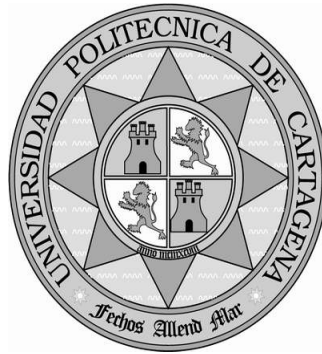


UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Universitaria de Ingeniería Naval y Oceánica



PROYECTO FIN DE CARRERA

RESOLUCIÓN APROXIMADA DE LA CAPA LÍMITE MEDIANTE LA
ECUACIÓN DE VON KARMAN EMPLEANDO UNA LEY LOGARÍTMICA.
APLICACIÓN A UN BUQUE MILITAR.

Titulación: Ingeniería Naval y Oceánica
Alumno: Juan Marcos Egea Castejón
Directoras: Sonia Busquier Sáez

ÍNDICE

1.	MOTIVACIÓN	5
2.	INTRODUCCIÓN A LOS FLUJOS DE FLUIDOS	7
2.1	CARACTERIZACIÓN DE LOS FLUIDOS	7
2.2	CLASIFICACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS DE LOS FLUIDOS	9
2.3	REGÍMENES DE FLUJO. NÚMERO DE REYNOLDS.	10
2.4	MÉTODOS DE ANÁLISIS.....	11
2.5	ECUACIONES GENERALES DE LOS FLUIDOS	11
2.5.1	LEYES DE CONSERVACIÓN	11
2.5.2	ECUACIONES DE NAVIER STOKES	13
2.5.3	ECUACIONES DE EULER DE FLUJO IDEAL. PARADOJA DE D’ALEMBERT	15
3.	CAPA LÍMITE.....	17
3.1	HISTORIA DE LA CAPA LÍMITE	17
3.2	TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE.....	17
3.3	CAPA LÍMITE LAMINAR Y TURBULENTO	20
3.4	DESPRENDIMIENTO DE LA CAPA LÍMITE.	22
3.5	RESISTENCIA DE FRICCIÓN Y DE PRESIÓN POR FRICCIÓN.....	24
3.6	LA CAPA LÍMITE EN LOS BARCOS	26
3.6.1	RELEVANCIA DE LA CAPA LÍMITE EN EL SECTOR NAVAL	26
3.6.2	CARACTERIZACIÓN DE LA CAPA LÍMITE EN LOS BARCOS.....	28
4.	ESTUDIO DE LA CAPA LÍMITE: ECUACIÓN DE VON KARMAN	33
4.1	INTRODUCCIÓN	33
4.2	THEODORE VON KARMAN	35
4.3	ECUACIÓN INTEGRAL DE VON KARMAN	38
5.	RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE VON KARMAN	41
5.1	ZONA LAMINAR.....	41
5.1.1	POLINOMIO CUADRÁTICO PARA PERFIL DE VELOCIDADES	41
5.1.2	POLINOMIO CÚBICO PARA PERFIL DE VELOCIDADES	44
5.2	ZONA TURBULENTO.....	47
5.2.1	LEY LOGARÍTMICA	47

5.2.2	LEY POTENCIAL	56
5.3	ZONA DE TRANSICIÓN.....	65
6	PROGRAMACIÓN DEL MÉTODO DE VON KARMAN-LOGARÍTMICA	67
6.1	MATLAB.....	67
6.1.1	SOLVER OD45	68
6.2	INTEGRACIÓN NUMÉRICA.....	69
6.3	CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN	70
7	VALIDACIÓN DE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE VON KARMAN.....	75
7.1	CÁLCULO DE LA RESISTENCIA DE UNA PLACA PLANA	75
7.1.1	ENSAYO DE PLACA PLANA DE 2.55 METROS.....	75
7.1.2	LÍNEA DE FRICCIÓN DE HUGHES. ITTC-57	77
7.1.3	RESULTADOS COMPARATIVOS.....	78
8	CÁLCULO DE LA RESISTENCIA POR FRICCIÓN DE UN BUQUE MILITAR.....	81
8.1	EL BUQUE.....	81
8.1.1	ENSAYOS DE CANAL.....	83
8.1.3	3D DEL MODELO Y BUQUE REAL	88
8.2	RESULTADOS DEL CÁLCULO DE LA RESISTENCIA POR FRICCIÓN	89
8.2.1	RESULTADOS PARA EL MODELO	89
8.2.2	RESULTADOS PARA EL BUQUE.....	91
8.3	DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS	92
9	CONCLUSIONES	95
10	BIBLIOGRAFÍA.....	97
	ANEXO I: PLANO DE FORMAS.....	99

NOMENCLATURA

B	Manga
B (=5.0)	Constante ley logarítmica (Capítulo 5)
C_B	Coefficiente de bloque
c_f	Coefficiente de fricción local
C_F	Coefficiente de fricción
C_P	Coefficiente prismático
C_T	Coefficiente de resistencia total
C_V	Coefficiente de resistencia viscosa
D_F	Fuerza de arrastre
E	Anchura de la placa plana de superficie equivalente a la superficie del buque
Fn	Número de Froude
ITTC	International Towing Tank Conference
k	Factor de forma
k (=0.41)	Constante ley logarítmica (Capítulo 5)
L	Eslora de la placa plana o del buque
L_{PP}	Eslora entre perpendiculares
L_W	Eslora en flotación
p	Presión
Re	Número de Reynolds
S	Superficie mojada
T	Calado
U	Velocidad del buque o velocidad del exterior de la capa límite
u (x, y)	Perfil de velocidad dentro de la capa límite
x	Distancia desde el borde de entrada de la placa plana
y	Distancia normal a la placa plana
δ	Espesor de la capa límite
Δ	Desplazamiento
λ	Factor de escala
μ	Viscosidad dinámica
ν	Viscosidad cinemática
θ	Espesor de cantidad de movimiento
ρ	Densidad
τ_0	Tensión cortante en la pared de la placa plana

1. MOTIVACIÓN

Los barcos son el medio de transporte que comparativamente consume menos energía en relación al tonelaje desplazado y de ahí su extendido uso. Teniendo en cuenta el tamaño de solo la flota mercante mundial, una pequeña reducción de la componente de la resistencia de fricción conllevaría un ahorro considerable de combustible, lo que se traduce en un mayor beneficio para armadores, para el sector naval y para países importadores de crudo, además de una mayor eficiencia y un transporte más ecológico.

En las primeras etapas del proyecto de diseño de un buque es preciso realizar el cálculo estimado de la resistencia al avance que ha de vencer el buque para alcanzar una determinada velocidad. Éste cálculo es importante pues es el paso previo al cálculo y diseño de todo el sistema propulsivo del buque. Si bien hay otros muchos factores que afectan a la resistencia al avance, la componente de fricción es una de las más importantes, siendo la mayor componente de la resistencia en buques que se mueven con bajos número de Froude, como es el caso de los buques mercantes.

Si se suma la relevancia del fenómeno físico que controla la resistencia por fricción, la Capa Límite, catalogado como el mayor descubrimiento de la Mecánica de Fluidos moderna, hace que su estudio, control y optimización sea un campo muy interesante.

El objetivo de este proyecto fin de carrera es la obtención de una línea de fricción para placa plana a partir de un método planteado pero no desarrollado en la bibliografía científica que se ha manejado. Se quiere obtener una ecuación cuya solución sea competitiva frente a otros métodos ya desarrollados como es la técnica de Von Karman-Potencial.

2. INTRODUCCIÓN A LOS FLUJOS DE FLUIDOS

Un fluido es un medio continuo formado por una sustancia entre cuyas moléculas hay una fuerza de atracción débil. Los fluidos se caracterizan por cambiar de forma sin que existan fuerzas restitutivas tendentes a recuperar la forma "original". Puesto que los buques se mueven a través de un medio fluido, en concreto a través del agua, se van a exponer a continuación los comportamientos que el medio fluido tiene, así como las peculiaridades del agua, con el fin de comprender el motivo y las consecuencias de cada uno de los procesos que tiene lugar a lo largo de este proyecto fin de carrera.

2.1 CARACTERIZACIÓN DE LOS FLUIDOS

Las propiedades físicas de la materia varían dependiendo del estado termodinámico en que se halle. En cada estado termodinámico las partículas constitutivas de la materia interactúan por medio de fuerzas cuya intensidad depende de la distancia que las separa entre sí. La intensidad y tipo de interacción a nivel microscópico determina los modos de comportamiento observables a nivel macroscópico, denominados estados de agregación. En ingeniería se presentan cuatro estados: sólido, líquido, plasma y gas. Este proyecto se centra en los procesos líquidos.

Se puede definir un líquido como una sustancia que se deforma continuamente en el tiempo ante la acción de un esfuerzo tangencial cualquiera. Las fuerzas intermoleculares de los líquidos permiten estabilizar la distancia molecular y una cierta ordenación espacial a nivel microscópico, débil sin embargo ante tensiones incluso muy pequeñas.

Mientras que en los sólidos se produce un equilibrio elástico mediante la Ley de Hook, la cual indica que la deformación es proporcional a la tensión cortante aplicada, en los fluidos las fuerzas internas se reducen a la fricción, cuya acción es disipadora de energía. Ante fuerzas de corte impuestas externamente, las partículas fluidas se ponen en movimiento unas respecto a otras generándose una fricción creciente con la velocidad de deformación hasta igualar las tensiones cortantes externas, reduciéndose a cero la velocidad de deformación y alcanzando un equilibrio dinámico a velocidad de deformación constante $d \propto / dt$.

El estudio de la deformación en el entorno de un punto indica que la velocidad de deformación depende de las derivadas espaciales de la velocidad del fluido según la ley:

$$\frac{d \alpha_{ik}}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (2.1)$$

La relación entre la tensión cortante y la velocidad de deformación en el equilibrio depende de la naturaleza del fluido. El agua se comporta según la Ley de Viscosidad de Newton, la cual dice que el fluido adquiere una velocidad de deformación proporcional a la tensión cortante aplicada, es decir,

$$\tau_{ik} = \mu \frac{d \alpha_{ik}}{dt} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

Siendo τ_{ik} es el esfuerzo cortante en el plano ik , la constante de proporcionalidad μ es una propiedad física exclusiva de los fluidos denominada viscosidad dinámica y $\frac{d \alpha_{ik}}{dt}$ es la velocidad de deformación desarrollada por el fluido.

En definitiva, lo que dice la Ley de Newton es que la viscosidad del fluido puede considerarse constante en el tiempo. El agua cumple esta ley y por eso se dice que es un fluido Newtoniano. Estos son los más sencillos de describir pero también hay fluidos no Newtonianos como la miel o la sangre.



Figura 2.1.- Isaac Newton en 1702 por Geoffrey Kneller.

2.2 CLASIFICACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS DE LOS FLUIDOS

La existencia o inexistencia de evolución temporal permitirá diferenciar entre flujos estacionarios o transitorios. Mientras que en los primeros el valor de las variables fluidas se mantiene constante en el tiempo, en los segundos, estas variables evolucionan conforme el tiempo transcurre.

En segundo lugar, se atenderá al valor aparente de la viscosidad en el flujo. Si la viscosidad influye muy poco en el movimiento estaremos ante un flujo ideal. Cuando el efecto de la viscosidad sea apreciable, se dirá que el flujo es viscoso.

En tercer lugar, atendiendo a la evolución de la densidad del fluido, se puede diferenciar entre flujo compresible e incompresible.

En cuarto lugar, atendiendo al tipo de valores de las variables fluidas, se pueden encontrar flujos laminares y flujos turbulentos. Los flujos laminares tienen propiedades que presentan continuidad espacial y temporal. Los flujos turbulentos, por el contrario, se caracterizan porque sus propiedades tienen valores instantáneos fuertemente variables y aparentemente impredecibles, aún cuando se den en flujos permanentes.

En quinto y último lugar, los límites del campo fluido conducen a diferenciar los flujos externos de los internos. En los flujos externos el campo fluido se extiende hasta el infinito, mientras que en los internos o guiados están encerrados en regiones delimitadas por paredes sólidas o superficies frontera con otros fluidos.

Verifica	Evolución Temporal	Efecto Viscosidad	Cambio de Densidad	Continuidad Propiedades	Límites del Fluido
Sí	Variable	Viscoso	Compresible	Laminar	Interno
No	Permanente	Ideal	Incompresible	Turbulento	Externo

Tabla 2.1. - Tipos de flujo.

2.3 REGÍMENES DE FLUJO. NÚMERO DE REYNOLDS.

En el apartado anterior se ha hecho referencia a la clasificación de los movimientos fluidos atendiendo a la continuidad de sus propiedades, dando lugar al flujo turbulento y flujo laminar. Estos dos son los dos regímenes de flujo que se dan en la naturaleza, siendo el régimen turbulento el que predomina.

El flujo laminar corresponde con un movimiento fluido ordenado, el fluido se mueve en láminas paralelas sin entremezclarse y las partículas del fluido siguen una trayectoria suave, mientras que el flujo turbulento es todo lo contrario, el fluido se mueve de forma caótica, desordenada, con trayectorias de las partículas fluidas formando pequeños remolinos.

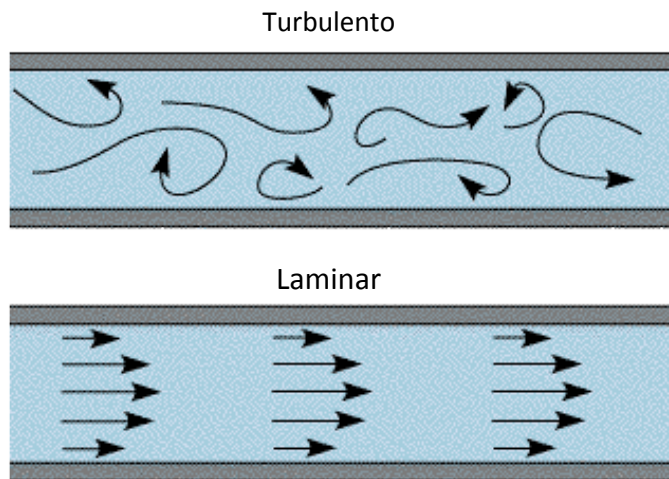


Figura 2.2.- Regímenes turbulento y laminar.

La transición de un régimen a otro depende de la densidad, viscosidad, velocidad y la dimensión característica del flujo. El número de Reynolds es un número adimensional que relaciona dichos parámetros, comparando los términos convectivos y los términos viscosos que gobiernan el movimiento de los fluidos. Este número recibe su nombre en honor de Osborne Reynolds (1842-1912), quien lo describió en 1883.

$$Re = \frac{uL}{\nu} \quad (2.3)$$

Siendo:

u: velocidad.

L: longitud característica.

ν : viscosidad cinemática.

De esta forma, un flujo con un número de Reynolds de 10^6 expresa que las fuerzas viscosas son 10^6 veces menores que las fuerzas convectivas, y por tanto aquellas podrían ignorarse.

Además, el número de Reynolds permite predecir de cierta manera la transición de un régimen laminar a uno turbulento. Para las aplicaciones navales se estima que la transición se da para valores entre 10^4 y 10^5 dependiendo de la rugosidad de la superficie, del estado de agitación del fluido, etc.

2.4 MÉTODOS DE ANÁLISIS.

Existen tres técnicas clásicas para analizar el estado de movimiento de un fluido, utilizando una u otra en función de la geometría del problema, las condiciones de contorno y las leyes de la mecánica. Estas técnicas son el Análisis Integral o de escala macroscópica, referido a volúmenes de control; el Análisis Diferencial o de escala local; y finalmente los ensayos experimentales que utilizan el Análisis Dimensional y Leyes de Semejanza.

Los sistemas que se estudian en este proyecto serán porciones de materia que se caracterizan por sus dimensiones. En el análisis integral se toman masas macroscópicas contenidas en porciones finitas del espacio denominadas volúmenes de control y en el análisis diferencial se toma como sistema la denominada partícula fluida, cantidad de fluido de tamaño despreciable a efectos macroscópicos. Las interacciones entre el sistema y su entorno ocurren a través de la frontera o contorno del sistema y están gobernadas por las Leyes de la Mecánica.

2.5 ECUACIONES GENERALES DE LOS FLUIDOS

2.5.1 LEYES DE CONSERVACIÓN

Las interacciones del sistema con el entorno ocurren a través de su frontera o contorno y están gobernadas por las Leyes de la Mecánica. Estas leyes pueden expresarse como principios de conservación y se resumen en las siguientes leyes fundamentales para un sistema.

Conservación de masa:

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (2.4)$$

Conservación de impulso:

Segunda Ley de Newton:

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_k m_k \cdot \vec{u}_k \right) \quad (2.5)$$

Conservación de momento angular:

$$\sum_i \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{d}{dt} (\sum_k \vec{r}_k \times m_k \cdot \vec{u}_k) \quad (2.6)$$

Conservación de la energía:

$$\Delta E = Q + T \quad (2.7)$$

Con estas leyes de conservación, completadas con las relaciones constitutivas y unidas a las condiciones iniciales y de contorno, es suficiente para determinar los valores de las propiedades del flujo en cada instante y lugar.

Si se desarrollan las expresiones anteriores en derivadas parciales, todas ellas expresan la conservación de magnitudes esenciales: masa, impulso o momentum y energía.

Conservación de masa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.8)$$

Donde el operador D/Dt recibe el nombre de derivada substancial, tiene por expresión $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla$ y que aplicado a una función intensiva del fluido produce su derivada total. El término $\partial/\partial t$ es el local mientras que $\vec{u} \cdot \nabla$ es el convectivo, que existe si hay movimiento del fluido. El término $\nabla \cdot \vec{u}$ cuantifica la velocidad con la que el fluido se dilata.

Conservación de impulso:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{u} + \bar{\tau} + \rho \vec{f}_m \quad (2.9)$$

Donde \vec{f}_m son las fuerzas másicas que actúan sobre el fluido y $\bar{\tau}$ es el tensor de esfuerzos viscosos.

Conservación de energía:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{u} + \varphi_u - \nabla \cdot \vec{q} + \dot{q}_r \quad (2.10)$$

Donde el término φ_u recibe el nombre de función de disipación de Rayleigh y corresponde con la densidad de potencia producida por los esfuerzos viscosos al formar la partícula fluida.

Este sistema de ecuaciones de derivadas parciales se ajusta a cada fluido con las relaciones de estado constitutivas, que describen los procesos de transporte y las variables de estado. El tensor de esfuerzos es función de la presión y las derivadas parciales primeras espaciales de la velocidad, mientras que el flujo de calor depende del gradiente de temperaturas. Por tanto son cinco ecuaciones con siete incógnitas: ρ , p , e , T , u , v y w . Por tanto, es necesario completar el sistema con dos ecuaciones más, las de estado térmico y calórico. La ecuación de estado térmico $p = p(\rho, T)$ relaciona la densidad con la presión y la temperatura y la ecuación de estado calórica $e = c_v T$ expresa la energía interna en función de la temperatura, que para gases y líquidos perfectos.

2.5.2 ECUACIONES DE NAVIER STOKES

Las ecuaciones de Navier-Stokes están constituidas por el conjunto de leyes de conservación de las magnitudes fluidas y todas las relaciones constitutivas necesarias para cerrar el problema.

Permiten determinar los valores de todas las magnitudes fluidas y si fuera necesario conocer otras variables, sería posible empleando las relaciones termodinámicas oportunas.

El planteamiento general de las ecuaciones de Navier-Stokes hace necesario que sean adaptadas, en cada caso, a las condiciones iniciales y de contorno adecuadas a cada caso de estudio. En el caso del agua se puede tratar como flujos incompresibles, lo que permite simplificar aún más estas ecuaciones quedando finalmente formuladas para flujos reales incompresibles de la forma:

Conservación de masa:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.11)$$

Conservación de impulso:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \cdot \Delta \vec{u} + \rho \vec{f}_m \quad (2.12)$$

Conservación de energía:

$$\rho c_v \frac{De}{Dt} = \varphi_u + k_T \nabla T + \dot{q}_r \quad (2.13)$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes, tal y como quedan de la forma anterior, describen la evolución de flujos homogéneos Newtonianos. La complejidad de la estructura de las ecuaciones y la dificultad añadida de trabajar con flujos reales en los que la viscosidad no es despreciable hace muy difícil su resolución. Esto ha supuesto que durante décadas desde la formulación de dichas ecuaciones no pudieran resolverse. Sin embargo, la importancia de cada uno de los términos de las ecuaciones puede variar según el tipo de flujo que se establezca. Cuando alguno de los términos es mucho menor que los demás, las ecuaciones pueden sustituirse por versiones simplificadas, como hemos visto en el caso de flujos incompresibles, describiendo el flujo con un conjunto de ecuaciones más sencillas de analizar. En general, la información acerca de la importancia relativa de los términos que intervienen en las ecuaciones del flujo se obtiene utilizando técnicas de análisis dimensional. Estimando el orden de magnitud de cada término, es posible comparar la influencia de cada uno de ellos en el flujo mediante cocientes adimensionales.

2.5.3 ECUACIONES DE EULER DE FLUJO IDEAL. PARADOJA DE D'ALEMBERT

Se entiende por flujo ideal aquel en el que no existen fenómenos de transporte, es decir, no hay viscosidad. Cuando un flujo real cumple las condiciones anteriores, la zona donde su comportamiento se asemeja al flujo ideal puede ser descrita por las Ecuaciones de Euler, deducidas a partir de las de Navier-Stokes.

Balance de masa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.14)$$

Balance de impulso:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{f}_m \quad (2.15)$$

Balance de energía:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \dot{q}_r \quad (2.16)$$

Estas ecuaciones de Euler se pueden resolver, por lo que el estudio de los flujos ideales es una cuestión, en un principio, relativamente fácil de abordar, si bien es común que su complejidad final resulte muy elevada. Alrededor de cuerpos esbeltos es aceptable la idealización y aplicación de las ecuaciones de Euler, mientras que en cuerpos gruesos no es posible.

Se procura aprovechar al máximo la teoría ideal, que será aplicable para calcular campos de velocidades lejos de la frontera con el sólido y para calcular campos de presiones alrededor de cuerpos muy esbeltos. Ahora bien, cuando queremos calcular campos de presiones alrededor de cuerpos no esbeltos, los resultados de la teoría ideal contradicen los resultados experimentales. Esta discrepancia entre los resultados ideales y reales la expuso D'Alembert cuando, al aplicar las ecuaciones de Euler para calcular la fuerza de arrastre que sufría una esfera inmersa en una corriente, obtuvo que dicha fuerza era nula y que, por tanto, la esfera no era arrastrada por la corriente (Fig.2.3a), lo que se llamó Paradoja de D'Alembert. Sin embargo, se comprueba experimentalmente que la esfera sí es arrastrada por la corriente.

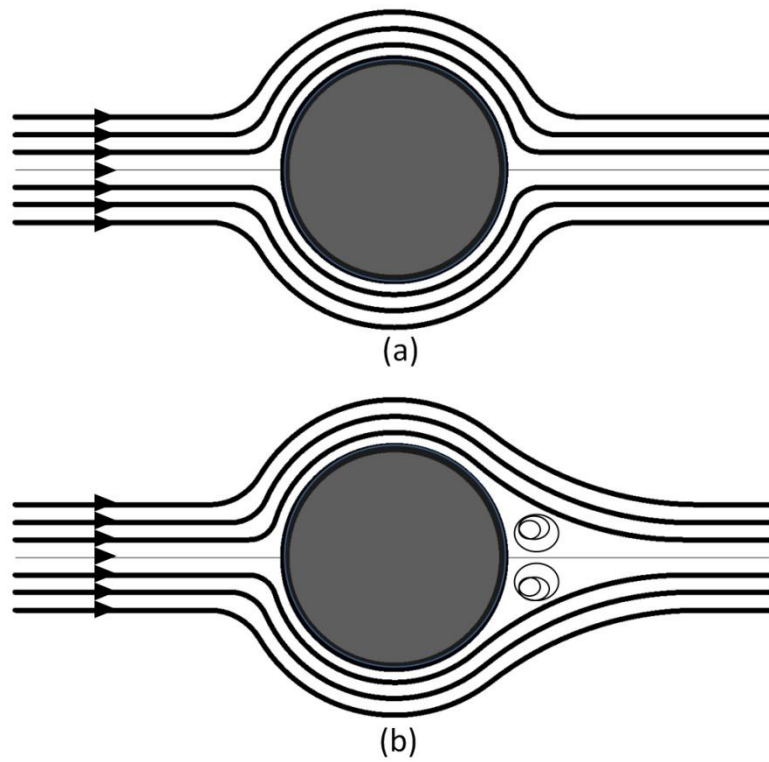


Figura 2.3.- (a) Flujo ideal. (b) Flujo real.

3. CAPA LÍMITE

3.1 HISTORIA DE LA CAPA LÍMITE

Antes de 1860, el interés de la ingeniería por la mecánica de fluidos se limitaba casi exclusivamente al flujo del agua. El desarrollo de la industria química durante la última parte del siglo XIX dirigió la atención a otros líquidos y a los gases. El interés por la aerodinámica comenzó con los estudios del ingeniero aeronáutico alemán Otto Lilienthal en la última década del siglo XIX, y produjo avances importantes tras el primer vuelo con motor logrado por los inventores estadounidenses Orville y Wilbur Wright en 1903.

Siendo el agua y sobre todo el aire fluidos poco viscosos, no se entendía cómo ofrecían tanta resistencia al avance. Además, teóricos y experimentalistas no llegaban a conclusiones claras pues la teoría y los experimentos no coincidían. Durante todo este tiempo no era posible predecir la resistencia hidrodinámica ni la aerodinámica.

Esta complejidad de los flujos viscosos, y en particular de los flujos turbulentos, restringió en gran medida los avances en la dinámica de fluidos, hasta que el ingeniero alemán Ludwig Prandtl, observó en 1904, que muchos flujos pueden separarse en dos regiones principales. La región próxima a la superficie está formada por una delgada capa límite donde se concentran los efectos viscosos, donde el gradiente de velocidad es muy grande, y en la que puede simplificarse mucho el modelo matemático. Fuera de esta capa límite, se pueden despreciar los efectos de la viscosidad, y pueden emplearse las ecuaciones matemáticas más sencillas para flujos no viscosos.

Este descubrimiento revolucionó la aeronáutica. Se puede decir que Prandtl es el fundador de la Mecánica de Fluidos moderna, es posiblemente, la aportación más importante en la historia de esta ciencia.

3.2 TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE

El trabajo fundamental de la Teoría de la Capa Límite fue presentado en 1904, en unos 10 minutos, y se dice que solamente tenía ocho páginas pues su autor, Ludwig Prandtl, pensaba que solamente podía escribir sobre lo que había sido defendido públicamente.

El texto puede ser hallado en su versión original, pero en este proyecto se presentarán algunos detalles a partir de la traducción efectuada por la National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), en 1928.

En lo que sigue se tomarán algunos textos seleccionados y considerados literalmente, al efecto de ilustrar los conceptos de Prandtl:

“...El tratamiento de un proceso de flujo se puede dividir en dos componentes que están mutuamente relacionados el uno con el otro”... “Por un lado tenemos el fluido libre... por el otro tenemos la capa de transición sobre los bordes sólidos...” “El aspecto más importante del problema es el comportamiento del fluido sobre la superficie del cuerpo sólido...” “Se puede simplificar el comportamiento físico en la capa de transición entre el fluido y el cuerpo sólido postulando que el fluido se adhiere a la superficie y, consecuentemente, la velocidad es cero o tiene el valor de la velocidad del cuerpo” “En la fina capa de transición, las grandes diferencias de velocidad producirán efectos perceptibles a pesar de las pequeñas constantes de viscosidad del fluido”

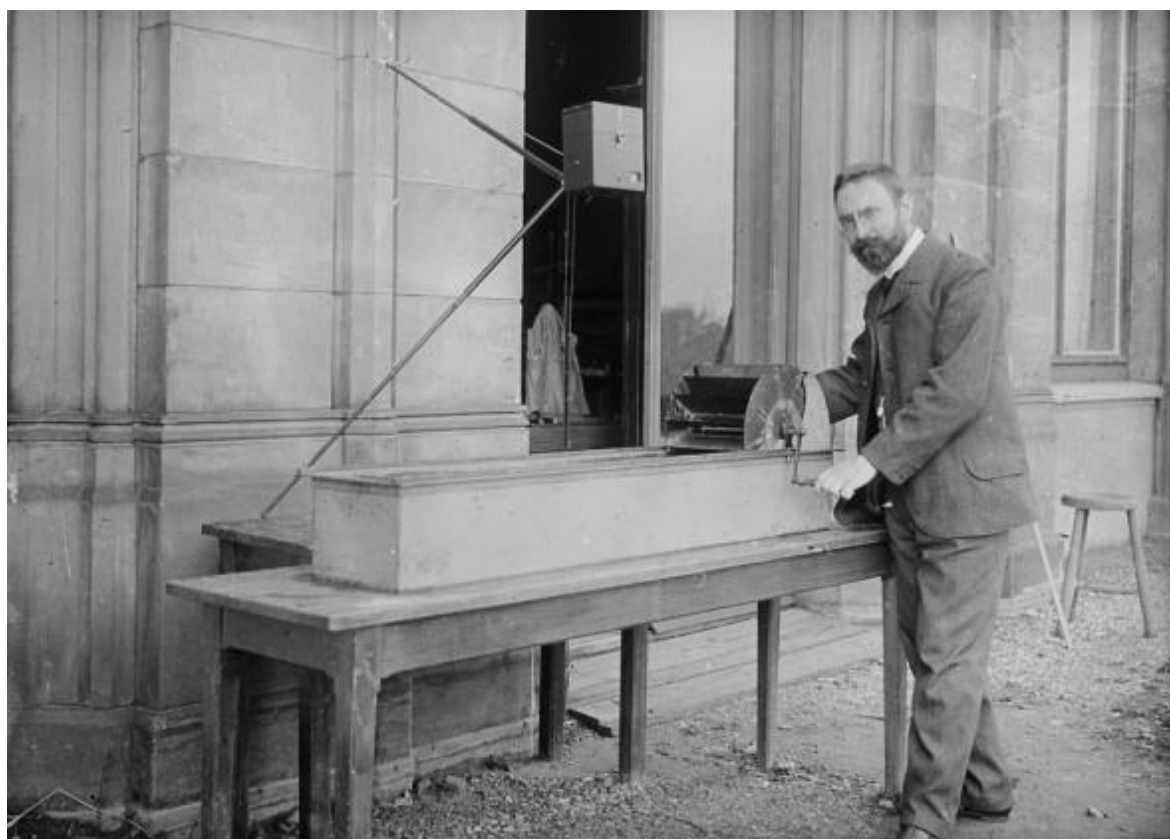


Figura 3.1.- Foto de Prandtl con su canal de experiencias.

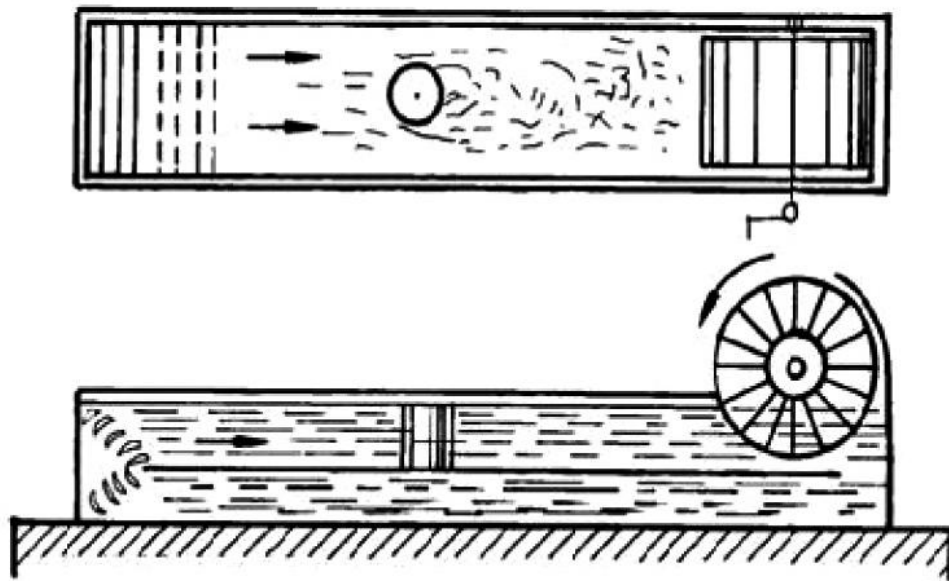


Figura 3.2.- Esquema del canal utilizado por Prandtl para sus experimentos.

Por tanto, lo que dice la Teoría de la Capa Límite es que cualquier flujo que incide sobre un objeto se puede dividir en dos regiones: una región viscosa en las proximidades de la superficie del objeto, donde se da un alto gradiente de velocidad y por tanto unas tensiones tangenciales en la superficie del objeto; y una región exterior no viscosa, sin tensiones tangenciales por ser nulo el gradiente de velocidad. La región viscosa se denomina Capa Límite, se inicia en las proximidades del borde de ataque y su extensión va aumentando aguas abajo. El espesor de la capa límite es creciente y normalmente de poca extensión.

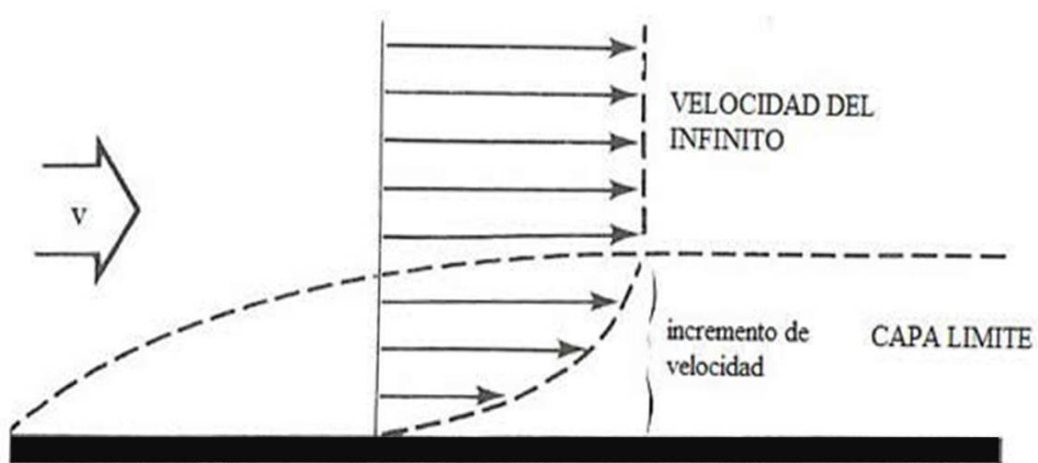


Figura 3.3.- Descripción de la capa límite.

Aunque la viscosidad del fluido sea pequeña, la variación de velocidad es muy elevada en un espacio muy reducido, por ello, el esfuerzo cortante es muy elevado. Los efectos de disipación viscosos en esta delgada capa tienen la magnitud suficiente para causar temperaturas tan altas que hacen arder los satélites al reingresar en la atmósfera.

3.3 CAPA LÍMITE LAMINAR Y TURBULENTO

En el Capítulo 2 se explicó los dos regímenes de flujos que se dan en la naturaleza, siendo el turbulento el predominante. Dentro de la capa límite, podemos distinguir también, entre los regímenes laminar y turbulento.

Si se analiza el comportamiento de la capa límite sobre una placa plana sumergida en una corriente fluida con una velocidad constante y paralela a la placa, se puede representar el comportamiento de la capa límite como muestra la Figura 3.4.

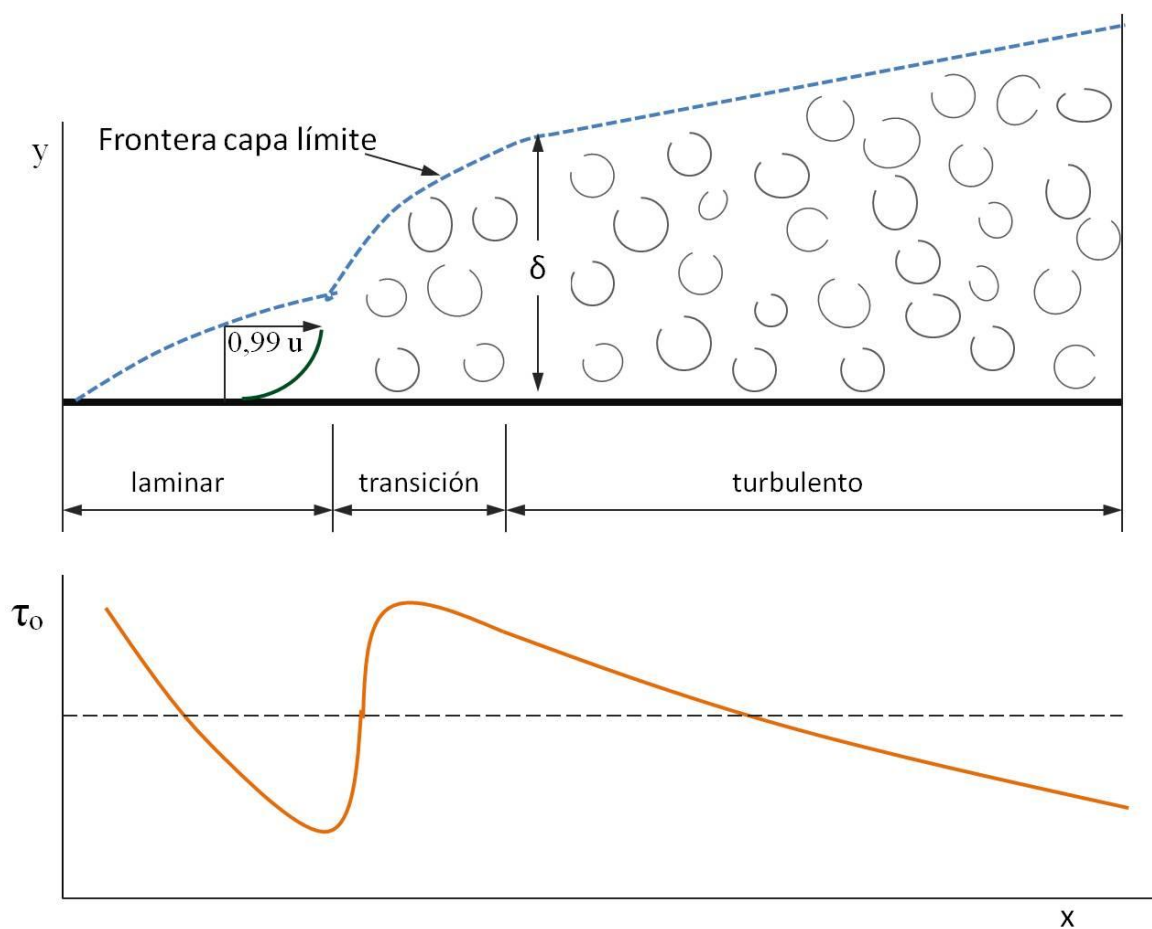


Figura3.4.- Desarrollo de la capa límite.

El flujo es laminar en sus comienzos pero a medida que avanza, el espesor de la capa límite aumenta y el perfil de velocidades varía. El esfuerzo cortante en la pared llega a disminuir tanto que no puede controlar la turbulencia y la capa deja de ser laminar. Luego se alcanza una región de transición laminar-turbulento donde el flujo cambia de régimen, con un engrosamiento consiguiente de la capa límite. La capa límite turbulenta se engrosa con mucha mayor rapidez que la capa laminar, y también tiene un esfuerzo cortante de pared considerablemente mayor.

El espesor de la capa límite suele definirse como la distancia desde la superficie hasta el punto en que su velocidad difiere de la velocidad correspondiente al fluido ideal en un 1 por 100.

La experiencia ha permitido determinar que, para placa plana el movimiento laminar en la capa límite llega a hacerse inestable cuando se sobrepasa un valor crítico del número de Reynolds de $5 \cdot 10^5$.

Los perfiles de velocidades cambian entre los dos regímenes, siendo el perfil de velocidad turbulento el que genera mayor resistencia al avance debido a un cambio más brusco de la velocidad del flujo como se puede ver en la Figura 3.5. Por eso, en el la transición de la capa límite laminar a la turbulenta, la tensión cortante en la pared vuelve a subir bruscamente como se mostró en la Figura 3.4. El perfil turbulento tiene una mayor pendiente en la pared que un perfil laminar con el mismo espesor de capa límite.

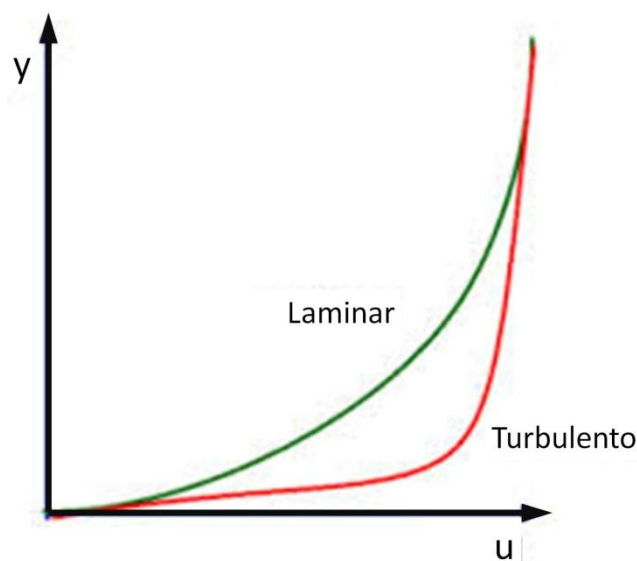


Figura 3.5.- Perfiles de velocidad laminar y turbulento dentro de la capa límite.

En la Figura 3.6 se muestra un dibujo de una capa límite turbulenta y en la Figura 3.7 aparece una fotografía real. El espesor promediado en el tiempo es $\delta(x)$ y el espesor instantáneo varía entre 0.4δ y 1.2δ .

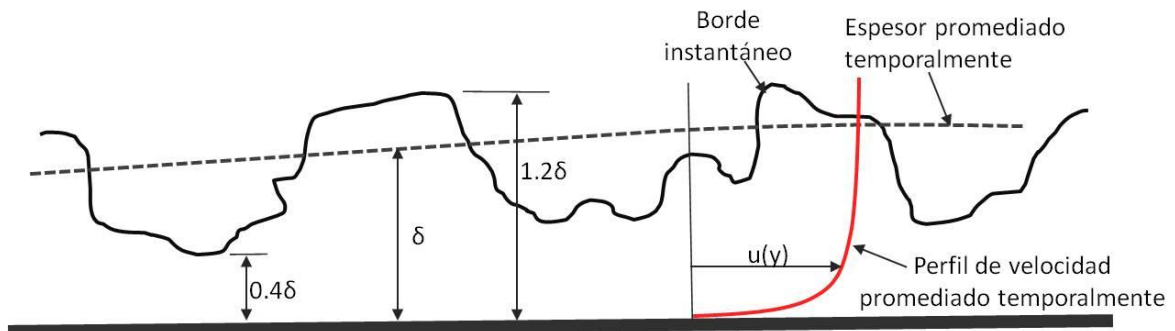


Figura 3.6.- Esquema de la capa límite turbulenta.

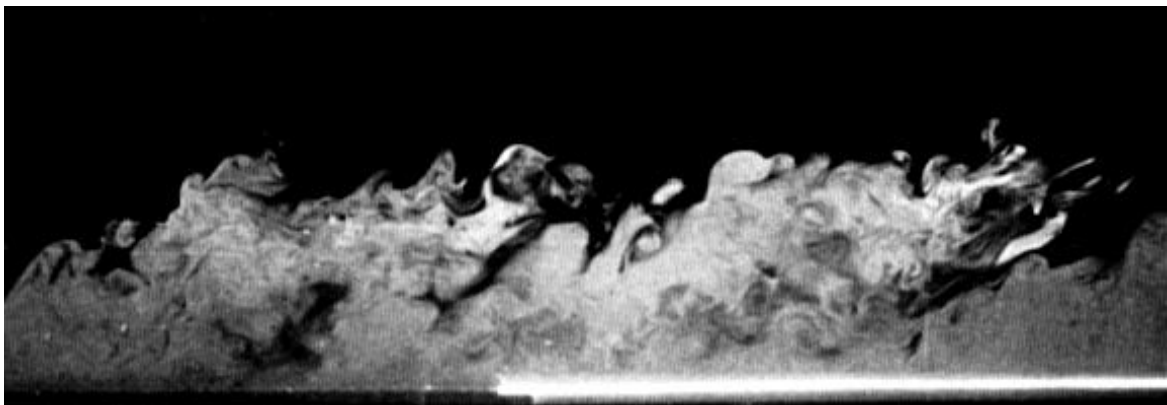


Figura 3.7.- Corte de la capa límite turbulenta en la dirección de la corriente (fotografía de R. E. Falco).

3.4 DESPRENDIMIENTO DE LA CAPA LÍMITE.

En una placa plana, se ha visto que el espesor de la capa límite aumenta con la distancia a partir del borde de ataque, lo que se explica por la deceleración que sufre el fluido a causa del esfuerzo cortante. Este efecto se produce cuando el gradiente de presiones se mantiene nulo a lo largo de la placa plana.

Si se tiene un conducto o sección convergente, la aceleración del flujo compensa la deceleración que sufre por el esfuerzo cortante, y se opone al aumento de espesor de la capa límite.

Sin embargo, si el conducto o sección es divergente, la presión aumenta en la dirección de la corriente, produciéndose un gradiente de presiones adverso, que se opone al movimiento y tiende a retardar el flujo, lo cual se suma al efecto decelerador producido por el esfuerzo cortante. Esto produce que la capa límite se pueda separar del contorno, produciéndose el efecto de desprendimiento de capa límite.

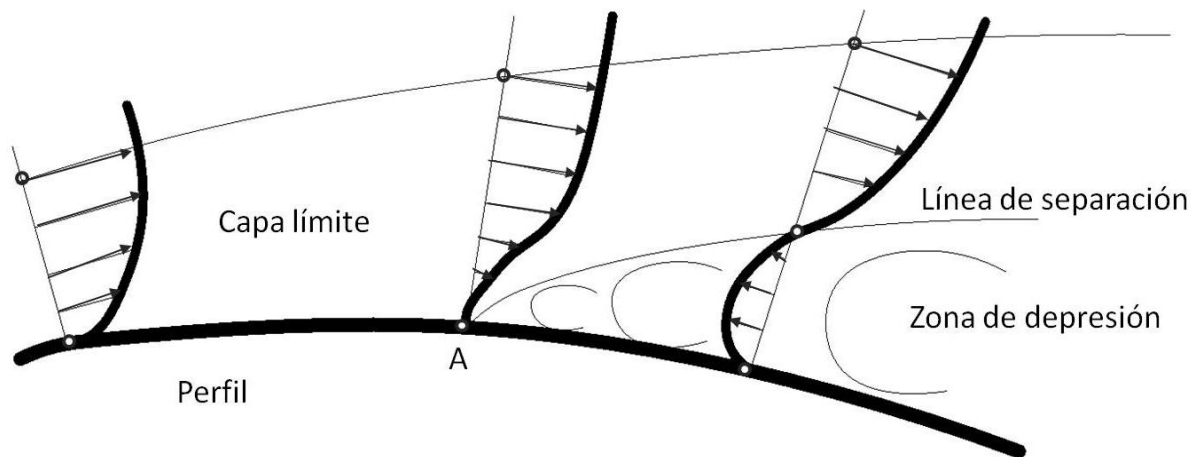


Figura 3.8.- Efecto del gradiente de presión adverso.

Como muestra la Figura 3.8, el flujo en las proximidades del contorno se va continuamente decelerando a causa de la viscosidad, hasta que en el punto A, la velocidad es cero. La forma del contorno exigiría aún una disminución mayor de la velocidad, porque allí el contorno diverge; pero como esto es imposible, el flujo se separa del contorno al mismo tiempo que se produce un contraflujo producido por el gradiente de presiones adverso. En esa zona de desprendimiento se produce una zona de baja presión.

Aguas arriba la presión será más alta que aguas abajo. El cuerpo sumergido en el flujo experimentará una fuerza debida a este gradiente de presiones.

Se sabe que la capa límite turbulenta es más resistente a la separación. El mayor momentum en la capa límite “empuja” la separación hacia atrás. Este efecto queda reflejado en la Figura 3.9.

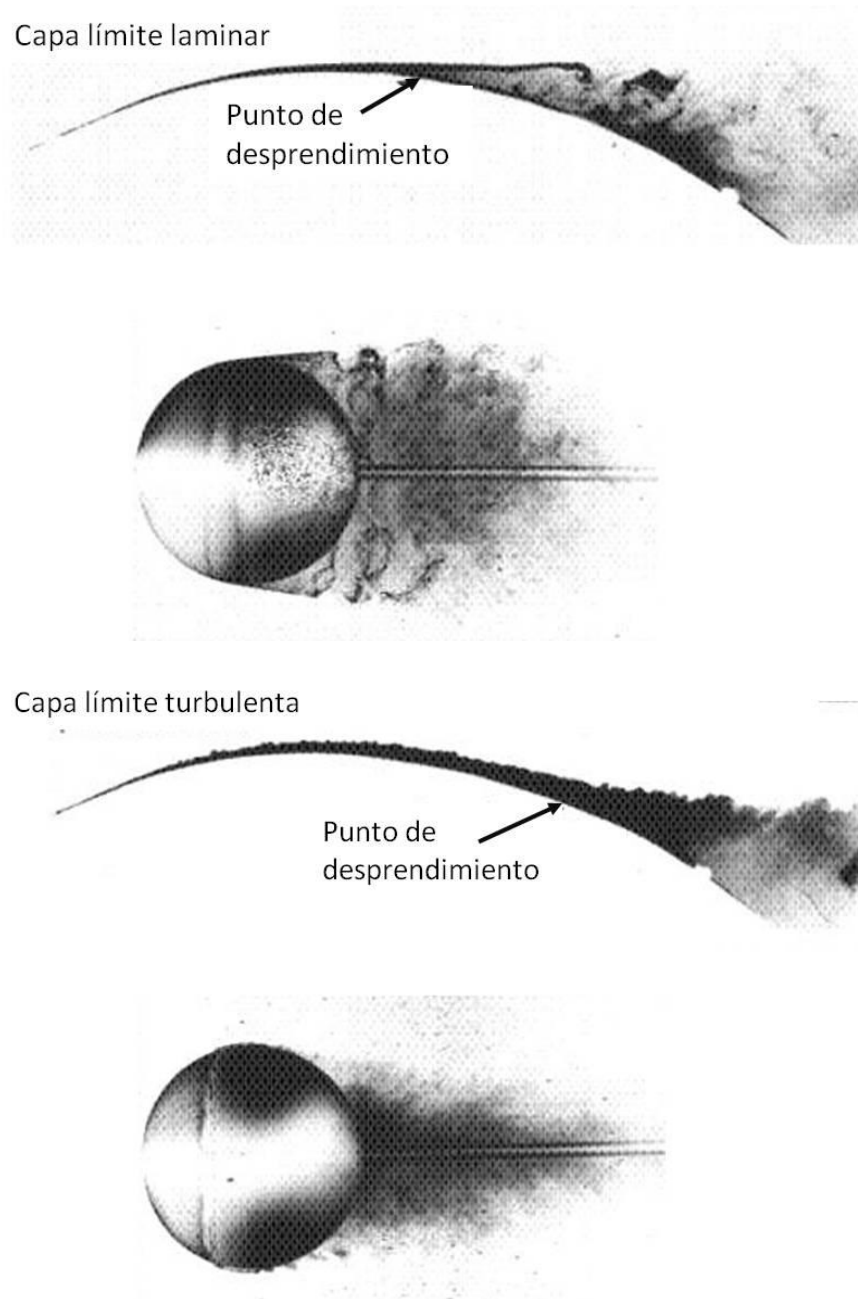


Figura 3.9.- Comparación de posición de los puntos de separación para capa límite laminar y turbulenta.

3.5 RESISTENCIA DE FRICCIÓN Y DE PRESIÓN POR FRICCIÓN.

La teoría de la capa límite es poco sólida para cuerpos donde se produce desprendimiento de la capa límite. Se puede predecir el punto de desprendimiento pero no permite estimar la distribución de las presiones en la zona desprendida. La diferencia entre las altas presiones en la región frontal y las bajas presiones en la región posterior del cuerpo donde la corriente está

desprendida da lugar a una contribución a la resistencia denominada resistencia de presión por fricción.

La Figura 3.10 muestra el efecto de separación de la corriente y subsiguiente fallo de la teoría de la capa límite. La distribución de presiones sobre un cilindro circular en el caso teórico no viscoso corresponde con la línea discontinua. La diferencia entre las distribuciones de presión en el caso real, tanto laminar como turbulento, y la predicción teórica del caso no viscoso, es notable.

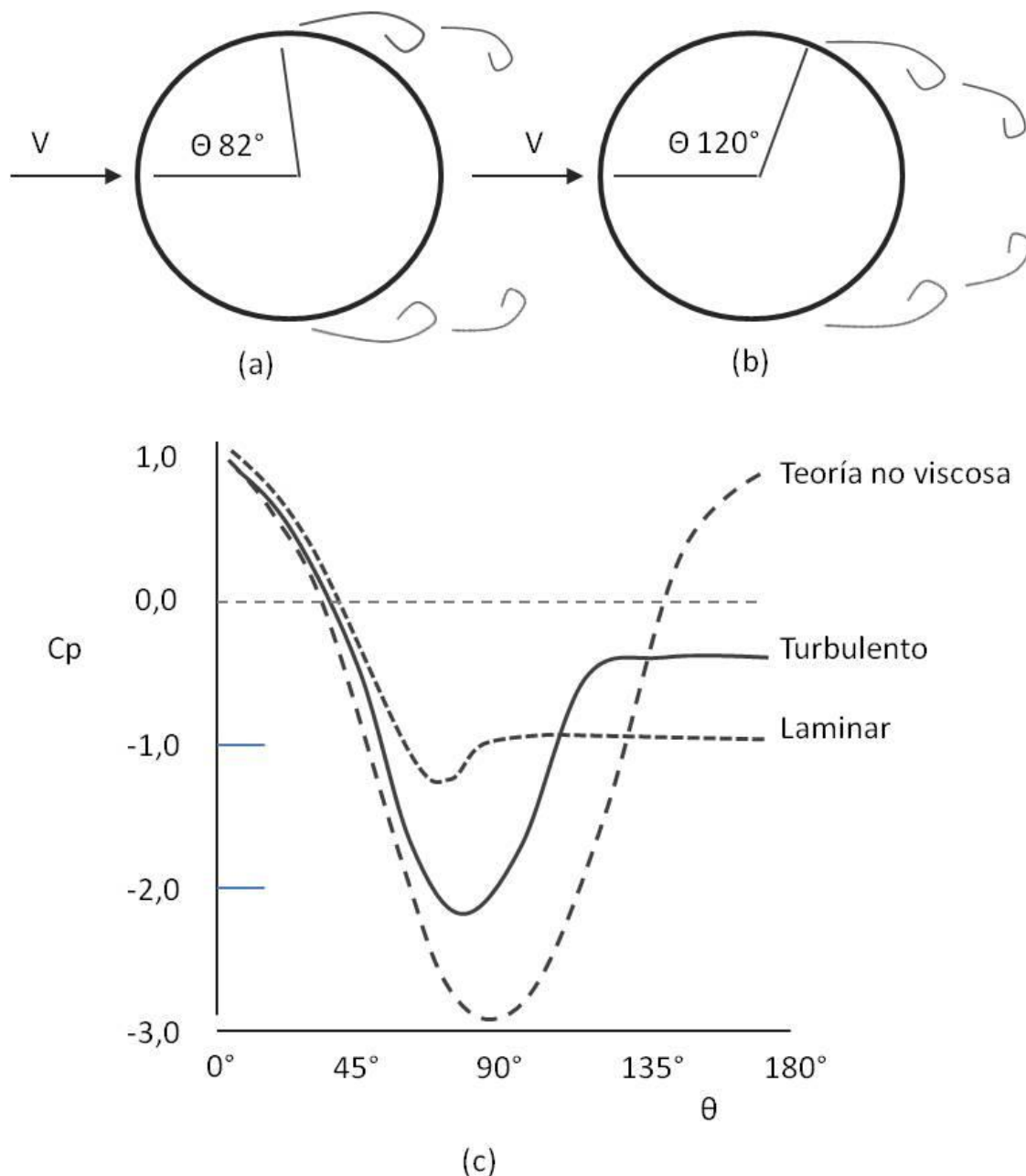


Figura 3.10.- Flujo alrededor de cilindro circular: (a) separación laminar; (b) separación turbulenta; (c) distribución de presión sobre la superficie.

La capa límite turbulenta es más resistente a la separación, lo que da lugar a una estela más pequeña y presiones más altas en la parte posterior del cuerpo, por lo que la resistencia de presión disminuye. Esto ocurre con todos los cuerpos.

Debido al aporte notable de la resistencia de presión a la resistencia total, es importante tratar de reducirla al máximo. Por ello, siempre se busca que el flujo sea turbulento antes del punto de separación de la capa límite con el fin de retrasar el punto de separación.

Un ejemplo de este efecto son las pelotas de golf. Los pequeños agujeros de las pelotas inducen la turbulencia en la capa límite, provocando el retraso de su desprendimiento (Figura 3.11). Esto disminuye la estela y por tanto la resistencia por presión.

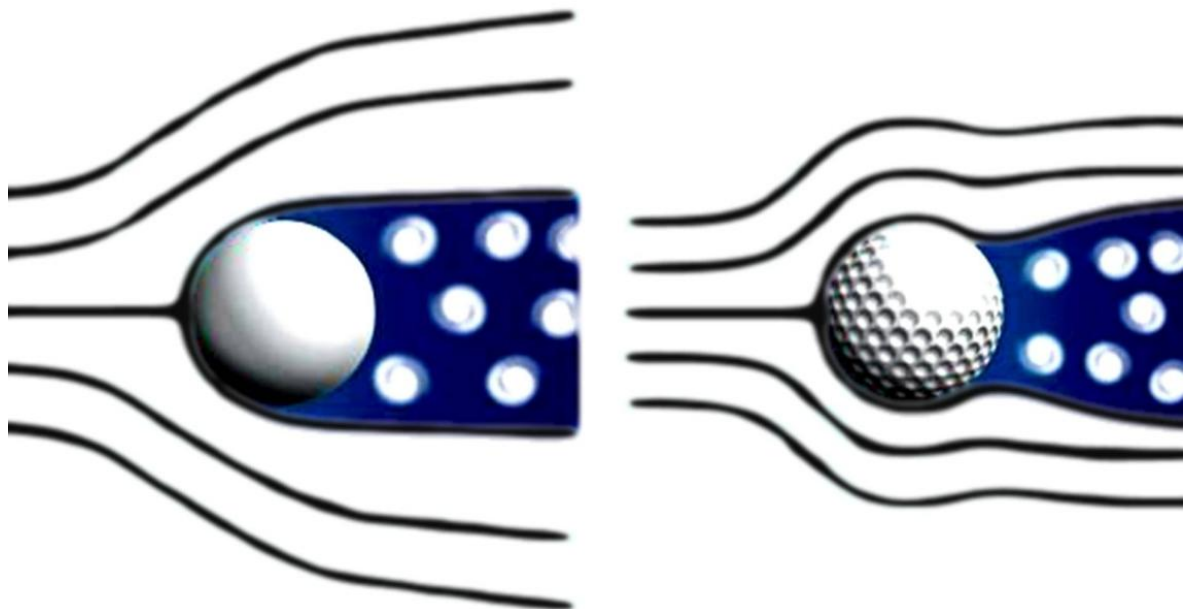


Figura 3.11.- Inducción de la capa límite turbulenta en las pelotas de golf.

3.6 LA CAPA LÍMITE EN LOS BARCOS

3.6.1 RELEVANCIA DE LA CAPA LÍMITE EN EL SECTOR NAVAL

La resistencia de fricción es la componente más importante de la resistencia al avance en la mayoría de los buques que operan actualmente, sobre todo en los que se podrían denominar buques lentos ($Fr < 0,3$).

La Figura 3.12 muestra las componentes de resistencia de un buque VLCC (Very Large Crude Carrier) a distintas velocidades, estudio realizado por Larsson y Baba en 1996 [11].

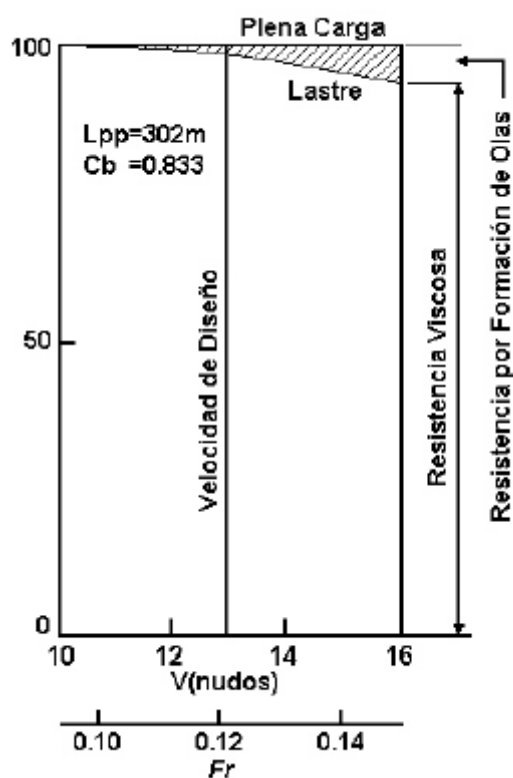


Figura 3.12. - Ensayos de Larsson y Baba sobre resistencias.

La resistencia debida a la formación de olas es prácticamente nula en la condición de plena carga mientras que la mayor parte de la resistencia se debe a la fricción.

Por otro lado, los barcos son el medio de transporte que comparativamente consume menos energía en relación al tonelaje desplazado, de ahí su extendido uso.

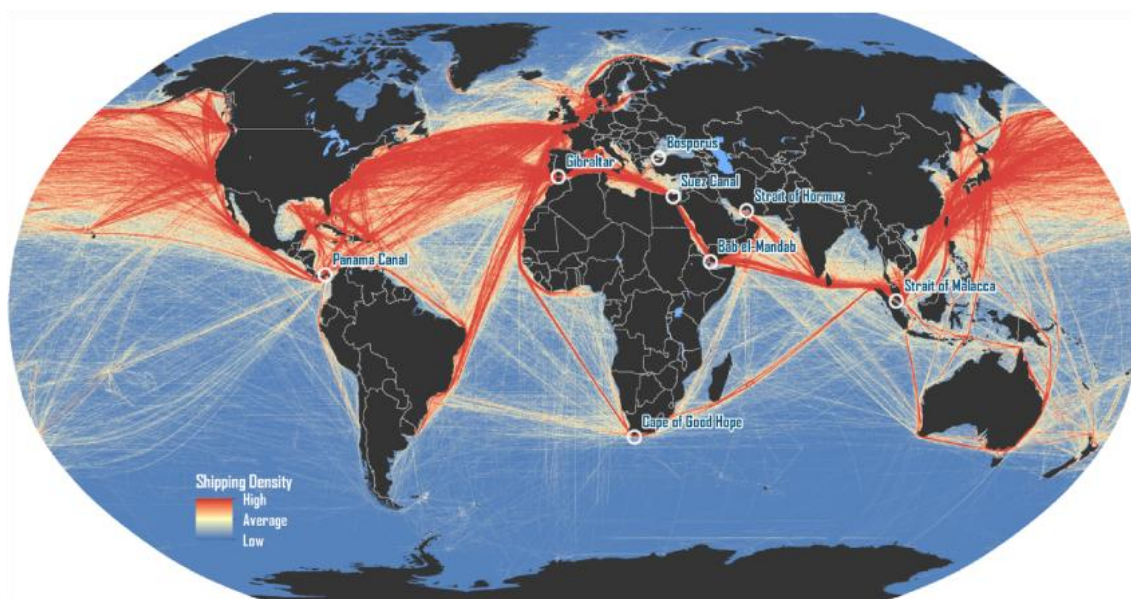


Figura 3.13. – Densidad de transporte marítimo mundial.

Teniendo en cuenta el tamaño de solo la flota mercante mundial, una pequeña reducción de la componente de fricción conllevaría un ahorro considerable de combustible; de forma puntual para el armador, en conjunto para el negocio marítimo y desde un punto de vista más global al mercado exterior de los países importadores de crudo. Además de los beneficios medioambientales, un transporte más eficiente y limpio.

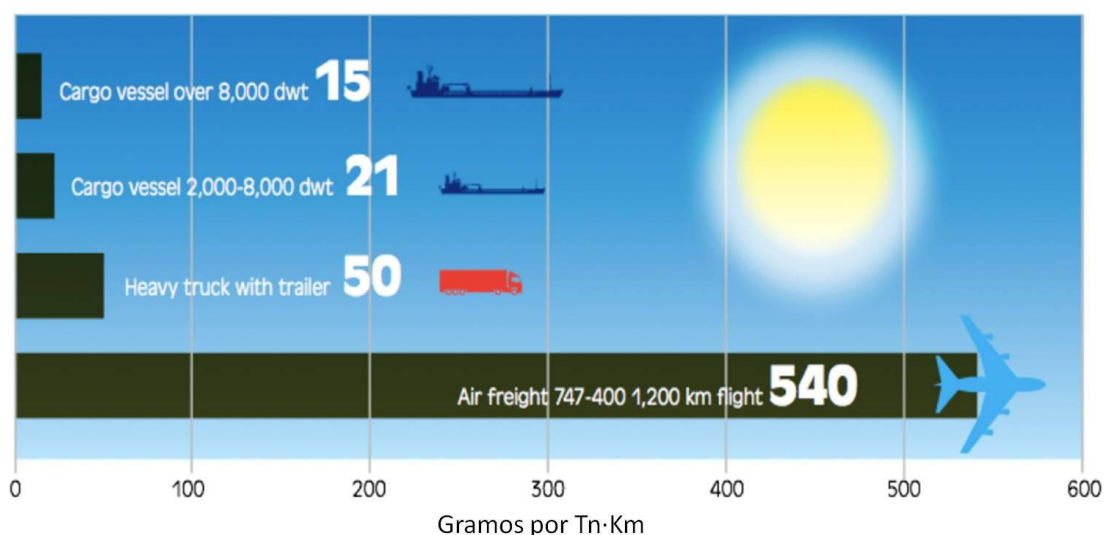


Figura 3.14. – Comparación de emisiones de CO2 entre diferentes modos de transporte. Fuente: International Chamber of Shipping

La mayoría de los buques de transporte son barcos llenos o muy llenos, exceptuando los barcos rápidos y embarcaciones especiales, la resistencia de fricción es relativamente alta y en consecuencia, su estudio y reducción se convierte en un campo interesante debido a la reducción de costes de explotación del buque y a los beneficios indirectos que supondría.

3.6.2 CARACTERIZACIÓN DE LA CAPA LÍMITE EN LOS BARCOS

La Figura 3.15 muestra un esquema del comportamiento típico del flujo hidrodinámico alrededor de una carena. En ella podemos ver una sección de un barco por una línea de agua, alrededor de la cual se presentan esquemáticamente los principales efectos que pueden observarse al avanzar un buque en el agua en condiciones habituales. En el esquema se identifican cuatro tipos de flujos claramente diferenciables:

Zona exterior alejada del casco: flujo potencial.

Zona de proa: flujo laminar.

Zona intermedia del casco: flujo turbulento.

Zona de popa: flujo turbulento desprendido.

En la zona exterior, la más alejada del casco, el flujo del agua no es perturbado por el avance del barco, permaneciendo en reposo si así estaba inicialmente. En el caso más general de que el fluido avanzase con una velocidad uniforme respecto al casco (si el sistema de referencia esta fijo al casco) se observaría que el flujo que aparece no está influido por la viscosidad del medio y es equivalente al de un fluido ideal sin viscosidad. Este tipo de flujo, equivalente al de un fluido ideal, se denomina potencial.

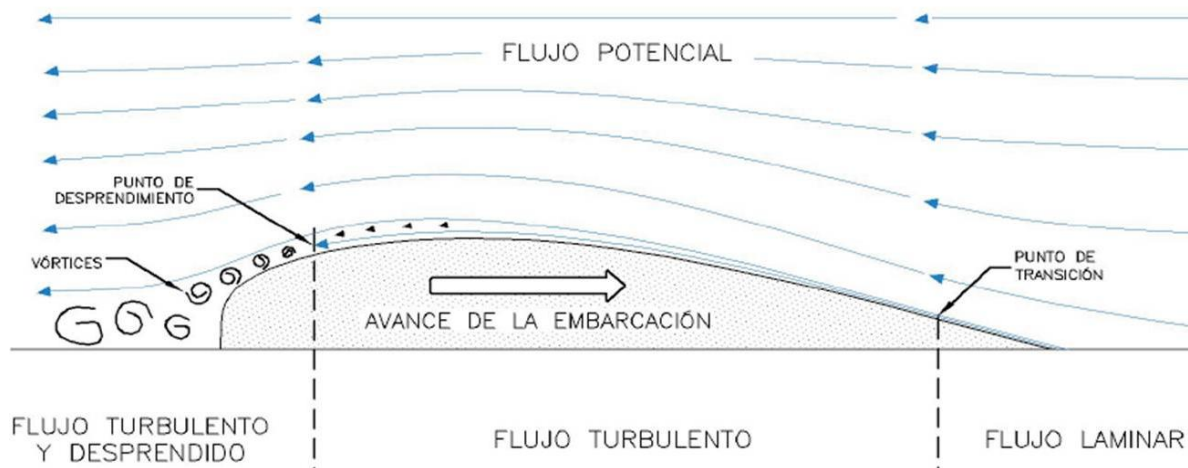


Figura 3.15. – Esquema del comportamiento del flujo hidrodinámico alrededor de una carena tipo.

El comportamiento del flujo en la zona de proa de la embarcación es de tipo laminar. El espesor de la capa límite (en la dirección normal al casco del buque) de la zona de flujo laminar depende del valor de la viscosidad, siendo del orden de milímetros en aplicaciones navales típicas. La extensión en la eslora dependerá del número de Reynolds, de forma que cuanto mayor sea este, menor será la extensión de la capa límite laminar. En aplicaciones navales típicas el flujo laminar apenas abarca un 10% de la eslora mojada del buque.

La aparición del flujo turbulento implica la generación de vórtices en el fluido y consecuentemente una pérdida de energía adicional, lo que justifica que la aparición del fenómeno de la turbulencia implique una mayor contribución a la resistencia por fricción del área del casco afectada. Siendo precisos, el cambio del perfil de velocidad, por uno con una variación de velocidad más brusca, es el causante del aumento del esfuerzo tangencial.

A modo de ejemplo, se incluye en la Figura 3.16, una distribución típica de la tensión tangencial en el casco de una embarcación.

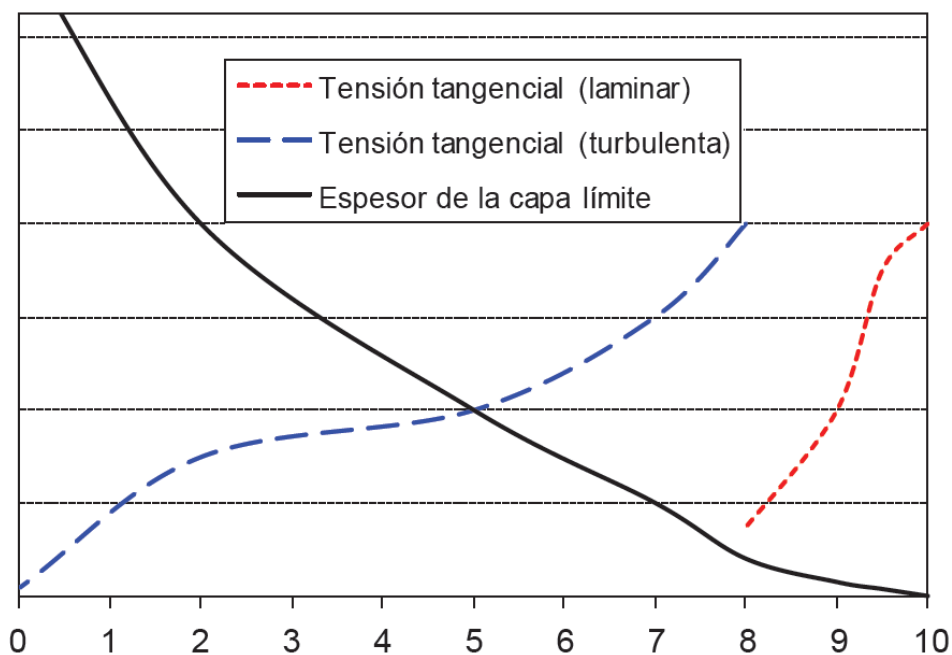


Figura 3.16.- Distribución de la tensión tangencial en una línea de agua del casco y del espesor de la capa límite típicos (10 proa y 0 popa)

Llegado a un punto en el que la turbulencia está plenamente desarrollada, el flujo se desprende, ayudado en gran medida por el gradiente de presión adverso que existe en la zona de popa suscitado por las formas geométricas típicas de los cascos de las embarcaciones.

La separación del flujo es de gran importancia por dos motivos: representa una mayor contribución a la resistencia de presión por fricción tal y como muestra la Figura 3.17, y el flujo caótico puede implicar una pérdida de eficacia en los apéndices de la zona.

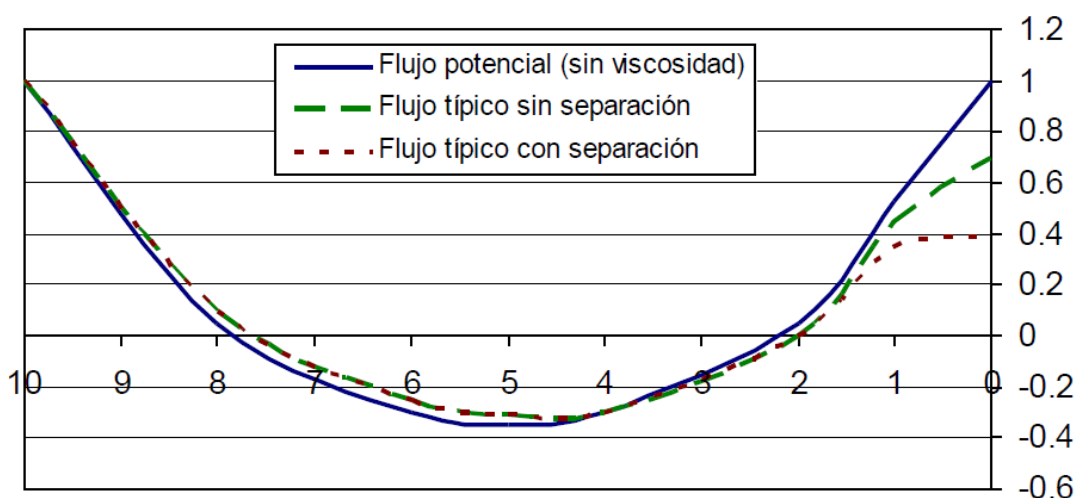


Figura 3.17.- Distribuciones típicas de presión sobre una línea de corriente del casco de un barco (10 en proa y 0 en popa)

Al igual que la aparición del fenómeno de turbulencia, su separación depende principalmente del valor del número de Reynolds, aunque tiene una gran influencia la curvatura de las líneas de agua en el hombro de popa y el ángulo que forman estas líneas con el plano de crujía. Se suele tomar como referencia un radio de curvatura para los hombros de proa y popa mayor que 0.3 veces el área de la maestra en la escala correspondiente (Figura 3.18), con un trazado suave y alisado.

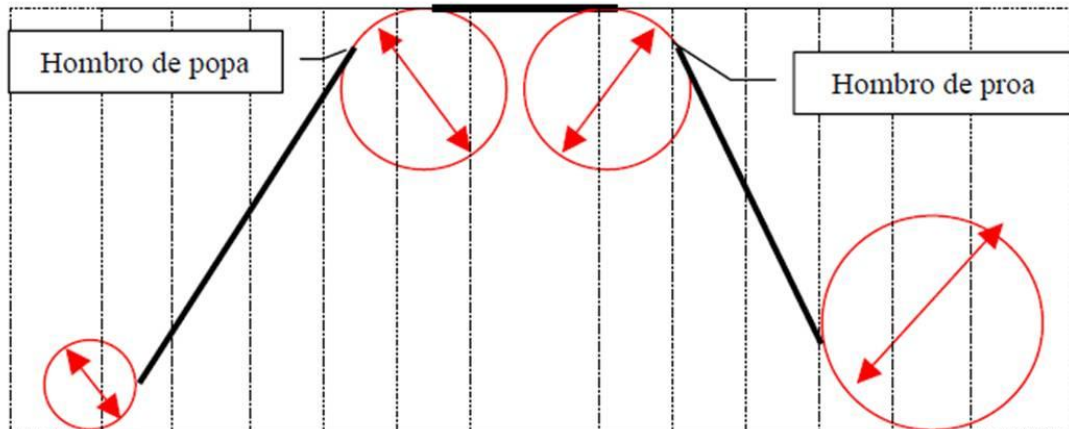


Figura 3.18.– Curva de áreas de cuaderna típica.

4. ESTUDIO DE LA CAPA LÍMITE: ECUACIÓN DE VON KARMAN

4.1 INTRODUCCIÓN

La técnica del análisis de la capa límite puede utilizarse para calcular los efectos viscosos cerca de las paredes sólidas y “acoplar” estos al movimiento exterior no viscoso. Este acoplamiento es tanto más efectivo cuanto mayor sea el número de Reynolds basado en el cuerpo como muestra la Figura 4.1.

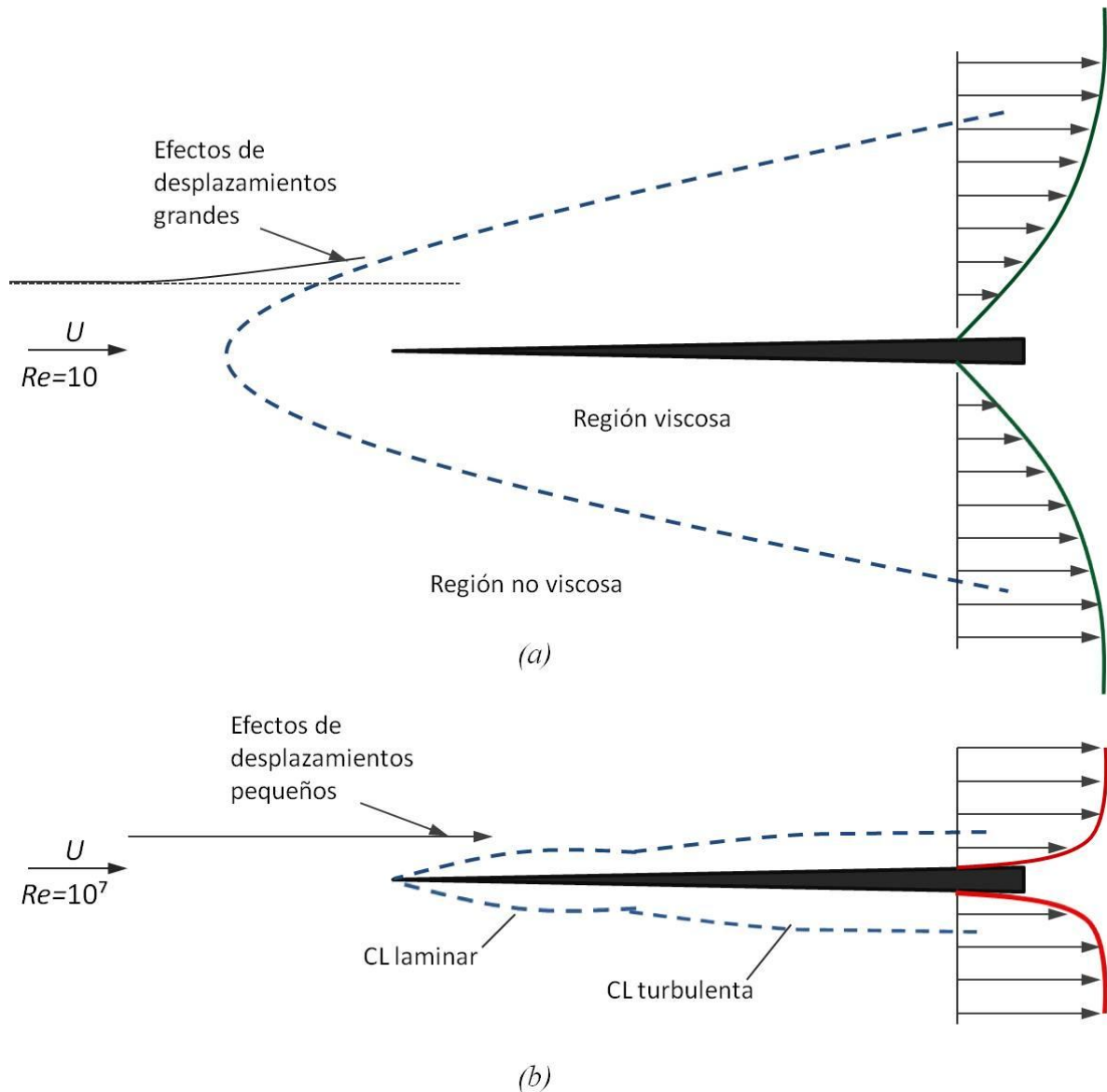


Figura 4.1.- Comparación del flujo alrededor de una placa plana: (a) flujo laminar a bajos números de Reynolds, (b) flujo a altos números de Reynolds.

Esta Figura 4.1 muestra una corriente uniforme de velocidad U que se mueve paralelamente a una placa plana delgada de longitud L . Si el número de Reynolds es bajo (Figura 4.1a), la región viscosa es muy ancha y se extiende lejos aguas arriba y a los lados de la placa. La

placa frena mucho la corriente incidente, y pequeños cambios en los parámetros del flujo originan grandes cambios en la distribución de presiones a lo largo de la placa. Aunque en principio sería posible “empalmar” las zonas viscosa y no viscosa mediante un análisis matemático, su interacción es fuerte y no lineal. No existe una teoría simple para el análisis de los flujos externos en el intervalo de números de Reynolds desde 1 hasta 1000. En general, estos flujos con capas viscosas gruesas se estudian experimentalmente.

Los flujos a altos números de Reynolds (Figura 4.1b) como los que se dan en los buques, son mucho más fáciles de tratar mediante el acoplamiento de la capa límite, como mostró Prandtl en 1904 por primera vez. Las capas viscosas, tanto laminares como turbulentas, son muy delgadas, incluso más de lo que muestran los dibujos de la figura. Esto supone que el efecto de desplazamiento inducido en la corriente no viscosa se pueda despreciar. De este modo, la distribución de presiones a lo largo de la placa se puede determinar de la teoría no viscosa, como si la capa límite no existiese.

Para cuerpos esbeltos, tales como placas y perfiles paralelos a la corriente incidente, la suposición de que la interacción entre la capa límite y la distribución de presiones de la corriente exterior es despreciable constituye una excelente aproximación.

Para cuerpos romos, sin embargo, incluso a números de Reynolds muy altos, hay una discrepancia en el concepto de acoplamiento entre la zona viscosa y no viscosa. El desprendimiento de la capa límite por gradientes de presión adversos produce que la corriente principal se defleccione, de modo que el flujo exterior difiere bastante del que predice la teoría no viscosa modificada solo por los efectos de una capa límite delgada.

La teoría para la interacción fuerte entre las zonas viscosas y no viscosas alrededor de cuerpos romos no está bien desarrollada. Estos flujos se estudian normalmente de un modo experimental o mediante CFD.

Para comprender la complejidad que supone el estudio de los flujos de fluidos de la que estamos hablando, hay que decir que actualmente no existe un teorema general sobre la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación de Navier-Stokes, que como se vio en el Capítulo 2 describe el flujo de fluido viscoso, y que se trata de un problema abierto a nivel

internacional, siendo uno de los Problemas del Premio del Milenio, por el cual el Instituto de Clay de Francia ofrece 1 millón de dólares por su solución desde mayo de 2000.

Teniendo en cuenta las características y peculiaridades del flujo de agua en el casco de los buques visto en el Capítulo 3, y debido a la complejidad que supone la resolución de las ecuaciones que gobiernan los fenómenos físicos ocurridos en dichos flujos y sin las garantías de obtener resultados fiables, así como el objetivo de la búsqueda de un método sencillo y práctico aplicable en la actualidad al cálculo de la resistencia por fricción en buques, el siguiente estudio sobre la capa límite se particulariza para placas planas sin gradiente de presión. Esto es una simplificación aceptada por la ITTC, y un método aplicable en multitud de casos de otros campos de la ingeniería.

En concreto, el estudio sobre la capa límite en que se centra este apartado recibe el nombre de Estudio Integral de Von Karman. Tiene como objetivo calcular los valores de espesores y esfuerzos dentro de la capa límite. Partiendo de un perfil de velocidades aproximado, se obtienen como resultado los valores de espesor, coeficiente local de fricción, coeficiente de fricción medio y finalmente la fuerza de fricción sobre una superficie como consecuencia de moverse a través de un fluido viscoso incompresible. Esta ecuación tiene solución tanto para la zona de comportamiento laminar como para la turbulenta, debiendo seleccionar para cada caso un perfil de velocidad apropiado.

4.2 THEODORE VON KARMAN

Theodore Von Karman fue un ingeniero norteamericano de origen húngaro que realizó importantes trabajos científicos en el campo de la mecánica: teorías relativas a fenómenos de turbulencias, estudios sobre las corrientes de gran velocidad, aportaciones a las teorías de la elasticidad y resistencia de materiales, y soluciones a numerosos problemas de hidrodinámica, aerodinámica y termodinámica. Es la persona que desarrolló parte de los métodos de cálculo que este proyecto nos ocupa y por ello, se realiza a continuación una breve reseña biográfica.

Theodore Von Karman nació en Budapest el 11 de mayo de 1881. Estudió ingeniería en la actual Universidad Tecnológica y de Economía de Budapest, donde se graduó en 1902. Se doctoró en 1908 en la Universidad de Göttingen, tras haber trabajado en un grupo de

investigación comandado por Ludwig Prandtl. Ejerció de profesor en ésta universidad hasta 1912, cuando aceptó un puesto en el Instituto Aeronáutico de RWTH Aachen, una de las más importantes universidades de Alemania. Trabajó en Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen hasta 1930, donde desarrolló un prototipo de helicóptero durante la Primera Guerra Mundial, durante la cual sirvió en el Ejército Austro-Húngaro.

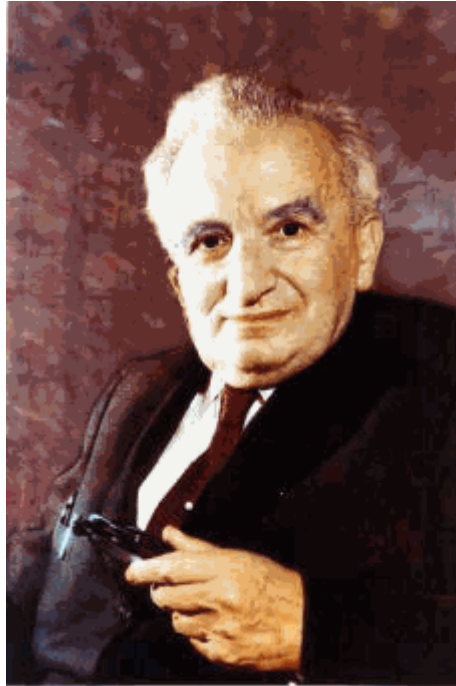


Figura 4.2.- Fotografía de Theodore Von Karman.

Es en 1930, cuando la situación en Europa comienza a intuirse conflictiva, decide emigrar a los Estados Unidos, donde toma la jefatura del Laboratorio Guggenheim de Aeronáutica del Instituto Tecnológico de California (GALCIT). Funda una empresa, Aerojet, para fabricación de motores cohete RATO (Rocket-Assisted Take Off), y acaba por adquirir la ciudadanía Estadounidense.

El importante desarrollo militar del Ejército Alemán durante la Segunda Guerra Mundial pone en alerta al Mando Militar de los Estados Unidos, cuya división de Ingeniería Experimental del Comando de Material de las Fuerzas Armadas envía a Von Karman, a principios de 1943, informes de fuentes de inteligencia británicas acerca del desarrollo de un programa alemán de cohetes de elevadas capacidades. En una carta fechada el 2 de agosto de 1943, Von Karman le envía al ejército su análisis y comentarios del programa alemán. A partir de entonces, su carrera se dispara.

En 1944 Von Karman, junto con otros científicos e ingenieros que trabajaban en el GALCIT, fundan el Jet Propulsion Laboratory (JPL), el cual es actualmente un centro de investigación y desarrollo financiado con fondos federales y administrado y operado por Caltech mediante un contrato con la NASA. En 1946 se convirtió en el primer director del Scientific Advisory Group, que estudiaba tecnologías aeronáuticas para las Fuerzas Armadas de los Estados Unidos. Él ayuda a fundar el AGARD, el Grupo Consultivo de Investigación y Desarrollo Aeronáutico de la OTAN en 1951, el Concilio Internacional de Ciencias Aeronáuticas en 1956, la Academia Internacional de Aeronáutica en 1960, y el Instituto Von Karman de dinámica de los fluidos en Bruselas en 1956.

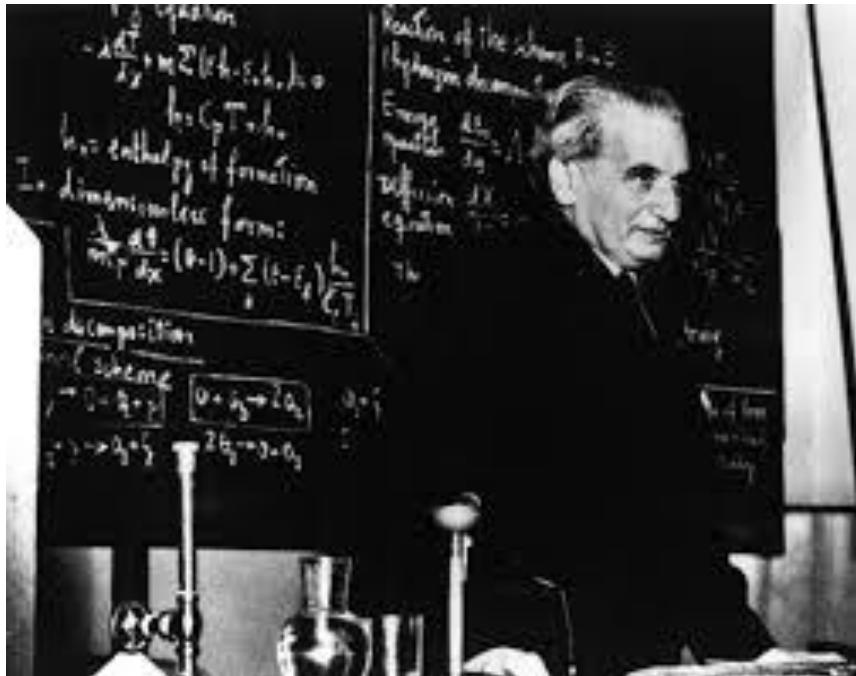


Figura 4.3.- Theodore Von Karman en el Jet Propulsion Laboratory, año 1950. Fuente: NASA.

Sus trabajos eran la vanguardia en campos como la aeronáutica y astronáutica, además de importantes contribuciones a la mecánica de fluidos, mecánica de fluidos aplicada, teoría de turbulencia, vuelo supersónico, matemáticas aplicadas a la ingeniería y sistemas estructurales aeronáuticos. Su trabajo acerca del despegue de artefactos asistido por reactores RATO sentó las bases de la actual tecnología de misiles y cohetes de largo alcance. No en vano, Von Karman contribuyó a la fabricación de la primera aeronave asistida por reactores de Estados Unidos, mediante el uso de cohetes de combustible líquido y sólido, el vuelo de aeronaves con propulsión a gran velocidad singular y el desarrollo de combustible líquido de ignición

espontánea (más tarde usado en los módulos del Apolo). En 1963 fue premiado con la primera Medalla Nacional de Ciencia de los Estados Unidos de América.

4.3 ECUACIÓN INTEGRAL DE VON KARMAN

Las ecuaciones integrales de continuidad y de momentum aplicadas a un volumen de control infinitesimal (Figura 4.4), permitirán predecir el espesor de la capa límite y el esfuerzo cortante en la pared, y de ahí la fuerza de arrastre.

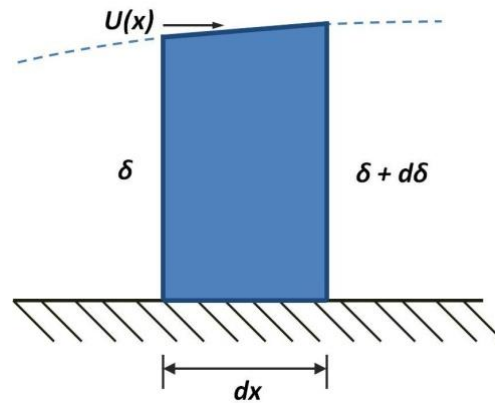


Figura 4.4.- Volumen de control para una capa límite.

La ecuación integral de continuidad permite calcular \dot{m}_{arriba} (Figura 4.5). Este flujo es, suponiendo profundidad unitaria:

$$\dot{m}_{arriba} = \dot{m}_{sale} - \dot{m}_{entra} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u \, dy \, dx \quad (4.1)$$

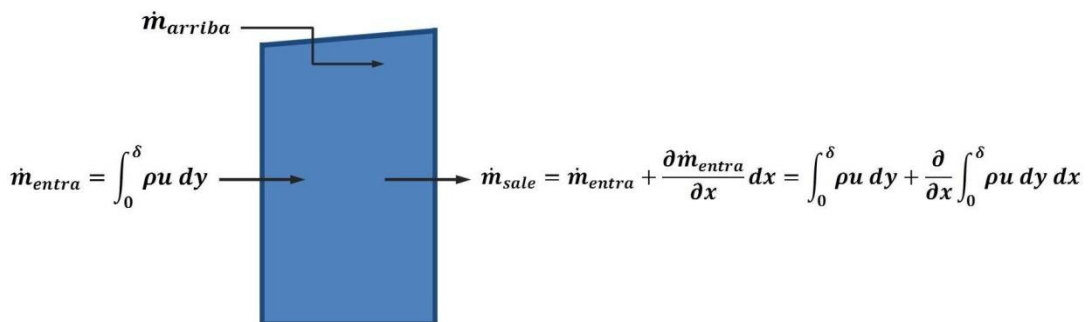


Figura 4.5.- Flujo másico.

La ecuación integral de momentum adopta la forma:

$$\sum F_x = \dot{m} \dot{m}_{sale} - \dot{m} \dot{m}_{entra} - \dot{m} \dot{m}_{arriba} \quad (4.2)$$

Donde \dot{m} representa el flujo de momentum en la dirección x. Teniendo en cuenta las Figuras 4.6 y 4.7 siguientes:

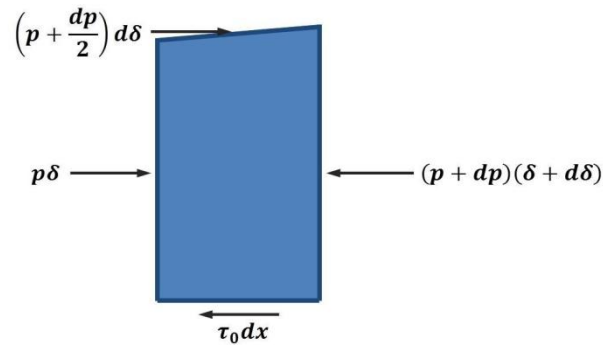


Figura 4.6.- Fuerzas.

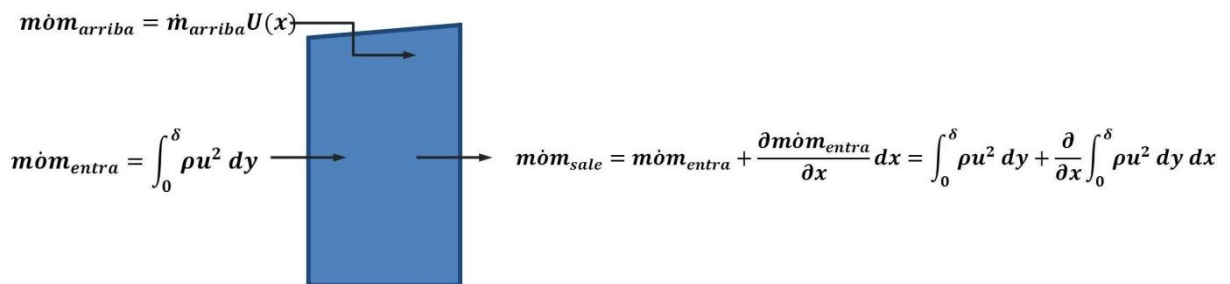


Figura 4.7.- Flujo de momentum.

Y despreciando los términos de orden superior, esto se convierte en:

$$-\delta dp - \tau_0 dx = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u^2 dy dx - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy dx \right) U(x) \quad (4.3)$$

Si se divide todo entre $-dx$ se obtiene:

$$\tau_0 + \delta \frac{dp}{dx} = U(x) \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u dy - \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 dy \quad (4.4)$$

Donde se utilizan derivadas ordinarias porque las integrales solo son funciones de x . Esta ecuación se conoce como Ecuación Integral de Von Karman.

5. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE VON KARMAN

5.1 ZONA LAMINAR

Es posible utilizar la ecuación integral de Von Karman para obtener una aproximación de la capa límite laminar sobre una placa plana con gradiente de presión cero. Hay cuatro condiciones que debe satisfacer cualquier perfil de velocidades que se proponga:

$$u = 0 \quad \text{en } y = 0$$

$$u = 0 \quad \text{en } y = \delta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = \delta \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } y = \delta$$

Las tres primeras condiciones son obvias si se observa un dibujo de perfil de velocidad, mientras que la cuarta condición proviene de la ecuación de Navier Stokes para la componente x , ya que $u = v = 0$ en la pared y $dp/dx = 0$ para el flujo estable que se considera.

5.1.1 POLINOMIO CUADRÁTICO PARA PERFIL DE VELOCIDADES

Si se aproxima el perfil de velocidades a uno de tipo cuadrático:

$$\frac{u}{U} = A + By + Cy^2 \quad (5.2)$$

Y se aplican las condiciones de contorno anteriormente descritas, se genera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A = 0 \\ A + B\delta + C\delta^2 = 1 \\ B + 2C\delta = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Sustituyendo la primera ecuación en las dos siguientes, se obtiene:

$$\begin{cases} -1 + B\delta + C\delta^2 = 0 \\ B + 2C\delta = 0 \end{cases}$$

Ahora se puede despejar B de la primera ecuación y sustituir en la segunda:

$$B = \frac{1}{\delta} - C\delta$$

$$C = -\frac{1}{\delta^2}$$

Sustituyendo el valor de C nuevamente en la primera ecuación se obtiene:

$$B = \frac{2}{\delta}$$

Por tanto:

$$A = 0, \quad B = \frac{2}{\delta}, \quad C = -\frac{1}{\delta^2} \quad (5.4)$$

Con lo que el perfil de velocidades queda finalmente de la forma:

$$\frac{u}{U} = \frac{2}{\delta}y - \frac{1}{\delta^2}y^2 \quad (5.5)$$

Si se utiliza esta ecuación como perfil de velocidades en la ecuación de Von Karman (4.4), se obtiene:

$$\tau_0 = \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \left(1 - \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) U^2 dy$$

$$\tau_0 = \frac{2}{15} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (5.6)$$

Se sabe que en la pared $\tau_0 = \mu \partial u / \partial y|_{y=0}$, y si se utiliza el perfil cuadrático:

$$\tau_0 = \mu \left(U \frac{2}{\delta} \right) \quad (5.7)$$

Si se igualan las expresiones anteriores para $\tau_0(x)$, se obtiene:

$$\delta \, d\delta = \frac{15\mu U}{\rho U^2} \, dx = 15 \frac{\nu}{U} \, dx \quad (5.8)$$

Tomando $\delta = 0$ en $x = 0$, se integra la ecuación anterior para obtener:

$$\delta = 5.478 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = 5.478 \frac{x}{\sqrt{Rn_x}} \quad (5.9)$$

Donde Rn_x es el número de Reynolds local. Se sustituye esto de nuevo en la ecuación (5.7) para obtener el esfuerzo cortante en la pared, sabiendo que $\nu = \mu/\rho$:

$$\tau_0 = 0.365 \rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{xU}} = \frac{0.365 \rho U^2}{\sqrt{Rn_x}} \quad (5.10)$$

Si se hace adimensional este esfuerzo cortante dividiéndolo entre $1/2 \rho U^2$, es resultado es el coeficiente de fricción superficial c_f :

$$c_f = \frac{\tau_0}{1/2 \rho U^2}$$

$$c_f = \frac{0.730}{\sqrt{Ux/\nu}} = \frac{0.730}{\sqrt{Rn_x}} \quad (5.11)$$

Si se integra el esfuerzo cortante en la pared a lo largo de la longitud L, se obtiene, por unidad de anchura, la expresión siguiente para la fuerza de arrastre:

$$D_F = \int_0^L \tau_0(x) dx$$

$$D_F = 0.730\rho U\sqrt{UL\nu} = \frac{0.730\rho U^2 L}{\sqrt{Rn_L}} \quad (5.12)$$

O, en términos del coeficiente de fricción superficial C_f :

$$C_f = \frac{D_F}{\frac{1}{2}\rho U^2 L}$$

$$C_f = \frac{1.460}{\sqrt{UL/\nu}} = \frac{1.460}{\sqrt{Rn_L}} \quad (5.13)$$

Donde Rn_L es el número de Reynolds en el extremo de la placa plana.

5.1.2 POLINOMIO CÚBICO PARA PERFIL DE VELOCIDADES

Si se supone un polinomio cúbico como aproximación del perfil de velocidades, se tiene:

$$\frac{u}{U} = A + By + Cy^2 + Dy^3 \quad (5.14)$$

Utilizando las cuatro condiciones de contorno (5.1), quedan los valores:

$$\begin{aligned}
 A &= 0 \\
 B &= \frac{3}{2\delta} \\
 C &= 0 \\
 D &= -\frac{1}{2\delta^3}
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

Con lo que el perfil de velocidades queda finalmente de la forma:

$$\frac{u}{U} = \frac{3y}{2\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3
 \tag{5.16}$$

Utilizando este perfil de velocidades en la ecuación de Von Karman (4.4) da:

$$\begin{aligned}
 \tau_0 &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho \left(\frac{3y}{2\delta} - \frac{y^3}{2\delta^3} \right) \left(1 - \frac{3y}{2\delta} - \frac{y^3}{2\delta^3} \right) U^2 dy \\
 \tau_0 &= 0.139 \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

Se sabe que en la pared $\tau_0 = \mu \partial u / \partial y|_{y=0}$, y si se utiliza el perfil cúbico:

$$\tau_0 = \mu \left(U \frac{3}{2\delta} \right)
 \tag{5.18}$$

Si se igualan las expresiones anteriores para $\tau_0(x)$, se obtiene:

$$\delta d\delta = \frac{3/2 \mu U}{0.139 \rho U^2} dx = 10.8 \frac{\nu}{U} dx \quad (5.19)$$

Tomando $\delta = 0$ en $x = 0$, se integra la ecuación anterior para obtener:

$$\delta = 4.65 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = 4.65 \frac{x}{\sqrt{Rn_x}} \quad (5.20)$$

Donde Rn_x es el número de Reynolds local. Se sustituye esto de nuevo en la ecuación (5.18) para obtener el esfuerzo cortante en la pared, sabiendo que $\nu = \mu/\rho$.

$$\tau_0 = 0.323 \rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{xU}} = \frac{0.323 \rho U^2}{\sqrt{Rn_x}} \quad (5.21)$$

Si se hace adimensional este esfuerzo cortante dividiéndolo entre $1/2 \rho U^2$, el resultado es el coeficiente de fricción superficial c_f :

$$c_f = \frac{\tau_0}{1/2 \rho U^2}$$

$$c_f = \frac{0.646}{\sqrt{U x/\nu}} = \frac{0.646}{\sqrt{Rn_x}} \quad (5.22)$$

Si se integra el esfuerzo cortante en la pared a lo largo de la longitud L , se obtiene, por unidad de anchura, la expresión siguiente para la fuerza de arrastre:

$$D_F = \int_0^L \tau_0 dx$$

$$D_F = 0.646\rho U\sqrt{ULv} = \frac{0.646\rho U^2 L}{\sqrt{Rn_L}} \quad (5.23)$$

O, en términos del coeficiente de fricción superficial C_f :

$$C_f = \frac{D_F}{\frac{1}{2}\rho U^2 L}$$

$$C_f = \frac{1.29}{\sqrt{UL/v}} = \frac{1.29}{\sqrt{Rn_L}} \quad (5.24)$$

Donde Rn_L es el número de Reynolds en el extremo de la placa plana.

5.2 ZONA TURBULENTA

La teoría del flujo laminar está bien desarrollada y se conocen muchas soluciones, pero no hay análisis que puedan simular las fluctuaciones aleatorias a pequeña escala del flujo turbulento. Por ello, gran parte de la teoría que existe sobre el flujo turbulento es semiempírica, basada en análisis dimensional y razonamientos físicos; se refiere solo a las propiedades medias y a las varianzas de las fluctuaciones, pero no a sus variaciones rápidas. Se intentará una descripción racional que sitúe al análisis del flujo turbulento sobre una base física firme.

5.2.1 LEY LOGARÍTMICA

Los perfiles de velocidad turbulentos difieren mucho del parabólico. El perfil para la placa plana para flujo turbulento es aproximadamente logarítmico, con una estela débil en la región exterior y una subcapa viscosa delgada. Esto fue demostrado por C.B. Millikan en 1937. Por tanto se supondrá que la ley logarítmica (5.25) es válida en todo el espesor de la capa límite.

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{k} \log \frac{yu^*}{\nu} + B \quad u^* = \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \quad (5.25)$$

Donde $k=0,41$ y $B=5$.

La ecuación de Von Karman escrita en función del espesor de cantidad de movimiento θ queda de la siguiente forma:

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (5.26)$$

Donde el espesor de cantidad de movimiento θ es:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \quad (5.27)$$

La resistencia por fricción de la placa plana $D(x)$ es:

$$D(x) = \rho b U^2 \theta \quad (5.28)$$

O igualmente:

$$D(x) = b \int_0^x \tau_0(x) dx \quad (5.29)$$

Siendo b la anchura de la placa plana.

Se inician los cálculos con θ , teniendo en cuenta el perfil logarítmico 5.25.

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u^* \left(\frac{1}{k} \log \left(\frac{yu^*}{\nu} \right) + B \right)}{U} \left(1 - \frac{u^* \left(\frac{1}{k} \log \left(\frac{yu^*}{\nu} \right) + B \right)}{U} \right) dy$$

$$\theta = \int_0^\delta \left(\frac{u^* \frac{1}{k} \log \left(\frac{yu^*}{\nu} \right) + B u^*}{U} - \left(\frac{u^* \left(\frac{1}{k} \log \left(\frac{yu^*}{\nu} \right) + B \right)}{U} \right)^2 \right) dy$$

Se separan las integrales.

$$\begin{aligned}\theta &= \int_0^\delta \frac{u^* \frac{1}{k} \log\left(\frac{yu^*}{v}\right) + Bu^*}{U} dy - \int_0^\delta \left(\frac{u^* \frac{1}{k} \log\left(\frac{yu^*}{v}\right) + Bu^*}{U} \right)^2 dy \\ \theta &= \int_0^\delta \frac{u^* \frac{1}{k} \log\left(\frac{yu^*}{v}\right)}{U} dy + \int_0^\delta \frac{Bu^*}{U} dy - \int_0^\delta \left(\frac{u^* \frac{1}{k} \log\left(\frac{yu^*}{v}\right)}{U} \right)^2 dy + \\ &\quad - \int_0^\delta 2 \cdot \frac{u^* \frac{1}{k} \log\left(\frac{yu^*}{v}\right) Bu^*}{U^2} dy - \int_0^\delta \left(\frac{Bu^*}{U} \right)^2 dy\end{aligned}$$

Se integra por separado.

La integral del primer sumando se realiza por partes.

$$\int_0^\delta \frac{u^* \frac{1}{k} \log\left(\frac{yu^*}{v}\right)}{U} dy = \frac{u^* \frac{1}{k}}{U} \int_0^\delta \log\left(\frac{yu^*}{v}\right) dy = \frac{u^* \frac{1}{k}}{U} \left(\delta \log\left(\frac{\delta u^*}{v}\right) - \delta \right)$$

Ahora el segundo sumando.

$$\int_0^\delta \frac{Bu^*}{U} dy = \frac{Bu^*}{U} \delta$$

Y el tercer sumando.

$$\begin{aligned}- \int_0^\delta \left(\frac{u^* \frac{1}{k} \log\left(\frac{yu^*}{v}\right)}{U} \right)^2 dy &= - \left(\frac{u^* \frac{1}{k}}{U} \right)^2 \int_0^\delta \left(\log\left(\frac{yu^*}{v}\right) \right)^2 dy = \\ &= - \left(\frac{u^* \frac{1}{k}}{U} \right)^2 \left[\delta \left(\log\left(\frac{\delta u^*}{v}\right) \right)^2 - 2 \left(\delta \log\left(\frac{\delta u^*}{v}\right) - \delta \right) \right]\end{aligned}$$

El cuarto sumando.

$$\begin{aligned} - \int_0^\delta 2 \cdot \frac{u^* \frac{1}{k} \log\left(\frac{yu^*}{v}\right) Bu^*}{U^2} dy &= \\ &= - \frac{2(u^*)^2 B \frac{1}{k}}{U^2} \int_0^\delta \log\left(\frac{yu^*}{v}\right) dy = - \frac{2(u^*)^2 B \frac{1}{k}}{U^2} \left(\delta \log\left(\frac{\delta u^*}{v}\right) - \delta \right) \end{aligned}$$

El quinto sumando.

$$- \int_0^\delta \left(\frac{Bu^*}{U}\right)^2 dy = \left(\frac{Bu^*}{U}\right)^2 \delta$$

Por tanto, el resultado final de la integral es:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{u^* \frac{1}{k}}{U} \left[\delta \log\left(\frac{\delta u^*}{v}\right) - \delta \right] + \frac{Bu^*}{U} \delta + \\ &\quad - \left(\frac{u^* \frac{1}{k} \log\left(\frac{yu^*}{v}\right)}{U} \right)^2 \left[\delta \left(\log\left(\frac{yu^*}{v}\right) \right)^2 - 2 \left(\delta \log\left(\frac{\delta u^*}{v}\right) - \delta \right) \right] + \\ &\quad - \frac{2(u^*)^2 B \frac{1}{k}}{U^2} \left[\delta \log\left(\frac{\delta u^*}{v}\right) - \delta \right] + \left(\frac{Bu^*}{U}\right)^2 \delta \end{aligned} \quad (5.30)$$

Ahora se evalúa $d\theta/dx$ para poder sustituir en la ecuación 5.26.

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{kU} u^* \delta \log\left(\frac{\delta u^*}{v}\right) - \frac{1}{kU} u^* \delta + \frac{Bu^*}{U} \delta - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2 \delta \left[\log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right) \right]^2 + \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2 \delta \log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right) - 2 \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2 \delta - \frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta \log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right) + \\ &\quad + \frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta - \left(\frac{B}{U}\right)^2 (u^*)^2 \delta \end{aligned}$$

Primer sumando.

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{1}{kU} u^* \delta \log \left(\frac{\delta u^*}{v} \right) \right]' &= \frac{1}{kU} u^{*\prime} \delta \log \left(\frac{\delta u^*}{v} \right) + \frac{1}{kU} u^* \left(\delta \log \left(\frac{\delta u^*}{v} \right) \right)' = \\
 &= \frac{1}{kU} u^{*\prime} \delta \log \left(\frac{\delta u^*}{v} \right) + \frac{1}{kU} u^* \left[\delta' \log \left(\frac{\delta u^*}{v} \right) + \delta \left[\log \left(\frac{\delta u^*}{v} \right) \right]' \right] = \\
 &= \frac{1}{kU} u^{*\prime} \delta \log \left(\frac{\delta u^*}{v} \right) + \frac{1}{kU} u^* \delta' \log \left(\frac{\delta u^*}{v} \right) + \frac{1}{kU} u^* \delta \frac{\left(\frac{\delta u^*}{v} \right)'}{\frac{\delta u^*}{v}} = \\
 &= \frac{1}{kU} u^{*\prime} \delta \log \left(\frac{\delta u^*}{v} \right) + \frac{1}{kU} u^* \delta' \log \left(\frac{\delta u^*}{v} \right) + \frac{1}{kU} u^* \delta \frac{(u^{*\prime} \delta + u^* \delta')}{u^* \delta} = \\
 &= \frac{1}{kU} u^{*\prime} \delta \log \left(\frac{\delta u^*}{v} \right) + \frac{1}{kU} u^* \delta' \log \left(\frac{\delta u^*}{v} \right) + \frac{1}{kU} u^{*\prime} \delta + \frac{1}{kU} u^* \delta'
 \end{aligned}$$

Segundo sumando.

$$\left(-\frac{1}{kU} u^* \delta \right)' = -\frac{1}{kU} u^{*\prime} \delta - \frac{1}{kU} u^* \delta'$$

Tercer sumando.

$$\left(\frac{Bu^*}{U} \delta \right)' = \frac{B}{U} u^{*\prime} \delta + \frac{B}{U} u^* \delta'$$

Cuarto sumando.

$$\begin{aligned}
 \left[-\left(\frac{1}{kU} \right)^2 (u^*)^2 \delta \left[\log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) \right]^2 \right]' &= \\
 &= -\left(\frac{1}{kU} \right)^2 2u^* u^{*\prime} \delta \left[\log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) \right]^2 - \left(\frac{1}{kU} \right)^2 (u^*)^2 \left(\delta \left[\log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) \right]^2 \right)' =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\frac{1}{kU}\right)^2 2u^*u^*\delta \left[\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right)\right]^2 - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2\delta' \left[\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right)\right]^2 + \\
&\quad - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2\delta \left(\left[\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right)\right]^2\right)' \\
&= -\left(\frac{1}{kU}\right)^2 2u^*u^*\delta \left[\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right)\right]^2 - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2\delta' \left[\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right)\right]^2 + \\
&\quad - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2\delta \cdot 2\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right) \left(\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right)\right)' = \\
&= -\left(\frac{1}{kU}\right)^2 2u^*u^*\delta \left[\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right)\right]^2 - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2\delta' \left[\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right)\right]^2 + \\
&\quad - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2\delta \cdot 2\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right) \frac{(u^*\delta' + u^*\delta')}{u^*\delta} = \\
&= -\left(\frac{1}{kU}\right)^2 2u^*u^*\delta \left[\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right)\right]^2 - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2\delta' \left[\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right)\right]^2 + \\
&\quad - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 u^* \cdot 2\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right) u^*\delta - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 u^* \cdot 2\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right) u^*\delta'
\end{aligned}$$

Quinto sumando.

$$\begin{aligned}
&\left[2\left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2\delta \log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right)\right]' = \\
&= 4\left(\frac{1}{kU}\right)^2 u^*u^*\delta \log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right) + 2\left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2 \left(\delta \log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right)\right)' = \\
&= 4\left(\frac{1}{kU}\right)^2 u^*u^*\delta \log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right) + 2\left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2\delta' \log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right) + \\
&\quad + 2\left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2\delta \left[\log\left(\frac{u^*\delta}{v}\right)\right]' =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 u^* u^{*\prime} \delta \log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) + 2 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 (u^*)^2 \delta' \log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) + \\
&\quad + 2 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 (u^*)^2 \delta \frac{(u^{*\prime} \delta + u^* \delta')}{u^* \delta} = \\
&= 4 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 u^* u^{*\prime} \delta \log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) + 2 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 (u^*)^2 \delta' \log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) + \\
&\quad + 2 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 u^* u^{*\prime} \delta + 2 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 (u^*)^2 \delta'
\end{aligned}$$

Sexto sumando.

$$\left[-2 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 (u^*)^2 \delta \right]' = -2 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 2u^* u^{*\prime} \delta - 2 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 (u^*)^2 \delta'$$

Séptimo sumando.

$$\begin{aligned}
\left[-\frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta \log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) \right]' &= -\frac{2B}{kU^2} 2u^* u^{*\prime} \delta \log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) - \frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \left[\delta \log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) \right]' = \\
&= -\frac{2B}{kU^2} 2u^* u^{*\prime} \delta \log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) - \frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta' \log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) - \frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta \left[\log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) \right]' = \\
&= -\frac{2B}{kU^2} 2u^* u^{*\prime} \delta \log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) - \frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta' \log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) - \frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta \frac{(u^{*\prime} \delta + u^* \delta')}{u^* \delta} = \\
&= -\frac{2B}{kU^2} 2u^* u^{*\prime} \delta \log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) - \frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta' \log \left(\frac{u^* \delta}{v} \right) - \frac{2B}{kU^2} u^* u^{*\prime} \delta - \frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta'
\end{aligned}$$

Octavo sumando.

$$\left[\frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta \right]' = \frac{2B}{kU^2} 2u^* u^{*\prime} \delta + \frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta'$$

Noveno sumando.

$$\left[-\left(\frac{B}{U} \right)^2 (u^*)^2 \delta \right]' = -\left(\frac{B}{U} \right)^2 2u^* u^{*\prime} \delta - \left(\frac{B}{U} \right)^2 (u^*)^2 \delta'$$

Reagrupando todo, queda:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dx} = & \frac{1}{kU} u^* \delta' \log\left(\frac{\delta u^*}{v}\right) + \frac{1}{kU} u^* \delta' \log\left(\frac{\delta u^*}{v}\right) + \frac{1}{kU} u^* \delta + \frac{1}{kU} u^* \delta' - \frac{1}{kU} u^* \delta + \\
& - \frac{1}{kU} u^* \delta' + \frac{B}{U} u^* \delta + \frac{B}{U} u^* \delta' - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 2u^* u^* \delta \left[\log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right)\right]^2 + \\
& - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2 \delta' \left[\log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right)\right]^2 - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 u^* \cdot 2 \log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right) u^* \delta + \\
& - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 u^* \cdot 2 \log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right) u^* \delta' + 4 \left(\frac{1}{kU}\right)^2 u^* u^* \delta \log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right) + \\
& + 2 \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2 \delta' \log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right) + 2 \left(\frac{1}{kU}\right)^2 u^* u^* \delta + 2 \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2 \delta' + \\
& - 2 \left(\frac{1}{kU}\right)^2 2u^* u^* \delta - 2 \left(\frac{1}{kU}\right)^2 (u^*)^2 \delta' - \frac{2B}{kU^2} 2u^* u^* \delta \log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right) + \\
& - \frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta' \log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right) - \frac{2B}{kU^2} u^* u^* \delta - \frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta' + \frac{2B}{kU^2} 2u^* u^* \delta + \\
& + \frac{2B}{kU^2} (u^*)^2 \delta' - \left(\frac{B}{U}\right)^2 2u^* u^* \delta - \left(\frac{B}{U}\right)^2 (u^*)^2 \delta'
\end{aligned}$$

Se simplifica y se saca factor común.

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dx} = & u^* \delta' \left[\frac{1}{kU} \log\left(\frac{\delta u^*}{v}\right) + \frac{B}{U} - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 2u^* \left[\log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right)\right]^2 + 2 \left(\frac{1}{kU}\right)^2 u^* \log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right) + \right. \\
& \left. - 2 \left(\frac{1}{kU}\right)^2 u^* - \frac{2B}{kU^2} 2u^* \log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right) + \frac{2B}{kU^2} u^* - \left(\frac{B}{U}\right)^2 2u^* \right] + \tag{5.31} \\
& + u^* \delta' \left[\frac{1}{kU} \log\left(\frac{\delta u^*}{v}\right) + \frac{B}{U} - \left(\frac{1}{kU}\right)^2 u^* \left[\log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right)\right]^2 - \frac{2B}{kU^2} u^* \log\left(\frac{u^* \delta}{v}\right) - \left(\frac{B}{U}\right)^2 u^* \right]
\end{aligned}$$

Ahora se utiliza la ecuación empírica de Blasius 5.32 como línea de fricción, pues al intentar utilizar por definición $\tau_0 = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$ evaluado con el perfil logarítmico el resultado sería ∞ .

$$c_f = 0.046 \left(\frac{U\delta}{\nu} \right)^{-1/4} \quad (5.32)$$

Que relacionando τ_0 con c_f puede ser escrita también como:

$$\tau_0 = 0.0233\rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{1/4} \quad (5.33)$$

Se despeja δ de y se sustituye en la ecuación (5.31). También se sustituye u^* , k y B .

$$u^* = \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} ; k = 0,41 ; B = 5 \quad (5.34)$$

$$\delta = 0.0233^4 \rho^4 U^7 \frac{\nu}{\tau_0^4} \quad (5.35)$$

Así:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} = & \frac{0.0233^4 \rho^4 U^7 \nu \tau_0'}{2\rho^{1/2} \tau_0^{9/2}} \left[\frac{1}{kU} \log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) + \frac{B}{U} + \right. \\ & - \left(\frac{1}{kU} \right)^2 2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \left[\log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) \right]^2 + \\ & + 2 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) + \\ & - 2 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} - \frac{2B}{kU^2} 2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) + \frac{2B}{kU^2} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} + \\ & - \left(\frac{B}{U} \right)^2 2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \left. \right] - 4 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} 0.0233^4 \rho^4 U^7 \frac{\tau_0'}{\tau_0^5} \left[\frac{1}{kU} \log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) + \right. \\ & + \frac{B}{U} - \left. \left(\frac{1}{kU} \right)^2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \left[\log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) \right]^2 + \right. \\ & \left. - \frac{2B}{kU^2} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) - \left(\frac{B}{U} \right)^2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \right] \quad (5.36) \end{aligned}$$

Se saca factor común τ_0' y se sustituye en la ecuación de Von Karman (5.26).

$$\begin{aligned}
 \tau_0' = & \frac{\tau_0}{\rho U^2} / \left[\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7 v}{2 \rho^{1/2} \tau_0^{9/2}} \left[\frac{1}{kU} \log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) + \frac{B}{U} + \right. \right. \\
 & - \left. \left. \left(\frac{1}{kU} \right)^2 2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \left[\log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) \right]^2 + 2 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) + \right. \\
 & - 2 \left(\frac{1}{kU} \right)^2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} - \frac{2B}{kU^2} 2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) + \frac{2B}{kU^2} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} + \\
 & \left. \left. - \left(\frac{B}{U} \right)^2 2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \right] - 4 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\tau_0^5} \left[\frac{1}{kU} \log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) + \frac{B}{U} + \right. \\
 & - \left. \left. \left(\frac{1}{kU} \right)^2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \left[\log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) \right]^2 - \frac{2B}{kU^2} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \log \left(\frac{0.0233^4 \rho^4 U^7}{\rho^{1/2} \tau_0^{7/2}} \right) + \right. \\
 & \left. \left. - \left(\frac{B}{U} \right)^2 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \right] \right]
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Para resolver esta ecuación diferencial ordinaria se va a utilizar el programa Matlab, y en concreto la rutina OD45. En el Capítulo 6 se especifican todos los detalles.

5.2.2 LEY POTENCIAL

Como muestra la Figura 5.1, los perfiles turbulentos difieren mucho del perfil laminar. En este apartado, se van a ajustar los datos del perfil de velocidades con una ley de potencias, suponiendo que esta ley es válida en todo el espesor de la capa límite. La forma de ley de potencias es:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n} \quad n = \begin{cases} 7 & Rn < 10^7 \\ 8 & 10^7 < Rn < 10^8 \\ 9 & 10^8 < Rn < 10^9 \end{cases} \tag{5.38}$$

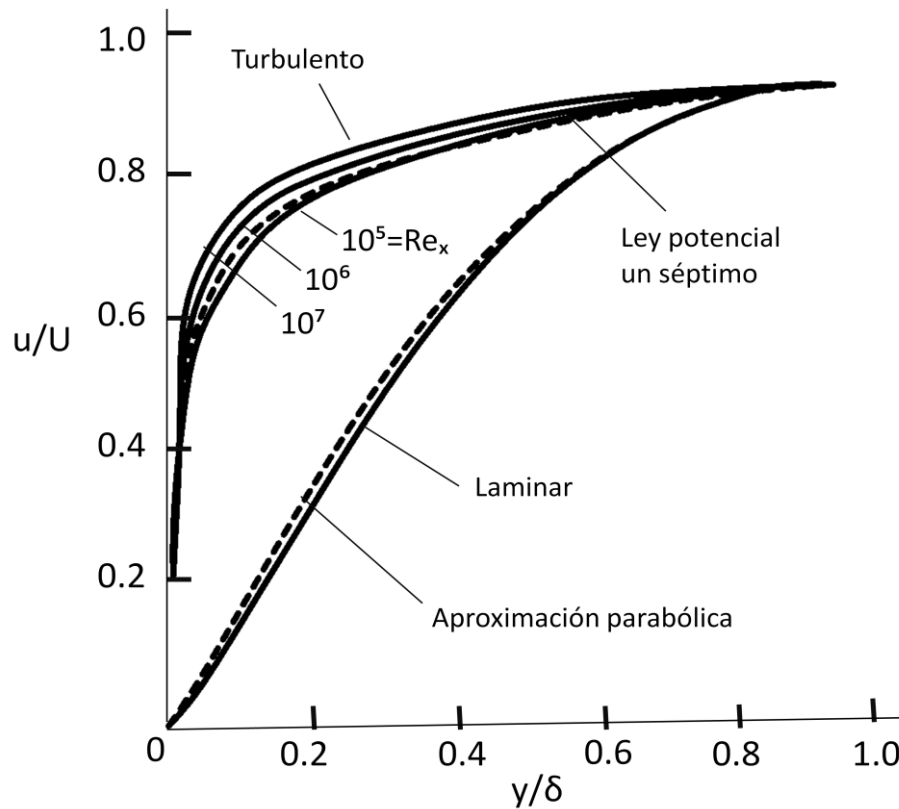


Figura 5.1.- Comparación de los perfiles adimensionales de velocidad de la capa límite.

Ahora se puede aplicar la ecuación integral de von Karman siguiendo los pasos que se describieron para el flujo laminar, excepto en el momento de evaluar el esfuerzo cortante en la pared. La forma de ley de potencias da $\tau_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \infty$ para $y=0$, por tanto, el perfil no produce buenos resultados para el esfuerzo cortante cerca de la pared. Así, en lugar de usar $\tau_0 = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$, se utilizará la relación empírica de Blasius que relaciona el coeficiente de fricción superficial local con el espesor de la capa límite:

$$c_f = 0.046 \left(\frac{U\delta}{\nu} \right)^{-1/4} \quad (5.39)$$

O bien, relacionando τ_0 con c_f :

$$\tau_0 = 0.0233 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{1/4} \quad (5.40)$$

5.2.2.1 LEY DE POTENCIA n=7

Se parte del perfil de velocidades para Reynolds menores a 10^7 , de acuerdo a la ley de potencias.

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad (5.41)$$

Se sustituye el perfil de velocidades en la ecuación de Von Karman.

$$\tau_0 = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho U^2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] dy = \frac{7}{72} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

Al combinar la expresión de Blasius con la anterior se tiene:

$$\frac{7}{72} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = 0.0233 \rho U^2 \left(\frac{v}{U\delta}\right)^{1/4}$$

Eliminando los términos de velocidad del flujo exterior al cuadrado y densidad y reagrupando:

$$\delta^{1/4} d\delta = 0.2396 \left(\frac{v}{U}\right)^{1/4} dx$$

Se integra ambos términos.

$$\frac{5}{4} \delta^{5/4} = 0.2396 x \left(\frac{v}{U}\right)^{1/4}$$

Se despeja δ .

$$\delta = 0.3812 x^{4/5} \left(\frac{v}{U}\right)^{1/5}$$

Como $x^{4/5} = x/x^{1/5}$ la expresión se puede poner de la siguiente forma:

$$\delta = 0.3812x \left(\frac{\nu}{Ux} \right)^{1/5}$$

O lo que es lo mismo:

$$\delta = 0.3812x Re_x^{-1/5} \quad (5.42)$$

Ahora se evalúa el esfuerzo cortante en la pared τ_0 , los coeficientes de fricción local c_f y medio C_F y la fuerza de arrastre D_F .

Al sustituir la expresión anterior para δ en la ecuación de Blasius queda:

$$c_f = 0.059 Re_x^{-1/5} \quad (5.43)$$

Integrando para el cálculo del coeficiente medio de fricción:

$$C_F = \frac{1}{L} \int_0^L c_f(x) dx \quad (5.44)$$

$$C_F = \frac{1}{L} \int_0^L 0.0593 Re_x^{-1/5} dx = \frac{0.0593}{L} \int_0^L \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{-1/5} dx =$$

$$= \frac{0.0593 U^{-1/5}}{L \nu^{-1/5}} \int_0^L x^{-1/5} dx = \frac{0.0593 U^{-1/5}}{L \nu^{-1/5}} \left[\frac{5}{4} x^{4/5} \right]_0^L$$

$$C_F = 0.0741 Re_L^{-1/5} \quad (5.45)$$

Para el esfuerzo cortante τ_0 , al sustituir la expresión para δ , queda:

$$\tau_0 = 0.0296 \rho U^2 Re_x^{-1/5} \quad (5.46)$$

Y para la fuerza de arrastre, integrando se obtiene:

$$D_F = \int_0^L \tau_0(x) E dx \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} D_F &= E \int_0^L 0.0296 \rho U^2 R n_x^{-1/5} dx = 0.0296 \rho U^2 E \int_0^L R n_x^{-1/5} dx = \\ &= 0.0296 \rho U^2 E \int_0^L \left(\frac{Ux}{v} \right)^{-1/5} dx = \frac{0.0296 \rho v^{1/5} U^2 E}{U^{1/5}} \left[\frac{5}{4} x^{4/5} \right]_0^L = \frac{0.0371 \rho v^{1/5} U^2 L^{4/5} E}{U^{1/5}} \end{aligned}$$

Para dejar la ecuación en función de Rn , $L^{4/5} = \frac{L}{L^{1/5}}$ y la ecuación queda:

$$D_F = 0.0371 \rho U^2 L E \left(\frac{v}{UL} \right)^{1/5}$$

$$D_F = 0.0371 \rho U^2 L E R n_L^{-1/5} \quad (5.44)$$

5.2.2.2 LEY DE POTENCIAS n=8

Se parte del perfil de velocidades para Reynolds menores a 10^7 , de acuerdo a la ley de potencias.

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/8} \quad (5.45)$$

Se sustituye el perfil de velocidades en la ecuación de Von Karman:

$$\tau_0 = \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho U^2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/8} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/8} \right] dy = \frac{8}{90} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

Al combinar la expresión de Blasius con la anterior se tiene:

$$\frac{8}{90}\rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = 0.0233\rho U^2 \left(\frac{v}{U\delta}\right)^{1/4}$$

Eliminando los términos de velocidad del flujo exterior al cuadrado y densidad y reagrupando:

$$\delta^{1/4} d\delta = 0.2621 \left(\frac{v}{U}\right)^{1/4} dx$$

Se integra ambos términos:

$$\frac{5}{4}\delta^{5/4} = 0.2621x \left(\frac{v}{U}\right)^{1/4}$$

Se despeja δ :

$$\delta = 0.4096x^{4/5} \left(\frac{v}{U}\right)^{1/5}$$

Como $x^{4/5} = x/x^{1/5}$ la expresión se puede poner de la siguiente forma:

$$\delta = 0.4096x \left(\frac{v}{Ux}\right)^{1/5}$$

O lo que es lo mismo:

$$\delta = 0.4096x Re_x^{-1/5} \quad (5.50)$$

Ahora se evalúa el esfuerzo cortante en la pared τ_0 , los coeficientes de fricción local c_f y medio C_F y la fuerza de arrastre D_F .

Al sustituir la expresión anterior para δ en la ecuación de Blasius queda:

$$c_f = 0.0583Re_x^{-1/5} \quad (5.51)$$

Integrando para el cálculo del coeficiente medio de fricción:

$$\begin{aligned} C_F &= \frac{1}{L} \int_0^L c_f(x) dx \\ C_F &= \frac{1}{L} \int_0^L 0.0583Rn_x^{-1/5} dx = \frac{0.0583}{L} \int_0^L \left(\frac{Ux}{v}\right)^{-1/5} dx = \\ &= \frac{0.0583U^{-1/5}}{Lv^{-1/5}} \int_0^L x^{-1/5} dx = \frac{0.0583U^{-1/5}}{Lv^{-1/5}} \left[\frac{5}{4}x^{4/5}\right]_0^L \\ C_F &= 0.0728Rn_L^{-1/5} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Para el esfuerzo cortante τ_0 , al sustituir la expresión para δ , queda:

$$\tau_0 = 0.0291\rho U^2 Rn_x^{-1/5} \quad (5.53)$$

Y para la fuerza de arrastre, integrando se obtiene:

$$\begin{aligned} D_F &= \int_0^L \tau_0(x) E dx \\ D_F &= E \int_0^L 0.0291\rho U^2 Rn_x^{-1/5} dx = 0.0291\rho U^2 E \int_0^L Rn_x^{-1/5} dx = \\ &= 0.0291\rho U^2 E \int_0^L \left(\frac{Ux}{v}\right)^{-1/5} dx = \frac{0.0291\rho v^{1/5} U^2 E}{U^{1/5}} \left[\frac{5}{4}x^{4/5}\right]_0^L = \frac{0.0364\rho v^{1/5} U^2 L^{4/5} E}{U^{1/5}} \end{aligned}$$

Para dejar la ecuación en función de Rn , $L^{4/5} = \frac{L}{L^{1/5}}$ y la ecuación queda:

$$D_F = 0.0364\rho U^2 L E \left(\frac{v}{UL}\right)^{1/5}$$

$$D_F = 0.0364\rho U^2 L E Rn_L^{-1/5} \quad (5.54)$$

5.2.2.3 LEY DE POTENCIAS n=9

Se parte del perfil de velocidades para Reynolds menores a 10^9 , de acuerdo a la ley de potencias.

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/9} \quad (5.55)$$

Se sustituye el perfil de velocidades en la ecuación de Von Karman:

$$\tau_0 = \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho U^2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/9} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/9}\right] dy = \frac{9}{110} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

Al combinar la expresión de Blasius con la anterior se tiene:

$$\frac{9}{110} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = 0.0233 \rho U^2 \left(\frac{v}{U\delta}\right)^{1/4}$$

Eliminando los términos de velocidad del flujo exterior al cuadrado y densidad y reagrupando:

$$\delta^{1/4} d\delta = 0.2848 \left(\frac{v}{U}\right)^{1/4} dx$$

Se integra ambos términos:

$$\frac{5}{4} \delta^{5/4} = 0.2848x \left(\frac{v}{U}\right)^{1/4}$$

Se despeja δ :

$$\delta = 0.4377x^{4/5} \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5}$$

Como $x^{4/5} = x/x^{1/5}$ la expresión se puede poner de la siguiente forma:

$$\delta = 0.4377x \left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/5}$$

O lo que es lo mismo:

$$\delta = 0.4377x Re_x^{-1/5} \quad (5.56)$$

Ahora se evalúa el esfuerzo cortante en la pared τ_0 , los coeficientes de fricción local c_f y medio C_F y la fuerza de arrastre D_F .

Al sustituir la expresión anterior para δ en la ecuación de Blasius queda:

$$c_f = 0.0573 Re_x^{-1/5} \quad (6)$$

Integrando para el cálculo del coeficiente medio de fricción:

$$\begin{aligned} C_F &= \frac{1}{L} \int_0^L c_f(x) dx \\ C_F &= \frac{1}{L} \int_0^L 0.0573 Re_x^{-1/5} dx = \frac{0.0573}{L} \int_0^L \left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-1/5} dx = \\ &= \frac{0.0573 U^{-1/5}}{L \nu^{-1/5}} \int_0^L x^{-1/5} dx = \frac{0.0573 U^{-1/5}}{L \nu^{-1/5}} \left[\frac{5}{4} x^{4/5} \right]_0^L \end{aligned}$$

$$C_F = 0.0716 Re_L^{-1/5} \quad (7)$$

Para el esfuerzo cortante τ_0 , al sustituir la expresión para δ , queda:

$$\tau_0 = 0.0286\rho U^2 Rn_x^{-1/5} \quad (5.59)$$

Y para la fuerza de arrastre, integrando se obtiene:

$$\begin{aligned} D_F &= \int_0^L \tau_0(x) E dx \\ D_F &= E \int_0^L 0.0286\rho U^2 Rn_x^{-1/5} dx = 0.0286\rho U^2 E \int_0^L Rn_x^{-1/5} dx = \\ &= 0.0286\rho U^2 E \int_0^L \left(\frac{Ux}{v}\right)^{-1/5} dx = \frac{0.0286\rho v^{1/5} U^2 E}{U^{1/5}} \left[\frac{5}{4} x^{4/5}\right]_0^L = \frac{0.0358\rho v^{1/5} U^2 L^{4/5} E}{U^{1/5}} \end{aligned}$$

Para dejar la ecuación en función de Rn , $L^{4/5} = \frac{L}{L^{1/5}}$ y la ecuación queda:

$$\begin{aligned} D_F &= 0.0358\rho U^2 L E \left(\frac{v}{UL}\right)^{1/5} \\ D_F &= 0.0358\rho U^2 L E Rn_L^{-1/5} \quad (5.60) \end{aligned}$$

5.3 ZONA DE TRANSICIÓN

La capa límite laminar sobre una placa plana suele convertirse en turbulenta, pero el valor del número de Reynolds para el que se produce la transición no es único. Principalmente los factores que influyen son la rugosidad de la superficie y el estado de la corriente libre, corriente en reposo o con perturbaciones. x_{turb} .

$$Rn_{x,tr} \begin{cases} 3 \cdot 10^5 \\ 3 \cdot 10^6 \end{cases} \text{ superficies pulidas y corriente libre sin perturbaciones}$$

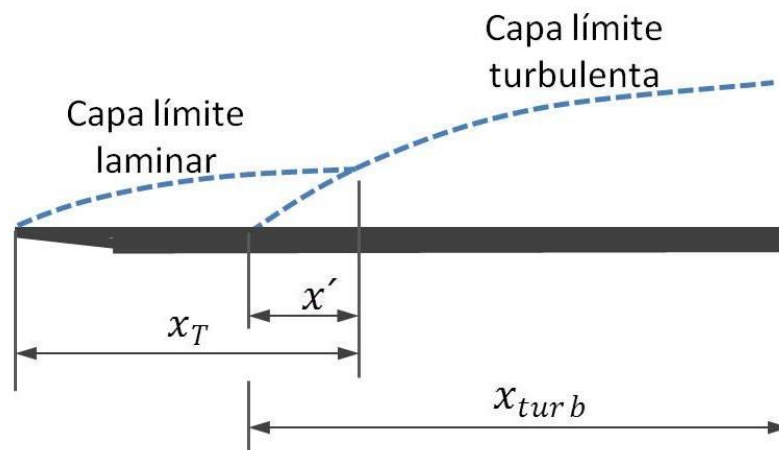


Figura 5.2.- Esquema transición capa límite laminar a turbulenta.

Con referencia a la Figura 5.2, se obtiene la distancia x_T de la siguiente forma:

$$Rn_{cr} = \frac{U x_T}{\nu}$$

$$x_T = \frac{Rn_{cr} \nu}{U} \quad (5.61)$$

El espesor de la capa límite en x_T se obtiene de la ecuación (5.20):

$$\delta = 4.65 \sqrt{\frac{x_T \nu}{U}}$$

De la ecuación (5.42) se ve que la posición del origen ficticio del flujo turbulento es:

$$x'^{4/5} = \frac{\delta}{0.38} \left(\frac{U}{\nu} \right)^{1/5}$$

$$x' = \frac{\delta^{5/4}}{0.298} \left(\frac{U}{\nu} \right)^{1/4} \quad (5.62)$$

La dista x_{turb} es entonces:

$$x_{turb} = L - x_T + x' \quad (5.63)$$

6 PROGRAMACIÓN DEL MÉTODO DE VON KARMAN-LOGARÍTMICA

Para el caso más complejo de capa límite turbulenta por Von Karman-Logarítmica es necesario utilizar una herramienta más potente como MATLAB. Será necesario utilizar el solver OD45 para poder resolver la ecuación diferencial ordinaria (5.37). Una vez obtenidos los valores de τ_0 deseados, es necesario integrar los valores a lo largo de x con el fin de obtener la resistencia de fricción. Esta integración se realizará con la regla de los trapecios teniendo en cuenta que los intervalos de separación no serán equiespaciados.

Para el valor de la condición inicial en cada caso se ha utilizado el valor de τ_0 en la sección inicial calculado por el método Von Karman-Potencial. Cuando se utiliza un valor de la condición inicial por encima del real, el resultado final de D_F no varía nada o varía muy poco.

6.1 MATLAB

MATLAB es un lenguaje de alto nivel y un entorno interactivo para el cálculo numérico, la visualización y la programación. Mediante MATLAB, es posible analizar datos, desarrollar algoritmos y crear modelos o aplicaciones.

Dispone de dos herramientas adicionales que expanden sus prestaciones: Simulink (plataforma de simulación multidominio) y GUIDE (editor de interfaces de usuario - GUI). Además, se pueden ampliar las capacidades de MATLAB con las *toolboxes*; y las de Simulink con los *blocksets*.

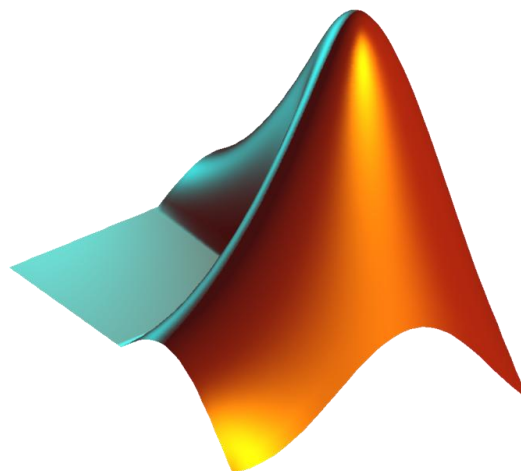


Figura 6.1.- Logotipo de la herramienta MATLAB.

Fue creado por Cleve Moler en 1984, surgiendo la primera versión con la idea de emplear paquetes de subrutinas escritas en Fortran en los cursos de álgebra lineal y análisis numérico, sin necesidad de escribir programas en dicho lenguaje. El lenguaje de programación M que utiliza esta herramienta fue creado en 1970 para proporcionar un sencillo acceso al software de matrices LINPACK y EISPACK sin tener que usar Fortran.

MathWorks es la empresa que gestiona y desarrolla MATLAB y cuenta con una plantilla de 2800 trabajadores, la mayoría situados en su sede central en Massachusetts, Estados Unidos. Actualmente se estima que MATLAB es empleado por más de un millón de personas en ámbitos académicos y empresariales, generando unos ingresos de 750 millones de dólares para la empresa.

6.1.1 SOLVER OD45

Para resolver la ecuación diferencial ordinaria (ODE) se utiliza la rutina de MATLAB OD45, un solver para ecuaciones explícitas, no rígidas, de orden cuatro y adaptativo.

Este solver se basa en una fórmula explícita del método de Runge-Kutta realizado por Dormand-Prince. Es un método de un solo paso, es decir, para determinar $y(t_{i+1})$ es necesario conocer solamente la solución en el tiempo inmediatamente anterior $y(t_i)$.

El método Dormand-Prince tiene siete etapas, pero solo usa seis evaluaciones de función por paso porque tiene la propiedad "primero igual que el último" (en inglés, *First Same As Last - FSAL*): la última etapa de un paso se evalúa en el mismo punto que el primero del paso siguiente. Dormand y Prince escogieron los coeficientes de su método para minimizar el error de la solución de quinto orden.

La diferencia entre las seis evaluaciones de la función se toma como error de la solución (de cuarto orden). Esta estimación de error resulta conveniente para los algoritmos de integración adaptativos.

La matriz de Butcher del método de Dormand-Prince se muestra en la Tabla 6.1. La primera línea de coeficientes b proporciona la solución de quinto orden y la segunda línea la de cuarto orden.

0							
1/5	1/5						
3/10	3/40	9/40					
4/5	44/45	-56/15	32/9				
8/9	19372/6561	-25360/2187	64448/6561	-212/729			
1	9017/3168	-355/33	46732/5247	49/176	-5103/18656		
1	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	
	5179/57600	0	7571/16695	393/640	-92097/339200	187/2100	1/40
	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	0

Tabla 6.1.- Matriz de Butcher del método de Dormand-Price.

6.2 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

La regla de los trapecios es un método para calcular aproximadamente el valor de la integral definida $\int_a^b f(x) dx$.

La regla se basa en aproximar el valor de la integral de $f(x)$ por el de la función lineal que pasa a través de los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. La integral de ésta es igual al área del trapecio bajo la gráfica de la función lineal como muestra la Figura 6.2.

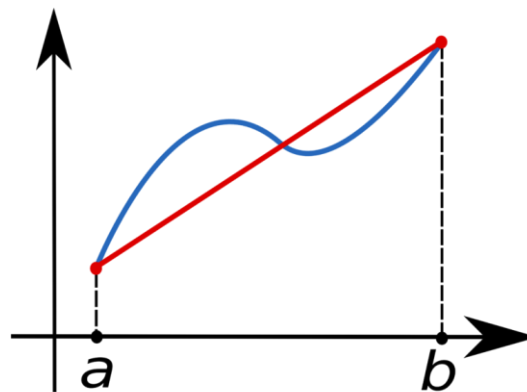


Figura 6.2.- La función $f(x)$ (en azul) es aproximada por la función lineal (en rojo).

Se sigue que:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (6.1)$$

6.3 CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN

A continuación se muestra el código del programa utilizado en MATLAB para el caso de capa límite turbulenta por Von Karman-Logarítmica, en concreto el código está configurado para el caso del cálculo de la resistencia al avance del modelo de 5,72 metros de eslora y para una velocidad de 3,371 m/s .

```
% PFC de Juan Marcos Egea
% Programa para resolver una EDO
% Resolvemos la ecuacion como explicita y'=f(t,y)
% [t,y]=ode45(@SolverEq,[x0 xn],y);

% Para ejecutar el programa para este caso,ponemos [t,y]=od45(@SolverEq,[0
5.72],18)

% VARIABLES
% y=tau => incognita
% t=L=> la eslora del buque
% U=> Velocidad a la que se mueve el buque
% ro=> densidad del fluido
% v=> viscosidad cinemática m^2/s
% constantes adimensionales B, k
function Fun=SolverEq(t,y)

% VELOCIDADES
% Velocidades para el modelo
%U=0.375;
%U=1.124;
%U=1.873;
%U=2.622;
U=3.371;

% Para ejecutar el programa hemos de poner:
% [t,y]=ode45(@SolverEq,[0 tamaño del buque],condicion inicial)
% en este caso el tamaño del buque es L=5.72
% la condicion inicial se saca del metodo Von Karman-Potencial
% [int,Eint,D_f]=intrap(t,y,U,L,E)
% la anchura de la placa plana se superficie equivalente es E=0.8367
% ro=> densidad del fluido (agua dulce)
ro=1000;

% Velocidades para la placa plana
%U=0.9056;
%U=1.1418;
%U=1.2599;
%U=1.3387;
```



```

%U=1.5355;

% Para ejecutar el programa hemos de poner:
% [t,y]=ode45(@SolverEq,[0 tamaño del buque],condicion inicial)
% en este caso el tamaño del buque es L=2.55
% la condicion inicial se saca del metodo Von Karman-Potencial
% [int,Eint,D_f]=intrap(t,y,U,L,E)
% la anchura de la placa plana se superficie equivalente es E=1.035
% ro=> densidad del fluido (agua dulce)
% ro=1000;

% Velocidades para el buque
%U=1.866;
%U=5.598;
%U=9.331;
%U=13.063;
%U=16.795;

% Para ejecutar el programa hemos de poner:
% [t,y]=ode45(@SolverEq,[0 tamaño del buque],condicion inicial)
% en este caso el tamaño del buque es L=142
% la condicion inicial se saca del metodo Von Karman-Potencial
% [int,Eint,D_f]=intrap(t,y,U,L,E)
% la anchura de la placa plana se superficie equivalent es E=20.771
% ro=> densidad del fluido (agua salada) kg/m^3
% ro=1025;

% VALORES DE LAS CONSTANTES
% v=> viscosidad cinemática m^2/s
v=1.004*10^(-6);
% constantes adimensionales
B=5;
k=0.41;

%definimos variables con el fin de acortar la formula de la ecuacion
C=0.0233^4*ro^4*U^7*v;
ro12=1/sqrt(ro);
cc=C*ro12;
lo=(C/v)*ro12;
a2=1/(k*U);
a3=B/U;
a4=2*a2*a3;
a6=ro*U^2;

% introducimos la ecuacion
Fun=y/(a6*(-4*C*(1/(y^5))*a2*y^(1/2)*ro12*log(lo/y^(7/2))+a3*y^(1/2)*
ro12-a2^2*y*(1/ro)*(log(lo/y^(7/2)))^2-(1/ro)*a4*y*log(lo/y^(7/2))-a3^2*
y*(1/ro))+(1/2)*(1/sqrt(y))*ro12*(a2*C*(1/y^4)*log(lo/y^(7/2))+a3*C*(1/y^4)
-2*a2^2*C*ro12*(1/y^(7/2))-2*a2^2*C*ro12*(1/y^(7/2))*(log(lo/y^(7/2)))^2+
2*a2^2*C*ro12*(1/y^(7/2))*log(lo/y^(7/2))-2*a4*C*ro12*(1/y^(7/2))*
log(lo/y^(7/2))+a4*C*ro12*(1/y^(7/2))-2*a3^2*C*ro12*(1/y^(7/2))));

% Una vez ejecutado el programa utilizamos el comando
% plot(t,y,'*')
% para que nos dibuje la grafica

```

```

% Programa para calcular Tau_0, D_f de la potencial y nuestra D_f

function [aprox,Eaprox,D_f]=intrap(t,f,U,L,E)

% VARIABLES
% tomaremos la t y la f dadas por el programa SolverEq
% t=> el vector con la discretizacion de la eslora
% f=> el valor de los Tau en cada punto de la discretizacion, los valores
%     del vector solución de la ecuación
% U=> velocidad a la que se mueve el buque en m/s
% L=> eslora
% E=> anchura de la placa plana de superficie equivalente a la superficie
%     mojada del buque

% DATOS DE SALIDA
% aprox => valor de la aproximación a la integral
% Eaprox=> valor de multiplicar E por el valor de la integracion numerica
% D_f => valor del metodo Von Karman-Potencial
% tau=> valores de las tau_0 por el metodo Von Karman-Potencial

% n => n° de nodos
n=length(t);
% inicialización de variables
aprox=0;

% Regla de los trapecios
% como los nodos no estan equiespaciados, operaremos directamente con la
% formula

for i=1:n-1
    aprox=aprox+(t(i+1)-t(i))*(f(i)+f(i+1))/2;
end

% multiplicamos por E, la anchura de la placa plana

Eaprox=E*aprox;

% calculo del valor del otro método
% ro=>densidad del fluido (agua dulce)
ro=1000;

% calculo de la resistencia por friccion
D_f=0.0371*ro*U^2*L*E*(1.004*10^(-6)*(1/(U*L)))^(1/5);

% calculo de las tau_0, condiciones iniciales
for i=1:L
    x(i)=i;
    tau(i)=0.0296*ro*U^2*((U*i)/(1.004*10^(-6)))^(-1/5);
end

% queremos que nos sobrescriba la grafica sobre la calculada en SolverEq
% para comprobar que el método da buenos resultados
hold on
% dibujamos las tau_0
ii=x;
plot(ii,tau,'*')

hold off

```

Hasta este punto llega el código del programa. Como ejemplo, se muestra en la Figura 6.3 una gráfica con la distribución típica de τ_o obtenida para uno de los casos estudiados con este código y ploteada con el mismo programa de MATLAB.

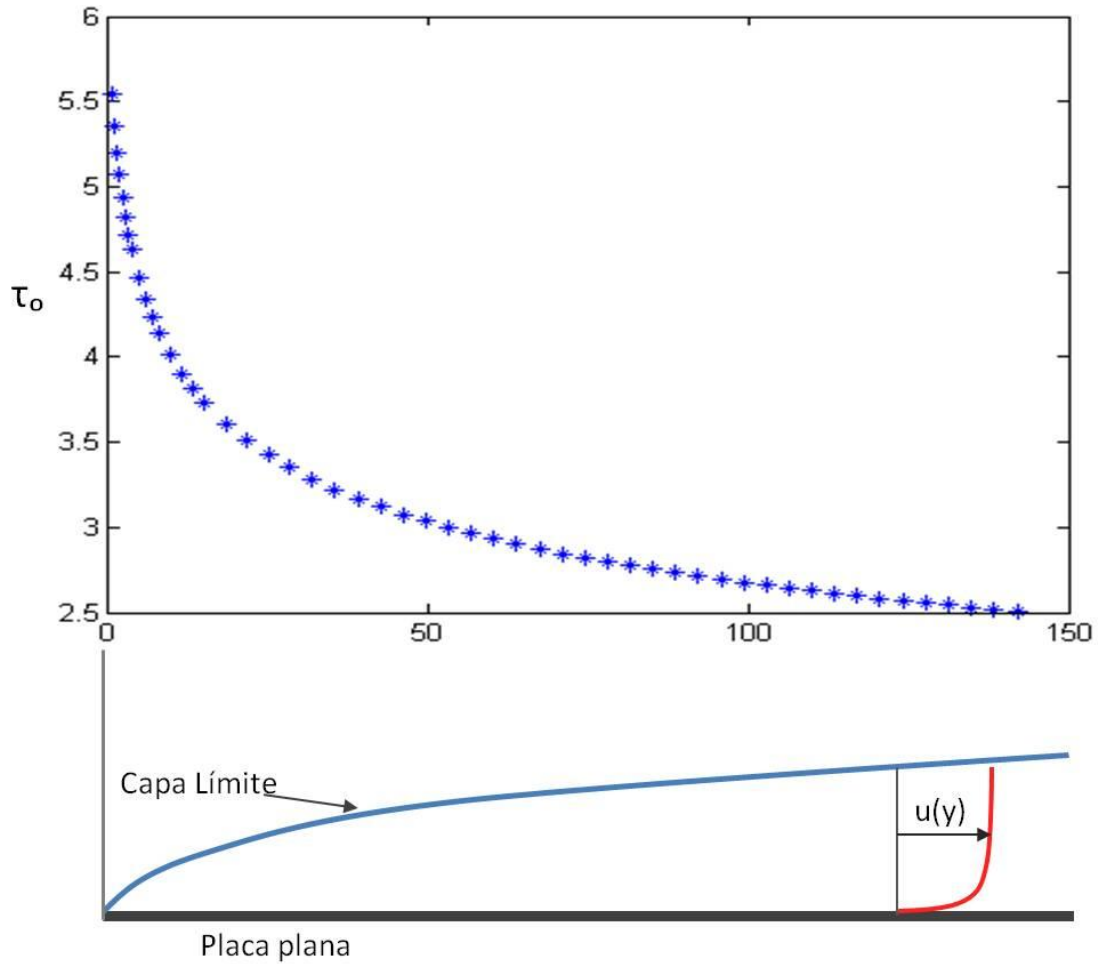


Figura 6.3.- Distribución de τ_o a lo largo de una placa plana obtenida con el código del programa en MATLAB.

7 VALIDACIÓN DE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE VON KARMAN

7.1 CÁLCULO DE LA RESISTENCIA DE UNA PLACA PLANA

7.1.1 ENSAYO DE PLACA PLANA DE 2.55 METROS

En el año 1998 se llevó a cabo un experimento en la Universidad de Newcastle con una placa plana de 2.55 metros de longitud, consistente en la realización de ensayos de canal para calcular su resistencia por fricción y compararla con las resistencias empleando diferentes tipos de pinturas en la superficie de la placa. Todos los datos referentes a este ensayo se pueden encontrar en [8].

La placa original es una plancha de aluminio y de dimensiones las de la Figura 7.1.

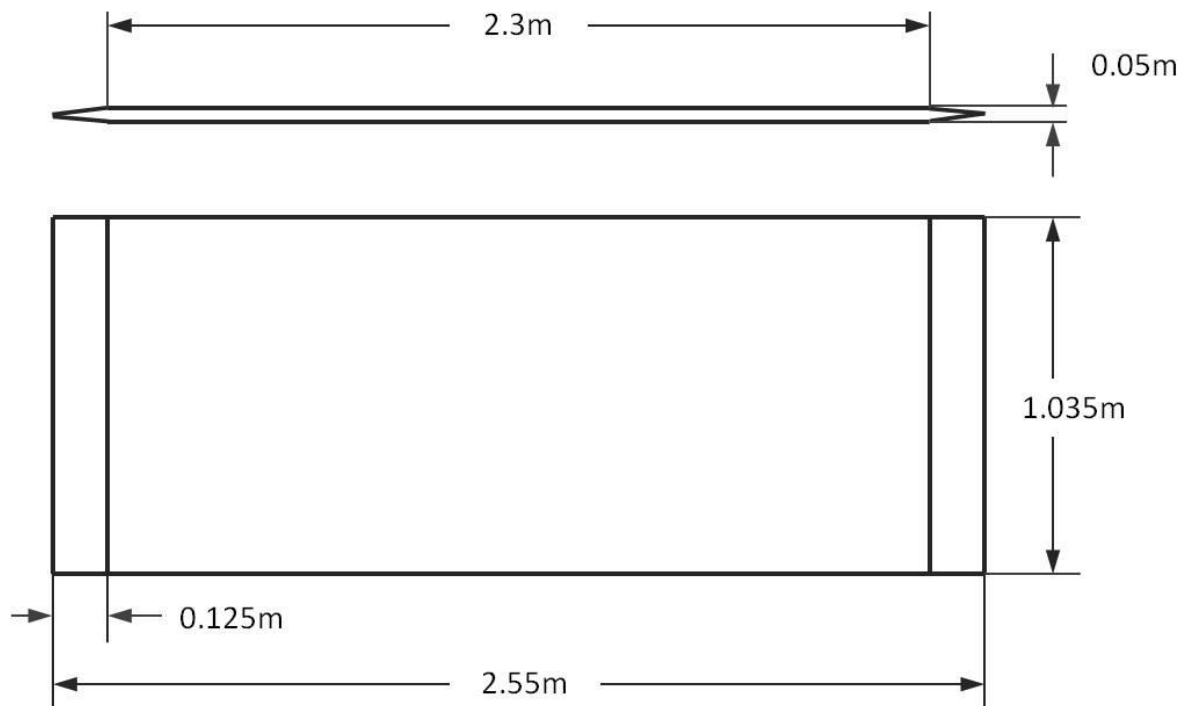


Figura 7.1.- Dimensiones de la placa plana.

La resistencia por formación de olas fue calculada por programas de ordenador y fue sustraída de la resistencia total mostrada en los ensayos de canal. Los resultados de resistencia por formación de olas y resistencia por fricción para diferentes acabados de la superficie de la placa plana se muestran en la Figura 7.2.

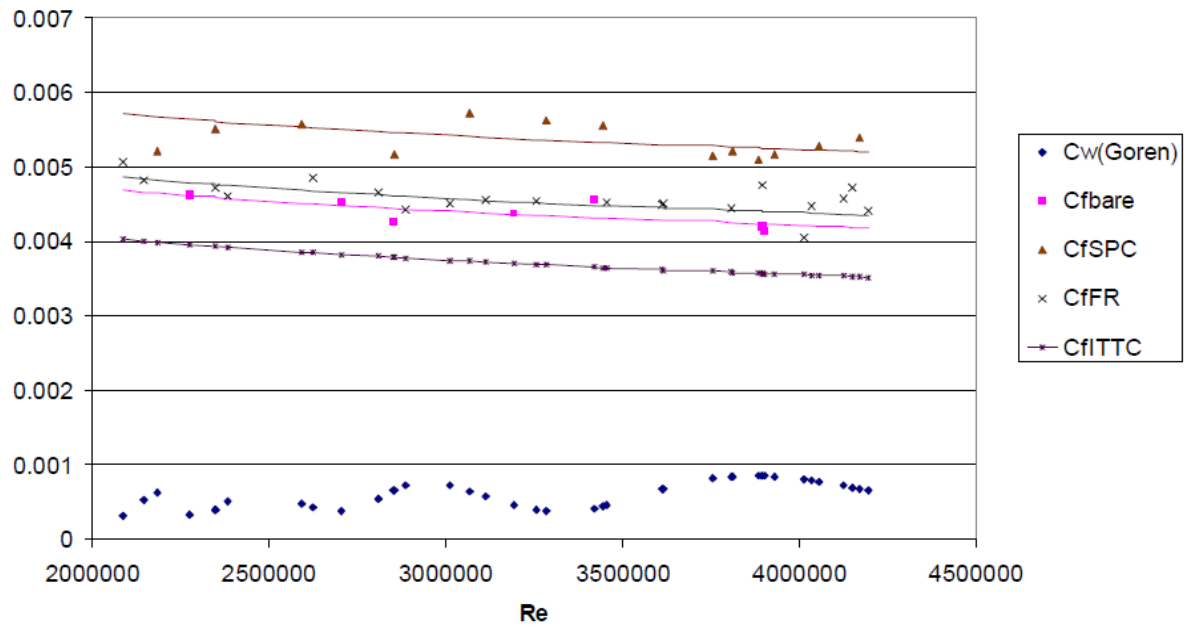


Figura 7.2.- Coeficientes de resistencia de fricción y de formación de olas versus número de Reynolds.

Los resultados obtenidos de los ensayos servirán para evaluar los resultados de los métodos matemáticos desarrollados en este proyecto.



Figura 7.3.- Ensayo de la placa plana.

7.1.2 LÍNEA DE FRICCIÓN DE HUGHES. ITTC-57

Uno de los propósitos del ensayo en canal de modelos a escala es la obtención de información sobre su resistencia al avance. Las fuerzas medidas en el modelo son extrapoladas al buque de medidas reales por un procedimiento que ideó originariamente William Froude y que ha sido mejorado a lo largo del tiempo por otros científicos. La base del método de Froude es la separación de la resistencia total en dos componentes independientes, una dependiente del número de Reynolds (Re) y la otra dependiente del número de Froude (Fn).

$$C_T(Re, Fn) = C_V(Re) + C_R(Fn) \quad (7.1)$$

La componente de resistencia viscosa, C_V , se asume que es proporcional a la resistencia dada por la línea de correlación:

$$C_V(Re) = (1 + k)C_F(Re) \quad (7.2)$$

En donde k es el factor de forma y C_F es la línea de correlación. Ya que los ensayos de canal de los modelos se llevan a cabo a mismo número de Froude que el buque real sin escala, los efectos de escala se concentran en C_V .

Se asume normalmente que C_R y k no varían con el número de Reynolds. Reemplazando la resistencia de fricción del modelo a escala por la resistencia de fricción del buque real sin escala se puede obtener una estimación de la resistencia total del buque. La ITTC recomienda el uso de la línea de fricción ITTC-57 para el cálculo de la resistencia por fricción, estando ésta basada en la versión de la línea de fricción de Hughes para una placa plana, cuya fórmula es:

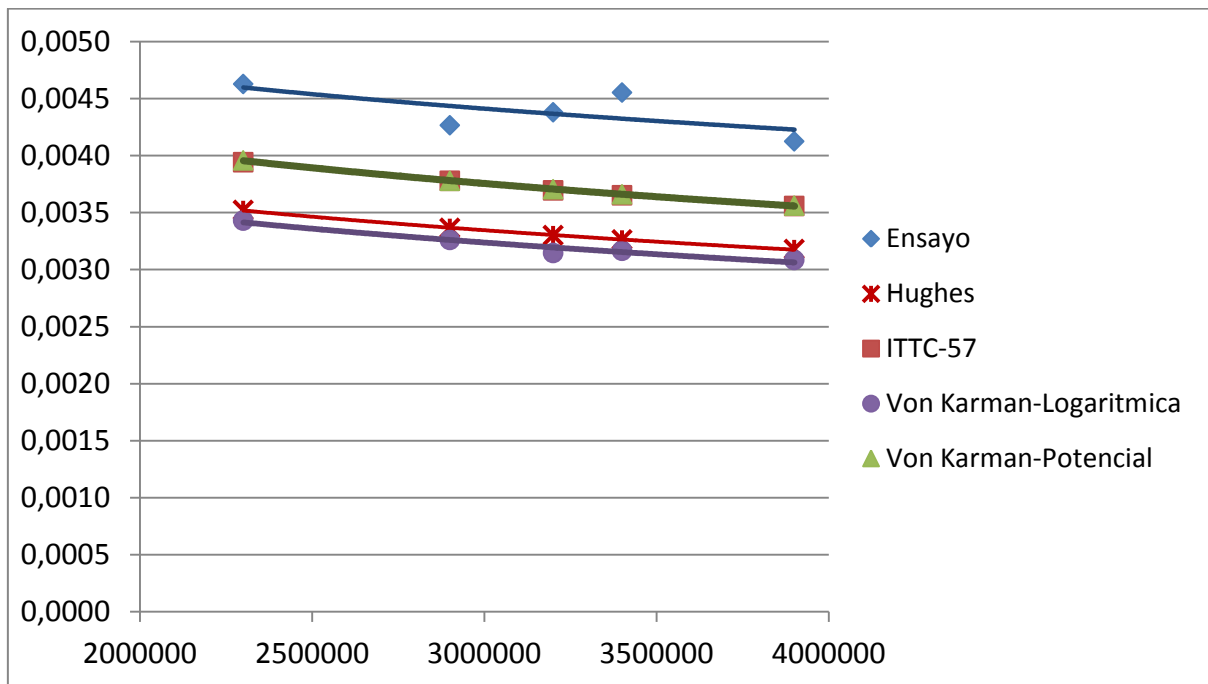
$$C_F = \frac{0.067}{(\log_{10} Re - 2)^2} \quad (7.3)$$

La fórmula final de la ITTC-57 corresponde con:

$$C_F = \frac{0.075}{(\log_{10} Re - 2)^2} = (1 + 0.1194) \frac{0.067}{(\log_{10} Re - 2)^2} \quad (7.4)$$

7.1.3 RESULTADOS COMPARATIVOS

A continuación se muestra en la Gráfica 7.1 el resultado comparativo de los valores obtenidos para el coeficiente de fricción de la placa plana por los métodos de Ensayo, Hughes, ITTC57, Von Karman-Logarítmica y Von Karman-Potencial, siendo estos dos últimos los métodos desarrollados en este proyecto.



Gráfica 7.1.- Coeficientes de fricción vs. Número de Reynolds.

Existe una disminución apreciable en la resistencia calculada respecto al ensayo de la placa plana, aproximadamente del 14 % para Von Karman-Potencial, variando un poco en función del valor del número de Reynolds, y aproximadamente un 21% para Von Karman-Logarítmica. Por otro lado, los resultados de Von Karman-Potencial son muy parecidos a los calculados por la línea de fricción de la ITTC 57, situándose con valores algo superiores en aproximadamente un 0,4 %. y los de Von Karman-Logarítmica muy parecidos a la línea de fricción de Hughes.

La variación significativa respecto a los valores obtenidos a través del ensayo de remolque, pueden estar inducidos por varias causas. La primera es el error que existe al tener que calcular la resistencia por formación de olas mediante un ordenador para restársela a la resistencia total obtenida del ensayo. La segunda es la posible separación del flujo de agua en el borde de salida de la placa plana, donde a lo largo de los últimos 12.5 cm se produce un gradiente de presión adverso por la geometría de la placa, lo que seguramente produce el

desprendimiento de la capa límite y la formación de una estela que provoca el aumento de la resistencia al avance. Este tipo de resistencia viscosa no se ha separado en el experimento de la resistencia total. La tercera es el error de precisión que pueden tener los utensilios de medida, siendo una placa de solo 2.55 metros de longitud, la resistencia medida es muy pequeña lo que requiere unos utensilios de medida extremadamente precisos.

A pesar de las diferencias de resultados con el ensayo de remolque, se puede observar que los valores obtenidos con los métodos de Von Karman son aceptables y muy parecidos a otras líneas de fricción.

8 CÁLCULO DE LA RESISTENCIA POR FRICCIÓN DE UN BUQUE MILITAR

8.1 EL BUQUE

El buque elegido para realizar los cálculos de la paca límite es un buque de guerra de los Estados Unidos, en concreto de la serie Arleigh Burke. Se ha elegido este barco porque la ITTC aconseja para la validación de software CFD la comparativa de resultados con su modelo a escala de 5,72 metros de eslora, cuyos planos son de fácil acceso al igual que los datos de resistencia de remolque obtenidos por diferentes canales de ensayo. No se dice que el modelo a escala corresponda exactamente con el buque real sino que contiene el mismo estilo de formas. Para este proyecto, a efectos de cálculos, se considera que las formas del modelo y buque son exactamente iguales.

Los barcos de guerra clase Arleigh Burke (Figura 8.1) están entre los buques militares de mayor tamaño de su clase de los que se han construido en Estados Unidos, con un mayor desplazamiento y más fuertemente armados que los cruceros anteriores.



Figura 8.1.- El buque USS Arleigh Burke (DDG-51) en el Mar Mediterráneo en marzo de 2003. Fuente: America's Navy www.navy.mil

El buque tiene una eslora total de 155 metros y está equipado con cuatro turbinas de gas que generan una potencia de 108000 CV. Todas la características principales se pueden observar en la Tabla 8.1. La clase se llama así por el almirante estadounidense Arleigh Burke.

Características de la clase	
Desplazamiento	8615 T plena carga
Eslora Total	155 m
Manga	19 m
Calado	6.15 m
Sensores	<ul style="list-style-type: none"> • 1 radar SPY-1D AEGIS • 3 radares de control de tiro SPG-62 • 1 radar de navegación • 1 sonar AN/SQQ-99(V)
Propulsión	COGAG <ul style="list-style-type: none"> • 4 turbinas LM2500 • 2 ejes propulsores
Potencia	108 000 CV (75 MW)
Velocidad	+30 nudos (+56 km/h)
Autonomía	4400 mn (8100 km) a 20 nudos
Tripulación	<ul style="list-style-type: none"> • 23 oficiales • 250 suboficiales y marineros

Tabla 8.1.- Características de la serie Arleigh Burke.

En 1980 Estados Unidos inició los estudios para el diseño con siete contratistas navales. El 3 de abril de 1985, se le adjudicó el contrato de la primera unidad a los astilleros Bath Iron Works por 321,9 millones de dólares. Gibbs & Cox ganó el concurso para el diseño principal de los destructores. El coste total de la primera unidad ascendió a 1100 millones de dólares. La puesta en quilla del Arleigh Burke se produjo el 6 de diciembre de 1988 en los astilleros de Bath Iron Works en Maine; y su botadura el 16 de septiembre de 1989 contando como madrina a la esposa del almirante Arleigh Burke. El Almirante estuvo presente en la ceremonia de entrega celebrada el 4 de julio de 1991, que tuvo lugar en Norfolk, Virginia.

8.1.1 ENSAYOS DE CANAL

El modelo 5415 fue concebido preliminarmente como un diseño de la superficie del casco de la fragata de la serie Arleigh Burke de la Armada Americana en 1980. Ha sido ensayado en los canales de ensayo INSEAN Istituto Nazionale per Studi ed Esperienze di Architettura Navale (Italia), Iowa Institute of Hydraulic Research (IIHR) y Naval Surface Warfare Center; Carderock División (NSWC, formalmente DTMB) entre otros. Existe una gran base de datos del modelo 5415, debido a que este ha sido utilizado tradicionalmente para la validación de CFD, sin embargo, los resultados obtenidos de los ensayos realizados por estas tres instituciones están publicados en internet y son de fácil acceso.

El modelo (Figura 8.2), presenta un bulbo de proa donde se aloja el sonar. La eslora entre perpendiculares es de 5.72 metros, la cual corresponde a una escala de $\lambda=24.8$ ($L=141.856$). Otros datos significativos referentes al buque y al modelo se pueden ver en la Tabla 8.2.



Figura 8.2.- Modelo 5415 utilizado por INSEAN.

Todos los ensayos del modelo, a los que se ha tenido acceso, se llevaron a cabo con el casco desnudo, sin apéndices ni propulsores. Se siguió las indicaciones de la ITTC realizando ensayos para números de Froude desde 0.05 hasta 0.045 en incrementos de 0.05.

Descripción		Buque	Modelo
Factor de escala	λ	-	24.825
Eslora entre perpendiculares	L_{PP} (m)	142.0	5.720
Eslora en flotación	L_{WL} (m)	142.0	5.720
Eslora total	L (m)	155	
Manga	B (m)	18.9	0.76
Calado	T (m)	6.16	0.248
Ángulo de trimado	(deg)	0.0	0.0
Desplazamiento	Δ (t)	8636.0	0.549
Volumen de carena	∇ (m ³)	8425.4	0.549

Tabla 8.2.- Características comparativas buque-modelo.

La Tabla 8.3 muestra los valores de los coeficientes de forma y relaciones de dimensiones más significativas.

L_{PP}/B	7.530	X_{FF}/L_{PP}	0.549
B/T	3.091	α (deg)	11.0
$L_{PP}/\nabla^{1/3}$	6.978	CB	0.506
X_{FB}/L_{PP}	0.505	Cp	0.613

Tabla 8.3.- Coeficientes de formas.

Los valores de los coeficientes de resistencia total y resistencia residuo medidos en los tres canales (INSEAN, IIHRI e DTMB) se pueden observar en la Figura 8.3. Los resultados son

muy parecidos para los canales INSEAN y DTMB, estando los resultados de IIHR algo más distanciados debido en parte a la utilización de un modelo del buque de menor eslora.

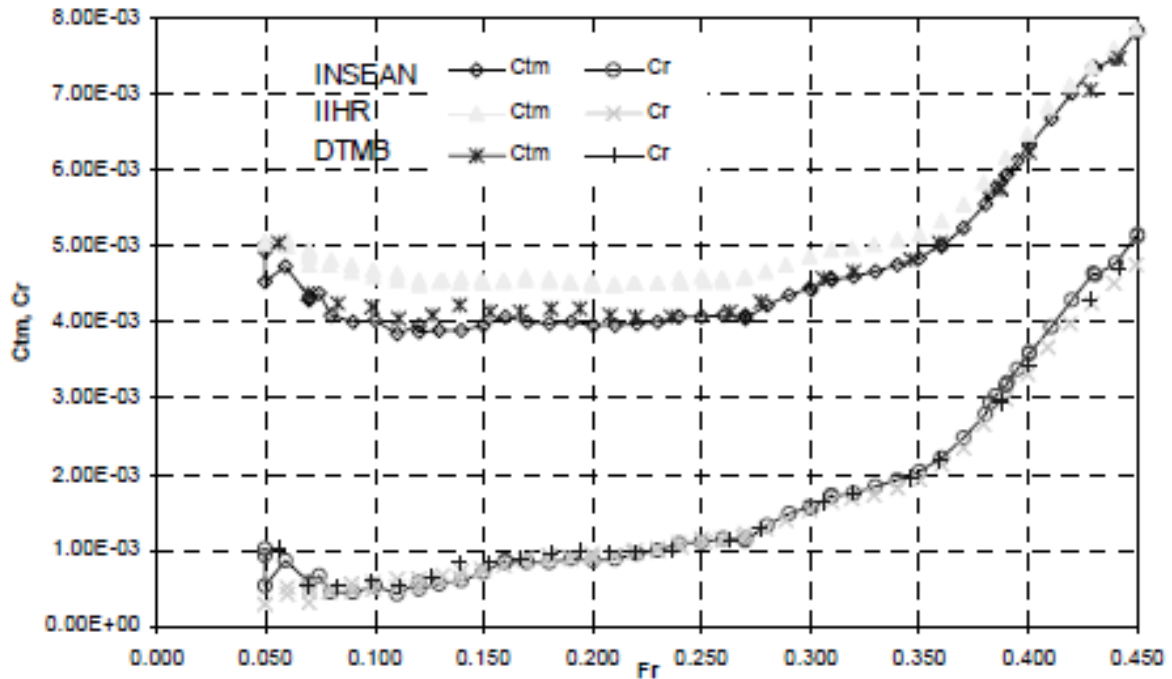


Figura 8.3.- Comparación de los coeficientes de resistencia total y de resistencia residuo obtenidos por INSEAN, IIHR y DTMB.

De ahora en adelante solo se mostrarán resultados específicos del canal INSEAN, por facilidad de acceso y por las variaciones insignificantes para este proyecto entre los distintos canales de ensayo.

Los resultados de todos los ensayos de remolque realizado por INSEAN se muestran en la Tabla 8.3. Como se puede observar, se llevaron a cabo 59 ensayos a distintas velocidades entre 0.373 m/s y 3.371 m/s .

V	Fr	R_T (Kg)	C_{TM}	Re	C_F	C_R
0.373	0.050	0.170	4.94E-03	2.13E+06	4.01E-03	9.34E-04
0.374	0.050	0.174	5.03E-03	2.13E+06	4.00E-03	1.03E-03
0.374	0.050	0.157	4.54E-03	2.13E+06	4.00E-03	5.34E-04
0.444	0.059	0.231	4.74E-03	2.53E+06	3.87E-03	8.68E-04
0.525	0.070	0.295	4.33E-03	2.99E+06	3.74E-03	5.83E-04
0.525	0.070	0.293	4.30E-03	2.99E+06	3.74E-03	5.53E-04
0.559	0.075	0.338	4.37E-03	3.18E+06	3.70E-03	6.74E-04
0.598	0.080	0.362	4.09E-03	3.41E+06	3.65E-03	4.41E-04
0.673	0.090	0.449	4.01E-03	3.83E+06	3.57E-03	4.38E-04

0.749	0.100	0.558	4.02E-03	4.27E+06	3.50E-03	5.23E-04
0.823	0.110	0.645	3.85E-03	4.69E+06	3.44E-03	4.12E-04
0.898	0.120	0.791	3.96E-03	5.12E+06	3.38E-03	5.80E-04
0.899	0.120	0.772	3.86E-03	5.12E+06	3.38E-03	4.80E-04
0.972	0.130	0.910	3.89E-03	5.54E+06	3.33E-03	5.60E-04
1.046	0.140	1.054	3.89E-03	5.96E+06	3.29E-03	6.05E-04
1.047	0.140	1.057	3.90E-03	5.96E+06	3.29E-03	6.09E-04
1.124	0.150	1.235	3.95E-03	6.40E+06	3.25E-03	7.05E-04
1.197	0.160	1.444	4.07E-03	6.82E+06	3.21E-03	8.64E-04
1.199	0.160	1.443	4.06E-03	6.83E+06	3.21E-03	8.49E-04
1.272	0.170	1.605	4.01E-03	7.25E+06	3.18E-03	8.35E-04
1.347	0.180	1.785	3.98E-03	7.67E+06	3.14E-03	8.34E-04
1.423	0.190	2.007	4.01E-03	8.11E+06	3.11E-03	8.94E-04
1.501	0.200	2.200	3.95E-03	8.55E+06	3.08E-03	8.64E-04
1.574	0.210	2.420	3.95E-03	8.97E+06	3.06E-03	8.91E-04
1.648	0.220	2.678	3.99E-03	9.39E+06	3.03E-03	9.54E-04
1.722	0.230	2.931	4.00E-03	9.81E+06	3.01E-03	9.86E-04
1.794	0.240	3.238	4.07E-03	1.02E+07	2.99E-03	1.08E-03
1.794	0.240	3.238	4.07E-03	1.02E+07	2.99E-03	1.08E-03
1.873	0.250	3.535	4.07E-03	1.07E+07	2.97E-03	1.11E-03
1.946	0.260	3.830	4.09E-03	1.11E+07	2.95E-03	1.14E-03
2.021	0.270	4.124	4.08E-03	1.15E+07	2.93E-03	1.15E-03
2.024	0.270	4.102	4.05E-03	1.15E+07	2.93E-03	1.12E-03
2.097	0.280	4.605	4.23E-03	1.19E+07	2.91E-03	1.32E-03
2.171	0.290	5.091	4.37E-03	1.24E+07	2.89E-03	1.47E-03
2.245	0.300	5.547	4.45E-03	1.28E+07	2.88E-03	1.57E-03
2.247	0.300	5.536	4.43E-03	1.28E+07	2.88E-03	1.56E-03
2.319	0.310	6.087	4.58E-03	1.32E+07	2.86E-03	1.72E-03
2.321	0.310	6.067	4.55E-03	1.32E+07	2.86E-03	1.69E-03
2.395	0.320	6.512	4.59E-03	1.36E+07	2.84E-03	1.74E-03
2.471	0.330	7.060	4.68E-03	1.41E+07	2.83E-03	1.85E-03
2.546	0.340	7.614	4.75E-03	1.45E+07	2.82E-03	1.93E-03
2.621	0.350	8.226	4.84E-03	1.49E+07	2.80E-03	2.04E-03
2.695	0.360	9.000	5.01E-03	1.54E+07	2.79E-03	2.22E-03
2.696	0.360	8.999	5.01E-03	1.54E+07	2.79E-03	2.22E-03
2.772	0.370	9.979	5.25E-03	1.58E+07	2.78E-03	2.47E-03
2.847	0.380	11.110	5.54E-03	1.62E+07	2.76E-03	2.78E-03
2.864	0.382	11.576	5.70E-03	1.63E+07	2.76E-03	2.94E-03
2.884	0.385	11.886	5.78E-03	1.64E+07	2.76E-03	3.02E-03
2.919	0.390	12.483	5.92E-03	1.66E+07	2.75E-03	3.17E-03
2.922	0.390	12.582	5.96E-03	1.66E+07	2.75E-03	3.21E-03
2.959	0.395	13.261	6.12E-03	1.69E+07	2.75E-03	3.38E-03
2.996	0.400	14.103	6.35E-03	1.71E+07	2.74E-03	3.61E-03
2.996	0.400	14.035	6.32E-03	1.71E+07	2.74E-03	3.58E-03
3.071	0.410	15.566	6.67E-03	1.75E+07	2.73E-03	3.94E-03
3.144	0.420	17.139	7.01E-03	1.79E+07	2.72E-03	4.29E-03
3.218	0.430	18.848	7.36E-03	1.83E+07	2.71E-03	4.65E-03

3.222	0.430	18.848	7.34E-03	1.84E+07	2.71E-03	4.63E-03
3.297	0.440	20.105	7.48E-03	1.88E+07	2.70E-03	4.78E-03
3.370	0.450	22.052	7.85E-03	1.92E+07	2.69E-03	5.16E-03
3.371	0.450	21.950	7.81E-03	1.92E+07	2.69E-03	5.12E-03

Tabla 8.4.- Resultados del ensayo de remolque en el canal INSEAN.

La Figura 8.4 muestra la gráfica de Resistencia total del modelo para las distintas velocidades de ensayo, mientras que la Figura 8.5 muestra la gráfica de los coeficientes de resistencia total, de fricción y residuo en función del número de Froude.

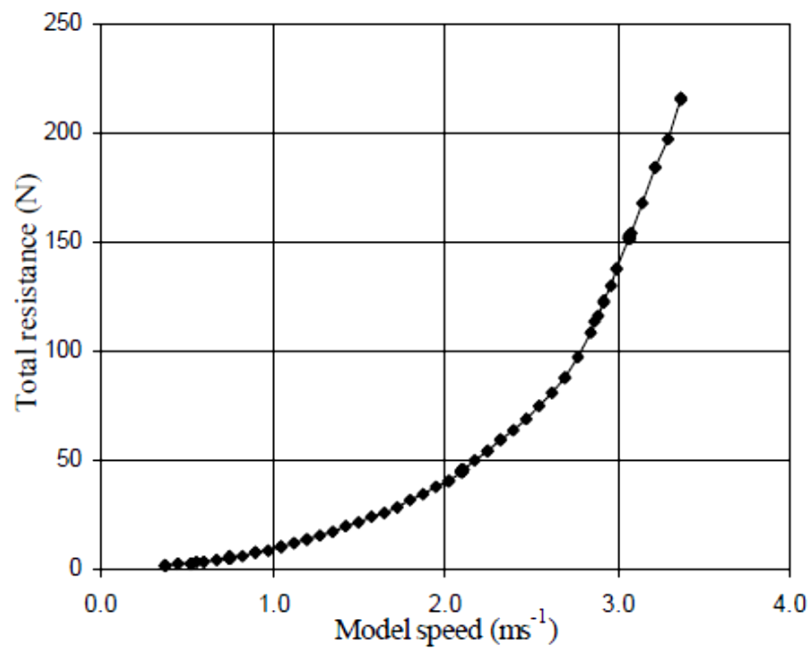


Figura 8.4.- Resistencia total vs. Velocidad del modelo

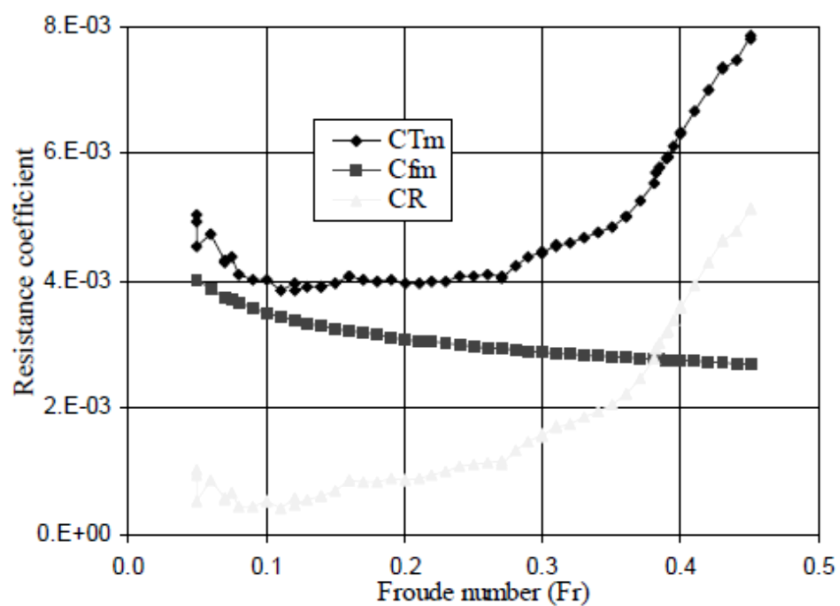


Figura 8.5.- Coeficientes de resistencia por fricción y residuo en función del número de Froude.

8.1.2 PLANOS DEL MODELO

Se muestra en la Figura 8.6 una imagen del plano de formas del modelo 5415 de 5,72 metros de eslora. El plano de formas del modelo a escala 1:20 se muestra en el Anexo I y se puede conseguir en [13].

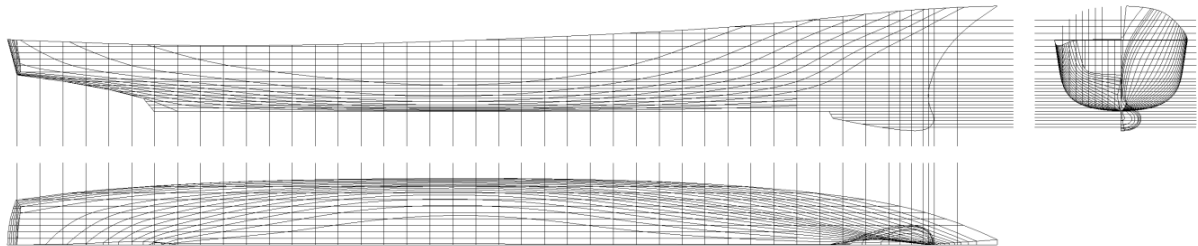


Figura 8.6.- Imagen del plano de formas del modelo 5415.

8.1.3 3D DEL MODELO Y BUQUE REAL

A partir del plano de formas se realiza el modelo en tres dimensiones empleando superficies NURBS mediante el software Rhinoceros. Con el modelo en tres dimensiones se puede obtener la superficie mojada para los calados que corresponda, dato necesario para el cálculo de la resistencia por fricción.

A partir del plano de formas se dibujan las cuadernas, líneas de agua, longitudinales y diagonales (Figura 8.7) para posteriormente crear una superficie que corresponderá con la superficie del casco. Esta superficie inicial es necesario corregir para conseguir que sea uniforme pero siempre teniendo en cuenta las curvas de referencia (cuadernas, líneas de agua, longitudinales y diagonales) para que la superficie no se desvíe de las formas reales dibujadas en el plano de formas. Se alisa la superficie y finalmente se obtiene el casco del modelo (Figura 8.8) listo para ser trabajado.

Ajustando la escala y dando el calado adecuado siguiendo la Tabla 8.2, se obtiene las superficies mojadas de:

	Buque	Modelo
Superficie mojada, $S (m^2)$	2949.5	4.786

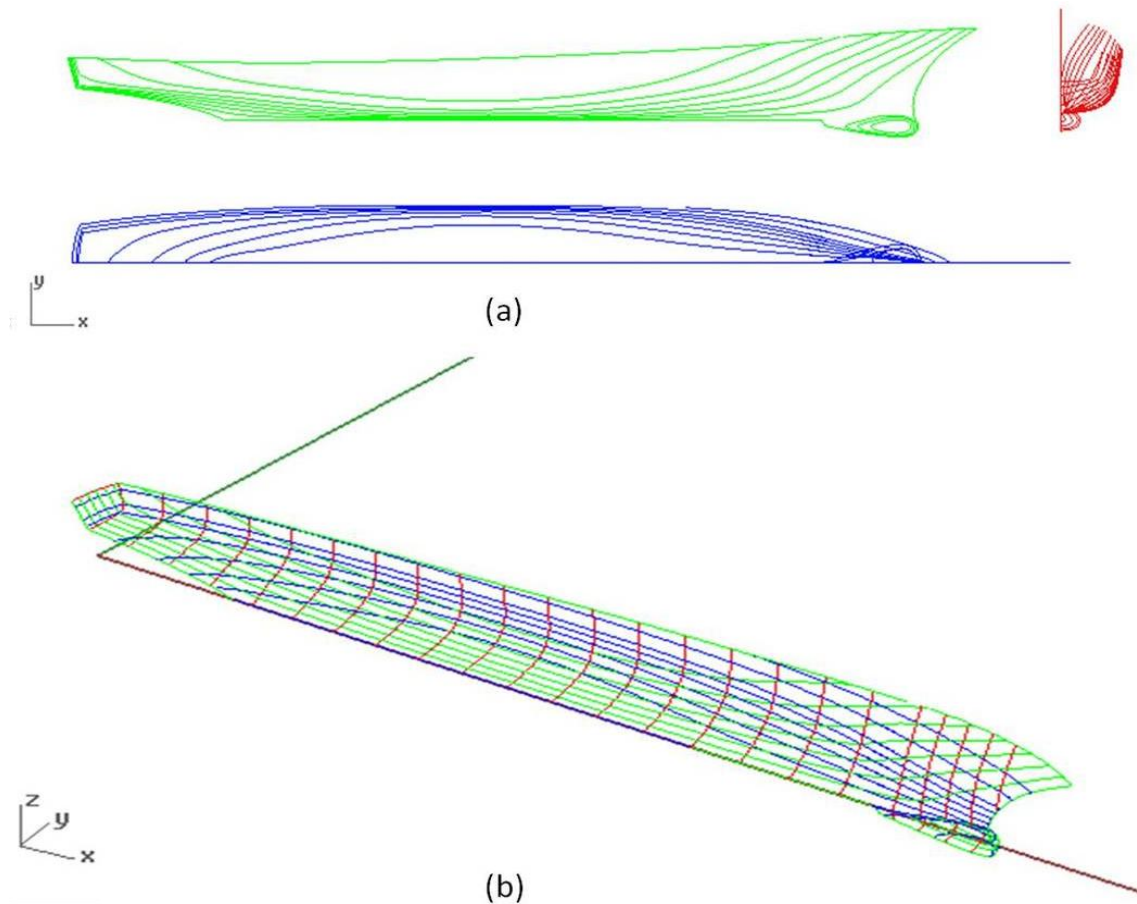


Figura 8.7.- (a) Cuadernas, longitudinales y líneas de agua dibujadas en un mismo plano. (b) Cuadernas, longitudinales y líneas de agua colocadas en tres dimensiones.

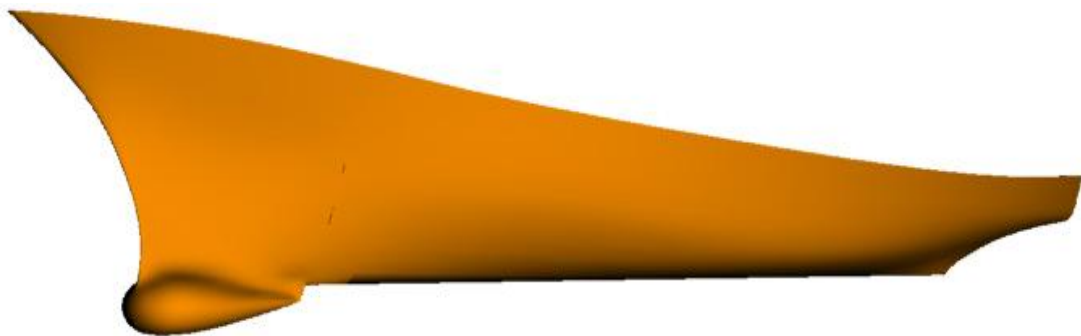


Figura 8.8. - Superficie del modelo 5415 en tres dimensiones.

8.2 RESULTADOS DEL CÁLCULO DE LA RESISTENCIA POR FRICCIÓN

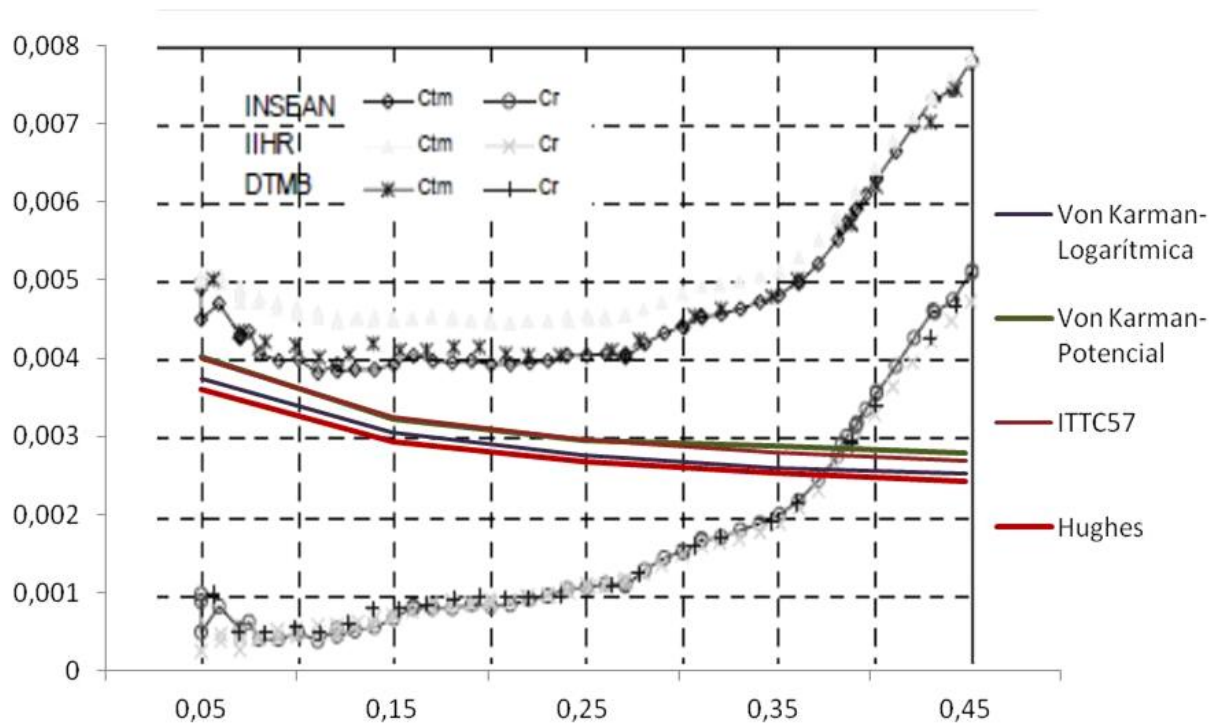
8.2.1 RESULTADOS PARA EL MODELO

Se muestran en la Tabla 8.5 y en la Gráfica 8.1 los resultados obtenidos por los métodos de cálculo Von Karman-Logarítmica y Von Karman-Potencial junto con los resultados de las

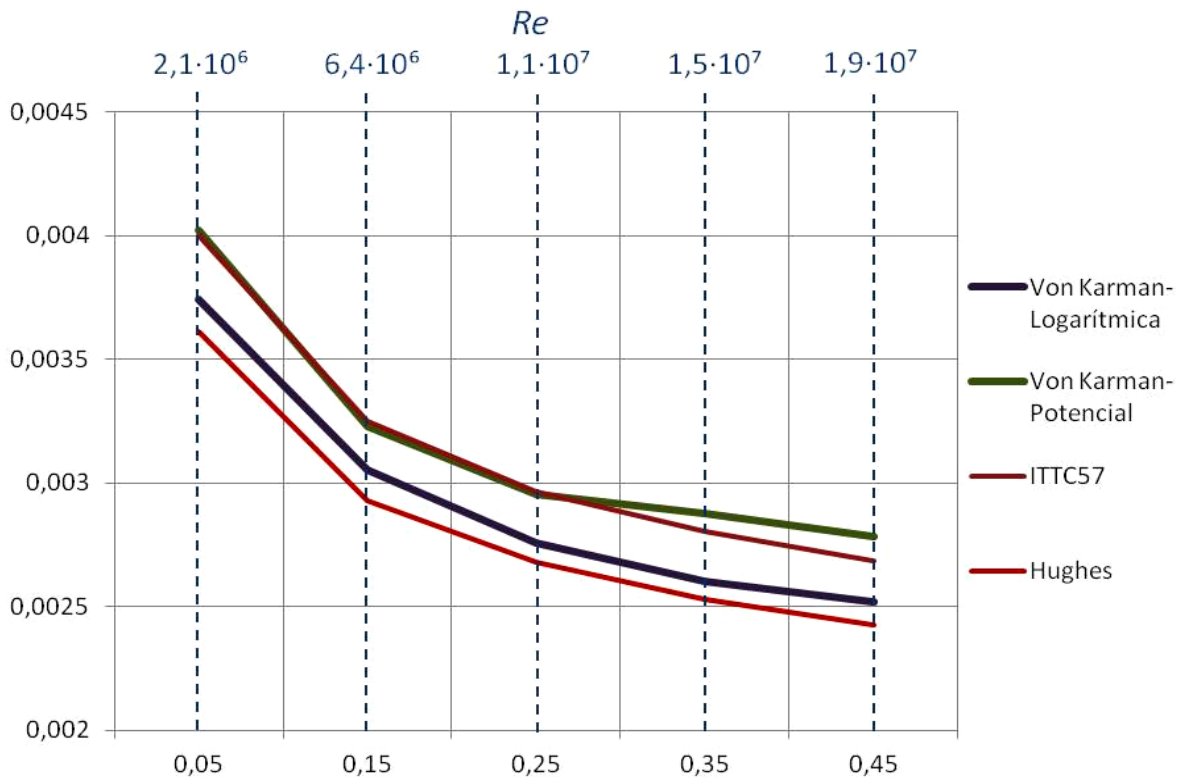
líneas de fricción de Hughes y de la ITTC-57, así como los valores del coeficiente de resistencia total medidos en los ensayos de canal y el coeficiente de la resistencia residuo obtenido al restar el coeficiente de resistencia por fricción de la ITTC-57 a el coeficiente de resistencia total. La Gráfica 8.2 muestra solo las cuatro líneas de fricción junto con los valores del número de Reynolds correspondientes para cada velocidad.

Fn	Von Karman-Logarítmica		Von Karman-Potencial		ITTC-57	Hughes
	D_F (N)	C_F	D_F (N)	C_F	C_F	C_F
0,05	1,259	0,00374	1,351	0,00402	0,00400	0,00361
0,15	9,235	0,00305	9,757	0,00323	0,00325	0,00293
0,25	23,129	0,00276	24,771	0,00295	0,00297	0,00268
0,35	42,824	0,00260	47,352	0,00288	0,00280	0,00253
0,45	68,488	0,00252	75,611	0,00278	0,00269	0,00243

Tabla 8.5.- Valores obtenidos de los métodos Von Karman-Logarítmica y Von Karman-Potencial para distintos números de Froude.



Gráfica 8.1.- Coeficientes de resistencia total, por fricción y residuo vs. Número de Froude.



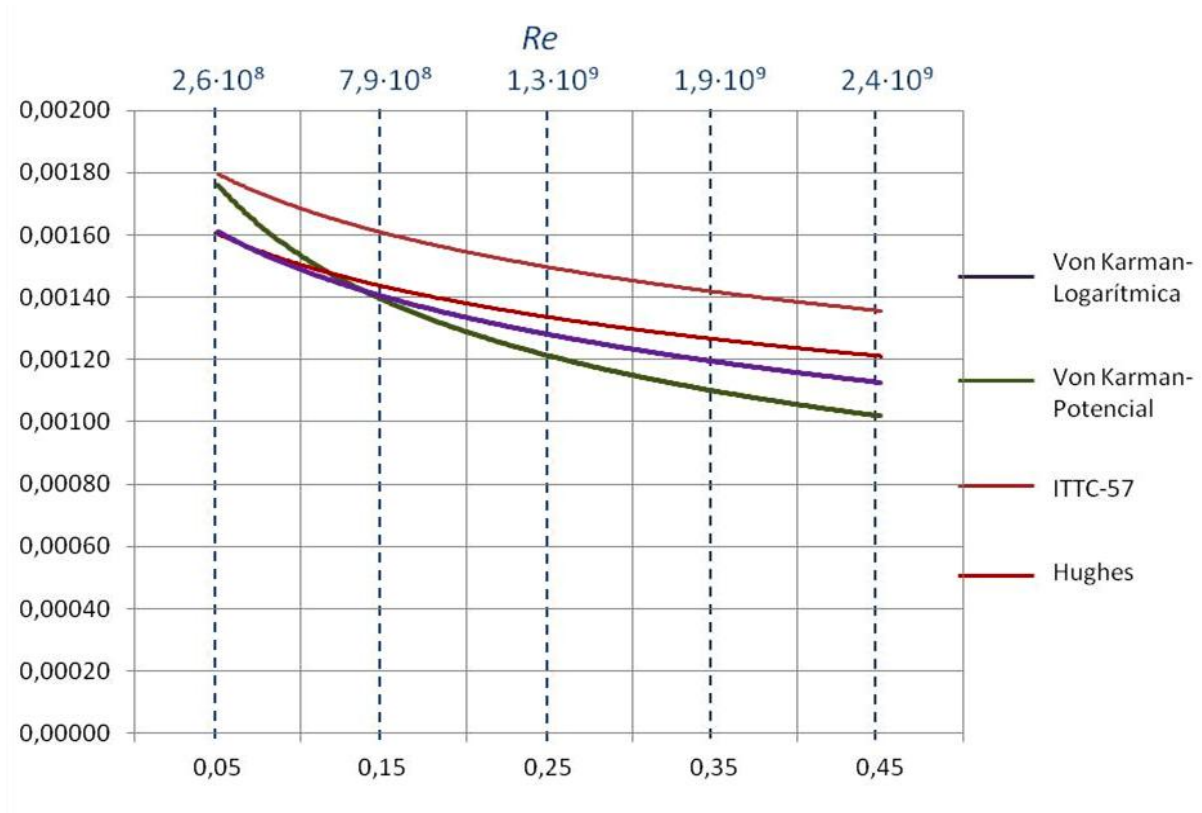
Gráfica 8.2.-Coeficiente de resistencia por fricción vs. número de Froude y número de Reynolds.

8.2.2 RESULTADOS PARA EL BUQUE

Se muestra en la Tabla 8.6 y en la Gráfica 8.3 los resultados obtenidos por los métodos de cálculo Von Karman-Logarítmica y Von Karman-Potencial junto con los resultados de las líneas de fricción de Hughes y de la ITTC-57 para distintos números de Froude.

Fn	Von Karman-Logarítmica		Von Karman-Potencial		ITTC-57	Hughes
	D_F (N)	C_F	D_F (N)	C_F	C_F	C_F
0,05	8958	0,00170	9224	0,00180	0,00182	0,00162
0,15	65840	0,00139	62641	0,00136	0,00158	0,00141
0,25	165975	0,00126	153312	0,00119	0,00148	0,00132
0,35	305160	0,00118	277230	0,00110	0,00142	0,00127
0,45	480590	0,00113	432118	0,00104	0,00138	0,00123

Tabla 8.6.- Valores obtenidos de los métodos Von Karman-Logarítmica y Von Karman-Potencial para distintos números de Froude.



Gráfica 8.3.- Coeficiente de resistencia por fricción vs. número de Froude y número de Reynolds.

8.3 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Los métodos en este proyecto desarrollados de Von Karman-Logarítmica y Von Karman-Potencial para capa límite turbulenta, que es el caso de mayor relevancia en ingeniería y en concreto en el sector naval, son puramente líneas de fricción para una placa plana. Lo mismo ocurre con la línea de fricción de Hughes, basada en ensayos de canal de placas. La ITTC-57 se usa en la actualidad para el cálculo de resistencia de los buques y consecuentemente el cálculo de la propulsión, pero como ya se comentó en el Capítulo 7, está basado en la línea de Hughes añadiendo un pequeño porcentaje basado en la acumulada experiencia de los canales y correspondiente a una parte del aumento de la resistencia por no ser el casco del buque una placa plana sino una superficie tridimensional. Consecuentemente, lo más razonable es comparar los resultados de los métodos de Von Karman con la línea de fricción de Hughes.

La Tabla 8.7 muestra las variaciones de los métodos de Von Karman respecto a Hughes y los valores de los números de Reynolds para el caso del modelo, mientras que la Tabla 8.8 muestra lo mismo pero para el caso del buque.

Fn	Re	Hughes C_F	Von Karman-Logarítmica		Von Karman-Potencial	
			C_F	Variación (%)	C_F	Variación (%)
0,05	$2,1 \cdot 10^6$	0,00361	0,00374	3,63	0,00402	11,40
0,15	$6,4 \cdot 10^6$	0,00293	0,00305	4,24	0,00323	10,21
0,25	$1,1 \cdot 10^7$	0,00268	0,00276	2,89	0,00295	10,23
0,35	$1,5 \cdot 10^7$	0,00253	0,00260	2,94	0,00288	13,84
0,45	$1,9 \cdot 10^7$	0,00243	0,00252	3,85	0,00278	14,66

Tabla 8.7.- Variación de los resultados de los métodos de Von Karman respecto a Hughes para el modelo.

Fn	Re	Hughes C_F	Von Karman-Logarítmica		Von Karman-Potencial	
			C_F	Variación (%)	C_F	Variación (%)
0,05	$2,6 \cdot 10^8$	0,00162	0,00162	0,00	0,00180	10,60
0,15	$7,9 \cdot 10^8$	0,00141	0,00139	-1,22	0,00136	-3,69
0,25	$1,3 \cdot 10^9$	0,00132	0,00128	-3,17	0,00119	-9,60
0,35	$1,9 \cdot 10^9$	0,00127	0,00120	-5,38	0,00110	-13,14
0,45	$2,4 \cdot 10^9$	0,00123	0,00113	-8,43	0,00104	-15,32

Tabla 8.8.- Variación de los resultados de los métodos de Von Karman respecto a Hughes para el buque.

El método de Von Karman-Logarítmica muestra unos resultados muy similares a Hughes, desviándose en menos de un 4% para el caso del modelo a números de Reynolds de 10^7 y en un máximo de 8,4% para el buque a altos números de Reynolds de orden de 10^9 .

El método de Von Karman-Potencial, de desarrollo matemático más sencillo, muestra unos resultados alrededor de un 10% superiores para números de Reynolds inferiores a 10^7 , desviándose en mayor porcentaje para números de Reynolds más altos.

Por otro lado, se observa que las curvas de los coeficientes de resistencia (Gráfica 8.1), y en concreto las del coeficiente de resistencia por fricción obtenidas por los métodos de Von Karman, son las esperadas. Los coeficientes de fricción disminuyen a medida que aumenta la velocidad o el número de Reynolds, comenzando a dar cierta relevancia a la resistencia por formación de olas, es decir, la fricción va cobrando menos importancia a medida que aumenta el número de Reynolds y la formación de olas va teniendo mayor relevancia a medida que aumenta el número de Froude.

9 CONCLUSIONES

A diferencia del transporte aéreo, por carretera o el ferroviario, el transporte marítimo permite enviar grandes cantidades de mercancía a un coste muy económico. La gran mayoría del transporte internacional se realiza por el mar, empleando gran variedad de buques destinados por su diseño a transportar mercancías específicas (petroleros, portacontenedores, graneleros, gaseros, ...). Estos buques mercantes se desplazan por el agua a bajos números de Froude, donde la componente de la resistencia por formación de olas es mucho menor que la componente de la resistencia por fricción.

Una disminución pequeña de la componente de la resistencia por fricción de los buques implicaría un notable ahorro de consumo y por consiguiente, un mayor beneficio para los armadores, para el sector naval y para los países importadores de crudo, además de un transporte más limpio y ecológico. Existen muchos estudios que tienen como finalidad la disminución de esta componente de la resistencia, la mayoría de ellos basados en ensayos con diferentes pinturas y diferentes rugosidades de la superficie del casco. También hay otros estudios más complejos e ingeniosos, como el diseño de los ACC (Air Cavity Craft) o buques rápidos de cavidad de aire, en los cuales se inyecta aire en una parte del fondo del casco reduciendo la resistencia hasta en un 30%. Se puede decir que existe una búsqueda constante de la optimización de la componente de resistencia por fricción en los buques.

En este proyecto se ha realizado un estudio del fenómeno físico causante de la resistencia por fricción, la Capa Límite. A partir del análisis integral de la capa límite, realizado por Von Karman por primera vez, se han desarrollado varios métodos de cálculo: usando un perfil de velocidades cuadrático y un perfil cúbico para la capa límite laminar, y empleando una ley logarítmica y una ley potencial para el caso de capa límite turbulenta. La mayoría de los procesos en ingeniería tienen la configuración de capa límite en régimen turbulento y la capa límite en los buques no es una excepción. En la zona de proa de los buques la capa límite empieza en régimen laminar pero enseguida se vuelve turbulento, tanto es así, que este tramo se suele despreciar realizando los cálculos como si desde el inicio la capa límite fuese turbulenta.

El método desarrollado para capa límite turbulenta de Von Karman usando la ley logarítmica ha dado buenos resultados, variando un máximo de un 8% respecto a la línea de fricción de Hughes (utilizada por la ITTC en su línea de la ITTC-57) para números de Reynolds muy

altos (del orden de 10^9). Para números de Reynolds más bajos los resultados han sido muy parecidos no variando más de un 4%.

El método desarrollado para capa límite turbulenta de Von Karman usando la ley potencial ha demostrado un comportamiento aceptable hasta números de Reynolds de 10^8 , a bajos números de Reynolds la desviación frente a la línea de Hughes es de aproximadamente un 12%. Debido a su sencillez, se podría utilizar en aplicaciones con bajos números de Reynolds y donde no se requiera mucha precisión.

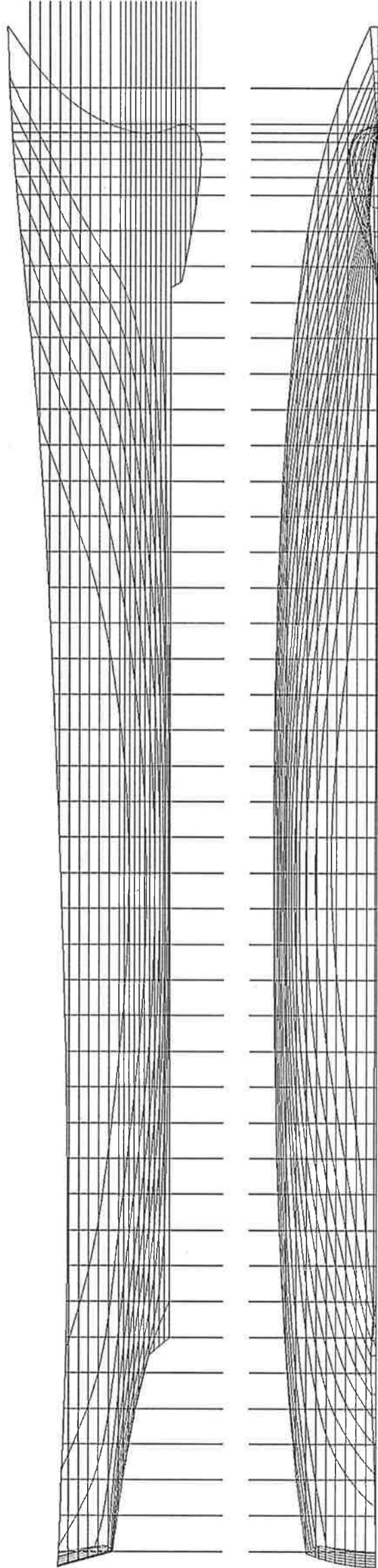
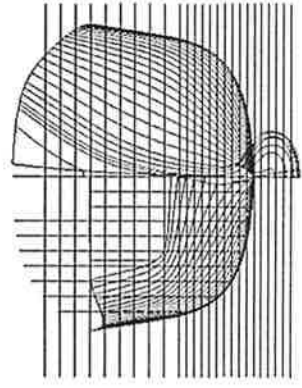
Se ha logrado el objetivo de obtener una línea de fricción para placa plana, que no aparece en la biografía científica consultada, a partir de usar una ley logarítmica en la ecuación integral de Von Karman. Además, los resultados obtenidos por esta línea de fricción han sido más fiables, también a números de Reynolds altos, que los resultados que ofrece la línea de fricción expuesta en los libros de Mecánica de Fluidos y obtenida por el método Von Karman-Potencial.

Sería interesante realizar ensayos de canal de placas planas o tener acceso a ensayos fiables ya realizados donde poder comparar los resultados obtenidos por el método de Von Karman-Logarítmica.

10 BIBLIOGRAFÍA

- 1 Merle C. Potter y David C. Wiggert, *Mecánica de Fluidos*.
- 2 Frank M. White, *Mecánica de Fluidos*.
- 3 Manuel M. Sánchez Nieto, *Mecánica de Fluidos General*.
- 4 H. Schlichting/K. Gersten , *Boundary Layer Theory*. Nueva York, 1979.
- 5 McGraw-Hill, *Viscous Fluid Flow*. Nueva York, 1991.
- 6 Lars Larsson /Rolf E Eliasson, *Principles of Yacht Design*. 1994.
- 7 National Advisor Commitee for Aeronautics, *Motion of Fluids with very Little viscosity*. From “*Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik*” L. Prandtl , Göttingen, 1927.
- 8 Maxim Candries, *Drag, boundary-layer and roughness characteristics of marine surfaces coated with antifoulings*, Tesis, 2001.
- 9 ITTC, *Final Report and Recommendations to the 26th ITTC*. 2011.
- 10 Dormand J. Prince P. *A family of embedded Runge-Kutta formulae*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1980.
- 11 L. Larsson, E. Baba, *Ship Resitance and Flow Computation*. 1996.
- 12 <http://www.mathworks.es/products/matlab/>
- 13 <http://www.iihr.uiowa.edu/>

ANEXO I: PLANO DE FORMAS



Model 5415

SF 4:20