \rho]] = Tr[[A, H] \rho] = \langle [A, H] \rangle$$

$$Tr[A \mathcal{D}[c] \rho] = Tr \left[ -\left( \frac{1}{2} (A c^\dagger c + c^\dagger c A) + c^\dagger A c \right) \rho \right] = \left\langle -\frac{1}{2} (A c^\dagger c + c^\dagger c A) + c^\dagger A c \right\rangle$$

$$Tr[A \mathcal{H}[c] \rho] = Tr \left[ -\left( (A c + c^\dagger A) - A \langle c + c^\dagger \rangle \right) \rho \right] = \langle (A c + c^\dagger A) - \langle A \rangle \langle c + c^\dagger \rangle \rangle$$

Para la posición tenemos

$$d\langle X \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [X, H] \rangle dt + \left\langle -\frac{1}{2} (X c^\dagger c + c^\dagger c X) + c^\dagger X c \right\rangle dt + \sqrt{\eta} \langle A c + c^\dagger A - \langle A \rangle \langle c + c^\dagger \rangle \rangle dW$$

y para el momentum

$$d\langle P \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [P, H] \rangle dt + \left\langle -\frac{1}{2} (P c^\dagger c + c^\dagger c P) + c^\dagger P c \right\rangle dt + \sqrt{\eta} \langle P c + c^\dagger P - \langle P \rangle \langle c + c^\dagger \rangle \rangle dW$$

Consideramos  $c = \sqrt{\gamma} a$  con un factor de amortiguamiento  $\gamma$ , y

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}x_0} X + i \frac{\sqrt{2}x_0}{\sqrt{2}\hbar} P$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m}}$$

Con estas condiciones llegamos a que

$$d\langle A \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle dt + \left\langle -\frac{1}{2} A c^\dagger c - \frac{1}{2} c^\dagger c A + c^\dagger A c \right\rangle dt + \sqrt{\eta} \langle A c + c^\dagger A - \langle A \rangle \langle c + c^\dagger \rangle \rangle dW$$

### 6.3 Ecuación maestra

Juntando los resultados anteriores las ecuaciones maestras para el oscilador armónico cuántico son las siguientes:

$$d\langle X \rangle = \frac{1}{m} \langle P \rangle dt - \frac{\gamma}{2} \langle X \rangle dt + \sqrt{2\eta\gamma\frac{m\omega_0}{\hbar}} \left( V_X - \frac{\hbar}{2m\omega_0} \right) dW$$

$$d\langle P \rangle = -m\omega_0^2 \langle X \rangle dt - \frac{\gamma}{2} \langle P \rangle dt + \sqrt{2\eta\gamma\frac{m\omega_0}{\hbar}} C_{XP} dW$$

$$\dot{V}_X = \frac{2}{m} C_{XP} - \gamma \left( V_X - \frac{\hbar}{2m\omega_0} \right) - 2\eta\gamma\frac{m\omega_0}{\hbar} \left( V_X - \frac{\hbar}{2m\omega_0} \right)^2$$

$$\dot{V}_P = -m\omega_0^2 C_{XP} - \gamma \left( V_P - \frac{\hbar}{2m\omega_0} \right) - 2\eta\gamma\frac{m\omega_0}{\hbar} C_{XP}^2$$

$$\dot{C}_{XP} = \frac{1}{m} V_P - m\omega_0^2 V_X - \gamma C_{XP} - 2\eta\gamma\frac{m\omega_0}{\hbar} C_{XP} \left( V_X - \frac{\hbar}{2m\omega_0} \right)$$

Las últimas tres ecuaciones correspondientes a los momentos de orden 2 son deterministas, pero no lineales. Por tanto, es necesario linealizarlas y forzar a que sean disipativas (, los valores propios del Jacobiano deben encontrarse en el semiplano izquierdo).

## Capítulo 5 IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROL ÓPTIMO CUÁNTICO

En este capítulo, se introducirá el control óptimo para el oscilador, para ello se necesitará resolver las ecuaciones de los parámetros de la función valor. Estas ecuaciones se resolverán numéricamente y analíticamente, con esta última se implementará el control

## 5.1 Solución de los parámetros de la función valor

### 5.1.1 Solución numérica

Para la solución numérica se probó como ejemplo la siguiente ecuación diferencial estocástica no lineal

$$dx(t) = f(x(t)) dt + g(x(t)) u(t) dt + \sigma(x(t)) dW(t)$$

El objetivo es conseguir desarrollar el control del sistema, para que  $x(t)$  se aproxime a un estado estacionario  $x_f$  utilizando la menor energía. Definimos el índice de desempeño:

$$L(x, u) = \|u\|^2 + \frac{1}{2}(x - x_f)^T M(x - x_f)$$

con  $M = M^T$  y el coste terminal  $K(x(T)) = 0$

El control viene dado por la siguiente función valor  $V : [0, T] \times R^n \rightarrow R$

$$V(t, x) = \inf_{u: [t, T] \rightarrow U} J(t, x; u)$$

$$V(t, x) = K(x(T))$$

Esta función valor satisface la ecuación en derivadas parciales de segundo orden (Hamilton-Jacobi-Bellman).

Nuestra acción de control será la siguiente:

$$u = -g^T(x) V_x$$

$$V(t, x) = a_0(t) + a_1(t)^T x + x^T B(t) x$$

Tenemos el siguiente problema de valor final

$$\begin{aligned} \dot{a}_0(t) + g^T B(t) g + \frac{1}{2} x_f^T M x_f + a_1(t)^T b &= 0 \\ \dot{a}_1(t) - M x_f + 2F^T B(t) g + A^T a_1(t) + 2A^T B(t) b &= 0 \\ \dot{B}(t) + M + F^T B(t) F + 2B(t) A &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0(T) &= 0 \\ a_1(T) &= 0_n \\ B(T) &= 0_{n \times n} \end{aligned}$$

Figura 1: Ecuaciones diferenciales de los parámetros involucrados en la función valor

Como se observa en la *Figura 1: Ecuaciones diferenciales de los parámetros involucrados en la función valor* para poder resolver estas ecuaciones hay que vectorizarlas previamente, esto se ha hecho utilizando el producto de Kronecker. Quedando las ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \text{vec}(\dot{B}) = -((F \otimes F)^T + 2(A \otimes I)^T) \text{vec}(B) - \text{vec}(M) \\ \text{vec}(B(T)) = 0_{n^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = Mx_f - (2(g \otimes F)^T + (b \otimes A)^T) \text{vec}(B) \\ a_1(T) = 0 \end{cases}$$

Una vez vectorizadas, resolvimos el sistema numéricamente a través de Matlab, mediante el comando 'ode45', que permite poner condiciones finales en lugar de condiciones iniciales. Así se pudo introducir directamente sin ningún cambio de variable, como se puede ver a continuación:

Donde:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

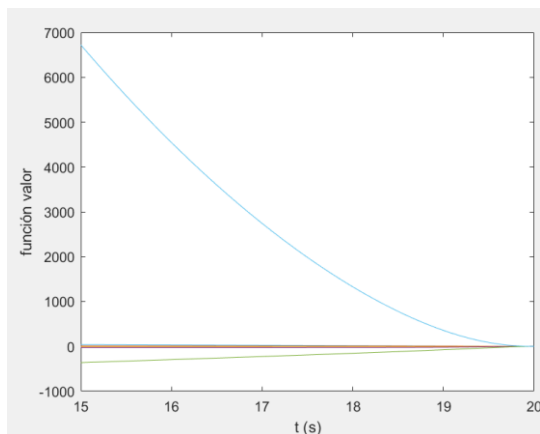
$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

```

1 function [dx]= TestFunction(t,x)
2 F=diag([1,2,3]);
3 M=[1,2,3;4,5,6;7,8,9];
4 A=diag([-2,-3,-5]);
5 g=[2;3;4];
6 b=[2;6;4];
7
8 % linealizacion de B
9 vec=-(kron(F,F)+2*kron(A,eye(size(A))))';
10 [m,n]=size(M);
11 vecM=reshape(M,m*n,1)
12 xf=zeros(3,1)
13 Mxf=M*xf
14
15 % linealizacion de a1
16
17 Vba1=-2*(kron(g,F)+kron(b,A))';
18
19 a1=-A'
20
21 % Linealizacion de a0
22 Vba0=-kron(g,g)';
23 ctea0=-0.5*xf'*MxF
24 ala0=b'
25
26 [dx]=[vec,zeros(9,1),zeros(9,3);Vba1,a1,zeros(3,1);Vba0,ala0,zeros(1,1)]*x+[vecM;M*xf;ctea0]
27
28 M=[vec,zeros(9,1),zeros(9,3);Vba1,a1,zeros(3,1);Vba0,ala0,zeros(1,1)]
29

```

Figura 2: Programa numérico



M =

3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	18	0	0	8	0	0	2	0	0
0	4	0	0	24	0	0	8	0	0	3	0
0	0	8	0	0	42	0	0	16	0	0	5
-4	-6	-8	-6	-9	-12	-8	-12	-16	2	6	4

Como la función valor es una ecuación Backward (el tiempo fluye hacia atrás) mientras que la SDE es una ecuación forward (el tiempo fluye hacia adelante). Dada esta incongruencia con el tiempo se procedió a su resolución analítica. [7.2]

### 5.1.2 Solución analítica

De las tres ecuaciones *Figura 1: Ecuaciones diferenciales de los parámetros involucrados en la función valor*, necesitamos dos de ellas, ( $B(t)$  y  $a_1(t)$ ), debido a que la acción de control viene dada por el gradiente de la función valor y al calcular dicho gradiente la parte constante  $a_0(t)$  desaparece.

El cálculo analítico del  $B(t)$ , es de la forma lineal conocida:

$$\dot{x} = Ax + b$$



$$x(T) = 0$$

Como ya se ha comentado anteriormente estas ecuaciones son del tipo Backward hay que hacer el siguiente cambio de variable para conseguir convertirlas en ecuaciones forward:

$$s = T - t \quad \text{con} \quad t < T$$

Así la ecuación queda como:

$$\dot{y}(s) = -\dot{x}(T-s) = -Ax(T-s) - b = -Ay(s) - b$$

$$y(0) = x(T) = 0$$

**Solución homogénea:**

$$y(s) = e^{-As} C(s)$$

Cálculo de la constante C(s)

$$\left. \begin{array}{l} \dot{y}(s) = -A e^{-As} C(s) + e^{-As} \dot{C}(s) \\ \dot{y}(s) = -A y(s) - b \end{array} \right\} \begin{array}{l} -b = e^{-As} \dot{C}(s) \rightarrow \dot{C}(s) = -b e^{As} \\ C(s) = -\left(\int_0^s b e^{A\alpha} d\alpha\right) + C(0) \end{array}$$

Cálculo de y(s)

$$y(s) = \left(-\int_0^s e^{-A(s-\alpha)} d\alpha\right) b = -e^{-As} \left(\int_0^s e^{A\alpha} d\alpha\right) b = e^{-As} A^{-1} [e^{As} - I] b = A^{-1} [I - e^{-As}] b$$

$$y(s) = A^{-1} [I - e^{-As}] b$$

Identificando términos:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -((F \otimes F)^T + 2(A \otimes I)^T) = N \\ b = -\text{vec}(M) \\ y(s) = \text{vec}(B(t)) \end{array} \right.$$

La ecuación queda como:

$$y(s) = ((F \otimes F)^T + 2(A \otimes I)^T)^{-1} * \left(I - e^{-((F \otimes F)^T + 2(A \otimes I)^T)s}\right) * \text{vec}(M)$$

$$y(s) = N^{-1} * (I - e^{-Ns}) * \text{vec}(M)$$

Recordando que  $s=T-t$  la solución quedará de la siguiente forma:

$$\text{vec}(B(t)) = N^{-1} * (I - e^{-N(T-t)}) * \text{vec}(M)$$

El cálculo analítico de  $a_1(t)$ :

El procedimiento para resolver la ecuación de  $a_1(t)$ , ha sido bastante más complejo, debido a que dicha ecuación depende de  $\text{vec}(B(t))$ , nos encontramos con multiplicación de exponenciales con matrices y esto dificulta su cálculo.

$$(1) \dot{a}_1(t) = Mx_f - A^T a_1(t) - (2(g \otimes F)^T + (b \otimes A)^T) \text{vec}(B)$$

Llamaremos:

$$h(t) = Mx_f - (2(g \otimes F)^T + (b \otimes A)^T) \text{vec}(B(t)) = Mx_f + H \text{vec}(B(t))$$

Quedando la ecuación (2) como:

$$(2) \dot{a}_1(t) = -A^T a_1(t) - h(t)$$

Como en el caso anterior, hay que transformar la ecuación de condiciones finales en condiciones iniciales haciendo el cambio de variable

$$y(s) = a_1(T - t)$$

$$\dot{y}(s) = -\dot{a}_1(T - t) = A^T a_1(T - t) + h(T - t) = A^T a_1(s) - h(s)$$

Con  $y(0) = X(T) = 0$

Utilizando el método de variación de constantes con:  $y(s) = e^{A^T s} C(s)$

$$\begin{cases} \dot{C}(s) = e^{-A^T s} h(s) \\ y(0) = C(0) = 0 \end{cases}$$

Por lo que:  $C(s) = \int_0^s e^{-A^T \alpha} h(\alpha) d\alpha$ , quedando la ecuación

$$y(s) = e^{-A^T s} \int_0^s e^{-A^T \alpha} h(\alpha) d\alpha$$

Deshaciendo los cambios, la ecuación quedará como:

$$\begin{aligned} y(s) &= e^{A^T s} \int_0^s e^{-A^T \alpha} (Mx_f + H \text{vec}(B(\alpha))) d\alpha = \\ &= e^{A^T s} \int_0^s e^{-A^T \alpha} \left( Mx_f + HN^{-1} (I - e^{-NT}) \text{vec}(M) \right) d\alpha \\ &\quad - e^{A^T s} \int_0^s e^{-A^T \alpha} HN^{-1} e^{N\alpha} \text{vec}(M) d\alpha \\ &= -A^{-T} (I - e^{A^T s}) \left( Mx_f + HN^{-1} (I - e^{-NT}) \text{vec}(M) \right) \\ &\quad - e^{A^T s} \left( \int_0^s e^{-A^T \alpha} HN^{-1} e^{N\alpha} d\alpha \right) \text{vec}(M) \end{aligned}$$

En la última integral es donde tenemos el problema, para su cálculo recurriremos a Matlab o haciendo el siguiente cambio:

$$e^{-A^T \alpha} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\alpha) (-A^T)^i$$

$$e^{N\alpha} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(\alpha) N^i$$

Siendo  $a_i(\alpha)$  y  $b_i(\alpha)$  los polinomios a determinar con el método de Cayley-Hamilton. De esta forma

$$\int_0^s e^{-A^T \alpha} H N e^{N\alpha} d\alpha = \sum_{i,j=0}^{n-1} \beta_{ij}(s) (-A^T)^i H N^{-1} N^j$$

Con  $\beta_{ij}(s) = \int_0^s a_i(\alpha) * b_j(\alpha) d\alpha$

Finalmente, la solución a la ecuación (2) deshaciendo el cambio ( $s=T-t$ ) será:

$$\alpha_1(t) = y(T-t) = -A^T (I - e^{A^T(T-t)}) (M x_{f+} + H N^{-1} (I - e^{-NT}) \text{vec}(M)) - e^{A^T(T-t)} \sum_{i,j=0}^{n-1} \beta_{ij}(T-t) (-A^T)^i H N^{-1} N^j \text{vec}(M)$$

Por lo que la estructura del controlador, dado por la función valor quedará como:

$$u(t) = 2 \text{vec}(B)x + \alpha_1$$

*Ecuación 1 Acción de control*

### Calculo simbólico mediante Matlab

Para el cálculo de la última integral dada su complejidad, recurriremos a MATLAB para su cálculo simbólico, pero hay que tratarla previamente para que se ejecute de forma más eficiente.

Para ello recurriremos a la forma canónica de Jordan  $\rightarrow A = P J P^{-1}$ , siendo J la matriz de Jordan.

$$\left( \begin{array}{c|c|c} J1 & & \\ \hline & J2 & \\ \hline & & Jm \end{array} \right)$$

Siendo cada J un bloque de la matriz correspondiente a un subespacio invariante

La matriz F del oscilador armónico es de la siguiente forma:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es nilpotente de orden 2, es decir  $F^2 = O_{n \times n}$ . Por la expansión en serie de la exponencial:  $e^{Ft} = I + Ft$

El espectro (conjunto de los valores propios de la matriz) de  $F$  es  $\sigma(F) = \{0\}$ , con  $\ker(F) = \text{span}(e_1, e_2, e_4)$ . Podemos comprobar que  $\mathbb{R}^5$  se descompone en una suma directa de subespacios invariantes:

$$\mathbb{R}^5 = \text{span}\left(e_1, \frac{e_3}{\sqrt{a}}\right) \oplus \text{span}\left(e_2, \frac{e_5}{\sqrt{a}}\right) \oplus \text{span}(e_4)$$

Esto significa que  $F = P J P^{-1}$ , donde  $P = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$  y la matriz de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia  $(F \otimes F)t = (P \otimes P)(e^{Jt} \otimes e^{Jt})(P^{-1} \otimes P^{-1})$ , sabemos que:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Supondremos que  $A$  es una matriz diagonalizable:  $A = U \Lambda U^{-1}$ . Entonces:

$$e^{(A \otimes I)t} = (U \otimes U)(e^{\Lambda t} \otimes e^{tI})(U^{-1} \otimes U^{-1}) = (U \otimes U)(e^{(\Lambda+I)t} \otimes I)(U^{-1} \otimes U^{-1})$$

Recordemos que:  $N = -((F \otimes F)^T + 2(A \otimes I)^T)$

De manera que

$$\begin{cases} e^{-(F \otimes F)^T t} = (P^{-T} \otimes P^{-T})(e^{-Jt} \otimes e^{-Jt})(P^T \otimes P^T) \\ e^{-2(A \otimes I)^T t} = (U^{-T} \otimes U^{-T})(e^{(\Lambda+I)t} \otimes I)(U^T \otimes U^T) \end{cases}$$

Deseamos calcular:

$$\begin{aligned} & \int_0^s e^{-A^T \alpha} H N^{-1} e^{N \alpha} d\alpha \\ &= \int_0^s U^{-T} e^{-\Delta \alpha} U^T H N (P^{-T} \otimes P^{-T})(e^{-Jt} \\ & \otimes e^{-Jt})(P^T \otimes P^T)(U^{-T} \otimes U^{-T})(e^{(\Lambda+I)t} \otimes I)(U^T \otimes U^T) d\alpha \\ &= U^{-T} \int_0^s e^{-\Delta \alpha} U^T H N (P^{-T} e^{-J\alpha} P^T U^{-T} e^{-2(\Lambda+I)t} U^T \otimes P^{-T} e^{-J\alpha} P^T) d\alpha \end{aligned}$$

## 5.2 Cálculo de los puntos de equilibrio

Una vez calculada la acción de control, el siguiente paso fue hallar los puntos de equilibrio, bajo los cuales el sistema debe estabilizarse. Dichos puntos de equilibrio lo calcularemos a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{2}{m}\bar{x}_5 - \gamma\bar{x}_3 + \gamma b - a(\bar{x}_3 - b)^2 = 0 \\ e\bar{x}_5 - \gamma(\bar{x}_4 - c) - a\bar{x}_5^2 = 0 \\ \frac{1}{m}\bar{x}_4 + e\bar{x}_3 - \gamma\bar{x}_5 - a\bar{x}_5(\bar{x}_3 - b) = 0 \end{cases}$$

De aquí fijando  $(\bar{x}_3, \bar{x}_5)$ , determinamos  $\bar{x}_4$

$$\bar{x}_4 = -m(e\bar{x}_3 + \bar{x}_5(a(b - \bar{x}_3) - \gamma))$$

Con lo cual sólo tenemos dos ecuaciones para el equilibrio:

$$\frac{2}{m}\bar{x}_5 - \gamma\bar{x}_3 + \gamma b - a(\bar{x}_3 - b)^2 = 0$$

$$p(\bar{x}_3, \bar{x}_5) = \bar{x}_5(e - a\bar{x}_5) - \gamma(-m(e\bar{x}_3 + \bar{x}_5(a(b - \bar{x}_3) - \gamma)) - c) = 0$$

De la primera ecuación tenemos la dependencia de  $\bar{x}_5$  con respecto a  $\bar{x}_3$ :

$$\bar{x}_5 = \frac{m}{2}(\gamma\bar{x}_3 - \gamma b + a(\bar{x}_3 - b)^2)$$

Con lo cual el Jacobiano depende solo de  $\bar{x}_3$  y el polinomio característico es de la forma general:

$$P_c(s; J) = \det(J - sI) = s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

El objetivo es conseguir que el espectro del Jacobiano, es decir, su conjunto de valores propios pertenezca a:  $\sigma(J) \subset \mathbb{C}^{-1}$ . Para ello aplicaremos el criterio de Routh al polinomio característico.

Donde:

- $\alpha_0 = (-1)^0 \sum \text{Menores principales de orden 3} = \det(J)$
- $\alpha_1 = (-1)^1 \sum \text{Menores principales de orden 2} = -\left( \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \right)$
- $\alpha_2 = (-1)^2 \sum \text{Menores principales de orden 1} = T_r(J)$

Una vez calculados los coeficientes del polinomio característico ya podemos aplicar Routh para forzar que los valores propios de la matriz sean negativos y puedan converger

S <sup>3</sup> :	1	$\alpha_1$
	$\alpha_2$	$\alpha_0$
S <sup>1</sup> :	$\frac{\alpha_2 \alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2}$	
S <sup>0</sup> :	$\alpha_0$	

Deducimos  
que :

$$\alpha_2(\bar{x}_3) > 0$$

$$\alpha_2(\bar{x}_3)\alpha_1(\bar{x}_3) > \alpha_0(\bar{x}_3)$$

$$\alpha_0(\bar{x}_3) > 0$$

$$f(\bar{x}_3) = 0$$

Hacemos los cálculos con Matlab:

```

1 - g=1
2 - h=1
3 - n=1
4 - m=1
5 - wo=1
6 - a=2*g*g*m*wo/h
7 - b=h/(2*m*wo)
8 - c=(m*wo*h)/2
9 - e=-m*(wo^2)
10
11 - syms x3
12 - syms x5
13 - syms x4
14
15 - x5=(m/2)*(g*x3-g*b+a*(x3-b)^2)
16
17 - A0=[-2*a*b-2*a*x3-g 0 2/m; 0 -g e-2*a*x5; e-2*a*x5 1/m a*b-a*x3-g ]
18 - A1=[-g e-2*a*x5; 1/m e-2*a*x5]
19 - A2=[-2*a*b-2*a*x3-g 2/m; e-2*a*x5 a*b-a*x3-g]
20 - A3=[-2*a*b-2*a*x3-g 0; 0 -g]
21 - det(A0)
22 - det(A1)
23 - det(A2)
24 - det(A3)
25

```

```

26
27 - a0=det (A0)
28
29 - a1= det (A1)+det (A2)+det (A3)
30
31
32 - a2= (-4*x3+1)-1-2*x3
33 - a012=(a1*a2)-a0
34 - x3>0
35 %función f(x3,x5)
36 - x5=1/2*(x3-1/2+2*(x3-1/2)^2)
37 - f=x5*(2.71-2*x5)+(2.71*x3+x5*(2*(1/2-x3)-1))-1
38 - hold on
39 - axis([0.1288,1.8552,-40,10])
40 - fplot(x3,a0,'r')
41 - fplot(x3,a012,'b')
42 - fplot(x3,a2,'m')
43 - fplot(x3,f,'black')|
44 - legend('a_0','a_{012}','a_2','f')
45 - xlabel('x_3')
46 - grid
47
48 % Con estos cálculos f sólo corta a a_2
49 % x_3 están en el intervalo [0.1288,1.8552]
50
51 - roots(sym2poly(a2-f))
52
53 - figure
54 - fplot(x3,x5,[0.1288,1.8552],'b')
55 - ylabel('x_5')
56 - xlabel('x_3')
57 - grid
58 - roots(sym2poly(x5))
59
60 % El valor de x_5 debe ser superior a 0.5
61
62 - figure
63 - fplot(x3,x4,[0.1288,1.8552],'r')
64 - ylabel('x_4')
65 - xlabel('x_3')
66 - grid
67
68 % Para x_4 no hay problema: x_4>=0.

```

Figura 3: Calculo de los puntos de equilibrio

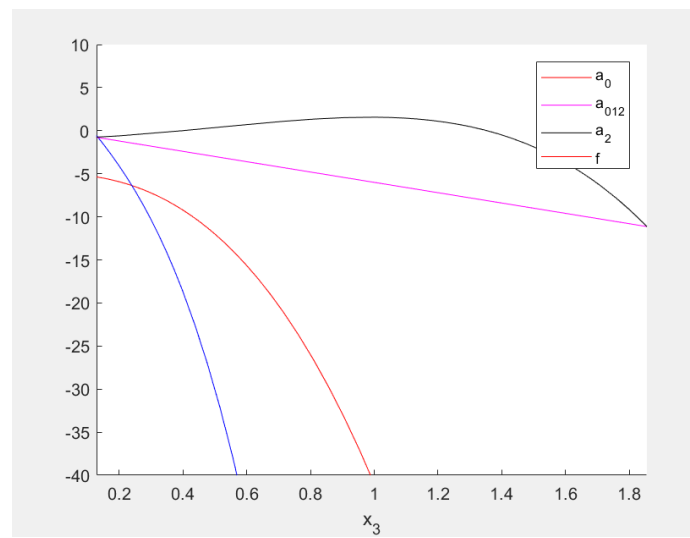
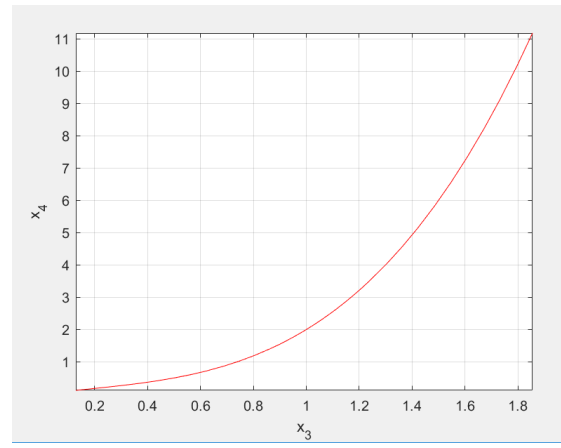
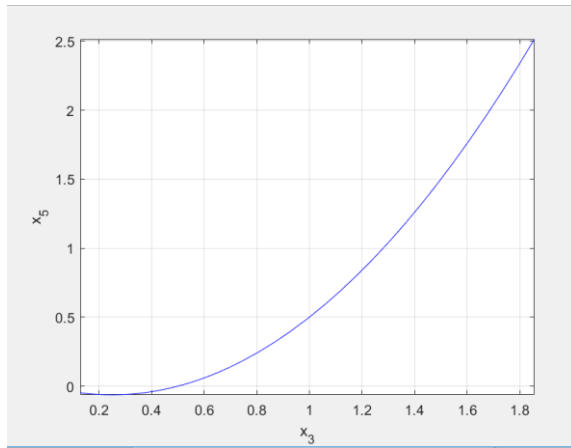


Figura 4 Representación de los puntos de equilibrio



## CAPÍTULO 6 SIMULACIÓN Y RESULTADOS

En este capítulo se simula el oscilador armónico para ver los resultados del control, también se mostrará su gráfica. Por ultimo simularemos el sistema introduciéndole el error

Generalmente tenemos medidas ineficientes en el oscilador: El observador es incapaz de registrar toda la medida de la señal. La necesidad de considerar medidas ineficientes surge originalmente en óptica cuántica donde los detectores de fotones sólo detectarán alguna fracción de los fotones incidentes. Esta fracción se denota por  $\eta \in [0,1]$  y se denomina eficiencia del detector

La constante de Plank se puede normalizar  $\hbar = 1$ .

La masa, la tomaremos unitaria, la velocidad de emisión espontánea es  $\gamma$  y es un valor libre a elegir, al igual que la frecuencia de oscilación  $\omega_0$ .

Las ecuaciones del oscilador cuántico son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \\ dx_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 - \frac{\gamma}{2}x_1 \\ ex_1 - \frac{\gamma}{2}x_2 \\ \frac{2}{m}x_5 - \gamma x_3 + \gamma b - a(x_3 - b)^2 \\ ex_5 - \gamma(x_4 - c) - ax_5^2 \\ \frac{1}{m}x_4 + ex_3 - \gamma x_5 - ax_5(x_3 - b) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u dt + \begin{pmatrix} \sqrt{a}(x_3 - b) \\ \sqrt{a}x_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dW$$

Donde las constantes son las siguientes:

$$\begin{aligned} a &= 2\eta\gamma m \frac{\omega_0}{\hbar}; & b &= \frac{\hbar}{2m\omega_0} \\ c &= \frac{m\omega_0\hbar}{2}; & e &= -m\omega_0^2 \end{aligned}$$

Si linealizamos las tres últimas ecuaciones, en el punto estacionario:

$$\begin{cases} \frac{2}{m}\bar{x}_5 - \gamma\bar{x}_3 + \gamma b - a(\bar{x}_3 - b)^2 = 0 \\ e\bar{x}_5 - \gamma(\bar{x}_4 - c) - a\bar{x}_5^2 = 0 \\ \frac{1}{m}\bar{x}_4 + e\bar{x}_3 - \gamma\bar{x}_5 - a\bar{x}_5(\bar{x}_3 - b) = 0 \end{cases}$$

Y calculamos el Jacobiano del campo vectorial  $(\dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5)$

$$J(\bar{x}_3, \bar{x}_5) = \begin{pmatrix} 2ab - 2a\bar{x}_3 - \gamma & 0 & \frac{2}{m} \\ 0 & -\gamma & e - 2a\bar{x}_5 \\ e - a\bar{x}_5 & \frac{1}{m} & ab - a\bar{x}_3 - \gamma \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones del oscilador quedan de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \\ dx_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e}{2} & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\gamma}{2} & 2ab - 2a\bar{x}_3 - \gamma & 0 & \frac{2}{m} \\ 0 & 0 & 1 & -\gamma & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & e - a\bar{x}_5 & \frac{1}{m} & e - 2a\bar{x}_5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 2ab - 2a\bar{x}_3 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u dt + \begin{pmatrix} \sqrt{a}(x_3 - b) \\ \sqrt{a}x_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dW$$

Una vez calculada la función valor y los puntos de equilibrio, podemos realizar el cálculo de la ecuación diferencial estocástica y su simulación. Cuyo código se muestra a continuación:

```

1  % Control de un Oscilador Cuántico
2
3  % Constantes del modelo
4
5  gamma=1;
6  h=1;           % Constante de Planck
7  eta=1;
8  m=1;          % Masa de la Partícula
9  wo=1;
10 a=2*gamma*eta*m*wo/h;
11 bb=h/(2*m*wo);
12 c=(m*wo*h)/2;
13 e=-m*(wo^2);
14
15 % Puntos de equilibrio
16
17 xf=[0.5;0.5;0.5;0.5;0.5];
18
19 % Descripción en el espacio de estados
20 % dx=(Ax+b)*dt+g*u*dt+(Fx+G)dW
21
22 A=[-gamma/2      1/m      0      0      0;
23     e      -gamma/2      0      0      0;
24     0      0      2*a*(bb-xf(3))-gamma      0      2/m;
25     0      0      0      -gamma      e-2*a*xf(5);
26     0      0      0      e-a*xf(5)      1/m      a*(bb-xf(3))-gamma];
27
28 b=[0;0;0;0;0];
29 g=[0;1;0;0;0];
30 F=zeros(5,5);
31 F(1,3)=sqrt(a);
32 F(2,5)=sqrt(a);
33 G=[-bb*sqrt(a);0;0;0;0];
34

```

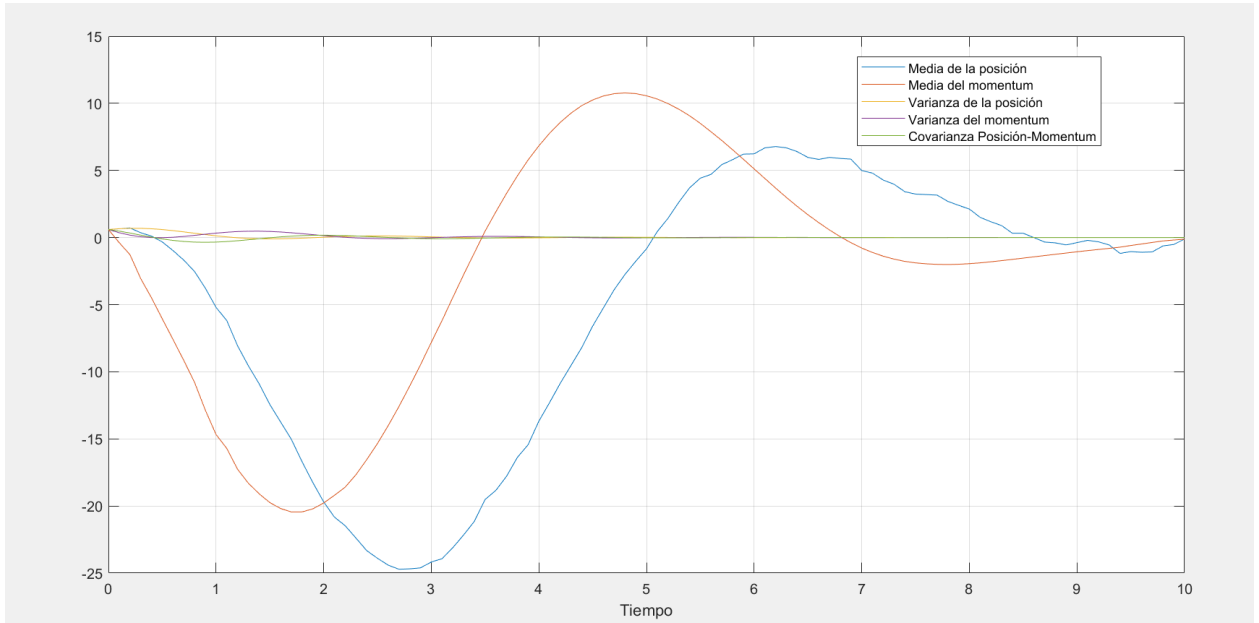
```

35 % Función de coste
36
37 M=eye(5); % Penalización terminal M
38 T=10; % Tiempo Final
39
40
41 % Cálculo de la función valor
42 % V(t,x)=a0(t)+al(t)'*x+x'*B(t)*x;
43
44 % Vectorización de la matriz B(t): vec(B)
45
46 N=-(kron(F,F)+2*kron(A,eye(5)))';
47
48
49 B = @(t) inv(N)*(eye(25)-expm(-N*(T-t)))*reshape(M,[25,1]);
50
51 % Solución del vector al(t)
52
53 H=-2*(kron(g,F)+kron(b,A))';
54
55 syms alpha;
56 syms h;
57
58 % Cálculo de la integral con matrices que no conmutan
59
60 P=[0,1,0,0,0;0,0,0,1,0;1,0,0,0,0;0,0,0,0,1;0,0,1,0,0];
61
62 [U,D]=eig(A);
63
64 syms I(alpha)
65
66 E=@(alpha) [1,0,0,0,0;-alpha,1,0,0,0;0,0,1,0,0;0,0,-alpha,1,0;0,0,0,0,1];
67 f=kron(diag(exp(diag(D))*alpha),kron(E(alpha)*inv(U')*diag(exp(-2*(diag(D)+1))*alpha),E(alpha)*inv(U')));
68
69 disp('Haciendo la integración');
70
71 I(alpha)=int(f,alpha);
72
73 disp('Termina la integración');
74
75 R1=kron(inv(U'),kron(inv(P'),inv(P')));
76 R2=kron(inv(U'),kron(inv(U'*P'),inv(U'*P')))*reshape(H*inv(N),5*5*5,1);
77
78 R=@(t) reshape(R1*(I(T-t)-I(0))*R2,5,25);
79
80 al=@(t) -inv(A')*(eye(5)-expm(A'*(T-t)))*(M*xf+(H*inv(N)*(eye(25)-expm(-N*T))-expm(A'*(T-t))*R(t))*reshape(M,[25,1]));
81
82 % Simulación Controlada
83
84 % Drift Al(t)+Bl(t)X(t)
85 disp('Comienza la simulación');
86 drift=@(t,X) (A-2*g*g'*reshape(B(t),5,5))*X-g*g'*al(t);
87
88 % Difusión
89
90 sigma = @(t,X) F*X+G;
91
92 % Construcción del Modelo
93
94 obj = sde(drift,sigma,'StartTime',0,'StartState',xf+0.1);
95
96 dt=0.1;
97 [X2,T,X] = obj.simulate(100,'DeltaTime',dt);
98 plot(T,X2)
99 xlabel('Tiempo')
100 grid on;

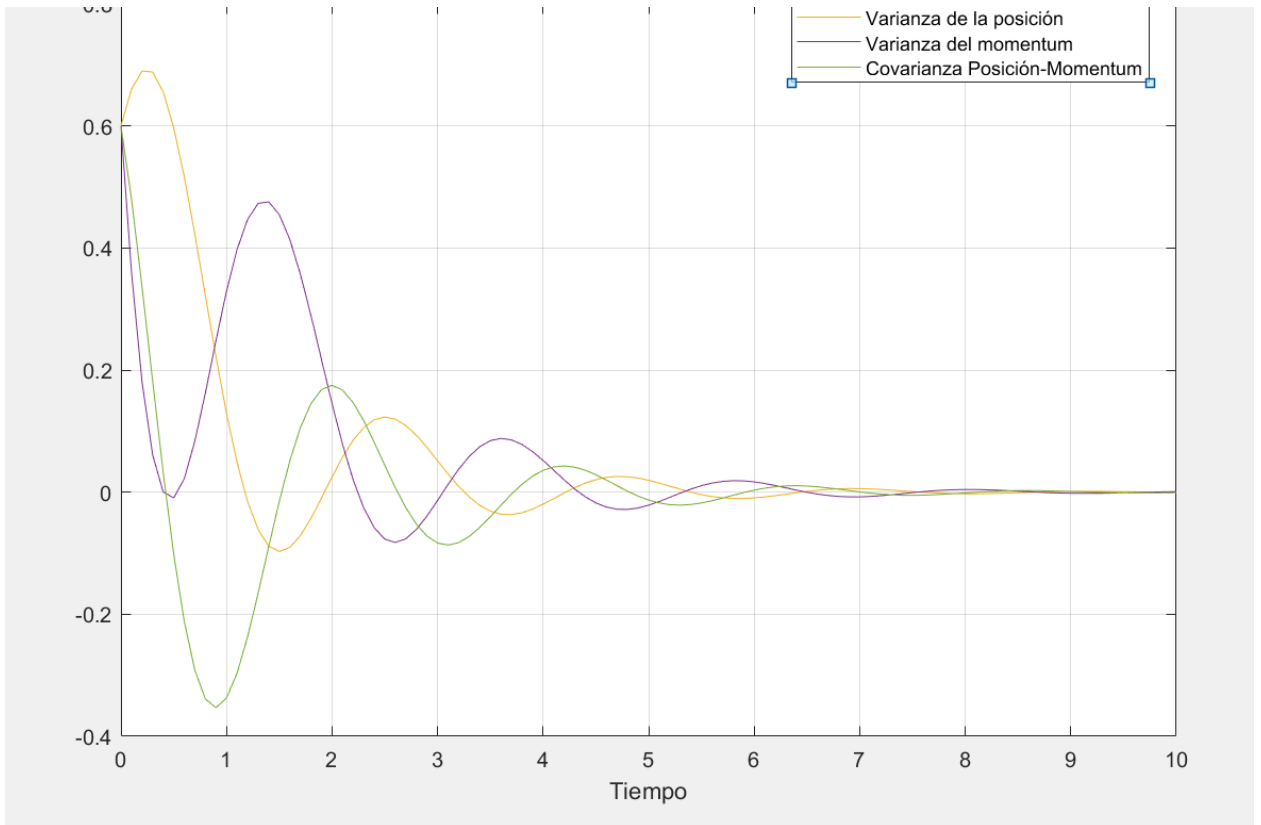
```

El resultado de la simulación es el siguiente:

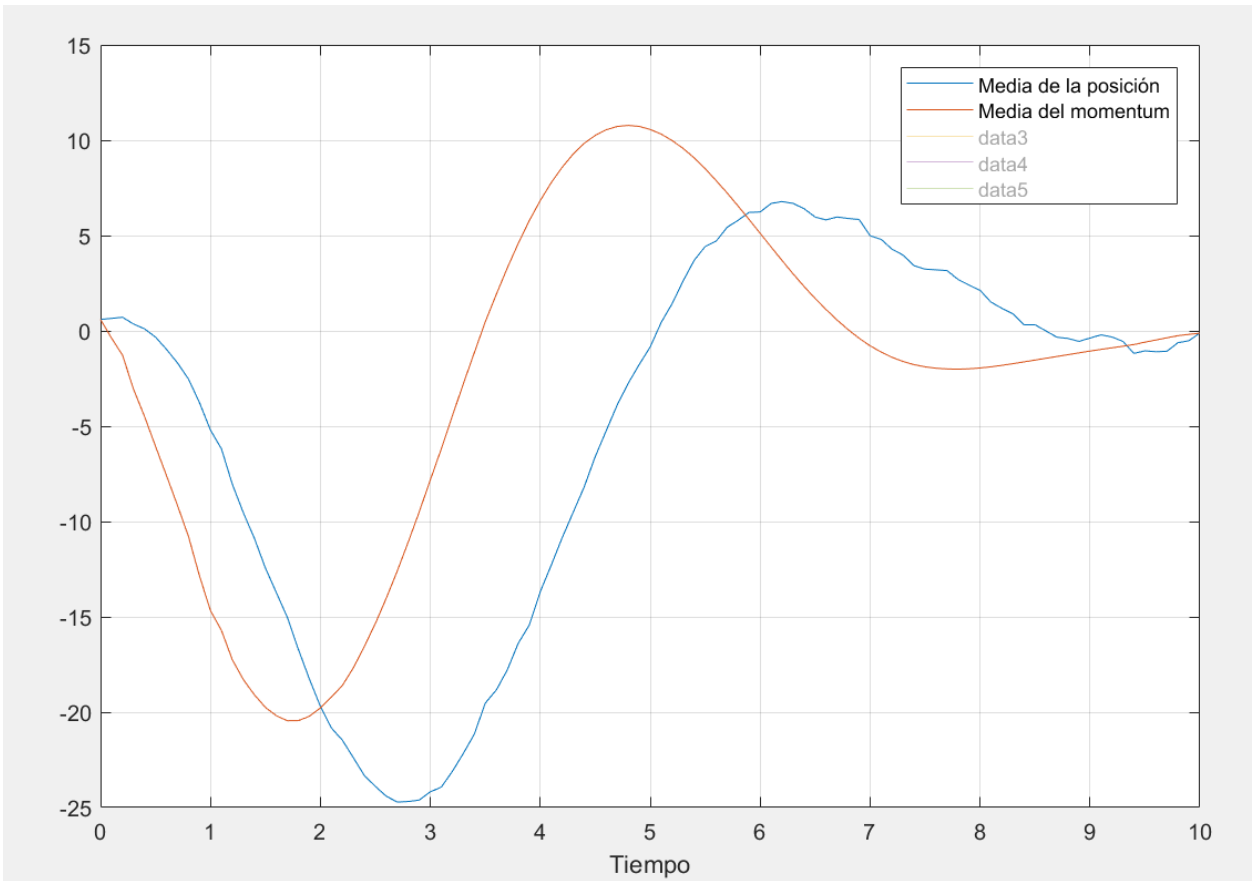
- Para: 
$$\begin{cases} \gamma = 1 \\ \hbar = 1 \\ m = 1 \\ \omega_0 = 1 \end{cases}$$



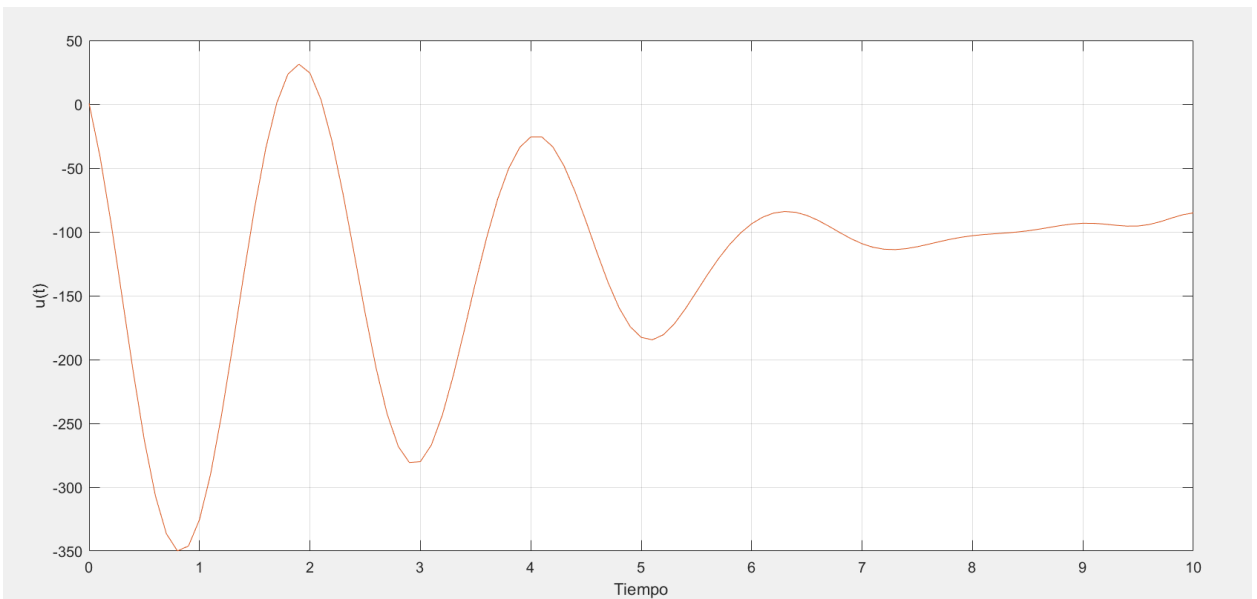
Las variancias van recogiendo el grado de información del sistema, es decir la incertidumbre del sistema y este se hace cada vez menos hasta que llegamos a la información completa del sistema, esto se debe a que hemos forzado en su linealización. Como se observa a continuación las varianzas y la covarianza, se logran estabilizar rápidamente



Tanto la media de la posición como la media del momentum, al principio muestran valores negativos, esto se debe a que en el control óptimo no hay un criterio único si no que hay libertad a la hora de escribir el índice de desempeño, se suele hacer por prueba y error. Se puede observar en la siguiente figura:



**La señal de control de este sistema es la siguiente**



La simulación también se ha realizado introduciendo el error, por lo cual las variables de la simulación pasan a ser los errores de los valores que teníamos anteriormente

$$e = x - \bar{x}$$

$$de = dx - d\bar{x} = Jx dt + gu dt + \sigma(x)dW$$

$$x = e + \bar{x}$$

$$dx = (Je + J\bar{x}) dt + gu dt + (Fe + F\bar{x} + G(x)) dW$$

```

1 | % Control de un Oscilador Cuántico
2 |
3 | % Constantes del modelo
4 |
5 | gamma=1;
6 | h=1; % Constante de Planck
7 | eta=1;
8 | m=1; % Masa de la Partícula
9 | wo=1;
10 | a=2*gamma*eta*m*wo/h;
11 | bb=h/(2*m*wo);
12 | c=(m*wo*h)/2;
13 | e=-m*(wo^2);
14 |
15 | % Puntos de equilibrio
16 |
17 | xf=[0.5;0.5;0.5;0.5;0.5];
18 |
19 | % Descripción en el espacio de estados
20 | % dx=(Ax+b)*dt+g*u*dt+(Fx+G)dW
21 |
22 | A=[-gamma/2 1/m 0 0 0;
23 | e -gamma/2 0 0 0;
24 | 0 0 2*a*(bb-xf(3))-gamma 0 2/m;
25 | 0 0 0 -gamma e-2*a*xf(5);
26 | 0 0 e-a*xf(5) 1/m a*(bb-xf(3))-gamma];
27 |
28 | b=[0;0;0;0;0]+A*xf;
29 | g=[0;1;0;0;0];
30 | F=zeros(5,5);
31 | F(1,3)=sqrt(a);
32 | F(2,5)=sqrt(a);
33 | G=[-bb*sqrt(a);0;0;0;0]+F*xf;
34 | n=max(size(A));
35 |
36 | % Función de coste
37 |
38 | %M=eye(5); % Penalización terminal M
39 | M=zeros(5);
40 | Q=eye(5); % Matriz asociada a la forma cuadrática del estado
41 | T=10; % Tiempo Final
42 |

```

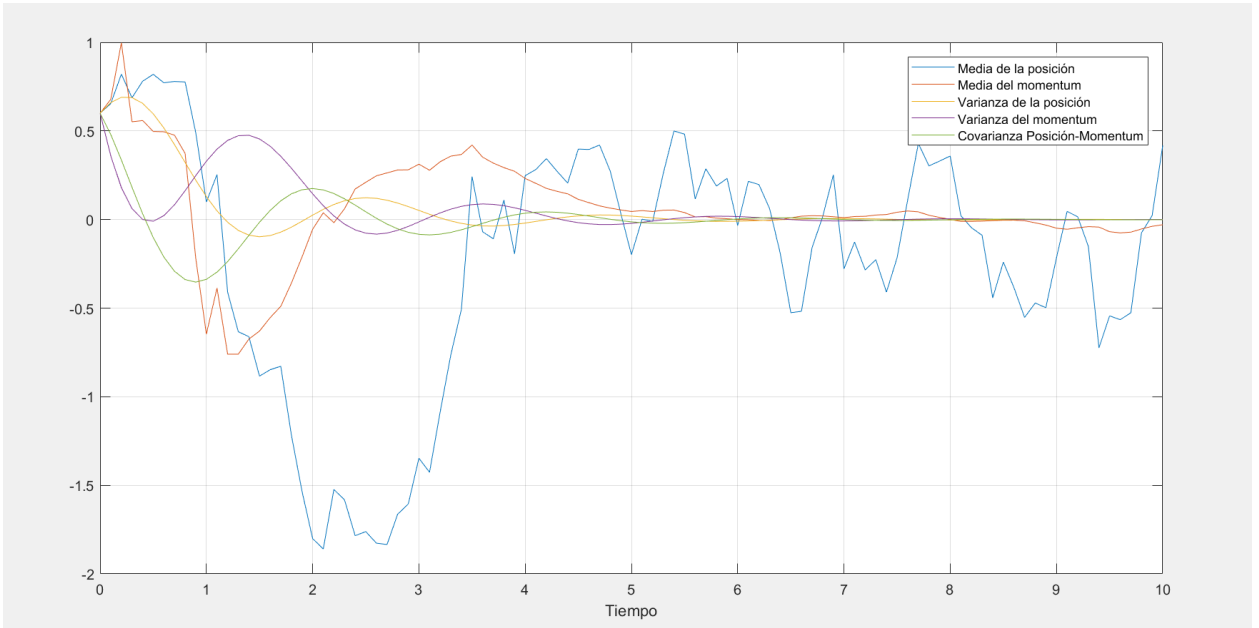


```

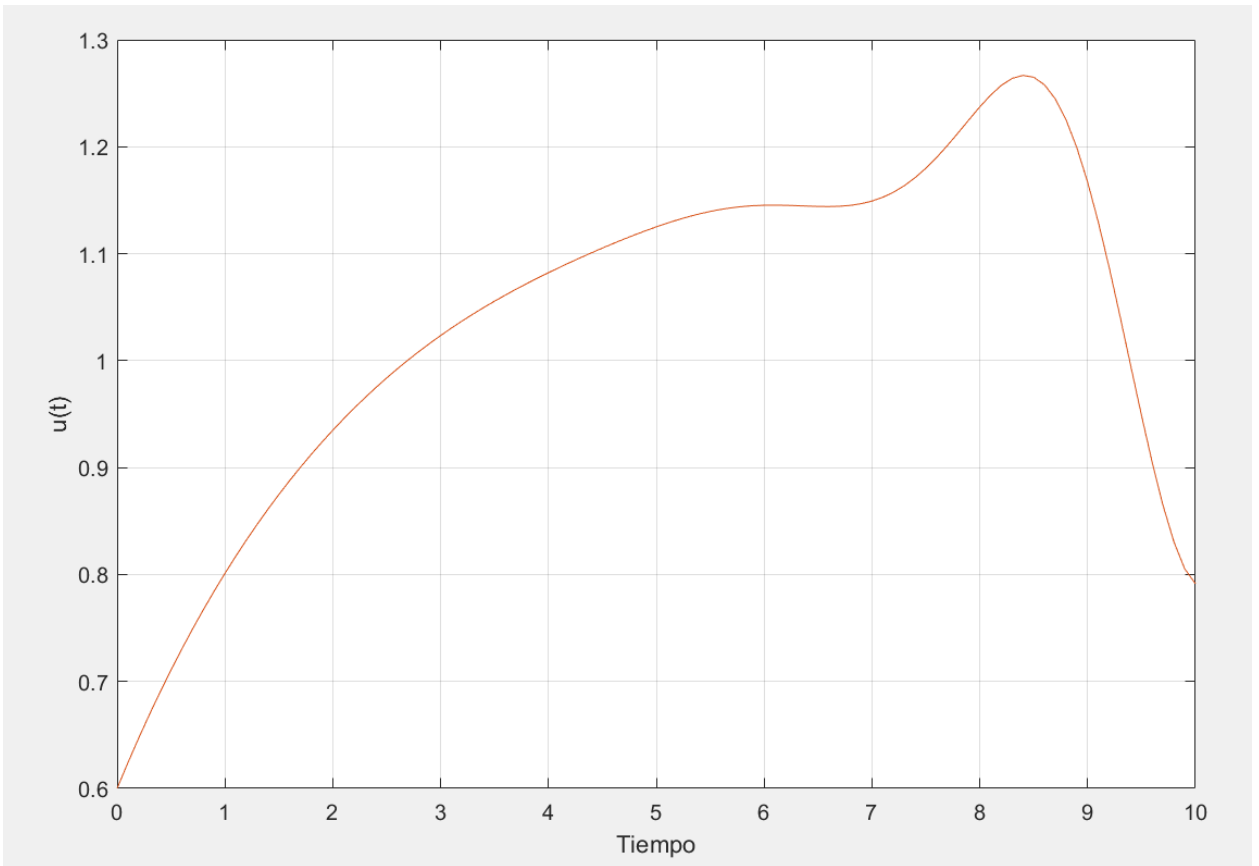
43
44 % Cálculo de la función valor
45 % V(t,x)=a0(t)+al(t)'*x+x'*B(t)*x;
46
47 % Vectorización de la matriz B(t): vec(B)
48
49 N=-(kron(F,F)+2*kron(A,eye(n)))';
50
51 q=-inv(N)*reshape(Q,[n*n,1]);
52 B=@(t) expm(-N*(T-t))*(q+reshape(M,n*n,1))-q;
53
54 % Solución del vector al(t)
55
56 H=2*(kron(G,F)+kron(b,eye(n)))';
57
58 syms alpha;
59 syms h;
60
61 % Cálculo de la integral con matrices que no conmutan
62
63 F=[0,1,0,0,0;0,0,0,1,0;1,0,0,0,0;0,0,0,0,1;0,0,1,0,0];
64
65 [U,D]=eig(A);
66
67 syms I(alpha)
68
69 E=@(alpha) [1,0,0,0,0;-alpha,1,0,0,0;0,0,1,0,0;0,0,-alpha,1,0;0,0,0,0,1];
70 f=kron(diag(exp(diag(D))*alpha),kron(E(alpha)*inv(U)*diag(exp(-2*(diag(D)+1))*alpha),E(alpha)*inv(U)));
71
72 disp('Haciendo la integración');
73
74 I(alpha)=int(f,alpha);
75
76 disp('Termina la integración');
77
78 R1=kron(inv(U'),kron(inv(P'),inv(P')));
79 R2=kron(inv(U'),kron(inv(U'*P'),inv(U'*P')))*reshape(H,5*5*5,1);
80
81 R=@(t) reshape(R1*(I(T-t)-I(0))*R2,5,25);
82
83 al=@(t) expm(A*(T-t))*(R(t)*expm(-N*T)*(q+reshape(M,n*n,1))-inv(A)*(expm(-A*(T-t))-eye(n))*H*q*(T-t));
84
85
86 % Simulación Controlada
87
88 % Drift A1(t)+B1(t)X(t)
89 disp('Comienza la simulación');
90 drift=@(t,X) (A-2*g*g'*reshape(B(t),5,5))*X-g*g'*al(t);
91
92 % Difusión
93
94 sigma = @(t,X) F*X+G;
95
96 % Construcción del Modelo
97
98 obj = sde(drift,sigma,'StartTime',0,'StartState',xf+0.1);
99
100 dt=0.1;
101 [X2,tiempo,X] = obj.simulate(100,'DeltaTime',dt);
102 plot(tiempo,X2)
103 xlabel('Tiempo')
104 grid on;

```

El resultado de la simulación es el siguiente:



Cuyo control queda:



## 7. Bibliografía

- 7.1. Jiongmin Yong , Xun Yu Zhou, Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations (Stochastic Modelling and Applied Probability), Springer Verlag, 1999.
- 7.2. Jin Ma, Jiongmin Yong, Forward-Backward Stochastic Differential Equations and their Applications (Lecture Notes in Mathematics), Springer Verlag, 2007.
- 7.3. Alan V. Oppenheim, George C. Verghese, Signals, Systems and Inference , Editor: Pearson, 2015.
- 7.4. Donald E. Kirk, Optimal Control Theory: An Introduction, Dover Publications Inc., 2004.
- 7.5. S. C. Edwards and V. P. Belavkin, "Optimal Quantum Filtering and Quantum Feedback Control," vol. 2, pp. 1–14, 2005.
- 7.6. K. Jacobs and D. A. Steck, "A straightforward introduction to continuous quantum measurement," Contemp. Phys., vol. 47, no. 5, pp. 279–303, 2006.
- 7.7. Financial Toolbox, Mathworks, [Online]. Available: <https://es.mathworks.com/products/finance.html>.
- 7.8. Charles Q. Choi, ¿Más cerca de los ordenadores cuánticos?, Investigación y Ciencia (Edición Española de Scientific American), Enero 2018, N°496, p. 12.

