Vida media residual de mixturas finitas y aplicaciones a sistemas coherentes

Navarro Camacho, Jorge – jorgenav@um.es
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Murcia
Hernández Martínez, Pedro José – pedroj.hernandez@upct.es
Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos
Universidad Politécnica de Cartagena

RESUMEN

Estudiamos algunas propiedades de la vida media residual de mixturas finitas. Concretamente, hemos obtenido propiedades de ordenación, monotonía y comportamiento asintótico. Hemos demostrado que, bajo ciertas condiciones, el comportamiento asintótico (cuando t tiende a infinito) de la vida media residual de la mixtura es similar al de la componente más fuerte (en el orden vida media residual). También hemos considerado el caso de mixturas negativas para aplicarlas al estudio del comportamiento de la vida media residual de sistemas coherentes.

Palabras claves:
Mixtura negativa; vida media residual; ordenación; monotonía; sistemas coherentes.
***Clasificación JEL (Journal Economic Literature)*:** C4
Área temática: Estadística aplicada a los Métodos Cuantitativos

1.- INTRODUCCIÓN

Es bien sabido que las funciones vida media residual y razón de fallo determinan de forma única la función de distribución y, por tanto, contienen toda la información del modelo (véase Barlow y Proschan (1975) y Navarro, Ruiz y Zoroa (1998)). Determinar la forma de la vida media residual de la mixtura no es fácil, incluso aunque sea conocida la forma de la vida media residual de cada una de las componentes de la mixtura. Existen pocos resultados sobre la vida media residual de mixturas (véase, Finkelstein (2001,2002)). Además, la forma de la vida media residual está relacionada con la forma de la razón de fallo (véase Klefsjo (1982), Mi (1995), Bradley y Gupta (2003), Bekker y Mi (2003) y Savits (2003)).

2.- PROPIEDADES GENERALES

La vida media residual para una variable aleatoria positiva X viene dada por

$$e(t) = \frac{1}{R(t)} \int_t^{\infty} R(x)\,dx \tag{1.1}$$

para $t \in D$, y además,

$$e(0) = \int_0^{\infty} R(x)\,dx = E(X) = \mu . \tag{1.2}$$

Lema 2.1: Sea X una variable aleatoria positiva con media finita $E(X)$ y función vida media residual $e(t)$ cumpliendo que $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lambda \in [0,\infty]$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{\log G(t)}{t} = \frac{1}{\lambda},$$

donde $G(t) = \int_t^{\infty} R(x)dx$ y, por convenio, $1/0 = +\infty$.

Demostración:

De la definición de $e(t)$ y $G(t)$, se deduce que

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{\log G(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} -\frac{\log\left(e(t)R(t)\right)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{e(x)}dx = \frac{1}{\lambda}$$

donde la primera igualdad se obtiene de (1.1), la segunda de (1.2) y la tercera aplicando la regla de L'Hôpital y teniendo en cuenta que

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{e(x)}dx = -\lim_{t\to\infty} \log\left(\frac{G(t)}{e(0)}\right) = \infty , \tag{1.3}$$

ya que de (1.2), $\lim_{t\to\infty} G(t) = E(X) - \lim_{t\to\infty} \int_0^t R(x)dx = 0$. ∎

Definición 2.1: Una función de fiabilidad R se dice que es una mixtura generalizada finita de las funciones de fiabilidad $R_1, R_2, ..., R_n$, si

$$R(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i(t), \tag{1.4}$$

para todo t, donde $w_1, w_2, ... w_n$ son números reales tales que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer en (1.4) que $w_i \neq 0$ para todo i y $R_i \neq R_j$ para $i \neq j$. Cuando $w_1, w_2, ... w_n$ sean números reales positivos tendremos una mixtura positiva. Si $w_i < 0$ para algún i, entonces diremos que R es una mixtura negativa. En este caso, necesitamos suponer que la función R es una función de fiabilidad ya que el segundo miembro de (1.4) puede que no defina una función de fiabilidad.

Si e es la función vida media residual asociada a la mixtura generalizada R dada en (1.4) y $e_1, e_2, ..., e_n$ son las funciones vida media residual de las componentes $R_1, R_2, ..., R_n$, que supondremos finitas, entonces de (1.1),

$$e(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t) e_i(t) \tag{1.5}$$

donde

$$w_i(t) = \frac{w_i R_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} w_j R_j(t)}.$$

En particular, si R es una mixtura positiva, entonces $w_i(t) \geq 0$ y

$$\min\{e_1(t), ..., e_n(t)\} \leq e(t) \leq \max\{e_1(t), ..., e_n(t)\} \tag{1.6}$$

para todo t.

Además, nótese que cualquier mixtura negativa dada por (1.4) se puede expresar como una mixtura de dos componentes de la forma

$$R_p(t) = pR_+(t) + (1-p) R_-(t), \tag{1.7}$$

donde

$$p = \sum_{w_i > 0} w_i > 1,$$

$$R_+(t) = \frac{\sum_{w_i > 0} w_i R_i(t)}{\sum_{w_i > 0} w_i}$$

y

$$R_-(t)=\frac{\sum_{w_i<0} w_i R_i(t)}{\sum_{w_i<0} w_i}.$$

Señalar que R_+ y R_- son funciones de fiabilidad obtenidas como mixturas positivas de las fiabilidades R_i. Sin embargo, estas funciones pueden tener diferentes propiedades que las que tienen sus componentes. Por ejemplo, R_i puede ser una distribución exponencial para $i=1,2,...,n$ y R_+ o R_- seguir un modelo diferente.

Por tanto, si R es una mixtura negativa entonces $p>1$ y

$$R_+(t)=p^{-1}R_p(t)+p^{-1}(p-1)R_-(t) \tag{1.8}$$

y, por tanto, R_+ (la componente positiva) es una mixtura positiva de R_p (la mixtura negativa) y R_- (la componente negativa). Además, de (1.6) y (1.8) se deduce la siguiente propiedad inmediata para mixturas negativas.

Proposición 2.1: Si se cumple (1.4) para $n=2$ y $w_1>1$ entonces

$$\min\{e(t),e_2(t)\}\le e_1(t)\le \max\{e(t),e_2(t)\}$$

para todo t.

Demostración:

Si se cumple (1.4) para $n=2$ y $w_1>1$, entonces

$$R_1(t)=w_1^{-1}R_p(t)-w_1^{-1}w_2R_2(t) \tag{1.9}$$

donde $w_2<0$. Por tanto, el resultado se obtiene aplicando (1.6) a la mixtura positiva dada en (1.9). ■

Observación 2.1: Esta propiedad se puede aplicar también a las funciones de fiabilidad R_+ y R_- definidas en (1.7). Nótese que aquí, para cualquier t, $e_+(t)$ está comprendida entre $e_-(t)$ y $e(t)$. En particular, si se cumple (1.5) para $n=2$, $w_1>1$, y las componentes de la mixtura están ordenadas en el orden vida media residual $R_1\le_{mrl} R_2$ $(\ge)$ (es decir, $e_1\le_{mrl} e_2$ para todo t), entonces $R\le_{mrl} R_1$ $(\ge_{mrl})$.

En la siguiente proposición demostramos que las funciones vida media residual de una mixtura generalizada de dos componentes están ordenadas.

Proposición 5.2.2: Si se cumple (1.4) para $n=2$, $w_1>1$ y las funciones vida media residual $e_1(t)$ y $e_2(t)$ de $R_1(t)$ y $R_2(t)$, respectivamente, satisfacen $e_1(t)\ge e_2(t)$ $(\le)$ para un $t\ge 0$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial w_1} e(t) \geq 0 \ \ (\leq).$$

Demostración:

De las definiciones, tenemos que

$$e(t) = \frac{G(t)}{R(t)} = \frac{w_1 G_1(t) + (1-w_1) G_2(t)}{w_1 R_1(t) + (1-w_1) R_2(t)},$$

donde $G_i(t) = e_i(t) R_i(t)$, $i = 1, 2$, y derivando, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial w_1} e(t) = \frac{R_1(t) R_2(t)}{R^2(t)} \left(e_1(t) - e_2(t) \right),$$

y de esta forma queda demostrada la proposición. ■

En particular, si las componentes de la mixtura están ordenadas en el orden vida media residual $R_1 \geq_{mrl} R_2$, entonces $R_p \geq_{mrl} R_{p'}$ para $p > p'$, donde R_p y $R_{p'}$ cumplen (1.4) para $n = 2$ con $w_1 = p > 1$ y $w_1 = p' > 1$, respectivamente. Como ejemplo véase la Figura 1.

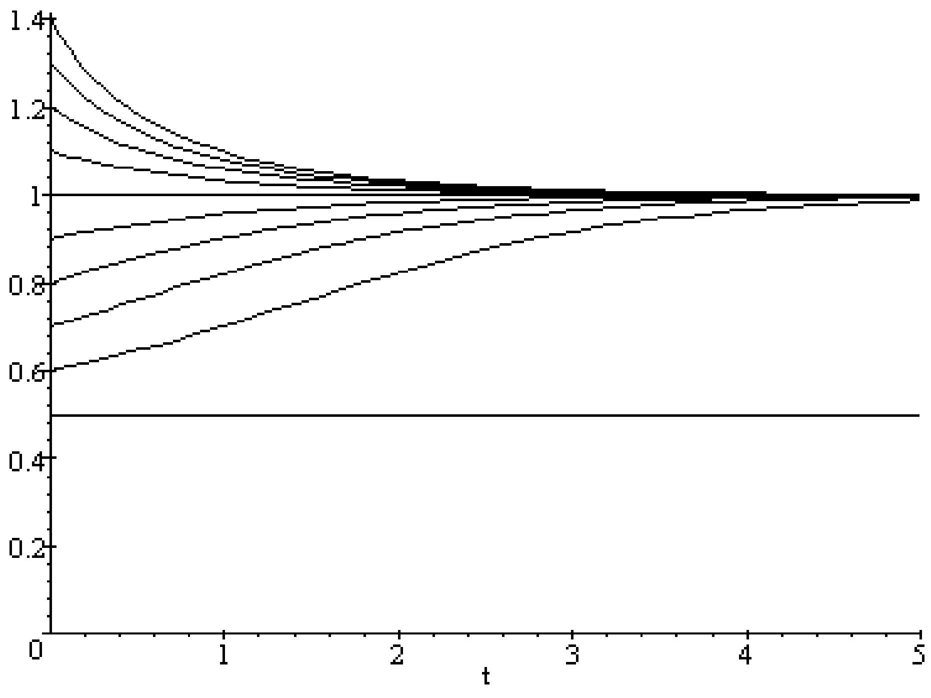

Figura 1. Funciones vida media residual de mixturas generalizadas de dos distribuciones exponenciales con $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1/2$ y $w_1 = 0.2k$ para $k = 0,1,...,10$ (de abajo a arriba). Las líneas horizontales representan las funciones vida media residual de las componentes de la mixtura.

Una propiedad muy conocida para mixturas positivas (véase, Klefsjo (1982)) es que la mixtura de distribuciones que tengan vida media residual creciente (IMRL), tiene también vida media residual creciente (IMRL). Necesitamos la siguiente proposición para obtener un resultado similar para la vida media residual de mixturas negativas.

Proposición 2.4: Si se cumple (1.4) para $n=2$, $R_1(t)$ y $R_2(t)$ son continuas en t y las funciones vida media residual $e_1(t)$ y $e_2(t)$ de $R_1(t)$ y $R_2(t)$, respectivamente, son diferenciables en t, entonces la función vida media residual $e(t)$ de $R(t)$ es diferenciable en t y satisface

$$\frac{e'(t)}{e^2(t)}=\alpha(t)\frac{e_1'(t)}{e_1^2(t)}+\left(1-\alpha(t)\right)\frac{e_2'(t)}{e_2^2(t)}+\alpha(t)\left(1-\alpha(t)\right)\frac{\left(e_1(t)-e_2(t)\right)^2}{e_1^2(t)e_2^2(t)}, \qquad (1.10)$$

donde $\alpha(t)=w_1G_1(t)/G(t)$, $G(t)=R(t)e(t)$ y $G_1(t)=R_1(t)e_1(t)$.

Demostración:

De las definiciones, tenemos que

$$\frac{1}{e(t)}=\alpha(t)\frac{1}{e_1(t)}+\left(1-\alpha(t)\right)\frac{1}{e_2(t)}.$$

Derivando,

$$\left(\frac{1}{e(t)}\right)'=\alpha(t)\left(\frac{1}{e_1(t)}\right)'+\left(1-\alpha(t)\right)\left(\frac{1}{e_2(t)}\right)'+\alpha'(t)\left(\frac{1}{e_1(t)}-\frac{1}{e_2(t)}\right), \qquad (1.11)$$

donde

$$\alpha'(t)=-\alpha(t)\left(1-\alpha(t)\right)\left(\frac{1}{e_1(t)}-\frac{1}{e_2(t)}\right).$$

La demostración se completa sustituyendo el valor de $\alpha'(t)$ en la expresión (1.11). ■

La proposición anterior se puede extender a mixturas generalizadas mediante la siguiente proposición. La demostración es similar.

Proposición 2.5: Si se cumple (1.4), $R_1,R_2,...,R_n$ son continuas en t y las respectivas funciones vida media residual $e_1,e_2,...,e_n$ son diferenciables en t, entonces la función vida media residual e de R es diferenciable en t y satisface

$$\frac{e'(t)}{e^2(t)}=\sum_{i=1}^{n}w_i\frac{G_i(t)}{G(t)}\frac{e_i'(t)}{e_i^2(t)}+\sum_{i<j}w_iw_j\frac{G_i(t)}{G(t)}\frac{G_j(t)}{G(t)}\frac{\left(e_i(t)-e_j(t)\right)^2}{e_i^2(t)e_j^2(t)},$$

donde $G(t)=R(t)e(t)$ y $G_i(t)=R_i(t)e_i(t)$ para $i=1,2,...,n$.

Como una consecuencia inmediata, tenemos la siguiente propiedad.

Proposición 2.6: Si se cumple (1.4) con $w_i > 0$, R_i es continua y su vida media residual satisface $e_i'(t) \geq 0$, para un $t \geq 0$ y para todo $i = 1,2,...,n$, entonces $e'(t) \geq 0$.

Además, para mixturas negativas con sólo un peso positivo, tenemos la siguiente propiedad.

Proposición 2.7: Si se cumple (1.4) con $w_1 > 1$, R_1 es continua y su vida media residual satisface $e_1'(t) \leq 0$, y además, $w_i < 0$, R_i continua y vida media residual, e_i, satisface $e_i'(t) \geq 0$ para un $t \geq 0$ y para todo $i = 2,3,...,n$, entonces $e'(t) \leq 0$.

Demostración:

En este caso, las funciones vida media residual e_+ y e_- de las componentes positiva (R_+) y negativa (R_-) de la mixtura definida en (1.7), cumplen que $e_+(t) = e_1(t)$ y $e_-'(t) \geq 0$. Esto último se obtiene de la Proposición 2.6, teniendo en cuenta que R_- es una mixtura positiva de $R_2,...,R_n$ y $e_i'(t) \geq 0$, para $i = 2,...,n$.

Entonces, aplicando la Proposición 2.4, a la mixtura dada en (1.7), obtenemos que $e'(t) \leq 0$ teniendo en cuenta que $p = w_1 > 1$, $e_+'(t) \leq 0$ y $e_-'(t) \geq 0$. ■

En particular, si las proposiciones anteriores se pueden aplicar para todo $t \geq 0$, obtenemos que las mixturas positivas de distribuciones IMRL son también IMRL (Klefsjo, 1982) y que las mixturas negativas de una distribución DMRL con peso positivo y varias distribuciones IMRL con pesos negativos son DMRL. El siguiente ejemplo muestra que esta última propiedad no es cierta cuando la mixtura tiene más de un peso positivo.

Ejemplo 2.1: Si consideramos una mixtura generalizada de distribuciones exponenciales con medias $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1/2$ y $\mu_3 = 1/3$, y pesos $w_1 = w_2 = 1$, y $w_3 = -1$, entonces es fácil probar que (1.4) define una función de fiabilidad. Además, aplicando la Proposición 2.5 y teniendo en cuenta que $e_i(t) = \mu_i$ para $t \geq 0$, tenemos que

$$\frac{e'(t)}{e^2(t)} = \sum_{i<j} \frac{w_i w_j}{G^2(t)} \frac{(\mu_i - \mu_j)^2}{\mu_i \mu_j} e^{-t/\mu_i} e^{-t/\mu_j},$$

para $t \geq 0$. Por tanto, en nuestro ejemplo, obtenemos que

$$\frac{e'(t)}{e^2(t)} G^2(t) = \frac{1}{2} e^{-3t} - \frac{4}{3} e^{-4t} - \frac{1}{6} e^{-5t},$$

y así, $e(t)$ es estrictamente decreciente en $(0, t_1)$ y estrictamente creciente en (t_1, ∞), donde $t_1 = -\ln\left(-4 + \sqrt{19}\right) \simeq 1.0247$ y, en consecuencia, la mixtura es BFR y no cumple la proposición anterior. La gráfica de $e(t)$ se da en la Figura 2. Nótese que $\lim_{t\to\infty} e(t)=1$. Por tanto, asintóticamente es equivalente a la vida media residual de la componente más fuerte de la mixtura $e_1(t)=1$.

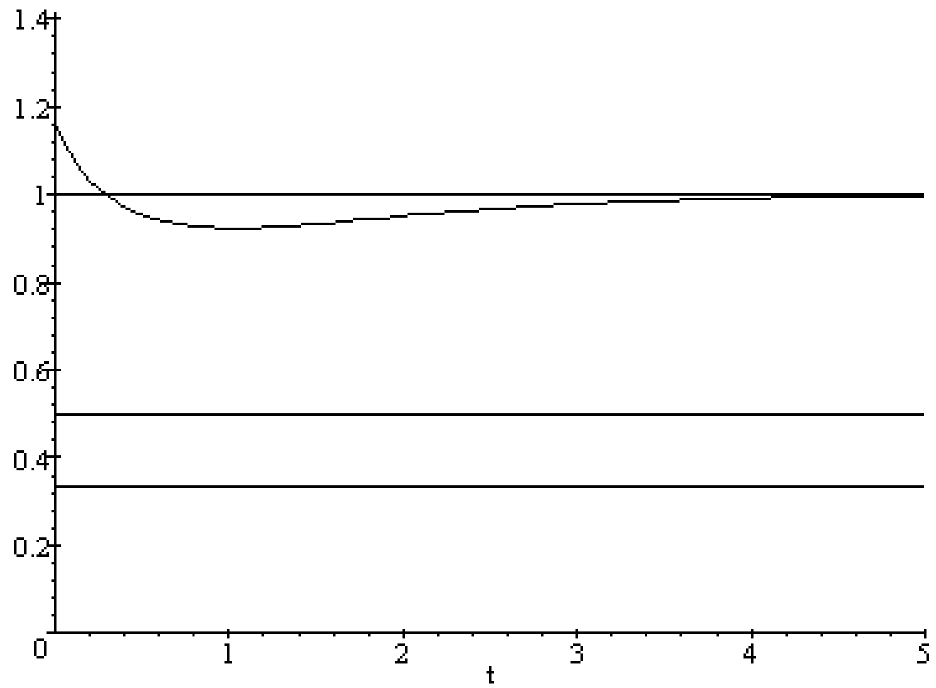

Figura 2. Vida media residual de una mixtura generalizada de tres distribuciones exponenciales con medias $\mu_1=1, \mu_2=1/2$ y $\mu_3=1/3$, y pesos $w_1=w_2=1$, y $w_3=-1$. Las líneas horizontales representan la vida media residual de las componentes de la mixtura. Notar que la vida media residual de la mixtura no es monótona sino bañera (BMRL).

3.- COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO

Una propiedad muy conocida de mixturas positivas es que, en el caso absolutamente continuo, la razón de fallo de la mixtura tiene, bajo ciertas condiciones, el mismo comportamiento asintótico que la componente más fuerte de la mixtura en el orden razón de fallo (véase Mi (1999), Finkelstein y Esaulova (2005, 2006) y Navarro y Hernández (2006)). Obtenemos propiedades similares para el comportamiento asintótico de la vida media residual de mixturas generalizadas. En primer lugar, damos un resultado para mixturas positivas.

Proposición 3.1: Si se cumple (1.4) con $w_i > 0$ para todo $i=1,2,...,n$, y las funciones vida media residual $e, e_1, e_2, ..., e_n$ de $R, R_1, R_2, ..., R_n$, respectivamente, satisfacen

$$\lim_{t\to\infty} e_1(t) = \lambda_1 \in [0,\infty], \tag{1.12}$$

$$e_1(t) \geq e_i(t) \text{ para } i = 2,3,...,n \text{ y } t \geq t', \tag{1.13}$$

y

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \xi \in [0,\infty], \tag{1.14}$$

entonces $\xi = \lambda_1$.

Demostración:

Del Lema 2.1, (1.12) y (1.14), se deduce que

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{\log G(t)}{t} = 1/\xi \tag{1.15}$$

y

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{\log G_1(t)}{t} = 1/\lambda_1. \tag{1.16}$$

Además, como $w_i > 0$ para todo $i = 1,2,...,n$, se cumple que

$$\log G(t) \geq \log(w_1 G_1(t)) = \log w_1 + \log G_1(t),$$

y aplicando (1.15) y (1.16), se concluye que $\xi \geq \lambda_1$.

Por otro lado, de (1.6) y (1.13), se cumple que $e_1(t) \geq e(t)$ para $t \geq t'$ y, por tanto, $\xi \leq \lambda_1$. En consecuencia, $\xi = \lambda_1$. ■

Obviamente, de (1.6), si $\lambda_1 = 0$ en (1.12), entonces el límite en (1.14) existe y vale cero. En la siguiente proposición damos un resultado similar para mixturas negativas.

Proposición 3.2: Si se cumple (1.4) con $w_1 > 1$ y $w_i < 0$ para $i = 2,3,...,n$, y se verifican (1.12), (1.13) y (1.14), entonces $\xi = \lambda_1$.

Demostración:

Como $w_i < 0$ para $i = 2,3,...,n$, entonces tenemos que

$$\log G(t) \leq \log(w_1 G_1(t)) = \log w_1 + \log G_1(t).$$

Además, aplicando (1.15) y (1.16), se obtiene que $\xi \leq \lambda_1$.

Por otro lado, como $e_1(t) \geq e_i(t)$ para $i = 2,3,...,n$ y $t \geq t'$, entonces $e_1(t) \geq e_-(t)$ para todo $t \geq t'$, donde e_- es la vida media residual de la componente negativa R_- definida en (1.7). Entonces, de la Proposición 5.2.1, $e(t) \geq e_1(t)$ para todo $t \geq t'$ y, por tanto, $\xi \geq \lambda_1$. En consecuencia, $\xi = \lambda_1$. ■

Obviamente, de la Proposición 2.1, si $\lambda_1 = \infty$ en (1.12), entonces el límite en (1.14) existe y es ∞. Más adelante veremos que la componente líder de la mixtura (para el comportamiento asintótico) debe tener peso positivo. En el siguiente ejemplo aplicamos la proposición anterior.

Ejemplo 3.1: Sea una mixtura finita de distribuciones exponenciales. Esta familia de distribuciones se llama clase hiperexponencial generalizada (GH) (véase Baggs y Nagaraja (1996)). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mu_1 > \mu_i$ para $i = 2,3,...,n$. Es fácil probar que una condición necesaria para que sea función de distribución es que $w_1 > 0$. Consideremos tres casos.

En primer lugar, si $w_i > 0$ para $i = 1,2,...,n$, entonces de (1.6), $e(t) < \mu_1$, y aplicando la Proposición 2.6, $e(t)$ es creciente. Por tanto, se cumple (1.14), y de la Proposición 3.1 se obtiene que $\lim_{t\to\infty} e(t) = \mu_1$.

En segundo lugar, si $w_1 > 1$ y $w_i < 0$ para $i = 2,3,...,n$, entonces de la Proposición 2.7, $e(t)$ es decreciente. Obviamente, $e(t) \geq 0$ y, por tanto, se verifica (1.14) y aplicando la Proposición 3.2, se obtiene que $\lim_{t\to\infty} e(t) = \mu_1$.

Finalmente, si $w_i > 0$ para $i = 1,2,...,k$ y $w_i < 0$ para $i = k+1, k+2,...,n$, entonces, como R_+ es una mixtura positiva, aplicando el primer caso, se obtiene que $\lim_{t\to\infty} e_+(t) = \mu_1$, donde e_+ es la vida media residual de la componente positiva definida en (1.7). Así, R se puede interpretar como una mixtura de R_+ y R_i para $i = k+1, k+2,...,n$ y, de esta forma, se cumplen (1.12) y (1.13) ya que $\lim_{t\to\infty} e_i(t) = \mu_i < \lim_{t\to\infty} e_+(t) = \mu_1$. En consecuencia, esta representación se corresponde con el segundo caso y, por tanto, $\lim_{t\to\infty} e(t) = \mu_1$.

A continuación, enunciamos dos lemas, necesarios para obtener resultados para la función vida media residual de mixturas generalizadas.

Lema 3.1: Si las funciones vida media residual e_1 y e_2 de R_1 y R_2, respectivamente, satisfacen que,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{e_1(t)}{e_2(t)} > 1, \tag{1.17}$$

entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_2(t)}{G_1(t)} = 0, \tag{1.18}$$

donde $G_i(t) = \int_t^\infty R_i(x)dx$ para $i = 1,2$.

Demostración:

De (1.17), existe $\eta > 1$ y $t_0 > 0$ tales que

$$\frac{e_1(t)}{e_2(t)} > \eta > 1, \tag{1.19}$$

para $t \geq t_0$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{G_2(t)}{G_1(t)} &= \frac{R_2(t)e_2(t)}{R_1(t)e_1(t)} = \frac{e_2(0)}{e_1(0)} \exp\left(-\int_0^t \left(\frac{1}{e_2(x)} - \frac{1}{e_1(x)}\right)dx\right) \\ &\leq \frac{e_2(0)}{e_1(0)} \exp\left(-\int_0^{t_0} \left(\frac{1}{e_2(x)} - \frac{1}{e_1(x)}\right)dx\right) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{\eta - 1}{e_1(x)} dx\right) \end{aligned}$$

para $t \geq t_0$, donde la segunda igualdad se obtiene de la fórmula de inversión para la vida media residual (1.2) y la desigualdad de (1.19).

Además, como $e_1(0) < \infty$, aplicando (1.3), tenemos que

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{e_1(x)} dx = \infty,$$

y, en consecuencia, se verifica (1.18). ■

Lema 3.2: Si se verifica (1.4) y las funciones vida media residual $e_1, e_2, ..., e_n$ de $R_1, R_2, ..., R_n$, respectivamente, satisfacen

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{e_1(t)}{e_i(t)} > 1 \text{ para } i = 2, 3, ..., n, \tag{1.20}$$

entonces $w_1 > 0$ y

$$\lim_{t \to \infty} \frac{G(t)}{G_1(t)} = w_1, \tag{1.21}$$

donde $G(t) = \int_t^{\infty} R(x) dx$ y $G_1(t) = \int_t^{\infty} R_1(x) dx$.

Demostración:

En primer lugar, se observa que

$$\frac{G(t)}{G_1(t)} = w_1 + \sum_{i=2}^{n} w_i \frac{G_i(t)}{G_1(t)} \geq 0.$$

Entonces, aplicando el Lema.3.1, se obtiene

$$\lim_{t \to \infty} \frac{G(t)}{G_1(t)} = w_1 \geq 0.$$

Finalmente, como $w_1 \neq 0$ queda demostrado el lema. ■

Lema 3.3: Si las funciones vida media residual e_1 y e_2 de R_1 y R_2, respectivamente, satisfacen que $e_1(0) < \infty$, (1.17) y

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{e_1(t)}{e_2(t)} < \infty, \tag{1.22}$$

entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_2(t)}{R_1(t)} = 0. \tag{1.23}$$

Demostración:

De las definiciones, tenemos que

$$\frac{R_2(t)}{R_1(t)} = \frac{e_1(t)}{e_2(t)} \frac{G_2(t)}{G_1(t)},$$

y aplicando (1.22) y el Lema 3.1, se obtiene (1.23). ■

Ahora, ya estamos en condiciones de obtener el resultado principal sobre el comportamiento asintótico de la vida media residual de mixturas generalizadas.

Teorema 3.1: Si se verifica (1.4) y las funciones vida media residual $e_1, e_2, ..., e_n$ de $R_1, R_2, ..., R_n$, respectivamente, satisfacen (1.20) y

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{e_1(t)}{e_i(t)} < \infty \text{ para } i = 2,3,...,n, \tag{1.24}$$

entonces la función vida media residual e de R satisface

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e(t)}{e_1(t)} = 1. \tag{1.25}$$

Demostración:

En primer lugar, nótese que

$$\frac{e_1(t)}{e(t)} = \frac{G_1(t)}{G(t)} \left(w_1 + \sum_{i=2}^{n} w_i \frac{R_i(t)}{R_1(t)} \right).$$

Entonces aplicando los Lemas 5.3.2 y 5.3.3, se obtiene (1.25). ■

Observación 3.1: Nótese que la condición (1.24) se puede sustituir por la siguiente condición más débil

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_i(t)}{R_1(t)} = 0, \text{ para } i = 2,3,...,n. \tag{1.26}$$

Nótese también que, si el límite de la condición (1.26) existe, entonces es cero por el Lema 3.1 y la regla de L'Hôpital. Sin embargo, en algunos casos, la condición (1.24) es más fácil de comprobar que la condición (1.26).

A continuación, estudiamos la monotonía asintótica de la vida media residual de la mixtura, es decir, cuando t tiende a ∞.

Proposición 3.1: Si se verifica (1.4) y las funciones vida media residual $e_1, e_2, ..., e_n$ de las funciones de fiabilidad continuas $R_1, R_2, ..., R_n$, respectivamente, satisfacen (1.20), (1.24),

$$\limsup_{t\to\infty} e_i'(t) < \infty \text{ para } i = 2,3,...,n \tag{1.27}$$

y

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\left(e_i(t) - e_j(t)\right)^2}{e_i(t)e_j(t)} < \infty \text{, para } i \neq j, \tag{1.28}$$

entonces la función vida media residual e de R satisface

$$\lim_{t\to\infty}\left(e'(t) - e_1'(t)\right) = 0.$$

En particular, si $\lim_{t\to\infty} e_1'(t) > 0 \ (<)$, entonces $\lim_{t\to\infty} e'(t) > 0 \ (<)$.

Demostración:

De la Proposición 2.5, tenemos que

$$e'(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{G_i(t)}{G(t)} \frac{e^2(t)}{e_i^2(t)} e_i'(t) + \sum_{i<j} w_i w_j \frac{G_i(t)}{G(t)} \frac{G_j(t)}{G(t)} \frac{\left(e_i(t) - e_j(t)\right)^2}{e_i(t)e_j(t)} \frac{e^2(t)}{e_i(t)e_j(t)},$$

donde $G(t) = R(t)e(t)$ y $G_i(t) = R_i(t)e_i(t)$ para $i = 1,2,...,n$. Además, del Teorema 3.1 tenemos que $\lim_{t\to\infty} e(t)/e_1(t) = 1$ y, por tanto,

$$\lim_{t\to\infty} e'(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{G_i(t)}{G(t)} \frac{e^2(t)}{e_i^2(t)} e_i'(t) + \sum_{i<j} w_i w_j \frac{G_i(t)}{G(t)} \frac{G_j(t)}{G(t)} \frac{\left(e_i(t) - e_j(t)\right)^2}{e_i(t)e_j(t)} \frac{e^2(t)}{e_i(t)e_j(t)}\right)$$

y, como $e_i'(t) \geq -1$ (véase (9) en Finkelstein (2001)), de (1.27), $e_2', ..., e_n'$ están acotadas cuando t tiende a ∞. Por tanto, de (1.24) y los Lemas 3.1 y 3.2, se obtiene que

$$\lim_{t\to\infty}\left(e'(t) - e_1'(t)\right) = \lim_{t\to\infty} \sum_{i<j} w_i w_j \frac{G_i(t)}{G_1(t)} \frac{G_j(t)}{G_1(t)} \frac{\left(e_i(t) - e_j(t)\right)^2}{e_i(t)e_j(t)} \frac{e_1^2(t)}{e_i(t)e_j(t)}.$$

Finalmente, la demostración se termina aplicando el Lema 3.1, el Teorema 3.1, y las propiedades (1.24) y (1.28). ■

En la siguiente proposición extendemos el resultado anterior usando condiciones más fuertes.

Proposición 3.2: Si se verifica (1.4) y las funciones vida media residual $e_1, e_2, ..., e_n$ de las funciones de fiabilidad continuas $R_1, R_2, ..., R_n$, respectivamente, satisfacen (1.20), (1.24),

$$\limsup_{t\to\infty} \left| \frac{e_i'(t)}{e_1'(t)} \right| < \infty \text{ para } i = 2,3,...,n \tag{1.29}$$

y

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\left(e_i(t) - e_j(t)\right)^2}{e_i(t)e_j(t)\left|e_1'(t)\right|} < \infty \text{, para } i \neq j, \tag{1.30}$$

entonces la función vida media residual e de R satisface

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e'(t)}{e_1'(t)} = 1 .$$

En particular, si $\lim_{t\to\infty} e_1'(t) > 0 \ (<)$, entonces $\lim_{t\to\infty} e'(t) > 0 \ (<)$.

Demostración:

De la Proposición 2.5, obtenemos que

$$\frac{e'(t)}{e_1'(t)} \frac{e_1^2(t)}{e^2(t)} = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{G_i(t)}{G(t)} \frac{e_1^2(t)}{e_i^2(t)} \frac{e_i'(t)}{e_1'(t)} + \sum_{i<j} w_i w_j \frac{G_i(t)G_j(t)}{G^2(t)} \frac{\left(e_i(t) - e_j(t)\right)^2}{e_i^2(t)e_j^2(t)} \frac{e_1^2(t)}{e_1'(t)},$$

donde $G(t) = R(t)e(t)$ y $G_i(t) = R_i(t)e_i(t)$ para $i = 1,2,...,n$. Además, del Teorema 3.1, tenemos que $\lim_{t\to\infty} e(t)/e_1(t) = 1$ y, por tanto,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e'(t)}{e_1'(t)} = \lim_{t\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{G_i(t)}{G(t)} \frac{e_1^2(t)}{e_i^2(t)} \frac{e_i'(t)}{e_1'(t)} + \sum_{i<j} w_i w_j \frac{G_i(t)G_j(t)}{G^2(t)} \frac{\left(e_i(t) - e_j(t)\right)^2}{e_i^2(t)e_j^2(t)} \frac{e_1^2(t)}{e_1'(t)} \right).$$

Aplicando los Lemas 3.1 y.3.2 y las condiciones (1.24) y (1.29), resulta que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e'(t)}{e_1'(t)} = 1 + \lim_{t\to\infty} \sum_{i<j} w_i w_j \frac{G_i(t)G_j(t)}{G_1(t)G_1(t)} \frac{\left(e_i(t) - e_j(t)\right)^2}{e_i(t)e_j(t)e_1'(t)} \frac{e_1^2(t)}{e_i(t)e_j(t)}.$$

Para acabar la demostración, aplicamos el Lema 3.1, el Teorema 3.1 y las condiciones (1.24) y (1.30). ■

También se cumple que, $e(t)$ es estrictamente creciente para mixturas positivas con $n > 1$ y estrictamente decreciente para mixturas negativas con sólo un peso positivo. En este último caso, si $w_1 > 0$, la componente de la mixtura con el peso positivo es la componente líder cuando t tiende a ∞. La Figura 5.1 muestra la gráfica de la función vida media residual de mixturas positivas y negativas de distribuciones exponenciales con $n=2$. La Figura 5.2 muestra la gráfica de la vida media residual de una mixtura negativa de tres distribuciones exponenciales.

4.- APLICACIONES A SISTEMAS COHERENTES

A lo largo de esta sección, representaremos por e_p la función vida media residual de un sistema en serie con componentes en el conjunto P y por $e_{(i,k)}$ la función vida media residual del estadístico $X_{(i,k)}$. También suponemos que las funciones vida media residual usadas existen y son finitas para todo t.

Por tanto, las propiedades para mixturas generalizadas, se pueden usar para obtener propiedades de los sistemas coherentes. Por ejemplo, de (1.11) y el Teorema 3.1, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.1: Si T es un sistema coherente con caminos minimales $P_1, P_2, ..., P_m$ tales que se cumplen

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{e_{P_1}(t)}{e_{P_A}(t)} > 1 \tag{1.31}$$

y

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{e_{P_1}(t)}{e_{P_A}(t)} < \infty \tag{1.32}$$

para todo $A \subseteq \{1,...,m\}$ $(A \neq \{1\})$, donde $P_A = \bigcup_{j\in A} P_j$, entonces la función vida media residual e_T del sistema T satisface que $\lim_{t\to\infty} e_T(t)/e_{P_1}(t) = 1$.

Observación 4.1: El camino que verifique (1.31) se puede llamar "camino líder" del sistema coherente T. Si las componentes son independientes, entonces el sistema en serie $X_P = \min(X_i : i \in P)$ es mejor que $X_Q = \min(X_i : i \in Q)$ en el orden razón de fallo (y, por tanto, en el orden vida media residual, $e_P \geq e_Q$) siempre que $P \subset Q$ (véase, Nanda y Shaked (2001) o Navarro y Shaked (2006)) y, entonces (1.31) se puede sustituir por

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{e_{P_1}(t)}{e_{P_i}(t)} > 1,$$

para $i = 2,3,...,m$ ya que $e_{P_A} \leq e_{P_i}$, para todo $i \in A$.

En el Teorema 4.1, la condición (1.32) se puede sustituir por una condición más débil similar a (1.26) usando que, en este caso, los sistemas en serie están ordenados en orden estocástico (st) y, por tanto, $R_{P_A} \leq R_{P_i}$, para todo $i \in A$. En consecuencia, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.2: Si T es un sistema coherente con caminos minimales $P_1, P_2, ..., P_m$ tales que se cumple (1.31) para todo $A \subseteq \{1,...,m\}$ $\left(A \neq \{1\}\right)$ y se cumple

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_{P_i}(t)}{R_{P_1}(t)} = 0, \qquad (1.33)$$

para $i = 2,3,...,m$, entonces la función vida media residual e_T del sistema T satisface que $\lim_{t\to\infty} e_T(t)/e_{P_1}(t) = 1$.

Finalmente, damos algunos ejemplos para mostrar cómo se aplican estos resultados a sistemas coherentes.

Ejemplo 4.1: Consideremos un sistema 2-out-of-3, es decir, que funciona si al menos lo hacen dos de sus tres componentes, cuyos caminos minimales son $P_1 = \{1,2\}$, $P_2 = \{2,3\}$ y $P_3 = \{1,3\}$. Por tanto, aplicando la propiedad que permite expresar cualquier sistema coherente como una mixtura generalizada de sistemas en serie, la función de fiabilidad del sistema vendrá dada por

$$R_{(2,3)}(t) = R_{\{1,2\}}(t) + R_{\{2,3\}}(t) + R_{\{1,3\}}(t) - 2R_{(1,3)}(t).$$

Si suponemos que las componentes son independientes y tienen distribuciones exponenciales con $e_i(t) = \mu_i$ para $t \geq 0$ y $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$, entonces la distribución del sistema es una mixtura negativa de cuatro distribuciones exponenciales. Por tanto, del Teorema 4.1, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} e_{(2,3)}(t) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2},$$

ya que el camino líder es P_1 y el correspondiente sistema en serie tiene una distribución exponencial con función de fiabilidad $R_{\{1,2\}}(t) = \exp\left(-\left(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}\right)t\right)$.

Si $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, entonces por lo dicho anteriormente, $R_{(2,3)}(t) = 3R_{(1,2)}(t) - 2R_{(1,3)}(t)$, es decir, es una mixtura negativa de dos distribuciones exponenciales. Por tanto, de la Proposición 2.7, tiene vida media residual decreciente (DMRL) y, del Teorema 3.1, se obtiene

$$\lim_{t\to\infty} e_{(2,3)}(t) = \mu_1 / 2.$$

La Figura 3 muestra la gráfica de la función vida media residual $e_{(2,3)}$ para diferentes valores de μ_1, μ_2 y μ_3.

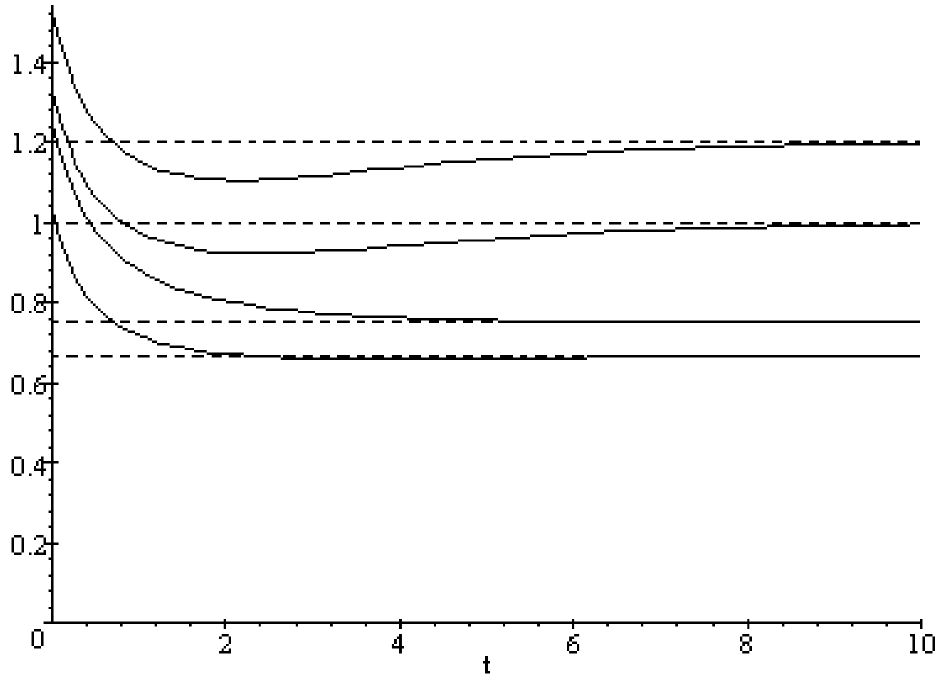

Figura 3. Funciones vida media residual de un sistema 2-out-of-3 $e_{(2,3)}(t)$ con componentes exponenciales independientes con, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2$ y $\mu_3 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $\mu_3 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1.5$ y $\mu_1 = 2$ y $\mu_2 = \mu_3 = 1$ (de arriba a abajo). Las líneas discontinuas representan el comportamiento asintótico.

5.- Referencias bibliográficas

- AGRAWAL, A. y BARLOW R.E. (1984). “A survey of network reliability and domination theory”. Operation Research 12:611–631.
- ASADI, M. y BAYRAMOGLU I. (2006). “The mean residual life function of a *k*-out-of- structure at the system level”. IEEE Trans Reliability 55(2):314–318.
- BAGGS G.E., NAGARAJA H.N. (1996). “Reliability properties of order statistics from bivariate exponential distributions”. Commun Stat. Stochastic Models 12:611–631.
- BALAKRISHNAN, N. y CRAMER, E. (2007). “Progressive censoring from heterogeneous distributions with applications to robustness” (to appear in Ann Inst Stat Math).
- BARLOW R.E. y PROSCHAN F. (1975). “Statistical theory of reliability and life testing. Holt, Rinehart and Winston, New York.
- BEKKER L. y MI J. (2003) Shape and crossing properties of mean residual life functions. Stat. Probab. Lett. 64:225–234.
- BRADLEY, D.M., GUPTA R.C. (2003). “Limiting behaviour of the mean residual life”. Ann Inst Stat Math 55:217–226.
- EVERITT B.S. y HAND D.J. (1981). “Finite mixture distributions”. Chapman and Hall, New York.
- FINKELSTEIN, M.S. (2001). “The failure rate and the mean residual lifetime of mixtures.” In: System and Bayesian reliability. Ser. Qual. Reliab. Eng. Stat 5. World Scientific Publishing, River Edge, pp 165–183.
- FINKELSTEIN, M.S., ESAULOVA, V. (2005). “Asymptotic behavior of a general class of mixture failure rates”. Adv Appl Probab 38:244–262.
- KAMPS U. y CRAMER, E. (2001). “On distributions of generalized order statistics”. Statistics 35:269–280.
- KLEFSJO B. (1982). “The NBUE and HNBUE classes of life distributions”. Naval Res Logist Q 29:331–344.
- MI, J. (1995) “Bathtub failure rate and upside-down bathtub mean residual life”. IEEE Trans. Reliabil. 44(3): 388–391.
- MI, J. (2004). “A general approach to the shape of failure rate and MRL functions”. Naval Res. Logist. 51:543–556.
- NANDA, A.K. y SHAKED, M. (2001). “The hazard rate and the reversed hazard rate orders, with applications to order statistics”. Ann Inst Stat Math 53:853–864.
- NAVARRO J. y HERNANDEZ P.J. (2004).”How to obtain bathtub shaped failure rate models from normal mixtures”. Probab. Eng. Inform. Sci. 18(4):511–531
- NAVARRO J. y SHAKED, M. (2006). “Hazard rate ordering of order statistics and systems”. J. Appl. Probab. 43:391–408.
- WU, J.W. (2001). “Characterizations of generalized mixtures of geometric and exponential distributions based on upper record values”. Stat. Papers 42:123–133