

Universidad  
Politécnica  
de Cartagena



**industriales**  
etsii UPCT

# Simulación transitoria de los flujos inducidos por convección natural en recintos tridimensionales

**Titulación:** Ingeniería Industrial

**Alumno/a:** Ana Belén Martínez  
Martínez

**Director/a/s:** Blas Zamora Parra

Cartagena, 2 de Octubre de 2015

# Índice

Lista de símbolos	3
Capítulo 1. Introducción y objetivos	1
1.1 Motivación del estudio	1
1.2 Descripción de algunos dispositivos con flujos convectivos	1
1.3 Revisión bibliográfica	4
1.4 Objetivos	5
Capítulo 2. Descripción geométrica y definición del problema	7
2.1 Configuraciones y condiciones de calentamiento	7
2.2 Parámetros adimensionales relevantes	11
2.2.1 Parámetros relevantes para condición isoterma	11
2.2.2 Definición del número de Nusselt	12
2.2.3 Flujo másico inducido	12
2.2.4 Adimensionalización de la variable tiempo	13
Capítulo 3. Modelización matemática	15
3.1 Ecuaciones generales de Mecánica de Fluidos	15
3.1.1 Principio de conservación de la masa. Ecuación de continuidad	15
3.1.2 Principio de conservación de la cantidad de movimiento. Segunda ley de Newton; <b>Error! Marcador no definido.</b>	16
3.1.3 Principio de conservación de la energía. Primer principio de la termodinámica	18
3.1.4 Sistemas de ecuaciones de Navier Stokes	19
3.2 Flujos con convección natural. Aproximación de Boussinesq	20
3.3 Modelización de flujo turbulento	21
3.3.1 Ecuaciones generales de Reynolds del flujo turbulento	21
3.3.2 Modelos de ecuaciones promediadas de Navier-Stokes (RANS)	23

3.4 Flujo turbulento en presencia de paredes	27
3.4.1 Ecuaciones del flujo turbulento en presencia de paredes	27
3.4.2 Ley de la pared	28
3.5 Condiciones de contorno e iniciales	30
3.5.1 Condiciones de contorno	30
3.5.2 Condiciones iniciales	31
 Capítulo 4. Modelización numérica	 32
4.1 Introducción a la simulación numérica	32
4.2. Método de diferencias finitas	33
4.3. Métodos de los volúmenes finitos	36
4.4. Técnicas de discretización o interpolación	38
4.4.1. Esquema de diferencias centrales	39
4.4.2. Esquema Upwind	40
4.4.3. Esquema Híbrido	42
4.5. Introducción al código Phoenics	43
4.6. Descripción del fichero de especificación de datos q1	44
4.6.1 Declaración general de variables	44
4.6.2 Especificación de la malla	45
4.6.3 Resolución de las variables y turbulencia	47
4.6.4 Inicialización de las variables	48
4.6.5 Especificación de la condiciones de contorno y fuente de flotación	49
4.6.6 Especificación de otros detalles de la simulación numérica	51
4.6.7 Especificación de la simulación transitoria	52
4.7. Mallado	53
4.7.1 Creación del mallado en Phoenics	54
4.7.2 Mallado en la cavidad	55
4.7.3 Influencia del mallado	55
4.8 Simulación en presencia de paredes	56
 Capítulo 5. Validación de la modelización numérica	 57
5.1 Convección natural en un canal	57
5.2 Flujo convectivo transitorio en un recinto cerrado	60
5.3 Flujo convectivo transitorio en cavidad bidimensional simple	68
 Capítulo 6. Simulación estacionaria en cavidades tridimensionales con flujo de calor constantes	 70
6.1 Introducción y motivación	70
6.2 Resultados obtenidos en cavidad tridimensional simple para el número de Nusselt y el flujo másico	70
6.3 Resultados obtenidos en cavidad tridimensional con muro intermedio	71

para el número de Nusselt y el flujo másico	
6.4 Comparación de cavidad tridimensional simple y con muro intermedio	72
Capítulo 7. Simulación transitoria en cavidades tridimensionales con flujo de calor constante	74
7.1 Introducción y motivación	74
7.2 Estudio de la influencia de los saltos de tiempo	75
7.3 Resultados obtenidos para el número de Nusselt y el flujo másico adimensional para Rayleigh $10^6$ en cavidad tridimensional simple	77
7.4. Resultados obtenidos para el número de Nusselt y el flujo másico adimensional para Rayleigh $10^9$ en cavidad tridimensional simple	79
7.5 Resultados obtenidos para el número de Nusselt y el flujo másico adimensional para un Rayleigh de $10^6$ en cavidad tridimensional con muro intermedio	80
7.6 Resultados obtenidos para el número de Nusselt y el flujo másico adimensional para un Rayleigh de $10^9$ en cavidad tridimensional con muro intermedio	81
7.7 Resultados obtenidos para el número de Nusselt y el flujo másico adimensional para un Rayleigh de $10^{12}$ .	83
Capítulo 8. Conclusiones	85
8.1 Simulación estacionaria en cavidad tridimensional. Conclusiones	85
8.2 Simulación transitoria en cavidad tridimensional. Conclusiones	86

## Lista de símbolos

### Símbolos latinos

$A1, A2$	espacio entre la pared interna y la pared externa de la cavidad 3D
$b$	anchura de la apertura de ventilación
$c_p$	calor específico a presión constante
$E$	energía total
$F$	fuerza
$f_s$	fuerza másica superficial
$f_m$	fuerza másica gravitatoria
$Fo$	número de Fourier
$Gr_H$	número de Grashof basado en $H$
$G_k$	generación de energía intrena turbulenta
$g$	aceleración de la gravedad
$H$	altura de la cavidad
$I$	matriz identidad
$k$	energía cinética turbulenta
$L_c$	longitud característica
$L$	longitud de la cavidad
$M$	flujo másico adimensional
$m$	flujo másico
$Nu$	número de Nusselt
$Nu_H$	número de Nusselt basado en $H$
$Nu_x$	número de Nusselt local
$n$	coordenada perpendicular al plano
$Pr_\infty$	número de Prandtl
$p$	presión
$p'$	componente fluctuante de la presión
$Q$	calor
$q$	flujo de calor en la pared
$R$	constante universal de los gases ideales

$Ra_H$	número de Rayleigh basado en $H$
$S_c$	superficie de control
$S_{ij}$	tensor de deformación de flujo turbulento
$t$	tiempo
$T$	temperatura
$T'$	componente fluctuante de la temperatura
$T_w$	temperatura en la pared caliente
$T_\infty$	temperatura de referencia
$U$	componente media de la velocidad
$u, v, w$	componentes de la velocidad en las direcciones $x, y, z$
$u'$	componente fluctuante de la velocidad
$u^+$	velocidad adimensionalizada en la capa límite, $u/u_\tau$
$u_\tau$	velocidad de agitación turbulenta
$V$	volumen
$V_c$	volumen de control
$V_f$	volumen fluido
$v$	velocidad
$v_c$	velocidad del volumen de control
$W$	anchura de la cavidad
$x, y, z$	coordenadas cartesianas
$y^+$	coordenada normal adimensionalizada en la capa límite, $u_\tau y/\nu$

## Símbolos griegos

$\alpha$	difusividad térmica
$\beta$	coeficiente de expansión térmica
$\gamma$	tensor de deformaciones
$\delta_T$	espesor de la capa límite térmica
$\varepsilon$	ritmo de disipación de la energía cinética turbulenta
$\Phi$	magnitud fluida
$\Phi_v$	función de disipación de Rayleigh
$\kappa$	conductividad térmica
$\Lambda$	parámetro de calentamiento
$\mu$	viscosidad
$\nu$	viscosidad cinemática
$\mu_t$	viscosidad turbulenta
$\theta$	diferencia de temperatura adimensionalizada
$\rho$	densidad
$\tau$	tensor de esfuerzos
$\tau_p$	esfuerzo cortante en la pared
$\tau'$	tensor de esfuerzos viscosos
$\omega$	ritmo de disipación específica de $k$

## Subíndices

$c$	superficie del volumen de control
$m$	valor máximo
$t$	turbulento

$\nu$  viscoso  
 $\infty$  condiciones de referencia o ambientales  
 $w$  pared

## **Abreviaturas**

CFD Computational Fluid Dynamics  
RANS Reynolds Averaged Navier-Stokes

# Capítulo 1. Introducción y objetivos

## 1.1 Motivación del estudio

Los flujos inducidos por fenómenos de flotación (convección natural) intervienen en numerosos procesos industriales en los que las ventajas de este tipo de flujos, tales como el ahorro energético o los bajos niveles de ruido, cobran una importancia relevante. Se han estudiado diversas morfologías relacionadas con posibles aplicaciones de interés. En concreto el estudio de los flujos inducidos por convección natural en recintos o cavidades cerradas, abiertas con flujos de calor en las paredes ha sido motivo de estudio por diversos autores debido al amplio rango de aplicaciones que presenta dentro del mundo de la Ingeniería, como puede ser la ventilación o la climatización pasiva de edificios. Muchos de estos estudios han servido de base para la realización del presente trabajo.

Puede decirse entonces que la motivación principal de este trabajo es el estudio de flujos convectivos naturales, que pueden tener aplicación en sistemas de climatización pasiva, como en las llamadas casas inteligentes, sistemas de aprovechamiento energético como las chimeneas solares o las paredes Trombe o sistemas de refrigeración. Las simulaciones más completas son tridimensionales y transitorias, de este modo, se pueden estudiar los efectos reales que aparecen en grandes estructuras, por lo que se pretende una mejor comprensión de este tipo de flujos.

## 1.2 Descripción de algunos dispositivos con flujos convectivos

Los flujos de convección natural en cavidades cerradas son de gran interés en diferentes aplicaciones en Ingeniería. Se pueden encontrar este tipo de flujo en aplicaciones tales como en la refrigeración de dispositivos electrónicos, en torres solares o en los sistemas pasivos de climatización en edificios como chimeneas solares, termosifones o paredes Trombe.

Las **chimeneas solares** son sistemas de ventilación natural de edificios a través de energía solar pasiva utilizando la convección natural del aire. En su forma más simple una chimenea solar consiste en una chimenea pintada de negro; durante el día la radiación solar calienta la chimenea y el aire de dentro, provocando un flujo de aire ascendente debido a la diferencia de densidad en el aire. La succión que se crea en la base de la chimenea sirve tanto para ventilar como para refrigerar el edificio [1].

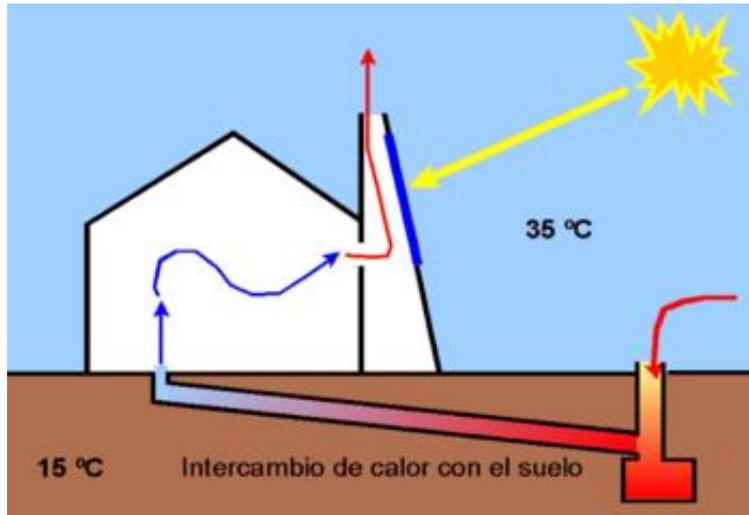


Figura 1-1 Esquema del funcionamiento de una chimenea solar, donde el aire asciende por la chimenea debido a la diferencia de densidad

Otra aplicación interesante de las chimeneas solares es el aprovechamiento de dicho flujo convectivo para la generación de energía eléctrica. En este caso dicha chimenea recibe el nombre de torre solar propiamente dicha, o torre solar de potencia[2]. En la base de la torre hay instaladas unas turbinas conectadas a alternadores que transforman la energía mecánica en eléctrica [3]

El sistema de funcionamiento de un **termosifón** se basa en la circulación de un líquido portador de calor debido a la dilatación del fluido al calentarse, por lo que disminuye su densidad [4]. Se puede observar en el siguiente esquema el funcionamiento de dicho dispositivo; la radiación solar incide sobre el captador solar térmico provocando la flotación del fluido hasta el tanque o depósito, desplazando el líquido con menor temperatura a la parte inferior donde recibirá la radiación solar y continuando la circulación del líquido[5].

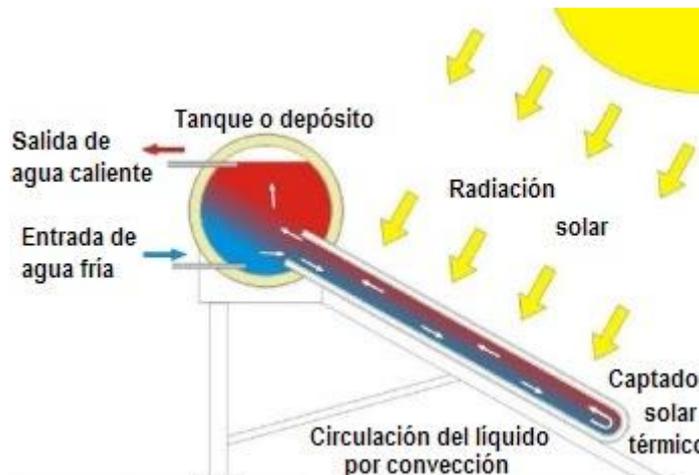


Figura 1-2 Esquema del funcionamiento de un termosifón

Un muro Trombe es un muro o pared orientada a la posición del sol más favorable a lo largo del día; esta orientación dependerá por tanto del hemisferio en el que se encuentre. Dicho muro se construye con materiales que puedan acumular calor bajo el efecto de masa térmica (hormigón, piedra, adobe) combinado con un espacio de aire, una lámina de vidrio y ventilaciones. Gestionándolo adecuadamente el sistema entrega calor durante los meses fríos y una mejor

refrigeración en los meses cálidos a través de ventilación cruzada.

El sistema se basa en la captación solar directa y en la circulación de aire que se produce debido a la diferencia de densidad entre el aire frío y el aire caliente que provoca las corrientes de aire en una u otra dirección dependiendo de las trampillas que estén abiertas.

El sistema se compone de los siguientes elementos: un muro de gran inercia térmica, una lámina de vidrio lo más espesa posible, con una lámina de aire interior, un espacio entre la lámina y el vidrio que tendrá siempre una temperatura superior debido al efecto invernadero y cuatro orificios con sus respectivas trampillas, dos inferiores y dos superiores.

El funcionamiento de dicho muro es el siguiente. Durante el día los rayos del sol atraviesan las láminas de vidrio calentando el muro y almacenando el calor en la masa térmica. En la noche el muro cede calor, escapando principalmente hacia el exterior. Pero como se encuentra con la lámina de vidrio el calor es entregado hacia el interior de nuevo.

Los muros Trombe más modernos tienen además orificios con trampillas para permitir que el aire menos caliente ingrese por la parte inferior calentándose en la cámara de aire y vuelva al ambiente interior por la parte superior. Dichas rejillas evitan un flujo inverso nocturno que enfríe el ambiente interior en lugar de calentarlo. A continuación se puede observar las posibles funciones del muro Trombe en función de las distintas configuraciones de dichas trampillas.

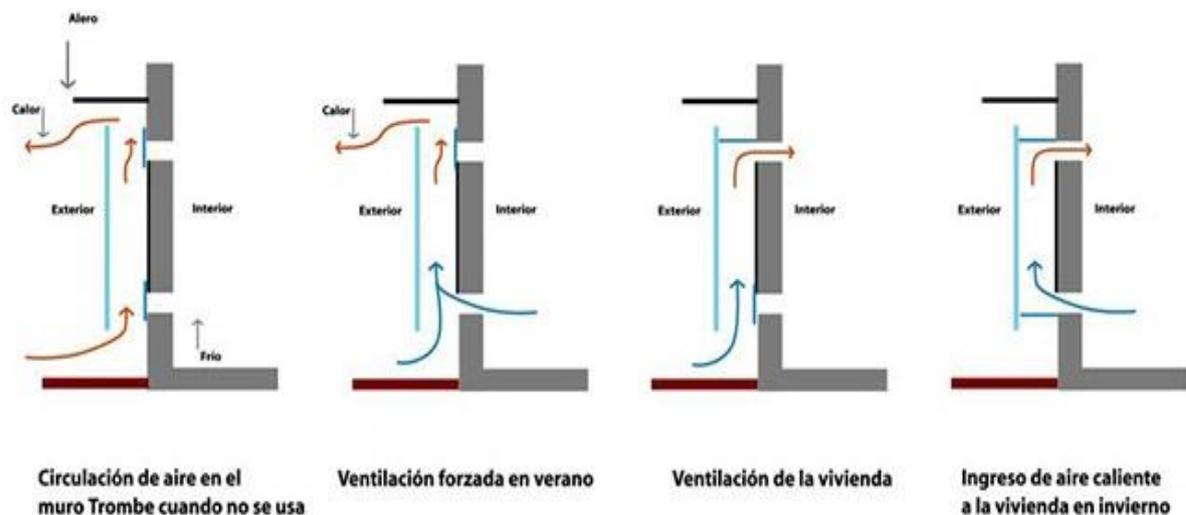


Figura 1-3 Diferentes configuraciones para el muro Trombe

Las formas genéricas de enfriamiento pasivo que se pueden encontrar son las siguientes:

*Enfriamiento evaporativo:* consiste en hacer circular una corriente de aire por una masa de agua de manera que la evaporación del agua absorbe el calor del aire disminuyendo la temperatura de éste.

*Enfriamiento radiante:* un enfriamiento sensible es aquel que reduce la cantidad de energía. Para que esto pueda realmente suceder se necesita de un foco frío con una masa elevada de manera que

no se modifique su temperatura cuando se le aporta el calor que queremos eliminar. En la naturaleza tenemos tres grandes sumideros de calor: la bóveda celeste, el terreno y el aire.

*Enfriamiento conductivo:* este tipo de enfriamiento se produce cuando los cuerpos pierden calor por conducción. Esta transferencia de calor se produce a través del contacto con el terreno.

*Enfriamiento convectivo.* El enfriamiento convectivo se emplea utilizando directamente masas de aire frío. La ventilación nocturna es uno de los métodos de enfriamiento convectivo y se puede utilizar siempre que la temperatura nocturna sea inferior a la temperatura que deseamos alcanzar.

### 1.3 Revisión bibliográfica

Dadas las múltiples aplicaciones vistas con anterioridad de este tipo de flujo, los flujos convectivos naturales han sido motivo de diversos estudios. A continuación se citarán una serie de trabajos sobre flujos convectivos naturales que han servido como base y comparación para la realización del presente trabajo.

Comenzamos citando algunos trabajos centrados en posibles aplicaciones, como por ejemplo el realizado por G. Gan y S. B. Riffat [7] donde presentan el resultado numérico del estudio de la ventilación natural establecida por chimeneas solares en edificios. H. Onbasioglu y A.N. Egrican [8] investigaron experimentalmente el rendimiento térmico de un sistema de calentamiento solar en una habitación. S. A. M. Burek y A. Habeb [9] determinaron experimentalmente las correlaciones para el flujo másico en termosifones. B. Zamora y A.S. Kaiser [10] llevaron a cabo un estudio numérico del efecto de los flujos convectivos naturales inducidos en chimeneas solares, donde estudian la forma de optimizar la geometría de la chimenea solar.

Siguiendo con los estudios sobre aplicaciones de los flujos convectivos naturales, H. Akbari y T.R. Borgers [11] propusieron expresiones para la velocidad en un muro Trombe a partir de la resolución de un sistema de ecuaciones simplificadas de Navier-Stokes. W. Smolec y A. Thomas [12] expusieron las dificultades encontradas en el uso de expresiones para el coeficiente de transmisión de calor convectivo. H. B. Awbi [13] explicó los métodos clásicos empleados en el diseño de edificios ventilados de forma natural. B. Zamora y A.S. Kaiser [14] realizaron un estudio numérico de los flujos producidos por convección natural en los muros trombre, donde concluyeron que, para una geometría dada con una fuente de calor discreta, incluir obstáculos produce un apreciable aumento del Nusselt, así como del flujo másico, para un rango de valores del Rayleigh.

Por otro lado, existe un gran número de trabajos acerca de los flujos de convección natural en geometrías en forma de cavidad (abierta, parcialmente abierta, o cerrada), Y. L. Chan y C. L. Tien [15] presentaron un estudio numérico en dos dimensiones acerca de la convección natural en cavidades abiertas. A. A. Mohamad y R. Viskanta [16] llevaron a cabo una evaluación comparativa de diferentes sistemas de discretización para fluidos con bajo número de Prandtl en cavidades. Existen distintos estudios acerca de cavidades con diferentes morfologías, total o parcialmente abiertas, como los realizados por E. Bilgen y H. Oztop [17], E. Bilgen y A. Balkaya [18] o E. Bilgen y A. Muftuoglu [19], entre otros. La elección de unas condiciones de contorno adecuadas fue motivo de estudio para K. Khanafer y K. Vafai [20], y S. Anil Lal y C. Reji [21], entre otros. Por otro lado, B. Zamora y A.S. Kaiser [22] estudiaron la influencia de las propiedades termofísicas variables en el interior de una cavidad, llegando conclusiones similares a las que alcanzaron Z. Y. Guo y X. B. Wu [23] en su estudio sobre la influencia de dichas variables en canales verticales; los valores de Nusselt, y de flujo másico que se obtienen son inferiores a los obtenidos tras aplicar la aproximación de Boussinesq. De igual modo que en canales verticales, cuando se tiene un flujo de calor fijo y alcanza un valor crítico, la temperatura de la pared se incrementa drásticamente; se reproduce entonces el mismo fenómeno crítico: el fluido no puede seguir evacuando el flujo de

calor fijo impuesto en la pared y la mayor parte de la masa fluida se calienta fuertemente.

Se pueden encontrar trabajos centrados en el estudio transitorio de flujos convectivos naturales bidimensionales para diferentes geometrías y aplicaciones. Así, H. Bhowmik y K.W. Tou [24] realizaron un estudio de un flujo de convección natural transitoria en el que simulaban un flujo de calor a través de una línea de cuatro microchips electrónicos en un canal vertical. Representando para un rango de flujos de calor una relación entre el número de Nusselt y el número de Fourier. A. Andreozzi, B. Buonomo y O. Manca [25] realizaron un estudio transitorio de un flujo de convección natural en una chimenea con diferentes valores geométricos y con flujo de calor uniforme. En dicho estudio presentan oscilaciones en la temperatura de la pared con máximos y mínimos antes de llegar a la temperatura del estado estacionario y demostrando diferentes valores óptimos en las distintas geometrías dependiendo del número de Rayleigh.

Otro de los estudios realizados para flujo transitorio de convección natural es el realizado por B. Buonomo y O. Manca [26] para aplicaciones de sistemas de microfluidos. Realizan el estudio de un flujo laminar para diferentes números de Knudsen, obteniendo los valores de la temperatura en la pared, flujo másico y número de Nusselt. Se observa que al aumentar el número de Knudsen aumenta tanto la temperatura de la pared como el flujo másico.

Además de estos estudios transitorios bidimensionales podemos encontrar numerosos estudios con geometría en forma de cavidad. A. Baiñi, J.M. García de María y N. Laraqi [27] realizaron un estudio bidimensional en una cavidad cerrada para aplicaciones de Ingeniería como es el caso del enfriamiento y refrigeración de circuitos y componentes electrónicos. Se realiza el estudio del número de Nusselt a lo largo del tiempo para diferentes números de Rayleigh característicos de este tipo de aplicaciones. Estos resultados son comparados con medidas experimentales para validar el modelo. J. Serrano-Arallano, M. Gijón-Rivera, J.M. Riesgo-Ávila, J. Xamán y G. Álvarez [28] realizaron también un estudio transitorio de la transferencia de dióxido de carbono en el aire de un flujo de convección natural con flujo de calor en una cavidad ventilada. Realizan un estudio del número de Nusselt a lo largo del tiempo para diferentes números de Reynolds, llegando a la conclusión de que al disminuir el número de Reynolds aumenta el tiempo en el que se alcanza el estado estacionario.

En cuanto a estudios tridimensionales, B. Zamora y A.S. Kaiser [29] llevan a cabo un estudio sobre la influencia de las propiedades termofísicas variables en el interior de una cavidad extendido a un caso tridimensional para distintas condiciones de calentamiento. En este trabajo también se estudia la influencia de la variación geométrica introduciendo en el interior de la cavidad un muro, éste a su vez puede ser adiabático o isoterma. Cabe destacar también el estudio transitorio tridimensional realizado por J.F. Hinojosa y J. Cervantes-de Gortari [30].

Los anteriores estudios son una muestra de la gran variedad de trabajos sobre convección natural, quedando patente su importancia debido a las diferentes aplicaciones en el ámbito de la Ingeniería.

El presente trabajo parte de las configuraciones analizadas por Zamora y Kaiser (Grupo de investigación de Mecánica de Fluidos del Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos de la Universidad Politécnica de Cartagena). Se analizarán morfologías bidimensionales y tridimensionales, con flujo transitorio y se demostrará la evolución temporal de las variables fluidas de interés. Los objetivos del presente PFC se explicarán en el siguiente apartado de forma más detallada.

## **1.4 Objetivos y alcance del estudio**

En el siguiente trabajo se llevará a cabo una serie de estudios de simulación numérica de los flujos inducidos por convección natural en cavidades tridimensionales parcialmente abiertas, que se puedan aproximar a las configuraciones propias de sistema de climatización pasivos como pueden ser las paredes Trombe o chimeneas solares. En estos casos la simulación tridimensional es importante para estudiar los efectos reales que puedan aparecer en grandes estructuras.

Dichas simulaciones se realizarán sobre todo con condiciones de flujo de calor constante que pueden aproximarse a las condiciones reales de funcionamiento. Los fenómenos de flotación se simularán a través de la aproximación de Boussinesq, que supone constantes las propiedades fluidas, excepto las variaciones de densidad debidas a variaciones de temperatura en el término gravitatorio de la ecuación de cantidad de movimiento.

Las simulaciones de los flujos se llevarán a cabo mediante un código comercial CFD ('Computational Fluids Dynamics'). Concretamente las simulaciones se realizarán a través del código Phoenics, que discretiza las ecuaciones de conservaciones por un procedimiento de volúmenes finitos.

Se comenzará el estudio con simulaciones más sencillas de casos bidimensionales para la validación y comparación de resultados de los estudios tridimensionales posteriores. Se estudiarán los casos tridimensionales para comprobar la influencia de la transmisión de calor en las paredes calientes a través del cálculo del número de Nusselt, calculado con la temperatura máxima en la pared, así como el flujo másico inducido para un amplio rango de valores de Rayleigh ( $10^6 \leq Ra \leq 10^{12}$ ). Debido a que el flujo puede ser turbulento se empleará el modelo de turbulencia  $k-\omega$  para bajos números de Rayleigh. Se realizará además un estudio de la influencia geométrica con la introducción de un muro intermedio en la cavidad.

De forma esquemática, se pretende alcanzar los siguientes objetivos:

- Validar el modelo numérico CFD empleado, a través de la comparación con resultados numéricos anteriores, tomados de la revisión bibliográfica realizada.
- Estudiar y descubrir la evolución transitoria del flujo establecido en cavidades 2D y 3D a la aparición de un calentamiento súbito en ciertos contornos de la configuración elegida, para diferentes valores del número de Rayleigh.
- Analizar la influencia de algunos parámetros de simulación numérica en la convergencia del cálculo en la obtención de los resultados finales tanto transitorios como estacionarios.
- Evaluar si la simulación numérica transitoria puede mitigar o no los problemas de convergencia que aparecieron en las simulaciones fuentes 3D estacionarias de B. Zamora y A.S. Kaiser [29].
- Finalmente mostrar a través de los patrones de flujo la evolución de las variables fluidas de modo que pueda llegarse a una mejor comprensión de este tipo de fluidos convectivos.

## Capítulo 2. Descripción geométrica y definición del problema

### 2.1 Configuraciones y condiciones de calentamiento

Aunque se pretende realizar simulaciones de flujos por convección natural en cavidades que puedan simular aplicaciones reales de sistemas de climatización pasiva (paredes Trombe o chimeneas solares), es necesaria una validación previa con geometrías más sencillas.

Con el fin de validar la validación numérica realizada, se llevarán a cabo simulaciones numéricas del flujo establecido a través de un canal vertical de altura  $H$  y anchura  $b$ . Ésta se considera una configuración básica de referencia. Las paredes se consideran isotermas calientes ( $T=T_w$ ) y el fluido entra frío ( $T=T_\infty$ )

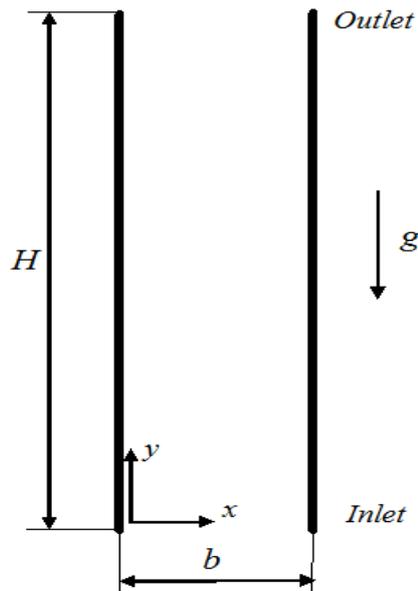


Figura 2-1. Configuración de un canal vertical

Con el fin de validar los resultados tridimensionales y comparar los resultados se realizan estudios de casos bidimensionales con la geometría siguiente.

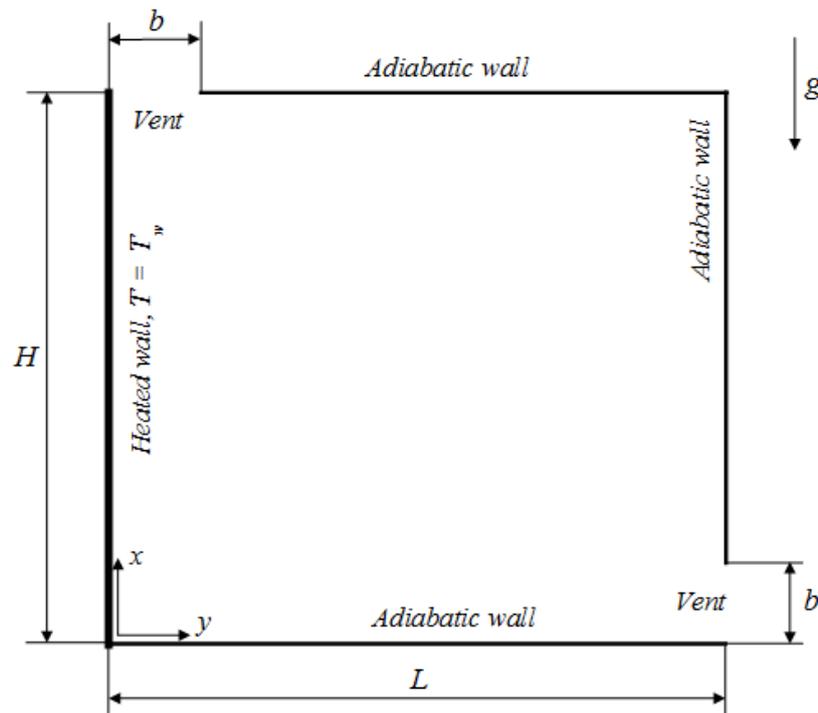
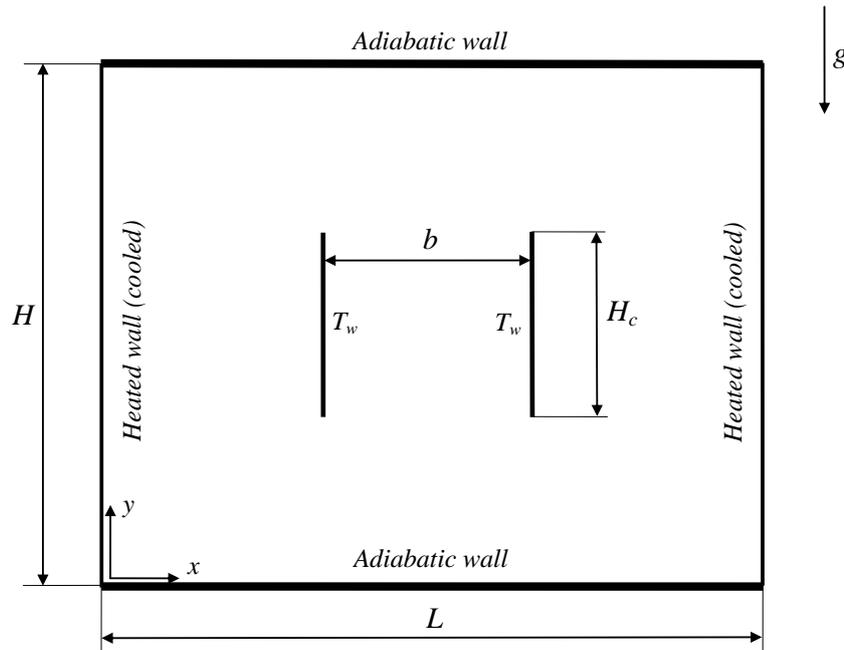


Figura 2-2 Configuración geométrica de cavidad simple bidimensional

La cavidad de la Figura 2.2 tiene una altura  $H$ , y una longitud  $L$ , siendo  $H = L$ . Tanto en la parte inferior de la pared derecha, como en la parte izquierda de la pared superior existen dos aberturas de ventilación de anchura  $b$ , a través de los que puede entrar, o salir el fluido. Dada su particular configuración, es de esperar que la mayor parte del fluido entre al interior de la cavidad por la apertura inferior y salga por la superior.

Tanto la pared inferior, como la superior, así como la pared que se encuentra a la derecha se trata como paredes adiabáticas, de modo que no intercambiarán calor con el sistema. La pared calentada es la izquierda. Se consideran dos condiciones de calentamiento: pared isoterma con temperatura  $T_w$ , y pared caliente con un flujo de calor constante. Estas condiciones de contorno se consideran representativas de casos que puedan simular sistemas pasivos de climatización. La condición de temperatura constante puede simular una situación de calentamiento promediado en el tiempo, con un flujo de calor no constante a través de la pared, mientras que la condición de flujo de calor constante puede simular un calentamiento directo solar, con el que la temperatura en la pared no resulta constante, encontrándose la temperatura máxima en algún punto intermedio de la misma.

El siguiente paso consiste en abordar una geometría 2D más real y próxima a situaciones de interés práctico, que puedan servir de base a geometrías más complejas 3D. La Figura 2-3, está basada en la estudiada por Shyy & Rao [33] y se utilizará en el presente PFC con objeto de validar las simulaciones transitorias 2D.



2-3 Cavidad cerrada bidimensional con canal vertical interior. Configuración propuesta por Shyy & Rao [33]

La cavidad de la Figura 2.3 tiene una altura  $H$  y una longitud  $L$ , en el interior de la cavidad hay un canal de una altura  $H_c$  cuyas paredes están separadas una distancia  $b$ . Tanto la pared inferior como la pared superior se tratan como paredes adiabáticas, de manera que no intercambian calor con el sistema. Las paredes izquierda y derecha son consideradas paredes frías, mientras que las paredes del canal se encuentran a una temperatura caliente  $T_w$ .

Por último, se presentan a continuación las configuraciones 3D. Efectivamente las simulaciones más importantes del presente trabajo se realizan sobre cavidades tridimensionales como las que se presentan a continuación.

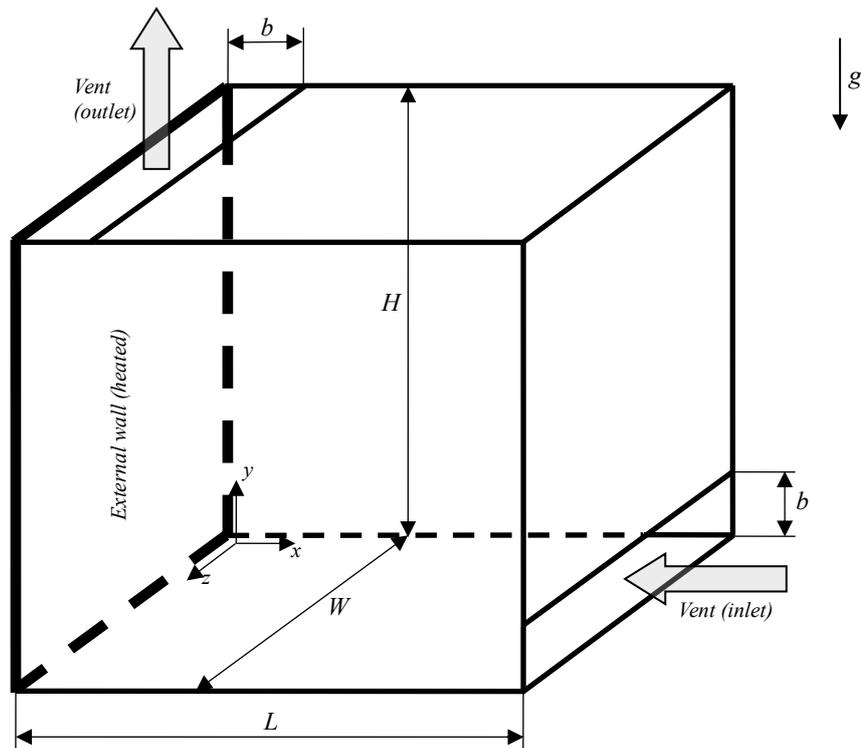


Figura 2 -4 Cavidad tridimensional simple

En la Figura 2.4 se muestra un esquema de la configuración básica en la que se centra el estudio. Se trata de una cavidad tridimensional con una longitud  $L$ , una altura  $H$  y una profundidad  $W$ . En el caso de nuestro estudio  $H=L=W$ , tratándose por tanto de una cavidad cúbica. Tanto en la parte inferior derecha como en la parte superior izquierda se encuentran dos aperturas de anchura  $b$  por las que entrará y saldrá el flujo. La pared situada a la izquierda es la pared en la que incide el flujo de calor constante, mientras que el resto de paredes permanecen adiabáticas.

Para aproximar la configuración que se acaba de describir a ciertos sistemas pasivos de refrigeración y climatización, se han considerado casos con un muro intermedio adiabático, tal como se muestra en la Figura 2.5.

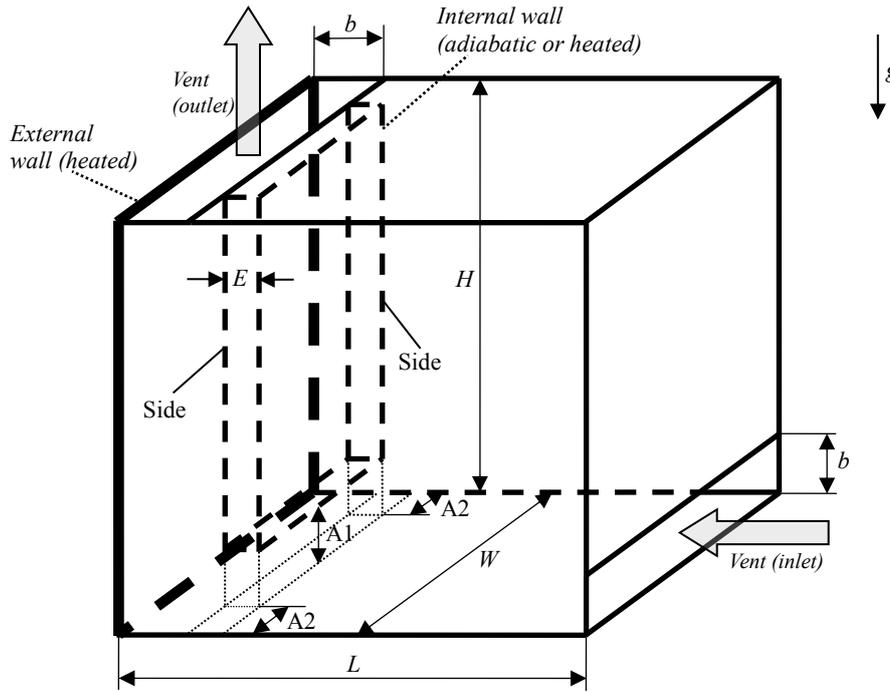


Figura 2-5 Cavidad tridimensional con muro intermedio

El muro intermedio tiene un espesor  $E$ , y está separado del muro exterior a una distancia  $A1$  y  $A2$ . Como se ha indicado, esta configuración es representativa de sistemas de climatización pasiva en edificios, aunque también puede aparecer en algunos dispositivos electrónicos o en los sistemas de enfriamiento pasivo de emergencia en reactores nucleares. La relación de los diferentes parámetros geométricos en nuestro estudio es:  $b/H=0.1$ ,  $E=b/2$ , y  $A1=A2=b$ .

En general, para cualquier simulación, las condiciones ambientales de referencia son las siguientes:  $P_\infty = 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $T_\infty = 293 \text{ K}$ ,  $\nu_\infty = 1,544 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\kappa_\infty = 0,02598 \text{ W/mK}$ . El número del Prandtl del fluido será por tanto  $Pr_\infty = \mu_\infty C_{p_\infty} / \kappa_\infty = 0,71$ , se supone que la temperatura exterior del fluido es la temperatura fría de referencia  $T = T_\infty$ .

## 2.2 Parámetros adimensionales relevantes

### 2.2.1 Parámetros relevantes para condición isoterma

El estudio de la eficiencia del proceso de transferencia de calor, en el presente trabajo se lleva a cabo a través del cálculo del número de Nusselt. El número de Nusselt es un parámetro adimensional que representa la relación entre la transferencia de calor por convección llevada a cabo en un sistema dado y la transferencia de calor por conducción pura que podría realizarse en el mismo sistema.

Para el caso en el que tenemos la pared a temperatura constante el número de Rayleigh se define como  $Ra_H = (Gr_H)(Pr_\infty)$ , siendo  $Gr_H$  el número de Grashof. Este último número puede interpretarse como una relación entre las fuerzas de flotación que inducen el movimiento y las fuerzas viscosas que se oponen al mismo:

$$Gr_H = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)H^3}{\nu_\infty^2}, \quad (2.1)$$

y  $Pr_\infty$  es el número de Prandtl, que destaca por ser uno de los pocos números adimensionales que no dependen del flujo, sino del fluido; se puede interpretar como una cierta relación entre la capacidad de difusión del fluido por viscosidad y la difusión del mismo por conducción térmica ( $Pr = \mu_\infty c_{p,\infty} / \kappa_\infty$ ), en el caso de ser aire,  $Pr_\infty = 0,71$ . Por otro lado,  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica, que en el caso de suponer el aire como un gas perfecto será  $\beta = 1/T_\infty$ . Para esta condición de calentamiento (pared isoterma) el parámetro de calentamiento  $\Lambda$  se define como:

$$\Lambda = \frac{(T_w - T_\infty)}{T_\infty}, \quad (2.2)$$

donde  $T_\infty$  es la temperatura ambiente (temperatura fría de referencia).

### 2.2.2. Parámetros relevantes para la condición de flujo de calor

Para la condición de calentamiento de flujo de calor constante en la pared, se puede demostrar que el parámetro de calentamiento puede aproximarse como  $\frac{T_w - T_\infty}{T_w} \approx \frac{q \cdot l}{k_\infty \cdot T_w}$ , siendo  $l$  una longitud característica. Es preciso discutir la elección de la longitud característica  $l$ , si  $l$  es igual a  $H$  (es decir, la longitud característica en dirección vertical), entonces el flujo de calor  $q$  no está relacionado con la longitud característica en la que se produce un gradiente térmico entre la pared y el fluido. Por esta razón parece apropiado usar el espesor de la capa límite térmica  $\delta_T$  como longitud característica  $l$ , y el parámetro de calentamiento se puede asumir como  $\Lambda = \frac{q \delta_T}{k_\infty T_\infty}$ , para condición de calentamiento de flujo de calor constante en la pared.

Siguiendo el análisis propuesto por Bejan [27] se puede escribir de la ecuación de continuidad que  $(U_x/H) \approx (U_y/\delta_T)$ , y de la ecuación de la energía,

$$U_x \frac{T_w - T_\infty}{H} = \alpha_\infty \frac{T_w - T_\infty}{\delta_T^2}, \quad (2.3)$$

que describe el equilibrio entre convección y convección transversal. Para la ecuación del momento en  $x$ ,

$$U_x^2 \approx \nu_\infty \frac{U_x}{\delta_T^2} \approx g\beta(T_w - T_\infty) \quad (2.4)$$

que expresa un equilibrio entre inercia, viscosidad y fuerzas de flotación. Combinando las expresiones de arriba,

$$\frac{\delta_T}{H} \approx \frac{g\beta(T_w - T_\infty)H^3}{\nu_\infty^2} Pr_\infty^a \approx \left( \frac{g\beta q H^4}{\nu_\infty^2 k_\infty} Pr_\infty^a \right)^{-1/5} \quad (2.5)$$

siendo  $a$  igual a 1 si los efectos de flotación se equilibran principalmente con las fuerzas viscosas, e igual a 2 si éstos se equilibran sobretodo con las fuerzas de inercia. Por lo tanto, para fluidos con  $Pr_\infty \approx 1$ , el valor de  $a$  no es relevante, y por lo tanto  $(\delta_T/H)$  puede ser escrito en función de  $Ra_H$ ,  $\frac{\delta_T}{H} \approx Ra^{-1/5}$ .

### 2.2.3. Definición del número de Nusselt

El número de Nusselt en el caso en el que la condición de calentamiento es la de pared isoterma se calcula como:

$$\text{Nu}_H = \frac{1}{H} \int_0^H \text{Nu}_x dx, \quad (2.6)$$

donde  $\text{Nu}_x = h_x H / k_\infty$ , siendo  $h_x$  el coeficiente local de transferencia de calor, y  $H$  la altura de la pared.

En el caso de flujo de calor constante, el número de Nusselt se calcula como:

$$\text{Nu}_H = \frac{qH}{k_\infty (T_{w,max} - T_\infty)}, \quad (2.7)$$

donde  $T_{w,max}$  es la temperatura máxima en algún punto de la pared. En este punto, conviene discutir la elección de  $T_{w,max}$  como temperatura representativa para calcular  $\text{Nu}_H$ . Podría pensarse que la temperatura significativa tendría que ser una temperatura promediada a lo largo de la pared, pero esta elección amortiguaría, por ejemplo el efecto de la presencia de picos indeseables de temperatura. Otra posible elección sería la temperatura al final (punto superior) de la pared, pero se puede comprobar que no existe una correlación directa entre  $T_{x=L}$  y  $T_{w,max}$  en todos los casos para diferentes  $\text{Ra}_H$ . Por tanto, se elige  $T_{w,max}$ , puesto que de alguna manera lleva a analizar de forma más fiable la eficiencia del proceso de transmisión de calor entre el fluido y la pared.

#### 2.2.4. Flujo másico inducido

Por otro lado también se va a determinar el flujo másico de aire inducido en la cavidad. El flujo másico adimensional se define en los casos bidimensionales como:

$$M = \frac{m}{\rho_\infty \alpha_\infty}, \quad (2.8)$$

donde  $m$  es el valor del flujo másico bidimensional  $\text{kg/s}\cdot\text{m}$ , y  $\alpha_\infty$  es la difusividad térmica del ambiente ( $\alpha_\infty = k_\infty / \rho_\infty c_{p,\infty}$ ).

En el caso de los casos tridimensionales el flujo másico se define como:

$$M = \frac{m}{\rho_\infty \alpha_\infty W}, \quad (2.9)$$

donde en este caso  $m$  es el flujo másico tridimensional  $\text{kg/s}$  y  $W$  es la anchura de la cavidad.

Para la adimensionalización del tiempo partimos de la ecuación de la euna forma simplificada de la ecuación turbulenta promediada de la energía.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\delta x_j} (\rho C_p T U_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho C_p \overline{T' u_j}), \quad (2.10)$$

en la que los términos inercial y convectivo (izquierda de la ecuación) se equilibran con los términos de difusión y turbulento (derecha de la ecuación).

## Capítulo 2. Descripción geométrica y definición del problema

La adimensionalización del tiempo se realiza a través del número de Fourier, conceptualmente dicho número representa la relación entre la velocidad de conducción de calor y la velocidad del almacenamiento de energía.

Tomando unas magnitudes características  $U_0$ ,  $t_0$ ,  $\Delta T$ , y  $l$ , respectivamente para la velocidad, el tiempo, salto térmico y longitud, pueden estimarse las órdenes de magnitud de cada uno de los términos de la ecuación anterior.

$$\rho C_p \frac{\Delta T}{t_0} \sim \rho C_p \frac{\Delta T U_0}{l} \sim k \frac{\Delta T}{l^2} \sim \rho C_p \frac{\Delta T u_0'}{l} \quad (2.11)$$

Se compararán a continuación los términos inercial y de difusión (conducción pura) térmica,

$$\frac{kT/l^2}{\rho C_p T/t_0} = \frac{t_0 k/\rho C_p}{l^2} = \frac{t_0 \alpha}{L^2}, \quad (2.12)$$

de modo que el número adimensional resultante se denomina en ocasiones en la bibliografía como el número de Fourier,  $Fo$ .

$$Fo = \frac{t_0 \alpha}{L^2}, \quad (2.13)$$

denotándose en otras ocasiones simplemente por  $\tau$ . En este trabajo se seguirá la adimensionalización propuesta para el tiempo  $t$ . Como se ha visto,  $Fo$  representa la relación entre los términos inercial (temporal) y de difusión (conducción pura de calor) de la ecuación de la energía. Puede interpretarse entonces como una cierta relación entre la velocidad o el ritmo de difusión de calor por conducción y la velocidad de almacenamiento o cesión temporal de energía térmica.

# Capítulo 3. Modelización matemática

## 3.1 Ecuaciones generales de Mecánica de Fluidos

En este capítulo se describirán las ecuaciones generales de la Mecánica de Fluidos. En estas ecuaciones de conservación están basados los códigos de CFD con los que se desarrollan el presente trabajo. Un código CFD resuelve numéricamente una forma discretizada y simplificada de las ecuaciones generales de conservación.

### 3.1.1 Principio de conservación de la masa. Ecuación de continuidad

El principio de conservación de la masa sostiene que la masa total de un sistema cerrado (aquel que no intercambia masa con su entorno) que no contiene fuentes ni sumideros permanece constante en el tiempo, es decir:

$$\frac{dM}{dt} = 0. \quad (3.1)$$

Si se aplica este concepto a un volumen fluido, un volumen que puede cambiar su forma y posición, pero que está siempre formado por el mismo número de partículas, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho(\vec{x}, \vec{t}) = 0. \quad (3.2)$$

Siguiendo la descripción Euleriana del campo fluido resulta más conveniente aplicar este principio a un volumen de control, y no a un volumen fluido. Un volumen de control es una región artificial del campo fluido que en un determinado instante del tiempo coincide con el volumen fluido. Para aplicar este principio en un volumen de control utilizaremos el teorema de transporte o arrastre de Reynolds, que relaciona la variación temporal de una magnitud fluida extensiva cualquiera  $\Phi(x, t)$  en un volumen fluido  $V_f(t)$  con la respectiva variación en un volumen de control  $V_c(t)$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \phi(\vec{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \phi(\vec{x}, t) dV + \frac{d}{dt} \int_{S_c(t)} \phi(\vec{x}, t) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS, \quad (3.3)$$

donde el primer término establece la variación temporal de la magnitud fluida  $\Phi(\vec{x}, t)$  en el volumen

fluido  $V_f(t)$ , el segundo término establece la variación temporal de la magnitud fluida  $\Phi(\vec{x}, t)$  en el volumen de control  $V_c(t)$ , y el tercer término establece el flujo convectivo de la magnitud fluida  $\Phi(\vec{x}, t)$  a través de la superficie de control  $S_c(t)$  que limita el volumen y se mueve con velocidad  $v_c$ .

Aplicando este teorema al principio de conservación de la masa se obtiene la Ecuación de conservación de la masa de forma integral, tradicionalmente llamada Ecuación de continuidad:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho(\vec{x}, t) dV + \frac{d}{dt} \int_{S_c(t)} \rho(\vec{x}, t) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0. \quad (3.4)$$

La ecuación anterior considera un volumen de control con una velocidad  $v_c(t)$  con lo que hablamos de la forma no conservativa de la ecuación de continuidad. Si por el contrario referimos la ecuación a un volumen de control fijo  $V_o$ , hablamos de la forma conservativa de la ecuación de continuidad:

$$\int_{V_o} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_o} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0. \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho dV + \int_{S_c(t)} \rho(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (3.6)$$

Haciendo uso del teorema de Gauss-Ostrogradski:

$$\int_{S_o} \rho(\vec{v}\vec{n}) dS = \int_{V_o} \nabla(\rho\vec{v}) dV, \quad (3.7)$$

la Ecuación (3.4) queda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0, \quad (3.8)$$

que puede desarrollarse vectorialmente, y aplicando el operador derivada sustancial queda como:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \quad (3.9)$$

### 3.1.2 Principio de conservación de la cantidad de movimiento. Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton establece que la aplicación de fuerzas sobre un sistema mecánico produce una variación en la cantidad de movimiento del sistema:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}. \quad (3.10)$$

En el caso de un fluido las fuerzas que producen variación en la cantidad de movimiento pueden ser de origen superficial o volumétrico.

Las fuerzas superficiales dependen de la posición, del instante de tiempo y de la orientación del

elemento de superficie sobre el cual actúan. La resultante de las fuerzas de superficie se calcula sumando las fuerzas elementales sobre cada área diferencial. Dicha fuerza elemental se obtiene a partir de una fuerza por unidad de superficie mediante:

$$F_S = \int_S dF_S = \int_S f_s(\vec{n}, \vec{x}, t). \quad (3.11)$$

El tensor de esfuerzos es simétrico, por lo que sólo tiene seis componentes independientes, siendo representable mediante una matriz 3x3 del tipo:

$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

El tensor de esfuerzos se puede descomponer en otros dos, un tensor de esfuerzos estático debido a la presión, y un tensor de esfuerzos dinámico debido a los esfuerzos viscosos:

$$\bar{\tau} = -pI + \bar{\tau}' = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau'_{xx} & \tau'_{yx} & \tau'_{zx} \\ \tau'_{xy} & \tau'_{yy} & \tau'_{zy} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \tau'_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Por otro lado, el esfuerzo cortante es proporcional al gradiente de velocidades multiplicado por la viscosidad  $\mu$ . Con esta ley, los elementos del tensor de esfuerzos viscosos quedan:

$$\tau' = \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (3.14)$$

A partir de las ecuaciones (3.12) y (3.13) se obtiene la expresión matemática de las fuerzas superficiales  $\vec{f}_S$ :

$$\vec{f}_S = \vec{f}_S(\vec{n}, \vec{x}, t) = \bar{\tau}\vec{n} = -p\vec{n} + \bar{\tau}'\vec{n}. \quad (3.15)$$

Por su parte las fuerzas volumétricas  $f_v$ , dependen de la posición y del instante de tiempo, pero no de la orientación del elemento sobre el que actúan ya que a diferencia de las fuerzas de superficie, las volumétricas actúan sobre todo el volumen fluido.

A su vez el origen de estas fuerzas puede ser:

1. *Gravitatorio*: Entre las fuerzas másicas gravitatorias se despreciarás las fuerzas de atracción entre partículas o porciones de fluido y solo se tendrá en cuenta la gravitatoria terrestre:

$$f_v = \rho f_m = \rho g. \quad (3.16)$$

2. *Inerciales*: Si se utiliza un sistema de referencia no inercial, hay que considerar las fuerzas de inercia que aparecen.

3. *Electromagnéticas*: Pueden aparecer en fluidos cargados eléctricamente o líquidos metálicos.

A partir de estas aclaraciones, y aplicando el teorema de transporte de Reynolds se obtiene la forma integral de la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \vec{v} dV + \int_{S_c(t)} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \int_{S_f(t)} -p \vec{n} dS + \int_{S_f(t)} \bar{\tau} \vec{n} dS + \int_{V_f(t)} \rho f_m dV. \quad (3.17)$$

Si referimos la Ecuación (3.17) a un volumen de control fijo y aplicamos el teorema de Gauss entonces obtendremos la ecuación de cantidad de movimiento en forma diferencial:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla(\vec{v}\vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}_m \quad (3.18)$$

### 3.1.3 Principio de conservación de la energía. Primer principio de la termodinámica

El primer principio de la termodinámica sostiene que la variación temporal de energía total de un sistema termodinámico es debida al trabajo realizado por unidad de tiempo por las fuerzas externas más el calor recibido del exterior:

$$\frac{d}{dt} E = Q + W. \quad (3.19)$$

El calor sobre un fluido puede intercambiarse mediante conducción a través de la superficie, por radiación ( $Q_r$ ), mediante ondas electromagnéticas, y por generación interna mediante una reacción química ( $Q_q$ ). Por otro lado, el trabajo se debe a las fuerzas externas que actúan sobre el fluido, como pueden ser la presión  $P$ , los esfuerzos viscosos  $\tau$ , y las fuerzas másicas  $f_m$ .

La variación de energía total que experimenta un volumen fluido viene determinada por la variación de energía interna y la variación de energía cinética:

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho \left( u + \frac{U^2}{2} \right) dV. \quad (3.20)$$

Recogiendo estos términos y aplicando el teorema del transporte de Reynolds se obtiene la forma integral de la ecuación de la energía:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho \left( u + \frac{U^2}{2} \right) dV + \int_{S_f(t)} \rho \left( u + \frac{U^2}{2} \right) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS \\ &= \int_{S_f(t)} -p \vec{n} \vec{v} dS + \int_{S_f(t)} \bar{\tau} \vec{n} \vec{v} dS + \int_{V_f(t)} \rho f_m \vec{v} dV - \int_{S_f(t)} \vec{q} \vec{n} dS \\ &+ \int_{V_c(t)} (Q_r + Q_q) dV. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Si la Ecuación (3.21) se refiere a un volumen de control fijo y aplicamos el teorema de Gauss obtendremos la forma diferencial de la ecuación de la energía:

$$\frac{\partial[\rho(u + \frac{U^2}{2})]}{\partial t} + \nabla \left[ \rho \left( u + \frac{U^2}{2} \right) \right] = -\nabla(p\vec{v}) + \nabla(\vec{\tau}'\vec{v}) - \nabla\vec{q} + \rho\vec{f}_m \cdot \vec{v} + Q_r + Q_q \quad (3.22)$$

Incluyendo la función de disipación de Rayleigh (densidad de potencia producida por los esfuerzos viscosos al deformar la partícula fluida),  $\Phi_v = \tau'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij}$  y aplicando el operador derivada sustancial se obtiene la expresión más común para la ecuación de la energía:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \left[ \frac{\partial e}{\partial t} + \vec{v}\nabla e \right] = \Phi_v + k\Delta T + Q_r \quad (3.23)$$

### 3.1.4 Sistemas de ecuaciones de Navier Stokes

El conjunto de ecuaciones que se han obtenido en los apartados anteriores forman un sistema de tres ecuaciones denominado sistema de Navier-Stokes:

- *Ecuación de continuidad:*

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}). \quad (3.24)$$

- *Ecuación de cantidad de movimiento:*

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla(\vec{v}\vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}_m \quad (3.25)$$

- *Ecuación de la energía:*

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \left[ \frac{\partial e}{\partial t} + \vec{v}\nabla e \right] = \Phi_v + k\Delta T + Q_r \quad (3.26)$$

Tanto la ecuación de continuidad (3.24) como la de energía (3.26) son ecuaciones escalares, mientras que la ecuación de cantidad de movimiento (3.26) es vectorial. Las ecuaciones de Navier-Stokes forman un sistema cerrado que permite determinar los valores de todas las magnitudes fluidas. Estas variables son el campo de velocidades ( $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ ), el campo de presiones ( $p = p(\vec{x}, t)$ ), el campo de densidades ( $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ ) y el campo de temperaturas ( $T = T(\vec{x}, t)$ ). Si fuera necesario conocer otras variables, pueden determinarse mediante las relaciones termodinámicas oportunas. O bien, resolver directamente el problema para esas variables tomando otras ecuaciones de estado que las incluyan.

Este sistema de ecuaciones presenta tal complejidad en su formulación matemática que, a pesar del enorme desarrollo de los métodos de resolución de sistema de ecuaciones diferenciales, actualmente resulta imposible abordar la resolución de la gran mayoría de los problemas planteados por la

Mecánica de Fluidos sin recurrir a numerosas hipótesis simplificadoras. Tal es la complejidad matemática que, a día de hoy, ni siquiera se ha podido demostrar teóricamente la existencia y unicidad de soluciones para cualquier flujo. Salvo para casos muy sencillos en régimen estacionario, y flujo laminar. Dada tal complejidad, los programas de análisis numérico CFD se convierten en una potente herramienta para resolver este tipo de problemas.

### 3.2 Flujos con convección natural. Aproximación de Boussinesq

En los flujos con convección natural el movimiento se induce por una fuerza másica gravitatoria debida a las diferencias de densidad motivadas por gradientes de temperatura en el seno del fluido. Se necesita por tanto de un calentamiento diferencial del fluido que puede proceder por ejemplo de la presencia de una pared caliente. La fuerza másica inducida se llama “fuerza de flotación” (“bouyancy force” en inglés) pudiéndose expresar como:

$$F_{\text{flotación}} = (\rho_{\infty} - \rho)g_i. \quad (3.27)$$

Para flujos que satisfagan ciertas condiciones, Boussinesq propuso que pueden despreciarse las variaciones de densidad en el fluido excepto en el término gravitatorio de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en dirección vertical, en el que la densidad aparece multiplicada por la aceleración de la gravedad  $g$ . Esta aproximación supone además constantes otras propiedades del fluido como la viscosidad dinámica, la conductividad y el calor específico.

En general, para cualquier fluido, la aplicación de la aproximación de Boussinesq lleva a simplificar la variación de la densidad, poniéndose éste únicamente en función del gradiente térmico:

$$\rho = \rho_{\infty} \cdot [1 - \beta(T - T_{\infty})] \quad (3.28)$$

siendo  $\beta$  el coeficiente de expansión térmica,

$$\beta \equiv -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p. \quad (3.29)$$

En la mayor parte de los líquidos, el coeficiente de expansión térmica es positivo, y su valor es aproximadamente constante para grandes intervalos de temperatura. Para los gases a presiones moderadas, puede suponerse comportamiento de gas perfecto, por lo que se toma  $\beta = 1/T_{\infty}$ .

Para llegar a la Ecuación 3.29, es preciso establecer un estado de referencia ( $\infty$ ) en el que la distribución de presiones es la correspondiente a la fluidostática  $dp/dx = \rho_{\infty}g$  (donde  $x$  es la coordenada vertical), y despreciando el término correspondiente a la potencia de disipación viscosa debida a incrementos de temperatura en la ecuación de la energía, las ecuaciones de conservación pueden ponerse finalmente de la forma siguiente, que por simplicidad desarrollamos para un caso bidimensional:

*Ecuación de conservación de la masa*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (3.30)$$

*Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento*

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial(P - P_\infty)}{\partial x_i} + \beta(T - T_\infty)\rho_\infty + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i u_j} \right), \quad (3.31)$$

Ecuación de conservación de la energía

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho C_p T U_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} - \rho C_p \overline{T' U_j'} \right). \quad (3.32)$$

### 3.3 Modelización de flujo turbulento

No existe una definición clara de flujo turbulento, éste tipo de flujo se define por las características que presenta, tales como su aparición a altos números de Reynolds, aumento en el intercambio de las propiedades fluidas, la tridimensionalidad, etc. Como uno de los objetivos del presente estudio es analizar los flujos convectivos para amplios rangos de número de Rayleigh, es conveniente incluir un análisis del flujo turbulento.

#### 3.3.1 Ecuaciones generales de Reynolds del flujo turbulento

Las técnicas de promediado se pueden aplicar a las ecuaciones generales de Navier-Stokes para generar unas ecuaciones de los valores medios, que llamaremos de Reynolds.

La velocidad y las demás variables en cada punto de un flujo turbulento son aleatorias, no son periódicas ni repetitivas. Pero si las condiciones de contorno son estacionarias, se puede esperar que el valor medio también lo sea. El valor instantáneo de cualquier variable se puede descomponer en el valor medio y la fluctuación respecto a él:

$$\phi(\vec{x}, t) = \bar{\phi}(\vec{x}, t) + \phi'(\vec{x}, t). \quad (3.33)$$

Al promediar la expresión anterior se obtiene naturalmente que la fluctuación tiene promedio nulo  $\phi' = 0$ . Ya se han introducido anteriormente las ecuaciones de Navier-Stokes. Descomponemos las variables en los valores medios y fluctuaciones turbulentas.

$$\begin{aligned} v &= U + u' \\ p &= p + p' \\ T &= T + T' \end{aligned} \quad (3.34)$$

A continuación, se promedia el conjunto de la ecuación, manteniéndose los términos donde aparecen las fluctuaciones multiplicadas por otras fluctuaciones, ya que el promedio del producto de una variable ya promediada por una variable que fluctúa se anula.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{U} + \vec{u}') &= 0 \rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{u}' = 0 \end{cases} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{U}) + \nabla (\bar{U}\bar{U} + \overline{\vec{u}'\vec{u}'}) &= -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \Delta \bar{U} + f_m \\ \rho c \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{U} \nabla \bar{T} + \overline{\vec{u}' \nabla T'} \right] &= k \Delta \bar{T} + \phi_{\bar{U}} + \phi_{\vec{u}'} + Q_r \end{aligned} \quad (3.35)$$

En las ecuaciones anteriores la función de disipación se ha descompuesto en dos. La primera debida

a los gradientes de la velocidad media y la segunda a los gradientes de fluctuaciones.

$$\phi_{\bar{u}} = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 \text{ y } \phi_{\bar{u}'} = \overline{\mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad (3.36)$$

La forma usual de escribir estas ecuaciones del movimiento medio turbulento es pasar las correlaciones de las fluctuaciones a los segundos términos y quitar por sobreentendida la raya de promediado en la presión y la temperatura, quedando en la forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{U} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{U}) + \nabla (\vec{U}\vec{U}) &= -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \Delta \vec{U} - \nabla \overline{\vec{u}'\vec{u}'} + f_m \\ \rho c \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \vec{U} \nabla T \right] &= k \Delta T + \phi_{\bar{u}} + \phi_{\bar{u}'} - \rho c \overline{\vec{u}' \nabla T'} + Q_r \end{aligned} \quad (3.37)$$

Tenemos así un sistema de cinco ecuaciones y ocho incógnitas  $\vec{U}$ ,  $p$  y  $T$ , el tensor de esfuerzos aparente de Reynolds ( $-\overline{\vec{u}'\vec{u}'}$ ), el vector transporte turbulento de calor ( $-\overline{\vec{u}'T'}$ ) y la disipación viscosa por fluctuaciones turbulentas ( $\phi_{\bar{u}'} = \overline{\mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2}$ ).

Al tener el flujo turbulento más incógnitas que ecuaciones, las ecuaciones de Reynolds no se pueden resolver por sí mismas, planteándose lo que se conoce como el problema de cierre de la turbulencia.

Las teorías más clásicas para el cierre de la ecuación de cantidad de movimiento son las siguientes:

- *Concepto de viscosidad turbulenta de Boussinesq*

Para tratar de cerrar las ecuaciones de Reynolds, Boussinesq propuso expresar los esfuerzos turbulentos de modo análogo a los viscosos mediante una cierta viscosidad turbulenta o de remolinos turbulentos (aunque se le denominará simplemente por viscosidad turbulenta) en la forma:

$$\tau'_{ij} = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.38)$$

En general  $\mu_t$  no es uniforme para todo el campo fluido, por lo que posteriormente se ha introducido la siguiente expresión para la viscosidad turbulenta:

$$\mu_t = C \rho U_m l_m, \quad (3.39)$$

donde  $C$  es una constante que depende del tipo de flujo y  $U_m$  y  $l_m$  son los valores característicos de la escala turbulenta

- *Longitud o camino de mezcla de Prandtl*

La longitud o camino de mezcla de Prandtl es definida como el recorrido medio que hacen las

partículas del flujo cuando transportan una determinada cantidad (de movimiento, energía térmica,...). Así la velocidad característica o de agitación sería:

$$U_m \approx C' l_m \left| \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right|, \quad (3.40)$$

siendo  $l_m$  la longitud de mezcla, de modo que

$$-\overline{\rho v'_i v'_j} = \rho l_m \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left| \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right|. \quad (3.41)$$

- *Hipótesis de semejanza de von Kármán*

Esta hipótesis es establecida a partir de la idea de la invarianza local (en todos los puntos del flujo turbulento el mecanismo de la turbulencia es el mismo y sólo se caracteriza por las escalas de longitud y tiempo). De este modo la longitud de mezcla deberá ser función de los gradientes locales del campo de velocidades

$$l_m = l_m \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \right). \quad (3.42)$$

Por análisis dimensional deberá cumplirse

$$l_m = k \frac{\partial U_j / \partial x_j}{\partial^2 U_j / \partial x_j^2}, \quad (3.43)$$

donde  $k = 0,41$  es una constante universal obtenida experimentalmente que se denomina constante de von Kármán.

### 3.3.2. Modelos de ecuaciones promediadas de Navier-Stokes (RANS)

Los métodos RANS facilitan la resolución del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes. A continuación se van a describir dos de los métodos de dos ecuaciones los cuales emplean dos ecuaciones de transporte, estos modelos son el modelo  $k - \varepsilon$  estándar, y el modelo  $k - \omega$ . Siendo el modelo  $k - \omega$  el empleado en el presente trabajo.

#### Modelo $k - \varepsilon$ estándar

Este modelo supuso la implantación de la CFD en múltiples aplicaciones de ingeniería en las que los flujos debían ser considerados turbulentos. Su robustez, economía y precisión razonable para un amplio rango de flujos turbulentos explica su popularidad en simulaciones industriales de flujos y transmisión de calor. Es un modelo semiempírico, y el desarrollo de las ecuaciones se basa en consideraciones fenomenológicas.

En el modelo  $k - \varepsilon$  estándar, la ecuación para  $k$  se desarrolla a partir de una ecuación de transporte en la que se establece la conservación exacta de la propia  $k$ , mientras que la ecuación para  $\varepsilon$  se obtiene a partir de razonamientos físicos, ofreciendo poca semejanza respecto de su desarrollo

matemático exacto. En el desarrollo de este método se hizo la suposición de flujo totalmente turbulento y de viscosidad molecular despreciable. Así pues, el modelo  $k - \varepsilon$  es válido para flujos completamente turbulentos.

En este modelo se introduce el concepto de energía cinética turbulenta. Se supone que la energía cinética total instantánea es:

$$E_c(t) = E_c + e_c \quad (3.44)$$

siendo  $E_c$  la energía cinética correspondiente al movimiento medio,

$$E_c = \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2) \quad (3.45)$$

y la  $e_c$  la correspondiente al movimiento fluctuante,

$$e_c = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2) \quad (3.46)$$

De esta manera, si cada una de las ecuaciones promediadas de Reynolds se multiplica por la correspondiente componente de la velocidad media (por ejemplo, la componente  $X$  por  $U$ ), se puede llegar a la ecuación de la energía cinética para el movimiento medio. Siguiendo un procedimiento parecido, trabajando con las ecuaciones de Navier-Stokes y de Reynolds, y operando, se llega a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k \vec{u}) \\ &= \nabla \cdot \left( -p \vec{u}' + 2\mu \overline{\vec{u}' S'_{ij}} - \rho \frac{1}{2} \overline{u'_i \cdot u'_i u'_j} \right) - 2\mu \overline{S'_{ij} S'_{ij}} + \rho \overline{u'_i u'_j \cdot S'_{ij}}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

siendo  $S_{ij}$  el tensor de deformación de flujo turbulento medio, y  $S'_{ij}$  el correspondiente a la agitación turbulenta, dados respectivamente por:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), S'_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.48)$$

En la ecuación (3.29) los términos del miembro de la derecha representan respectivamente la variación temporal y la variación convectiva de la energía cinética turbulenta  $k$ . En el miembro de la derecha, dentro del término de divergencia, tenemos los transportes de  $k$  por efectos de presión, por efectos viscosos y por esfuerzos de Reynolds respectivamente; el siguiente término representa el ritmo de disipación de  $k$  y el último término su producción turbulenta con lo que el ritmo de disipación  $k$  entonces es:

$$k = -2\mu \overline{S'_{ij} S'_{ij}}. \quad (3.49)$$

Para cuantificar la destrucción o disipación de energía cinética turbulenta, puede ponerse el ritmo de disipación de energía cinética turbulenta  $\varepsilon$  como:

$$\varepsilon = -2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}}. \quad (3.50)$$

De esta manera, parece apropiado presentar un modelo de dos ecuaciones para  $k$  y para  $\varepsilon$ , siendo las escalas grandes del flujo turbulento:

$$U_m = k^{1/2}, l_m = k^{3/2} / \varepsilon. \quad (3.51)$$

y la viscosidad turbulenta (se aplica la misma aproximación que en el modelo de longitud de mezcla de Prandlt)

$$\mu_t = C_\mu U_m l_m = \rho C_\mu k^2 / \mu. \quad (3.52)$$

donde  $C_\mu$  es una constante adimensional. Así pues, el modelo  $k - \varepsilon$  está basado en el concepto de viscosidad turbulenta, turbillionaria o de remolino. Por tanto, en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, debe sustituirse la viscosidad  $\mu$  por una efectiva que cumple:

$$\mu_{ef} = \mu + \mu_t. \quad (3.53)$$

Las ecuaciones del modelo  $k - \varepsilon$  estándar pueden ponerse como sigue:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k \vec{U}) = \nabla \cdot \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \varepsilon, \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \vec{U}) = \nabla \cdot \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (3.55)$$

siendo  $C_\mu$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{1\varepsilon}$ , y  $C_{2\varepsilon}$  constantes adimensionales que deben ajustarse de forma experimental.

Las Ecuaciones 3.54 y 3.55 pueden ponerse de forma simplificada por

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\Gamma_k}{\rho} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \frac{G_k}{\rho} - \rho \varepsilon, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\Gamma_\varepsilon}{\rho} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{G_k}{\rho k} \varepsilon - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (3.57)$$

donde  $G_k$  es la generación de energía interna turbulenta debida a los gradientes de velocidad media,  $G_k = \Gamma_k$  y  $\Gamma_\varepsilon$  vienen dadas por:

$$\frac{\Gamma_k}{\rho} = \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}, \quad (3.58)$$

$$\frac{\Gamma_\varepsilon}{\rho} = \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}, \quad (3.59)$$

Siendo  $C_\mu$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{1\varepsilon}$ , y  $C_{2\varepsilon}$  las constantes experimentales del modelo, dadas por:

$$C_\mu = 0,09; \sigma_k = 1; \sigma_\varepsilon = 1,3; C_{1\varepsilon} = 1,44; \text{ y } C_{2\varepsilon} = 1,92, \text{ y cumpliéndose que } \nu_t = C_\mu (k^2 / \varepsilon).$$

En condiciones de turbulencia desarrollada y homogénea (las asumidas para la derivación del modelo  $k-\varepsilon$ ), se introducen leyes de pared logarítmicas para los perfiles de velocidad y temperatura

cerca de las paredes, de forma que el flujo no se resuelve en estas zonas. Cuando el número de Reynolds local no es lo suficientemente elevado, la forma estándar del modelo  $k - \varepsilon$  se modifica para resolver con mayor precisión el flujo junto a las paredes.

### Modelo $k - \omega$

A continuación se va a presentar el modelo  $k - \omega$ , que será el modelo que se utilizará en la modelización numérica de este proyecto debido a que se obtienen resultados más precisos para valores bajos de Reynolds.

Este modelo, propuesto inicialmente por Kolmogorov presenta ecuaciones para la energía cinética turbulenta  $k$ , y para su ritmo de disipación específico,  $\omega$ .

El modelo  $k - \omega$ , propuesto por Wilcox, incluye una extensión para la simulación de la turbulencia junto a la pared (modelo para bajos números de Reynolds). El modelo presenta varias ventajas respecto de otros modelos de turbulencia para bajos números de Reynolds. Por ejemplo, puede decirse que es computacionalmente estable y convergente. No necesita del cálculo de distancias a las paredes, por lo que resulta menos costoso computacionalmente. Ha demostrado ser capaz de simular con suficiente aproximación las condiciones de transición de flujo laminar a turbulento. Las ecuaciones del modelo son las siguientes:

1. Ecuación de transporte para la energía cinética turbulenta  $k$ :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \beta^* f_{\beta^*} k \omega. \quad (3.60)$$

- En el término de difusión, la difusividad efectiva es  $[\nu + (\nu_t / \sigma_k)]$  y la viscosidad turbulenta está dada por  $\nu_t = \alpha^* (k / \omega)$ , con  $\alpha^*$  una función que amortigua la viscosidad turbulenta, dando lugar a una corrección para bajos números de Reynolds, precisamente en función del número de Reynolds turbulento,  $Re_t$ :

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* \left( \frac{\alpha_\infty^* + Re_t / R_k}{1 + Re_t / R_k} \right), \text{ con } Re_t = \frac{k}{\nu \omega}. \quad (3.61)$$

- El término de producción turbulenta es  $\overline{u_i u_j} (\partial U_i / \partial x_j)$ .
- El término de producción turbulenta de flotación  $G_b$  pueden modelizarse por

$$\frac{G_b}{\rho} = -g_i \beta \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (3.62)$$

que representa la interacción entre los campos de velocidades y temperaturas fluctuantes, debida a la estratificación térmica, en el caso de que ésta sea importante.

- En el término de disipación,  $-(\beta^* f_{\beta^*} k \omega)$ , el factor  $f_{\beta^*}$  responde a la siguiente expresión:

$$f_{\beta^*} = 1, \text{ con } \xi_k \leq 0 \text{ y } f_{\beta^*} = \frac{1 + 680 \xi_k^2}{1 + 400 \xi_k^2}, \text{ con } \xi_k > 0 \text{ siendo} \quad (3.63)$$

$$\xi_k \equiv \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \quad (3.64)$$

y  $\beta^*$  es una función de amortiguación de  $Re_t$ ,

$$\beta^* = \beta_\infty^* \left( \frac{4/15 + (Re_t/R_\beta)^4}{1 + (Re_t/R_\beta)^4} \right). \quad (3.65)$$

2. Ecuación de transporte para el ritmo de disipación específico de energía cinética turbulenta,  $\omega$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \alpha \frac{\omega}{k} - \beta f_\beta \omega^2. \quad (3.66)$$

- En el término de producción  $\overline{u_i u_j} (\partial U_i / \partial x_j) \alpha (\omega/k)$ ,  $\alpha$  es otra función de amortiguación expresada por:

$$\alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left( \frac{\alpha_0 + Re_t/R_\omega}{1 + Re_t/R_\omega} \right). \quad (3.67)$$

- En el término de disipación,  $-(\beta f_\beta \omega^2)$ ,  $f_\beta$  es:

$$f_\beta = \frac{1 + 70\xi_\omega}{1 + 80\xi_\omega}, \text{ con } \xi_\omega \equiv \left| \frac{\Omega_{ij} \Omega_{jk} S_{ki}}{(\beta_\infty^* \omega)^3} \right|, \quad (3.68)$$

donde  $\Omega_{ij}$  y  $S_{ki}$  son los tensores de rotación y de esfuerzos del flujo medio, respectivamente, definidos por:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.69)$$

Las constantes experimentales son:  $\sigma_k = \sigma_\omega = 2,0$ ;  $R_\beta = 8,0$ ;  $R_k = 6,0$ ;  $R_\omega = 2,95$ ;  $\alpha^*_0 = \beta_i / 3$ ;  $\alpha^*_\infty = 1,0$ ;  $\alpha_\infty = 0,52$ ;  $\alpha_0 = 1/9$ ;  $\beta = \beta_i = 0,072$  y  $\beta^*_\infty = 0,09$ .

El modelo simulará con éxito flujos turbulentos para bajos números de Reynolds, y situaciones con transición de flujo laminar a turbulento cuando los valores de  $y^+$  sean claramente inferiores a la unidad. En los flujos para bajos números de Reynolds la transición laminar-turbulento aparece de forma natural a partir de la solución de las ecuaciones turbulentas.

## 3.4 Flujo turbulento en presencia de paredes

### 3.4.1. Ecuaciones del flujo turbulento en presencia de paredes

Los flujos turbulentos tienen lugar a altos números de Reynolds, dichos flujos se ven significativamente afectados por la presencia de paredes ya que en estas regiones existen fuertes gradientes en las propiedades fluidas. La zona adyacente a la pared es conocida como *capa límite* y en ella el flujo pasa de estar dominado por los términos convectivos y turbulentos a estarlo por los términos viscosos hasta llegar a cumplir la condición de adherencia a la pared.

Cerca de la pared, el amortiguamiento viscoso reduce las fluctuaciones de la velocidad. Sin embargo, en la parte exterior de la capa límite la turbulencia aumenta rápidamente por la producción de energía cinética turbulenta debida a los elevados gradientes transversales de velocidad media.

El flujo turbulento tiene lugar a altos números de Reynolds. No obstante, en los flujos turbulentos en presencia de paredes, no se pueden despreciar desde el principio los términos viscosos asociados al movimiento medio. El flujo puede dividirse en dos partes: capa límite, y el flujo exterior a la misma; aplicando la aproximación de capa límite,

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow v \ll u, \quad (3.70)$$

se puede llegar a unas ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (3.71)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right), \quad (3.72)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\overline{v'^2} \right). \quad (3.73)$$

La ecuación transversal integrada proporciona la relación  $p + \rho v'^2 = p_e(x)$  por lo que el gradiente longitudinal de presión es igual al que existe en el exterior de la capa límite, donde el flujo puede considerarse ideal, por tener lugar con un número de Reynolds suficientemente alto, y por lo tanto se puede expresar en función de la derivada del campo externo de velocidades  $U_e$ ,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U_e \left( \frac{dU_e}{dx} \right). \quad (3.74)$$

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en dirección longitudinal se puede por tanto escribir en la forma:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = U_e \left( \frac{dU_e}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right). \quad (3.75)$$

### 3.4.2. Ley de la pared

En el análisis de la capa límite turbulenta se pueden distinguir a su vez dos zonas:

- *Región exterior:* En la que son despreciables los efectos viscosos frente a los términos convectivos. No hay que confundir con el flujo externo a la capa límite.

- *Región interior:* Zona en que los esfuerzos viscosos no son despreciables. A su vez, dentro de ésta, muy cerca de la pared la viscosidad llega a ser dominante, pues las fluctuaciones turbulentas tienden a anularse. Ésta será la *subcapa viscosa*. El resto de la región interior se denomina *subcapa intermedia o logarítmica*.

Se puede resumir el perfil de velocidades en la capa límite turbulenta para la región exterior en la forma:

$$y \approx \delta \rightarrow u = U_e + u_\tau \frac{1}{k_y} \ln \frac{y}{\delta} + F\left(\frac{dU_e}{dx}\right), \quad (3.76)$$

donde  $u_\tau$  es la *velocidad de agitación turbulenta*, definida en función del esfuerzo cortante de la pared  $\tau_p$  por

$$\tau_p = \rho u_\tau^2, \quad (3.77)$$

$k_v$  es la constante universal de von Kármán cuyo valor es de 0,41 y  $\delta$  es la altura de la capa límite turbulenta. Para la región interior, se tiene

$$\delta_v < y \ll \delta \rightarrow \frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + C, \quad (3.78)$$

para la subcapa intermedia o logarítmica donde  $\delta_v$  es el espesor de la subcapa viscosa de la región interna,  $C$  es un constante, y por último,

$$y \approx \delta_v = \frac{\nu}{u_\tau} \rightarrow \frac{u}{u_\tau} = \frac{y}{\nu/u_\tau}, \quad (3.79)$$

para la subcapa viscosa o laminar.

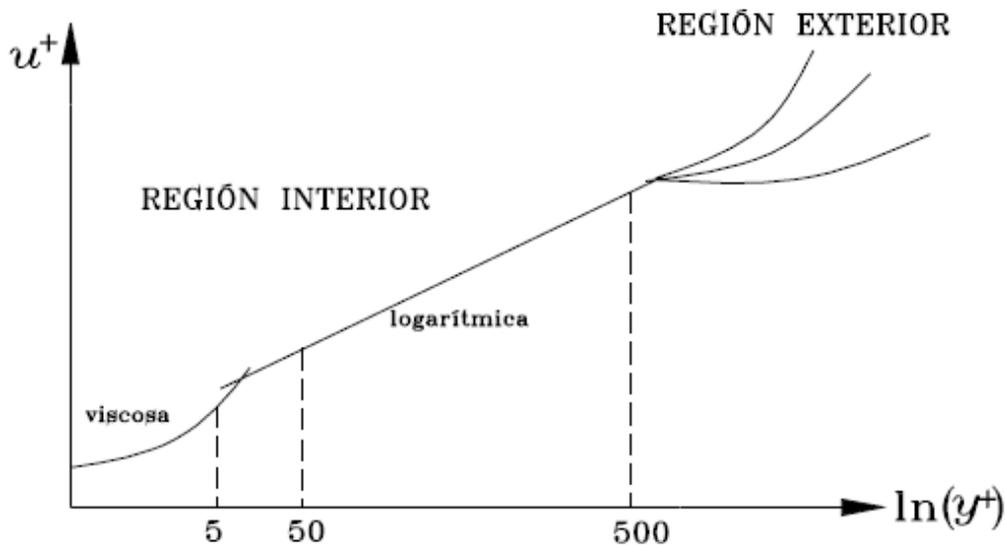


Figura 3-1. Perfil universal de velocidades en la capa límite turbulenta

La Figura 3.1 muestra el perfil de velocidades media en la capa límite turbulenta (conocido como **ley de la pared**). En los ejes coordenados se representan las variables adimensionales  $u^+$  e  $y^+$ , dados respectivamente por

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, y^+ = \frac{u_\tau}{\nu} y. \quad (3.80)$$

Del análisis anterior se deduce que la suposición de variación logarítmica de la velocidad en el entorno de la pared solo es válida para valores de  $y^+$  por encima de un cierto valor. Si se desea resolver el flujo en la subcapa límite laminar, los valores de  $y^+$  son efectivamente más bajos. Por este motivo, la simulación numérica debe efectuarse con valores de  $y^+$  suficientemente pequeños.

En el próximo capítulo se especifica el rango de valores de  $y^+$  que se han empleado en este trabajo con el fin de simular correctamente la capa límite turbulenta.

## 3.5 Condiciones de contorno e iniciales

### 3.5.1. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno de calentamiento han sido tratadas previamente, cuando se realizó la descripción morfológica del problema en estudio. Se tratan ahora las condiciones de contorno empleadas en este trabajo, con carácter más general.

En cavidades abiertas es de esperar que el flujo sea muy sensible ante las condiciones de contorno en las secciones de entrada y salida, sobre todo cuando los contornos abiertos tienen una dimensión apreciable. Puede haber regiones donde existan caudales de entrada y salida a través de la misma sección abierta. Anil Lal y Reji [16] llevaron a cabo la revisión de las condiciones de contorno empleadas por distintos autores; observaron que todos los autores usaban condiciones de continuidad para la componente normal de la velocidad ( $\partial U/\partial x = -\partial V/\partial y$ ), pero esta condición podía inducir una cierta componente tangencial de la velocidad. Por lo tanto, las condiciones de contorno aplicadas y su influencia en los resultados numéricos se explican a continuación:

- *Secciones de entrada y salida:* en este trabajo se ha impuesto la condición de continuidad tanto en la sección entrada como en la de salida, y se han despreciado las variaciones en los componentes de la velocidad, temperatura, energía cinética turbulenta y frecuencia turbulenta. También se han tenido en cuenta las siguientes condiciones de contorno para la presión:

En la sección de entrada: se supone una presión total reducida  $P_T = P + \rho(U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)$ , que es equivalente a usar la ecuación de Bernoulli en la región de entrada a la cavidad. La temperatura del aire es fija e igual a la temperatura ambiente  $T_\infty$ . Los valores iniciales de  $k$  y  $\omega$  a la entrada deben ser especificados para comenzar la computación. El valor inicial de la energía cinética turbulenta  $k$  se deduce de la intensidad turbulenta, definida como:

$$I = [(2/3)k]^{1/2} / U,$$

donde  $U$  es el valor medio de la velocidad en la sección de entrada.  $\omega$  viene dado por  $\omega = k/\nu_t$  en la entrada. A fin de obtener resultados sistemáticos la intensidad  $I$  está limitada a un 5%.

En la sección de salida: se impone una presión reducida de  $P = 0$  (presión igual a la ambiente).

- *Paredes*: se considerarán paredes fijas, es decir sin desplazamiento de las mismas. Se impondrá un flujo de calor  $q$  en la pared izquierda de la forma  $k(\partial T/\partial n) = q$ , donde  $n$  corresponde a la componente perpendicular a la pared. El resto de paredes serán adiabáticas. Para casos turbulentos se impondrá  $k = 0$ , la expresión que se emplea para aproximar  $\omega$  en la pared es,  $\omega = (K\nu) / (\beta_{\infty}^* y_1^2)$ , donde  $y_1$  corresponde a la distancia entre la pared y el primer punto de la malla,  $K = 2$ , y  $\beta_{\infty}^*$  es una constante del modelo de turbulencia igual a 0,09, constante del modelo de turbulencia de Wilcox [31].

### 3.5.2. Condiciones iniciales

Aunque es posible introducir condiciones temporales que incluyan saltos escalonados o graduales de temperatura en las paredes, o incluso calentamientos irregulares, es cierto que este tipo de condiciones es difícilmente reproducibles en el laboratorio. Puesto que el interés principal estaba en comprender la evolución temporal del flujo, se decide imponer la condición inicial “trivial”, es decir, en  $t=0$ , las paredes susceptibles están frías, con la misma temperatura del fluido que lleva la cavidad y para  $t>0$ , la pared alcanza súbitamente su condición de calentamiento.

Las condiciones iniciales en  $t=0$  son por tanto:  $T=T_{\infty}$  todas las paredes de la cavidad están frías, la velocidad del fluido es cero en todos los puntos del dominio fluido.

Para un tiempo mayor que cero,  $T=T_w$  en las paredes isoterma y  $q=q_w$  en las paredes con flujo de calor.

La velocidad en las paredes es siempre nula, para cualquier instante de tiempo.

# Capítulo 4. Modelización numérica

## 4.1 Introducción a la simulación numérica

Los resultados presentados en este proyecto se han obtenido numéricamente a partir del código CFD Phoenix, el cual discretiza las ecuaciones de conservación para el problema a través del procedimiento de volúmenes finitos. En el presente capítulo se describirá la discretización de volúmenes finitos, una descripción del código empleado para las simulaciones de este trabajo y las características del mallado empleado.

La solución numérica de una ecuación diferencial consiste en un conjunto de valores a partir de los que se puede determinar la distribución de la variable dependiente  $\phi$ , en el dominio considerado. Supóngase que se decide representar la variación de  $\phi$  mediante un polinomio en  $x$ ,

$$\phi = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (4.1)$$

Se emplea un procedimiento numérico para encontrar un número finito de coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ . Esto hace posible evaluar  $\phi$  para cualquier valor de  $x$ . La mayoría de los métodos clásicos de discretización parten de los valores conocidos de una variable dependiente en un número finito de localizaciones (nodos de malla), que cubren todo el dominio de cálculo. Se trata entonces de encontrar un conjunto de ecuaciones algebraicas para dichos valores y en la utilización de un algoritmo para resolver el sistema.

En los métodos clásicos de discretización tales como diferencias finitas o volúmenes finitos, para dar valores de la variable dependiente en los nodos de malla, se discretiza la distribución de dicha variable. Las ecuaciones algebraicas que tratan los valores desconocidos de  $\phi$  en los puntos de la malla elegida (ecuaciones discretizadas), se derivan de la ecuación diferencial para  $\phi$ . En esta derivación será necesario proponer una función de distribución (o función de interpolación) que describa como varía  $\phi$  entre los nodos de la red. Es común dividir el dominio de cálculo en subdominios o elementos, de forma que una cierta función pueda ser asociada con cada subdominio. La discretización sistemática del espacio (y del tiempo, en problemas transitorios), y de las variables dependientes permite sustituir la ecuación diferencial de conservación para el problema por simples ecuaciones algebraicas, resolubles con cierta facilidad.

La estructura de una ecuación discretizada es una expresión algebraica que relaciona los valores de la variable dependiente en un grupo de nodos de la malla. El valor de  $\phi$  en un nodo dado de la malla sólo está afectado por los valores de los nodos adyacentes. Por ello, es de esperar que la solución sea tanto más exacta cuantos más nodos de malla existan, ya que las diferencias de la propiedad  $\phi$  se hacen muy pequeñas, y entonces los detalles sobre las hipótesis empleadas para la

definición de la función pierden toda la importancia. La forma clásica de una ecuación discretizada puede ser la siguiente (Figura 4.1):

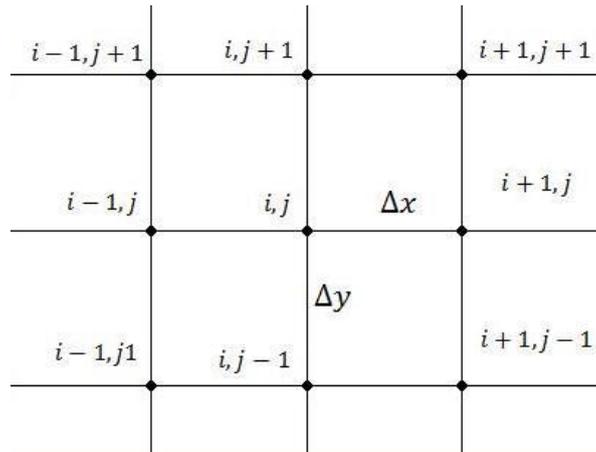


Figura 4-1 Malla típica bidimensional

$$a_{ij}\phi_{ij} = a_{i+1,j} \cdot \phi_{i+1,j} + a_{i-1,j} \cdot \phi_{i-1,j} + \dots, \quad (4.2)$$

siendo  $a_{ij}$ ,  $a_{i+1,j}$ , ... coeficientes distintos para cada uno de los nodos, y  $\phi_{ij}$ ,  $\phi_{i+1,j}$ , ... los valores correspondientes de la variable de interés. Pueden encontrarse distintas ecuaciones discretizadas para una misma ecuación diferencial, debido a las distintas funciones locales de interpolación empleadas, y a los diferentes métodos de derivación.

## 4.2. Método de diferencias finitas

Aproximando las derivadas que contiene la ecuación diferencial para  $\phi$  mediante truncamiento de las series de Taylor podemos llegar al método de las diferencias finitas. Las derivadas primera y segunda de la ecuación diferencial para una variable dependiente genérica  $\phi$  se sustituyen por unas expresiones discretas en forma de cociente, como se verá adelante.

Una malla típica bidimensional utilizada en el método de diferencias finitas es la mostrada en la Figura 4.1 (en la que  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son uniformes, aunque en general pueden no serlo). Las derivadas de la propiedad en el nodo  $(i, j)$  se calculan a partir de los valores de dicha propiedad en los nodos circundantes. Mediante expansión de las series de Taylor en torno al nodo  $(i, j)$ , se obtiene el esquema “forward” (hacia adelante) y el “rearward” (hacia atrás), como se verá más adelante. Por ejemplo, si  $u_{ij}$  denota la componente  $x$  de velocidad en el punto  $i, j$  se tiene

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots, \quad (4.3)$$

expresión correcta siempre que el número de términos sea infinito y la serie converja, o bien si  $\Delta x \rightarrow 0$ . Las series se truncan, puesto que de lo contrario es imposible trabajar con ellas, de modo que

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \dots, \quad (4.4)$$

constituye una aproximación de segundo orden (se han despreciado los términos de orden  $(\Delta x)^3$  y superiores). Del mismo modo, si se desprecian los términos del orden  $(\Delta x)^2$  y superiores, tendremos una aproximación de primer orden. Esto da lugar al llamado *error de truncamiento*, que para el caso de la expresión anterior, puede ponerse por

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^n}{n!}. \quad (4.5)$$

El error de truncamiento puede reducirse reteniendo más términos de la serie de Taylor, o bien haciendo más pequeño  $\Delta x$ . De la ecuación (4.1) podemos obtener

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} - \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} - \dots, \quad (4.6)$$

en la que si se desprecian los términos de orden  $\Delta x$  en adelante, se tiene

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (4.7)$$

que es una diferencia finita de primer orden hacia adelante  $(\partial u / \partial x)_{i,j}$ .

Del mismo modo que se ha hecho con  $u_{i+1,j}$ , puede hacerse con  $u_{i-1,j}$ , expandiendo la serie de Taylor hacia atrás,

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} (-\Delta x) + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^2}{2} + \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^3}{6} + \dots, \quad (4.8)$$

de modo que

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (4.9)$$

es la diferencia finita de primer orden hacia atrás para  $(\partial u / \partial x)_{i,j}$ . Restando de la Ecuación (4.6) la (4.1) se obtiene

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2, \quad (4.10)$$

que es una diferencia central de segundo orden para  $(\partial u/\partial x)_{i,j}$ . Sumando las dos mismas ecuaciones, se llega a la expresión siguiente:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2, \quad (4.11)$$

que es la diferencia central de segundo orden para la derivada segunda,  $(\partial^2 u/\partial x^2)_{i,j}$ .

Lógicamente, para las derivadas en  $y$ , los resultados son similares; según el esquema hacia adelante, se obtiene

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y), \quad (4.12)$$

mientras que con el esquema de diferencias hacia atrás,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y), \quad (4.13)$$

El esquema de diferencias centrales ofrece para la primera derivada

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2, \quad (4.14)$$

y para la derivada segunda, empleando igualmente el esquema de diferencias centrales resulta:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2, \quad (4.15)$$

Resulta interesante comprobar que las diferencias centrales segundas  $(\partial^2 u/\partial x^2)_{i,j}$  pueden interpretarse como una diferencia hacia adelante de la primera derivada, con diferencias hacia atrás para esta primera derivada

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}}{\Delta x} = \left[\frac{u_{i+1} - u_{i,j}}{\Delta x}\right] \frac{1}{\Delta x} \\ &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Puede hacerse lo mismo para la derivada cruzada de segundo orden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (4.17)$$

calculando la derivada segunda respecto de  $x$  como una diferencia central de la derivada respecto de  $y$ , y esta derivada respecto de  $y$  como una diferencia central igualmente.

### 4.3. Métodos de los volúmenes finitos

El método de los volúmenes finitos consiste en dividir el dominio de cálculo en un número de volúmenes de control no solapados, de forma que exista un volumen de control rodeando cada nodo de la malla. La ecuación diferencial se integra sobre cada volumen de control. Para expresar la variación de la variable dependiente en las caras de los volúmenes de control y resolver las integrales, se elige una función local lineal. El resultado de la integración es la ecuación discretizada que contiene los valores de  $\phi$  para un conjunto de nodos de la malla.

La principal ventaja de este método frente al de diferencias finitas estriba en que la solución obtenida asegura implícitamente que magnitudes como la masa, la cantidad de movimiento, y la energía se conservan para cualquier grupo de volúmenes de control y, por supuesto, para todo el dominio de interés. Incluso si la malla es basta, se cumplen exactamente los balances. El método de los volúmenes finitos, debido a que utiliza mallas estructuradas, tiene la apariencia de los métodos de diferencias finitas clásicos. Sin embargo, puede considerarse como un caso particular del método de los residuos ponderados.

Cuando las ecuaciones discretizadas se resuelven para obtener los valores de la variable dependiente en los nodos de la red, el resultado puede contemplarse de dos modos distintos. En el método de los elementos finitos, y en la mayor parte de los métodos de residuos ponderados, la variación supuesta para la variable dependiente (que se compone de los valores en los nodos de la malla, así como de las funciones de interpolación entre nodos) se toma como la solución aproximada. Sin embargo, en el método de diferencias finitas, se considera como solución la constituida tan sólo por los valores de  $\phi$  en los nodos de malla, sin hacer referencia a la variación de  $\phi$  entre dichos nodos. En el método de volúmenes finitos también se adopta este enfoque. Se busca una solución definida tan sólo por los valores en los nodos de la malla. Las fórmulas de interpolación se contemplan solamente como relaciones auxiliares necesarias para evaluar las integrales que aparecen en la formulación. Por tanto, una vez que se ha obtenido la ecuación discretizada, puede prescindirse de la función de interpolación impuesta.

A continuación se presenta un ejemplo de aplicación de este método en la discretización de una ecuación en derivadas primeras. Las ecuaciones encontradas en la mecánica de fluidos pueden ser más complejas pero este ejemplo es lo suficientemente descriptivo.

Supóngase que se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = 0. \quad (4.18)$$

En esta ecuación, si  $q = \rho$ ,  $F = \rho u$ ,  $G = \rho v$ , obtenemos la ecuación de continuidad en forma bidimensional.

Vamos a aplicar el método de los subdominios para la discretización de la ecuación anterior. Se parte de la ecuación que proporciona la solución exacta; se utilizará el dominio que aparece en la Figura 4.2, de modo que integrando obtenemos:

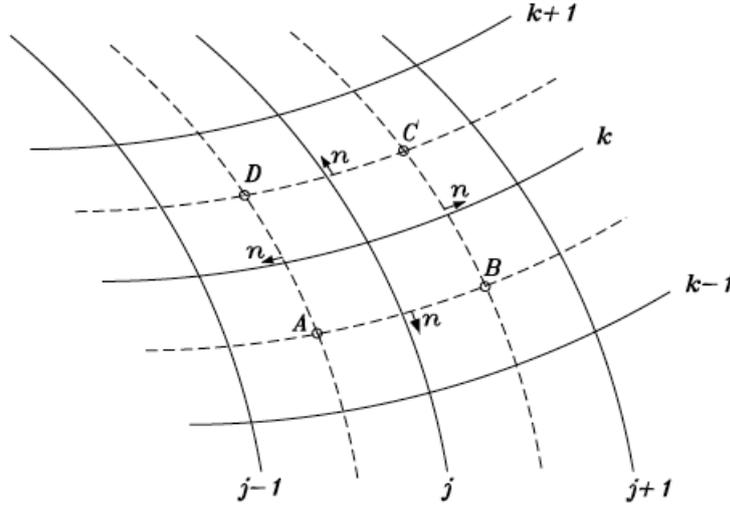


Figura 4-2. Dominio de aplicación del método de los volúmenes finitos.

$$\int_{ABCD} \left( \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} \right) dx dy = 0, \quad (4.19)$$

o bien aplicando el teorema de Green,

$$\frac{d}{dt} \int \bar{q} dV + \int_{ABCD} \vec{H} \cdot \vec{n} ds, \quad (4.20)$$

siendo  $ds$  el elemento diferencial de línea, y  $H$  función en general de  $F$  y  $G$ . Obsérvese que la función de pesado elegida es la unidad. En coordenadas cartesianas,

$$\vec{H} \cdot \vec{n} ds = \vec{F} dy \cdot \vec{G} dx. \quad (4.21)$$

Las ecuaciones (4.19) y (4.20) expresan una condición de conservación (por ejemplo, de conservación de masa). Mientras que el método de diferencias finitas discretiza las ecuaciones en forma diferencial, el método de volúmenes finitos lo hace en forma integral. La evaluación aproximada de la ecuación (4.19) puede ponerse por:

$$\frac{d}{dt} (A q_{j,k}) + \sum_{AB}^{DA} (F \Delta y - G \Delta x) = 0, \quad (4.22)$$

siendo  $A$  el área del cuadrilátero  $ABCD$ . Como incrementamos en  $x$  y en  $y$ . A lo largo del lado  $AB$  del cuadrilátero pueden tomarse los siguientes:

$$\begin{aligned} \Delta y_{AB} &= y_B - y_A \\ \Delta x_{AB} &= x_B - x_A \end{aligned} \quad (4.23)$$

y como valores de las variables  $F$  y  $G$  sobre el mismo lado,

$$F_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (F_{j,k-1} + F_{j,k}) \quad (4.24)$$

$$G_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (G_{j,k-1} + G_{j,k}) \quad (4.25)$$

y del mismo modo se efectuaría con los restantes lados del cuadrilátero.

Si  $A$  no fuera función del tiempo, entonces la ecuación discretizada quedaría del siguiente modo:

$$\begin{aligned} A \left( \frac{dq_{j,k}}{dt} \right) + \frac{1}{2} (F_{j,k-1} + F_{j,k}) \Delta y_{AB} - \frac{1}{2} (G_{j,k-1} + G_{j,k}) \Delta x_{AB} \\ + \frac{1}{2} (F_{j,k-1} + F_{j,k}) \Delta y_{BC} - \frac{1}{2} (G_{j,k-1} + G_{j,k}) \Delta x_{BC} \\ + \frac{1}{2} (F_{j,k-1} + F_{j,k}) \Delta y_{CD} - \frac{1}{2} (G_{j,k-1} + G_{j,k}) \Delta x_{CD} \\ + \frac{1}{2} (F_{j,k-1} + F_{j,k}) \Delta y_{DA} - \frac{1}{2} (G_{j,k-1} + G_{j,k}) \Delta x_{DA} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Se ha obtenido entonces una ecuación en volúmenes finitos. Si la malla  $(j, k)$  es irregular, esta ecuación proporciona una discretización en coordenadas cartesianas, sin necesidad de introducir coordenadas generalizadas. Si la malla es uniforme, y las direcciones  $j$  y  $k$  coinciden con las  $x$  e  $y$ , la ecuación anterior se puede poner como:

$$\frac{d}{dt} q_{j,k} + \frac{F_{j+1,k} + F_{j-1,k}}{2\Delta x} + \frac{G_{j,k+1} + G_{j,k-1}}{2\Delta y} = 0. \quad (4.27)$$

#### 4.4. Técnicas de discretización o interpolación

La solución numérica del problema debe de coincidir teóricamente con la solución con la solución exacta si el procedimiento numérico elegido es correcto y el número de nodos de la malla es infinito. En la práctica solo se dispone de un número finito de nodos. Para que el procedimiento numérico nos proporcione una solución próxima a la real se debe elegir una correcta técnica de discretización (o interpolación).

De aquí en adelante, se va a utilizar la nomenclatura de la Figura 4.3, en la que aparece un sistema intrínseco para nombrar a los puntos y a las caras que se encuentran alrededor del punto de interés  $P$ .

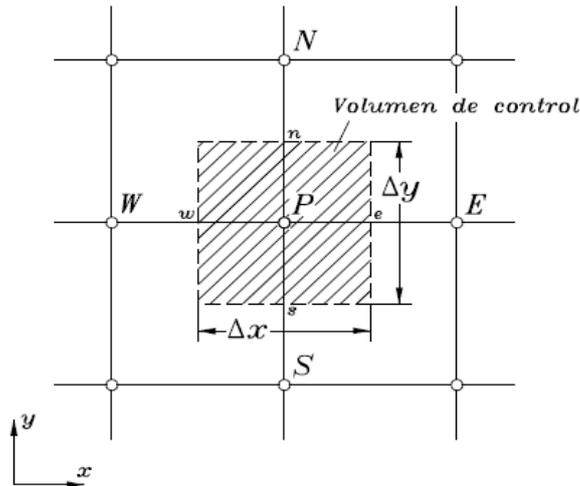


Figura 4-3. Volumen de control para la discretización de un problema bidimensional.

#### 4.4.1. Esquema de diferencias centrales

Si se supone un flujo estacionario unidimensional en el que sólo existen efectos de convección y difusión, la ecuación de conservación en forma general resulta:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right), \quad (4.28)$$

de modo que la ecuación de continuidad, haciendo  $\Phi = 1$  y  $\Gamma = 0$  en la expresión anterior, puede ponerse

$$\frac{du}{dx}(\rho u) = 0, \quad (4.29)$$

pudiendo expresarse esta última en la forma

$$\rho u = \text{constante}. \quad (4.30)$$

Para discretizar la ecuación diferencial (4.28), se empleará un grupo de tres puntos de la malla, tal como se muestra en la Figura 4.3. Aunque la localización de las caras del volumen de control  $e$  y  $w$  no tiene ninguna influencia sobre la formulación final, es conveniente suponer que la cara  $e$  está situada en el punto medio entre  $P$  y  $E$ , y la cara  $w$  entre  $W$  y  $P$ .

Integrando la Ecuación (4.28) sobre el volumen de control de la Figura 4.3, se obtiene

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_w. \quad (4.31)$$

Suponiendo que las caras del volumen de control están en el punto medio, resulta por interpolación lineal,

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \text{ y } \phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \quad (4.32)$$

La Ecuación (4.31) puede escribirse ahora de la forma

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) = \frac{\Gamma_e(\phi_E + \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w(\phi_P + \phi_W)}{(\delta x)_w} \quad (4.33)$$

Para escribir esta ecuación de forma más compacta, se define

$$F \equiv \rho u \text{ y } D \equiv \frac{\Gamma}{(\delta x)} \quad (4.34)$$

Las cantidades  $F$  y  $D$  tienen las mismas dimensiones. Mientras que  $D$  siempre es positivo,  $F$  puede ser positivo o negativo, dependiendo de la dirección del flujo fluido.

Aplicando la Ecuación 4.34 a la Ecuación 4.31, la ecuación discretizada queda

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W, \quad (4.35)$$

siendo

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2}, \quad (4.36)$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2}, \quad (4.37)$$

$$a_P = D_e + \frac{F_e}{2} + D_w - \frac{F_w}{2} = a_E + a_W + (F_e - F_w). \quad (4.38)$$

Por continuidad,  $F_e = F_w$  (4.30), por lo que  $a_P = a_E + a_W$ .

La interpolación por diferencias centrales se realiza de modo independiente al sentido del flujo, lo que puede dar lugar a problemas en la obtención de una solución realista.

#### 4.4.2. Esquema Upwind

Debido a que la solución numérica que se acaba de describir no se ajusta a la solución real es preciso que se utilice un esquema distinto con el que aproximarnos, como puede ser el 'upwind'. Según esta técnica el valor de  $\Phi$  en la entrecara es igual al valor de  $\Phi$  en el nodo de la malla situado inmediatamente aguas arriba de la cara, dependiendo de cuál sea la dirección del flujo. De este modo, este esquema actúa sobre la obtención de  $\Phi_e$  y  $\Phi_w$  y se introducirá en el proceso de discretización el lugar de las ecuaciones (4.32).

$$\phi_e = \phi_P \text{ si } F_e > 0 \quad (4.39)$$

$$\phi_e = \phi_E \text{ si } F_e < 0 \quad (4.40)$$

$$\phi_w = \phi_W \text{ si } F_w > 0 \quad (4.41)$$

$$\phi_w = \phi_E \text{ si } F_w < 0 \quad (4.42)$$

Tomando como premisa un flujo hacia la derecha ( $F_e > 0$  y  $F_w > 0$ ), en esta ocasión los coeficientes

$$a_E = D_e \quad (4.43)$$

$$a_W = D_w + F_w \quad (4.44)$$

$$a_P = D_e + D_w + F_e \quad (4.45)$$

Supongamos ahora un flujo hacia la izquierda ( $F_e < 0$  y  $F_w < 0$ ), en este caso los coeficientes de la ecuación son

$$a_E = D_e - F_e \quad (4.46)$$

$$a_W = D_w \quad (4.47)$$

$$a_P = D_e + D_w - F_w \quad (4.48)$$

Definimos ahora un operador  $[[A,B]]$  para denotar el valor de dos magnitudes  $A$  y  $B$ ;  $[[A,B]] = A$  si  $A > B$  y  $[[A,B]] = B$  si  $A < B$ . Aplicando este operador los coeficientes se pueden definir como sigue

$$a_E = D_e + [[-F_e, 0]] \quad (4.49)$$

$$a_W = D_w + [[+F_w, 0]] \quad (4.50)$$

$$a_P = D_e + [[F_e, 0]] + D_w + [[-F_w, 0]] = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (4.51)$$

Para explicar la razón de ser de este esquema en la práctica se va a estudiar la solución exacta del problema mostrado en la Figura 4.2, cuya ecuación de definición para el problema se mostraba en (4.28). Se supondrá que  $\Gamma_\phi$  es constante (teniendo en cuenta que  $\rho u$  es constante, debido a la ecuación de continuidad). Si se utiliza el dominio  $0 \leq x \leq L$ , con las condiciones de contorno

$$\Phi = \Phi_0, \text{ para } x = 0, \quad \Phi = \Phi_L \text{ para } x = L, \quad (4.52)$$

la solución exacta del problema es

$$\frac{\phi - \Phi_0}{\Phi_L - \Phi_0} = \frac{e^{Pe(\frac{x}{L})} - 1}{e^{Pe} - 1}, \quad (4.53)$$

donde  $Pe$  es el número de Peclet ( $Pe = Re \cdot Pr$ ).

En la Figura 4.4 podemos ver una representación de la solución dada por los métodos “upwind” y diferencias centrales en función del número de Peclet junto con la solución exacta, también en función de este número adimensional. En esta representación se aprecian los problemas de convergencia que pueden llegar a ocasionar el esquema de diferencias centrales para valores pequeños de Peclet, mostrándose el esquema “upwind” como una seria alternativa a estas circunstancias.

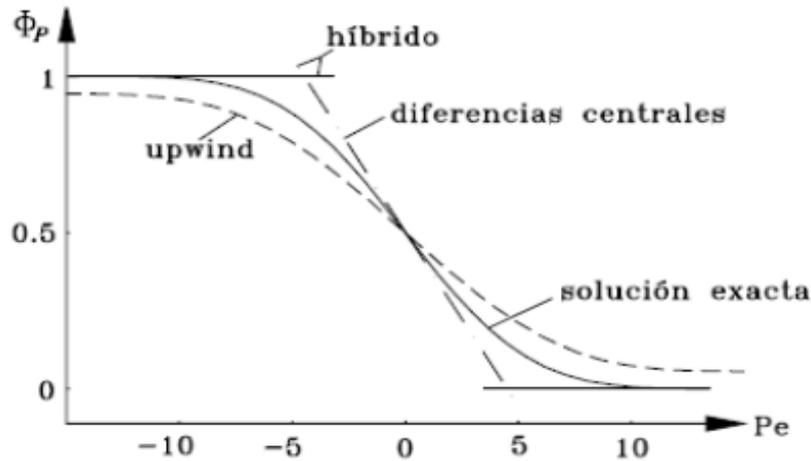


Figura 4-4: Predicción de  $\phi_p$  por varios esquemas para un rango de valores de Peclet.

Los esquemas numéricos derivados del “upwind”, y otros esquemas de primer orden pueden fallar cuando el flujo incide de modo diagonal a las direcciones principales de la malla. En estas condiciones, el esquema “upwind” altera las distribuciones de las propiedades transportadas. El error resultante tiene una apariencia de origen difusivo y se denomina “*difusión numérica*” (*false diffusion*). Este fenómeno depende de la densidad del mallado, se obtienen soluciones más exactas al usar mallas más finas, esto puede inducir que una malla muy densa podría eliminar los problemas derivados de la difusión numérica pero las mallas que podrían anular este problema pueden no resultar factibles. Además se ha demostrado que para números de Reynolds altos, la difusión numérica puede llevar a soluciones irreales.

#### 4.4.3. Esquema Híbrido

Este esquema, que es el que se utilizará en este trabajo, trata de acercarse a la solución exacta del problema, eliminando los problemas ocasionales del esquema “upwind” para números de Peclet suficientemente pequeños. Para un rango de números de Peclet  $-2 \leq Pe \leq 2$ , se utilizará la técnica de diferencias centrales. Para valores de Pe fuera de este rango, se emplea el esquema “upwind”. El esquema híbrido tiene dificultades en problemas en los que los efectos combinados de convección y difusión son importantes en la mayor parte del campo fluido, y la dirección principal del flujo es oblicua respecto de las direcciones principales de la malla de cálculo, en cuyo caso la difusión numérica es importante.

Utilizando la formulación introducida con el esquema “upwind”, los coeficientes de la ecuación discretizada (4.35) quedan:

$$a_E = [-F_e, D_e - F_e/2, 0] \quad (4.54)$$

$$a_W = [F_w, D_w - F_w/2, 0] \quad (4.55)$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e + F_w) \quad (4.56)$$

Hasta aquí se han citado los esquemas más clásicos, que además son lineales. Existen otros más complejos, no lineales, como es el caso del Esquema MUSCL, ó el QUICK, y que en principio conducirían a obtener simulaciones más fiables. No obstante, en el presente trabajo se han llevado a cabo simulaciones con MUSCL, y se ha visto que no varían demasiado los resultados respecto del

upwind.

## 4.5. Introducción al código Phoenics

Una vez presentadas las ecuaciones en las que se basa el programa y el modo en el que Phoenics resuelve internamente estas ecuaciones, presentaremos a continuación una descripción del código.

Phoenics consta de dos partes principales: un procesador denominado “Satellite”, y un procesador para la solución numérica del problema llamada “Earth”. Como se aprecia en la Figura 4.5, puede distinguirse la operación con el programa en tres fases principales:

- Fase 1: Interpretación de los datos de entrada (“Preprocessor”).
- Fase 2: Proceso de la solución numérica y de generación de resultados numéricos (“Solver”).
- Fase 3: Interpretación de los datos de salida (“Postprocessor”).

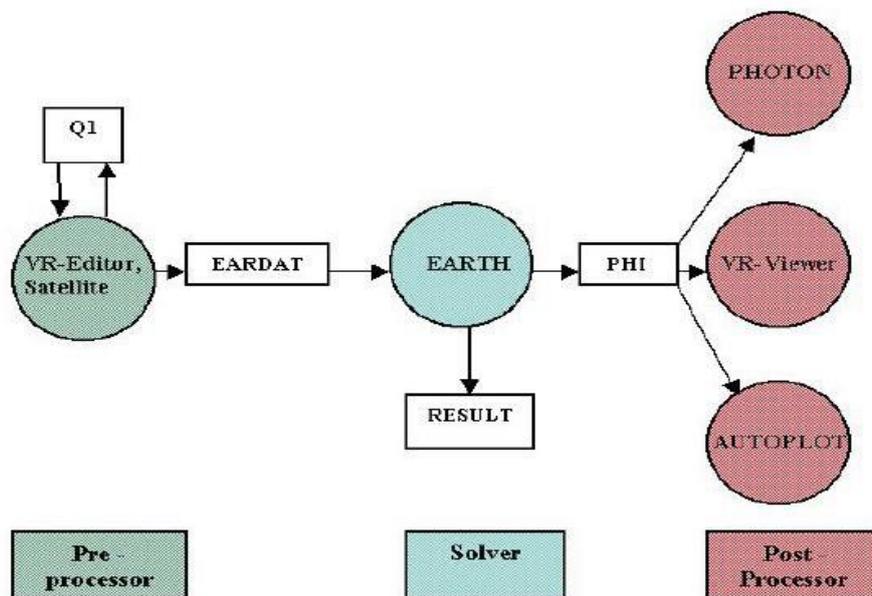


Figura 4.5: Esquema general de componentes del código Phoenics.

En la fase 1, el “Satellite” es un intérprete que construye ficheros de datos a partir de las instrucciones dadas por el usuario. El modo de introducción de los datos de un problema es a través de la construcción de un fichero ASCII al que se le denomina “q1”.

En la fase 2, el “Earth” es el “solver” para la simulación numérica del flujo de interés; este programa lee los datos proporcionados a través del fichero “eardat”, ejecuta los correspondientes cálculos y produce fundamentalmente dos tipos de ficheros de resultados. El fichero “result” es un listado de las variables calculadas en distintos puntos de la malla, mientras que el fichero “phi” es un archivo destinado a la representación gráfica de distribuciones de propiedades.

En la fase 3, interpretación y análisis de los resultados puede efectuarse a través de varias herramientas:

- Photon: Permite la visualización gráfica de las distribuciones de las propiedades.

- Autoplot: Permite la obtención de curvas de tendencia de las variables calculadas.
- VR-Viewer: Permite la visualización gráfica de las distribuciones de propiedades en el entorno de Realidad Virtual.

En Phoenix se puede trabajar de dos formas, una con menú Windows, y el modo de trabajo directo en línea de comandos. Para llevar a cabo el trabajo se ha empleado el modo directo en línea de comandos.

Los programas de los que dispone Phoenix citados anteriormente se pueden ejecutar introduciendo los siguientes comandos: *runsat*(para ejecutar “Satellite”), *runvre*(“VR-Editor”), *runear* (“Earth”), *runpho*(“Photon”), *runaut*(“Autoplot”), y *runvr*(“VR-Viewer”).

Para obtener ayuda Phoenix dispone de un programa denominado “Polis” (“Phoenix On-line InformationSystem”) es el programa de ayuda centralizada de Phoenix. Tecleando *polis* en línea de comandos se tiene acceso a ayuda sobre diversos temas; cabe destacar la “Encyclopaedia”, donde se puede acceder a información de interés por orden alfabético, también dispone de tutoriales que pueden ayudar al aprendizaje y manejo del programa. Otra forma de obtener ayuda es accediendo a la sección “Encyclopaedia” que existe en la web [www.cham.co.uk](http://www.cham.co.uk).

## 4.6. Descripción del fichero de especificación de datos q1

En el presente apartado vamos a describir detalladamente el código con el que se introduce en Phoenix un caso de una cavidad tridimensional con muro intermedio y flujo de calor constante.

### 4.6.1. Declaración general de variables

- El código comienza con la ejecución del comando TALK, que permite activar (TALK=T) o desactivar (TALK=F) el modo interactivo. Esta función permite cargar ejemplos precargados en la librería de Phoenix. En nuestro caso esta función permanece desactivada.

```
TALK=f;RUN( 1, 1);VDU=X11-TERM
```

- Para facilitar la organización y la lectura del código, Phoenix establece unos grupos que se denominan con el comando GROUP. Con este comando se puede realizar una descripción de lo que se está llevando a cabo en cada uno de los grupos. Por ejemplo, en GROUP 1 se describen el nombre del ejemplo y la introducción de las variables.

```
GROUP 1. Run title and other preliminaries
```

- Para introducir un texto que queremos que aparezca en pantalla utilizamos el comando TEXT.

```
TEXT (CAVITY-3D)
```

- A continuación se definen todas las variables que se van a emplear a lo largo del código (temperatura, viscosidad, etc.). Como se tratan de variables reales se utiliza el comando REAL seguido de los nombres que se emplean para las variables entre paréntesis.

```
REAL (LPLA, HPLA, BPLA, BMUR, TETA, RELASP, RELAPER, PI)  
REAL (BETA, AGRAV, RA, PRA, VISCO)  
REAL (TDELTA, TREF, TWALL, QFLU, CONDOC, CALEN)  
REAL (RHO, CP, GAMMAG, CONGAS, PREREF, DENREF, TEMPREF)  
REAL (INTEN, KEIN, EPIN, VELINI, ENUTINI, OMEGIN)
```

- Existen ciertas variables que no se especifican en el apartado anterior ya que Phoenics ya incorpora por defecto dichas variables. Algunas de estas variables son la presión, velocidad... Se pueden consultar el resto de variables que incorpora Phoenics en la encyclopaedia.
- Para dar un valor determinado a una variable, se introduce el nombre de la variable seguido de un '=' y el valor que le queramos asignar.

```
RA=1.E+06  
TETA=0.0  
RELASP=1.0;RELAPER=0.1  
CALEN=0.01
```

```
PI=3.1416;TETA=TETA*PI/180.
```

```
AGRAV=9.81;TREF=0.  
TEMPREF=(273.+20.);BETA=1./TEMPREF  
CONGAS=287.  
PREREF=1.0E+05  
DENREF=PREREF/(CONGAS*TEMPREF)
```

```
RHO=DENREF  
VISCO=1.544E-05  
PRA=0.71  
CP=1004.5;GAMMAG=1.4  
CONDOC=CP*RHO*VISCO/PRA
```

```
HPLA=((RA**0.8)*VISCO**2.0/(AGRAV*CALEN*PRA*COS(TETA)))**(1/3)  
TDELTA=CALEN*TEMPREF;TWALL=TREF+TDELTA  
QFLU=CALEN*CONDOC*TEMPREF*(RA**0.2)/HPLA  
LPLA=RELASP*HPLA;BPLA=RELAPER*HPLA  
BMUR=0.5*BPLA
```

- El comando 'mesg' seguido del nombre de variables, permite mostrar en pantalla los valores de dichas variables al ejecutar el satélite.

```
mesg(twall :twall: qflu :qflu: hpla :hpla: condoc :condoc:
```

- A continuación se le asignan los valores a las variables NX, NY, NZ que se utilizarán más adelante para definir la malla.

#### 4.6.2. Especificación de la malla

```
NX=70;NX1=20;NX3=10;NX2=NX-NX1-NX3  
NY=70;NY1=20;NY3=20;NY2=NY-NY1-NY3  
NZ=35;NZ1=20;NZ2=NZ-NZ1
```

- Para especificar las características de la malla se utilizan los comandos BFC para activar (BFC=T) o desactivar (BFC=F) una malla ajustada al cuerpo, y el comando NONORT para indicar que se trata de una malla no ortogonal.

```
BFC=T  
NONORT=T
```

- Definimos la malla a través del comando GSET. En este apartado se describen tanto los puntos como las líneas que los unen.

## Capítulo 4. Modelización numérica

GSET (D, NX, NY, NZ, LPLA, HPLA, LPLA/2)

Puntos

GSET (P, P1A, -LPLA\*tan(teta), 0.0, 0.0)

GSET (P, P2A, -(LPLA-BPLA)\*tan(teta), BPLA, 0.0)

GSET (P, P3A, -BPLA\*tan(teta), HPLA-BPLA, 0.0)

GSET (P, P4A, 0.0, HPLA, 0.0)

GSET (P, P1B, BPLA, 0.0, 0.0)

GSET (P, P2B, BPLA, BPLA, 0.0)

GSET (P, P3B, BPLA, HPLA-BPLA, 0.0)

GSET (P, P4B, BPLA, HPLA, 0.0)

GSET (P, P1C, BPLA+BMUR, 0.0, 0.0)

GSET (P, P2C, BPLA+BMUR, BPLA, 0.0)

GSET (P, P3C, BPLA+BMUR, HPLA-BPLA, 0.0)

GSET (P, P4C, BPLA+BMUR, HPLA, 0.0)

GSET (P, P1D, LPLA, 0.0, 0.0)

GSET (P, P2D, LPLA, BPLA, 0.0)

GSET (P, P3D, LPLA, HPLA-BPLA, 0.0)

GSET (P, P4D, LPLA, HPLA, 0.0)

Lineas horizontales

GSET (L, LH1A, P1A, P1B, NX1, S1.1)

GSET (L, LH1B, P1B, P1C, NX3, S1.1)

GSET (L, LH1C, P1C, P1D, NX2, S1.5)

GSET (L, LH2A, P2A, P2B, NX1, S1.1)

GSET (L, LH2B, P2B, P2C, NX3, S1.1)

GSET (L, LH2C, P2C, P2D, NX2, S1.5)

GSET (L, LH3A, P3A, P3B, NX1, S1.1)

GSET (L, LH3B, P3B, P3C, NX3, S1.1)

GSET (L, LH3C, P3C, P3D, NX2, S1.5)

GSET (L, LH4A, P4A, P4B, NX1, S1.1)

GSET (L, LH4B, P4B, P4C, NX3, S1.1)

GSET (L, LH4C, P4C, P4D, NX2, S1.5)

Lineas verticales

GSET (L, LV1A, P1A, P2A, NY1, S1.2)

GSET (L, LV1B, P2A, P3A, NY2, S1.6)

GSET (L, LV1C, P3A, P4A, NY3, S1.1)

GSET (L, LV2A, P1B, P2B, NY1, S1.2)

GSET (L, LV2B, P2B, P3B, NY2, S1.6)

GSET (L, LV2C, P3B, P4B, NY3, S1.1)

GSET (L, LV3A, P1C, P2C, NY1, S1.2)

GSET (L, LV3B, P2C, P3C, NY2, S1.6)

GSET (L, LV3C, P3C, P4C, NY3, S1.1)

GSET (L, LV4A, P1D, P2D, NY1, S1.2)

GSET (L, LV4B, P2D, P3D, NY2, S1.6)

GSET (L, LV4C, P3D, P4D, NY3, S1.1)

Contornos (Frames) y mallas

```
GSET (F, F1A, P1A, -, P1B, -, P2B, -, P2A, -)  
GSET (M, F1A, +I+J, 1, 1, 1, TRANS)
```

```
GSET (F, F1B, P2A, -, P2B, -, P3B, -, P3A, -)  
GSET (M, F1B, +I+J, 1, NY1+1, 1, TRANS)
```

```
GSET (F, F1C, P3A, -, P3B, -, P4B, -, P4A, -)  
GSET (M, F1C, +I+J, 1, NY1+NY2+1, 1, TRANS)
```

```
GSET (F, F2A, P1B, -, P1C, -, P2C, -, P2B, -)  
GSET (M, F2A, +I+J, NX1+1, 1, 1, TRANS)
```

```
GSET (F, F2B, P2B, -, P2C, -, P3C, -, P3B, -)  
GSET (M, F2B, +I+J, NX1+1, NY1+1, 1, TRANS)
```

```
GSET (F, F2C, P3B, -, P3C, -, P4C, -, P4B, -)  
GSET (M, F2C, +I+J, NX1+1, NY1+NY2+1, 1, TRANS)
```

```
GSET (F, F3A, P1C, -, P1D, -, P2D, -, P2C, -)  
GSET (M, F3A, +I+J, NX1+NX3+1, 1, 1, TRANS)
```

```
GSET (F, F3B, P2C, -, P2D, -, P3D, -, P3C, -)  
GSET (M, F3B, +I+J, NX1+NX3+1, NY1+1, 1, TRANS)
```

```
GSET (F, F3C, P3C, -, P3D, -, P4D, -, P4C, -)  
GSET (M, F3C, +I+J, NX1+NX3+1, NY1+NY2+1, 1, TRANS)
```

Profundidad en z

```
GSET (C, K16, F, K1, 1, NX, 1, NY, +, 0, 0, (LPLA/2) -BPLA, INC, -1.5)  
GSET (C, K36, F, K16, 1, NX, 1, NY, +, 0, 0, BPLA, INC, S1.1)
```

- Para indicar las variables que deben ser resueltas se utiliza el comando SOLVE, seguido entre paréntesis de dichas variables.

#### 4.6.3. Resolución de las variables y turbulencia. Opciones de cálculo.

```
SOLVE (P1, U1, V1, W1, H1)
```

- Se resuelven las ecuaciones de continuidad, 3 componentes de la cantidad de movimiento y energía (forma para la entalpía).
- El comando SOLVE se complementa con el comando SOLUTN. Este comando está seguido en primer lugar de una variable y de seis letras que pueden ser Y (si) o N.(no), que activan o desactivan las siguientes cuestiones acerca del comando SOLUTN:
  - Guardar variable.
  - Resolver la variable.
  - Resolver utilizando el método campo completo.
  - Resolver utilizando el método punto a punto.
  - Usar formulación específica en caso de transitorio.
  - Usar media armónica de los coeficientes de intercambio.

## Capítulo 4. Modelización numérica

```
SOLUTN (P1, Y, Y, Y, N, N, N)
SOLUTN (H1, Y, Y, Y, N, N, N)
```

- El comando NAME sirve para cambiar por defecto el nombre de la variable. Phoenics resuelve la ecuación de la energía en su forma de entalpía. Por lo tanto, para que resuelva directamente la temperatura, hay que especificarlo.

```
NAME (H1) =TEMP
```

- STORE define las variables que son guardadas pero no resueltas.

```
STORE (DEN1) ; STORE (VISL)
STORE (CP1)
```

```
***COMPONENTES CARTESIANAS DE LA VELOCIDAD
STORE (UCRT, VCRT)
```

- El comando GCV activa un algoritmo de resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para cuando se utilizan mallas ajustadas al cuerpo que difieren mucho de las mallas ortogonales. Para obtener más información acerca de este método se puede consultar la encyclopaedia (GENERAL COLOCATED VELOCITY METHOD). Usamos el método GCV para minorizar los problemas de convergencia.

```
***Metodo GCV para BFC
GCV=T
```

- A continuación se introducen los modelos de turbulencia. Para indicar el modelo de convergencia se utiliza el comando TURMOD. En nuestro caso activamos el modelo de convergencia  $k-w$  para Reynolds bajos de la siguiente manera.

```
TURMOD (KOMODL-LOWRE)
```

- Ordenamos que realice el cálculo de  $y^+$  y de los coeficientes de transferencia de calor de las paredes a través de los comandos YPLS y WALPRN respectivamente.

```
YPLS=T; WALPRN=T
```

- Con la siguiente orden le indicamos que se almacene el la velocidad cinemática turbulenta.

```
STORE (ENUT)
```

```
GROUP 8. Terms (in differentialequations) &devices
```

```
TERMS (TEMP, N, Y, Y, Y, Y, N)
```

- Continuamos introduciendo las propiedades del fluido:

```
***PROPIEDADES CONSTANTES
```

```
RHO1=RHO; ENUL=VISCO; PRNDTL (TEMP) =PARA
```

```
***Prandtl y cpconstantes
```

```
PRT (TEMP) =0.86
```

### 4.6.4. Inicialización de variables

- En el grupo 11 introducimos los valores iniciales de las variables a partir de las que el código comenzará a realizar el cálculo. Para definir estos valores iniciales el programa utiliza el comando FIINIT, seguido del nombre de la variable entre paréntesis e igualándolo al valor inicial.

```
FIINIT(P1)=1.0E-03
***Si se impone qflu:
TDELTA=(QFLU*HPLA/CONDUCT)
VELINI=(AGRAV*COS(TETA)*BETA*TDELTA*HPLA)**0.5
FIINIT(U1)=0.0
FIINIT(V1)=0.0
FIINIT(TEM1)=TREF
INTEN=0.05
ENUTINI=40.*VISCO;FIINIT(ENUT)=ENUTINI
KEIN=(3/2)*(INTEN**2.)*(VELINI**2.)
FIINIT(KE)=KEIN
EPIN=0.09*(KEIN**2.)/ENUTINI
OMEGIN=EPIN/(0.09*KEIN)
FIINIT(OMEG)=OMEGIN
```

```
mesg(velini :velini: omegin :omegin: epin :epin: kein :kein:
```

- El comando RESTRT(all) permite continuar con un cálculo ya iniciado. Los valores iniciales de los que parte el programa serán los del cálculo anterior que tomará del fichero phi si este comando está activo.

```
RESTRT(all)
```

```
STORE(PRPS)
FIINIT(PRPS)=-1
```

```
INIT(MURO,PRPS,0.0,199.0)
```

#### 4.6.5. Especificación de las condiciones de contorno y fuente de flotación

- En el grupo 13 se introducen las condiciones de contorno. Con el comando PATCH se indica la localización en la que se impondrá la condición de contorno adecuada usando el comando COVAL. Con el comando COVAL se especifica un coeficiente (CO) y un valor (VAL) dicho coeficiente multiplica a la diferencia entre el valor de la variable y un cierto valor de referencia, VAL, para que resulte la fuente apropiada que da lugar a la condición de contorno necesaria:

```
GROUP 13. Boundaryconditions and specialsources
***Paredes muro***
PATCH(MURO-1,EWALL,NX1,NX1,NY1+1,NY,1,NZ2,1,1)
COVAL(MURO-1,V1,GRND2,0.0)
COVAL(MURO-1,W1,GRND2,0.0)
COVAL(MURO-1,OMEG,GRND2,GRND2)
COVAL(MURO-1,KE,1.0,0.0)

PATCH(MURO-2,WWALL,NX1+NX3+1,NX1+NX3+1,NY1+1,NY,1,NZ2,1,1)
COVAL(MURO-2,V1,GRND2,0.0)
COVAL(MURO-2,W1,GRND2,0.0)
COVAL(MURO-2,OMEG,GRND2,GRND2)
COVAL(MURO-2,KE,1.0,0.0)
```

#### Capítulo 4. Modelización numérica

```
PATCH (MURO-3, NWALL, NX1+1, NX1+NX3, NY1, NY1, 1, NZ2, 1, 1)
COVAL (MURO-3, U1, GRND2, 0.0)
COVAL (MURO-3, W1, GRND2, 0.0)
COVAL (MURO-3, OMEG, GRND2, GRND2)
COVAL (MURO-3, KE, 1.0, 0.0)
```

```
PATCH (MURO-4, LWALL, NX1+1, NX1+NX3, NY1+1, NY, NZ2+1, NZ2+1, 1, 1)
COVAL (MURO-4, U1, GRND2, 0.0)
COVAL (MURO-4, V1, GRND2, 0.0)
COVAL (MURO-4, OMEG, GRND2, GRND2)
COVAL (MURO-4, KE, 1.0, 0.0)
```

\*\*\*PARED SUPERIOR\*\*\*

```
PATCH (PARED-SU, NWALL, NX1+1, NX, NY, NY, 1, NZ, 1, 1)
COVAL (PARED-SU, U1, GRND2, 0.0)
COVAL (PARED-SU, W1, GRND2, 0.0)
```

\*\*\*qflu flujo de calor

```
COVAL (PARED-SU, OMEG, GRND2, GRND2)
COVAL (PARED-SU, KE, 1.0, 0.0)
```

\*\*\*SALIDA SUPERIOR\*\*\*

```
PATCH (ENT-SU, NORTH, 1, NX1, NY, NY, 1, NZ, 1, 1)
COVAL (ENT-SU, P1, FIXVAL, 0.0)
COVAL (ENT-SU, U1, ONLYMS, 0.0)
COVAL (ENT-SU, V1, ONLYMS, 0.0)
COVAL (ENT-SU, W1, ONLYMS, 0.0)
COVAL (ENT-SU, TEMP, ONLYMS, TREF)
COVAL (ENT-SU, KE, ONLYMS, KEIN)
COVAL (ENT-SU, OMEG, ONLYMS, OMEGIN)
```

\*\*\*PARED IZQUIERDA\*\*\*

```
PATCH (PARED-IZ, WWALL, 1, 1, 1, NY, 1, NZ, 1, 1)
COVAL (PARED-IZ, V1, GRND2, 0.0)
COVAL (PARED-IZ, W1, GRND2, 0.0)
```

\*\*\*qflu flujo de calor

```
COVAL (PARED-IZ, TEMP, FIXFLU, QFLU/CP)
COVAL (PARED-IZ, OMEG, GRND2, GRND2)
COVAL (PARED-IZ, KE, 1.0, 0.0)
```

\*\*\*PARED DERECHA\*\*\*

```
PATCH (PARED-DE, EWALL, NX, NX, NY1+1, NY, 1, NZ, 1, 1)
COVAL (PARED-DE, V1, GRND2, 0.0)
COVAL (PARED-DE, W1, GRND2, 0.0)
```

\*\*\*qflu flujo de calor

```
COVAL (PARED-DE, OMEG, GRND2, GRND2)
COVAL (PARED-DE, KE, 1.0, 0.0)
```

## Capítulo 4. Modelización numérica

\*\*\*ENTRADA DERECHA

```
PATCH (ENT-DE, EAST, NX, NX, 1, NY1, 1, NZ, 1, 1)
COVAL (ENT-DE, P1, -2.*RHO, 0.0)
COVAL (ENT-DE, U1, ONLYMS, same)
COVAL (ENT-DE, V1, ONLYMS, 0.0)
COVAL (ENT-DE, W1, ONLYMS, 0.0)
COVAL (ENT-DE, TEMP, ONLYMS, TREF)
COVAL (ENT-DE, KE, ONLYMS, KEIN)
COVAL (ENT-DE, OMEG, ONLYMS, OMEGIN)
```

\*\*\*SUELO\*\*\*

```
PATCH (PARED-INF, SWALL, 1, NX, 1, 1, 1, NZ, 1, 1)
COVAL (PARED-INF, U1, GRND2, 0.0)
COVAL (PARED-INF, W1, GRND2, 0.0)
```

\*\*\*qflu flujo de calor

```
COVAL (PARED-INF, OMEG, GRND2, GRND2)
COVAL (PARED-INF, KE, 1.0, 0.0)
```

\*\*\*PARED 3D\*\*\*

```
PATCH (PA3D-H, HWALL, 1, NX, 1, NY, NZ, NZ, 1, 1)
COVAL (PA3D-H, U1, GRND2, 0.0)
COVAL (PA3D-H, V1, GRND2, 0.0)
COVAL (PA3D-H, OMEG, GRND2, GRND2)
COVAL (PA3D-H, KE, 1.0, 0.0)
```

\*\*\*PLANO SIMETRIA 3D

```
PATCH (PA3D-L, LOW, 1, NX, 1, NY, 1, 1, 1, 1)
```

\*\*\*FLOTACION BOUSSINESQ

```
BUOYA=0.;BUOYB=AGRAV;BUOYC=0.
BUOYD=BETA
BUOYE=BUOYD*TREF
PATCH (BUOY, PHASEM, 1, NX, 1, NY, 1, NZ, 1, 1)
COVAL (BUOY, U1, FIXFLU, GRND3)
COVAL (BUOY, V1, FIXFLU, GRND3)
COVAL (BUOY, W1, FIXFLU, GRND3)
```

\*\*\*FLOTACION DIF. DENSIDAD

```
PATCH (KESOURCE, PHASEM, 1, NX, 1, NY, 1, NZ, 1, 1)
COVAL (KESOURCE, KE, GRND4, GRND4)
COVAL (KESOURCE, OMEG, GRND4, GRND4)
```

### 4.6.6. Especificación de otros detalles de la simulación numérica

- Con el commando LSWEET se establece el número de iteraciones de calculo que se realizarán.

GROUP 15. Termination of sweeps

LSWEET=200

GROUP 16. Termination of iterations

```
SELREF=T;RESFAC=1.E-16
```

- En el grupo 17 se indican los parámetros de relajación de las ecuaciones. a través del comando RELAX. Phoenics permite la introducción de estos parámetros de dos maneras, con el comando LINRLX y con el comando FALSDT. El primer comando consiste en una relajación de tipo lineal que partiendo de un valor inicial se llega al valor final multiplicando el incremento de la variable dependiente por un coeficiente de relajación y a continuación sumando este valor al de la variable inicial. El comando FALSDT introduce un término fuente en cada celda igual a la masa de la celda dividido por el tamaño del paso de tiempo.

GROUP 17. Under-relaxation devices

```
KELIN=3
LITER(P1)=20;LITER(TEMP)=20
LITER(U1)=20;LITER(V1)=20;LITER(W1)=20
RELAX(P1,LINRLX,0.3)
RELAX(U1,FALSDT,0.005)
RELAX(V1,FALSDT,0.005)
RELAX(W1,FALSDT,0.005)
RELAX(TEMP,LINRLX,0.3)
RELAX(KE,LINRLX,0.1)
RELAX(OMEG,LINRLX,0.1)
RELAX(ENUT,LINRLX,0.3)
```

#### 4.6.7. Especificación de la simulación transitoria

Para las simulaciones de los casos transitorios, debemos realizar una serie de modificaciones en el q1 anterior.

- En el grupo 2 activamos la simulación transitoria. Utilizando los comandos LSTEP y TLAST. Con el comando LSTEP indicamos el número de pasos de tiempo en cada simulación, mientras que con el comando TLAST indicamos el tiempo de total de cada simulación transitoria.

GROUP 2. Transience; time-step specification

```
STEADY=F
LSTEP=4
TLAST=0.2
GRPDWR(T,LSTEP,TLAST,1.0)
```

- En el comando TERMS del grupo 8 se activa el término transitorio.

GROUP 8. Terms (in differentialequations) &devices

```
TERMS(TEMP, N,Y,Y,Y,Y,N)
```

- En las condiciones de contorno fijamos el tiempo en LSTEP, esto implica que las condiciones de contorno están activas durante todo el intervalo, desde t=0 hasta el instante actual.

```
***Paredes muro***
```

#### Capítulo 4. Modelización numérica

```
PATCH (MURO-1, EWALL, NX1, NX1, NY1+1, NY, 1, NZ2, 1, LSTEP)
PATCH (MURO-2, WWALL, NX1+NX3+1, NX1+NX3+1, NY1+1, NY, 1, NZ2, 1, LSTEP)
PATCH (MURO-3, NWALL, NX1+1, NX1+NX3, NY1, NY1, 1, NZ2, 1, LSTEP)
PATCH (MURO-4, LWALL, NX1+1, NX1+NX3, NY1+1, NY, NZ2+1, NZ2+1, 1, LSTEP)

***PARED SUPERIOR***
PATCH (PARED-SU, NWALL, NX1+1, NX, NY, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)

***SALIDA SUPERIOR***

PATCH (ENT-SU, NORTH, 1, NX1, NY, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)

***PARED IZQUIERDA***

PATCH (PARED-IZ, WWALL, 1, 1, 1, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)

***PARED DERECHA***

PATCH (PARED-DE, EWALL, NX, NX, NY1+1, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)

***ENTRADA DERECHA

PATCH (ENT-DE, EAST, NX, NX, 1, NY1, 1, NZ, 1, LSTEP)

***SUELO***

PATCH (PARED-INF, SWALL, 1, NX, 1, 1, 1, NZ, 1, LSTEP)

***PARED 3D***

PATCH (PA3D-H, HWALL, 1, NX, 1, NY, NZ, NZ, 1, LSTEP)

***PLANO SIMETRIA 3D

PATCH (PA3D-L, LOW, 1, NX, 1, NY, 1, 1, 1, LSTEP)

***FLOTACION BOUSSINESQ

PATCH (BUOY, PHASEM, 1, NX, 1, NY, 1, NZ, 1, 1)

***FLOTACION DIF. DENSIDAD

PATCH (KESOURCE, PHASEM, 1, NX, 1, NY, 1, NZ, 1, 1)
```

- Además, debemos de desactivar los comandos relax que contengan la opción FALSDT, ya que esta opción introduce un intervalo falso de tiempo en algunos casos. Como el caso ya es transitorio este intervalo falso de tiempo podría alterar la solución. Solamente se utilizarían estas opciones de relajación para casos que a pesar de ser transitorios puedan presentar problemas de convergencia.

## 4.7. Mallado

La estructura o topología de una malla consiste en la forma de disponer los puntos nodales en el dominio considerado. Cuando se utiliza el método de diferencias finitas, los nodos de la malla constituyen los puntos de cálculo de las variables, y las líneas que unen los nodos confieren a la malla el clásico aspecto de enrejado. Cuando se utiliza el método de los volúmenes finitos, el método particular de discretización de las ecuaciones puede determinar el método de mallado. En el método de los elementos finitos, los nodos constituyen los puntos de confluencia de los elementos, que en principio pueden disponerse de cualquier forma. Puede efectuarse la siguiente clasificación atendiendo a la topología de la malla:

- *Regulares*: Los puntos de la malla están dispuestos regularmente sobre un volumen prismático que puede ser rectilíneo o curvilíneo. Estas mallas también se denominan mallas estructuradas, o también mallas mapeadas, en el caso de que deriven de otra geometría distinta.
- *Irregulares*: Los puntos de la malla se disponen de un modo irregular sobre una malla que se ajusta a un dominio de cálculo de forma arbitraria, y admitiendo además refinamientos locales en las zonas de interés. Estas mallas también se conocen como mallas no estructuradas, o libres.

El método de las diferencias finitas requiere mallas regulares; el método de los elementos finitos puede utilizar mallas irregulares, y el método de los volúmenes finitos en principio también, aunque los mayores desarrollos conseguidos con este método han tenido lugar utilizando mallas regulares. Cuando el dominio de interés es complejo, es preciso utilizar en ocasiones mallas no ortogonales.

#### 4.7.1 Creación del mallado en Phoenics

La filosofía general de Phoenics consiste en utilizar mallados estructurados. No obstante, en las últimas versiones del código se han incorporado opciones de mallado superpuesto o por bloques, e incluso de mallado no estructurado. Por otra parte, existen distintas opciones en función de la morfología del caso a estudiar:

- *Mallado cartesiano*: La orden PIL típica utilizada para la generación de las mallas es 'grdpwr', que introduce intervalos temporales y espaciales, según el siguiente esquema:

grdpwr( $X, Y, Z$  ó  $T$ , número de intervalos, espacio total, exponente).

Con la instrucción anterior, se consigue construir mallas rectangulares uniformes.

- *Mallado cilíndrico ortogonal*: Por defecto, la variable 'cartes' está activada: 'cartes=t', de modo que la malla que se utiliza está en un sistema de coordenadas cartesiano, con las longitudes en metros; si se hace 'cartes=f' en el fichero 'q1', se utiliza un sistema de coordenadas cilíndrico, en el que la dirección longitudinal o dirección del eje  $z$ , la dirección radial es  $y$ , y la dirección angular es  $x$ , expresada en radianes. Teniendo en cuenta esta particularidad, las opciones expuestas anteriormente para el mallado cartesiano son válidas para el mallado axilimétrico.
- *Mallado ajustado al cuerpo*: Cuando se quieren crear mallas curvilíneas, la mejor opción es la de recurrir a una malla ajustada al cuerpo ('Body Fitted Coordinates', BFC), siendo necesario declarar el comando 'bfc=t' en el fichero 'q1'. Se trata de la opción más generalista de mallado que tiene Phoenics. Las sentencias típicas del sistema BFC son del tipo

gset(arg,.....,etc),

de modo que si el primer argumento (arg) del comando es P, L, o F, se definen respectivamente *puntos*, *líneas* y *marcos*.

#### 4.7.2 Mallado en la cavidad

El mallado que se ha elegido para el estudio del fluido en las diferentes geometrías que se estudian en este trabajo han sido un mallado ajustado al cuerpo. En vista de nuestras geometrías, tanto para el canal simple como para la cavidad 2D y cavidad 3D, podría parecer más coherente utilizar un mallado cartesiano, sin embargo el mallado ajustado al cuerpo nos permite variar la geometría del problema con más facilidad.

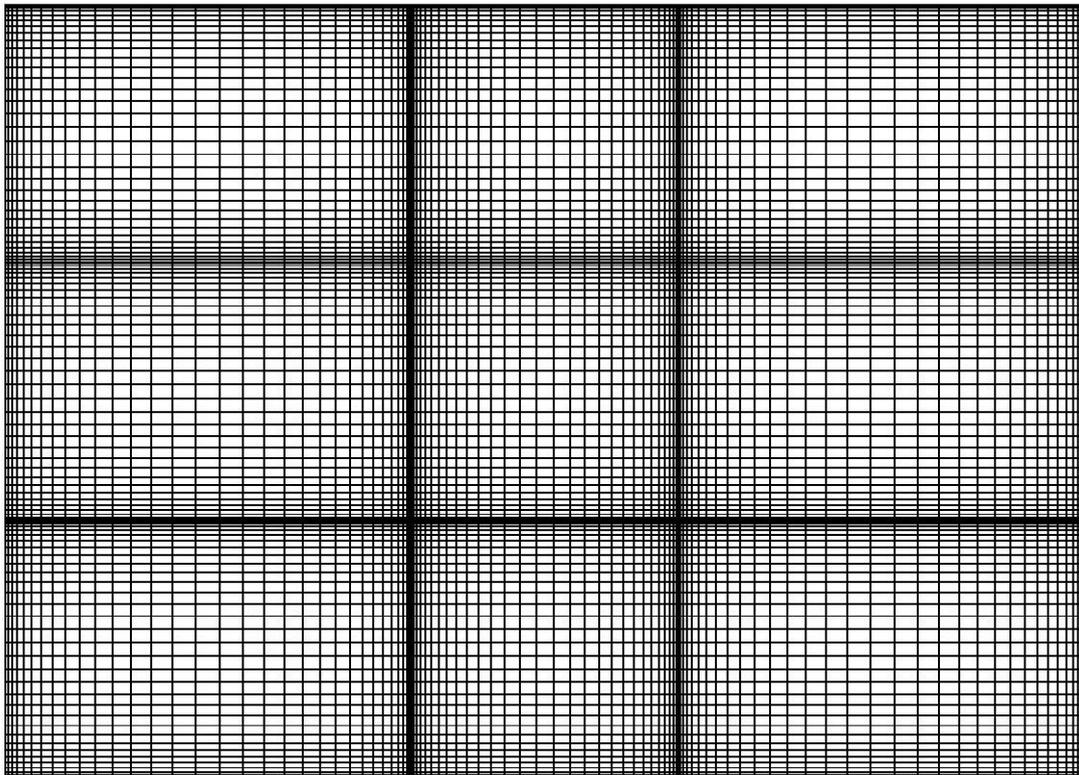


Figura 4-6 Mallado ajustado al cuerpo

Si nos fijamos en las figuras vemos como en las proximidades de las paredes, o de los posibles obstáculos que se coloquen para estudiar su efecto, la densidad del mallado es mayor; con ello se pretende reproducir con mayor fiabilidad los efectos que se producen en las cercanías de las paredes y que se explicaran a continuación. Según nos alejamos de las paredes, o los obstáculos, la densidad del mallado disminuye.

El mallado puede variar dentro de un mismo caso que se esté estudiando, es decir, si por ejemplo se está estudiando el flujo en la cavidad con condición de calentamiento isoterma el mallado puede variar de un número de Rayleigh a otro, esto se debe a que según aumenta dicho número es más complicado reproducir los efectos producidos por la presencia de paredes. Por lo tanto para valores de Rayleigh elevados la densidad de la malla en las cercanías de las paredes irá aumentando. Como se explica a continuación, se trata de mantener el valor de  $y^+$  en un rango adecuado para conseguir una simulación correcta del flujo, con independencia de la densidad de la malla.

#### 4.7.3 Influencia del mallado

Para realizar un estudio de la influencia de la densidad de mado en flujos transicionales y turbulentos, realizaremos simulaciones para el caso de una cavidad tridimensional como la de la Figura 2.4, con número de Rayleigh  $10^9$ , temperatura constante en la pared, propiedades constantes y aproximación de Bousinessq. Para ello estudiaremos la variación de los parámetros  $y^+$  y el número de número total de celdas.

Nº de celdas	$y^+$	$N_{UH,B}/N_{UH,B\ ref}$	$M_B/M_{B\ ref}$
100x100x50	0,592	1,007	0,988
85x85x42	0,729	1,012	0,990
70x35x35	0,427	1,000	1,000
70x35x35	1,044	1,051	1,106
70x35x35	3,382	1,205	0,999
60x60x30	1,503	1,097	0,940
50x50x25	1,899	1,122	0,952

Los resultados anteriores se calculan usando un mado estructurado no uniforme. La malla de referencia fue la correspondiente a 70x35x35, con un valor medio de  $y^+$  de 0,427. Se observa que oscilaciones no muy grandes de  $y^+$ , con valores por debajo de la unidad, producen pequeñas oscilaciones en el Nusselt medio y en el flujo másico. Por esta razón la mayoría de simulaciones realizadas en este trabajo se realizan con valores de  $y^+$  comprendidas entre 0,4 y 0,8.

## 4.8 Simulación en presencia de paredes

Se ha expuesto en el capítulo anterior la influencia que tienen las paredes en el flujo turbulento, es evidente que el modelado de la zona cercana a la pared resultará decisivo a la hora de obtener resultados numéricos satisfactorios. Se puede decir que una simulación precisa del flujo en la región cercana a la pared determina el éxito de las predicciones de un flujo en presencia de las mismas. Para modelos de turbulencia se presentan dos opciones en el modelado del flujo adyacente al contorno de una pared:

- En la primera de ellas, la región interior afectada por la viscosidad no es calculada. En su lugar, se emplean fórmulas semiempíricas, llamadas **leyes de pared** (*Wall Function*), que actúan como un puente para resolver el espacio entre la pared y la zona plenamente turbulenta de la capa límite. El uso de estas leyes obvia la necesidad de modificar los modelos de turbulencia, así como el afinamiento de las mallas en puntos próximos a las paredes para tener en cuenta la presencia de éstas. Esta opción se usa en modelos que no simulan directamente el flujo en las paredes si no que lo calculan a partir de la ley de la pared.
- En la segunda opción, los modelos de turbulencia sí son modificados para permitir que la **capa límite** sea resuelta y no simulada (*Enhanced Wall Treatment*). Para ellos requieren de un mado de una resolución suficiente hasta la pared del conducto. Esta es la opción adoptada en este trabajo.

En la mayoría de flujos con alto número de Reynolds, la aproximación mediante funciones de pared ahorra sustancialmente recursos computacionales debido a que la región no se encuentra afectada por la viscosidad y no necesita ser resuelta. Esta aproximación es popular porque es económica, robusta y puede ser razonablemente precisa. Sin embargo es inadecuada en situaciones donde los efectos por bajo número de Reynolds son dominantes y las suposiciones tomadas acerca de las funciones de pared dejan de ser válidas, como es nuestro caso.

Como se ha explicado anteriormente, para llevar a cabo una simulación adecuada en las cercanías de la pared se ha procurado siempre tener valores de  $y^+$  lo suficientemente bajos. En este trabajo se han trabajado con valores de  $y^+$  siempre por debajo de 1,5, aunque por lo general nunca se ha excedido la unidad (el rango  $0,4 \leq y^+ \leq 0,8$  es el más habitual), solo se ha superado en situaciones complicadas de simular; éstas han sido para valores de Rayleigh elevados, puesto que cuanto más turbulento era el flujo más complicado era de mantener el valor medio de  $y^+$  por debajo de la unidad, teniendo el riesgo de obtener una solución no convergida.

# Capítulo 5. Validación de la modelización numérica

## 5.1. Convección natural en un canal

En el presente capítulo, se representan los resultados obtenidos para configuraciones 2D, en régimen estacionario y transitorio, con el doble objetivo de por un lado comprender las características propias del flujo objeto de estudio y por otro de comparar los resultados obtenidos con otros de referencia. De esta manera se validarán las simulaciones numéricas y se podrá emprender después la tarea de simular los flujos 3D en régimen transitorio. En primer lugar se van a comparar los resultados que se han obtenido en la simulación de un flujo convectivo natural en un canal vertical (Figura 2.1) para un rango de valores de Rayleigh, con los resultados de referencia tomados de la bibliografía.

En teoría, cuando el canal es lo suficientemente estrecho, el perfil de velocidad en el canal se aproxima al de Hagen-Poiseuille, y la temperatura en la sección de entrada del canal es aproximadamente igual a la temperatura de las placas  $T_w$ . Si se acepta la hipótesis de flujo plenamente desarrollado puede suponerse que la temperatura del fluido en el canal es  $T(x,y) \approx T_w$  (cumpliéndose que  $T_w - T(x,y) < T_w - T_\infty$ ) y que el campo de velocidades cumple  $v = 0$ ,  $\partial u / \partial x = 0$ , con lo que se puede demostrar que

$$\text{Nu} = \text{Ra}^* / 24.$$

que es conocida como la asíntota de Elenbaas para flujo plenamente desarrollado.

Cuando el número de Rayleigh modificado es suficientemente alto, el flujo está dominado por las capas límites que se forman junto a las paredes, pudiéndose poner el número de Nusselt como:

$$\text{Nu} = C(\text{Ra}^*)^m,$$

dependiendo  $C$  y  $m$  de las condiciones de calentamiento. Pueden encontrarse distintos valores para ambas constantes según la bibliografía donde se busque, para este trabajo se ha tomado  $C = 0,6$  y  $m = 0,25$ .

El canal que se va a simular posee una longitud  $H$  y una separación entre placas  $b$ , cuya relación es  $b/H = 0,1$ . Las paredes del canal son isotermas. En la sección de salida se supone que la presión es igual a la ambiente, es decir  $p = p_\infty$ , y se desprecian las variaciones de las componentes de la velocidad y la temperatura en la dirección longitudinal. En cuanto a la sección de entrada se supone

que el flujo de masa entrante depende de la raíz cuadrada de la diferencia entre la presión ambiente y la presión en la celda de entrada,  $\dot{m} = \rho b(-2p/\rho)^{1/2}$ ; esta condición de contorno es equivalente a la aplicación de la ecuación de Bernoulli entre un punto donde se tienen las propiedades de remanso y un punto de la sección de entrada. La temperatura del fluido entrante se toma igual a la temperatura ambiente ( $T = T_\infty$ ), y se supone  $\partial T / \partial x = 0$ .

El número de Nusselt local se calcula como el gradiente de temperatura en la pared, adimensionalizado con una longitud característica  $b$  y una diferencia de temperatura característica ( $T_w - T_\infty$ ), siguiendo la directriz marcada en el apartado 2.2.

$$Nu_x = \frac{-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w b}{T_w - T_\infty}.$$

El número de Nusselt medio se obtiene por integración:

$$Nu_H = Nu_L = \frac{1}{H} \int_0^H Nu_x dx.$$

Los resultados numéricos obtenidos para el número de Nusselt, en  $10^{-1} \leq Ra \leq 10^5$ , así como las asíntotas de referencia (flujo plenamente desarrollado, para  $Ra$  bajos, y asíntota de capa límite, para  $Ra$  altos), se muestra en la Figura 5.1.

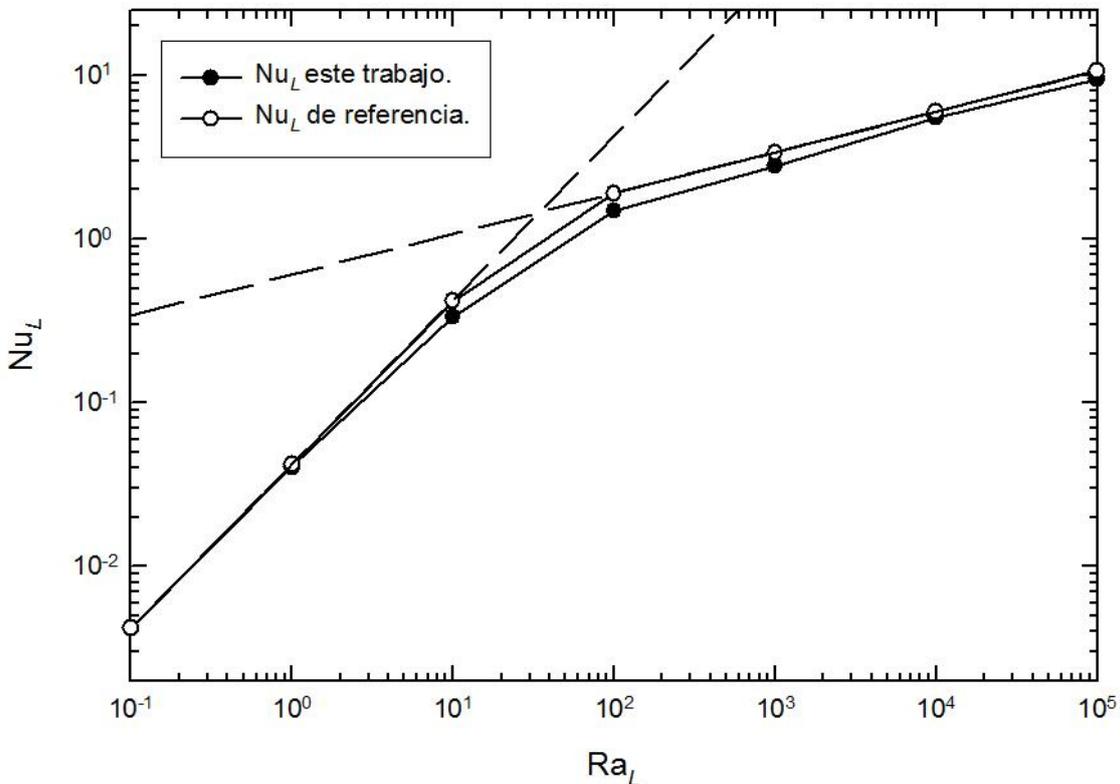


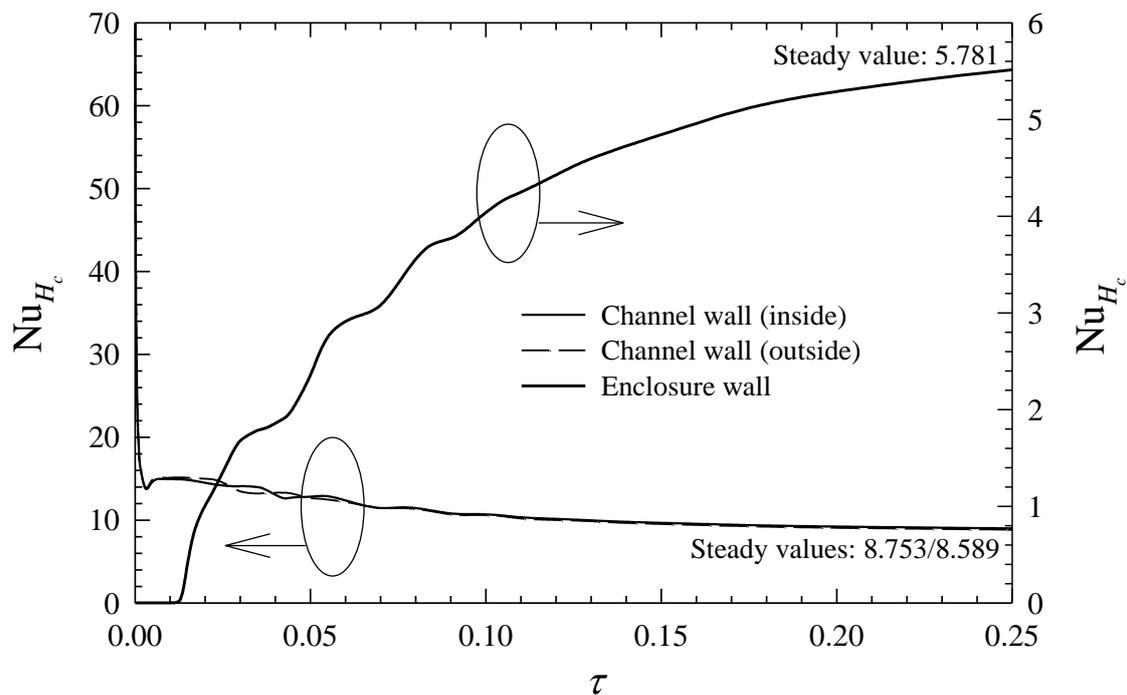
Figura 5-1. Resultados obtenidos en la simulación de un flujo convectivo en un canal vertical en comparación con los resultados de referencia.

Como se puede apreciar en la Figura 5.1 la aproximación es muy buena, de modo que se puede validar este método para la resolución de este tipo de flujos. Esta conclusión está en consonancia con los resultados previos alcanzados en el Grupo de Investigación de Mecánica de Fluidos de la UPCT.

## 5.2 Flujo convectivo transitorio en un recinto cerrado

Realizamos el estudio de un flujo convectivo transitorio en una configuración de una cavidad bidimensional cerrada con un canal vertical en el interior (Figura 2.3). Utilizaremos estos resultados como validación a través de la comparación con resultados del artículo de referencia de Shyy y Rao [33].

Comenzamos el estudio con una representación del número de Nusselt en función del número adimensional de Fourier en distintos puntos de la configuración. Se calcula el número de Nusselt en la pared del cerramiento y en las caras interior y exterior de la pared del canal para un número de Rayleigh de  $7 \times 10^4$ , con este número de Rayleigh el flujo es fundamentalmente laminar y corresponde a un número de Grashof de  $10^5$  utilizado en el artículo de referencia. La malla utilizada fue de  $100 \times 100$ .



5-2 Número de Nusselt en función del número de Fourier en cavidad bidimensional cerrada con canal vertical interior

Los resultados temporales obtenidos se ajustan bastante bien a los resultados de referencia. Se ha comprobado que la evolución temporal del número de Nusselt es muy similar a la obtenida por Shyy & Rao. Además, existe un grado de aproximación a los valores estacionarios alcanzados por Shyy & Rao. El valor medio del número de Nusselt en la pared del recinto está en torno a 5,3, en el trabajo de Shyy & Rao, mientras que en nuestra trabajo está en torno a 5.8. Con respecto al Nusselt en las paredes del canal, nosotros obtenemos un valor medio en torno a 5,6, mientras que Shyy & Rao obtienen un valor de 8 aproximadamente. La aproximación en el caso de flujo másico es mayor, las oscilaciones temporales del flujo másico indicido en el borde de salida del canal interior siguen cualitativa y cuantitativamente entre la solución de Shyy & Rao. En cuanto al valor

estacionario para altos números de Fourier, el grado de coincidencia es excelente (en torno a 31 en ambos casos).

Representamos en la Figura 5.3 el perfil de velocidad adimensionalizada a la salida del canal en función del número de Fourier. Se representan tanto con los valores de velocidad media como con la velocidad local en un punto de la pared del canal tan y como se indica en la figura.

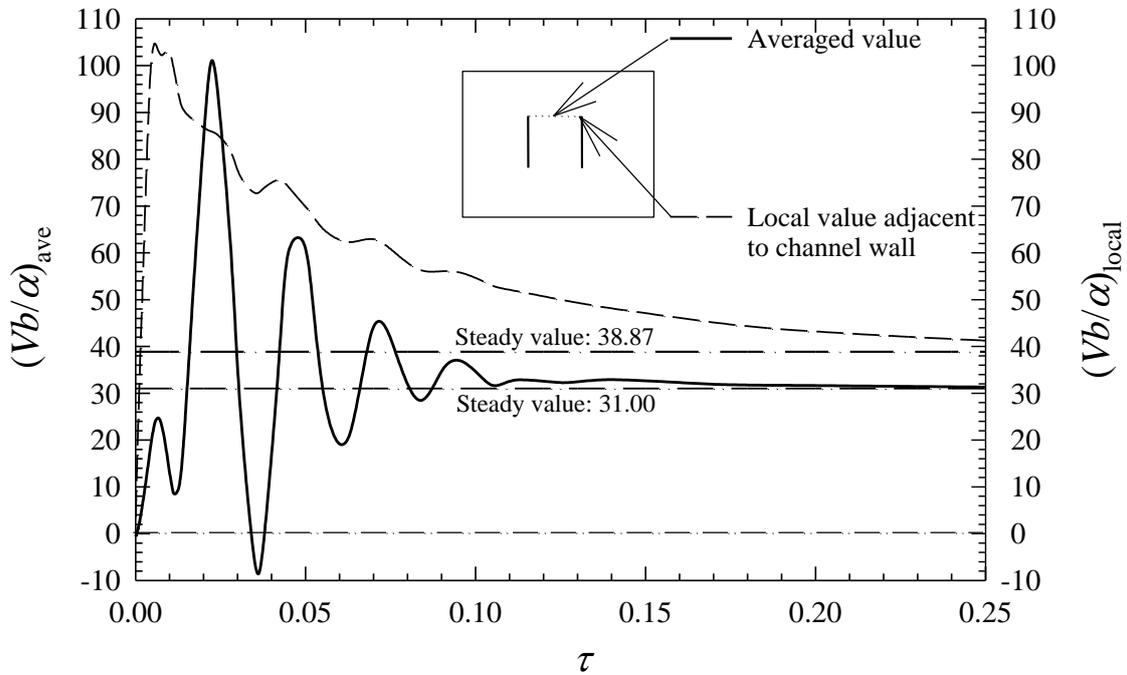


Figura 5-3 Velocidad adimensional en función del número de Fourier en cavidad bidimensional cerrada con canal vertical interior

La evolución del perfil de velocidades a la salida del canal queda representada en las Figuras 5.4 y 5.5. Se observa un flujo ascendente en las proximidades de las paredes del canal y un flujo descendente en el centro. Para valores bajos del número de Fourier se observa un aumento de los valores de velocidad, mientras que para altos valores del número de Fourier estos los valores vuelven a disminuir.

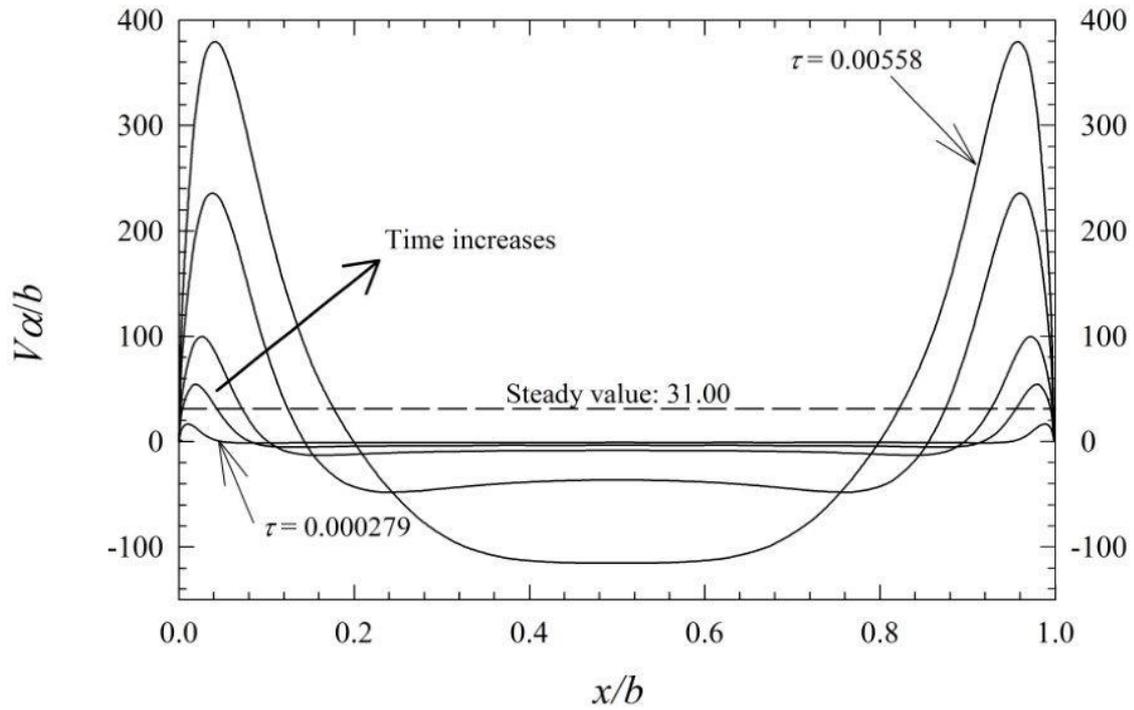


Figura 5-4 Evolución del perfil de velocidades en la salida de canal en cavidad bidimensional cerrada

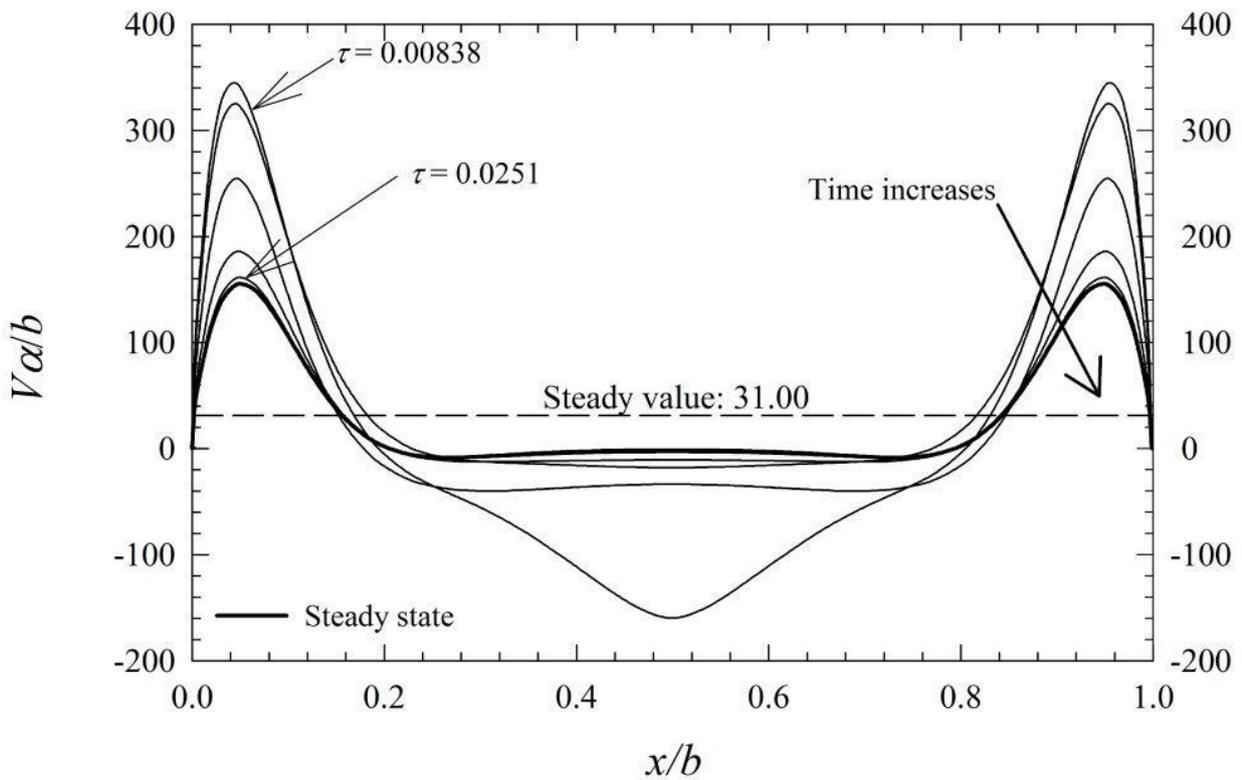


Figura 5-5 Evolución del perfil de velocidades en la salida de canal en cavidad bidimensional cerrada

### *Capítulo 5. Validación de la modelización numérica*

Con el fin de comprender mejor la evolución transitoria del flujo Por último representamos para distintos valores representativos de tiempo distintas propiedades tales como la temperatura y las velocidades.

En las Figuras de la 5.6 a la 5.11 observamos la evolución de las líneas isothermas para distintos números de Fourier.

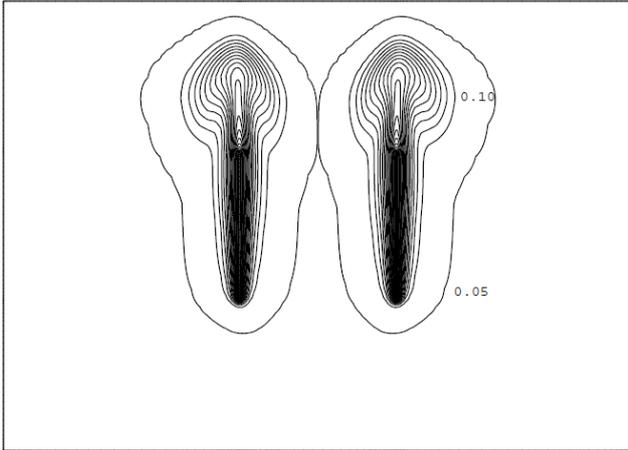


Figura 5-6 Líneas isotermas para  $Fo=0,00068$

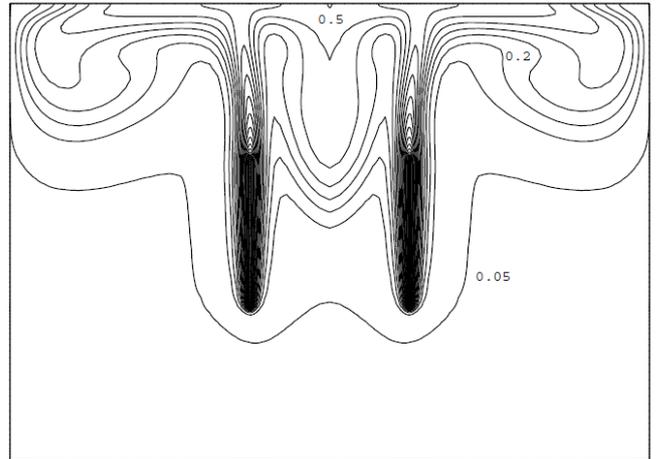


Figura 5-7 Líneas isotermas para  $Fo=0,00172$

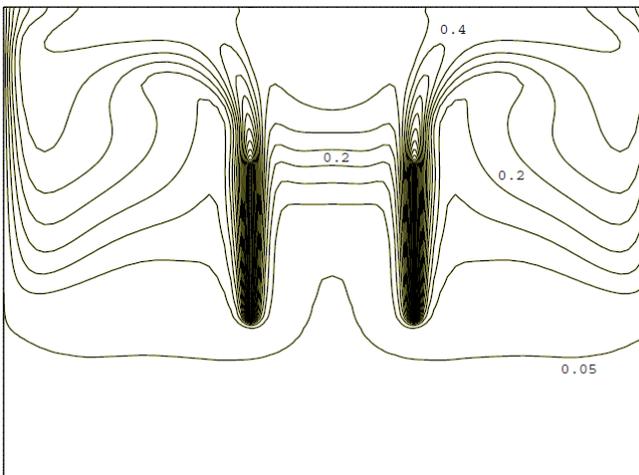


Figura 5-8 Líneas isotermas para  $Fo=0,00344$

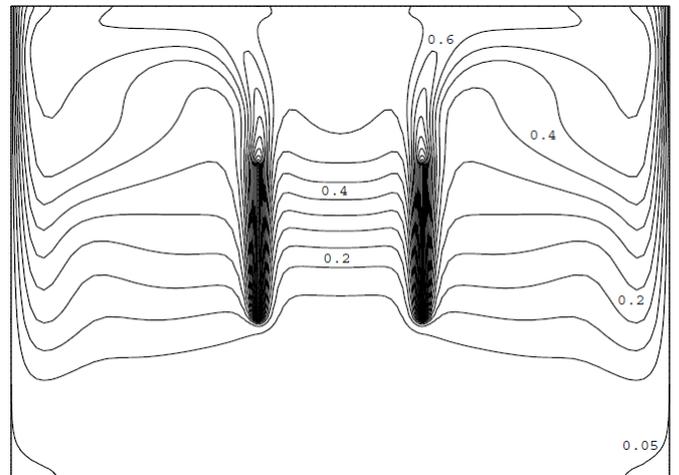


Figura 5-9 Líneas isotermas para  $Fo=0,00688$

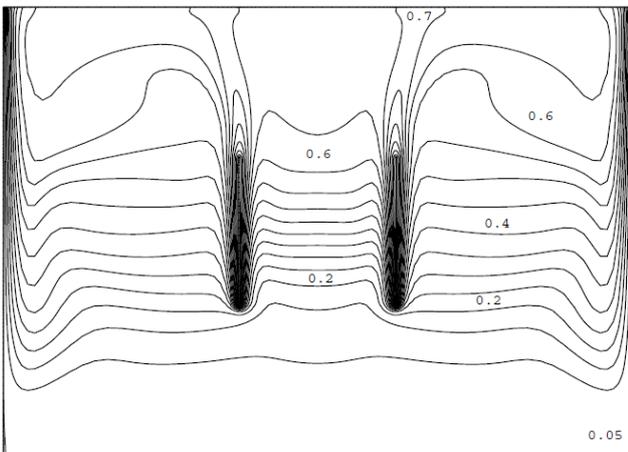


Figura 5-10 Líneas isotermas para  $Fo=0,0129$

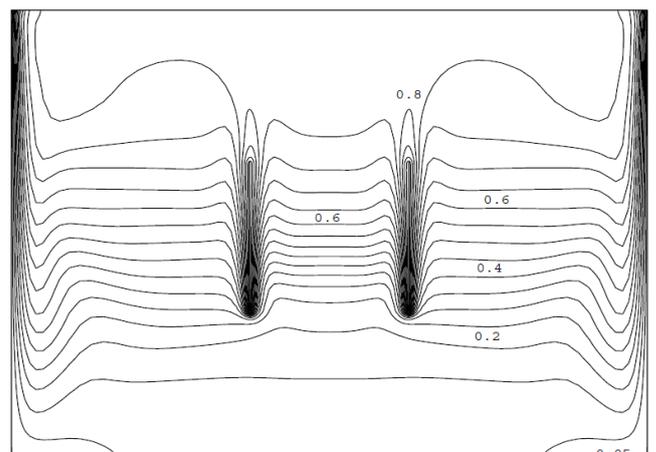


Figura 5-11 Líneas isotermas para  $Fo=0,0447$

Observamos en la evolución de las líneas isotermas como comienzan calentándose únicamente el aire alrededor de las paredes del canal manteniéndose frío el resto de la cavidad (Figura 5.6), a

continuación comienza a calentarse la parte superior de la cavidad para poco a poco ir calentándose la parte inferior de la cavidad, hasta que se observa una estratificación horizontal de las temperaturas, más frío en la parte inferior y más caliente según subimos, notándose únicamente un aumento de la temperatura en las cercanías de las paredes del canal y una disminución de la temperatura en las cercanías de las paredes de la cavidad cerrada.

Representación en las Figuras de la 5.12 a la 5.17 una evolución de los vectores de velocidad en para distintos números de Fourier

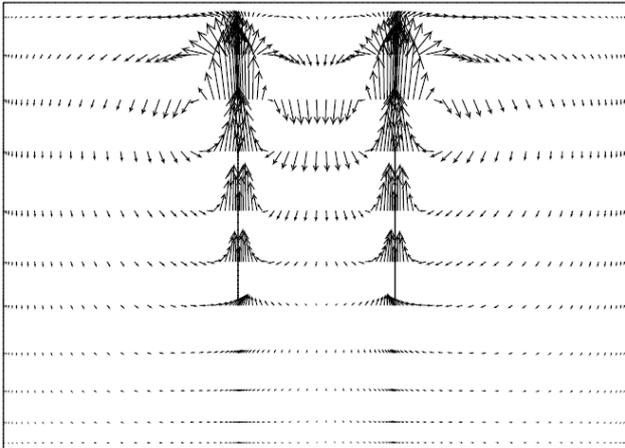


Figura 5-12 Vectores de velocidad para  $Fo=0,00068$

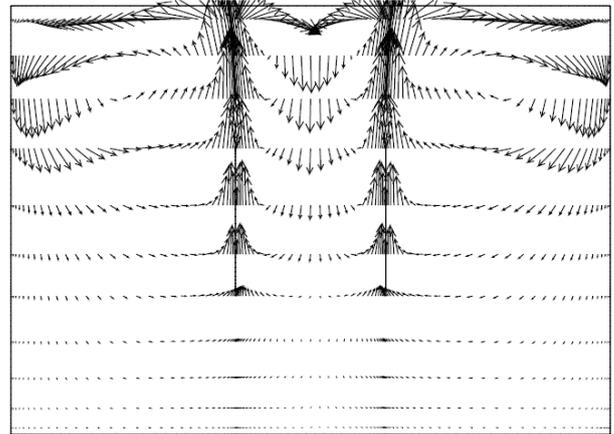


Figura 5-13 Vectores de velocidad para  $Fo=0,00172$

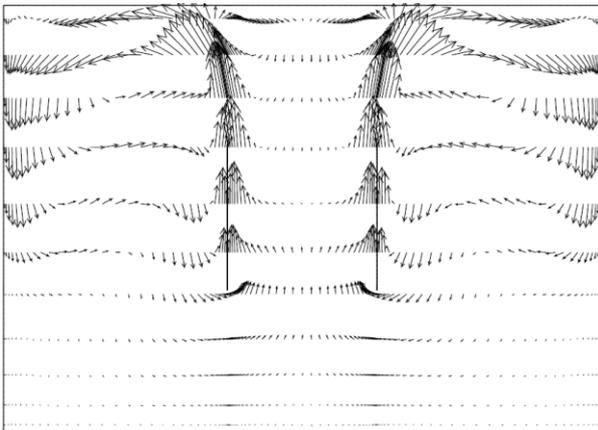


Figura 5-14 Vectores de velocidad para  $Fo=0,00344$

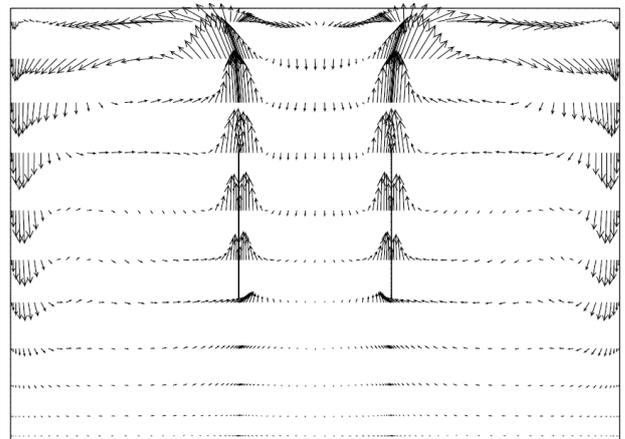


Figura 5-15 Vectores de velocidad para  $Fo=0,00688$

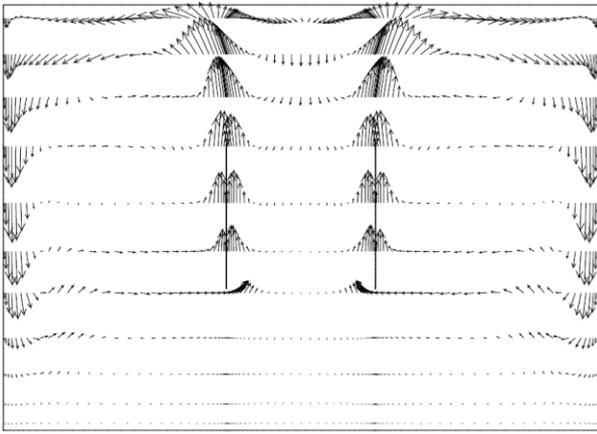


Figura 5-16 Vectores de velocidad para  $Fo=0,0129$

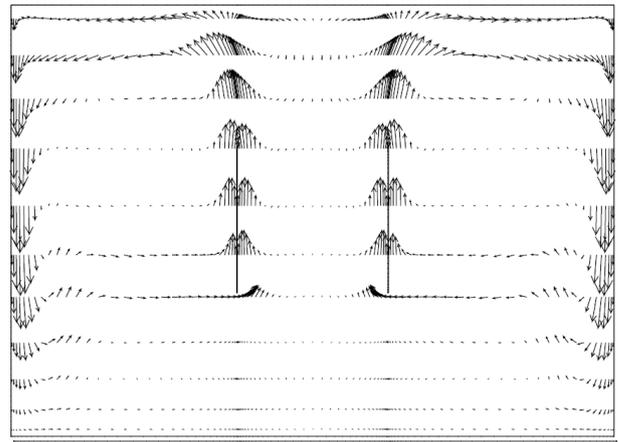


Figura 5-17 Vectores de velocidad para  $Fo=0,0447$

Observamos en la evolución de la velocidad del flujo másico un flujo ascendente en las cercanías de las paredes del canal caliente y un flujo descendente negativo en el centro del canal y en los laterales de la cavidad cerrada. Para los primeros instantes de tiempo observamos altas velocidades en el centro de la cavidad donde se encuentra el canal y velocidades muy bajas en el resto de la cavidad. Las velocidades van aumentando en la parte superior donde se alcanzan antes las temperaturas más altas, hasta que se estabiliza el flujo y se observa las mayores velocidades ascendentes en las proximidades de las paredes calientes del canal vertical y las mayores velocidades del flujo descendente en las paredes laterales de la cavidad.

Representación de los vectores de velocidad con distintos colores en función de su valor en distintos tiempos representativos de la evolución transitoria.

En la página siguiente se puede observar esta misma evolución de las velocidades del flujo másico en las Figuras de la 5.18 a la 5.23, pero representándose los vectores con diferentes colores dependiendo del valor de la velocidad.

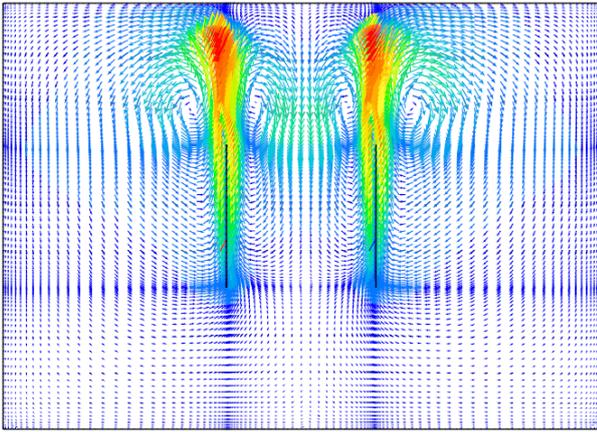


Figura 5-18 Vectores de velocidad para  $Fo=0,00068$

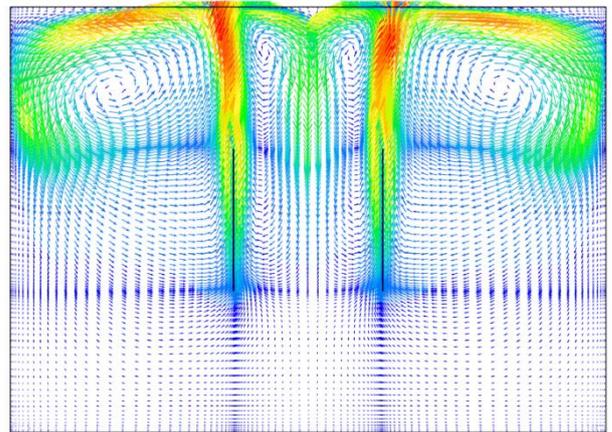


Figura 5-19 Vectores de velocidad para  $Fo=0,00172$

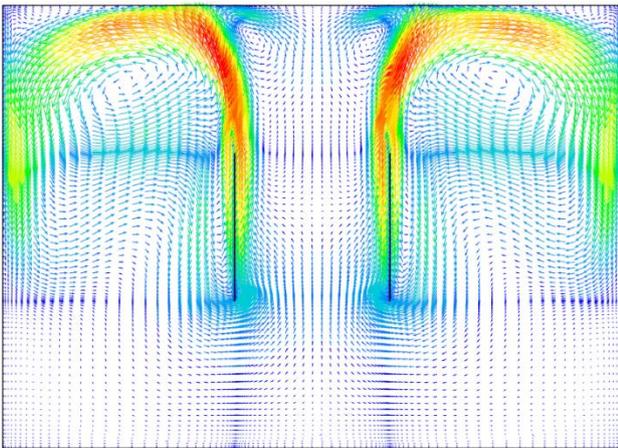


Figura 5-20 Vectores de velocidad para  $Fo=0,00344$

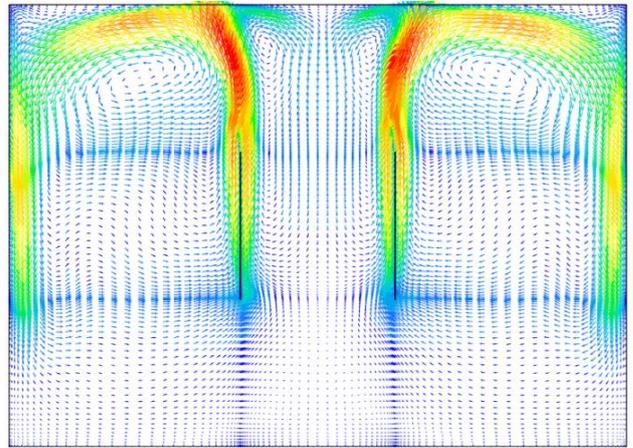


Figura 5-21 Vectores de velocidad para  $Fo=0,00688$

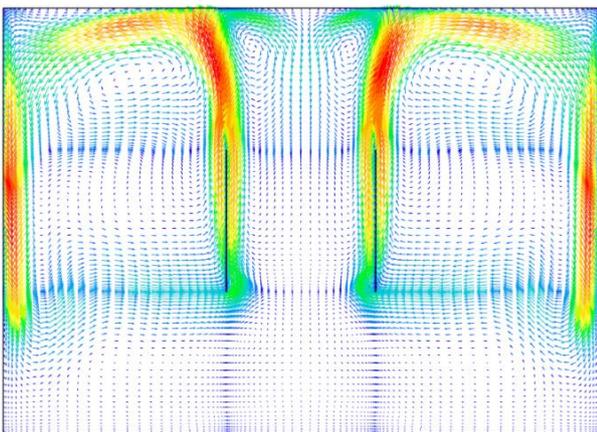


Figura 5-22 Vectores de velocidad para  $Fo=0,0129$

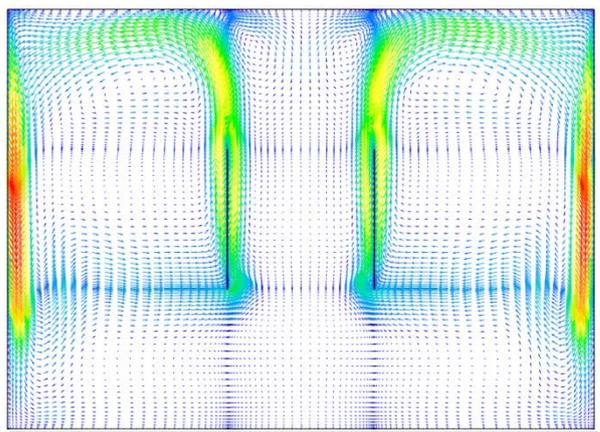


Figura 5-23 Vectores de velocidad para  $Fo=0,0447$

### 5.3 Flujo convectivo transitorio en configuración bidimensional simple

Realizamos el estudio de un flujo convectivo transitorio en una configuración bidimensional como la Figura 2.2. Utilizamos estos resultados como validación ya que la configuración es igual a la utilizada en el estudio tridimensional que se presenta en el Capítulo 6.

Comenzamos representando el número de Nusselt en función de Fourier para distintos números de Rayleigh,  $10^5 < Ra_H < 10^{12}$ .

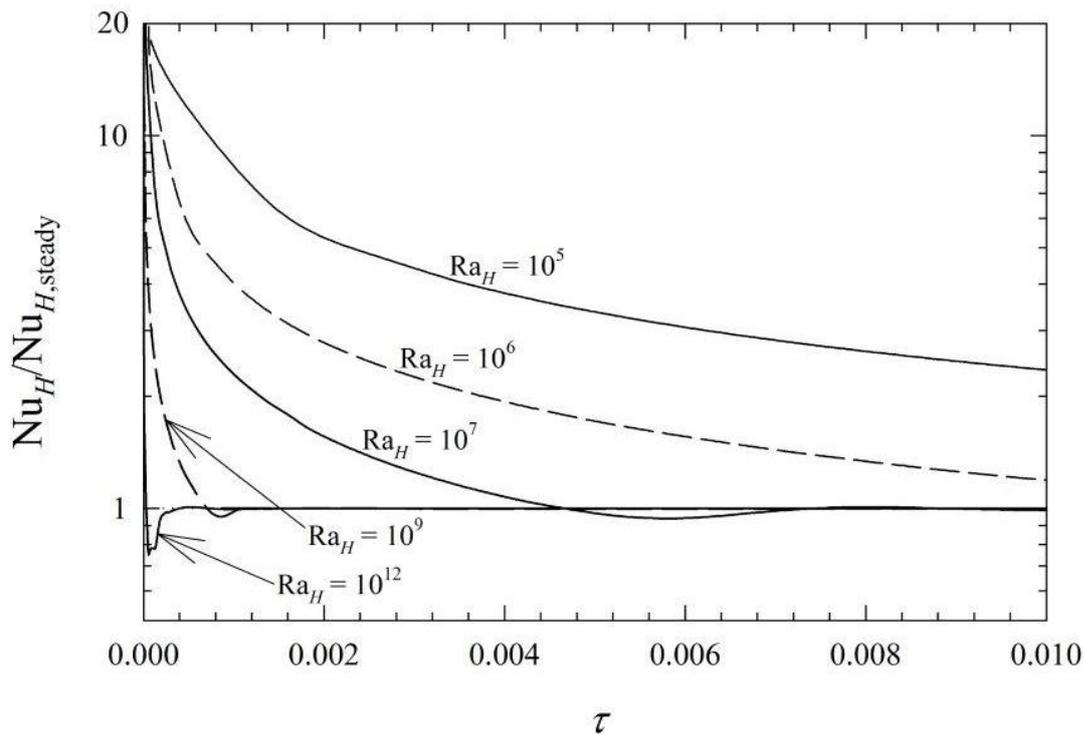


Figura 5-24 Nusselt en función de Fourier para distintos números de Rayleigh en cavidad bidimensional simple

Se observa como la convergencia a los valores del caso estacionario se produce en números de Fourier menores a mayor número de Rayleigh.

Representamos también en la Figura 5-25 la evolución del flujo másico adimensional en función del número de Fourier, para distintos números de Rayleigh  $10^5 < Ra < 10^6$ .

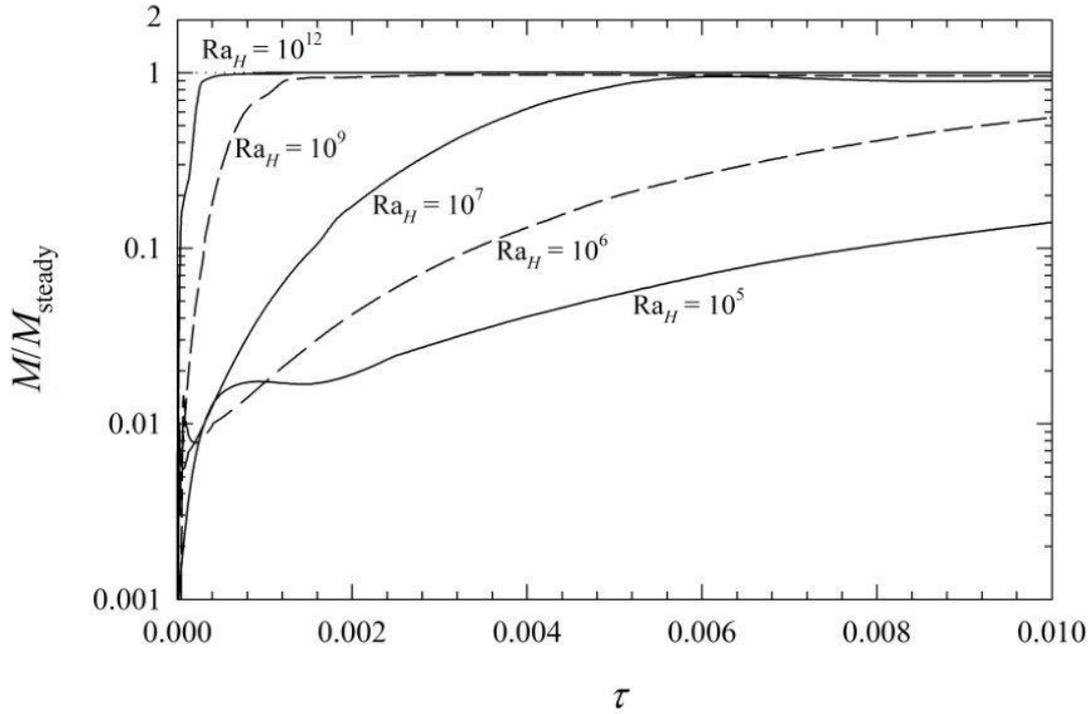


Figura 5-25 Evolución del flujo másico adimensional

Al igual que para la evolución del número de Nusselt se observa como el número de Fourier para el que converge el flujo másico adimensional es menor a mayor número de Rayleigh.

# Capítulo 6. Simulación estacionaria en cavidades tridimensionales con flujo de calor constante

## 6.1. Introducción y motivación

En este capítulo se va a estudiar la eficiencia en la transmisión del calor, así como la evolución del flujo másico adimensional dentro de una cavidad tridimensional simple, como la representada en la Figura 2.4 y en una cavidad tridimensional con muro intermedio, Figura 2.5. El calentamiento en ambos casos se produce debido a un flujo constante de calor en la pared izquierda. Dicho estudio consistirá en la interpretación de los resultados obtenidos mediante simulación numérica, analizar la existencia de posibles tendencias dentro de los mismos, así como la interpretación de algunos patrones de flujo.

Para ello se van a llevar a cabo una serie de simulaciones donde se representen dichas características a partir del programa de CFD Phoenics, para un rango de valores de Rayleigh comprendido entre  $10^6 < Ra < 10^{12}$ . Seleccionamos este rango de números de Rayleigh debido a que para un  $Ra=10^6$  tenemos un flujo claramente laminar, para el  $Ra=10^9$  se presenta un flujo transitorio y para  $Ra=10^{12}$  tenemos flujo turbulento. Los resultados son obtenidos asumiendo propiedades constantes y aproximación de Boussinesq. A partir de los resultados que se obtengan se calcularán los distintos valores del número de Nusselt para cada caso, así como el flujo másico adimensional. El número de Nusselt lo calculamos a partir de la temperatura máxima alcanzada en cualquier punto de la pared caliente.

La motivación del estudio de este caso radica en que puede simular casos que se den en la vida real. Los casos con flujo de calor constante puede simular un calentamiento solar directo en una habitación. Por ello es interesante estudiar su comportamiento, así como poder comparar los resultados obtenidos con los de otros autores más experimentados en la materia.

## 6.2 Resultados obtenidos en cavidad tridimensional simple para el número de Nusselt y el flujo másico

Una vez realizadas las simulaciones citadas en el apartado anterior y realizando los cálculos necesarios. Para la cavidad tridimensional simple, obtenemos los resultados representados en la gráfica de la Figura 6-1.

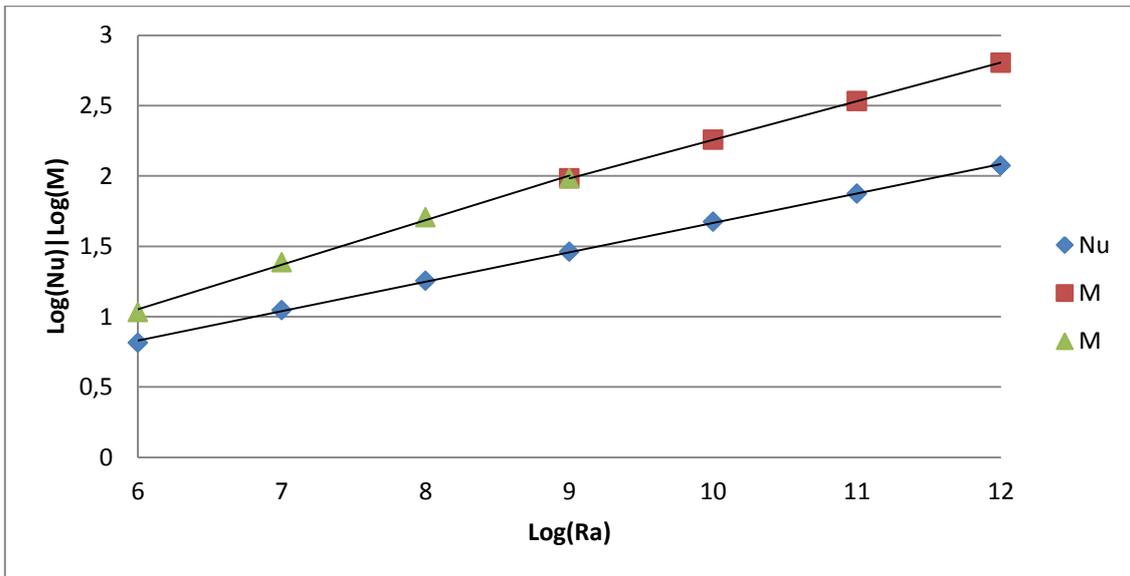


Figura 6-1. Nusselt y flujo másico adimensional en función del Rayleigh en cavidad tridimensional simple con flujo de calor constante

Se obtienen los valores más bajos del número de Nusselt para valores bajos de Rayleigh, esto corresponde a cuando el flujo es laminar. Mientras que, por otro lado, los valores más elevados de Nusselt se obtienen cuanto más turbulento es el flujo, para valores elevados de Rayleigh. Este hecho puede explicarse debido a que para flujos laminares el espesor de la capa límite térmica es mayor, produciendo así una mayor deficiencia en la transmisión del calor. Al ir elevando el Rayleigh el flujo evoluciona, pasando de ser un flujo laminar a uno de transición, y de seguir aumentando el valor del Rayleigh acabará por ser un flujo turbulento, estos cambios de flujo traen consigo una disminución del espesor de la capa límite térmica, aumentando así la eficiencia en la transmisión del calor y el valor del Nusselt.

Dentro de los resultados obtenidos se puede observar la existencia de distintas tendencias, tanto para el caso de los valores del Nusselt, como para el flujo másico adimensional. Calculamos correlaciones para dichas tendencias.

Se propone la siguiente correlación entre el número de Nusselt y el número de Rayleigh:

$$Nu_{H,B} = 0,377 \cdot Ra^{0,209} \quad \text{para } 10^6 \leq Ra_H \leq 10^{12}$$

Para el caso de la correlación entre el número de Rayleigh y el flujo másico adimensional se proponen dos correlaciones diferentes en función de diferentes rangos del número de Rayleigh.

$$M_B = 0,142 \cdot Ra^{0,316} \quad \text{para } 10^6 \leq Ra_H \leq 10^9$$

$$M_B = 0,325 \cdot Ra^{0,275} \quad \text{para } 10^9 < Ra_H \leq 10^{12}$$

### 6.3 Resultados obtenidos en cavidad tridimensional con muro intermedio para el número de Nusselt y el flujo másico

Se realiza de manera análoga al apartado anterior las diferentes simulaciones citadas anteriormente para el caso de la cavidad tridimensional con muro intermedio, obteniendo mediante los cálculos oportunos el número de Nusselt para la temperatura máxima en la pared caliente y el flujo másico adimensional para el citado rango del número de Rayleigh.

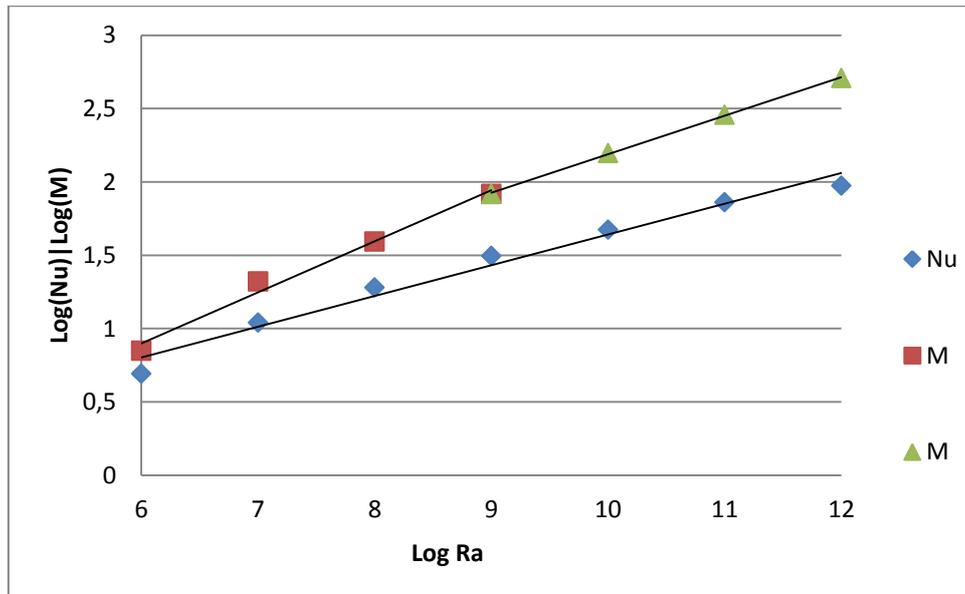


Figura 6-2. Valores del número de Nusselt y del flujo másico adimensional en función del número de Rayleigh para una cavidad tridimensional con muro intermedio, flujo de calor constante y aproximación de Boussinesq

Se observa, al igual que en el Capítulo 6, que se obtienen los valores más bajos de Nusselt para los valores bajos de Rayleigh, régimen laminar, y según aumenta el valor de éste último, pasando de un régimen laminar a uno turbulento, también aumenta el valor del Nusselt. La explicación es la misma que en el caso anterior, al ir aumentando el Rayleigh, y por tanto al pasar de un régimen a otro, se produce una disminución en el espesor de la capa límite térmica, lo que trae consigo un aumento de la eficiencia en la transmisión del calor. También cabría añadir el efecto que tiene la generación de turbulencias para valores altos de Rayleigh que, igual que la disminución de la capa límite térmica, favorecerá la eficiencia en la transmisión del calor.

Dentro de los resultados obtenidos se puede observar la existencia de distintas tendencias, tanto para el caso de los valores del Nusselt, como para el flujo másico adimensional. Calculamos correlaciones para dichas tendencias.

Se propone la siguiente correlación entre el número de Nusselt y el número de Rayleigh:

$$Nu_{H,B} = 0,349 \cdot Ra^{0,210} \quad \text{para } 10^6 \leq Ra_H \leq 10^{12}$$

Para el caso de la correlación entre el número de Rayleigh y el flujo másico adimensional se proponen dos correlaciones diferentes en función de diferentes rangos del número de Rayleigh.

$$M_B = 0,055 \cdot Ra^{0,355} \quad \text{para } 10^6 \leq Ra_H \leq 10^9$$

$$M_B = 0,360 \cdot Ra^{0,263} \quad \text{para } 10^9 < Ra_H \leq 10^{12}$$

## 6.4 Comparación de cavidad tridimensional simple y con muro intermedio

Se procede a continuación a la comparación de los resultados de la cavidad tridimensional simple con la cavidad tridimensional con muro intermedio. Para realizar un estudio de la influencia del muro intermedio en los resultados.

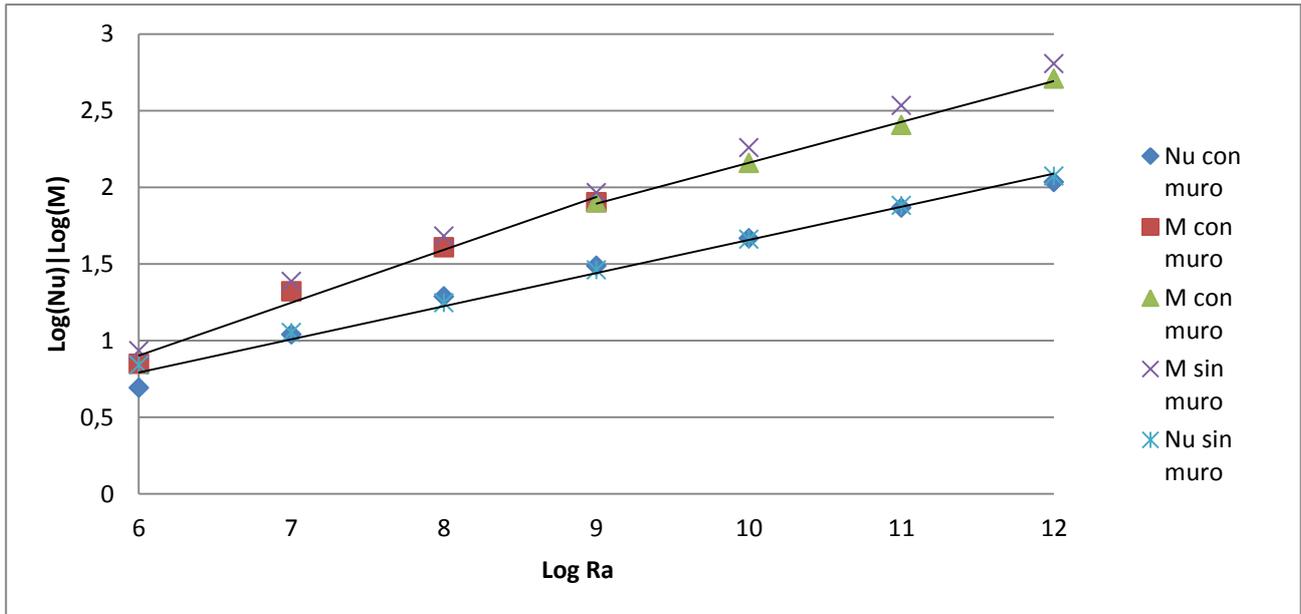


Figura 6-3. Valores del número de Nusselt y del flujo másico adimensional en función del número de Rayleigh en una cavidad tridimensional con y sin muro intermedio, con flujo de calor constante y aproximación de Boussinesq.

En los casos del flujo másico adimensional se observan valores ligeramente inferiores con la presencia del muro intermedio. Por otro lado los valores del número de Nusselt se obtienen valores muy similares en el caso con muro y caso sin muro.

# Capítulo 7. Simulación transitoria en cavidades tridimensional con flujo de calor constante

## 7.1. Introducción y motivación

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en una simulación transitoria en cavidades tridimensionales simples y con pared intermedia con la misma geometría que la presentada en el capítulo 6 (Figura 2.4 y Figura 2.5). Las principales motivaciones para la realización de un estudio transitorio son estudiar los diferentes patrones del flujo que se producen en cada caso para diferentes números de Rayleigh en función del tiempo, comprobar que puede reproducirse la solución estacionaria cuando el tiempo en las simulaciones transitorias tiende a infinito, intentando correlacionar los tiempos de establecimiento de la solución transitoria, analizar la influencia de los saltos de tiempo en el proceso de convergencia de las simulaciones y comprobar si el procedimiento transitorio es adecuado para eludir ciertos problemas de convergencia que aparecieron en las simulaciones transitorias.

El estudio transitorio se realizará con un calentamiento que se producirá a través de un flujo de calor constante en la pared izquierda. Con estas características se pretende llevar a cabo un estudio de la evolución del flujo a lo largo del tiempo según se va calentado, realizando además una simulación transitoria larga para poder comparar los resultados con la solución estacionaria., Estos resultados se realizarán para un amplio rango de valores de Rayleigh, asumiendo la aproximación de Boussinesq.

La metodología a seguir será la misma que en el capítulo anterior; se obtendrán los datos necesarios a partir de las distintas simulaciones que se lleven a cabo. Dichas simulaciones estarán programadas para simular las características que se han descrito con anterioridad. Calculamos por tanto el número de Nusselt a partir de la temperatura máxima en la pared caliente y el flujo másico adimensional para un rango de valores de Rayleigh de  $10^6 < Ra < 10^{12}$ .

Para ello se van a llevar a cabo una serie de simulaciones donde se representen dichas características a partir del programa de CFD Phoenics, para diferentes valores del número de Rayleigh. Los resultados son obtenidos asumiendo propiedades constantes y aproximación de Boussinesq. Las simulaciones se realizarán con saltos de tiempo de 0,2 segundos y cuatro casos por iteración. (TLAST=0,2;LSTEP=4) A partir de los resultados que se calcula el número de Nusselt y el flujo másico adimensional. A través de este dato se realizará la comparación con los datos obtenidos en el caso estacionario.

## 7.2 Estudio de la influencia de los saltos de tiempo

En este apartado se presentan los resultados obtenidos en diferentes simulaciones transitorias en una cavidad tridimensional simple. El calentamiento se producirá a través de un flujo de calor constante en la pared izquierda. Con estas características se pretende llevar a cabo un estudio de la influencia del salto de tiempo en los resultados obtenidos. Estos resultados se realizarán para valor del número Rayleigh de  $10^6$ , asumiendo la aproximación de Boussinesq.

Para ello se van a llevar a cabo una serie de simulaciones donde se representen dichas características a partir del programa de CFD Phoenics, para un valor del número Rayleigh de  $10^6$ . Los resultados son obtenidos asumiendo propiedades constantes y aproximación de Boussinesq. En las simulaciones se modificará el valor asignado al comando de Phoenics 'TLAST' que corresponde al salto de tiempo total de cada iteración, para poder comparar la diferencia en los resultados obtenidos. Las simulaciones se realizarán con saltos de tiempo de 0,0375, 0,05 y 0,075 segundos. Y a continuación se asignan diferentes valores al parámetro LSTEP, correspondiente al número de divisiones temporales en cada iteración y volvemos a realizar un estudio con saltos de tiempo de 0,05, 0,1 y 0,033 segundos.

La comparación de los resultados se realizará a través de la comparación del número de Nusselt y el flujo másico adimensional.

Una vez realizadas las simulaciones citadas con anterioridad obtenemos la evolución del número de Nusselt en una cavidad tridimensional para un número de Rayleigh de  $10^6$  y diferentes pasos de tiempo. Este primer estudio lo hacemos con un número de divisiones temporales fijo y variando los saltos de tiempo total de cada iteración y por tanto los pasos de tiempo.

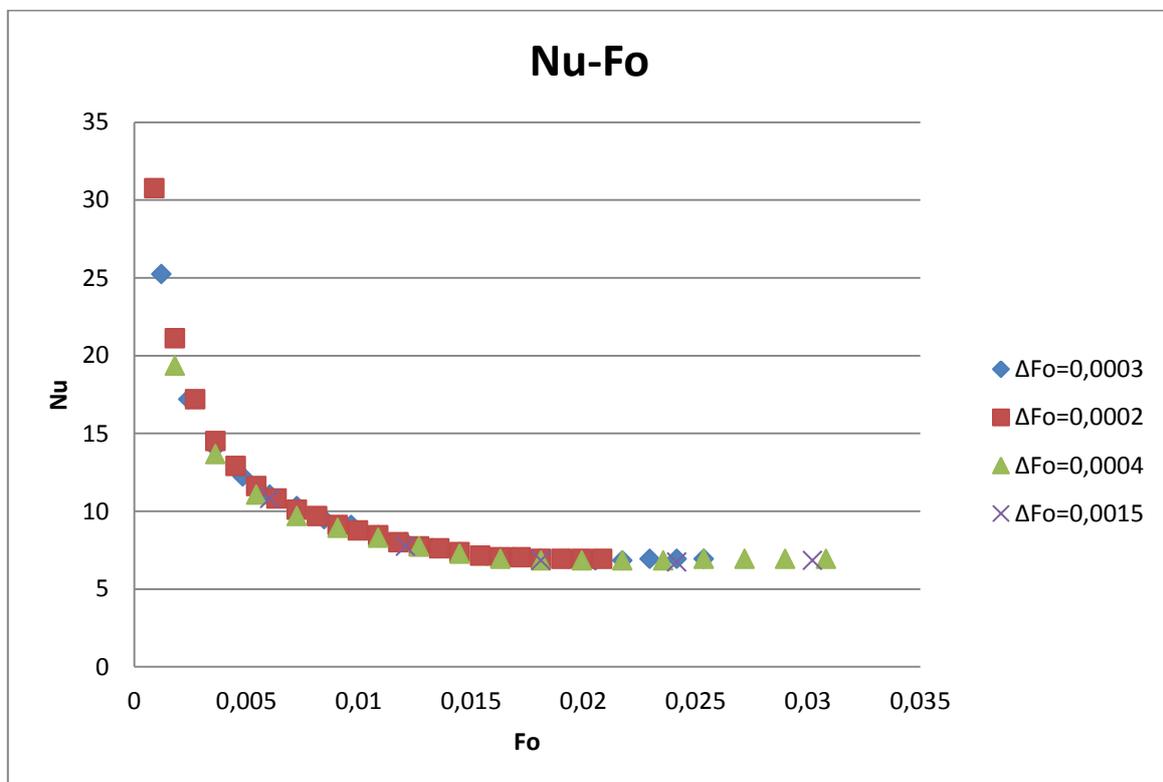


Figura 7-1. Comparación del número de Nusselt en una cavidad tridimensional con flujo de calor constante y número de Rayleigh  $10^6$  para distintos incrementos el número de Fourier

Representamos a continuación el flujo másico adimensional en función del número de Fourier para diferentes valores del parámetro TLAST y por tanto diferentes saltos de tiempo:

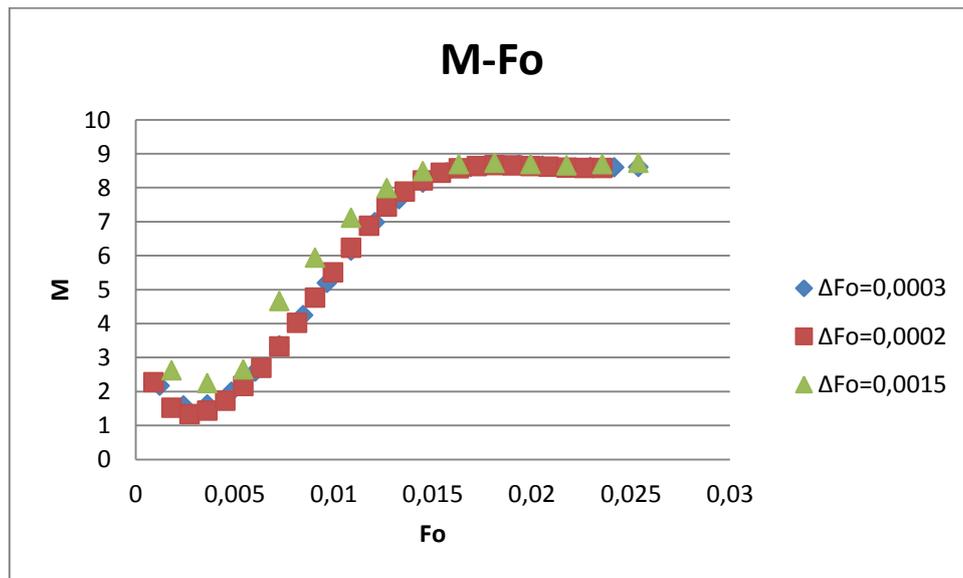


Figura 7-2. Comparación del flujo másico adimensional en una cavidad tridimensional con flujo de calor constante y número de Rayleigh  $10^6$  para distintos saltos del número de Fourier

A continuación realizamos otro estudio en esta ocasión en una cavidad tridimensional con muro intermedio para distintos pasos de tiempo. Mantendremos constante el salto de tiempo total de cada iteración, modificando el número de divisiones temporales y por tanto los pasos de tiempo.

Representamos el número de Nusselt en función del tiempo para comparar los resultados con los distintos pasos de tiempo.

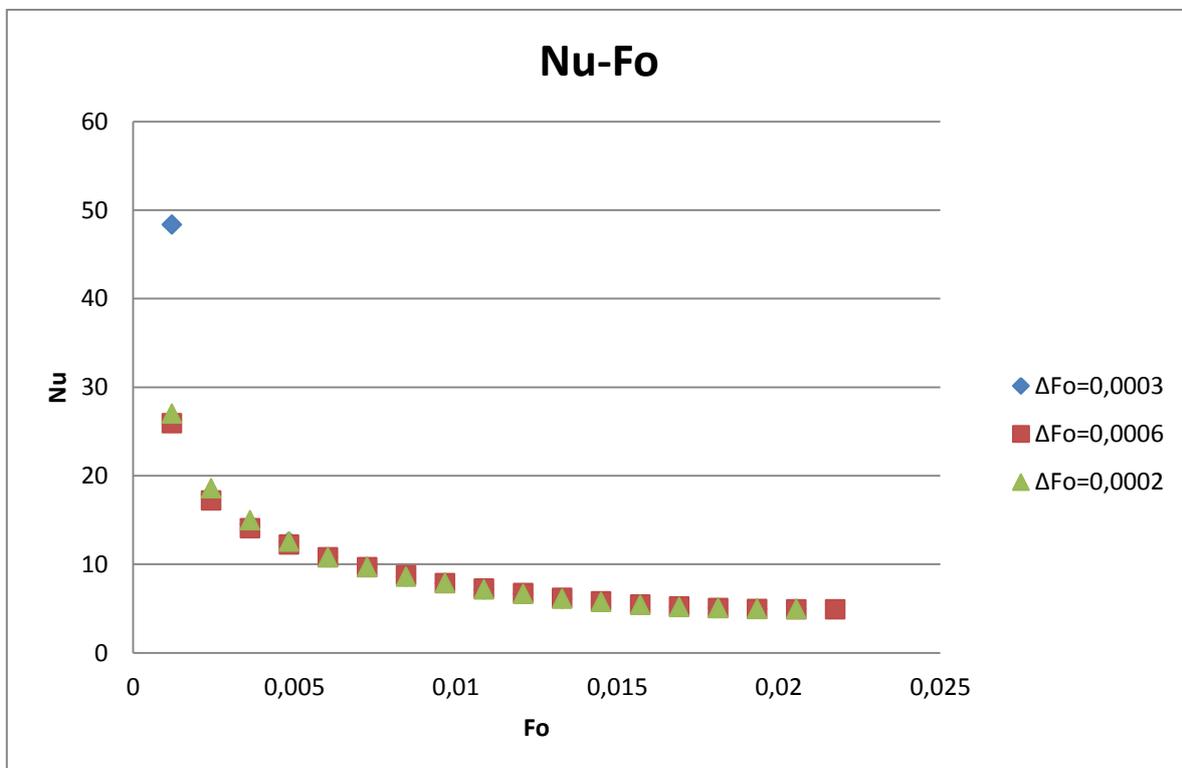


Figura 7-3. Comparación para diferente pasos del número de Fourier, del número de Nusselt en una cavidad tridimensional con muro intermedio y flujo de calor constante.

Representamos el flujo másico adimensional en función del tiempo para un número de Rayleigh de  $10^6$ .

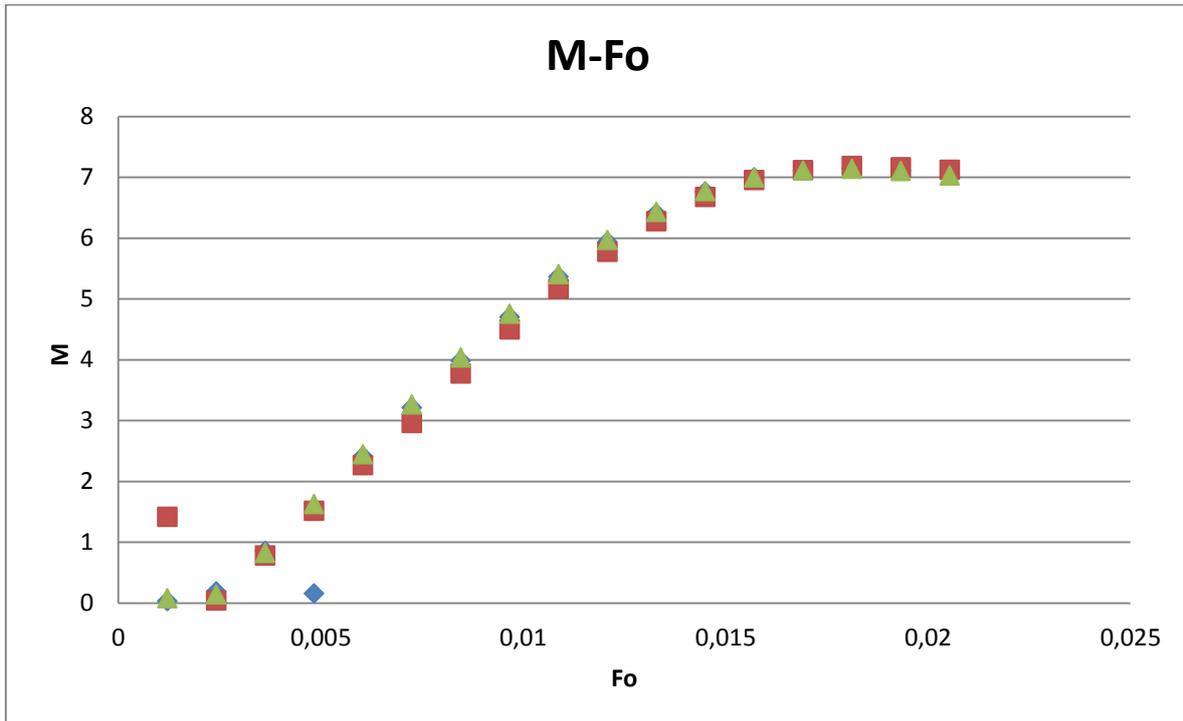


Figura 7-4 Comparación para diferentes pasos del número de Fourier, del número de Nusselt en una cavidad tridimensional con muro intermedio y flujo de calor constante

Al realizar los estudios de la influencia tanto en la cavidad simple como en la cavidad con muro intermedio, no se encuentran diferencias significativas en los resultados obtenidos, siguiendo una relación entre el número de Nusselt y flujo másico adimensional en función del tiempo muy similar para todos los casos.

Aunque en los anteriores estudios de la influencia de los pasos de tiempo no se ven diferencias en los resultados obtenidos, en los casos para números altos de Rayleigh en los que comenzamos a tener problemas de convergencia, al ir disminuyendo estos pasos de tiempo conseguimos la convergencia de dichos resultados.

### 7.3. Resultados obtenidos para el número de Nusselt y el flujo másico adimensional para Rayleigh $10^6$ en cavidad tridimensional simple

Una vez realizadas las simulaciones citadas obtenemos la evolución del número de Nusselt y del flujo másico adimensional en función del tiempo adimensionalizado a través del número de Fourier, para un número de Rayleigh de  $10^6$ .

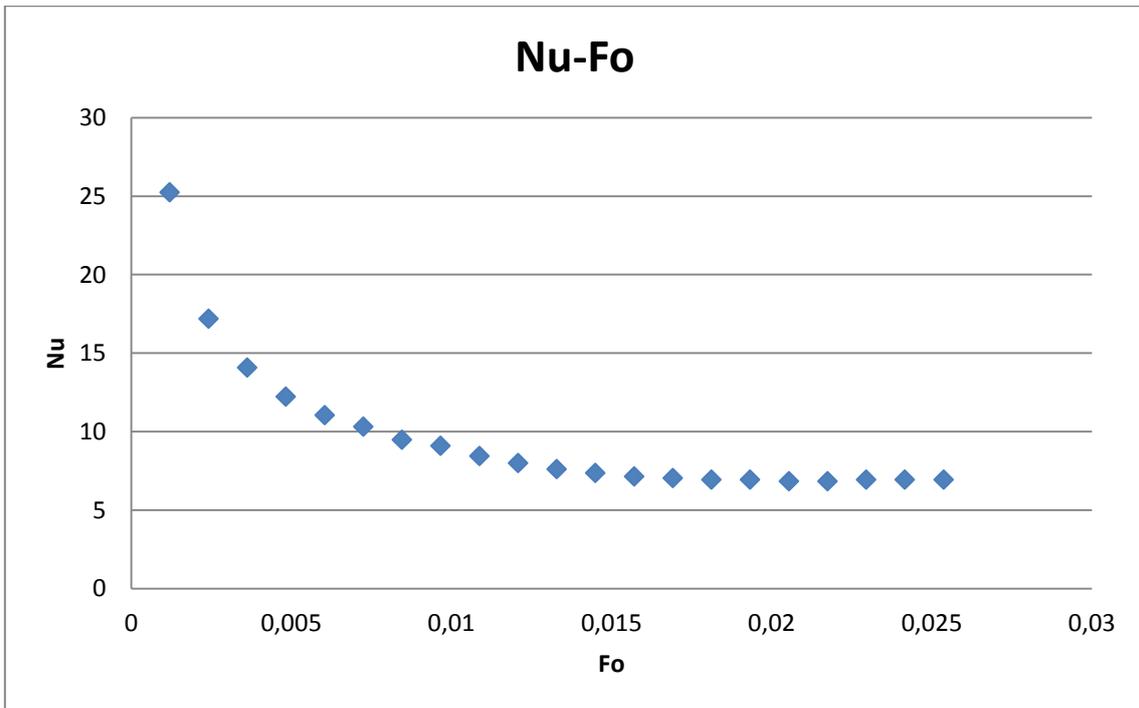


Figura 7-5. Evolución del número de Nusselt en función del número de Fourier una cavidad tridimensional simple con flujo de calor constante y número de Rayleigh de  $10^6$

Como se puede observar en la figura anterior el número de Nusselt va disminuyendo a lo largo del tiempo hasta converger en un valor de 6,9309. Dicho valor se alcanza para un número de Fourier de 0,02295.

El valor del número de Nusselt en el caso estacionario para un valor del número de Rayleigh de  $10^6$  es de 6,5404. Obteniendo un error relativo entre el caso transitorio y el caso estacionario del 5,9%. Representamos a continuación la evolución del flujo másico adimensional en función del número de Fourier.

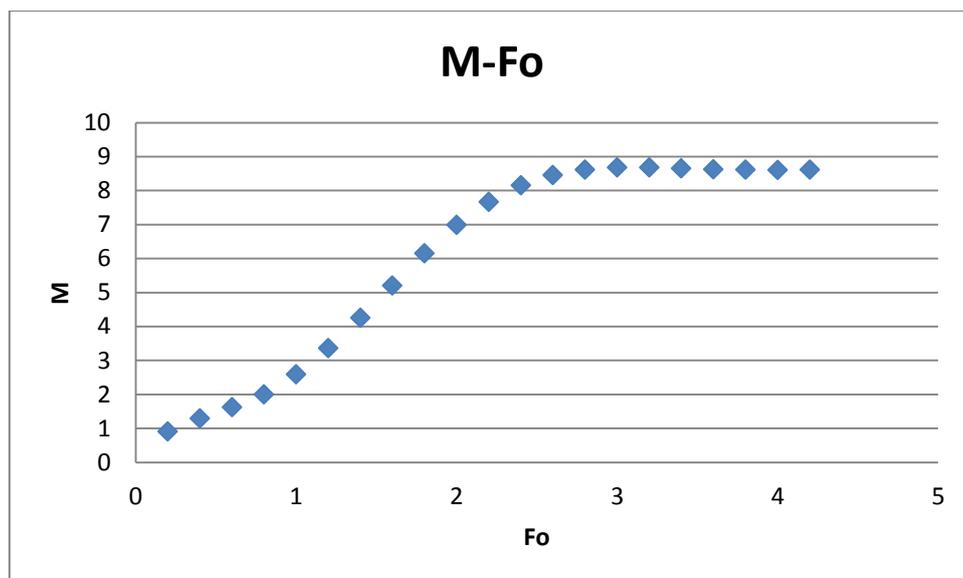


Figura 7-6 Flujo másico adimensional en función del número de Fourier en cavidad tridimensional simple con flujo de calor constante

El número másico adimensional comienza con una pequeña tendencia descendente para pequeños números de Fourier para comenzar con la tendencia descendente que converge para un número

másico de  $M=8,61$  coincidiendo con el resultado obtenido en el caso estacionario.

#### 7.4. Resultados obtenidos para el número de Nusselt y el flujo másico adimensional para Rayleigh $10^9$ en cavidad tridimensional simple

Una vez realizadas las simulaciones citadas obtenemos la evolución del número de Nusselt y del flujo másico adimensional en función del tiempo adimensionalizado a través del número de Fourier, para un número de Rayleigh de  $10^9$ .

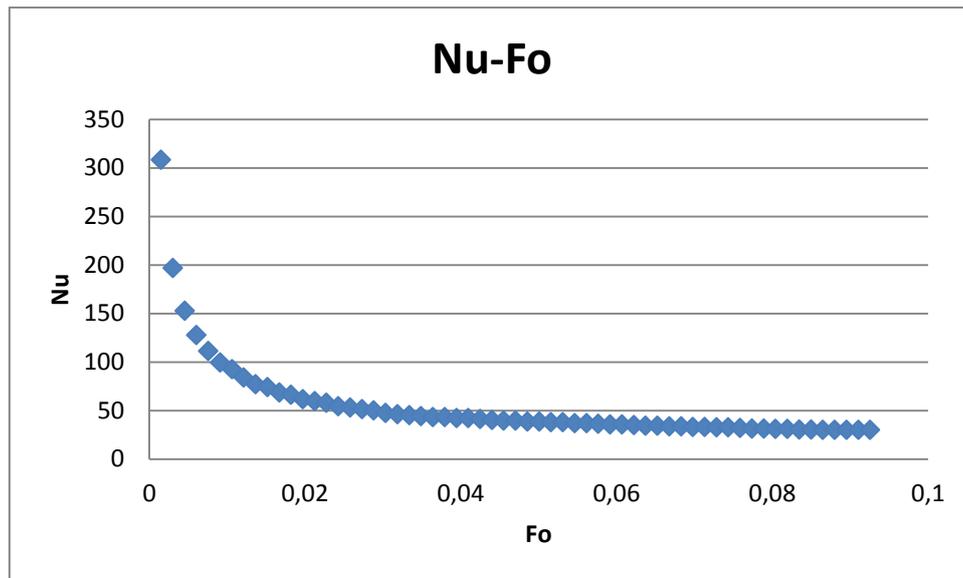


Figura 7-7 Número de Nusselt en función del número de Fourier en cavidad tridimensional simple con flujo de calor constante para  $Ra=10^9$

Como se puede observar en la figura anterior el número de Nusselt va disminuyendo a lo largo del tiempo hasta converger en un valor de 29,7168. Dicho valor se alcanza para un número de Fourier de 0,08649.

El valor del número de Nusselt en el caso estacionario para un valor del número de Rayleigh de  $10^9$  es de 28,886. Obteniendo un error relativo entre el caso transitorio y el caso estacionario del 2,87%.

Representamos en la Figura 7-8 la evolución del flujo másico adimensional en función del número de Fourier.

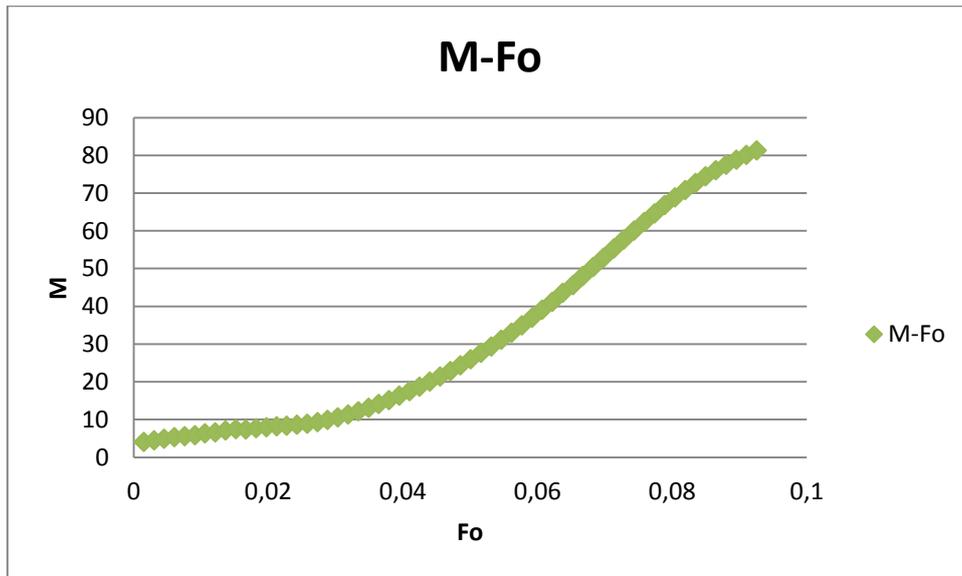


Figura 7-8 Flujo másico adimensional en función del número de Fourier en cavidad tridimensional simple con flujo de calor constante para  $Ra=10^9$

El flujo másico adimensional presenta una disminución a lo largo del tiempo hasta un punto de inflexión en el que comienza a ascender hasta llegar a un valor de  $M=81,3$  mientras que para el caso estacionario había obtenido un flujo másico de  $M= 92,13$ . Observamos por tanto un retraso en la convergencia del flujo másico adimensional con respecto a la convergencia del número de Nusselt.

### 7.5 Resultados obtenidos para el número de Nusselt y el flujo másico adimensional para un Rayleigh de $10^6$ en cavidad tridimensional con muro intermedio

Una vez realizadas las simulaciones citadas obtenemos el número de Nusselt para un número de Rayleigh de  $10^6$ .

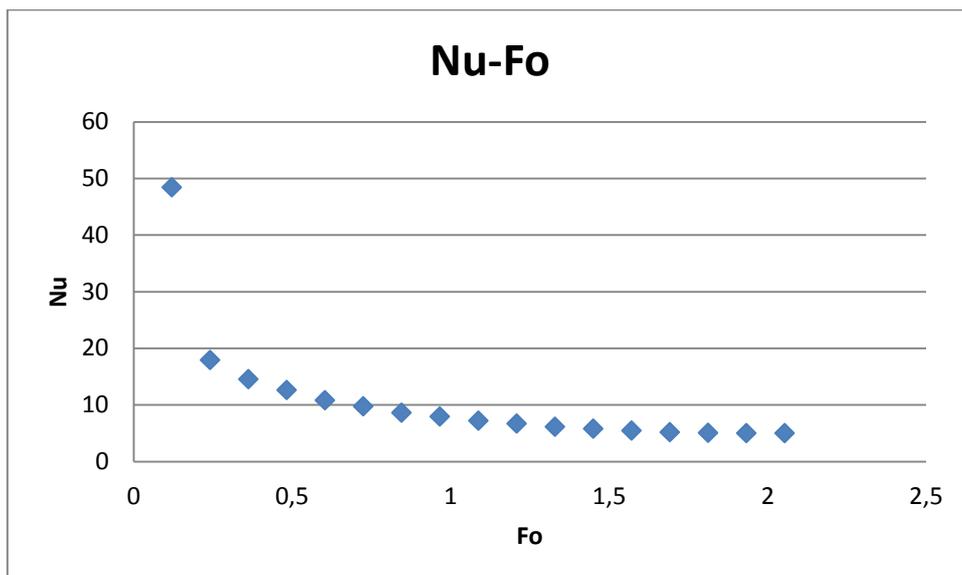


Figura 7-9 Número de Nusselt en función del número de Fourier en cavidad tridimensional con muro intermedio, flujo de calor constante y  $Ra=10^6$

Como se puede observar en la figura anterior el número de Nusselt disminuye hasta converger en un

valor de 4,9401. Este valor se alcanza para un número de Fourier de 1,9332.

El número de Nusselt en el caso estacionario con la misma geometría para un valor del número de Rayleigh  $Ra=10^6$  coincide en este caso con el número de Nusselt en la que converge el estudio transitorio.

Procedemos a continuación a representar el flujo másico adimensional en el caso del número de Rayleigh de  $10^6$ .

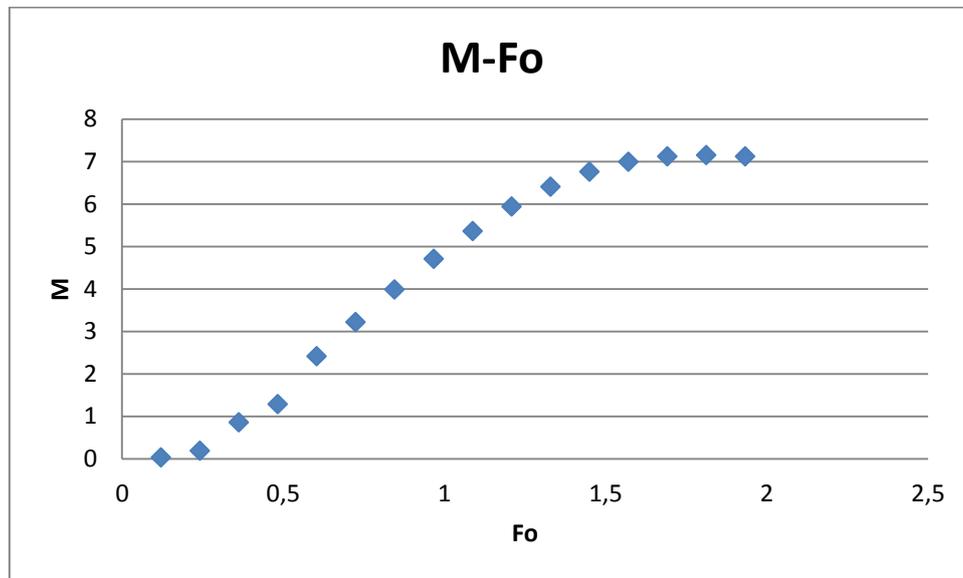


Figura 7-10 Flujo másico adimensional en función del número de Fourier en cavidad tridimensional simple, flujo de calor constante y  $Ra=10^6$

El flujo másico presenta una tendencia ascendente a lo largo del tiempo con convergencia para un valor de  $M=7,1$  valor que coincide con el resultado obtenido en el caso estacionario de flujo de calor constante en una cavidad tridimensional con muro intermedio para el mismo número de Raileigh. Llegando a la solución estacionaria para un número de Fourier de 2.05.

## 7.6 Resultados obtenidos para el número de Nusselt y el flujo másico adimensional para un Rayleigh de $10^9$ en cavidad tridimensional con muro intermedio

Una vez realizadas las simulaciones citadas obtenemos el número de Nusselt para un número de Rayleigh de  $10^9$ .

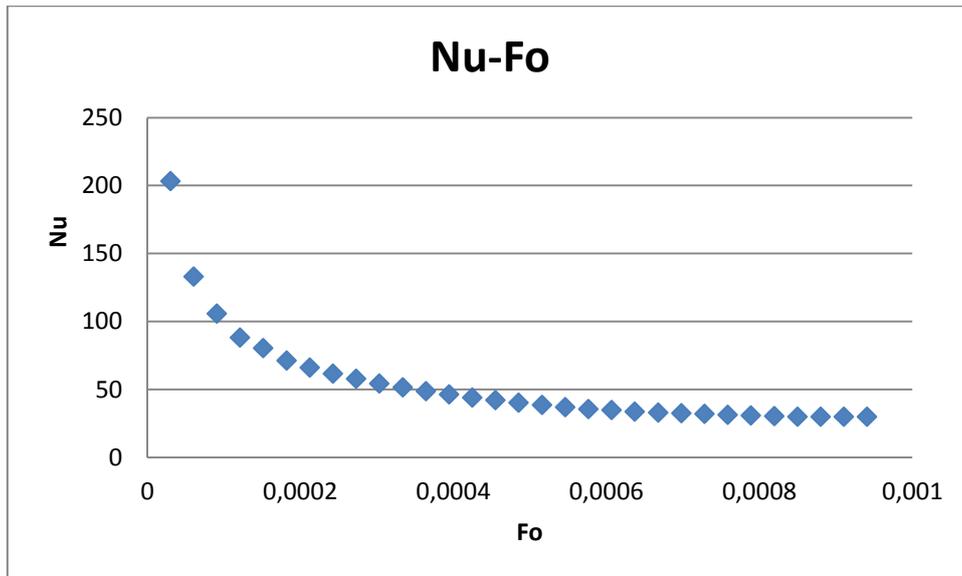


Figura 7-11 Número de Nusselt en función del número de Fourier en cavidad tridimensional con muro intermedio, flujo de calor constante y  $Ra=10^9$

Como se puede observar en la figura anterior el número de Nusselt disminuye hasta converger en un valor de 29,8178. Este valor se alcanza para un número de Fourier de 0,0008488

El número de Nusselt en el caso estacionario con la misma geometría para un valor del número de Rayleigh  $Ra=10^9$  es de 31,3339. Obteniendo un error relativo del 4,8 %.

Procedemos a continuación a representar el flujo másico adimensional en el caso del número de Rayleigh de  $10^9$ .

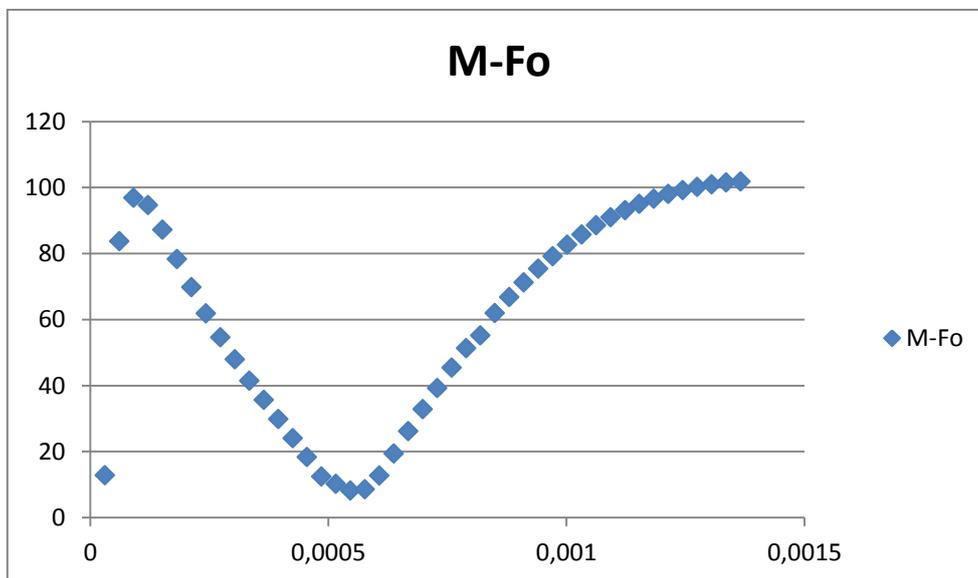


Figura 7-3 Flujo másico adimensional en función del número de Fourier en cavidad tridimensional con muro intermedio, flujo de calor constante y  $Ra=10^9$

Para un valor del número de Fourier cercano a cero, obtenemos un bajo flujo másico, pero para bajos números de Fourier observamos un aumento del flujo másico que vuelve a disminuir obteniendo un mínimo y continúa aumentando hasta alcanzar un valor de  $M=101,8$ . El valor para el número de flujo másico adimensional del mismo caso estacionario es de 79,9, obteniendo un error relativo del 27%, no consiguiendo por tanto la convergencia de dicho valor, o al menos para un

número de Fourier mucho más elevado que para el caso de la convergencia del número de Nusselt.

### 7.7 Resultados obtenidos para el número de Nusselt y el flujo másico adimensional para un Rayleigh de $10^{12}$ .

Una vez realizadas las simulaciones citadas obtenemos el número de Nusselt para un número de Rayleigh de  $10^{12}$ .

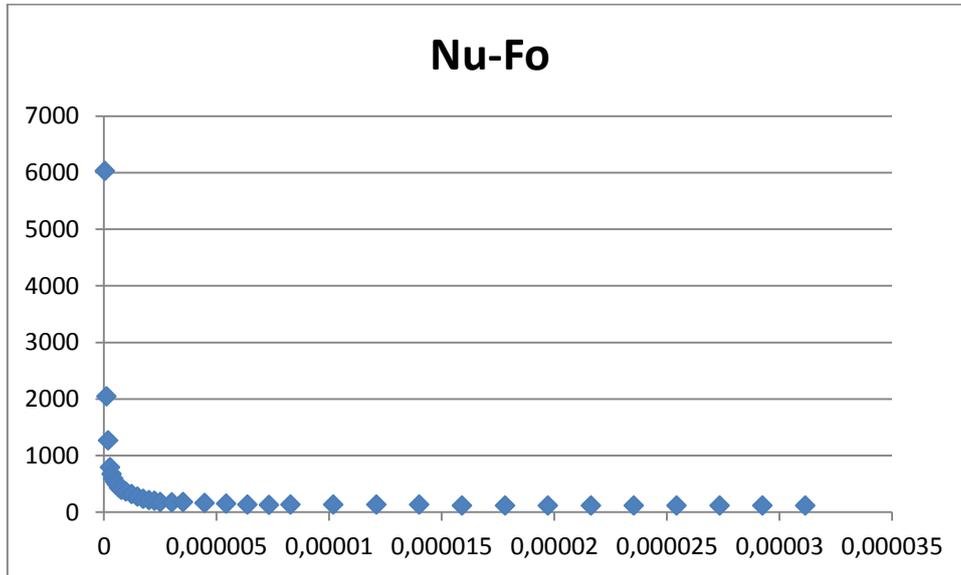
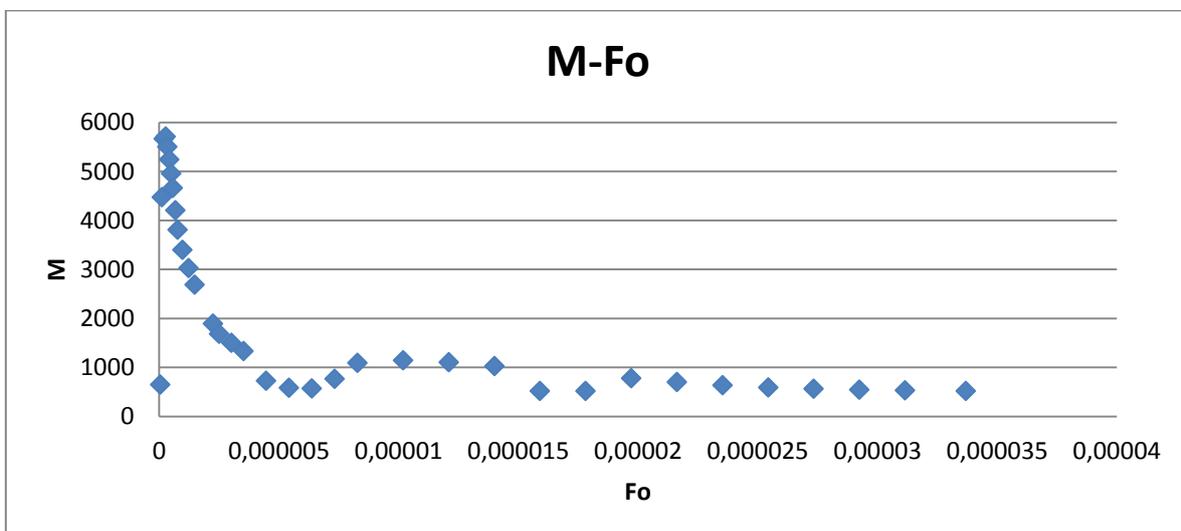


Figura 7-12 Número de Nusselt en función del número de Fourier en cavidad tridimensional con muro intermedio, flujo de calor constante para  $Ra=10^{12}$

Como se puede observar en la figura anterior el número de Nusselt disminuye hasta converger en un valor de 116,82. Este valor se alcanza para un número de Fourier de 0,00002734.

El número de Nusselt en el caso estacionario con la misma geometría para un valor del número de Rayleigh  $Ra=10^{12}$  es de 108,23. Obteniendo un error relativo del 7,9 %.

Procedemos a continuación a representar el flujo másico adimensional en el caso del número de Rayleigh de  $10^{12}$ .



*Figura 7-13 Flujo másico adimensional en función del número de Fourier en cavidad tridimensional con muro intermedio, flujo de calor constante para  $Ra=10^{12}$*

El flujo másico comienza para un valor de Fourier muy próximo a cero en un valor muy bajo aumentando rápidamente, para a continuación volver a disminuir realizando pequeñas oscilaciones hasta converger en un valor de 518,1.

El valor del flujo másico adimensional para la misma geometría y mismo número de Rayleigh en el caso estacionario es de 510,0. Obteniendo por tanto un error relativo del 1,5%.

## Capítulo 8. Conclusiones

Para concluir este proyecto final de carrera se van a presentar las principales conclusiones a las que se han llegado con la elaboración del presente trabajo. En este proyecto se han llevado a cabo la simulación de un flujo convectivo natural de una cavidad bidimensional cerrada. Se han realizado también simulaciones en cavidades tridimensionales con flujo de calor constantes para distintos valores de Rayleigh para comprobar el comportamiento del fluido para un rango de  $10^6 < Ra < 10^{12}$ . Posteriormente se introdujo una variación en la geometría de la cavidad tridimensional incluyendo un muro intermedio para ver la influencia de éste en los resultados obtenidos. A partir de los resultados proporcionados por el programa de CFD Phoenics se ha realizado un estudio de la evolución de los números de Nusselt y flujos máscicos adimensionales.

Una vez realizadas las simulaciones estacionarias, pasamos a las simulaciones transitorias tanto para las cavidades tridimensionales simples como para las cavidades tridimensionales con muro intermedio, para comprobar la evolución de los parámetros estudiados en el caso estacionario como para ver la convergencia de estos resultados al resultado obtenido en el caso estacionario.

### 8.1 Simulación estacionaria en cavidad tridimensional. Conclusiones

En el Capítulo 6 se estudia la evolución del flujo máscico adimensional, así como la evolución del número de Nusselt para un rango de valores de Rayleigh, con una condición de calentamiento donde se tiene un flujo de calor constante asumiendo la aproximación de Boussinesq (propiedades termofísicas constantes, en primera lugar se realiza en una cavidad tridimensional simple y en segundo lugar en una cavidad tridimensional con muro intermedio. Tras analizar los resultados, se puede concluir que se obtiene una evolución exponencial del número de Nusselt y el flujo máscico. Se produce un incremento del flujo máscico debido al incremento de las fuerzas de flotación. También observamos un aumento del número de Nusselt al aumentar el número de Rayleigh, al aumentar éste pasamos de un régimen laminar a un régimen turbulento, produciéndose de esta manera una disminución en el espesor de la capa límite, lo que produce un aumento de la eficiencia en la transmisión de calor.

También se observa la existencia de diferentes tendencias de los valores del Nusselt y el flujo máscico para distintos valores de Rayleigh cuyas correlaciones logarítmicas presentamos a continuación.

Para el caso de la simulación estacionaria en una cavidad simple obtenemos

## Capítulo 8. Conclusiones

$$Nu_{H,B} = 0,377 \cdot Ra^{0,209} \quad \text{para } 10^6 \leq Ra_H \leq 10^{12}$$

Para el caso de la correlación entre el número de Rayleigh y el flujo másico adimensional se proponen dos correlaciones diferentes en función de diferentes rangos del número de Rayleigh.

$$\begin{aligned} M_B &= 0,142 \cdot Ra^{0,316} & \text{para } 10^6 \leq Ra_H \leq 10^9 \\ M_B &= 0,325 \cdot Ra^{0,275} & \text{para } 10^9 < Ra_H \leq 10^{12} \end{aligned}$$

Para el caso de la simulación estacionaria en una cavidad tridimensional con muro intermedio, sucede lo mismo que en el caso anterior, presentando un aumento del número de Nusselt y el flujo másico al aumentar el número de Rayleigh por las mismas razones que en el caso anterior. Obteniendo para este caso las siguientes correlaciones.

$$Nu_{H,B} = 0,349 \cdot Ra^{0,210} \quad \text{para } 10^6 \leq Ra_H \leq 10^{12}$$

Para el caso de la correlación entre el número de Rayleigh y el flujo másico adimensional se proponen dos correlaciones diferentes en función de diferentes rangos del número de Rayleigh.

$$\begin{aligned} M_B &= 0,055 \cdot Ra^{0,355} & \text{para } 10^6 \leq Ra_H \leq 10^9 \\ M_B &= 0,360 \cdot Ra^{0,263} & \text{para } 10^9 < Ra_H \leq 10^{12} \end{aligned}$$

En cuanto a la comparación de los resultados obtenidos en el caso de la cavidad tridimensional simple y la cavidad tridimensional con muro intermedio para estudiar la influencia del muro en los resultados obtenidos. En los casos del flujo másico se observan valores ligeramente inferiores con la presencia del muro intermedio. Por otro lado los valores del número de Nusselt se obtienen valores muy similares en ambos casos.

En los casos del flujo másico adimensional se observan valores ligeramente inferiores con la presencia del muro intermedio. Por otro lado los valores del número de Nusselt se obtienen valores muy similares en el caso con muro y caso sin muro siendo esta diferencia un poco más significativa en números bajos de Rayleigh, esto es debido a que para flujos laminares la capa límite térmica es mayor y tiene más influencia cuando tenemos mayor superficie.

## 8.2 Simulaciones transitorias en cavidad tridimensional

En el Capítulo 7 se estudia la evolución a lo largo del tiempo de los parámetros estudiados en el apartado anterior, número de Nusselt y flujo másico para distintos valores de Rayleigh. Estas simulaciones también se realizan para las dos configuraciones anteriores, cavidad tridimensional simple y cavidad tridimensional con muro intermedio.

Tanto en los casos de cavidad tridimensional simple como cavidad tridimensional con muro intermedio, para el caso de Rayleigh  $10^6$  comienza la evolución transitoria con altos números de Nusselt que van disminuyendo su valor a lo largo del tiempo hasta converger en un valor muy cercano al número de Nusselt del estacionario. En cuanto al flujo másico este comienza en valores muy pequeños, aumentando a lo largo del tiempo hasta converger. La diferencia entre la solución estacionaria y transitoria es pequeña para Rayleigh bajos siendo menor para el caso de la cavidad tridimensional con muro intermedio. Por otro lado la convergencia de los valores se produce para un tiempo mayor en el caso del flujo másico que en el caso del número de Nusselt.

Para altos números de Rayleigh en los que el flujo es turbulento la evolución del número de Nusselt es similar al caso de Rayleigh bajos, mientras que en la evolución del flujo másico se presentan

## Capítulo 8. Conclusiones

ciertas oscilaciones hasta de la convergencia del parámetro. Al igual que para el caso de números bajos de Rayleigh se observa un retraso en la convergencia del flujo másico adimensional con respecto a la convergencia del número de Nusselt, llegando incluso a no converger con el número de Fourier alcanzado en nuestras simulaciones. Además para los casos de alto número de Rayleigh tuvo que disminuir los saltos de tiempo para para bajos números de Fourier para conseguir la convergencia.

# Bibliografía

1. Wikipedia, disponible de <[http://es.wikipedia.org/wiki/Chimenea\\_solar](http://es.wikipedia.org/wiki/Chimenea_solar)>
2. Wikipedia, disponible de <[http://es.wikipedia.org/wiki/Torre\\_solar](http://es.wikipedia.org/wiki/Torre_solar)>
3. E. Lorenzo, *Las chimeneas solares: De una propuesta española en 1903 a la Central de Mazanares*, Universidad Politécnica de Madrid, 2002.
4. Wikipedia, disponible de <<http://es.wikipedia.org/wiki/Termosif%C3%B3n>>
5. Energías renovables y limpias, disponible de <<http://energias-renovables-y-limpias.blogspot.com.es/2013/01/funcionamiento-equipo-solar-termico-con-termosifon.html>>
6. Bejan; *Heat transfer*; Wiley, 1993.
7. G. Gan, S. B. Riffat; *A numerical study of solar chimney for natural ventilation of buildings with heat recovery*, Appl. Therm. Eng. Vol 18, 1171-1187, 1998.
8. H. Onbasioglu, A.N. Egrican; *Experimental approach to the thermal response of passive systems*, Energy Convers. Manage. Vol 43, 2053-2065, 2002.
9. S. A. M. Burek, A. Habeb; *Air flow and thermal efficiency characteristics in solar chimneys and Trombe Walls*, Energy Build, Vol 39, 128-135, 2007.
10. B. Zamora, A. S. Kaiser; *Optimum wall-to-wall spacing in solar chimney shaped channels in natural convection by numerical investigation*, Applied Thermal Engineering, Vol. 29, 762-769, 2009.
11. H. Akbari, T. R. Borgers; *Free convective turbulent flows within the Trombe Wall channel*, Solar Energy, Vol 33, 253-264, 1984.
12. W. Smolec, A. Thomas; *Problems encountered in heat transfer studies of a Trombe Wall*, Energy Convers Mgmt, Vol. 35, 483-491, 1994.
13. H. B. Awbi; *Design considerations for naturally ventilated buildings*, Renew Energy, Vol 5, 1081-1090, 1994.

14. B. Zamora, A. S. Kaiser; *Thermal and dynamic optimization of the convective flow in Trombe Wall shaped channels by numerical investigation*, Heat Mass Transfer, Vol. 45, 1393-1407, 2009.
15. Y. L. Chan, C. L. Tien; *A numerical study of two-dimensional laminar natural convection in shallow open cavities*, International Journal of Heat Mass transfer, Vol. 28, 603-612, 1985.
16. A. A. Mohamad, R. Viskanta; *An evaluation of different discretization schemes for natural convection of low-Prandtl number fluids in cavities*, Num Heat Transfer B, Vol. 16, 179-192, 1989.
17. E. Bilgen, H. Oztop; *Natural convection heat transfer in partially open inclined square cavities*, Int J. Heat Mass Transfer, Vol. 48, 1470-1479, 2005.
18. E. Bilgen, A. Balkaya; *Natural convection on discrete heaters in a square enclosure with ventilation ports*, Int J Heat Fluid Flow, Vol. 29, 1182-1189, 2008.
19. E. Bilgen, A. Muftuoglu; *Natural convection in a open square cavity with slots*, Int Comm Heat Mass Transfer, Vol. 35, 896-900, 2008.
20. K. Khanafer, K. Vafai; *Effective boundary conditions for bouyancy-driven flows and heat transfer in fully open-ended two-dimensional enclosure*, International Journal of Heat Mass Transfer, Vol. 45, 2527-2538, 2002.
21. S. Anil Lal, C. Reji; *Numerical prediction of natural convection in vented cavities using restricted domain approach*, International Journal Heat Mass Transfer, Vol. 52, 724-734, 2009.
22. B. Zamora, A. S. Kaiser; *Influence of the variable thermophysical properties on the turbulent bouyancy-driven airflow inside open cavities*, Heat Mass Transfer, Vol. 48, 35-53, 2012.
23. Z. Y. Guo, X. B. Wu; *Thermal drag and critical heat flux for natural convection of air in vertical parallel plates*, J. Heat Transfer, Vol. 115, 124-129, 1993
24. H. Bhowmik, K.W. Tou; *Experimental study of transient natural convection heat transfer from simulated electronic chips*, Experimental Thermal and Fluid Science, Vol. 29, 485-492, 2005.
25. A. Andreozzi, B. Buonomo, O. Manca; *Numerical investigation of transient natural in a vertical channel-chimney system symmetrically heated at uniform heat flux*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 55, 6077-6089, 2012.
26. B. Buonomo, O. Manca; *Transient natural convection in a vertical microchannel heated at uniform heat flux*, International Journal of Thermal Sciences, Vol. 56, 35-47, 2012.
27. A. Baïri, J.M. García de María, N. Laraqi; *Transient natural convection in parallelogramic enclosures with isothermal hot Wall. Experimental and numerical study applied to on-board electronics*, Applied Thermal Engineering, Vol. 30, 1115-1125, 2010.
28. J. Serrano-Arellano, M. Gijón-Rivera, J.M. Riesco-Ávila, J. Xamán, G. Álvarez; *Numerical investigation of transient heat and mass transfer by natural convection in a ventilated cavity: Outlet*

- air gap located close to heat source*, Internatinal Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 76, 268-278, 2014.
29. B. Zamora, A.S. Kaiser; *3D effects in numerical simulations of convective flows in cubical open cavities*, International Journal of Thermal Sciences, Vol. 77, 172-185, 2014.
30. J.F. Hinojosa, J. Cervantes-de Gortari; *Numerical simulation of steady-state and transient natural convection in a isothermal open cubic cavity*, Heat Mass Transfer, Vol. 46, 595-606, 2010.
31. D.C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*, 2a ed., DCW Industries, USA, 2003.
32. B. Zamora, *Notas sobre simulación numérica de fluidos*, Universidad Politécnica de Cartagena, 2013.
33. W. Shyy, M.M Rao; *Simulation of Transient Natural Convection Around an Enclosed Vertical Channel*, University of Florida, 1993.
34. A. Viedma; *Apuntes de Mecánica de fluidos*, Universidad Politécnica de Cartagena, 2010.
35. P. Ros, *Evaluación del código Phoenix para la simulación numérica del flujo en separadores de gotas de torres de refrigeración*, Proyecto Fin de Carrera, Universidad Politécnica de Cartagena, 2011.
36. A. Crespo; *Mecánica de Fluidos*, Thomson, 2006.