



industriales
etsii

Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

**Análisis y simulación cinemática de una plataforma
de Stewart con actuadores lineales mediante
formulación topológica (SBEG) y global.**

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

Autor: JORGE MARTÍNEZ GONZÁLEZ
Director: MARIANO SAURA SÁNCHEZ
Codirector: PABLO SEGADO CABEZOS

Cartagena, 7 de Octubre de 2016



Universidad
Politécnica
de Cartagena

Índice general

Índice general	v
1. Introducción	3
1.1. Manipuladores	3
1.1.1. Manipuladores paralelos	5
1.1.2. Características de los manipuladores paralelos, ventajas y desventajas respecto a manipuladores serie	6
1.1.3. Aplicaciones de los manipuladores	7
1.2. Objetivos	8
1.3. Hipótesis de trabajo y medios empleados	8
2. Fundamentos teóricos.	9
2.1. Plataforma Stewart	9
2.1.1. Inicios de la Plataforma Stewart	9
2.1.2. Historia de la Plataforma Stewart	10
2.1.3. Diseño conceptual de la plataforma	10
2.1.4. Diversas aplicaciones de la Plataforma Stewart	11
2.1.5. Ventajas y desventajas de la plataforma Stewart	14
2.2. Cinemática de una plataforma Stewart	15
2.2.1. Espacio de actuadores y espacio operacional	15
2.2.2. Cinemática inversa	15
2.2.3. Cinemática directa	16
2.3. Modelización de MBS: generalidades.	16
2.4. Modelización de sistemas multicuerpo: tipos de coordenadas y métodos de análisis	18
2.4.1. Coordenadas independientes	19
2.4.2. Coordenadas dependientes: ecuaciones de restricción	20
2.4.2.1. Coordenadas relativas	20
2.4.2.2. Coordenadas de punto de referencia	21

2.4.2.3.	Coordenadas naturales	23
2.4.3.	Modelización en coordenadas naturales.	24
2.4.3.1.	Restricciones de sólido rígido	25
2.4.3.2.	Restricciones de par cinemático	30
2.4.3.3.	Coordenadas mixtas	33
2.4.4.	Ejemplos	35
2.4.4.1.	Corredera 3D.	35
2.5.	Análisis cinemático computacional en coordenadas dependientes.	38
3.	Métodos	41
3.1.	Descripción de la plataforma.	41
3.2.	Definición de los grupos estructurales.	43
3.2.1.	Grafo y Análisis estructural.	43
3.2.2.	Modelización.	44
3.2.2.1.	Ecuaciones de restricción.	45
3.2.2.2.	Numeración local y global de los puntos de la plataforma.	48
3.2.2.3.	Numeración local y global de los vectores de la plataforma.	49
3.2.2.4.	Código Matlab empleado para el cálculo simbólico.	50
3.2.2.5.	Dimensiones de vectores y matrices necesarias para el análisis.	52
3.2.3.	Parámetros obtenidos de Solidworks. Coordenadas locales y globales de puntos y vectores.	53
3.2.3.1.	Coordenadas locales y globales del bastidor.	53
3.2.3.2.	Coordenadas locales y globales del terminal móvil.	54
3.2.3.3.	Coordenadas locales y globales del actuador 1.	54
3.2.3.4.	Coordenadas locales y globales del actuador 2.	55
3.2.3.5.	Coordenadas locales y globales del actuador 3.	55
3.2.3.6.	Coordenadas locales y globales del actuador 4.	56
3.2.3.7.	Coordenadas locales y globales del actuador 5.	56
3.2.3.8.	Coordenadas locales y globales del actuador 6.	57
3.3.	Ensayos	57
4.	Resultados.	59
4.1.	Guiado de coordenadas.	59
4.1.1.	Guiado de coordenadas mediante el polinomio 345.	60
4.1.2.	Guiado de los 6 GDL de la plataforma.	61
4.2.	Ensayos.	62

4.2.1. Posición movimiento en X.	62
4.2.2. Velocidad movimiento en X.	63
4.2.3. Aceleración movimiento en X.	64
4.2.4. Posición movimiento en X,Y,Z.	65
4.2.5. Velocidad movimiento en X,Y,Z.	65
4.2.6. Aceleración movimiento en X,Y,Z.	66
4.2.7. Posición giro ROLL.	66
4.2.8. Velocidad giro ROLL.	67
4.2.9. Aceleración giro ROLL.	68
4.2.10. Posición giros ROLL,PITCH,YAW.	69
4.2.11. Velocidad giros ROLL,PITCH,YAW.	69
4.2.12. Aceleración giros ROLL,PITCH,YAW.	70
4.2.13. Posición movimiento completo en los 6GDL.	71
4.2.14. Velocidad movimiento completo en los 6GDL.	71
4.2.15. Aceleración movimiento completo en los 6GDL.	72
5. Conclusiones.	73
5.1. Procedimientos realizados.	73
5.1.1. Restricciones.	74
5.2. Resultados de los ensayos.	74
5.2.1. Desarrollos futuros.	75
6. Planos	77
Bibliografía	80

Índice de figuras

1.1. Manipulador paralelo IRB-360 de ABB	5
2.1. Esquema de una Plataforma Stewart-Gough.	9
2.2. Plataforma de un simulador.	10
2.3. Simulador de movimiento de Flight Safety.	12
2.4. Robot hexapod para el posicionamiento de reflectores solares.	12
2.5. Robot DA VINCI para asistencia quirúrgica.	13
2.6. Robot FANUC F-200iB.	14
2.7. Cuadrilátero articulado: esquema cinemático y nomenclatura.	19
2.8. Coordenadas independientes.	20
2.9. Coordenadas relativas.	21
2.10. Coordenadas de punto de referencia.	22
2.11. Evolución de las coordenadas de punto de referencia.	23
2.12. Coordenadas naturales.	23
2.13. Sólido modelizado con dos puntos.	25
2.14. Sólido modelizado con dos puntos y un vector unitario.	26
2.15. Sólido modelizado con dos puntos y un vector unitario alineados.	26
2.16. Sólido modelizado con tres puntos.	27
2.17. Sólido modelizado con tres puntos alineados.	28
2.18. Sólido modelizado con dos puntos y dos vectores unitarios.	28
2.19. Par esférico.	30
2.20. Par prismático.	31
2.21. Modelización del par prismático.	32
2.22. Junta universal.	33
2.23. Ángulo entre dos elementos.	33
2.24. Distancia entre dos puntos.	34
2.25. Esquema de una Plataforma Stewart-Gough.	35

2.26. Algoritmos correspondientes a la solución mediante GE: (a) aspecto de la función principal del algoritmo, (b) detalle de la subrutina de cálculo cinemático del grupo 3R.	39
3.1. Plataforma Stewart diseñada en SolidWorks y utilizada para el cálculo y visualización.	42
3.2. Terminal fijo de la plataforma.	42
3.3. Terminal móvil.	43
3.4. Actuadores y juntas cardan.	43
3.5. Grafo de nuestra Plataforma.	44
3.6. Puntos y vectores empleados para la modelización de cada actuador.	45
3.7. Puntos y vectores empleados para la modelización de la plataforma móvil.	45
3.8. Base fija visualizada en entorno Blender.	57
4.1. Ejemplo de guiado mediante el polinomio 345.	60
4.2. Posición traslación en X y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	63
4.3. Velocidad traslación en X y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	64
4.4. Aceleración traslación en X y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	64
4.5. Posición en X,Y,Z y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	65
4.6. Velocidad en X,Y,Z y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	66
4.7. Aceleración en X,Y,Z y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	66
4.8. Posición giro Roll y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	67
4.9. Velocidad giro Roll y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	68
4.10. Aceleración giro Roll y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	68
4.11. Posición giro Roll,Picth,Yaw y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	69
4.12. Velocidad giro Roll,Picth,Yaw y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	70
4.13. Aceleración giro Roll,Picth,Yaw y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	70
4.14. Posición de los 6GDL y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	71
4.15. Velocidad de los 6GDL y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	72
4.16. Aceleración de los 6GDL y comparativa entre MBSLIM y SBEG.	72
6.1. Plano Isométrico y Frontal.	77
6.2. Plano del terminal móvil.	78

Índice de Tablas

1.1. Comparativa entre los manipuladores serie y paralelo.	7
2.1. Coordenadas por sólido de la corredera, ecuaciones de restricción de sólido rígido, vector unitario, triedro y combinación lineal.	35
2.2. Sólidos que forman la corredera, grados de libertad, número de elementos compartidos teniendo en cuenta puntos y vectores y las ecuaciones que aportan.	36
3.1. Numeración local y global de los puntos de la plataforma.	48
3.2. Numeración local y global de los vectores de la plataforma.	49
3.3. Dimensiones de los vectores empleados.	52
3.4. Dimensiones de las matrices empleadas.	53
3.5. Coordenadas locales y globales puntos del bastidor.	53
3.6. Coordenadas locales y globales vectores del bastidor.	54
3.7. Coordenadas locales y globales puntos del terminal móvil.	54
3.8. Coordenadas locales y globales vectores del terminal móvil.	54
3.9. Coordenadas locales y globales puntos del actuador 1.	54
3.10. Coordenadas locales y globales vectores del actuador 1.	55
3.11. Coordenadas locales y globales puntos del actuador 2.	55
3.12. Coordenadas locales y globales vectores del actuador 2.	55
3.13. Coordenadas locales y globales puntos del actuador 3.	55
3.14. Coordenadas locales y globales vectores del actuador 3.	56
3.15. Coordenadas locales y globales puntos del actuador 4.	56
3.16. Coordenadas locales y globales vectores del actuador 4.	56
3.17. Coordenadas locales y globales puntos del actuador 5.	56
3.18. Coordenadas locales y globales vectores del actuador 5.	57
3.19. Coordenadas locales y globales puntos del actuador 6.	57
3.20. Coordenadas locales y globales vectores del actuador 6.	57
4.1. Datos iniciales de cada traslación y giro.	61

4.2. Coeficientes del polinomio obtenidos con Matlab.	62
---	----

Capítulo 1

Introducción

Este proyecto está enfocado al estudio de análisis y simulación cinemática de una plataforma de Stewart con actuadores lineales mediante formulación topológica (SBEG) y global.

Es importante destacar que un sistema multicuerpo es un modelo matemático de un conjunto de cuerpos, también denominados elementos o eslabones, rígidos o flexibles, interconectados de tal modo que existe movimiento relativo entre ellos. Entre los posibles análisis a realizar en sistema multicuerpo, cinemático y dinámico, el presente proyecto se va a centrar en el cinemático. El análisis cinemático estudia la posición y el movimiento del sistema. Se trata de problemas puramente geométricos, independientes de las fuerzas causantes del movimiento y de las características inerciales de los cuerpos que componen el sistema.

El proyecto se estructura en seis capítulos. En el capítulo 1: Introducción, se revisan los antecedentes en manipuladores paralelos, su diseño, comparación con los de serie y aplicaciones. En el Capítulo 2: Fundamentos teóricos, se presentan los fundamentos teóricos sobre la modelización de sistemas multicuerpo: tipos de coordenadas y métodos de análisis. Se presenta la sistemática del análisis cinemático tanto inverso como directo y se presenta la plataforma Stewart. En el Capítulo 3: Métodos, se aplican los métodos explicados en los fundamentos del capítulo anterior a nuestro modelo de la plataforma Stewart. También se presenta la formulación del problema propuesto. En el Capítulo 4: Resultados, se presentan los resultados obtenidos tras aplicar la formulación y su implementación en Matlab del análisis cinemático a mecanismos de diferente tipología y complejidad, planos y espaciales (los resultados se compararan con los obtenidos por otras formulaciones, para validar el método en cuanto a precisión). En el Capítulo 5: Conclusiones y desarrollos futuros, se exponen las conclusiones principales a las que ha dado lugar el presente trabajo. En el Capítulo 6: se recogen los planos de los sólidos que forman la plataforma, y por último la Bibliografía: se recogen las principales referencias bibliográficas consultadas.

1.1. Manipuladores

La ciencia y tecnología de los robots manipuladores se originó con el propósito de desarrollar sistemas mecánicos que pudieran llevar a cabo tareas normalmente realizadas por el ser humano, por lo tanto es natural que el primer enfoque se orientase al uso de cadenas cinemáticas de lazo abierto (manipuladores tipo serie). Estos manipuladores tenían la ventaja de alcanzar amplios espacios de trabajo con gran maniobrabilidad, similar al brazo

de una persona, pero su capacidad de carga era pobre debido a su misma arquitectura; las articulaciones difícilmente resisten grandes pesos y producen vibraciones al ser sometidas a grandes esfuerzos de peso y velocidad, perdiendo precisión en su posicionamiento.

Por lo tanto, para aplicaciones donde se requiere una mayor capacidad de carga, movimientos precisos y rápidos era deseable tener una alternativa a los manipuladores serie convencionales. En general, era de esperar que manipuladores robot que tuviesen el efector final conectado a su base con múltiples cadenas en paralelo lograsen mayor rigidez y superior capacidad de posicionamiento, lo cual hizo a los manipuladores paralelos atractivos para ciertas aplicaciones que tuviesen requerimientos de carga y precisión.

La presencia de robots manipuladores es algo frecuente en prácticamente cualquier sector industrial. La necesidad de aumentar la producción, disminuir los costes de un proceso determinado, etc. hacen que muchas veces se prefiera utilizar este tipo de mecanismos para sustituir a personal que, quizás estuviese capacitado para la realización de unas tareas determinadas. Estas razones puramente económicas no serían, sin embargo, las únicas por las que la utilización de este tipo de dispositivos estaría justificada. Los robots manipuladores también son diseñados con objeto de realizar trabajos que, bien por peligrosos, monótonos, necesitados de una alta precisión y repetitibilidad, o bien por estar destinados a soportar cargas elevadas, liberen al hombre de realizar estos cometidos. La utilización de los diferentes sistemas mecánicos ha ido variando con el paso del tiempo, hasta llegar a la situación en la que hoy en día nos encontramos. Habitualmente, el empleo de mecanismos es y ha sido necesario en la transmisión y conversión de movimientos de un tipo a otro (rotación-rotación, rotación-traslación, etc.) o la obtención de un tipo determinado de movimientos y trayectorias de mayor o menor complejidad. La realización de todo este tipo de operaciones, que habitualmente necesitan de un único grado de libertad (en adelante GDL), fue un campo sumamente estudiado años atrás, ofreciendo soluciones a todo tipo de problemas. Sin embargo, el avance de la industria y su creciente necesidad de realizar nuevas operaciones cada vez más complejas y con una mayor flexibilidad en su definición hace que se deban abordar nuevas soluciones dotadas de un mayor número de GDL, iniciando el estudio de los mecanismos multi-GDL, como son los robots manipuladores.

Asimismo, las líneas de montaje del sector de automoción pueden ser un claro ejemplo de ello. En ellas, la utilización de brazos robóticos en algunos puestos determinados es totalmente habitual: son capaces de desplazar la carrocería de un automóvil de una posición y orientación a otras diferentes, pueden realizar un gran número de puntos de soldadura con una gran precisión, o efectuar de forma casi simultánea operaciones de taladrado y remachado sobre la misma. Los sectores alimentario y farmacéutico no son sectores excluidos de la utilización de este tipo de mecanismos. En estos sectores es evidente que los requisitos son diferentes, ya que las cargas no serían elevadas, por poner un ejemplo. El tipo de operaciones que estos robots realizan dentro de estos sectores industriales están relacionadas con el aumento de la productividad en los procesos de paletización y embalaje de los productos ya acabados. Si entramos dentro de un taller mecánico en el que se realice la fabricación de troqueles, el mecanizado de diferentes tipos de piezas, etc. casi seguro encontraremos máquinas dotadas de un control numérico computerizado (CNC), las cuales, una vez se les ha definido la forma en la que las piezas han de ser realizadas, realizan de forma automática todo el proceso. Sin embargo, a pesar de que estas máquinas requieren las mismas consideraciones cinemáticas que los denominados robots, la palabra robot no suele ir asociada a ellas.

Sin embargo, como es evidente, no se utiliza el mismo tipo de robots para un determinado

tipo de aplicaciones que para otras, ya que lo que para una aplicación determinada puede ser un punto básico y primordial, para otra puede carecer de importancia. Por tanto, para cada tipo de aplicación es necesario determinar cuál es la arquitectura de robot o máquina que mejor se adapta a ella y que mejores prestaciones produce.

1.1.1. Manipuladores paralelos

Antes de dar una definición de un manipulador paralelo, conviene introducir la idea de mecanismo robótico. Un mecanismo robótico es un sistema de cuerpos rígidos, llamados enlaces o miembros, conectados entre sí por articulaciones. Si varios miembros están interconectados siguiendo un único camino, se dice que forman una cadena cinemática en serie, mientras que si algún miembro está conectado a otro mediante dos o más caminos se dice que forman una cadena cinemática en paralelo. En este sentido, un mecanismo puede estar formado por cualquier combinación de cadenas cinemáticas en serie y/o en paralelo.

Los conceptos introducidos en el párrafo anterior son suficientes para dar una definición de manipulador paralelo. Un manipulador paralelo es una cadena cinemática en paralelo conformada por dos cuerpos, una base y un efector final, unidos entre sí por múltiples cadenas cinemáticas en serie, también llamadas actuadores. Un manipulador es capaz de interactuar con el medio que le rodea mediante el efector final, por lo tanto es de especial importancia poder describir su posición y orientación en el espacio, lo que se conoce como la pose de un cuerpo rígido. Entonces, se dice que el máximo número de grados de libertad que puede tener el manipulador es seis, ya que se necesitan tres coordenadas de traslación y tres rotaciones independientes para definir completamente la pose del efector final. A continuación en la figura 1.1 se observa un manipulador paralelo IRB-360 de ABB:



Figura 1.1: Manipulador paralelo IRB-360 de ABB

El mejor manipulador paralelo conocido se forma a partir de seis actuadores lineales que soportan una base móvil para dispositivos tales como simuladores de vuelo. Este dispositivo es la plataforma Stewart, si bien, existen otras posibles configuraciones para este mismo tipo de plataforma.

Es importante indicar que, aunque la estructura de este manipulador, a la cual esta plataforma debe su nombre, fue propuesta en 1965, el sistema ha evolucionado convirtiéndose en un proyecto de investigación en la robótica a partir de los años 80. Ya en los años 90,

se manifestó un interés creciente en el campo de manipuladores paralelos en general y de la plataforma Stewart en particular.

El diseño de manipuladores paralelos se remonta a varias décadas atrás; por ejemplo, en 1962, Gough y Witehall diseñaron un sistema paralelo para ser usado en una máquina de pruebas universales. Stewart en 1965 diseñó un manipulador de plataforma para ser usado en simuladores de vuelo. Hunt en 1983 realizó un estudio de la estructura cinemática de los manipuladores paralelos, y desde entonces se han venido desarrollando numerosos estudios por diversos investigadores.

1.1.2. Características de los manipuladores paralelos, ventajas y desventajas respecto a manipuladores serie

En primer lugar, la denominación 'paralelo', en oposición a un manipulador de serie, es que el terminal de esta solución está conectado a su base por un número de enlaces separados e independientes que trabajan en paralelo. Además un manipulador paralelo está diseñado para que cada cadena sea generalmente corta, simple y por lo tanto pueda ser rígida contra el movimiento no deseado, en comparación con un manipulador tipo serie.

Es importante destacar que cada actuador debe moverse controlado por su propio grado de libertad y, el conjunto, limitado por consideraciones geométricas, debe hacerlo según la trayectoria que se haya especificado.

Dentro de la estructura del robot cada cadena cinemática o brazo se compone de uno o varios eslabones unidos mediante articulaciones. En los manipuladores paralelos existen dos eslabones llamados plataformas: uno fijo que forma la base y uno móvil llamado plataforma móvil o efector final. Estas dos plataformas están unidas por cadenas cinemáticas o brazos. Las articulaciones que conforman los brazos de estas estructuras pueden o no ser actuadas. En la mayoría de los casos se busca que los actuadores estén fijos a la base, para mejorar la dinámica del robot, pero todo depende de la aplicación que se le vaya a dar. En este proyecto la plataforma va a estar accionada mediante actuadores lineales.

En los robots paralelos se busca tener un mayor número de grados de libertad (GDL), pues con ello se logra un mayor espacio de trabajo, por lo que normalmente son mecanismos de 5 o 6 GDL, pero los robots paralelos de 3 GDL pueden ser considerablemente más ligeros.

Además para aplicaciones de manipulación de objetos se requiere de mucha precisión y una alta velocidad de posicionamiento, por lo que los robots paralelos cumplen esta tarea exitosamente. A pesar de las grandes ventajas que presentan este tipo de mecanismos ante los de tipo serie, existen ciertas características que limitan su aplicación, por ejemplo el reducido espacio de trabajo que alcanzan y el alto costo de fabricación.

A continuación podemos observar una comparativa entre los manipuladores serie y paralelo:

Manipulador serie	Manipulador paralelo
Estructura poco rígida	Arquitectura más rígida
Baja relación carga/peso del manipulador	Relación carga/peso muy superior
Manipulador más pesado	Manipulador ligero
Baja precisión. Precisión del posicionamiento. Los errores en las articulaciones crecen de elemento a elemento y se acumulan hasta el elemento terminal.	Alta precisión. Los errores en las articulaciones afectan con el mismo orden de magnitud a la posición de la plataforma.
Bajas velocidades y aceleraciones. Peores características dinámicas.	Altas velocidades y aceleraciones. Mejor respuesta dinámica.
Cinemática simple. Resolución analítica de las ecuaciones. Facilidad en el lazo de control.	Cinemática compleja. Alto tiempo de computación. Dificultad en el control.
Amplio espacio de trabajo	Espacio de trabajo más reducido
Técnica de calibración resuelta	Calibración compleja. Problema abierto.
Posiciones singulares únicamente en el problema inverso	Posiciones singulares más complejas en problemas directo e inverso
Tecnología ya desarrollada	Nueva tecnología

Tabla 1.1: Comparativa entre los manipuladores serie y paralelo.

1.1.3. Aplicaciones de los manipuladores

En este apartado se mencionan las principales aplicaciones de los manipuladores:

- Simuladores de vuelo y automóviles.
- En los procesos de trabajo de alta velocidad, en los que se requiere de un posicionamiento de alta precisión con espacio de trabajo limitado, tales como en el montaje de PCB o fresado de alta precisión.
- Maquinado de piezas.
- Transporte de objetos.
- Posicionamiento de precisión.
- Medicina.
- Líneas de montaje del sector de la automoción.
- Procesos de paletización y embalaje.

1.2. Objetivos

El objetivo fundamental de este trabajo consiste en implementar rutinas de análisis cinemático directo e inverso de sistemas multicuerpo aplicados a una plataforma de Stewart de actuadores lineales.

Para llevar a cabo este objetivo general, se enumeran los siguientes objetivos específicos:

- Estudio de métodos de modelización matemática de sistemas multicuerpo.
- Estudio de formulaciones (cuadrilátero matlab) para el análisis cinemático de sistemas multicuerpo.
- Modelización y simulación de mecanismos 3D (corredera Matlab, MBSLim, SBEG)
- Modelización de la plataforma de Stewart en coordenadas naturales.
- Implementación de las subrutinas de análisis cinemático directo e inverso (Fortran).
- Implementación de las subrutinas necesarias para la simulación cinemática del sistema (C++).

La validación de la metodología propuesta permitirá al departamento desarrollar aplicaciones en las que los resultados de las simulaciones, obtenidas con modelos matemáticos, se puedan utilizar para interactuar con sistemas mecánicos experimentales. Con ello, el Departamento podrá iniciar nuevas líneas de investigación y de colaboración con empresas del sector industrial.

1.3. Hipótesis de trabajo y medios empleados

Para dar respuesta a los objetivos generales y específicos acordes con el problema planteado, en el tiempo disponible para cumplirlos, se considerará una plataforma de Stewart de dimensiones específicas. Esta plataforma será la que se modelice y estudie mediante los métodos de cinemática computacional propios de las formulaciones multicuerpo.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos.

2.1. Plataforma Stewart

2.1.1. Inicios de la Plataforma Stewart

Una plataforma Stewart es un robot de arquitectura paralela con 6 grados de libertad de gran aplicación en la simulación de movimientos de diferentes sistemas mecánicos como por ejemplo, aviones, barcos, helicópteros, etc. Para lograr imitar el movimiento de estos sistemas mecánicos se necesita calcular la cinemática inversa del robot para determinar cuales son las posiciones que cada uno de los actuadores debe tener para lograr la posición y orientación deseada que permitirá realizar diferentes trayectorias trazadas.

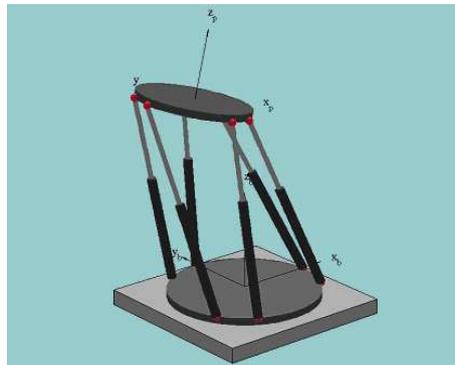


Figura 2.1: Esquema de una Plataforma Stewart-Gough.

El mecanismo es una estructura cinemática compuesta por dos plataformas y seis actuadores, en la cual la plataforma de base es fija, mientras que la plataforma superior y los seis actuadores son móviles. Los seis actuadores unen ambas plataformas que a su vez se ensamblan por medio de juntas esféricas y/o universales. Hay tres puntos en la plataforma superior, en cada punto salen dos actuadores. Estos actuadores tienen un mecanismo que les permite modificar su longitud individualmente, esto permite posicionar y orientar la plataforma superior. Dicha plataforma cuenta con seis grados de libertad en relación con la base, de manera que se puede mover en tres direcciones lineales y tres direcciones angulares individual o en combinación.

2.1.2. Historia de la Plataforma Stewart

En 1965, Stewart describe en un artículo un mecanismo, el cual tiene seis grados de libertad, controlado por seis motores teniendo cada uno un tope en tierra. Él propuso que el mecanismo sería utilizado como simulador de vuelo para la formación de pilotos de helicópteros.

Aunque los dispositivos en paralelo o manipuladores de enlace se denominan a menudo Plataformas Stewart, él no fue el inventor original de este tipo de mecanismo.

El mecanismo propuesto por Stewart es solo una configuración diferente del sistema de seis jacks desarrollado por Gough en 1947. Gough fue uno de los evaluadores del artículo de Stewart y en su revisión él afirma que él diseñó una máquina de prueba similar en 1949 la cual ya se había construido y entrado en operación en 1954 y en 1955 respectivamente. El trabajo de Stewart fue publicado junto con las comunicaciones de los evaluadores, así como la respuesta del autor. Stewart reconoce el hecho de que él no era consciente de la máquina de prueba de Gough y también afirma que, aunque su mecanismo de simulación de vuelo es similar, fue diseñado usando un enfoque diferente.

Irónicamente, Gough tampoco es reconocido como el inventor original de este tipo de mecanismo. Conforme a Merlet los manipuladores paralelos han sido conocidos por un largo tiempo y la invención actual es atribuida al matemático Cauchy, quien escribió un artículo sobre el movimiento posible y rigidez de un «octaedro articulado».

No obstante el redescubrimiento del manipulador paralelo por Stewart en 1965, provocó una llama que hoy en día aun arde. Merlet reporta que el interés principal en este tipo de robot comenzó alrededor de 1987 y desde esa fecha el número de trabajos sobre este tema se ha incrementado drásticamente debido a sus ventajas inherentes de capacidad de carga y rigidez espacial. Las plataformas Stewart son convenientes para una amplia gama de aplicaciones. Se cree que la investigación y desarrollo de dispositivos paralelos es actualmente el más popular tema en el área de robots manipuladores.

En la figura 2.2 se observa una plataforma de un simulador:



Figura 2.2: Plataforma de un simulador.

2.1.3. Diseño conceptual de la plataforma

Dentro de las propuestas para el diseño de plataformas paralelas se han presentado diversas alternativas dependiendo del tipo de plataforma y el criterio de diseño. Cuando se habla de criterios se hace referencia al aspecto de la plataforma que se quiere mejorar o en el cuál se quiere tener mejor desempeño, dentro de estos se puede contar la rigidez,

la dinámica (menores inercias, mayores aceleraciones), la destreza, el espacio de trabajo y criterios combinados. El proceso llevado a cabo generalmente consiste en determinar una geometría a partir de uno de estos criterios para luego verificar su desempeño respecto a los demás. Las principales características a evaluar son:

- Geométricas: Tamaño de la plataforma, tamaño y forma del volumen de trabajo, ángulo de movimiento de las juntas pasivas y de los actuadores, errores de posición del efector final, isotropía (un punto del espacio de trabajo se denomina isotrópico si el número de condición del jacobiano es igual a 1), facilidad de seguimiento de la trayectoria, singularidades dentro del espacio de trabajo.
- Velocidad: Máximas y mínimas velocidades de los actuadores y la plataforma móvil.
- Estática: Fuerzas y torques sobre los eslabones y la plataforma móvil, rigidez, ubicación del centro de masa.
- Dinámica: aceleraciones máximas de los actuadores y la plataforma móvil.

Teniendo en cuenta que para el diseño de una plataforma S-G se deben considerar una gran cantidad de parámetros, por ejemplo, para la ubicación de las juntas se necesitan 36 parámetros (3 coordenadas para cada uno de los 12 puntos), se realizarán varias suposiciones para llevar a cabo la reducción de parámetros. Se determinó que las juntas tanto en el anillo base como en el móvil están contenidas en una circunferencia y su disposición es simétrica respecto a 3 ejes que se encuentran a 120 grados; así la geometría de las placas queda definida por el radio de la circunferencia que contiene las juntas y el ángulo que se forma entre ellas. Como se necesitan dos anillos (fijo y móvil) se cuentan hasta el momento 4 parámetros.

Adicionalmente se deben determinar las longitudes de los actuadores (mínima y máxima) y suponiendo que se utilizarán 6 actuadores iguales se completan dos parámetros adicionales para un total de 6.

En cuanto a las juntas pasivas, se decidió utilizar articulaciones universales en ambos anillos por facilidad de manufactura ya que las juntas esféricas accesibles en el mercado local tienen poca amplitud de movimiento y su montaje es complicado. La amplitud de estas juntas no se consideró como un parámetro de diseño inicialmente, prefiriendo lograr la mayor amplitud posible al momento de realizar el diseño de detalle.

El criterio de diseño seleccionado fue la destreza, como la exactitud cinemática asociada a un manipulador. Dicho de otra forma, se puede interpretar la destreza del robot como la influencia que tienen los errores producidos en el movimiento de las articulaciones sobre los errores producidos en el movimiento del anillo móvil. Una consecuencia de la aplicación de este concepto es el hecho que para las configuraciones con menor destreza se necesitan fuerzas más grandes en los actuadores que para las de mayor destreza, de esta forma, si la destreza se acerca a cero, las fuerzas de los actuadores tienden a infinito.

2.1.4. Diversas aplicaciones de la Plataforma Stewart

En la actualidad la Plataforma Stewart tiene varias aplicaciones en diferentes campos, entre las cuales se encuentran:

- En el ámbito aeroespacial, la simulación en condiciones reales en aviones y naves espaciales se convirtió en una necesidad para la formación de pilotos, como también para el diseño y fabricación de aeronaves. Entre los simuladores se encuentran el ACFS (Advanced Concept Flight Simulator) de la NASA.

En su interior se encuentran los mandos de una aeronave común, estos mandos están ligados al entorno virtual de las pantallas del simulador y a los movimientos de la plataforma de seis grados de libertad que sirven como base para simular el movimiento de la aeronave. Este simulador cuenta con una gran flexibilidad para simular diferentes modelos de aviones en diferentes condiciones. También se encuentra la empresa Flight Safety la cual ha fabricado varios simuladores de entrenamiento en aviación como podemos observar en la siguiente imagen (figura 2.3):



Figura 2.3: Simulador de movimiento de Flight Safety.

- Para aumentar el almacenamiento de energía solar, se utiliza una plataforma Stewart (ver figura 2.4), localizada bajo paneles fotovoltaicos, orientados continuamente en dirección hacia el sol para poder incrementar el desempeño de las celdas.

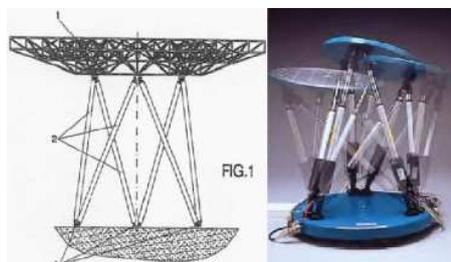


Figura 2.4: Robot hexapod para el posicionamiento de reflectores solares.

- En medicina se han empleado, como base para asistentes quirúrgicos robóticos. Estos mecanismos utilizan imágenes como tomografías computarizadas escaneadas del paciente, este sistema las convierte en sólidos virtuales similares a los huesos y articulaciones del paciente. Posteriormente la información de la cirugía es transmitida al control del robot. Posiblemente el asistente quirúrgico más popular sea el Da Vinci, figura 2.5, de arquitectura serial desarrollado en 1998 en el hospital Torre Médica.



Figura 2.5: Robot DA VINCI para asistencia quirúrgica.

- Además otras de las aplicaciones de las Plataformas Stewart es en el ámbito académico como elemento Mecatrónico, en el cual se unen las Ingenierías Mecánica, Electrónica, de Control e Informática. En la investigación se puede utilizar para recrear movimientos naturales (terremotos, oleaje, vibraciones...).
- También es ampliamente utilizado en Mecanizado, ensamble, soldadura e industria automotriz tal es el caso del robot FANUC, el cual se muestra a continuación en la imagen 2.6 :



Figura 2.6: Robot FANUC F-200iB.

2.1.5. Ventajas y desventajas de la plataforma Stewart

■ Ventajas:

- Capacidad de manipular cargas superiores a su propio peso, lo que otorga una alta eficiencia energética, ya que si se coloca una carga en la placa móvil esta se repartirá entre sus seis actuadores de tal forma que cada uno de ellos soporta una fracción de carga.
- Mayor precisión. Debido a la disposición de sus miembros no hay errores acumulados. Ya que en los robots seriales incrementan la incertidumbre debido al error de posicionamiento.
- Velocidades de operación superiores. Por tener que mover menos inercia, los actuadores se mueven más rápido.
- Mayor manejo de grados de libertad con menos componentes. En el caso de los seriales, a mayor cantidad de grados de libertad implica tener más miembros de la cadena Cinemática, esto no ocurre en el caso de los paralelos.

■ Desventajas:

- El espacio de trabajo suele ser más pequeño que el de los seriales y su cálculo no es sencillo.
- La cinemática de los mecanismos paralelos es más complicada y no se conoce un modelo general; si lo hay para estructuras seriales.

2.2. Cinemática de una plataforma Stewart

La cinemática es la rama de la física que describe el movimiento de objetos en el espacio sin considerar las fuerzas que causan dicho movimiento. Entonces, la cinemática aplicada a un robot busca estudiar la posición, velocidad y aceleración y todas aquellas propiedades que evolucionen con el tiempo y que tengan que ver con la geometría del robot. En particular, el problema principal de un análisis cinemático consiste en establecer la relación entre la posición del efector final y las variables de las articulaciones.

Muchos autores, entre ellos Spong y Siciliano, abordan el análisis primero bajo condiciones estáticas (sin velocidades ni otras derivadas de mayor orden) y luego toman en cuenta el movimiento a lo largo del tiempo.

De forma general, existen dos problemas principales en el análisis cinemático de un robot: la cinemática inversa y la cinemática directa.

2.2.1. Espacio de actuadores y espacio operacional

Sea q un vector de n componentes, donde cada uno de ellos especifica la posición de cada uno de los n actuadores que conforman el robot paralelo. Éste se conoce como las coordenadas de los actuadores. Entonces, el espacio de todos los vectores q posibles se llama espacio de actuadores o de articulaciones. Por otro lado, el espacio operacional es aquel conformado por todos los vectores x posibles que definen la posición y orientación del efector final con respecto a un sistema de referencia fijo.

En este proyecto el espacio de actuadores será aquel conformado por las longitudes de las seis articulaciones prismáticas que componen la plataforma, de tal forma que q será un vector 6×1 . El espacio operacional vendrá dado el vector x de coordenadas generalizadas definido la subsección 2.4, el cual describe la posición y orientación del efector final.

2.2.2. Cinemática inversa

El problema de la cinemática inversa consiste en determinar las longitudes de las patas dada la posición y orientación del efector final. La resolución de este problema es de gran importancia para el área de control de posición, donde se necesita que el efector final siga una determinada trayectoria. Para lograr esto, es necesario conocer el valor de las longitudes de los actuadores que producen el movimiento deseado.

Mientras que para un robot serie el problema cinemático inverso es considerado complejo, éste es sencillo de resolver para el caso de un manipulador paralelo. Efectivamente, muchos de los métodos se basan en utilizar información sobre cómo está construido el robot para obtener las coordenadas de los puntos terminales de las patas respecto al sistema de referencia fijo. Esto es posible debido a que se puede determinar la matriz de transformación del sistema móvil al fijo a partir de la posición y orientación del efector final. Teniendo esta información, se puede calcular de manera sencilla la longitud de los actuadores mediante la distancia entre sus puntos iniciales y finales.

2.2.3. Cinemática directa

El problema de la cinemática directa consiste en: dadas las longitudes de las patas, determinar la posición del efector final. Éste es considerado como un problema desafiante en el caso de robots paralelos, y hasta la fecha no se ha logrado derivar una solución en forma cerrada. A pesar de que la formulación del problema varía según la forma del manipulador empleado, la solución generalmente se obtiene mediante alguna de las siguientes aproximaciones:

- Generar un polinomio en una variable que usualmente es el ángulo que forman la base con uno de los planos definidos por dos patas cuando éstas comparten una articulación. El orden del polinomio obtenido depende de la topología del robot. Para la arquitectura más general de una plataforma de Stewart, Dietmaier demostró que se obtienen cuarenta soluciones. En el caso de la plataforma usada en este trabajo, Thomas y Col, obtuvieron un polinomio de orden ocho, por lo que no se puede obtener una solución en forma cerrada. Evidentemente, es necesario utilizar algún procedimiento que permita conseguir la solución correcta.
- Utilizar métodos numéricos para resolver un conjunto reducido de ecuaciones no lineales. Entre los autores que han formulado este tipo de aproximación, todos ellos utilizaron un método de Newton-Raphson que obtiene en pocas iteraciones la solución de la cinemática directa a partir de una estimación inicial.
- Agregar sensores adicionales a la plataforma que permitan obtener información necesaria para simplificar el problema.

2.3. Modelización de MBS: generalidades.

Dentro de la mecánica tradicional, se distinguen dos grandes áreas: la estática y la dinámica. La estática estudia aquellos sistemas que se supone que van a estar en equilibrio, es decir, quietos. La dinámica se encarga de aquellos otros que se supone que van a moverse.

Lo primero que se hace es el denominado análisis cinemático. Se trata de estudiar el movimiento de todos los elementos de la máquina o mecanismo cuando se conoce el movimiento de sus grados de libertad o entradas. Por ejemplo, si el mecanismo en cuestión fuera un paraguas convencional, el dato de entrada - único, por tratarse de un mecanismo de un solo grado de libertad- sería el movimiento del elemento deslizante que se opera manualmente para abrir o cerrar el paraguas. En función de ese dato, el análisis cinemático habría de calcular el movimiento de todos los demás elementos del mecanismo (varillas y tela). El análisis cinemático se divide, a su vez, en la resolución de los problemas de posición, velocidad, aceleración..., que son las distintas magnitudes que se engloban en lo que se ha llamado movimiento, y cuyos valores a lo largo del tiempo pueden ser interesantes para el diseñador.

El planteamiento del análisis cinemático, se ve notablemente determinado por la elección de las variables que van a servir para modelizar el sistema mecánico. Tradicionalmente, se habían empleado las llamadas coordenadas independientes, iguales en número a los grados de libertad del sistema, y por lo tanto, número mínimo posible. Sin embargo, estas coordenadas complican enormemente la resolución práctica de cualquier problema, sea cinemático

o dinámico, pues conllevan procedimientos nada sistemáticos y, por lo tanto, difícilmente automatizables.

Como alternativa a las coordenadas independientes, surgieron las coordenadas dependientes. Estas coordenadas son superiores en número a los grados de libertad, y pretenden definir el movimiento de cada elemento de la máquina o mecanismo. Su carácter de dependientes se explica por estar relacionadas mediante ecuaciones algebraicas, que se denominan ecuaciones de restricción. Así pues, cada conjunto de variables dependientes, llevará asociadas unas ciertas ecuaciones de restricción. La ventaja de estas coordenadas frente a las independientes, es que dan lugar a procedimientos sistemáticos, muy aptos por tanto para su programación e implementación en un ordenador.

Se han propuesto tres familias de coordenadas dependientes: las coordenadas relativas, las coordenadas de punto de referencia y las coordenadas naturales. Las coordenadas relativas son las correspondientes a los pares cinemáticos que unen los elementos de la máquina o mecanismo. Sus ecuaciones de restricción se obtienen por condiciones de cierre de lazos.

Las coordenadas de punto de referencia sitúan a cada sólido del mecanismo como si fuera libre, esto es, consisten en tres coordenadas cartesianas de un punto del sólido y tres ángulos para describir la orientación espacial del mismo. Las ecuaciones de restricción surgen aquí de imponer las condiciones de los pares cinemáticos que unen los distintos elementos.

Y por último, las coordenadas naturales están formadas por coordenadas cartesianas de puntos y componentes cartesianas de vectores unitarios. Los puntos y los vectores unitarios se ubican en los pares cinemáticos y sirven simultáneamente para definir elementos y pares. Las ecuaciones de restricción proceden de imponer las condiciones de sólido rígido de los elementos y la compatibilidad entre variables en algunos pares cinemáticos. Las coordenadas naturales son menores en número que las de punto de referencia, y conducen a ecuaciones de restricción mucho más simples. Tanto las coordenadas de punto de referencia como las naturales dan lugar a procedimientos de análisis cinemático y dinámico muy sistemáticos y generales.

El análisis cinemático consiste simplemente en resolver el sistema algebraico formado por las ecuaciones de restricción. Este sistema es habitualmente no lineal, y posee varias soluciones. Es por ello que suele resolverse acudiendo a una linealización y técnicas iterativas, obteniéndose de esta forma la solución más próxima a una cierta aproximación de partida. Los problemas de velocidad, aceleración, sobreaceleración, etc., se formulan sin más que derivar las ecuaciones de restricción una, dos, tres..., veces respectivamente.

En cuanto al análisis dinámico directo, consiste en averiguar cuál va a ser el movimiento del sistema mecánico conocidas las fuerzas que actúan sobre él. También pueden obtenerse los esfuerzos que sufren las conexiones entre elementos durante el movimiento. Un buen ejemplo de análisis dinámico directo es la determinación del comportamiento de un automóvil ante las acciones del conductor sobre volante, freno y acelerador.

En cuanto a las diferencias entre los métodos comentados, es importante indicar que los métodos globales usan superposición matricial y esto es que para cada sólido rígido o par cinemático va incluyendo nuevas ecuaciones en una matriz, de modo que se obtienen matrices de grandes dimensiones, es decir, se van acumulando las ecuaciones.

Mientras que en los métodos topológicos, que son los que se usan en este proyecto, se crean matrices más pequeñas de ecuaciones para cada sólido o par cinemático de modo que cuando se necesite calcular ese sólido o par se llama a la subrutina cada vez que se necesite.

Por tanto, con los métodos topológicos se consigue una mayor eficiencia debido a que las matrices a calcular son más pequeñas, y a su vez se consigue la ventaja que tienen los métodos globales en cuanto a su facilidad de automatización debido a que en cada subrutina se emplea la superposición matricial pero a una escala más pequeña que en los métodos globales.

2.4. Modelización de sistemas multicuerpo: tipos de coordenadas y métodos de análisis

La selección del tipo de coordenadas a utilizar para describir el comportamiento dinámico de un sistema multicuerpo ha sido desde hace tiempo objeto de gran debate. No en vano, el tipo de coordenadas condiciona de forma determinante el número total de ecuaciones del movimiento a resolver, la complejidad y grado de acoplamiento en que quedan expresadas esas ecuaciones y su tipo: ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) o ecuaciones diferenciales algebraicas (DAE), que, a su vez requieren de la selección de diferentes métodos de integración, y en su caso de estabilización. Además, el tipo de coordenadas condiciona el método de solución del problema cinemático, el cual puede resultar más o menos adecuado para su implementación mediante programas de propósito general.

Una clasificación general de los tipos de coordenadas las divide en dos grupos: Coordenadas independientes y coordenadas dependientes. Es en éste segundo grupo donde existe una mayor diversidad.

Las coordenadas independientes buscan un número mínimo de coordenadas suficientes, en principio, para poder definir la cinemática de todos los sólidos del sistema: posiciones, velocidades y aceleraciones. La dimensión del vector de coordenadas independientes coincide siempre con la movilidad del sistema mecánico a analizar, sea una cadena cinemática abierta o cerrada.

Los métodos de análisis basados en coordenadas dependientes identifican un conjunto de coordenadas suficiente para definir de forma unívoca la posición de todos los eslabones del mecanismo. El número de coordenadas seleccionadas difiere según su tipo pero es siempre mayor que la movilidad del sistema mecánico, por lo que son necesarias funciones algebraicas que las relacionen; son las llamadas ecuaciones de restricción para las posiciones. En coordenadas dependientes hay dos métodos diferentes de seleccionar el vector de coordenadas: los topológicos y los basados en ecuaciones de restricción impuestas por los pares cinemáticos (llamados métodos globales).

Los topológicos formulan las ecuaciones de restricción y las del movimiento a partir del reconocimiento topológico del sistema mecánico, normalmente representado mediante su correspondiente grafo. Estos métodos buscan el menor número posible de coordenadas y de ecuaciones de restricción ofreciendo sistemas de ecuaciones ODE reducidos pero fuertemente acopladas. Existe una cierta complejidad en la generación de la matriz de masas y en los términos de fuerza centrípeta y de Coriolis originados por las fuerzas de inercia. Entre los métodos topológicos el tipo de coordenadas más utilizadas son Lagrangianas.

Los métodos basados en las ecuaciones de restricción de par no consideran la topología del mecanismo, formulan las ecuaciones de restricción en función del número y tipo de pares cinemáticos que aparecen entre sus eslabones. El conjunto de coordenadas dependientes es

normalmente mayor al de los métodos topológicos; como ventaja, suelen ser más sistemáticos en la formulación de las ecuaciones de restricción y del movimiento, éstas últimas desacopladas y con matrices de masas constantes y términos centrípetos y de Coriolis nulos. Como desventaja, el mayor número de coordenadas obliga a un mayor número de ecuaciones del movimiento y también de ecuaciones de restricción. Dos ejemplos de este tipo de coordenadas son las cartesianas de punto de referencia y las coordenadas naturales.

Los métodos de análisis que utilizan coordenadas dependientes, ya sean topológicos o globales, permiten formular las ecuaciones del movimiento como un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas (DAE) u ordinarias (ODE). En un sistema DAE el número de ecuaciones diferenciales de segundo orden coincide con el de coordenadas utilizadas para describir el sistema; en un sistema ODE coincide con su movilidad.

A continuación se consideran los principales tipos de coordenadas sobre las que más se debate en la actualidad y cómo se aplicarían a un sencillo cuadrilátero articulado (Figura 2.7).

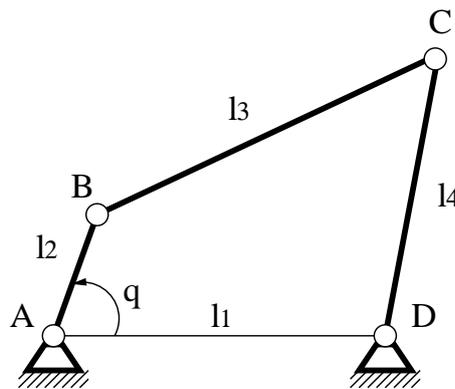


Figura 2.7: Cuadrilátero articulado: esquema cinemático y nomenclatura.

2.4.1. Coordenadas independientes

Modelizar un mecanismo en coordenadas independientes implica emplear tantos parámetros como grados de libertad posea el mecanismo. Se trata, por tanto, del número mínimo de coordenadas posibles.

Como ejemplo, la figura 2.8 . En la parte de la izquierda se muestra un mecanismo clásico de cadena cerrada, el cuadrilátero articulado, que posee un único grado de libertad. Sólo precisa por tanto de un parámetro para la definición de su movimiento. Dicho parámetro puede ser el ángulo que forma una de las barras unidas al elemento fijo con la horizontal. En la parte derecha aparece un mecanismo de cadena abierta, un robot plano de tres grados de libertad. Serán pues necesarios tres parámetros para definir el movimiento de dicho robot. Pueden emplearse como tales los ángulos entre elementos sucesivos.

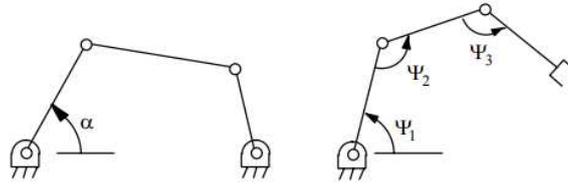


Figura 2.8: Coordenadas independientes.

La ventaja de estas coordenadas radica en su reducido número, que determina el tamaño final del problema. Son muy adecuadas cuando se trata de resolver mecanismos de cadena abierta, ya que se adaptan perfectamente a su naturaleza.

Sin embargo, en el caso de cadenas cerradas, el uso de coordenadas independientes exige la resolución de un problema cinemático complicado para determinar la posición del sistema correspondiente a un determinado valor de los parámetros. Es más, puede ocurrir que dicho problema no tenga una única solución, es decir, que los parámetros elegidos no definan unívocamente la posición del mecanismo.

2.4.2. Coordenadas dependientes: ecuaciones de restricción

Se dice que las coordenadas utilizadas para definir la posición de un sistema mecánico son dependientes si su número es mayor que el número de grados de libertad del sistema. El objetivo es emplear suficientes variables para definir perfectamente la posición de cada elemento del mecanismo. De esta forma se evitan las dificultades que aparecerían con coordenadas independientes.

Dado que se cuenta con más parámetros que grados de libertad, existirán unas relaciones que los ligan. Estas relaciones se denominan ecuaciones de restricción. Si designamos por n al número de coordenadas dependientes utilizado, g al número de grados de libertad del mecanismo y r al número de ecuaciones de restricción que aparecen entre las coordenadas, ha de cumplirse la relación,

$$r = n - g \quad (2.1)$$

Se ha dicho que lo característico de las coordenadas dependientes es que definen perfectamente la posición de cada elemento del mecanismo. Sin embargo, esto puede lograrse de muchas formas. Los tres tipos clásicos de coordenadas dependientes son: coordenadas relativas, coordenadas de punto de referencia y coordenadas naturales. Todas ellas se describen a continuación.

2.4.2.1. Coordenadas relativas

Estas coordenadas fueron las primeras en ser utilizadas. Sitúan cada elemento del mecanismo con respecto al anterior en la cadena cinemática. Se hallan, por tanto, asociadas a los pares cinemáticos del mecanismo. En cada par serán necesarias tantas coordenadas como grados de libertad relativos permita el par entre los elementos que une. En la figura 2.9 se muestra un mecanismo plano modelizado con coordenadas relativas.

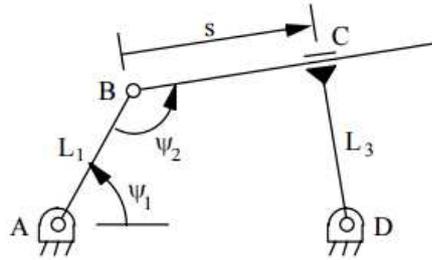


Figura 2.9: Coordenadas relativas.

Las ecuaciones de restricción que ligan las variables proceden a la condición de cierre de los distintos lazos que componen la cadena cinemática del mecanismo. Así, en el ejemplo de la figura sólo hay un lazo. La condición de cierre del mismo se expresa matemáticamente como,

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0} \quad (2.2)$$

Esta es una ecuación vectorial en el plano, que equivale a dos ecuaciones escalares. Es fácil justificar que han de existir dos ecuaciones de restricción entre las variables. En este caso, $n=3$, pues hay tres coordenadas relativas, $g=1$, pues el mecanismo tiene un grado de libertad y, por tanto, $r=n-g=3-1=2$, son las ecuaciones de restricción.

La expresión vectorial puede expandirse en dos ecuaciones escalares como se indica a continuación:

$$L_1 \cos \psi_1 + s \cos(\psi_1 + \psi_2 + \pi) + L_3 \sin(\psi_1 + \psi_2 - \pi) - L_4 = 0 \quad (2.3)$$

$$L_1 \sin \psi_1 + s \sin(\psi_1 + \psi_2 + \pi) + L_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 - \pi) - L_4 = 0 \quad (2.4)$$

La principal ventaja de las coordenadas relativas es su reducido número, que conduce a un tamaño del problema pequeño. También facilitan la consideración de fuerzas y momentos aplicados en los pares cinemáticos. En el caso particular de mecanismos de cadena abierta, las coordenadas relativas son independientes, pues coinciden con el número de grados de libertad del sistema, no existiendo ecuaciones de restricción que las ligen.

Un inconveniente radica en la dificultad de automatizar la determinación de los distintos lazos cinemáticos independientes del mecanismo, de manera que puedan establecerse las ecuaciones de restricción. Además, a partir de los valores numéricos de las coordenadas en un instante, no es posible determinar inmediatamente la posición de un elemento cualquiera, sino que hay que situar previamente a todos los elementos que le preceden en la cadena cinemática.

2.4.2.2. Coordenadas de punto de referencia

Estas coordenadas sitúan a cada elemento del mecanismo con independencia de los demás. Para ello, se eligen las coordenadas de un punto cualquiera del elemento, y la orientación del mismo. En el caso plano la orientación quedará definida con un ángulo, y en el

espacial requerirá el empleo de alguno de los múltiples sistemas existentes para definir la orientación de un triedro en el espacio.

Las ecuaciones de restricción surgen ahora de imponer las uniones entre los elementos, ya que inicialmente se han definido como si estuvieran libres, sin ataduras. Como ejemplo, en la siguiente figura 2.10 se modeliza en coordenadas de punto de referencia el mismo mecanismo modelizado antes en coordenadas relativas.

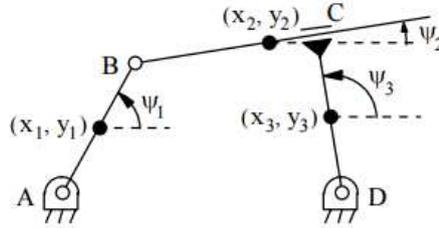


Figura 2.10: Coordenadas de punto de referencia.

En este caso, $n=9$ y $g=1$, luego $r=n-g=9-1=8$ son las ecuaciones de restricción que hay que imponer. Dado que los cuatro pares cinemáticos del mecanismo son de clase I, esto es, cada par restringe dos grados de libertad, habrá dos ecuaciones de restricción por par cinemático. Empezando por el par consignado con A y siguiendo el orden hasta D, las ecuaciones de restricción son:

$$(x_1 - x_A) - \frac{L_1}{2} \cdot \cos\psi_1 = 0 \quad (2.5)$$

$$(y_1 - y_A) - \frac{L_1}{2} \cdot \sen\psi_1 = 0 \quad (2.6)$$

$$(x_1 + \frac{L_1}{2} \cdot \cos\psi_1) - (x_2 + \frac{L_2}{2} \cdot \cos\psi_2) = 0 \quad (2.7)$$

$$(y_1 + \frac{L_1}{2} \cdot \sen\psi_1) - (y_2 + \frac{L_2}{2} \cdot \sen\psi_2) = 0 \quad (2.8)$$

$$\psi_1 - (\psi_2 + \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (2.9)$$

$$(x_2 - x_3) \cdot \cos\psi_3 - (y_2 - y_3) \cdot \sen\psi_3 - \frac{L_3}{2} = 0 \quad (2.10)$$

$$(x_3 - x_D) - \frac{L_3}{2} \cdot \cos\psi_3 = 0 \quad (2.11)$$

$$(y_3 - y_D) - \frac{L_3}{2} \cdot \sen\psi_3 = 0 \quad (2.12)$$

Los puntos de referencia emigran a los pares, contribuyendo así simultáneamente a la definición de los dos elementos que se unen en el par correspondiente. Una consecuencia inmediata es que ya no son necesarias variables de tipo angular para definir la orientación de cada elemento.

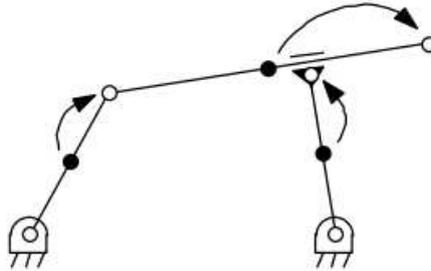


Figura 2.11: Evolución de las coordenadas de punto de referencia.

Las ventajas de estas coordenadas se encuentran en lo sistemático de su definición y del establecimiento de las ecuaciones de restricción, lo que hace que el proceso sea fácilmente automatizable, y en la posibilidad que ofrecen de situar un elemento directamente, sin necesidad de conocer la posición de los demás.

Como principal inconveniente está su elevado número que conduce a problemas de mayor tamaño, y la complejidad de las ecuaciones de restricción que ligan las variables en el caso tridimensional, en el que la interpretación de la orientación suele ser difícil.

2.4.2.3. Coordenadas naturales

Las coordenadas naturales sitúan también cada elemento con independencia de los demás.

Para continuar con la comparación de los distintos tipos de coordenadas, se muestra en la siguiente figura 2.12 el mismo mecanismo que ya ha sido utilizado como ejemplo, modelizado esta vez en coordenadas naturales.

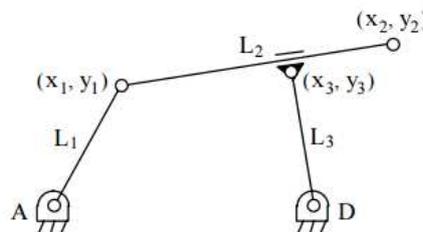


Figura 2.12: Coordenadas naturales.

En este caso se han empleado seis variables para la definición del mecanismo. Por tanto, $n=6$, $g=1$, luego $r=n-g=6-1=5$, son las ecuaciones de restricción que se precisan.

Cuando se modeliza en coordenadas naturales, las ecuaciones de restricción que ligan las variables proceden de dos fuentes: condiciones de sólido rígido y condiciones de par cinemático. Las restricciones son las siguientes:

$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_1^2 = 0 \quad (2.13)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 = 0 \quad (2.14)$$

$$(x_3 - x_D)^2 + (y_3 - y_D)^2 - L_3^2 = 0 \quad (2.15)$$

$$(x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_D) + (y_2 - y_1) \cdot (y_3 - y_D) = 0 \quad (2.16)$$

$$(x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) + (y_3 - y_1) \cdot (x_2 - x_1) = 0 \quad (2.17)$$

Las ventajas de estas coordenadas son: definición simple y sistemática; ecuaciones de restricción fáciles de establecer y sencillas; sitúan a cada elemento con independencia de los demás; número reducido, generalmente intermedio entre las relativas y las de punto de referencia (en el ejemplo, tres relativas, nueve de punto de referencia y seis naturales); inmediata interpretación geométrica de los resultados, más sencilla que en las otras coordenadas.

Como inconveniente está el hecho de que la utilización de estas coordenadas exige familiarizarse con ellas, para lograr modelizaciones correctas de los mecanismos.

2.4.3. Modelización en coordenadas naturales.

En el espacio, las coordenadas naturales son coordenadas cartesianas de puntos de los sólidos del mecanismo y componentes cartesianas de vectores unitarios rígidamente unidos a los sólidos del mecanismo.

Análogamente a como se hizo en el caso plano, se pueden citar varias normas generales de modelización para tomar contacto con estas coordenadas. Se enumeran las siguientes reglas orientativas:

- Cada sólido rígido del mecanismo ha de contener suficientes puntos y vectores unitarios para que su movimiento quede perfectamente definido: esto implica un mínimo de dos puntos y un vector unitario no alineados, o tres puntos no alineados, o un punto y dos vectores unitarios distintos en cada sólido. También puede definirse un sólido con sólo dos puntos, pero en este caso aceptamos que el sólido posea solamente cinco grados de libertad, ya que no se detecta la rotación del mismo alrededor del eje definido por los dos puntos.
- En la modelización de los pares cinemáticos se tratará de compartir puntos y vectores unitarios.
- Convendrá compartir un punto en aquellos pares que contengan un eje de rotación o traslación, como el par de revolución, el prismático o el cilíndrico.
- Convendrá compartir un punto en aquellos pares que realmente comparten algún punto material, como el par de revolución, el esférico o la junta universal.

- Un vector unitario puede ser sustituido por dos puntos.
- Pueden definirse puntos y vectores unitarios adicionales siempre que se estime oportuno.

Las ecuaciones de restricción que relacionan las variables proceden de asegurar el carácter rígido de los sólidos y de imponer algunos pares cinemáticos. También pueden definirse coordenadas relativas, debiéndose añadir una nueva ecuación de restricción por cada nueva coordenada.

La idea que debe presidir la modelización es la siguiente: situar, primeramente, tantos puntos y vectores unitarios como sea necesario para que los pares cinemáticos queden perfectamente definidos y, acto seguido, verificar que todos los sólidos del mecanismo queden bien modelizados, introduciendo variables adicionales en aquellos que no lo estén.

2.4.3.1. Restricciones de sólido rígido

Como criterio general, si se emplean n variables para definir un cierto sólido rígido en el espacio, el número de ecuaciones de restricción que habrá que imponer es,

$$r_i = n_i - 6 \quad (2.18)$$

- **Sólido modelizado con dos puntos**

Este es un caso particular (figura 2.13), ya que un sólido que en el espacio se defina con dos puntos tiene solamente cinco grados de libertad. En efecto, cualquier rotación del sólido alrededor de la recta definida por ambos puntos no será detectada. Esta modelización es aplicable por tanto a elementos tipo barra, con inercia despreciable respecto a su propio eje, y que se encuentren unidos a los elementos vecinos mediante rótulas esféricas.



Figura 2.13: Sólido modelizado con dos puntos.

Dado que se utilizan variables para definir el sólido -tres coordenadas cartesianas de cada punto-, y que sólo posee cinco grados de libertad, habrá que establecer una única ecuación de restricción, que será una condición de distancia constante entre los dos puntos,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (2.19)$$

▪ **Sólido modelizado con dos puntos y un vector unitario**

En este caso (figura 2.14), se emplean nueve variables, se concluye que hay que imponer tres ecuaciones de restricción para asegurar el carácter de sólido rígido.

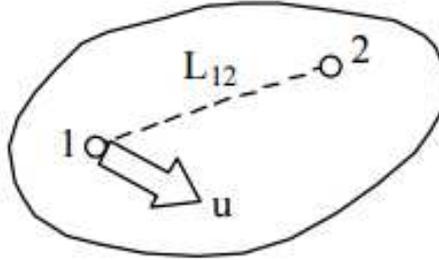


Figura 2.14: Sólido modelizado con dos puntos y un vector unitario.

Las tres ecuaciones son,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (2.20)$$

$$(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) - 1 = 0 \quad (2.21)$$

$$(x_2 - x_1) \cdot u_x + (y_2 - y_1) \cdot u_y + (z_2 - z_1) \cdot u_z - c = 0 \quad (2.22)$$

La primera es una ecuación de distancia constante entre los dos puntos. La segunda es una condición de módulo unitario para el vector. La tercera es una condición de producto escalar constante que obliga a que se mantenga el ángulo que forman el vector V_{12} y el vector unitario.

En el caso particular de que el vector unitario se encuentre alineado con los dos puntos (figura 2.15), las ecuaciones anteriores no son independientes.

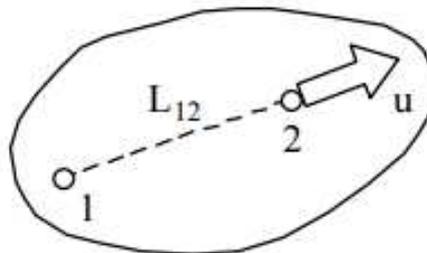


Figura 2.15: Sólido modelizado con dos puntos y un vector unitario alineados.

En su lugar se introducirán las siguientes:

$$(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) - 1 = 0 \quad (2.23)$$

$$(x_2 - x_1) - L_{12} \cdot u_x = 0 \quad (2.24)$$

$$(y_2 - y_1) - L_{12} \cdot u_y = 0 \quad (2.25)$$

$$(z_2 - z_1) - L_{12} \cdot u_z = 0 \quad (2.26)$$

La primera ecuación es de módulo unitario del vector. Las siguientes son las tres ecuaciones escalares a que da la condición vectorial que expresa el vector v_{12} como proporcional al vector unitario u . De ellas sólo dos serán independientes, aquellas correspondientes a las dos menores componentes del vector unitario. Como siempre, caben dos posibilidades: elegir en cada instante la ecuación que debe ser desechada, o introducir todas dando lugar a un sistema de ecuaciones redundantes.

■ Sólido modelizado con tres puntos

En este caso, (figura 2.16), el número de variables empleadas para definir el sólido es nueve, luego habrá que establecer tres ecuaciones de restricción entre ellas.

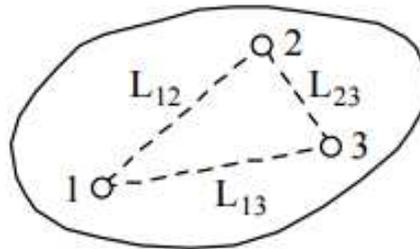


Figura 2.16: Sólido modelizado con tres puntos.

Lógicamente, al igual que ya ocurría en el caso plano, las tres ecuaciones serán tres condiciones de distancia constante entre los puntos.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (2.27)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - L_{13}^2 = 0 \quad (2.28)$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - L_{23}^2 = 0 \quad (2.29)$$

En el caso particular de que los tres puntos se encuentren alineados, (figura 2.17):

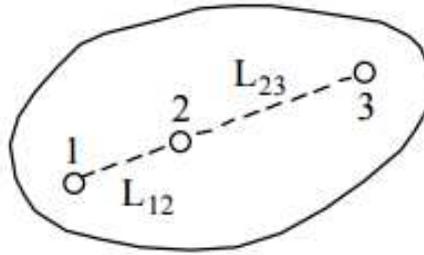


Figura 2.17: Sólido modelizado con tres puntos alineados.

Las ecuaciones a introducir serán:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (2.30)$$

$$(x_3 - x_1) - \frac{L_{13}}{L_{12}} \cdot (x_2 - x_1) = 0 \quad (2.31)$$

$$(y_3 - y_1) - \frac{L_{13}}{L_{12}} \cdot (y_2 - y_1) = 0 \quad (2.32)$$

$$(z_3 - z_1) - \frac{L_{13}}{L_{12}} \cdot (z_2 - z_1) = 0 \quad (2.33)$$

▪ **Sólido modelizado con dos puntos y dos vectores unitarios**

Dado que se utilizan doce variables para la modelización del sólido, será preciso establecer seis ecuaciones de restricción que las relacionen, (figura 2.18) .

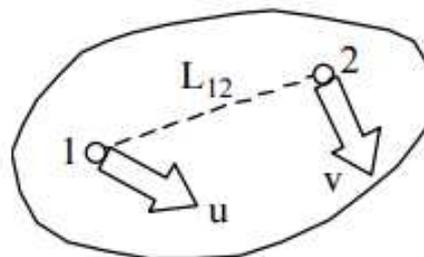


Figura 2.18: Sólido modelizado con dos puntos y dos vectores unitarios.

Las ecuaciones de restricción a introducir en este caso son:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (2.34)$$

$$(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) - 1 = 0 \quad (2.35)$$

$$(v_x^2 + v_y^2 + v_z)^2 - 1 = 0 \quad (2.36)$$

$$(x_2 - x_1) \cdot u_x + (y_2 - y_1) \cdot u_y + (z_2 - z_1) \cdot u_z - c_1 = 0 \quad (2.37)$$

$$(x_2 - x_1) \cdot v_x + (y_2 - y_1) \cdot v_y + (z_2 - z_1) \cdot v_z - c_2 = 0 \quad (2.38)$$

$$(u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z) \cdot v_z - c_3 = 0 \quad (2.39)$$

La primera es una ecuación de distancia constante entre los dos puntos. La segunda y la tercera son condiciones de módulo unitario de los dos vectores. La cuarta es una ecuación de producto escalar constante, que mantiene fijo el ángulo entre el vector u y el segmento formado por los dos puntos. La quinta es análoga pero con el vector v . La sexta ecuación es análoga, pero esta vez entre los dos vectores unitarios.

Un caso particular que puede presentar esta modelización es aquél en el cual el segmento formado por los dos puntos, el vector unitario u y el vector unitario v son coplanarios. Entonces, las ecuaciones vistas anteriormente se vuelven dependientes, debiendo modificarse. Las ecuaciones de restricción correctas son:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (2.40)$$

$$(u_x^2 + u_y^2 + u_z)^2 - 1 = 0 \quad (2.41)$$

$$(v_x^2 + v_y^2 + v_z)^2 - 1 = 0 \quad (2.42)$$

$$(x_2 - x_1) \cdot u_x + (y_2 - y_1) \cdot u_y + (z_2 - z_1) \cdot u_z - c_1 = 0 \quad (2.43)$$

$$(v_x - \lambda(x_2 - x_1) - \mu u_x) = 0 \quad (2.44)$$

$$(v_y - \lambda(y_2 - y_1) - \mu u_y) = 0 \quad (2.45)$$

$$(v_z - \lambda(z_2 - z_1) - \mu u_z) = 0 \quad (2.46)$$

Como puede verse, las tres primeras ecuaciones son las mismas. Sirven para asegurar que el vector formado por los dos puntos y el vector unitario u forman una base rígida. Las tres últimas ecuaciones expresan el vector unitario v como combinación lineal de los dos vectores de la base mencionada, siendo λ y μ los coeficientes de la combinación lineal. Por supuesto, se podría haber desarrollado la base formada por los dos vectores unitarios y haber escrito el vector v_{12} como combinación lineal de u y v , o haber tomado como base al vector formado por los dos puntos y el vector unitario v , expresando como combinación lineal al vector unitario u .

■ Sólido general

Dado que la casuística puede ser interminable, se indica en este apartado el criterio general que permitirá establecer correctamente las ecuaciones de restricción para un sólido rígido modelizado con cualquier número de puntos y vectores unitarios.

La forma de proceder es la siguiente:

- Seleccionar tres segmentos que definan una base tridimensional.
- Establecer las seis ecuaciones de restricción entre los tres segmentos elegidos, asegurando así el carácter rígido de la base.
- Expresar el resto de puntos y vectores unitarios como combinación lineal de los segmentos de la base.

2.4.3.2. Restricciones de par cinemático

El número de ecuaciones de restricción que deben introducirse por cada tipo de par cinemático se deduce fácilmente por el número de grados de libertad de movimiento relativo que restringe entre los elementos que une. Así, un par de clase II, como por ejemplo el par cilíndrico, permite dos movimientos relativos, es decir, restringe cuatro. Por tanto, habrá que establecer cuatro ecuaciones de restricción para imponer las condiciones de este par. En general, en un par de clase X, el número de ecuaciones de restricción a establecer será $6-X$.

■ Par esférico

También llamado rótula esférica, (figura 2.19), se trata de un par de clase III, luego precisa tres ecuaciones de restricción. Sin embargo, si se modeliza de forma que los dos elementos conectados por el par compartan un punto -el centro de la rótula-, las tres condiciones quedan automáticamente establecidas, ya que implícitamente se está imponiendo la igualdad de las coordenadas x , y , z , de dicho punto como perteneciente a cada sólido.

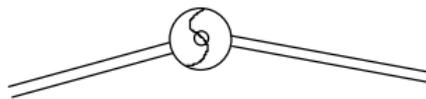


Figura 2.19: Par esférico.

Por supuesto, es posible modelizar con un punto diferente para cada sólido. Las tres ecuaciones de restricción son entonces las obtenidas al establecer la igualdad entre las tres coordenadas cartesianas de ambos puntos. Sin embargo, esta decisión llevará a un tamaño mayor del problema.

■ Par prismático

El par prismático es de clase I, (figura 2.20). La única diferencia que presenta con el par cilíndrico es que restringe el giro relativo entre elementos alrededor del eje del par. Por tanto, su modelización será similar a la del par cilíndrico, si bien habrá que establecer una condición que impida dicho giro relativo.

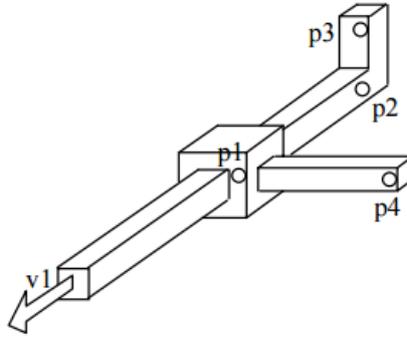


Figura 2.20: Par prismático.

Dado que ambos sólidos comparten el vector unitario 1, hay dos restricciones impuestas automáticamente. Faltan, por tanto, otras tres. Las dos primeras procederán de asegurar que los puntos 1 y 2 se encuentren siempre alineados con el vector unitario 1. Esto se hará mediante una ecuación de producto vectorial, exactamente del mismo modo en que se hizo para el par cilíndrico. La última ecuación de restricción será un producto escalar constante entre dos vectores no paralelos al eje del par. En este caso, servirán los vectores formados por los puntos 1,4 y 2,3 respectivamente. Las ecuaciones descritas son:

$$(y_2 - y_1)v_{1z} - (z_2 - z_1)v_{1y} = 0 \quad (2.47)$$

$$(z_2 - z_1) \cdot v_{1x} - (x_2 - x_1) \cdot v_{1z} = 0 \quad (2.48)$$

$$(x_2 - x_1) \cdot v_{1y} - (y_2 - y_1) \cdot v_{1x} = 0 \quad (2.49)$$

$$(x_4 - x_1) \cdot (x_3 - x_2) + (y_4 - y_1) \cdot (y_3 - y_2) + (z_4 - z_1) \cdot (z_3 - z_2) - c = 0 \quad (2.50)$$

Ya se ha comentado que las modelizaciones pueden ser diversas. Lo importante es definir puntos y vectores unitarios suficientes para permitir después restringir todos los movimientos relativos entre sólidos que realmente restringe el par. Para concretar esta idea, supongamos un par prismático modelizado de otra forma, figura 2.21:

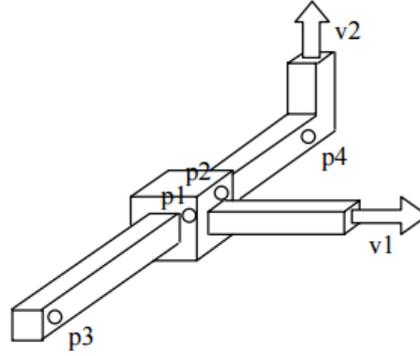


Figura 2.21: Modelización del par prismático.

Ahora no se comparten puntos ni vectores unitarios entre los elementos. Entonces, por ser este un par de clase I, habrá que imponer cinco ecuaciones de restricción. Son las siguientes:

$$(y_2 - y_1) \cdot (z_3 - z_1) - (z_2 - z_1) \cdot (y_3 - y_1) = 0 \quad (2.51)$$

$$(z_2 - z_1) \cdot (x_3 - x_1) - (x_2 - x_1) \cdot (z_3 - z_1) = 0 \quad (2.52)$$

$$(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (y_2 - y_1) \cdot (x_3 - x_1) = 0 \quad (2.53)$$

$$(y_2 - y_1) \cdot (z_4 - z_1) - (z_2 - z_1) \cdot (y_4 - y_1) = 0 \quad (2.54)$$

$$(z_2 - z_1) \cdot (x_4 - x_1) - (x_2 - x_1) \cdot (z_4 - z_1) = 0 \quad (2.55)$$

$$(x_2 - x_1) \cdot (y_4 - y_1) - (y_2 - y_1) \cdot (x_4 - x_1) = 0 \quad (2.56)$$

$$v1_x \cdot v2_x + v1_y \cdot v2_y + v1_z \cdot v2_z - c = 0 \quad (2.57)$$

Las tres primeras ecuaciones obligan al punto 3 a permanecer alineado con 1 y 2 merced a un producto vectorial nulo. Lógicamente, sólo dos de ellas son independientes. Las tres ecuaciones siguientes obligan al punto 4 a mantenerse en línea con 1 y 2, análogamente a como lo hacían las anteriores con el punto 3. Por tanto, también habrá que elegir dos. Por último, la última ecuación restringe el giro relativo entre los dos elementos alrededor del eje del par imponiendo el valor constante del producto escalar entre los vectores 1 y 2. Como siempre, lo más cómodo será introducir las siete ecuaciones, aunque sólo cinco sean independientes, generando ecuaciones redundantes.

■ Junta universal

La junta universal o par de Cardan (figura 2.22) , sirve para transmitir giros entre ejes no paralelos que se cortan. Se trata de un par de clase II, que restringe por tanto cuatro movimientos relativos entre los elementos que une.

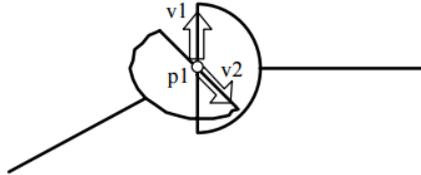


Figura 2.22: Junta universal.

Se muestra una posible modelización de este par. El punto 1, punto de corte de los dos ejes, es compartido por ambos elementos, lo que automáticamente introduce tres restricciones. La condición restante procede del carácter rígido de la cruceta, que se expresará imponiendo que el producto escalar entre los vectores unitarios 1 y 2 se mantenga constante.

$$v1_x \cdot v2_x + v1_y \cdot v2_y + v1_z \cdot v2_z - c = 0 \quad (2.58)$$

Como en casos anteriores, de no compartirse el punto 1, habría que añadir tres ecuaciones de restricción adicionales que indicarán que ese punto material es siempre coincidente para ambos sólidos.

2.4.3.3. Coordenadas mixtas

El significado de las coordenadas mixtas en el caso tridimensional es exactamente el mismo que en el caso plano. También del mismo modo, será necesario introducir una nueva ecuación de restricción por cada nueva coordenada relativa que se quiera considerar. La única diferencia del caso espacial con el plano radica en la forma de las ecuaciones de restricción.

■ Ecuación de ángulo

Supongamos que se desea establecer un ángulo entre dos elementos unidos por un par de revolución,(figura 2.23):

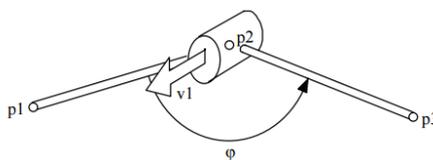


Figura 2.23: Ángulo entre dos elementos.

Al igual que sucedía en el caso plano, se puede utilizar la ecuación en coseno, obtenida a partir de un producto escalar, o la ecuación en seno, obtenida a partir de un producto vectorial.

La ecuación de coseno se expresa,

$$(x_3 - x_2) \cdot (x_1 - x_2) + (y_3 - y_2) \cdot (y_1 - y_2) + (z_3 - z_2) \cdot (z_1 - z_2) - L_{12} \cdot L_{23} \cdot \cos\varphi = 0 \quad (2.59)$$

ya que se trata del producto escalar entre los vectores formados por los puntos 2,3 y 2,1 respectivamente.

La ecuación en seno es una de las tres siguientes,

$$(y_1 - y_2) \cdot (z_3 - z_2) - (z_1 - z_2) \cdot (y_3 - y_2) - v1_x \cdot L_{12} \cdot L_{23} \cdot \text{sen}\varphi = 0 \quad (2.60)$$

$$(z_1 - z_2) \cdot (x_3 - x_2) - (x_1 - x_2) \cdot (z_3 - z_2) - v1_y \cdot L_{12} \cdot L_{23} \cdot \text{sen}\varphi = 0 \quad (2.61)$$

$$(x_1 - x_2) \cdot (y_3 - y_2) - (y_1 - y_2) \cdot (x_3 - x_2) - v1_z \cdot L_{12} \cdot L_{23} \cdot \text{sen}\varphi = 0 \quad (2.62)$$

La ecuación que debe elegirse es la correspondiente a la mayor componente del vector unitario 1. Como siempre, lo más comodo es introducir siempre las tres aunque sean redundantes.

■ Ecuación de distancia

Supongamos que se desea considerar como variable la distancia asociada al par prismático de la figura 2.24, que se tomará como distancia entre el punto 2 y el punto 1.

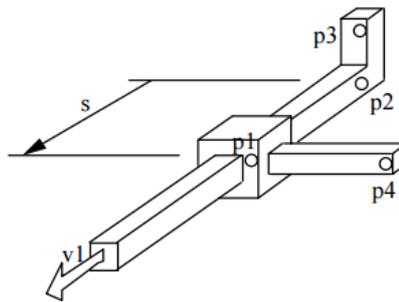


Figura 2.24: Distancia entre dos puntos.

La ecuación de restricción a considerar será una de las tres siguientes:

$$(x_1 - x_2) - s \cdot v1_x = 0 \quad (2.63)$$

$$(y_1 - y_2) - s \cdot v1_y = 0 \quad (2.64)$$

$$(z_1 - z_2) - s \cdot v1_z = 0 \tag{2.65}$$

La ecuación a elegir es la correspondiente a la mayor componente del vector unitario 1, si bien pueden introducirse las tres como redundantes.

Al igual que ocurría en el caso plano, cabe también la posibilidad de utilizar la siguiente ecuación,

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - s^2 = 0 \tag{2.66}$$

si bien, como ya se dijo, esta expresión puede dar problemas cuando el signo de la distancia sea relevante, ya que la ecuación se verifica igualmente para un valor de s positivo o negativo.

2.4.4. Ejemplos

Ya se han descrito los métodos que se van a utilizar para resolver la plataforma. Antes de estudiar la plataforma, se ensaya con algún ejemplo:

2.4.4.1. Corredera 3D.

Se estudia la siguiente corredera, figura 2.25:

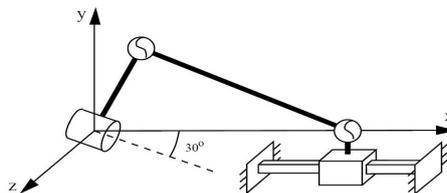


Figura 2.25: Esquema de una Plataforma Stewart-Gough.

Se estudian el modelo cinématico, las coordenadas y ecuaciones de cada uno de los sólidos, según estén formados de puntos y vectores, serían (Tabla 2.1):

ID	SÓLIDO RÍGIDO						
	PTOS Y VECT	S.R	VECT.U	T	C.L.	COORD	ECU
1-2	A , 1, V_1, V_2	1	1	3	0	6 coord	5 ecu
2-3	1 , 2, V_3, V_4	1	2	3	0	9 coord	6 ecu
3-4	2 , V_5, V_6, V_7	0	0	0	0	0 coord	0 ecu
	TOTAL					15 coord	11 ecu

Tabla 2.1: Coordenadas por sólido de la corredera, ecuaciones de restricción de sólido rígido, vector unitario, triedro y combinación lineal. Se marcan en negrita las coordenadas compartidas.

Luego, los grados de libertad según el criterio de Grüber-Lloyd de este mecanismo sería, siguiendo la fórmula de:

$$L = 6 \cdot n_m - \sum E_k \cdot p_k \quad (2.67)$$

Donde:

- n_m : Número de eslabones móviles.
- k : Grado del par cinemático.
- E_k : Grado de libertad que elimina un par de grado k .
- p_k : Número de pares de grado k .

En este caso, se habla de 3 grupos, en el que se tienen un sólido tipo Sólido rígido de tipo V, esta aporta las ecuaciones: una de sólido rígido, una de vector unitario y tres de triedro. Luego se tienen dos pares esféricos de tipo III, los cuales están conformados por las ecuaciones: una de sólido rígido, dos de vector unitario y tres de triedro. Y por último se tiene un par prismático tipo IV, el cual al compartir todos sus puntos y vectores, en principio no aportará ninguna ecuación según sus coordenadas. Todas estas ecuaciones más las que se obtendrán al ajustar los grados de libertad según los puntos y vectores que se asignen, están escritas más adelante. Terminando el estudio empezado:

$$L = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 18 - 10 - 6 = 2GDL \quad (2.68)$$

Y cuyas ecuaciones con respecto al tipo de sólido serían(Tabla 2.2):

ID	ECUAC. SEGÚN EL SÓLIDO				
PAR	TIPO	GRADO	GDL	Nº ELEMETS COMP	ECUAC. APORTADAS
1	Rot	V	5	3(pto) - 2(vect)	0 ecu
2	Esf	III	3	3(vect)	0 ecu
3	Esf	III	3	3(vect)	0 ecu
4	Prism	V	4	3(vect)	1 ecu

Tabla 2.2: Sólidos que forman la corredera, grados de libertad, número de elementos compartidos teniendo en cuenta puntos y vectores y las ecuaciones que aportan.

Por lo tanto serían 2 ecuaciones las que aporta el par prismático, quedando:

$$15\text{coordenadas} - 11\text{ecuaciones} - 2\text{ecuaciones} = 2GDL \quad (2.69)$$

En primer lugar se plantean las ecuaciones, y se explica cada una de ellas:

SÓLIDO 1-2:

$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 + (z_1 - z_A)^2 - L_1^2 = 0 \quad (2.70)$$

Esta ecuación es la de distancia de sólido rígido, en la que se han asignado dos puntos, ecuación 2.70.

$$v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2 - 1 = 0 \quad (2.71)$$

Esta ecuación 2.71 es la de vector unitario, vectores que no son compartidos.

$$v_{1x} \cdot v_{2x} + v_{1y} \cdot v_{2y} + v_{1z} \cdot v_{2z} = 0 \quad (2.72)$$

$$v_{1x} \cdot (x_1 - x_A) + v_{1y} \cdot (y_1 - y_A) + v_{1z} \cdot (z_1 - z_A) = 0 \quad (2.73)$$

$$v_{2x} \cdot (x_1 - x_A) + v_{2y} \cdot (y_1 - y_A) + v_{2z} \cdot (z_1 - z_A) = 0 \quad (2.74)$$

Y por último estas tres ecuaciones 2.72, 2.73 y 2.74 son las denominadas triedro.

SÓLIDO 2-3:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_2^2 = 0 \quad (2.75)$$

Esta ecuación es la de distancia de sólido rígido, en la que se han asignado dos puntos, ecuación 2.75.

$$v_{3x}^2 + v_{3y}^2 + v_{3z}^2 - 1 = 0 \quad (2.76)$$

$$v_{4x}^2 + v_{4y}^2 + v_{4z}^2 - 1 = 0 \quad (2.77)$$

Estas dos ecuaciones 2.76 y 2.77, son la de vectores unitarios, ya que ninguno es compartido.

$$v_{3x} \cdot v_{4x} + v_{3y} \cdot v_{4y} + v_{3z} \cdot v_{4z} = 0 \quad (2.78)$$

$$v_{3x} \cdot (x_2 - x_1) + v_{3y} \cdot (y_2 - y_1) + v_{3z} \cdot (z_2 - z_1) = 0 \quad (2.79)$$

$$v_{4x} \cdot (x_2 - x_1) + v_{4y} \cdot (y_2 - y_1) + v_{4z} \cdot (z_2 - z_1) = 0 \quad (2.80)$$

Y por último estas tres ecuaciones 2.78, 2.79 y 2.81 son las denominadas triedro.

SÓLIDO 3-4:

$$v_{5x} \cdot v_{6x} + v_{5y} \cdot v_{6y} + v_{5z} \cdot v_{6z} = 0 \quad (2.81)$$

$$v_{5x} \cdot (x_2 - x_D) + v_{5y} \cdot (y_2 - y_D) + v_{5z} \cdot (z_2 - z_D) = 0 \quad (2.82)$$

$$v_{6x} \cdot (x_2 - x_D) + v_{6y} \cdot (y_2 - y_D) + v_{6z} \cdot (z_2 - z_D) = 0 \quad (2.83)$$

Estas tres ecuaciones 2.81, 2.82 y 2.83 son las denominadas triedro.

$$v_{Dx} \cdot (y_1 - y_A) + v_{Dy} \cdot (x_1 - x_A) + L_1 \cdot \text{sen}\theta = 0 \quad (2.84)$$

Esta última ecuación es la que aporta el par prismático, ya que es de tipo IV y al formarse con 3 vectores, se le restan 3 ecuaciones de los vectores, quedando dicha ecuación.

2.5. Análisis cinemático computacional en coordenadas dependientes.

La secuencia general en el análisis cinemático de un MBS se muestra en la fig.2.26a. Después de cargar el fichero de datos que define el modelo del MBS, el programa principal incluye tres bucles. En cada paso de tiempo (primer bucle) el tiempo de ejecución se aumenta y se definen los valores de las variables independientes de todo el sistema. Entonces, para cada GE de la estructura cinemática (segundo bucle), se identifica el GE y, en función de su tipo (tercer bucle), se utiliza la subrutina adecuada para resolver su cinemática. El algoritmo mostrado en la fig. 2.26b muestra el aspecto de la subrutina 3RSG llamada por el programa principal encargada de resolver la cinemática de un GE formado por dos sólidos y tres pares de rotación.

Para resolver cada GE, se establece un vector de coordenadas de grupo qG y se definen las correspondientes ecuaciones de restricción ϕ que las relacionan, a nivel de posiciones. Cada subrutina de análisis cinemático se programa de forma específica según la topología del GE a resolver, de acuerdo a los siguientes pasos:

<pre> %Read data MBS; MBDatos; %MBS Kin. analysis%% for t = t0 : timeStep : tf do /* set indep. values */ z = z + Δz for ng = 2 : length(MGroups) do /* solve each SG */ switch MGroups(ng).kind do case MGroups(ng).kind == 1RSG do CALL Solve_1RSG(*ARGS) case MGroups(ng).kind == 3RSG do CALL Solve_3RSG(*ARGS) end end end end </pre>	<pre> Solve_3RSG(*ARGS) /* funct.CALL */ %% I. Position problem % evaluate Φ → mFi error = norm(Φ) while error > tolerance do evaluate Φ_q → Jacob extract Φ_q^d solve q_k^d = q_{k-1}^d - (Φ_q^d)⁻¹ · Φ_{k-1} evaluate Φ → mFi error = norm(Φ) end %% II. Velocity problem %%% evaluate Φ_q → Jacob extract Φ_q^d; extract Φ_qⁱ solve q̇^d = - (Φ_q^d)⁻¹ Φ_qⁱ q̇ⁱ %% III. Acceleration problem %%% evaluate Φ_q q̇ → Fiqpq̇ evaluate - [Φ_qⁱ q̇ⁱ + Φ_q q̇] solve q̈^d = - (Φ_q^d)⁻¹ [Φ_qⁱ q̈ⁱ + Φ_q q̈] </pre>
--	--

(a) figuraA

(b) figuraB

Figura 2.26: Algoritmos correspondientes a la solución mediante GE: (a) aspecto de la función principal del algoritmo, (b) detalle de la subrutina de cálculo cinemático del grupo 3R.

- **Identificación de coordenadas de grupo y parámetros:** se define un sistema local de coordenadas solidario a cada eslabón y se selecciona un vector de coordenadas adecuado (naturales, de punto de referencia o relativas) que define la cadena cinemática. Este vector se divide en dos subgrupos de coordenadas: dependientes φ e independientes h . Deben identificarse otros parámetros que dependen del tipo de GE a resolver a partir de la geometría del problema y los resultados del análisis estructural; ej. puntos de referencia necesarios para identificar las coordenadas h , dimensiones de los sólidos, etc.
- **Resolución del problema de posición del GE:** Se definen las ecuaciones de restricción que relacionan las coordenadas del grupo. Se obtiene la matriz Jacobiana Φ_φ de las restricciones establecidas respecto a las coordenadas dependientes y se utiliza un método iterativo Newton-Raphson para obtener el valor de las coordenadas dependientes en cada paso de iteración k .

$$\Phi(q) = 0 \quad \rightarrow \quad (\Phi_\varphi)_{k-1} \cdot (\varphi_k - \varphi_{k-1}) = -\Phi_{k-1} \quad (2.85)$$

- **Resolución del problema de velocidad:** las velocidades de las coordenadas independientes del grupo \dot{h} son conocidas, por lo que se puede formular el problema de velocidad derivando las ecuaciones de restricción respecto del tiempo, y resolviendo para las velocidades dependientes, (Eq.2.86). Los términos del Jacobiano Φ_φ y Φ_h pueden obtenerse de forma analítica en grupos 2D y 3D con un número reducido de restricciones.

$$\dot{\Phi}(\mathbf{q}) = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi_{\varphi} \cdot \dot{\varphi} = -[\Phi_{\mathbf{h}} \cdot \dot{\mathbf{h}}] \quad (2.86)$$

- **Resolución del problema de aceleración:** una vez determinadas las velocidades, y conocidas las aceleraciones de las coordenadas independientes del grupo \mathbf{h} pueden determinarse las aceleraciones dependientes derivando el problema de velocidad con respecto del tiempo, Eq:2.87

$$\ddot{\Phi}(q) = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi_{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} = -[\Phi_{\mathbf{h}} \cdot \ddot{\mathbf{h}} + \dot{\Phi}_{\mathbf{q}_G} \dot{\mathbf{q}}_G] \quad (2.87)$$

- **Resolución cinemática de otros puntos de interés (POI):** en ocasiones puede resultar de interés determinar la cinemática de otros puntos del sistema (ej. centro de masa, o puntos de referencia para otros GE). La posición, velocidad y aceleración de POI que pertenezcan a cualquier sólido del GE se pueden obtener fácilmente utilizando las ecuaciones cinemáticas de sólido-rígido.

Capítulo 3

Métodos

En este capítulo se comienza con la puesta en práctica del caso de la Plataforma Stewart una vez que ya se ha expuesto en el capítulo 2 los fundamentos del Análisis Cinemático.

En una primera parte de este capítulo se presenta el procedimiento del análisis cinemático explicado en el Capítulo 2, teniendo en cuenta todos los elementos, estudiaremos las coordenadas (puntos y vectores), para los que se da solución al problema de posición, velocidad y aceleración. Se define un procedimiento para el análisis cinemático basado en ecuaciones de grupo de una forma sistemática, para que sea de utilidad a la creación de nuevas librerías capaces de resolver la cinemática de nuevos tipos de grupos estructurales.

En una segunda parte se presentan los detalles de diseño de la plataforma de Stewart simulada, así como las geometrías de los sólidos que la conforman y que serán utilizados para la representación gráfica durante la simulación del movimiento de la plataforma.

3.1. Descripción de la plataforma.

La Plataforma Stewart se va a modelizar en coordenadas naturales. Para que la posición del grupo quede perfectamente determinada se define cada eslabón del grupo adecuadamente. Se usan como mínimo 12 coordenadas por eslabón; tres vectores y un punto, dos vectores y dos puntos, etc.

Se plantea el problema a partir de las siguientes figuras que corresponden a la plataforma Stewart estudiada (figura 3.1):

Plataforma Stewart completa (figura 3.1):



Figura 3.1: Plataforma Stewart diseñada en SolidWorks y utilizada para el cálculo y visualización.

que a su vez está compuesta por:

- Base fija o terminal fijo (figura 3.2):

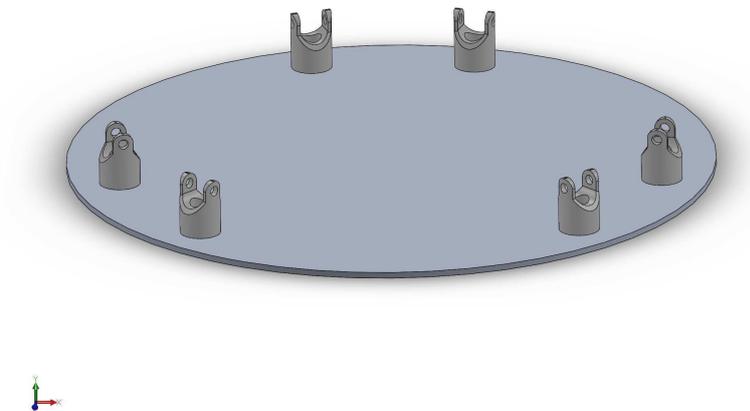


Figura 3.2: Terminal fijo de la plataforma.

- Base móvil o terminal móvil(figura 3.3):



Figura 3.3: Terminal móvil.

- Actuadores y juntas cardan (figura 3.4):

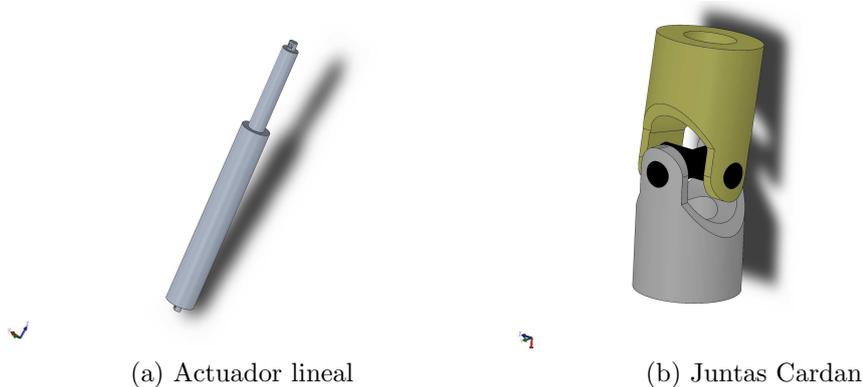


Figura 3.4: Actuadores y juntas cardan.

Segun la ecuación 2.67 del capítulo 2 de Fundamentos, la plataforma de Stewart está formada por 6 actuadores lineales (12 sólidos) y el terminal móvil (sólido 13) y $6 \cdot 2$ pares cinemáticos tipo cardan de grado 2 y 6 pares cinemáticos tipo cilíndrico de grado 2. Por tanto la movilidad del sistema es:

$$L = 6 \cdot 13 - 4 \cdot 18 = 6GDL \quad (3.1)$$

3.2. Definición de los grupos estructurales.

3.2.1. Grafo y Análisis estructural.

En primer lugar el grafo sería así, (figura 3.5):

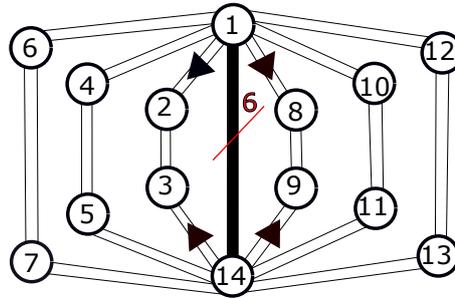


Figura 3.5: Grafo de nuestra Plataforma.

En este grafo se muestra como está compuesta la plataforma, es decir, por qué tipos de pares se forma y de cuantos grupos estructurales se compone.

En primer lugar, es importante indicar que el número 1 hace referencia al bastidor y el número 14 hace referencia al terminal móvil. Ahora bien, los pares (2-3),(4-5),(6-7),(8-9),(10-11),(12-13) hacen referencia a cada uno de los actuadores hidráulicos.

Entrando más en detalle, se tiene:

- La unión del bastidor (1) con cada camisa de los actuadores (puntos 2,4,6,8,10 y 12) se realiza mediante un par Cardan que restringe cuatro movimientos y permite dos giros, por eso se representa con dos líneas finas.
- En cuanto a la unión de camisa y vástago, se trata de un par Cilíndrico que permite el movimiento de traslación y giro libre del vástago con respecto a la camisa, y por tanto se dibujan dos líneas de trazo fino.
- Y finalmente, la unión de cada vástago de los actuadores (puntos 3,5,7,9,11 y 13) con el terminal móvil se realiza con otra unión Cardan y también se representa con dos líneas finas porque permiten dos giros y restringe cuatro movimientos.

Un factor importante a indicar es que como nuestro caso se trata de Cinemática Inversa, el movimiento de entrada se le otorga al terminal móvil y por eso se dibuja una línea gruesa compuesta por seis líneas de trazo grueso que indican los 6 grados de libertad del terminal (3 rotaciones y 3 traslaciones).

3.2.2. Modelización.

En este apartado de modelización se comenta cómo se han modelizado cada uno de los actuadores lineales hidráulicos así como el terminal móvil del conjunto.

En primer lugar se explica cómo se ha modelizado cada actuador. Se han empleado para cada uno de los actuadores:

- 2 puntos, uno colocado en la base que une con la cardan y a su vez con la plataforma fija y otro situado en la zona superior donde se sitúa la otra cardan y que une con la plataforma móvil.

- 7 vectores, los 5 primeros individuales para cada actuador y los 2 últimos que se comparten con la base fija y móvil respectivamente.

A continuación se expone la modelización comentada anteriormente:

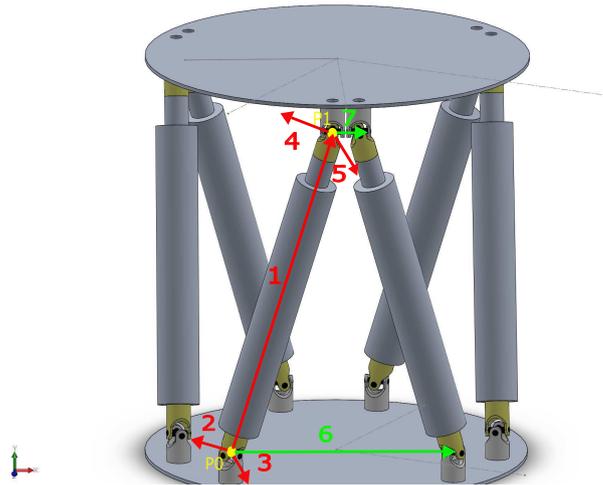


Figura 3.6: Puntos y vectores empleados para la modelización de cada actuador.

en amarillo se observan los dos puntos usados P0 y P1, en rojo los 5 vectores con numeración local de cada actuador y en verde los dos vectores comunes usados para cardan 6 y 7 también con numeración local.

En segundo lugar se expone como se ha modelizado la plataforma móvil:

- Se han empleado 7 puntos (uno para la unión de cada actuador a la plataforma móvil(6 en total) y otro adicional situado en el punto central de la plataforma, que hace de origen de su triedro local) y 5 vectores, 3 de triedro en el punto central y otros dos en los extremos formando 120° y 240° respectivamente y que se observa en la siguiente imagen 3.7:

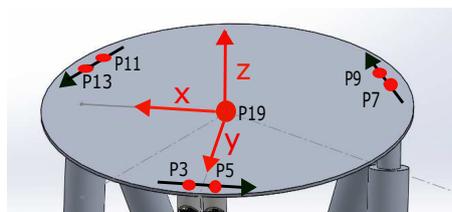


Figura 3.7: Puntos y vectores empleados para la modelización de la plataforma móvil.

3.2.2.1. Ecuaciones de restricción.

Ahora, se procede a describir las ecuaciones que componen la modelización de cada elemento de la plataforma Stewart:

-Cada uno de los 6 actuadores lineales se ha modelizado mediante las siguientes ecuaciones:

- 5 ecuaciones de vector unitario:

$$V1_x^2 + V1_y^2 + V1_z^2 - 1 = 0 \quad (3.2)$$

$$V2_x^2 + V2_y^2 + V2_z^2 - 1 = 0 \quad (3.3)$$

$$V3_x^2 + V3_y^2 + V3_z^2 - 1 = 0 \quad (3.4)$$

$$V4_x^2 + V4_y^2 + V4_z^2 - 1 = 0 \quad (3.5)$$

$$V5_x^2 + V5_y^2 + V5_z^2 - 1 = 0 \quad (3.6)$$

- 6 ecuaciones de triedro:

$$V1_x \cdot V2_x + V1_y \cdot V2_y + V1_z \cdot V2_z = 0 \quad (3.7)$$

$$V1_x \cdot V3_x + V1_y \cdot V3_y + V1_z \cdot V3_z = 0 \quad (3.8)$$

$$V2_x \cdot V3_x + V2_y \cdot V3_y + V2_z \cdot V3_z = 0 \quad (3.9)$$

$$V1_x \cdot V4_x + V1_y \cdot V4_y + V1_z \cdot V4_z = 0 \quad (3.10)$$

$$V1_x \cdot V5_x + V1_y \cdot V5_y + V1_z \cdot V5_z = 0 \quad (3.11)$$

$$V4_x \cdot V5_x + V4_y \cdot V5_y + V4_z \cdot V5_z = 0 \quad (3.12)$$

- 3 ecuaciones de distancia:

$$(X_1 - X_0) - s \cdot V1_x = 0 \quad (3.13)$$

$$(Y_1 - Y_0) - s \cdot V1_y = 0 \quad (3.14)$$

$$(Z_1 - Z_0) - s \cdot V1_z = 0 \quad (3.15)$$

- 3 ecuaciones de par cilíndrico:

$$(Y_1 - Y_0) \cdot V1_z - (Z_1 - Z_0) \cdot V1_y = 0 \quad (3.16)$$

$$(Z_1 - Z_0) \cdot V1_x - (X_1 - X_0) \cdot V1_z = 0 \quad (3.17)$$

$$(X_1 - X_0) \cdot V1_y - (Y_1 - Y_0) \cdot V1_x = 0 \quad (3.18)$$

- 2 ecuaciones de par Cardan:

$$V3_x \cdot V6_x + V3_y \cdot V6_y + V3_z \cdot V6_z = 0 \quad (3.19)$$

$$V5_x \cdot V7_x + V5_y \cdot V7_y + V5_z \cdot V7_z = 0 \quad (3.20)$$

-Y por último, la plataforma móvil se ha modelizado mediante:

- 3 ecuaciones de vector unitario:

$$V8_x^2 + V8_y^2 + V8_z^2 - 1 = 0 \quad (3.21)$$

$$V9_x^2 + V9_y^2 + V9_z^2 - 1 = 0 \quad (3.22)$$

$$V10_x^2 + V10_y^2 + V10_z^2 - 1 = 0 \quad (3.23)$$

- 3 ecuaciones de triedro:

$$V8_x \cdot V9_x + V8_y \cdot V9_y + V8_z \cdot V9_z = 0 \quad (3.24)$$

$$V8_x \cdot V10_x + V8_y \cdot V10_y + V8_z \cdot V10_z = 0 \quad (3.25)$$

$$V9_x \cdot V10_x + V9_y \cdot V10_y + V9_z \cdot V10_z = 0 \quad (3.26)$$

3.2.2.2. Numeración local y global de los puntos de la plataforma.

ELEMENTO	LOCAL	GLOBAL
BASTIDOR	1	2
	2	4
	3	6
	4	8
	5	10
	6	12
TERMINAL MOVIL	1	19
	2	9
	3	11
	4	13
	5	3
	6	5
	7	7
HIDRAULICO 1	1	2
	2	3
HIDRAULICO 2	1	4
	2	5
HIDRAULICO 3	1	6
	2	7
HIDRAULICO 4	1	8
	2	9
HIDRAULICO 5	1	10
	2	11
HIDRAULICO 6	1	12
	2	13

Tabla 3.1: Numeración local y global de los puntos de la plataforma.

3.2.2.3. Numeración local y global de los vectores de la plataforma.

ELEMENTO	LOCAL	GLOBAL
BASTIDOR	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
TERMINAL MOVIL	1	6
	2	7
	3	8
	4	9
	5	10
HIDRAULICO 1	1	11
	2	12
	3	13
	4	14
	5	15
	6	1
	7	6
HIDRAULICO 2	1	16
	2	17
	3	18
	4	19
	5	20
	6	1
	7	6
HIDRAULICO 3	1	21
	2	22
	3	23
	4	24
	5	25
	6	4
	7	9
HIDRAULICO 4	1	26
	2	27
	3	28
	4	29
	5	30
	6	4
	7	9
HIDRAULICO 5	1	31
	2	32
	3	33
	4	34
	5	35
	6	5
	7	10
HIDRAULICO 6	1	36
	2	37
	3	38
	4	39
	5	40
	6	5
	7	10

Tabla 3.2: Numeración local y global de los vectores de la plataforma.

3.2.2.4. Código Matlab empleado para el cálculo simbólico.

Para sistematizar la obtención de todas las matrices y vectores necesarios en el análisis cinemático computacional, a partir de las ecuaciones de restricción que definen un determinado grupo estructural, se utiliza el toolbox de cálculo simbólico de Matlab, como se muestra en el siguiente código:

```

1
2 clc
3 clear all
4
5 % Solución simbólica para stewart
6 % DISTANCIA: grado de libertad.
7
8
9 syms P0x P0y P0z P1x P1y P1z s v1x v1y v1z v2x v2y v2z v3x v3y v3z v4x v4y
   v4z ...
10 v5x v5y v5z v6x v6y v6z v7x v7y v7z P0px P0py P0pz P1px P1py P1pz sp ...
11 v1px v1py v1pz v2px v2py v2pz v3px v3py v3pz v4px v4py v4pz ...
12 v5px v5py v5pz v6px v6py v6pz v7px v7py v7pz P0sx P0sy P0sz P1sx P1sy P1sz
   ss ...
13 v1sx v1sy v1sz v2sx v2sy v2sz v3sx v3sy v3sz v4sx v4sy v4sz ...
14 v5sx v5sy v5sz v6sx v6sy v6sz v7sx v7sy v7sz real
15
16 % Variables
17
18 % Posiciones
19 q=[P0x P0y P0z P1x P1y P1z s v1x v1y v1z v2x v2y v2z v3x v3y v3z v4x v4y v4z
   ...
20 v5x v5y v5z v6x v6y v6z v7x v7y v7z ];
21 h = [P0x,P0y,P0z,P1x,P1y,P1z,v6x,v6y,v6z,v7x,v7y,v7z]; % Variables
   independientes
22
23 phi = [v1x, v1y, v1z ,v2x ,v2y ,v2z ,v3x, v3y, v3z ,v4x, v4y, v4z...
24 v5x ,v5y, v5z ,s]; % Variables dependientes
25
26 % Velocidades
27 qp=[P0px P0py P0pz P1px P1py P1pz sp ...
28 v1px v1py v1pz v2px v2py v2pz v3px v3py v3pz v4px v4py v4pz...
29 v5px v5py v5pz v6px v6py v6pz v7px v7py v7pz ];
30 hp = [P0px,P0py,P0pz,P1px,P1py,P1pz,v6px,v6py,v6pz,v7px,v7py,v7pz]; %
   Independientes
31 phip = [v1px, v1py, v1pz ,v2px ,v2py ,v2pz ,v3px, v3py, v3pz ,v4px, v4py,
   v4pz...
32 v5px ,v5py, v5pz ,sp]; % Dependientes
33
34 % Aceleraciones
35 qs=[P0sx P0sy P0sz P1sx P1sy P1sz ss ...
36 v1sx v1sy v1sz v2sx v2sy v2sz v3sx v3sy v3sz v4sx v4sy v4sz...
37 v5sx v5sy v5sz v6sx v6sy v6sz v7sx v7sy v7sz ];
38 hs = [P0sx,P0sy,P0sz,P1sx,P1sy,P1sz,v6sx,v6sy,v6sz,v7sx,v7sy,v7sz]; %
   Independientes
39 phis = [v1sx, v1sy, v1sz ,v2sx ,v2sy ,v2sz ,v3sx, v3sy, v3sz ,v4sx, v4sy,
   v4sz...
40 v5sx ,v5sy, v5sz ,ss]; % Dependientes
41
42 % Restricciones

```

```

43     Fi=[v1x^2+v1y^2+v1z^2-1;
44         v2x^2+v2y^2+v2z^2-1;
45         v3x^2+v3y^2+v3z^2-1;
46         v1x*v2x+v1y*v2y+v1z*v2z;
47         v1x*v3x+v1y*v3y+v1z*v3z;
48         v2x*v3x+v2y*v3y+v2z*v3z;
49         v4x^2+v4y^2+v4z^2-1;
50         v5x^2+v5y^2+v5z^2-1;
51         v1x*v4x+v1y*v4y+v1z*v4z;
52         v1x*v5x+v1y*v5y+v1z*v5z;
53         v4x*v5x+v4y*v5y+v4z*v5z;
54         (P1y-P0y)*v1z-(P1z-P0z)*v1y;
55         (P1z-P0z)*v1x-(P1x-P0x)*v1z;
56         (P1x-P0x)*v1y-(P1y-P0y)*v1x;
57         v3x*v6x+v3y*v6y+v3z*v6z;
58         v5x*v7x+v5y*v7y+v5z*v7z;
59         (P1x-P0x)-s*v1x;
60         (P1y-P0y)-s*v1y;
61         (P1z-P0z)-s*v1z;]
62
63     % Matrices jacobianas
64     Fiq = jacobian (Fi, q)    % Jacobiano global
65     Fi_h = jacobian (Fi, h)  % Jacobiano independiente
66     Fi_phi = jacobian (Fi, phi) % Jacobiano dependiente
67
68     JTJ = Fi_phi' * Fi_phi;
69     JTJ = simplify (JTJ)
70     JTFi = Fi_phi' * Fi;
71     JTFi = simplify (JTFi)
72
73     % Derivada temporal del Jacobiano
74     % En este script, para evaluación del resto de matrices y vectores,
75     % ésta se debe introducir a mano.
76
77
78     Fiqp=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2*v1px, 2*v1py, 2*v1pz...;
79         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2*v2px...;
80         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0...;
81         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v2px, v2py, v2pz...;
82         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v3px, v3py, v3pz...;
83         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0...;
84         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0...;
85         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0...;
86         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v4px, v4py, v4pz...;
87         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v5px, v5py, v5pz...;
88         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0...;
89         0, -v1pz, v1py, 0, v1pz, -v1py, 0, 0, P0pz - P1pz...;
90         v1pz, 0, -v1px, -v1pz, 0, v1px, 0, P1pz - P0pz, 0...;
91         -v1py, v1px, 0, v1py, -v1px, 0, 0, P0py - P1py, P1px - P0px...;
92         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0...;
93         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0...;
94         0, 0, 0, 0, 0, 0, -v1px, sp, 0, 0...;
95         0, 0, 0, 0, 0, 0, -v1py, 0, 2-sp, 0...;
96         0, 0, 0, 0, 0, 0, -v1pz, 0, 0, -sp...;]
97
98
99
100    % Término problema velocidad

```

```

101 JTFih = Fi_phi '* Fi_h
102 Fihhp = Fi_h*hp';
103 JTFihhp = Fi_phi '* Fihhp;
104 JTFihhp = simplify(JTFihhp)
105
106 % Término problema aceleración
107 Fihhs = Fi_h*hs';
108 Fiqqp = Fiqp*qp';
109 FiqqpFihhs = Fiqqp + Fihhs;
110 JTFiqqpFihhs = Fi_phi '* FiqqpFihhs;
111 JTFiqqpFihhs = simplify(JTFiqqpFihhs)
112 %matK= -inv(JTJ)*JTFih
113 %matK=simplify(matK)
114 %Ppz=-Fiq\Fiqqp
115
116 % syms P1x P1y P1z V1x V1y V1z V3x V3y V3z V4x V4y V4z ALPHA L2...
117 % P1px P1py P2pz V1px V1py V1pz V3px V3py V3pz V4px V4py V4pz ALPHAp ...
118 % P1sx P1sy P1sz V1sx V1sy V1sz V3sx V3sy V3sz V4sx V4sy V4sz ALPHAs ...
119 % P2x(P1x, P1y, P1z, V1x, V1y, V1z, V3x, V3y, V3z, ALPHA) ...
120 % P2y(P1x, P1y, P1z, V1x, V1y, V1z, V3x, V3y, V3z, ALPHA) ...
121 % P2z(P1x, P1y, P1z, V1x, V1y, V1z, V3x, V3y, V3z, ALPHA) ...
122 % V2x(P1x, P1y, P1z, V1x, V1y, V1z, V3x, V3y, V3z, ALPHA) ...
123 % V2y(P1x, P1y, P1z, V1x, V1y, V1z, V3x, V3y, V3z, ALPHA) ...
124 % V2z(P1x, P1y, P1z, V1x, V1y, V1z, V3x, V3y, V3z, ALPHA) ...
125 % P1pz P2px P2py V2px V2py V2pz ...
126 % P2sx P2sy P2sz V2sx V2sy V2sz real

```

3.2.2.5. Dimensiones de vectores y matrices necesarias para el análisis.

Resulta de especial importancia en la programación en FORTRAN90 el identificar los tamaños de los vectores o matrices en el momento en que se definen. En este apartado se recogen las dimensiones de las variables empleadas en el análisis cinemático computacional.

- Tabla con dimensiones de los vectores empleados.

VECTOR	DIMENSIÓN
q (todas las variables)	[1 28]
h (variables independientes)	[1 12]
phi (variables dependientes)	[1 16]
qp (derivada 1° de q)	[1 28]
hp (derivada 1° de h)	[1 12]
phip (derivada 1° de phi)	[1 16]
qs (derivada 2° de q)	[1 28]
hs (derivada 2° de h)	[1 12]
phis (derivada 2° de phi)	[1 16]

Tabla 3.3: Dimensiones de los vectores empleados.

- Tabla con dimensiones de las matrices empleadas.

MATRIZ	DIMENSIÓN
Fiq (Jacobiano global)	[19 28]
F_{i_h} (Jacobiano independiente)	[19 12]
$F_{i_p h_i}$ (Jacobiano dependiente)	[19 16]
JTJ	[16 16]
JTFi	[16 1]
Fiqp	[19 28]
JTFih	[16 12]
Fihhp	[19 1]
JTFihhp	[16 1]
Fihhs	[19 1]
Fiqpqp	[19 1]
FiqpqpFihhs	[19 1]
JTFiqpqpFihhs	[16 1]

Tabla 3.4: Dimensiones de las matrices empleadas.

3.2.3. Parámetros obtenidos de Solidworks. Coordenadas locales y globales de puntos y vectores.

Una vez planteadas las ecuaciones, se ha diseñado un modelo en Solidworks, en el cual se han tomado los parámetros de cada punto y de cada vector, enumerados anteriormente, y se han hecho ensayos con respecto a este. En cuanto a las coordenadas, las coordenadas locales están dispuestas al inicio de cada elemento y las coordenadas globales se calculan asignando a un punto un sistema de referencia, a partir del cual se miden los demás puntos.

A continuación se exponen las coordenadas, tanto locales como globales de cada punto y vector de los elementos que componen el sistema.

3.2.3.1. Coordenadas locales y globales del bastidor.

En estas tablas que se exponen a continuación todas las coordenadas se han escrito siguiendo la forma X,Y,Z.

PUNTO LOCAL	PUNTO GLOBAL	COORDENADAS
1	2	0.04016,0.1299,0.03563
2	4	-0.04016,0.1299,0.03563
3	6	-0.13258,-0.03017,0.03563
4	8	-0.09242,-0.09973,0.03563
5	10	0.09242,-0.09973,0.03563
6	12	0.13258,-0.03017,0.03563

Tabla 3.5: Coordenadas locales y globales puntos del bastidor.

VECTOR LOCAL	VECTOR GLOBAL	COORDENADAS
1	1	1,0,0
2	2	0,1,0
3	3	0,0,1
4	4	$\cos(120), \sin(120), 0$
5	5	$\cos(60), \sin(60), 0$

Tabla 3.6: Coordenadas locales y globales vectores del bastidor.

3.2.3.2. Coordenadas locales y globales del terminal móvil.

PUNTO LOCAL	PUNTO GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	19	0,0,0	0,0,0.3411986
2	9	-0.1207547,-0.0824198,-0.024	-0.1207547, -0.0824198,0.3171986
3	11	0.1207547,-0.0824198,-0.024	0.1207547,-0.0824198,0.3171986
4	13	0.131755,-0.0633667, -0.024	0.131755,-0.0633667,0.3171986
5	3	0.0110003,0.1457866, -0.024	0.0110003, 0.1457866, 0.3171986
6	5	-0.0110003,0.1457866,-0.024	-0.0110003,0.1457866, 0.3171986
7	7	-0.131755,-0.0633667,-0.024	-0.131755,-0.0633667,0.3171986

Tabla 3.7: Coordenadas locales y globales puntos del terminal móvil.

VECTOR LOCAL	VECTOR GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	6	1,0,0	1,0,0
2	7	0,1,0	0,1,0
3	8	0,0,1	0,0,1
4	9	$\cos(120), \sin(120), 0$	$\cos(120), \sin(120), 0$
5	10	$\cos(240), \sin(240), 0$	$\cos(240), \sin(240), 0$

Tabla 3.8: Coordenadas locales y globales vectores del terminal móvil.

3.2.3.3. Coordenadas locales y globales del actuador 1.

PUNTO LOCAL	PUNTO GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	2	0,0,0	0.04016,0.1299,0.03563
2	3	0,0,0	0.0110003, 0.1457866, 0.3171986

Tabla 3.9: Coordenadas locales y globales puntos del actuador 1.

VECTOR LOCAL	VECTOR GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	11	1,0,0	-0.261847227,0.178822496,0.948397883
2	12	0,1,0	0.962250449,0.038490018,0.269430126
3	13	0,0,1	0,0.987580306,-0.157115049
4	14	0,1,0	0.956974102,-0.065248234,0.282742348
5	15	0,0,1	0.091719202,0.987330229,-0.129485932
6	1	1,0,0	1,0,0
7	6	1,0,0	1,0,0

Tabla 3.10: Coordenadas locales y globales vectores del actuador 1.

3.2.3.4. Coordenadas locales y globales del actuador 2.

PUNTO LOCAL	PUNTO GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	4	0,0,0	-0.04016,0.1299,0.03563
2	5	0,0,0	-0.0110003,0.1457866, 0.3171986

Tabla 3.11: Coordenadas locales y globales puntos del actuador 2.

VECTOR LOCAL	VECTOR GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	16	1,0,0	0.266479673,0.149488597,0.952177369
2	17	0,1,0	0.963172995,-0.026754805,-0.267548054
3	18	0,0,1	0,0.988235294,-0.152941176
4	19	0,1,0	0.451871398,-0.892005877,0.011736919
5	20	0,0,1	0.851018242,0.427452085,-0.305045352
6	1	1,0,0	1,0,0
7	6	1,0,0	1,0,0

Tabla 3.12: Coordenadas locales y globales vectores del actuador 2.

3.2.3.5. Coordenadas locales y globales del actuador 3.

PUNTO LOCAL	PUNTO GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	6	0,0,0	-0.13258,-0.03017,0.03563
2	7	0,0,0	-0.131755,-0.0633667,0.3171986

Tabla 3.13: Coordenadas locales y globales puntos del actuador 3.

VECTOR LOCAL	VECTOR GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	21	1,0,0	0.003249804,-0.305481538,0.952192454
2	22	0,1,0	-0.528525158,0.813115628,0.243934688
3	23	0,0,1	-0.856612875,-0.494199735,-0.148259921
4	24	0,1,0	-0.979062786,0.192359943,0.066586134
5	25	0,0,1	-0.203016916,-0.933877813,-0.294374528
6	4	$\cos(120),\sin(120),0$	$\cos(120),\sin(120),0$
7	9	$\cos(120),\sin(120),0$	$\cos(120),\sin(120),0$

Tabla 3.14: Coordenadas locales y globales vectores del actuador 3.

3.2.3.6. Coordenadas locales y globales del actuador 4.

PUNTO LOCAL	PUNTO GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	8	0,0,0	-0.09242,-0.09973,0.03563
2	9	0,0,0	-0.1207547, -0.0824198,0.3171986

Tabla 3.15: Coordenadas locales y globales puntos del actuador 4.

VECTOR LOCAL	VECTOR GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	26	1,0,0	-0.263060508,0.159135369,0.951564555
2	27	0,1,0	-0.454920107,0.852975201,-0.25589256
3	28	0,0,1	-0.860907051,-0.487305878,-0.146191763
4	29	0,1,0	0.342204224,0.937893058,-0.057034037
5	30	0,0,1	-0.902197905,0.310356079,-0.299529705
6	4	$\cos(120),\sin(120),0$	$\cos(120),\sin(120),0$
7	9	$\cos(120),\sin(120),0$	$\cos(120),\sin(120),0$

Tabla 3.16: Coordenadas locales y globales vectores del actuador 4.

3.2.3.7. Coordenadas locales y globales del actuador 5.

PUNTO LOCAL	PUNTO GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	10	0,0,0	0.09242,-0.09973,0.03563
2	11	0,0,0	0.1207547,-0.0824198,0.3171986

Tabla 3.17: Coordenadas locales y globales puntos del actuador 5.

VECTOR LOCAL	VECTOR GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	31	1,0,0	0.263060508,0.159135369,0.951564555
2	32	0,1,0	-0.446259237,-0.855330204,0.263178524
3	33	0,0,1	0.857009991,-0.492144351,-0.152734454
4	34	0,1,0	0.273714304,-0.958000063,0.08553572
5	35	0,0,1	0.926091073,0.234878171,-0.295275414
6	5	$\cos(240),\sin(240),0$	$\cos(240),\sin(240),0$
7	10	$\cos(240),\sin(240),0$	$\cos(240),\sin(240),0$

Tabla 3.18: Coordenadas locales y globales vectores del actuador 5.

3.2.3.8. Coordenadas locales y globales del actuador 6.

PUNTO LOCAL	PUNTO GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	12	0,0,0	0.13258,-0.03017,0.03563
2	13	0,0,0	0.131755,-0.0633667,0.3171986

Tabla 3.19: Coordenadas locales y globales puntos del actuador 6.

VECTOR LOCAL	VECTOR GLOBAL	COORDENADAS LOCALES	COORDENADAS GLOBALES
1	36	1,0,0	-0.003249804,-0.305481538,0.952192454
2	37	0,1,0	-0.516355283,-0.814693891,-0.263914922
3	38	0,0,1	0.855601121,-0.492900646,-0.158100207
4	39	0,1,0	0.633822153,-0.738012096,-0.231533206
5	40	0,0,1	0.77412291,0.602095596,0.195485583
6	5	$\cos(240),\sin(240),0$	$\cos(240),\sin(240),0$
7	10	$\cos(240),\sin(240),0$	$\cos(240),\sin(240),0$

Tabla 3.20: Coordenadas locales y globales vectores del actuador 6.

3.3. Ensayos

En este apartado se explica brevemente cómo se van a realizar los ensayos. Una vez obtenidas todas las coordenadas tanto locales como globales, se pasa cada pieza por Blender para darle la misma orientación utilizada.

A continuación en la figura 3.8 se observa un ejemplo del entorno de Blender visualizando la base de la Plataforma:

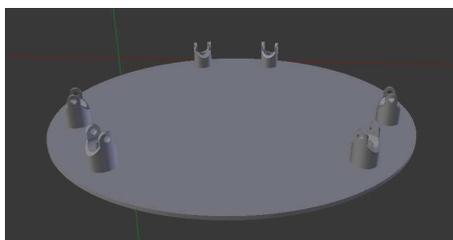


Figura 3.8: Base fija visualizada en entorno Blender.

Ahora bien, el primer paso es escribir en Fortran todas las posiciones de cada punto y vector y comprobar que la placa se visualiza en C++ correctamente con el modelo. En cuanto a los ensayos que se van a realizar son los siguientes:

- Guiado de coordenadas mediante el polinomio 345.
- Guiado de los 6 GDL de la plataforma.
- Movimiento guiado en eje X.
- Movimiento guiado en los 3 ejes X,Y y Z.
- Giro Roll.
- Giros Roll, Pitch y Yaw.
- Movimiento completo de la plataforma en los 6 GDL.

Capítulo 4

Resultados.

En este capítulo se exponen los resultados obtenidos al realizar los distintos ensayos comentados en el capítulo 3, como son:

- Guiado de coordenadas mediante el polinomio 345.
- Guiado de los 6 GDL de la plataforma.
- Movimiento guiado en eje X.
- Movimiento guiado en los 3 ejes X, Y y Z.
- Giro Roll.
- Giros Roll, Pitch y Yaw.
- Movimiento completo de la plataforma en los 6 GDL.

4.1. Guiado de coordenadas.

Con el guiado de coordenadas lo que se hace es mediante la introducción de los datos iniciales de cada movimiento, calcular mediante Matlab los coeficientes del polinomio que resuelve posición, velocidad y aceleración de cada movimiento. De este modo se obtienen unas gráficas que muestran la evolución de la posición, velocidad y aceleración. Una vez obtenidos esos coeficientes, se introducen en Visual y se visualiza una simulación del movimiento de la plataforma.

4.1.1. Guiado de coordenadas mediante el polinomio 345.

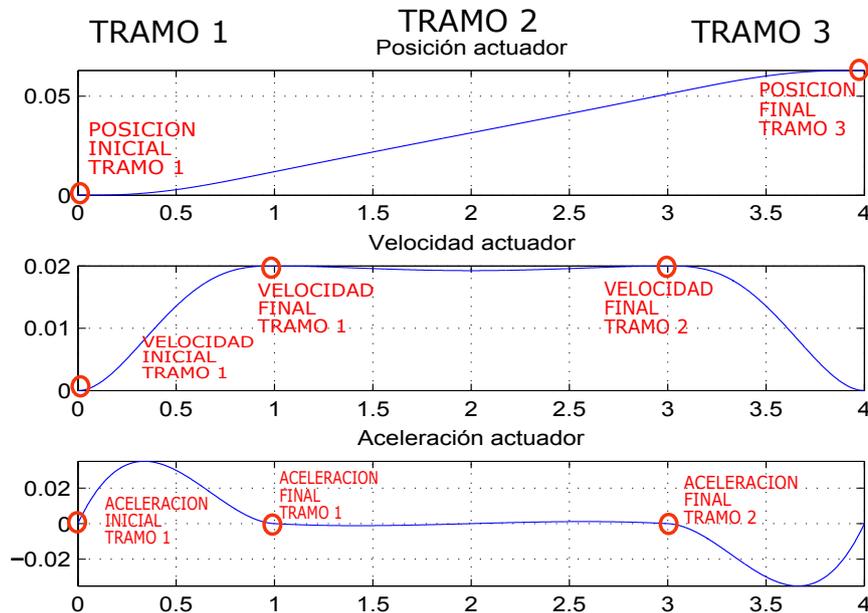


Figura 4.1: Ejemplo de guiado mediante el polinomio 345.

Estas tres gráficas representan el guiado mediante el polinomio 345 que hace referencia a los subíndices que se emplean en su resolución. Este guiado se corresponde con la traslación del terminal móvil en el eje X, y en el cual se obtiene la evolución de la posición, velocidad y aceleración del mismo en función del tiempo.

En las gráficas se puede observar varios parámetros característicos que se corresponden con los datos iniciales introducidos en el guiado para su posterior movimiento. Lo primero de todo es indicar que el guiado se subdivide en tres tramos:

- Tramo 1, comprendido entre 0 y 1 segundo.
- Tramo 2, comprendido entre 1 y 3 segundos.
- Tramo 3, comprendido entre 3 y 4 segundos.

En cuanto a la gráfica de la posición se observan dos puntos característicos, los cuales son x_{01} , que es la posición inicial del tramo 1 y x_{f3} que se trata de la posición final en el tramo 3, la cual es 0.063m.

La siguiente gráfica representa la velocidad que lleva en cada tramo el terminal, y se observa cómo la velocidad inicial del tramo 1 (x_{p01}) es 0 y la velocidad final del tramo 1 (x_{pf1}) es 0.02 y prácticamente se mantiene constante durante el tramo 2 hasta que llega al tramo 3 y comienza a disminuir hasta frenarse.

Y por último, la siguiente gráfica representa la evolución de la aceleración, que es nula en x_{s01} (aceleración inicial tramo 1), en x_{sf1} (aceleración final tramo 1) y en x_{sf2} (aceleración final tramo 2), y en la cual se observa una continuidad en toda la gráfica y una transición suave en el cambio de un tramo a otro.

4.1.2. Guiado de los 6 GDL de la plataforma.

En este apartado se indican los parámetros empleados para la definición de los polinomios 345 de enlace entre los movimientos de los tres distintos tramos, para las seis coordenadas guiadas, así como los coeficientes obtenidos para los polinomios correspondientes a cada uno de los tres tramos.

MOVIMIENTO (GUIADA)	DATOS INICIALES
TRASLACION EN X	$vel = 0.02$ $xo1 = 0 \quad xf3 = 0.04 + 0.023$ $xpo1 = 0 \quad xpf1 = vel \quad xso1 = 0 \quad xsf1 = 0 \quad xtf1 = 0$ $xpo2 = vel \quad xpf2 = vel \quad xso2 = 0 \quad xsf2 = 0$
TRASLACION EN Y	$vel = 0.02$ $xo1 = 0 \quad xf3 = 0.04 + 0.023$ $xpo1 = 0 \quad xpf1 = vel \quad xso1 = 0 \quad xsf1 = 0 \quad xtf1 = 0$ $xpo2 = vel \quad xpf2 = vel \quad xso2 = 0 \quad xsf2 = 0$
TRASLACION EN Z	$vel = 0.01$ $xo1 = 0.3411986 \quad xf3 = 0.3411986 + (0.02 + 0.013)$ $xpo1 = 0 \quad xpf1 = vel \quad xso1 = 0 \quad xsf1 = 0 \quad xtf1 = 0$ $xpo2 = vel \quad xpf2 = vel \quad xso2 = 0 \quad xsf2 = 0$
GIRO ROLL	$vel = 0.05$ $xo1 = 0 \quad xf3 = ((2 * \pi) / 180) + 0.1 + ((2 * \pi) / 180)$ $xpo1 = 0 \quad xpf1 = vel \quad xso1 = 0 \quad xsf1 = 0 \quad xtf1 = 0$ $xpo2 = vel \quad xpf2 = vel \quad xso2 = 0 \quad xsf2 = 0$
GIRO PITCH	$vel = 0.05$ $xo1 = 0 \quad xf3 = ((2 * \pi) / 180) + 0.1 + ((2 * \pi) / 180)$ $xpo1 = 0 \quad xpf1 = vel \quad xso1 = 0 \quad xsf1 = 0 \quad xtf1 = 0$ $xpo2 = vel \quad xpf2 = vel \quad xso2 = 0 \quad xsf2 = 0$
GIRO YAW	$vel = 0.05$ $xo1 = 0 \quad xf3 = ((2 * \pi) / 180) + 0.1 + ((2 * \pi) / 180)$ $xpo1 = 0 \quad xpf1 = vel \quad xso1 = 0 \quad xsf1 = 0 \quad xtf1 = 0$ $xpo2 = vel \quad xpf2 = vel \quad xso2 = 0 \quad xsf2 = 0$

Tabla 4.1: Datos iniciales de cada traslación y giro.

Ahora bien, en la siguiente tabla se recogen los coeficientes del polinomio obtenidos con Matlab.

MOVIMIENTO	COEFICIENTES OBTENIDOS
TRASLACION EN X	0.0114 -0.0385 0.0390 0 0 0 -0.0002 0.0015 -0.0055 0.0090 0.0132 -0.0062 0.0114 -0.1895 1.2470 -4.0680 6.6080 -4.2506
TRASLACION EN Y	0.0114 -0.0385 0.0390 0 0 0 -0.0002 0.0015 -0.0055 0.0090 0.0132 -0.0062 0.0114 -0.1895 1.2470 -4.0680 6.6080 -4.2506
TRASLACION EN Z	0.0066 -0.0215 0.0210 0 0 0.3412 0.0001 -0.0015 0.0055 -0.0090 0.0167 0.3354 0.0066 -0.1105 0.7330 -2.4120 3.9520 -2.2242
GIRO ROLL	0.0359 -0.1147 0.1098 0 0 0.0000 0.0015 -0.0147 0.0540 -0.0883 0.1162 -0.0377 0.0359 -0.6030 4.0164 -13.2729 21.8393 -14.2392
GIRO PITCH	0.0359 -0.1147 0.1098 0 0 0.0000 0.0015 -0.0147 0.0540 -0.0883 0.1162 -0.0377 0.0359 -0.6030 4.0164 -13.2729 21.8393 -14.2392
GIRO YAW	0.0359 -0.1147 0.1098 0 0 0.0000 0.0015 -0.0147 0.0540 -0.0883 0.1162 -0.0377 0.0359 -0.6030 4.0164 -13.2729 21.8393 -14.2392

Tabla 4.2: Coeficientes del polinomio obtenidos con Matlab.

4.2. Ensayos.

4.2.1. Posición movimiento en X.

En este apartado se realiza el ensayo de traslación del terminal en X tanto para la solución global como para la solución topológica o por grupos. En la gráfica 4.2a se observa la evolución de cada uno de los actuadores en cuanto a su posición en cada instante tanto para la resolución mediante formulación global como por grupos. Se puede observar que el guiado del movimiento según el polinomio 345 se produce entre los instantes $t=0s$ hasta $t=4s$; a partir de ese instante, el guiado se ejerce hasta $t=5s$, manteniendo fija la coordenada X en el último valor alcanzado en $t=4s$. También destaca que los actuadores que más se desplazan son el 1,2,4 y 5 con una distancia de aproximadamente 0.33m y los que menos se desplazan son el 3 y el 6 con una distancia de aproximadamente 0.31m.

En la siguiente gráfica 4.2b se representa la diferencia entre ambas soluciones y se expresa que ambas soluciones obtienen resultados prácticamente idénticos con una diferencia máxima del orden de 10^{-6} , por lo que se puede decir que ambas formulaciones resuelven bien el movimiento de la plataforma.

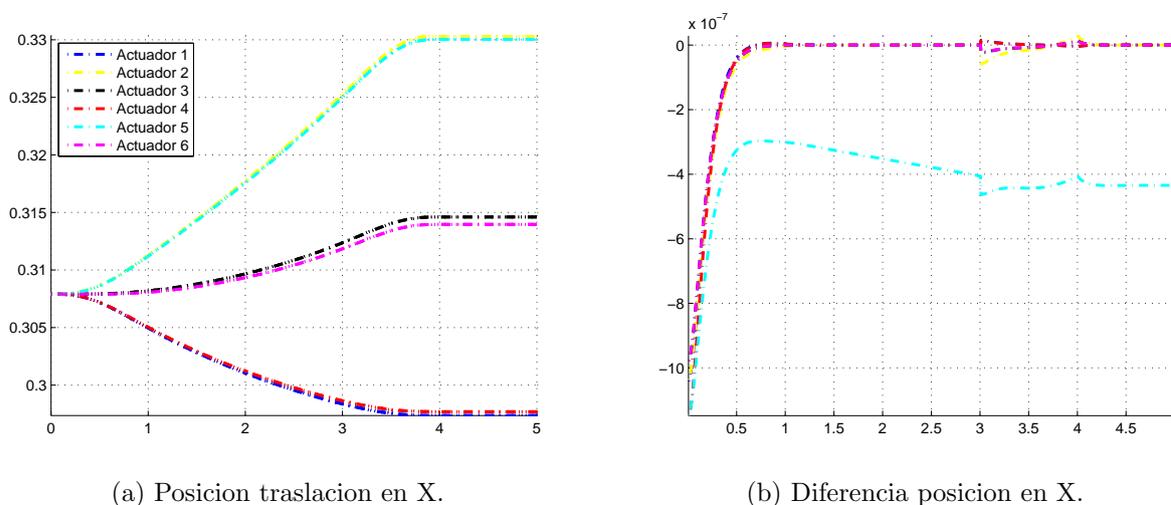
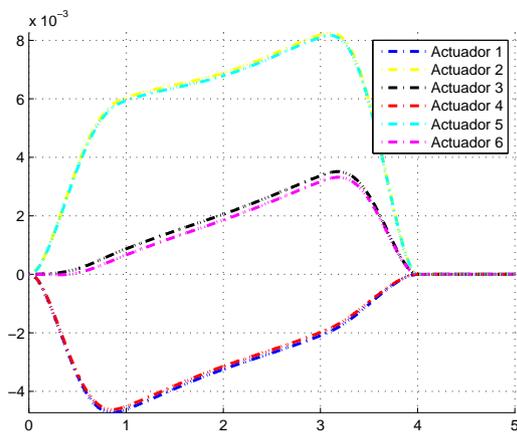


Figura 4.2: Posición traslación en X y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

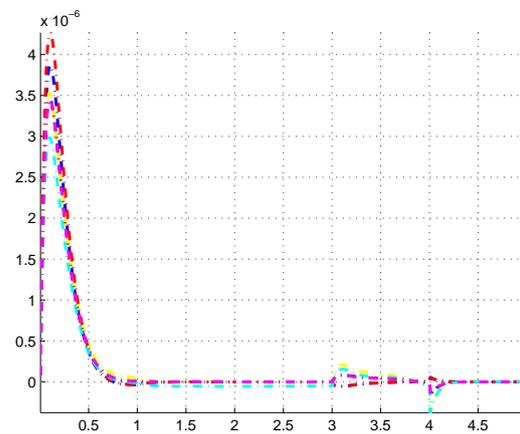
También se observa que la mayor diferencia entre ambas soluciones aparece en el actuador (5), y en general, para todos los actuadores, al principio de la simulación cinemática (hasta $t=0.5$ s). Este resultado se puede deber a una posible diferencia en los valores iniciales de las variables, y no se debería producir si ambas formulaciones resolvieran el problema cinemático, sea de forma global o topológica; Sin embargo, la formulación global con MBSLIM resuelve el problema dinámico mediante el uso de penalizadores; no el cinemático. Es de destacar la gran precisión que se obtiene con la implementación de la solución dinámica en MBSLIM. Este resultado se repite en el guiado de los demás GDL.

4.2.2. Velocidad movimiento en X.

En este apartado se muestra en la gráfica 4.3a la evolución de cada uno de los actuadores en cuanto a su velocidad de deslizamiento del vástago por el interior de la camisa en cada instante tanto para la resolución mediante formulación global como por grupos. En la siguiente gráfica 4.3b se representa la diferencia entre ambas soluciones y se observa que ambas soluciones obtienen resultados prácticamente idénticos con una diferencia máxima entre ellos del orden de 10^{-6} , por lo que se puede decir que ambas formulaciones funcionan de la misma manera.



(a) Velocidad traslación en X.



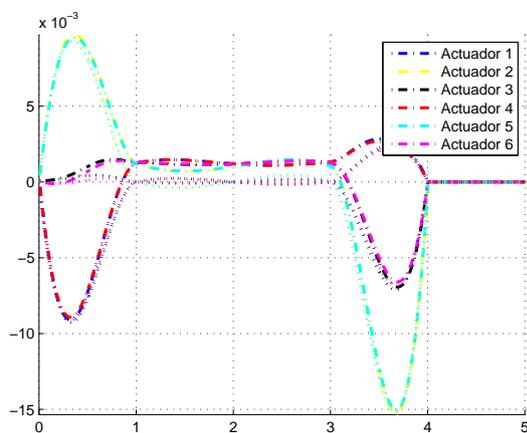
(b) Diferencia velocidad en X.

Figura 4.3: Velocidad traslación en X y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

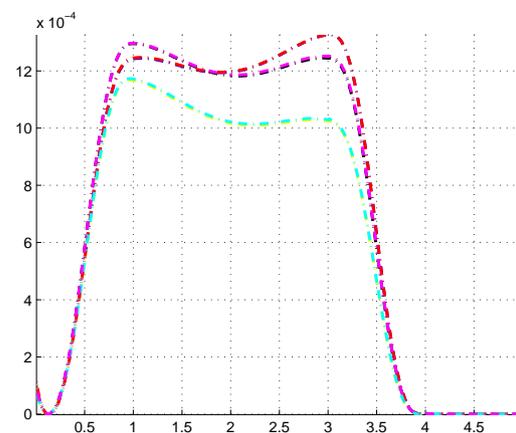
4.2.3. Aceleración movimiento en X.

En este apartado se expone la evolución de la aceleración de cada actuador respecto al tiempo. En la gráfica 4.4a se muestra la progresión de la aceleración de cada actuador tanto para la solución global como para la topológica, mientras que en la otra gráfica 4.4b se expone la diferencia entre ambas soluciones pudiendo observar que el error máximo que se obtiene es del orden de 10^{-3} , por lo que se puede afirmar que ambas soluciones resuelven de manera similar.

En el caso del análisis de aceleraciones, las diferencias son más significativas dado que la formulación en MBSLIM evalúa aceleraciones reales del sistema en función de las fuerzas que intervienen en el proceso y, sin embargo, SBEG tiene las aceleraciones completamente guiadas desde el inicio, según los polinomios descritos. Aún así, las diferencias entre ambas soluciones son muy bajas.



(a) Aceleración traslación en X.



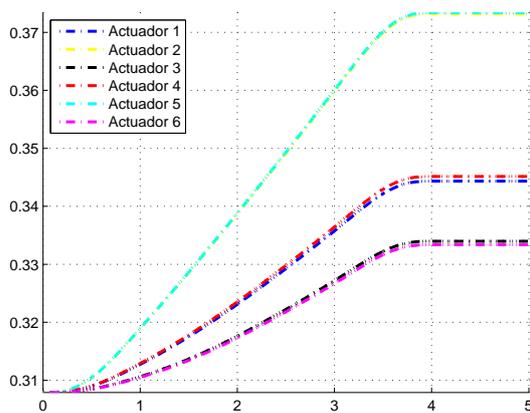
(b) Diferencia aceleración en X.

Figura 4.4: Aceleración traslación en X y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

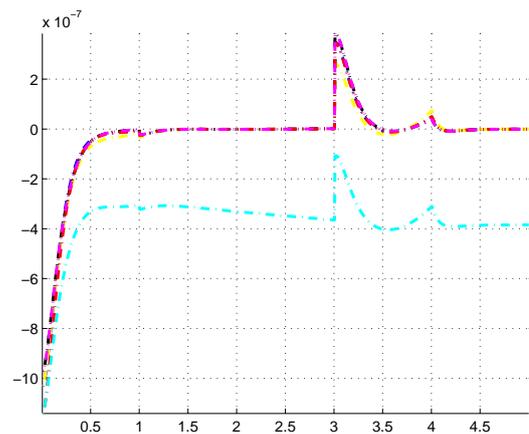
4.2.4. Posición movimiento en X,Y,Z.

En este caso se expone la evolución de la posición de los actuadores cuando se produce el movimiento en X,Y,Z. En la primera gráfica 4.5a se muestra la progresión de cada actuador con respecto al tiempo tanto para la solución global como la topológica. Al igual que en las demás gráficas, en el tramo desde $t=4s$ hasta $t=5s$ no hay movimiento por eso que se muestre una línea recta, simplemente es que el sistema está programado hasta los 5 segundos pero en realidad el movimiento va desde el instante $t=0s$ hasta $t=4s$. Otro factor importante a destacar es que en este caso los actuadores que más se desplazan son el 2 y el 5 con una distancia de aproximadamente 0.372m y los que menos se desplazan son los actuadores 3 y 6 con una distancia de 0.335m.

En la otra gráfica 4.5b se expone la diferencia entre ambas soluciones observando una diferencia máxima del orden de 10^{-6} al inicio de la simulación como ya se ha comentado anteriormente.



(a) Posición en X,Y,Z.



(b) Diferencia posición en X,Y,Z.

Figura 4.5: Posición en X,Y,Z y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

4.2.5. Velocidad movimiento en X,Y,Z.

En la primera gráfica 4.6a se muestra la evolución de la velocidad de deslizamiento de cada actuador por el interior de la camisa tanto para la solución global como para la topológica. Es importante indicar que los actuadores que más rápido se mueven son el 2 y el 5, mientras que los actuadores 3 y 6 son los que se desplazan más despacio de todo el conjunto.

En la gráfica de la derecha 4.6b se muestra la diferencia entre los resultados de la solución global como topológica y se observa que la máxima diferencia apreciable es del orden de 10^{-5} por lo que se resume en un buen cálculo entre ambas formulaciones con una obtención de resultados prácticamente idénticos.

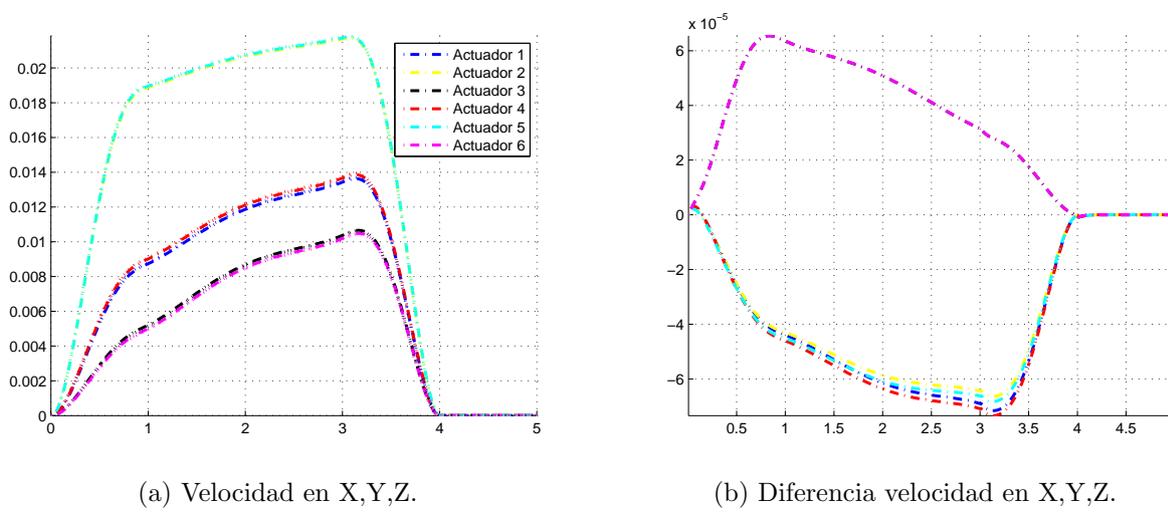


Figura 4.6: Velocidad en X,Y,Z y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

4.2.6. Aceleración movimiento en X,Y,Z.

En este apartado se muestra en la primera gráfica 4.7a, la aceleración de cada actuador con respecto al tiempo para cada solución, global y topológica.

En la otra gráfica 4.7b se observa la diferencia entre ambas soluciones pudiéndose observar una diferencia máxima del orden de 10^{-3} por lo que se concluye una buena comparativa con resultados por parte de ambas formulaciones casi idénticos.

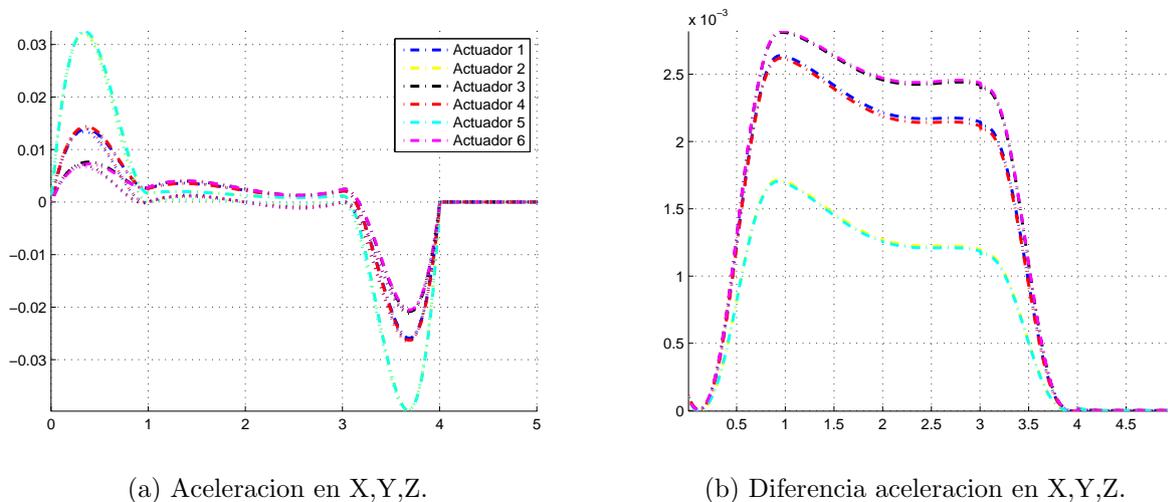


Figura 4.7: Aceleración en X,Y,Z y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

4.2.7. Posición giro ROLL.

Con este apartado se comienzan a ensayar los 3 giros de la plataforma. En primer lugar se ensaya el giro Roll, en la siguiente gráfica 4.8a se ve cómo evoluciona cada actuador, es decir, la posición que alcanza en cada instante de tiempo para realizar el giro Roll completo

que se ha programado, pudiendo ver que los actuadores 2, 5 y 6 son los que más se desplazan con una distancia superior a 0.33m.

En la otra gráfica 4.8b se observa la diferencia entre ambos proyectos pudiendo observar una diferencia máxima del orden de 10^{-6} , por tanto es un buen resultado.

Sin embargo, parece interesante que justo en $t=3s$ aparece un pico en la diferencia de posición entre varios actuadores. Sería interesante analizar si, en la formulación dinámica (MBSLIM), en ese instante se obtienen variaciones importantes en las fuerzas en los actuadores que impliquen paso por una zona próxima a posición singular del mecanismo.

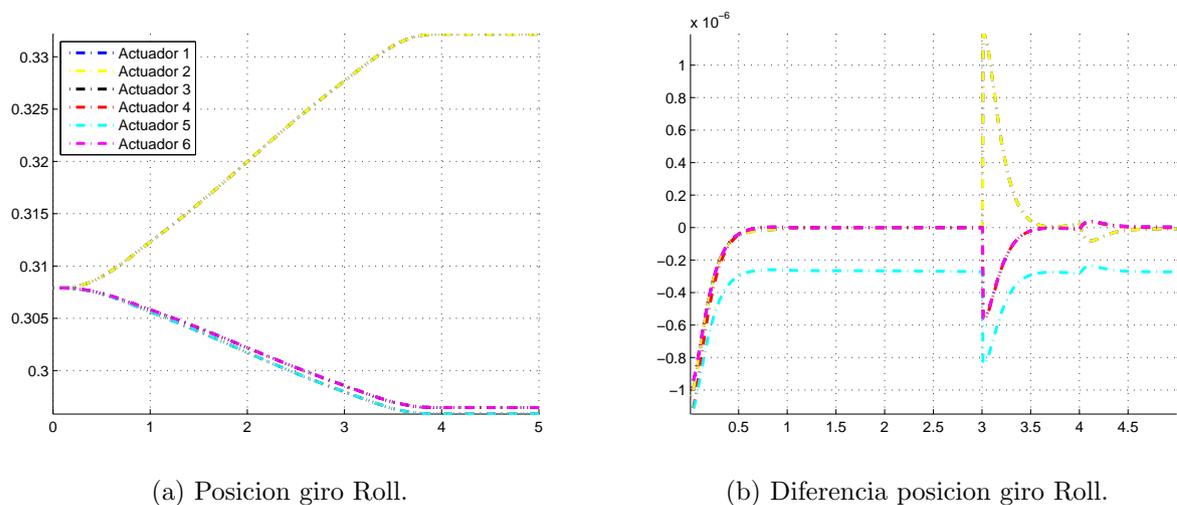


Figura 4.8: Posición giro Roll y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

4.2.8. Velocidad giro ROLL.

Aquí se muestra la evolución de la velocidad que lleva cada actuador, deslizamiento entre vástago y camisa, para realizar el giro completo Roll. En la gráfica 4.9a se expone la progresión de la velocidad de cada actuador para ambas soluciones, y se observa que el actuador 2 es el que alcanza una mayor velocidad.

En la gráfica 4.9b se expone la máxima diferencia entre ambos proyectos y ésta es del orden de 10^{-4} .

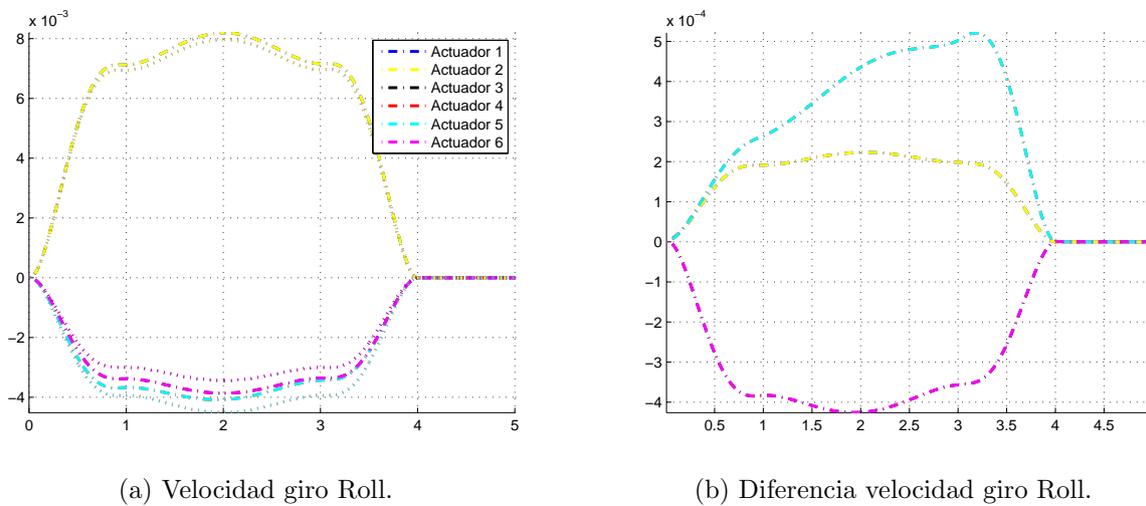


Figura 4.9: Velocidad giro Roll y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

4.2.9. Aceleración giro ROLL.

Aquí se comenta la evolución de la aceleración que lleva cada actuador con respecto al tiempo pudiendo ver en la gráfica 4.10a la aceleración de cada actuador para la solución global y para la topológica.

En la gráfica 4.10b se observa la diferencia de cálculo entre ambas soluciones y cuya máxima diferencia es del orden de 10^{-4} .

Las mismas consideraciones se pueden hacer para las aceleraciones que se hicieron para posiciones, ya que en el instante $t=3s$ se observan picos de diferencias en aceleración de cierta consideración.

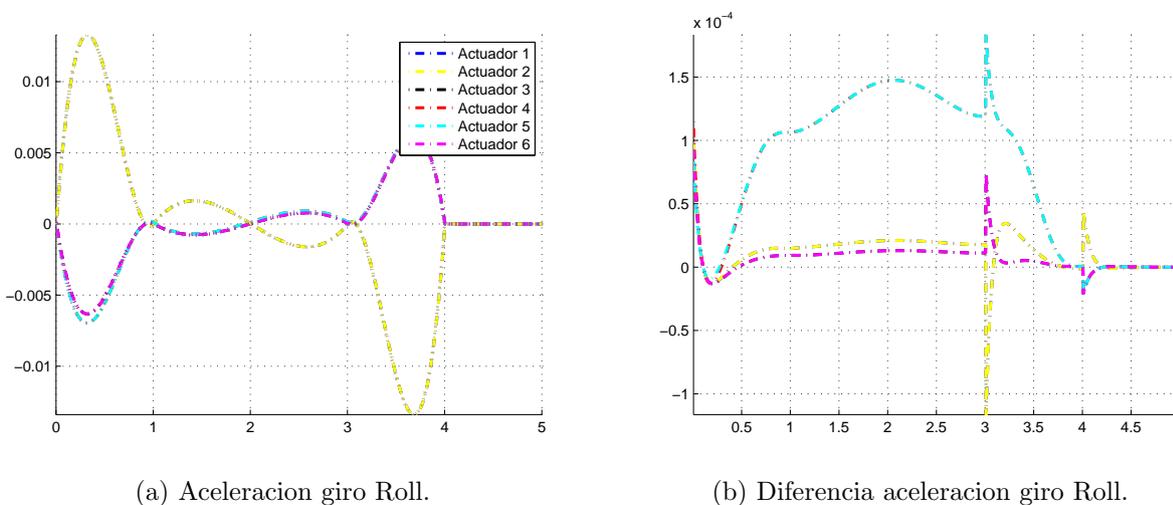
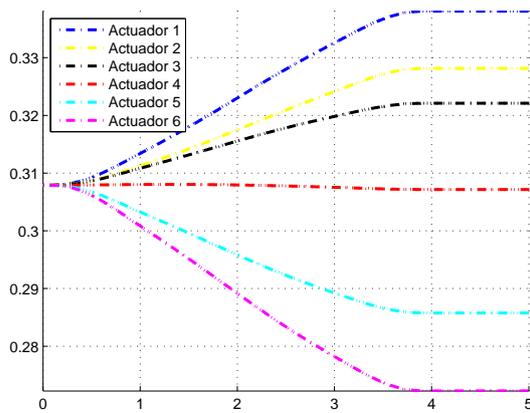


Figura 4.10: Aceleración giro Roll y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

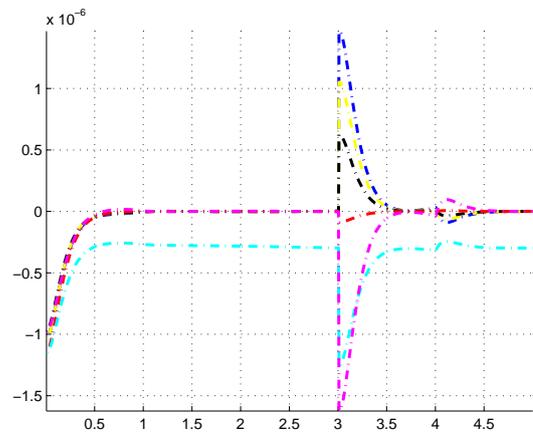
4.2.10. Posición giros ROLL,PITCH,YAW.

Ahora se analizan los 3 giros de la plataforma: Roll,Pitch y Yaw. Se representan en la gráfica 4.11a las posiciones que alcanzan los actuadores en función del tiempo viendo que el actuador que más se desplaza es el 1 con una distancia de aproximadamente 0.34m.

En la gráfica 4.11b se expone la diferencia entre ambas soluciones observando que la máxima diferencia es del orden de 10^{-6} .



(a) Posicion RollPYAW.



(b) Diferencia posicion RollPYAW.

Figura 4.11: Posición giro Roll,Picth,Yaw y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

4.2.11. Velocidad giros ROLL,PITCH,YAW.

En este apartado se analizan las velocidades que llevan los actuadores tanto para la solución global como la topológica y se ve en la gráfica 4.12a que tanto el actuador 1 como el 6 son los que mayor velocidad alcanzan.

En la gráfica 4.12b se muestra que existe una pequeña diferencia en cuanto a los cálculos tanto para una solución como la otra y es del orden de 10^{-3} .

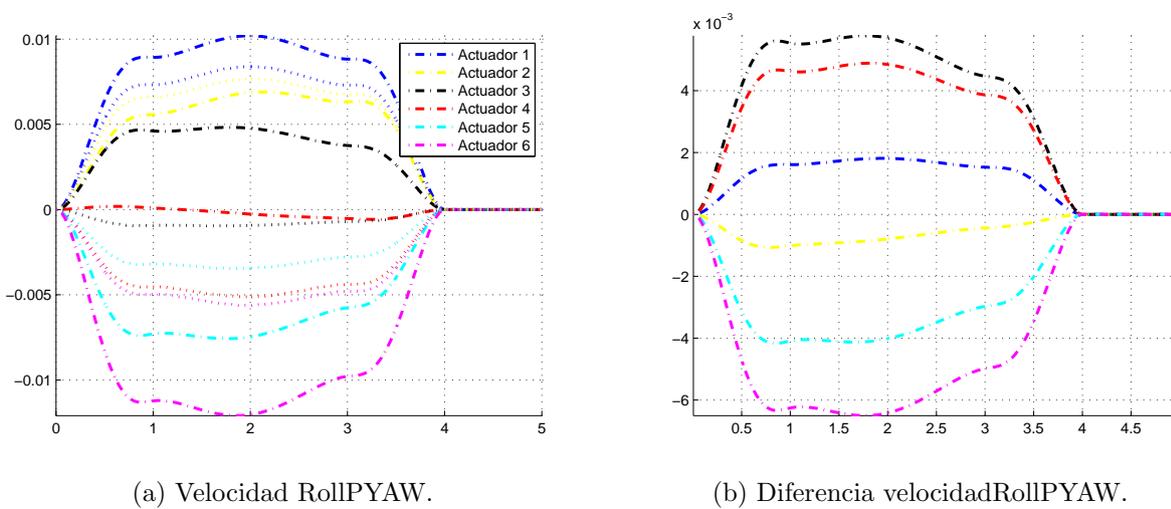


Figura 4.12: Velocidad giro Roll,Pictch,Yaw y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

4.2.12. Aceleración giros ROLL,PITCH,YAW.

En estas imágenes, en la gráfica 4.13a se muestra la progresión de la aceleración de cada actuador con respecto al tiempo tanto para la solución global como la topológica.

Mientras que en la gráfica 4.13b se representa la diferencia de la aceleración que hay entre la solución global y la solución por grupos, y se ve que el error que hay es del orden de 10^{-4} por lo que se puede concluir que son muy buenos resultados ya que la diferencia es muy pequeña.

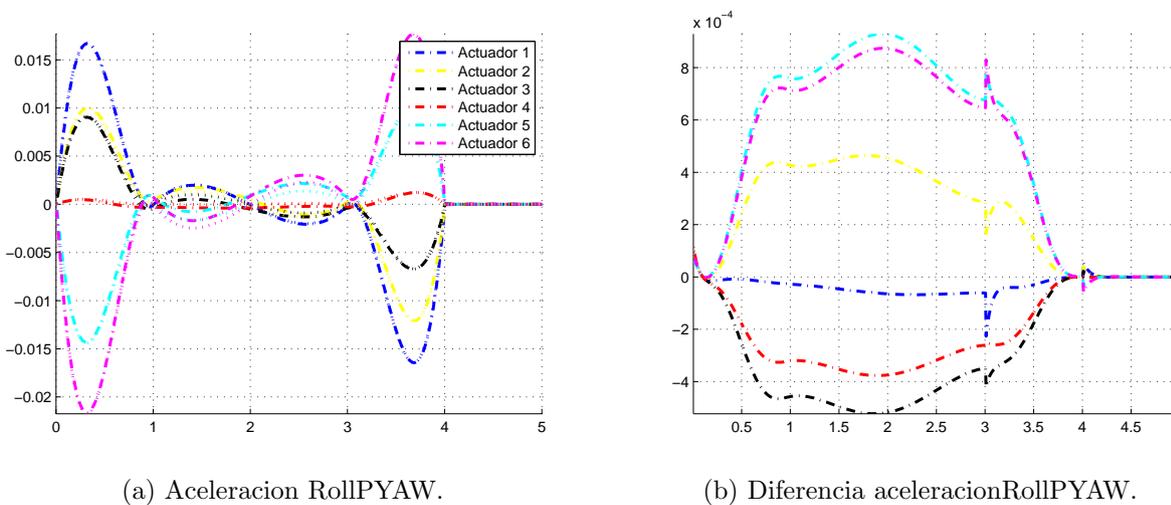


Figura 4.13: Aceleración giro Roll,Pictch,Yaw y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

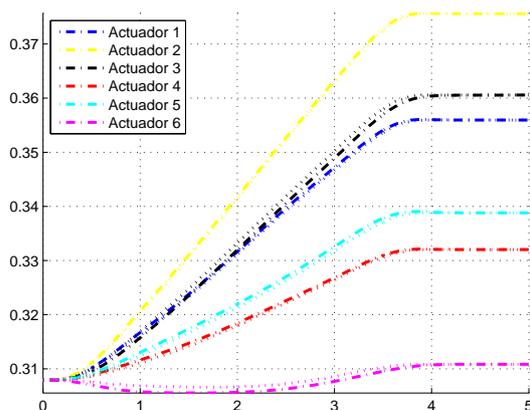
- Ahora, a continuación se van a exponer los resultados obtenidos del ensayo realizado a la plataforma con los 6 grados de libertad, las 3 traslaciones (X,Y,Z) y las 3 rotaciones (GIROS ROLL,PITCH Y YAW). Un factor importante a destacar es que el guiado de la traslación en Y se ha controlado poniéndolo inicialmente a 0 y esto se ha realizado

debido a que no se puede controlar el espacio de trabajo de la plataforma y al poner un valor a la traslación en Y resulta que la plataforma comienza a moverse bien en los 6 grados de libertad pero cuando llega al instante de tiempo de 3 segundos no controla bien el espacio de trabajo total y deja de funcionar. Este hecho, como ya se ha dicho es debido al control del espacio de trabajo y hay que tener en cuenta que el sistema está programado hasta los 4 segundos por lo que resulta satisfactorio que aunque falle dándole un valor a Y, éste funciona perfectamente hasta los 3 segundos. Bien, a continuación se exponen las gráficas de los resultados obtenidos mediante el ensayo del movimiento en los 6 grados de libertad:

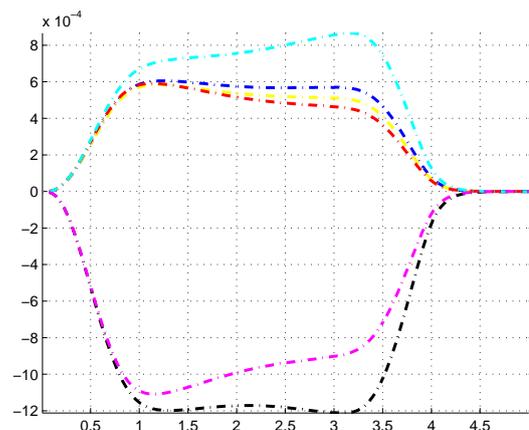
4.2.13. Posición movimiento completo en los 6GDL.

En esta sección se ensaya la plataforma con los 6 grados de libertad. Se expone en la gráfica 4.14a la evolución de la posición de cada actuador con respecto al tiempo observando que el actuador que más se desplaza es el 2 con una distancia de aproximadamente 0.37m.

En la gráfica 4.14b se observa la diferencia que se obtiene al resolver la plataforma con la solución global y con la topológica, destacando que la diferencia máxima es del orden de 10^{-3} , por lo que son muy buenos resultados tanto con un proyecto como con el otro.



(a) Posicion 6GDL.



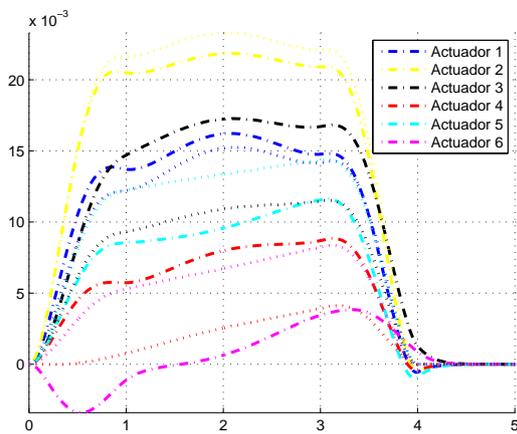
(b) Diferencia posicion6GDL.

Figura 4.14: Posición de los 6GDL y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

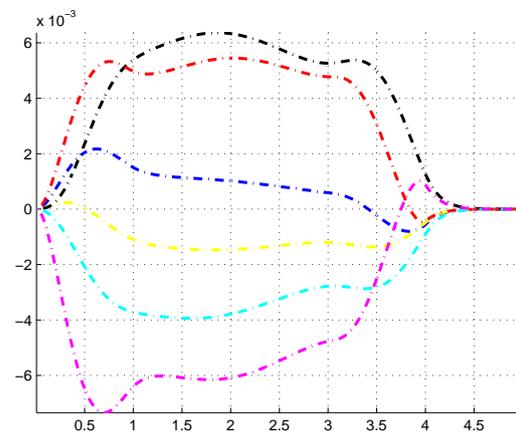
4.2.14. Velocidad movimiento completo en los 6GDL.

Aquí se exponen los resultados obtenidos de la velocidad de deslizamiento de los actuadores. En la gráfica 4.15a se muestra la evolución de la velocidad de los actuadores y se observa claramente que el actuador 2 es el que mayor velocidad alcanza.

En la otra gráfica 4.15b se muestra la diferencia entre una solución y otra observando que la máxima diferencia es del orden de 10^{-3} , por lo tanto son buenos resultados.



(a) Velocidad 6GDL.

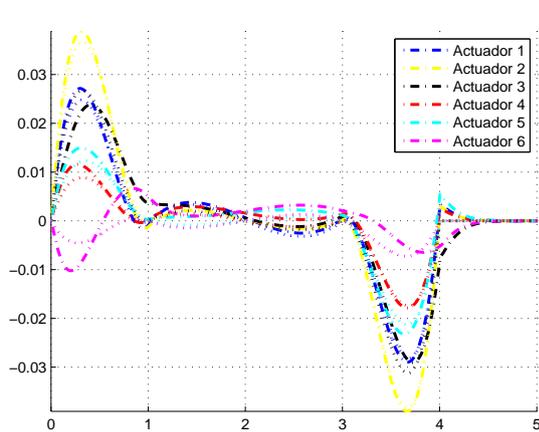


(b) Diferencia velocidad6GDL.

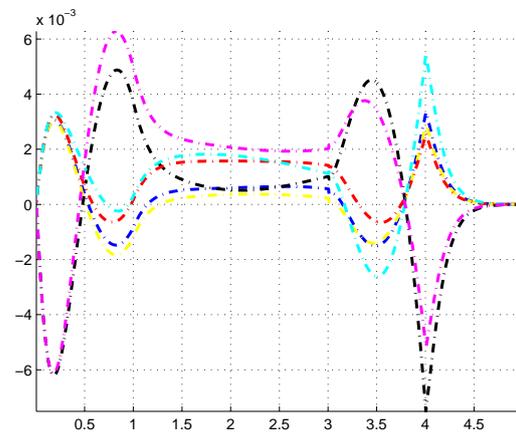
Figura 4.15: Velocidad de los 6GDL y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

4.2.15. Aceleración movimiento completo en los 6GDL.

En este último apartado se muestran los resultados en cuanto a la aceleración que sigue cada actuador y se puede observar en la gráfica 4.16a la evolución de la aceleración de cada actuador tanto para la solución global como topológica o por grupos. Y en la gráfica 4.16b se muestra la diferencia de calcular el movimiento con una formulación y con otra, y en este caso la máxima diferencia es del orden de 10^{-3} .



(a) Aceleración 6GDL.



(b) Diferencia aceleracion6GDL.

Figura 4.16: Aceleración de los 6GDL y comparativa entre MBSLIM y SBEG.

Capítulo 5

Conclusiones.

En este capítulo se presentan las conclusiones sobre el presente proyecto; los pasos que se han realizado, los medios utilizados y la formulación empleada. El fin de este proyecto es analizar la cinemática inversa de una plataforma Stewart mediante el procedimiento basado en ecuaciones de grupo (SBEG) y realizar una comparación con el procedimiento basado en una solución global (MBSLIM).

5.1. Procedimientos realizados.

- De cada sólido se han estudiado los puntos y vectores necesarios para su modelización cinemática. Estudiando si comparten éstos con otros sólidos, se han obtenido las coordenadas y las ecuaciones que definen cada cuerpo rígido: vector unitario, triedro o combinación lineal. En el caso de esta plataforma, además del bastidor, se tienen 13 eslabones móviles.
- Además de las ecuaciones cinemáticas de sólido rígido se incluyen para definir el modelo, las ecuaciones de restricción por tipo de par cinemático; 6 pares cilíndricos de grado 2 y 12 pares cardan de grado 2.
- Mediante la herramienta Toolbox de cálculo simbólico de Matlab se obtuvieron, a partir de las ecuaciones de restricción del modelo, los vectores y matrices necesarios para su simulación cinemática computacional.
- Se programaron en Fortran las subrutinas para el análisis cinemático computacional basado en ecuaciones de grupo, así como las subrutinas de cálculo de las matrices y vectores necesarios para la simulación cinemática computacional.
- Se tomaron las coordenadas locales y globales de puntos y vectores del modelo de Solidworks, necesarios para la modelización del terminal móvil y de cada uno de los actuadores y del bastidor.
- Para obtener un entorno gráfico de la plataforma se adaptaron las piezas de Solid a Blender.
- EL movimiento de la plataforma se hace controlando sus seis GDL mediante polinomios tipo 345 que garantizan continuidad en posición, velocidad y aceleración en tramos de:

inicio de movimiento, movimiento a velocidad constante y detención del movimiento. Los coeficientes de los polinomios asociados a cada tramo de cada GDL se incluyen en una subrutina para generar el movimiento controlado del sistema en cada instante.

5.1.1. Restricciones.

- Las primeras restricciones son los parámetros iniciales introducidos para las traslaciones y giros.
- Indicar que en el caso del movimiento en los 6GDL, el guiado en Y se ha inicializado a 0 como ya se ha comentado anteriormente.

5.2. Resultados de los ensayos.

Primero decir que no se observan errores acumulativos en ningún caso estudiado. Esto es debido a la eficacia de los programas de análisis cinemático y de la formulación implementada. Es importante destacar en este apartado que la comparación entre el modelo basado en ecuaciones de grupo y el modelo global es bastante buena, a pesar de que el modelo de grupos si resuelva la plataforma mediante la cinemática mientras que el modelo global resuelva la plataforma mediante la dinámica (debido a que no se tiene implementado el módulo cinemático de la formulación global), que es simplemente un método mediante el cual, conocida la posición del terminal móvil, cada uno de los actuadores se desplazan hasta la posición requerida mediante la actuación de diversas fuerzas.

- Se observa que la mayor diferencia entre ambas soluciones aparece en el actuador (5), y en general, para todos los actuadores, al principio de la simulación cinemática (hasta $t=0.5s$). Este resultado se puede deber a una posible diferencia en los valores iniciales de las variables, y no se debería producir si ambas formulaciones resolvieran el problema cinemático, sea de forma global o topológica; Sin embargo, la formulación global con MBSLIM resuelve el problema dinámico mediante el uso de penalizadores; no el cinemático. Es de destacar la gran precisión que se obtiene con la implementación de la solución dinámica en MBSLIM.
- En el caso del análisis de aceleraciones, las diferencias son más significativas dado que la formulación en MBSLIM evalúa aceleraciones reales del sistema en función de las fuerzas que intervienen en el proceso y, sin embargo, SBEG tiene las aceleraciones completamente guiadas desde el inicio, según los polinomios descritos. Aún así, las diferencias entre ambas soluciones son muy bajas.
- En la diferencia de la posición, velocidad y aceleración de giro Roll, en $t=3s$ aparece un pico en la diferencia de posición entre varios actuadores. Sería interesante analizar si, en la formulación dinámica (MBSLIM), en ese instante se obtienen variaciones importantes en las fuerzas en los actuadores que impliquen paso por una zona próxima a posición singular del mecanismo.
- En la aceleración de giro Roll, se pueden hacer las mismas consideraciones que se hicieron para posiciones, ya que en el instante $t=3s$ se observan picos de diferencias en aceleración de cierta consideración.

5.2.1. Desarrollos futuros.

En este apartado de este capítulo se exponen algunos desarrollos o mejoras que se podrían realizar para proyectos futuros:

- Una posible ampliación de este proyecto sería implementar el módulo cinemático de la formulación basada en el método global, y así, al realizar la comparativa con el método basado en ecuaciones de grupo se obtendrían diferencias aún más pequeñas.
- Este proyecto se podría emplear para controlar el movimiento de una plataforma real, ej. mediante Arduino, así darle diferentes usos para diversas aplicaciones: simuladores, robots, etc.
- En cuanto a investigación, una posible mejora sería analizar lo que pasa en el giro Roll, justo en $t=3s$ aparece un pico en la diferencia de posición entre varios actuadores. El objetivo sería ver si en la formulación dinámica (MBSLIM), en ese instante se obtienen variaciones importantes en las fuerzas en los actuadores que impliquen paso por una zona próxima a posición singular del mecanismo.
- Otro posible desarrollo de este proyecto sería la implementación de modificaciones de la plataforma, ya que se podría realizar la simulación de la plataforma usando otros grupos estructurales, es decir, realizar combinaciones entre ellos, ya que el proyecto está estructurado en diferentes grupos por lo que es fácil el análisis y resolución de cada grupo por separado.

Bibliografía

- [1] D. B. P. Saravia, M. J. H. Lopez, H. F. Q. Riaza, Revisión del estado del arte de manipuladores paralelos, *Scientia Et Technica* 15 (2009) 81–86.
- [2] O. S. Picon, Síntesis, análisis y diseño de manipuladores paralelos de baja movilidad, Master's thesis, Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea (2008).
- [3] C. Gosselin, J. Angeles, Singular analysis of closed-loop kinematic chains, *Transactions on Robotics and Automation* 6 (1990) 281–290.
- [4] Y. Takeda, H. Funabashi, Kinematics and static characteristics of inparallel actuated manipulators at singular points and in their neighborhood, *JSME International Journal* 39 (1996) 85–93.
- [5] L. Tsai, *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, Wiley-Interscience New York, 1999.
- [6] L.-W. Tsai, G. Walsh, R. Stamper, Kinematics and workspace of a novel three dof translational plataforma, *Institute for Systems Research* 8 (1996) 74–93.
- [7] A. Majarena, J.Santolaria, D.Samper, J.J.Aguilar, Identificación de parámetros cinemáticos de una plataforma paralela pan-tilt basada en cinemática inversa y directa, Master's thesis, Universidad de Zaragoza (2003).
- [8] H. A. C. Hernandez, Desarrollo de la plataforma stewart basada en microcontroladores, para simular el comportamiento de una aeronave en tres grados de libertad, Master's thesis, Universidad de México DF, Unidad Ticomán (2013).
- [9] J. Gallardo-Alvarado, J. M. R. Martínez, H. Orozco-Mendoza, Un algoritmo para resolver la cinemática directa de plataformas goughstewart tipo 6-3, *Computación y Sistemas* 8 (2004) 132–149.
- [10] J. M. R. Martínez, *Introducción a la Cinemática de las Máquinas.*, División de Ingenierías, Universidad de Guanajuator., 2015.
- [11] J. B. Ramírez, *Análisis y síntesis estructural. Conceptos generales.*, Oulu, Finland., 2007.
- [12] S. C. Foix, *Teoría de máquinas.*, 1st Edition, Universitat Politècnica de Catalunya., 2001.
- [13] A. C. Ramírez, *Cinemática de las máquinas.*, Universidad autónoma de San Luis Potosí., 2005.

- [14] E. Haug, *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*, Allyn and Bacon, Boston, MA, 1989.
- [15] J. G. de Jalón, E. Bayo, *Kinematic Simulation of Multibody Systems*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [16] P. Nikravesh, *Computer Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [17] M. kolovsky, A. Evgrafov, Y. Semenov, A. Slousch, *Advanced theory of mechanism and machines*, Springer, 2000.
- [18] T. Mruthyunjaya, Kinematic structure of mechanisms revisited, *Mechanism and Machine Theory* 38 (2003) 279–320.